



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**REYNALDO D'ALESSANDRO NETO**

**ESTUDO DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DO  
CALOR UNIDIMENSIONAL E BIDIMENSIONAL**

Sorocaba  
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**ESTUDO DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DO  
CALOR UNIDIMENSIONAL E BIDIMENSIONAL**

**Reynaldo D'Alessandro Neto**

**Orientador: Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela**

**Sorocaba  
2016**

D'Alessandro Neto, Reynaldo

Estudo das Soluções Analíticas da Equação do Calor Unidimensional e Bidimensional / Reynaldo D'Alessandro Neto. -- 2016.  
72 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: Antonio Luís Venezuela

Banca examinadora: Luiza Amália Pinto Cantão, Wladimir Seixas

Bibliografia

1. EDP. 2. Equação do Calor. 3. Técnica da Transformada Integral Clássica. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

**ESTUDO DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DO  
CALOR UNIDIMENSIONAL E BIDIMENSIONAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre sob orientação do Professor Doutor Antonio Luís Venezuela.

**Sorocaba  
2016**



---

**Folha de Aprovação**

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Reynaldo D'Alessandro Neto, realizada em 25/05/2016:

---

Prof. Dr. Antonio Luis Venezuela  
UFSCar

---

Profa. Dra. Luiza Amalia Pinto Cantão  
UNESP

---

Prof. Dr. Wladimir Seixas  
UFSCar

Para Jesus Cristo

# Agradecimentos

Ao meu orientador e amigo, Prof. Antonio Luís Venezuela, pela dedicação e esforço em me auxiliar no desenvolvimento desse trabalho, mostrando-se disposto e presente desde os estudos visando o exame de qualificação.

Aos meus pais, Reynaldo José D'Alessandro e Maria Teresa Aparecida Alves D'Alessandro, que me apoiam e ajudam em todos os momentos da minha vida, sempre acreditaram em mim, e por isso devo o meu agradecimento eterno.

A minha noiva e colega de classe, Mariana Capelin Fabricio, que além de estar ao meu lado em todo mestrado, me apoia constantemente, nos momentos felizes e difíceis dessa caminhada.

A todos os meus colegas do Profmat, que mostraram união desde o início do curso, com grupos de estudo que auxiliaram muito nas disciplinas e provas.

Aos professores do Profmat - UFSCar (Câmpus - Sorocaba), pela dedicação e empenho nas disciplinas do programa.

A vida é boa por duas coisas: Descobrir matemática e ensinar matemática  
**Siméon-Denis Poisson (1781-1840)**



# Resumo

As propriedades térmicas dos materiais são de grande importância para os projetos mecânicos, principalmente os que envolvem sistemas térmicos. A simulação e determinação do campo da temperatura pelo modelo matemático conhecido como equação do calor, auxilia na representação do comportamento térmico, isto é, nos fornece informações prévias de como a temperatura varia com a posição e o tempo em um sólido, e assim, poder caracterizar o material térmicamente e saber as condições apropriadas a se impor ao objeto em estudo. Esta dissertação de mestrado estuda técnicas de solução analítica da equação do calor uni e bidimensional. Modela-se os fenômenos de transferência de calor a partir de procedimentos matemáticos realizados com a Lei de Resfriamento de Fourier. Após a modelagem, foi construído uma sequência de pré-requisitos que engloba a definição de uma Equação Diferencial Parcial (EDP) e alguns métodos que darão o embasamento necessário para o desenvolvimento da técnica desejada. Por fim, faz-se a análise dos modelos encontrados a partir da utilização de gráficos e tabelas de convergência.

**Palavras-chave:** EDP. Equação do Calor. Técnica da Transformada Integral Clássica. Separação de Variáveis.

# Abstract

The Thermal properties of materials are of great importance for mechanical projects, especially those involving thermal systems. The simulation and determining the mathematical model for the temperature field known as heat equation, assists in the representation of the thermal behavior, that is , it gives us prior information on how the temperature varies with the position and time in a solid, and so power thermally characterize the material and know the appropriate conditions to impose on the object under study. This master thesis studies techniques of analytical solution of the equation of one- and two-dimensional heat. Models to the phenomena of heat transfer from the mathematical procedures performed with Fourier cooling law , after modeling, a sequence was built pre requirements which includes the definition of a Partial Differential Equation (PDE) and some methods that give the necessary basis for the development of the desired technique. Finally, makes the analysis of the models found from the use of graphics and convergence tables .

**Keywords:** PDE. Heat Equation. Techniques of Classical Integral Transform. Separation of Variables.

# Lista de Símbolos

Símbolo	Quantidade Física Escalar	Unidades
$A$	Área da parede que separa as placas/Área da secção transversal	$m$
$C$	Capacidade Térmica	$J/K$
$d$	Distância das Placas	$m$
$E$	Energia	$J$
$\alpha$	Constante de Difusividade Térmica	$m^2/s$
$L_x$	Comprimento da Barra/Placa na Coordenada $x$	$m$
$L_y$	Comprimento da Placa na Coordenada $y$	$m$
$m$	Massa	$kg$
$Q$	Quantidade de Calor	$W$
$t$	Tempo	$s$
$T_1$	Temperatura da Placa $P_1$	$^{\circ}C$
$T_2$	Temperatura da Placa $P_2$	$^{\circ}C$
$f(x)$	Temperatura Inicial da Barra	$^{\circ}C$
$f(x, y)$	Temperatura Inicial da Placa	$^{\circ}C$
$\tilde{T}$	Temperatura Final	$^{\circ}C$
$W$	Trabalho	$J$
<b>Símbolos Gregos</b>		
$\gamma$	Quantidade de Calor	$cal$
$\lambda_n$	Autovalores	
$\mathcal{L}$	Transformada de Laplace	
$\rho$	Densidade	$kg/m^3$
$\Psi_n$	Autofunções Associadas aos $\lambda_n$	
$\tilde{\Psi}_n$	Autofunções Normalizadas	

# Lista de Figuras

1	Superfície de Controle - Fluxo de Calor . . . . .	21
2	Perfil de Temperatura Unidimensional - Variação de $t$ . . . . .	62
3	Perfil de Temperatura Unidimensional - Variação $x$ . . . . .	62
4	Perfil de Temperatura Unidimensional . . . . .	63
5	Perfil de Temperatura Bidimensional - Variação de $t$ . . . . .	66
6	Perfil de Temperatura Bidimensional- Variação de $x$ . . . . .	66
7	Perfil de Temperatura Bidimensional- Variação de $y$ . . . . .	67
8	Perfil de Temperatura Bidimensional . . . . .	68

# Lista de Tabelas

1	Constante de Difusividade de Materiais . . . . .	27
2	Tabela das principais Transformadas de Laplace . . . . .	40
3	Tabela de Convergência Unidimensional - Variação de $t$ . . . . .	60
4	Tabela de Convergência Unidimensional - Variação de $x$ . . . . .	61
5	Tabela de Convergência Bidimensional - Variação de $t$ . . . . .	64
6	Tabela de Convergência Bidimensional - Variação de $x$ . . . . .	65

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>15</b>
1.1	Motivações e Objetivos . . . . .	15
1.2	Revisão Bibliográfica . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Modelagem da Equação do Calor via Lei de Resfriamento de Fourier</b>	<b>20</b>
2.1	Lei de Fourier . . . . .	20
2.2	Fluxo de Calor . . . . .	21
2.3	Equação do Calor . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Resolução de Equações Diferenciais Parciais</b>	<b>28</b>
3.1	Equação Diferencial Parcial . . . . .	28
3.2	Resolução analítica de EDPs . . . . .	31
3.2.1	Método da Separação de Variáveis . . . . .	31
3.2.2	Resolução via Transformada de Laplace . . . . .	38
3.2.3	Técnica da Transformada Integral Clássica - TTIC . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Resolução da Equação Diferencial Parcial do Calor Unidimensional e Bidimensional</b>	<b>45</b>
4.1	Equação Unidimensional do Calor . . . . .	45
4.1.1	Resolução via TTIC . . . . .	46
4.2	Equação Bidimensional do Calor . . . . .	52
4.2.1	Resolução via Separação de Variáveis . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Análise dos Resultados</b>	<b>59</b>
5.1	Equação do Calor Unidimensional – Solução via TTIC . . . . .	59
5.2	Equação do Calor Bidimensional – Solução via Separação Variáveis	63
	<b>Conclusão</b>	<b>69</b>

# 1 | Introdução

## 1.1 Motivações e Objetivos

Com o avanço tecnológico, os estudos que envolvem a transferência de calor ganham um grande destaque, já que a maioria dos processos industriais e de projetos de usinas nucleares e térmicas utilizam equipamentos de troca de calor como geradores de vapor, fornos, motores de calor, condensadores e outros. O mesmo acontece na área de produção de energia, que atualmente é de grande relevância e está em processo de expansão com projetos no controle do meio ambiente.

Existem outros processos que estão presentes em nosso dia-a-dia, como os conversores catalíticos presentes nos motores de combustão interna dos automóveis, as unidades de refrigeração e ar-condicionado, os equipamentos eletrônicos, a refrigeração de motores elétricos, os transformadores e geradores elétricos, aquecimento e refrigeração de processos químicos, a minimização de perdas de calor em construções e aprimoramento de técnicas de isolamento térmico.

Com essa vasta gama de aplicações, vemos que os problemas relativos a transferência de calor aparecem como enormes desafios a se resolver. Assim, matemáticos, físicos e engenheiros estão constantemente confrontando com a necessidade de se maximizar e/ou minimizar taxas de transferência de calor.

Segundo Incropera e Dewitt (1990) a transferência de calor ocorre por condução, convecção e radiação, mas na maioria das vezes, por combinação das mesmas.

A maioria dos problemas que envolvem a transferência de calor são tratados a partir de Equações Diferenciais Parciais (EDP), e com isso, a procura por soluções exatas aumentou significativamente. A maioria dessas equações são de grande dificuldade de resolução e precisam ser resolvidas em um curto espaço de tempo. Para isso, as técnicas numéricas estão se sobressaindo em relação as técnicas experimentais e analíticas, pois acelera o processo de resolução e ganham no fator tempo, e no financeiro, já que a cada novo experimento gastos adicionais aparecem.

O problema dos métodos puramente numéricos é a demora do processamento, elevando os custos computacionais, pois para se ter uma ótima precisão é necessário uma malha com um número maior de pontos, o que acaba inviabilizando as soluções.

Nesse contexto, esta dissertação procura mostrar uma técnica analítica, que abrange a utilização de procedimentos matemáticos para a resolução e conceitos físicos para a modelagem do problema em questão. Com isso, temos uma avaliação com maior precisão das propriedades térmicas dos materiais que se trabalha. Dessa forma, o resultado analítico de Equações Diferenciais Parciais, fornece melhor subsídio para análises térmicas de materiais em problemas de condução de calor.

O objetivo geral dessa dissertação é resolver a EDP que modela os processos de transporte de calor uni e bidimensional em geometria retangular por meio da técnica da transformada integral clássica e separação de variáveis, respectivamente.

Para atingir o objetivo proposto, o trabalho foi estruturado da seguinte forma:

O primeiro capítulo tem como proposta a modelagem da Equação do Calor nas coordenadas retangulares nas versões uni e bidimensionais, a partir da conhecida Lei de Fourier.

O segundo capítulo tem como objetivo o estudo das Equações Diferenciais Parciais e as diferentes técnicas de resolução, por meio da transformada de



Laplace, separação de variáveis e a técnica da transformada integral clássica.

No terceiro capítulo será apresentada a Técnica da Transformada Integral Clássica (TTIC), e por meio dela a resolução da Equação do Calor Unidimensional. A resolução da Equação do Calor Bidimensional será realizada por meio da técnica Separação de Variáveis.

A validação será feita a partir de resultados conhecidos da literatura. O quarto capítulo é destinado a análise dos resultados, para isso será construído, a partir das soluções obtidas no capítulo anterior.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Essa seção procura fazer um levantamento bibliográfico dos autores que estudaram e desenvolveram obras que tenham como foco técnicas analíticas, numéricas de resolução de problemas de condução e a descrição da condução de calor em materiais.

Douglas Jr e Rachford Jr (1956) utilizaram o chamado método das diferenças finitas aplicado aos problemas de condução de calor transiente para duas e três dimensões. Frankel, Vick e Özisik (1986), apresentaram uma formulação geral para a condução hiperbólica unidimensional quando for submetido a um fluxo de calor em meio composto e também nos apresentou a solução para sistemas tridimensionais de coordenadas ortogonais, nesse caso a técnica da transformada integral generalizada foi utilizada para se obter a solução.

Antaki (1996) aplicou a transformada de Laplace para se obter a solução para o problema da condução de calor hiperbólica em placas semi-infinitas em correntes convectivas. Mikhailov e Özisik (1984) utilizaram o software Mathematica para resolver a equação de calor hiperbólica, apresentando defasagem de fase e amplitude de oscilações de temperatura.

Abdel-Hamid (1999) fez a modelagem da condução de calor caracterizada como de não Fourier, em um meio finito, submetido ao um fluxo de calor periódico, assim ele obteve uma solução analítica com a utilização da técnica

da transformada integral finita.

Monte (1999) analisou a resposta transiente unidimensional de um condutor composto de multicamadas em variações bruscas de temperatura. A solução foi obtida a partir do método da separação de variáveis para a equação diferencial do calor. Regis, Cotta e Tan (2000) descreveram a condução de calor transiente em barras de combustível nuclear por um método de parâmetro agrupado melhorado, com isso o autor alcançou melhorias significativas na formulação clássica de parâmetros concentrados.

Sadat (2004) fez a análise de problemas de condução de calor unidimensional e transiente utilizando o chamado método de perturbação, com isso ele mostrou que modelos de primeira ordem para o centro, superfície e temperatura média podem ser desenvolvidos na geometria cilíndrica, esférica e de placa. Su, Tan e Su (2009) trabalharam na melhoria da representação de parâmetros concentrados de modelos a condução de calor transiente em uma placa, com a condutividade térmica não sendo tratada com constante, com isso ela dependeria da temperatura. O autor comparou os seus resultados com um modelo de ordem superior.

Cossali (2008) mostrou soluções analíticas para um cilindro homogêneo desenvolvidas através da transformada de Fourier para condução de calor periódica fornecendo um campo de temperatura flutuante.

Para se obter a solução analítica da condução de calor transiente em esferas expostas em um ambiente onde a temperatura é uniforme, Ostrogorsky (2008) utilizou a transformada de Laplace. Cole (2009) utilizou uma abordagem na geometrias cilíndricas submetidas a um aquecimento permanente, comparando com dados coletados de propriedades térmicas, todos os cinco tipos de condições de contorno foram tratados em geometrias de uma, duas e três dimensões. Monteiro et al. (2009) fizeram uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) para analisar a equação de condução do calor hiperbólica em uma placa finita. Com isso, foi conduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem transiente. O resultado nu-

mérico foi obtido pelo conhecido método de Gear. Como forma de validação o autor utilizou a comparação com resultados encontrados na literatura e com os produzidos a partir da utilização do método da transformada de Laplace e o método de Gear em corpos com volumes finitos.

Beheera (2009) obteve várias soluções para problemas de condução de calor unidimensional transiente. Para obtê-las, o autor adotou um modelo de parâmetros acoplados para verificar a variação do campo de temperatura para uma geometria cilíndrica e placas. Teixeira, Rincon e Liu (2009) estudaram o comportamento dos metais, para isso, eles consideraram a dependência de temperatura não linear negligenciando o acoplamento térmico e mecânico de deformação. No estudo foi apresentado uma formulação para o problema da condução de calor e uma estimativa de erro utilizando o método dos elementos finitos.

## 2 | Modelagem da Equação do Calor via Lei de Resfriamento de Fourier

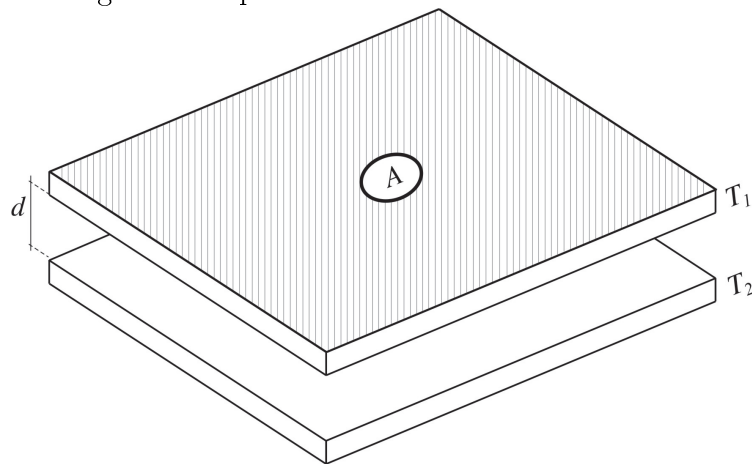
O objetivo desse capítulo é a modelagem da equação do calor a partir da Lei de Fourier. Para isso, utilizamos as definições da física deste problema e a teoria do Cálculo Diferencial e Integral.

### 2.1 Lei de Fourier

A lei física que servirá como base para o nosso estudo da equação do calor é a Lei de Fourier. Incropera e Dewitt (1990) explicam que esse modelo relaciona a temperatura com o movimento das partículas em um condutor de calor. E com o recebimento de calor, as moléculas vibram mais intensamente e assim a energia é passada para outra partícula, com isso temos a propagação de calor.

A Lei de Fourier, que rege esse processo de transmissão de calor, foi determinada experimentalmente pelo matemático francês Jean-Baptiste Fourier (1768-1830). Essa lei nos diz que se duas placas  $P_1$  e  $P_2$  são mantidas a temperatura constante, dispostas paralelamente e separadas por uma parede a uma distância  $d$  uma da outra, assim como na Figura 1:

Figura 1: Superfície de Controle - Fluxo de Calor



Fonte: Elaborado pelo autor

Haverá passagem de calor da placa mais quente para a mais fria, e a quantidade de calor, por unidade de tempo transferida de uma para outra é dada pela seguinte relação:

$$Q = \frac{\tilde{K} A (T_2 - T_1)}{d} \quad (2.1)$$

Segundo Incropera e Dewitt (1990) o processo acima se aplica tanto a transmissão de calor quando as placas estão separadas a uma distância uma da outra, quanto para materiais em que a diferença de temperatura aparece nas suas extremidades. Nesses casos, consideramos a distância  $d$  como a espessura, se a diferença de temperatura é observada nas extremidades do material, ou a distância dos pontos em que a diferença de temperatura ocorre,  $A$  como a área da seção transversal do material e  $T_2$ ,  $T_1$  as temperaturas das suas extremidades, onde  $\tilde{K}$  representa a Condutividade Térmica, nas unidades  $W/mK$ .

## 2.2 Fluxo de Calor

Para se definir a grandeza fluxo de calor, Incropera e Dewitt (1990) explica que devemos inicialmente representar por  $u(x, t)$  a temperatura de um ponto da abscissa  $x$  em metros, no tempo  $t$  em segundos, e observamos também

que a temperatura independe das coordenadas  $y$  e  $z$ . Com isso encontraremos o fluxo de calor em uma barra de um material condutor, considerando apenas uma dimensão nos cálculos.

Tomamos então, duas secções da barra localizada em  $x$  e em  $x + d$ , representando uma medição da temperatura em um outro ponto da barra diferente do ponto  $x$  inicial. Ao se aplicar a lei de Fourier, nos deparamos com um problema: As temperaturas dessas secções variam com o tempo, de forma que não são constantes como requer a lei. Para resolvermos esse problema, definimos o fluxo de calor, da seguinte maneira: fixamos o tempo  $t$ , temos  $T_1 = u(x, t)$  e  $T_2 = u(x + d, t)$ . Por fim, aplicamos o limite com  $d$  tendendo a zero, como se segue:

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{KA(T_2 - T_1)}{d} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{KA(u(x + d, t) - u(x, t))}{d} \\ &= KA \cdot \lim_{d \rightarrow 0} \frac{u(x + d, t) - u(x, t)}{d} = KA \partial_x u(x, t) \end{aligned}$$

Segundo Incropera e Dewitt (1990), definimos o fluxo de calor na direção positiva do eixo  $x$  como uma função diferenciável  $q$  dada por:

$$q(x, t) = -KA \partial_x u(x, t)$$

O sinal negativo na equação acima é justificado por Boyce e Diprima (2012) pelo seguinte argumento: Se a temperatura crescer com  $x$ ,  $\partial_x u(x, t)$  será positivo, mas como o calor flui para a esquerda,  $q(x, t)$  deverá ser negativo.

Por outro lado, se  $u$  decrescesse com  $x$ ,  $\partial_x u(x, t)$  será negativo, mas como o calor flui para a direita,  $q(x, t)$  deve ser positivo. A justificativa se dá pelo fato de se ter que satisfazer a convenção de sinais dos fluxos de calor da primeira lei da termodinâmica, que na sua formulação traz a seguinte convenção de sinal: O calor recebido e o trabalho exercido pelo sistema são positivos; por sua vez, o calor rejeitado e o trabalho recebido pelo sistema são negativos. Segundo Reynolds e Perkis (1977) entendemos por trabalho qual-

quer transformação cujo efeito final possa ser representado pela elevação de um peso.

## 2.3 Equação do Calor

Para obtermos a equação do calor utilizamos algumas conhecidas relações da física. Inicialmente fazemos uso da equação de transporte de energia térmica que de acordo com Incropera e Dewitt (1990) é obtida a partir da primeira lei da termodinâmica e pode ser definida como:

$$\frac{dE}{dT} = Q - W \quad (2.2)$$

Estabelecendo a variação de energia  $E$  para um sistema é igual a subtração dos fluxos de calor,  $Q$ , e trabalho,  $W$ , que cruzam a fronteira do sistema.

Dada uma barra com comprimento  $L$  e um ponto  $x_0$  tal que  $0 < x_0 < L$ , fixamos  $x_0$  e  $x_0 + \delta$ , sendo  $\delta$  muito menor que a unidade. Vemos a quantidade de calor  $\gamma$  que entra no sistema, no período de tempo compreendido entre  $t_0$  e  $t_0 + \tau$ , sendo  $\tau$  é muito menor que a unidade, com intervalos tomados tanto para o ponto da barra quanto para o tempo. Assim, usamos o fluxo de calor  $q(x, t)$ , e a equação de transporte de energia térmica, e definimos a quantidade de calor/energia térmica, pela expressão:

$$\gamma = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} q(x_0 + \delta, t) dt \quad (2.3)$$

Desenvolvendo a equação acima, temos:

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_{t_0}^{t_0 + \tau} q(x_0, t) - q(x_0 + \delta, t) dt \Rightarrow \\ \gamma &= \int_{t_0}^{t_0 + \tau} -KA(\partial_x u(x_0, t)) - [-KA(\partial_x u(x_0 + \delta, t))] dt \end{aligned}$$

Então:

$$\gamma = \int_{t_0}^{t_0+\tau} KA.[(\partial_x u(x_0 + \delta, t)) - (\partial_x u(x_0, t))]dt \quad (2.4)$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\partial_x u(x_0 + \delta, t) - (\partial_x u(x_0, t)) = \int_{x_0}^{x_0+\tau} \partial_x^2 u(x, t)dx \quad (2.5)$$

E assim:

$$\gamma = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\tau} K \partial_x^2 u(x, t) dx A dt \quad (2.6)$$

Segundo Incropera e Dewitt (1990) a quantidade de calor necessária para aumentar a temperatura de uma massa varia de acordo com a substância, pela relação dessa quantidade de calor  $\Delta\gamma$ , fornecida a um corpo, e o correspondente acréscimo da temperatura  $\Delta T$ :

$$C = \frac{\Delta\gamma}{\Delta T}$$

A capacidade térmica de um corpo por unidade de massa  $m$  é definida por Incropera e Dewitt (1990) como numericamente igual a quantidade de calor para elevar a temperatura em um grau. Por isso, pode ser chamada de calor específico de uma substância, denotado pela letra  $c$ :

$$c = \frac{\Delta\gamma}{\Delta T} = \frac{\Delta\gamma}{m\Delta T}$$

Ainda por Incropera e Dewitt (1990) vemos que por definição, tanto a capacidade térmica como o calor específico dependem do intervalo de tem-



peratura. Por isso, temos que o calor específico de uma substância dada a temperatura:

$$c = \frac{\Delta\gamma}{m\Delta T}$$

A quantidade de calor para aumentar a temperatura de um  $T_1$  para um  $T_2$ , será a seguinte integral:

$$\gamma = m \int_{T_1}^{T_2} c dT$$

Segundo Incropera e Dewitt (1990), temos a seguinte relação advinda da mecânica dos fluidos:

$$m = \int_{x_0}^{x_1} \rho A dx$$

A partir da relação acima, temos que a massa é calculada utilizando-se a integral da densidade,  $\rho$ , vezes a área variando no intervalo  $[x_0, x_0 + \tau]$ . Podemos deduzir que a quantidade de calor  $\gamma$  em um intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$  pode ser escrita como:

$$\gamma = \int_{x_0}^{x_0+\tau} \int_{t_1}^{t_2} c \rho \partial_t u(x, t) A dT dx$$

Portanto, a quantidade de calor, pode ser reescrita como:

$$\gamma = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\tau} c \partial_t u(x, t) \rho A dx dt \quad (2.7)$$

Igualando as expressões acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\tau} K \partial_x^2 u(x, t) dx A dt &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\tau} c \partial_t u(x, t) dx \rho A dt \\ \Rightarrow K \partial_x^2 u(x, t) &= c \rho \partial_t u(x, t) \end{aligned}$$

Como essa última relação é válida para todo  $t > 0$  e todo  $0 < x_0 < L$  e todo  $\tau > 0$  e  $\delta > 0$ , têm-se que:

$$\partial_t u = \alpha \partial_x^2 u \tag{2.8}$$

com:

$$\alpha = \frac{K}{c\rho}$$

Incropera e Dewitt (1990) nos define que  $\alpha$  é a difusividade térmica, que possui as dimensões  $m^2/s$ . A equação  $\partial_t u = \alpha \partial_x^2 u$  é chamada equação do calor, que é definida como a lei de variação da temperatura  $u(x, t)$  numa barra uniforme. A Equação (1.8) possui infinitas soluções, por isso é de grande relevância adicionar informações inerentes de cada problema onde se pretende utilizá-la, isto é, definir condições de fronteira, que serão vistas, a fim de se encontrar a única solução para essa equação nas condições exigidas pelo problema. Na Tabela 1 temos os coeficientes de difusividade de diversos materiais disponíveis:

Tabela 1: Constante de Difusividade de Materiais

Material	$\alpha(10^{-4}\mathbf{m}^2/\mathbf{s})$
Prata	1.71
Cobre	1.14
Alumínio	0.86
Ferro Fundido	0.12
Granito	0.011

Fonte:(Incropera e Dewitt,1990)

A Equação (2.8) envolve a propagação de calor linear. Assim, além do tempo  $t$ , consideramos apenas uma dimensão,  $x$ , nos cálculos. No caso especial de propagação de calor em um meio isotrópico e homogêneo em um espaço tridimensional, Boyce e Diprima (2012) considera as três dimensões,  $x, y, z$  na equação. Assim, ficará com a seguintes estrutura:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Nesta dissertação pretendemos resolver a equação do calor considerando, além do tempo, uma dimensão,  $x$  conhecida como Equação do Calor Unidimensional, e duas dimensões,  $x, y$  conhecida como equação do Calor Bidimensional. Essa última, possui a mesma estrutura da que foi apresentada acima, apenas retirando a variável  $z$ , apresentando da seguinte forma:

$$\text{Unidimensional: } \frac{\partial F}{\partial T} = \alpha \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

$$\text{Bidimensional: } \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.10)$$

Resolvemos nesta dissertação a Equação (2.9) usando TTIC e a Equação (2.10) por separação de variáveis. Com essa modelagem apresentada, no próximo capítulo trataremos o aporte teórico para que se possa resolver a equação do calor para uma e duas dimensões.

# 3 | Resolução de Equações Diferenciais Parciais

Neste capítulo apresentamos a definição de Equação Diferencial Parcial, e as técnicas de resolução analíticas: Separação de Variáveis; TTIC e Transformada de Laplace.

## 3.1 Equação Diferencial Parcial

Uma equação do tipo:

$$F\left(x, y, \dots, u(x, y, \dots), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots\right) = 0$$

é chamada de *Equação Diferencial Parcial* (EDP) que envolve variáveis independentes  $(x, y, z)$  e variáveis dependentes  $u$ . Segundo Iório, a ordem de uma EDP é dada pela ordem de sua maior derivada parcial presente na equação, e para simplificar a escrita, podemos recorrer a mais de uma notação para designar a derivada parcial com relação a  $x$ :

$$\partial_x u = \frac{\partial u}{\partial x}$$

As EDPs também podem ser classificadas em termos da sua linearidade. Assim, uma EDP linear deverá ser linear relativamente à variável dependente e às suas derivadas. No caso de uma EDP linear de segunda ordem, teremos

o caso geral, para duas variáveis:

$$a\partial_{xx}u + b\partial_{xy}u + c\partial_{yy}u + d\partial_xu + e\partial_yu + fu = g$$

onde  $u$  é uma função de  $x, y$  chamada função incógnita, em que  $a, b, c, d, e, f$  são coeficientes que podem ser em função de  $x, y$ , mas não de  $u$ . Segundo Iório (2012) se os coeficientes forem em função de  $x, y$ , a EDP diz-se de coeficientes constantes. Se  $g = 0$ , a EDP é chamada de *homogênea*.

Em Iório (2012) a classificação das EDPs lineares de 2ª ordem podem ocorrer em função do valor do discriminante da EDP. Uma EDP linear é: Hiperbólica se  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ; Elíptica se  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  e Parabólica se  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ .

Dessa forma, Iório (2012) explica um importante princípio que será utilizado na resolução analítica das EDP's. Para isso é necessário utilizar a terminologia operador (ou transformação) que, de acordo com Iório (2012), é usada para enfatizar que a função  $L$  está definida entre espaços de funções, isto é,  $L$  leva uma função  $u$  (com determinadas propriedades) em outra função  $Lu$ . O operador  $L$  é um exemplo de *operador diferencial parcial*.

**Teorema 3.1 (Princípio da Superposição)** *Seja  $L$  um operador diferencial parcial de ordem  $k$  cujos coeficientes estão definidos em um domínio aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Suponha que  $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$  é um conjunto de funções de classe  $C^k$  em  $\Omega$  satisfazendo a EDP linear. Então, se  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$  é uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x)$$

*é convergente e  $k$  vezes diferenciável termo a termo em  $\Omega$ . A demonstração que será descrita abaixo foi retirada de Iório (2012).*

### **Demonstração**

*O enunciado acima é válido para o caso geral, aqui será feito para os*

casos em que  $k = 1$  e  $k = 2$ . Nesses casos, por hipótese, quaisquer que sejam  $x \in \Omega$ ,  $1 \leq i, j \leq n$

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x)$$

$$D_i u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m D_i u_m(x)$$

$$D_j D_i u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m D_j D_i u_m(x)$$

e essas séries convergem. Portanto, para todo  $x \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) D_j D_i u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m D_j D_i u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m D_j u_m(x) \\ &\quad + c(x) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left[ \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) D_j D_i u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u_m(x) + c(x) u_m(x) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (Lu_m)(x) = 0 \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema acima para os casos em que  $k = 1$  e  $k = 2$ .

Com isso, Iório (2012) comenta que podemos impor condições iniciais a uma EDP, isto é, fixamos valores da solução e de suas derivadas até certa ordem em um determinado ponto. Quando essas condições são impostas sobre o valor da solução e de suas derivadas na fronteira da região (condições de contorno) temos um problema de valor de contorno ou, simplesmente, problema de contorno. Essas condições aparecem de maneira natural na descrição de

fenômenos físicos estacionários, como as condições do tipo:

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x) \quad x \in \partial\Omega$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes dadas,  $f$  uma função dada em  $\partial\Omega$  e  $\frac{\partial u}{\partial n}$  é a derivada de  $u$  na direção  $\partial\Omega$ . No caso de  $\beta = 0$ , a condição é conhecida como *Condição de Dirichlet*; no caso de  $\alpha = 0$ , temos uma *Condição de Neumann*.

## 3.2 Resolução analítica de EDPs

Nessa seção estudaremos algumas técnicas para a obtenção da solução analítica de uma EDP.

### 3.2.1 Método da Separação de Variáveis

De acordo com Iório (2012), no caso geral de uma EDP, cuja variável dependente é  $u(x, y)$ , o método de separação de variáveis baseia-se na possibilidade da dependência de  $u$ , relativamente às variáveis independentes  $x$  e  $y$ , poder ser expressa em termos do produto de duas funções:  $X$  e  $Y$ , definidas por  $X = X(x)$  e  $Y = Y(y)$ , ou seja:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.1)$$

**Exemplo:** Consideramos uma EDP de primeira ordem que envolve duas derivadas parciais:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x + y)u \quad (3.2)$$

Para obtermos a solução geral do problema (3.2), utilizamos o método da separação das variáveis partindo da hipótese de que  $u(x, y)$  pode ser representada pela Equação (3.1) a qual substituímos na Equação (3.2). Temos

que:

$$Y \frac{dX}{dx} + X \frac{dY}{dy} = 2(x + y)XY$$

Dividindo a equação acima por  $XY$  e reorganizando-a, temos:

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dx} - 2x = -\frac{1}{Y} \frac{dY}{dy} + 2y \quad (3.3)$$

Vemos que, o lado esquerdo da Equação (3.3) está em função da variável independente  $x$  e o lado direito em função da variável independente  $y$ . Iório (2012) comenta que a igualdade só poderá ser válida se ambos os lados forem iguais a uma mesma constante independentemente  $x$  e  $y$ . Com relação a Equação (3.3) consideramos a constante de separação,  $k$ , Segue que:

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dx} - 2x = k \quad (3.4)$$

e

$$-\frac{1}{Y} \frac{dY}{dy} + 2y = k \quad (3.5)$$

Reorganizando:

$$\frac{dX}{dx} - X(k + 2x) = 0 \quad (3.6)$$

e

$$\frac{dY}{dy} + Y(k - 2y) = 0 \quad (3.7)$$

A solução geral da equação diferencial ordinária (EDO), dada pela equação (3.6), é obtida pelo método do fator integrante (Boyce e Dprima, 2012);



considerando  $p(x) = k + 2x$  e  $q(x) = 0$ . Assim:

$$X(x) = \frac{c_0}{\mu(x)} = c_0 e^{kx+x^2} \quad (3.8)$$

sendo  $c_0$  a constante de integração.

O método para se resolver a Equação (3.7) é análogo ao anterior, aplicando o mesmo procedimento chegamos a solução:

$$Y(y) = c_1 e^{y^2-ky} \quad (3.9)$$

sendo  $c_1$  a constante de integração.

Substituímos as Equações (3.8) e (3.9) na Equação (3.1), obtemos:

$$u(x, y) = c_0 c_1 e^{x^2+kx+y^2-ky}$$

**Exemplo:** Consideremos a equação de calor unidimensional, descrevendo a variação da temperatura de um corpo, ao longo da direção  $x$ , em função do tempo  $t$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0 \quad (3.10)$$

sendo  $u(x, t)$  representando a temperatura de uma certa barra metálica na posição  $x$  e no instante  $t$  e  $\alpha$  é a condutividade térmica do metal. Se pretendermos obter uma solução particular do problema, Iório (2012) explica que devemos conhecer uma condição inicial sobre  $t$  e duas condições de fronteira sobre  $x$ , chamadas condições de contorno (ou de fronteira). Nesse caso, devemos ser informar apenas duas condições, uma vez que a EDP envolve uma derivada de primeira ordem e uma derivada de segunda ordem sobre cada uma das variáveis independentes, respectivamente.

As condições de fronteira correspondem a forma como a temperatura

se distribui ao longo da barra no instante  $t = 0$ :

$$u(x, 0) = f(x) \tag{3.11}$$

Supomos que a função  $f$  é conhecida. As condições fronteira correspondem normalmente à temperatura da barra em cada extremidade, ou seja, para  $x = 0$  e  $x = 1$ . Supondo, que essas temperaturas são constantes e iguais a zero, temos:

$$u(0, t) = 0 \tag{3.12}$$

e

$$u(1, t) = 0 \tag{3.13}$$

As condições de fronteira acima são chamadas de homogêneas ou de *Dirichlet*. Nesse capítulo, resolveremos a equação do calor unidimensional por separação de variáveis. No próximo capítulo, apresentaremos a solução da mesma utilizando outra técnica e condições de fronteira não homogêneas.

Iniciamos então a aplicação do método de separação de variáveis. Tal como anteriormente feito, vamos procurar representar  $u(x, t)$  como:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \tag{3.14}$$

Substituindo a Equação (3.14) na Equação (3.10), temos:

$$X \frac{dT}{dt} = \alpha T \frac{d^2 X}{dx^2}$$

Com a separação das variáveis podemos obter:

$$\frac{1}{\alpha T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}$$

Da mesma forma que no exemplo anterior, essa igualdade só será válida para qualquer  $t$  e qualquer  $x$  se ambos os lados forem iguais a uma mesma constante. Assim tomamos:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -k^2 \quad (3.15)$$

e

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 \quad (3.16)$$

Daí:

$$\frac{dT}{dt} + \alpha k^2 T = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0 \quad (3.18)$$

A Equação (3.17) é análoga a Equação (3.6) do exemplo anterior. Utilizando o método do fator integrante, obtemos a seguinte solução:

$$T(t) = ce^{-\alpha k^2 t}$$

sendo  $c$  a constante de integração. Consideramos  $c = 1$ , sem perda de generalidade.

A EDO, dada pela Equação (3.18), é linear homogênea de segunda ordem. Sabemos que, a sua solução geral será a combinação linear de duas soluções particulares, conforme o princípio da superposição, nas quais deverão ser do tipo  $e^{rx}$ . O parâmetro  $r$  é obtido a partir das raízes da equação característica  $r^2 + k^2 r = 0$ . Assim:

$$X(x) = A \cos(kx) + B \operatorname{sen}(kx) \quad (3.19)$$

sendo  $A$  e  $B$  constantes reais.

O problema dado pela Equação (3.18) é chamado de *Sturm-Liouville*. Substituindo as condições de fronteira das Equações (3.12) e (3.13) na Equação (3.14), obtemos:

$$X(0)T(t) = 0$$

$$X(1)T(t) = 0$$

Como  $T(t) \neq 0$ , para  $\forall t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ , temos que:

$$X(1) = 0 \tag{3.20}$$

e

$$X(0) = 0 \tag{3.21}$$

Aplicando as Equações (3.20) e (3.21) na Equação (3.19), temos:

Para (i)  $x = 0 \Rightarrow A = 0$  e para (ii)  $x = 1 \Rightarrow B \operatorname{sen}(k) = 0$ . Como  $B \neq 0$ , logo  $\operatorname{sen}(k) = 0$  e com isso:

$$k = n\pi, \forall n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.22}$$

Daí as funções  $X$  e  $T$  são escritas como:

$$X(x) = B \operatorname{sen}(n\pi x) \tag{3.23}$$

$$T(t) = e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \tag{3.24}$$

Substituindo os resultados acima na Equação (3.14), temos que:

$$u(x, t) = B \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-\alpha(n\pi)^2 t}$$

e chamando  $b_n = B$ , temos:

$$u(x, t) = b_n \text{sen}(n\pi x) e^{-\alpha(n\pi)^2 t} \quad (3.25)$$

para  $n = 1, 2, \dots$

Pelo princípio da superposição:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t)$$

Com isso, existem infinitas soluções possíveis. A solução completa do problema é dada pelo somatório de todas as soluções.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha(\frac{n\pi}{L})^2 t} \text{sen}(n\pi x) \quad (3.26)$$

Para determinar os coeficientes  $b_n$  da equação, e assim definirmos a solução particular do problema, devemos aplicar a condição inicial:

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi x) = f(x) \quad (3.27)$$

Iório (2012) nos explica os coeficientes  $b_n$  serão obtidos a partir da expansão da  $f$  na série seno de Fourier para o intervalo dado na condição inicial  $0 < x < 1$ . Assim  $b_n$  será obtido da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi x)$$

Definimos  $X_n(x) = \text{sen}(n\pi x)$

O produto interno para as funções  $g$  e  $h$  é definido por Callioli, Domingues e Costa (1983):

$$\langle g(x), h(x) \rangle = \int_0^1 g(x)h(x)dx \quad (3.28)$$

Tomando  $g(x) = f(x)$  e  $h(x) = X_m(x)$ , temos:

$$\begin{aligned}\langle f(x), X_m(x) \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} b_n X_n(x), X_m(x) \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \langle X_n(x), X_m(x) \rangle\end{aligned}$$

mas:

$$\langle X_n(x), X_m(x) \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ N_m, & m = n \end{cases}$$

com isso:

$$b_n \langle X_n(x), X_m(x) \rangle = b_n \int_0^1 X_n^2(n\pi x) dx = b_n \int_0^1 \text{sen}^2(n\pi x) dx = \frac{1}{2} b_n$$

Logo:

$$\frac{1}{2} b_n = \langle f(x), X_m(x) \rangle \Rightarrow b_n = 2 \int_0^1 f(x) \text{sen}^2(n\pi x) dx$$

Substituindo a Equação acima na Equação (3.25), obtemos:

$$u(x, t) = \sum_0^{\infty} 2 \text{sen}(n\pi x) e^{-\alpha(n\pi)^2 t} \int_0^1 f(x) \text{sen}(n\pi x) dx$$

Portanto a solução do problema está completamente definida.

### 3.2.2 Resolução via Transformada de Laplace

Segundo Spiegel (1965) o método de resolução de EDP's via Transformada de Laplace é feito a partir da transformada aplicada relativamente a uma das variáveis independentes, desde que ela tenha o domínio o intervalo  $[0, +\infty[$ , com isso as derivadas parciais em ordem dessa variável, "desaparecem".

**Definição 3.1 (Transformada de Laplace)** *Seja  $F : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$  uma função.*

*A Transformada de Laplace de  $F(t)$  é definida por Spiegel (1965):*

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (3.29)$$

com  $s \in \mathbb{R}$ .

Uma função  $F$  é uma função de ordem exponencial  $\eta$ , se existem constantes  $m > 0$  e  $\eta$  tais que para todo  $t > N$ :

$$|e^{-\eta t} F(t)| < M$$

quando  $t \rightarrow \infty$ .

Completando a definição, Spiegel (1965) nos garante a existência da Transformada, através do seguinte teorema:

**Teorema 3.2 (Existência da Transformada de Laplace)** *Se  $F$  é uma função seccionalmente contínua num intervalo finito  $0 \leq t \leq N$  e de ordem exponencial  $\eta$ , para  $t > M$ , então existe sua Transformada de Laplace  $f(s)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}, s > \eta$ .*

Com a transformada definida, listamos algumas propriedades de acordo com (Spiegel, 1965, p.4):

**(1) Propriedade da linearidade**

Se  $c_1$  e  $c_2$  são constantes quaisquer, enquanto  $F_1(t)$  e  $F_2(t)$  são funções com transformadas de Laplace  $f_1(s)$  e  $f_2(s)$ , respectivamente:

$$\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

**(2) Propriedade das Derivadas**

Se  $F$  e suas derivadas  $F^n$  possuem uma Transformada de Laplace e as

derivadas  $F^n$  de  $F$  são contínuas até a ordem  $(n - 1)$ , assim:

$$\mathcal{L}\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \dots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0) \quad (3.30)$$

### (3) Transformada Inversa

**Definição 3.2 (Transformada Inversa)** *Se a transformada de Laplace de uma função  $F(t)$  é  $f(s)$ , isto é, se  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(s)$  então  $F(t)$  é chamada de Transformada Inversa de Laplace de  $f(s)$ , e escreve-se simbolicamente  $F(t) = \mathcal{L}^{-1}f(s)$  onde  $\mathcal{L}^{-1}$  é denominado operador da Transformada Inversa de Laplace.*

### (4) Principais Transformadas de Laplace

Abaixo segue Tabela (2) com Transformadas de Laplace das principais funções que serão trabalhadas nesse estudo.

Tabela 2: Tabela das principais Transformadas de Laplace

$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-a}$

Fonte: (Spiegel,1965)

**Exemplo:** Consideramos a EDP abaixo, que será resolvida via Transformada de Laplace:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = t \quad (3.31)$$

com  $t \geq 0$ ,  $-\infty < x < \infty$  e condições de fronteira do problema:

$$u(x, 0) = 0 \quad (3.32)$$

$$u(0, t) = t \quad (3.33)$$



Aplicamos a Transformada de Laplace sobre uma das variáveis independentes, assim como explicado anteriormente. Conforme Spiegel (1965), só é possível aplicar a Transformada de Laplace se o domínio da variável independente estiver definido no intervalo  $[0, +\infty[$ . Com isso excluimos a possibilidade de aplicarmos a transformada sobre  $x$ . Desta forma, aplicamos a transformada sobre  $t$ . A Transformada de Laplace de  $u(x, t)$  será uma função de  $x$ , mas o seu domínio será mudado para o domínio de Laplace  $s$ :

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}u(x, t)dt = \bar{u}(x, s) \quad (3.34)$$

De acordo com a propriedade da transformada da derivada:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right\} = s\bar{u}(x, s) - u(x, 0) \quad (3.35)$$

Por outro lado, como a transformada não é aplicada sobre  $x$ :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right\} = \frac{\partial \bar{u}(x, s)}{\partial x} \quad (3.36)$$

Aplicando a Transformada de Laplace na EDP da Equação (3.31) e usando a propriedade de linearidade, temos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \mathcal{L}\{t\} = 0 \quad (3.37)$$

Logo:

$$s\bar{u}(x, s) - u(x, 0) + \frac{\partial \bar{u}(x, s)}{\partial x} = \frac{1}{s^2} \quad (3.38)$$

Utilizando as condições iniciais do problema que estão nas Equações (3.32) e (3.33), obtemos:

$$s\bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{s^2}$$

Com isso, a derivada parcial e, relação a  $t$  foi eliminada. Obtemos assim, uma EDP com apenas uma derivada em relação a  $x$ , que pode ser resolvida por integração direta:

$$\int \frac{d\bar{u}}{\frac{1}{s^2} - s\bar{u}} = \int dx - f(s) \quad (3.39)$$

A constante de integração que adicionamos  $f(s)$  pode ser função da outra variável independente, integrando obtemos:

$$-\frac{1}{s} \ln \left| \frac{1}{s^2} - s\bar{u} \right| = x + f(s)$$

Explicitamos para  $\bar{u}$ :

$$\bar{u}(x, s) = \frac{1}{s^3} - g(s)e^{-xs} \quad (3.40)$$

Ainda não podemos inverter a transformada, pois não conhecemos  $g(s)$ . Para isso aplicamos a condição de fronteira  $u(0, t) = t$ :

$$u(0, t) = t \Rightarrow \bar{u}(0, s) = \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2} \quad (3.41)$$

Aplicando a Equação (3.41) à Equação (3.40), temos:

$$\bar{u}(0, s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \frac{1}{s^3} - g(s)e^{-sx} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow g(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} \quad (3.42)$$

Logo:

$$\bar{u}(x, s) = \frac{1}{s^3} - \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} \right) e^{-sx} = \frac{1}{s^3} - \frac{e^{-sx}}{s^2} + \frac{e^{-sx}}{s^3}$$

Invertendo a expressão resultante para o domínio  $t^s$ :

$$u(x, t) = \frac{t}{2} - (t-x)H(t-x) + \frac{(t-x)}{2}H(t-x)$$

Sendo  $H(t - x)$ , a função unitária de Heaviside, (Spiegel,1965).

### 3.2.3 Técnica da Transformada Integral Clássica - TTIC

Com o objetivo de criar uma técnica alternativa para se resolver EDPs, Özisik e Murray (1974) propuseram em 1974, uma nova abordagem que eliminava totalmente a necessidade de se separar as variáveis a princípio, assim que ocorrem os princípios básicos da TTIC.

O trabalho de Özisik e Murray (1974) ve por objetivo de se generalizar os formalismos encontrados na Técnica da Transformada Integral Clássica, segundo um tratamento que unificasse os diversos problemas que estão ligados a difusão de calor e massa, distribuídos em sete classes. Ainda na década de 1980, houve a criação de uma série de extensões da técnica para a aplicação em diversos problemas que antigamente eram resolvidos por métodos puramente numéricos como diferenças finitas, elementos e volumes finitos, Scofano Neto, Cotta e Ribeiro (1989). Segundo Cotta (1993) resolvendo-se as EDPs pelo método da transformada integral, existem vantagens, tais como redução do tempo de processamento e a aceleração na taxa de convergência numérica, apareciam e com isso aceleravam a resolução dos problemas.

A Técnica da Transformada Integral Clássica é especial e atrativa para problemas de condução de calor transiente e estacionária na medida, como o que será trabalhado nesse estudo, em que se trata todas as variáveis da mesma maneira e não tem dificuldades de inversão, como no caso da transformada de Laplace, pois tanto a transformada integral como a fórmula de inversão, são definidas no início do problema. Para um dado problema, contudo, o tipo de transformada integral e a correspondente fórmula de inversão dependem, segundo Özisik e Murray (1974), da escala da variável (finito, semi-infinito ou infinito); e o tipo de condição de contorno.

A transformada integral e a fórmula de inversão são baseadas no processo (ou técnica) de reescrever em duas partes a expansão clássica de uma fun-

ção. Convenientemente utilizaremos os problemas de valor de contorno homogêneos e não-homogêneos de condução de calor. A técnica será exemplificada no próximo capítulo com o desenvolvimento da equação do calor Unidimensional.

## 4 | Resolução da Equação Diferencial Parcial do Calor Unidimensional e Bidimensional

O objetivo desse capítulo é resolver a Equação Unidimensional do calor (2.9) modelada no capítulo 1, utilizando a Técnica da Transformada Integral Clássica e a Equação Bidimensional do Calor (2.10) por meio da Técnica da Separação de Variáveis.

### 4.1 Equação Unidimensional do Calor

A Equação tem como objetivo encontrar a temperatura  $F$  de uma barra Unidimensional de um material condutor térmico. Para isso, definimos a equação que reproduz o problema e as suas condições iniciais da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

para  $0 \leq x \leq L_x$  e  $t \geq 0$ , com as seguintes condições de fronteira:

$$F(0, x) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L_x \quad (4.2)$$

$$F(t, 0) = \tilde{T} \quad t > 0 \quad (4.3)$$

$$F(t, L_x) = \tilde{T} \quad t > 0 \quad (4.4)$$

sendo  $f(x)$  e  $\tilde{T}$  constantes que indicam, respectivamente, as temperaturas nas extremidades da barra, antes e depois do início do processo de propagação de calor.

#### 4.1.1 Resolução via TTIC

Inicialmente as condições de contorno dadas pelas Equações (4.2) e (4.3) não são homogêneas, com o objetivo de homogeneizá-las aplicamos o seguinte filtro:

$$\text{Filtro Matemático : } F(t, x) = F_h(t, x) + M(x) \quad (4.5)$$

A função  $M$  definida por  $M = M(x)$ , pode ser obtida do seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0 \quad (4.6)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$M(0) = \tilde{T} \quad (4.7)$$

$$F(L_x) = \tilde{T} \quad (4.8)$$

Resolvendo a Equação (4.6) temos:

$$M(x) = c_1x + c_2$$

Utilizando as condições iniciais, Equações (4.7) e (4.8) obtemos:

$$M(0) = \tilde{T} = c_2$$

e a segunda condição:

$$M(L_x) = c_1 L_x + \tilde{T} = \tilde{T} \implies c_1 = 0$$

com isso:

$$M(x) = \tilde{T} \tag{4.9}$$

Substituindo a Equação (4.5) no problema original, Equação (4.1) e considerando a Equação (4.6):

$$\frac{\partial(F_h + M)}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2(F_h + M)}{\partial x^2} \right)$$

obtemos:

$$\frac{\partial F_h}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 F_h}{\partial x^2} \right) \tag{4.10}$$

com as condições:

$$F_h(t, 0) = 0 \tag{4.11}$$

$$F_h(t, L_x) = 0 \tag{4.12}$$

$$F_h(0, x) = f(x) - \tilde{T} \tag{4.13}$$

### Problema Auxiliar

Seguindo a Técnica da Transformada Integral Clássica, o problema auxiliar ou (problema de autovalor) apropriado é:

$$\frac{d^2 \Psi_n(x)}{dx^2} + \lambda_n^2 \Psi_n(x) = 0 \tag{4.14}$$

$$\Psi_n(0) = 0 \tag{4.15}$$

$$\Psi_n(L_x) = 0 \quad (4.16)$$

sendo  $\Psi_n$  as autofunções associadas aos autovalores  $\lambda_n$ , sendo  $n = 0, 1, \dots$

A solução desse problema é dada pela tabela apresentada por Özisik e Murray (1974), a saber:

$$\Psi_n(x) = \text{sen}(\lambda_n x)$$

Considerando as condições de contorno, Equação (4.16), temos:

$$\Psi_n(L_x) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\lambda_n L_x) = 0$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$ , logo:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L_x} \quad (4.17)$$

Prosseguindo, devemos normalizar autofunção, para isso utilizamos a propriedade da ortogonalização de  $\Psi_n$ :

$$\langle \Psi_m \Psi_n \rangle = \int_0^{L_x} \Psi_m \Psi_n dy = \begin{cases} N_n, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Segundo a tabela de Özisik e Murray (1974):

$$N_n = \int_0^{L_x} \Psi_n^2 dx = \int_0^{L_x} \text{sen}^2(\lambda_n x) dx = \frac{2}{L_x}$$

A autofunção normalizada (ou núcleo) é dada por:

$$\tilde{\Psi}_n(x) = \frac{\Psi_n(x)}{N_n^{1/2}} \Rightarrow \tilde{\Psi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \text{sen}(\lambda_n x)$$



## Par Transformada-Inversa

Agora, temos o par transformada-inversa:

$$\bar{F}_n(t) = \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) F_h(t, x) dx : \text{Transformada} \quad (4.18)$$

$$F_h(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Psi}_n(x) \bar{F}_n(t) : \text{Fórmula de Inversão} \quad (4.19)$$

Observamos que:

$$\frac{\partial F_h}{\partial t} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Psi}_m(x) \bar{F}'_m(t) \quad (4.20)$$

e

$$\frac{\partial^2 F_h}{\partial x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Psi}''_m(x) \bar{F}_m(t) \quad (4.21)$$

Aplicando o operador integral  $\int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) dx$ , na Equação (4.10) e substituindo as Equações (4.20) e (4.21), temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) \frac{\partial F_h}{\partial t} dx &= \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) \alpha \left( \frac{\partial^2 F_h}{\partial x^2} \right) dx \Rightarrow \\ \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Psi}_m(x) \bar{F}'_m(t) dx &= \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) \alpha \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\Psi}''_m(x) \bar{F}_m(t) dx \Rightarrow \\ \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}'_m(t) \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) \tilde{\Psi}_m(x) dx &= \alpha \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}_m(t) \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) \tilde{\Psi}''_m(x) dx \Rightarrow \\ \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}'_m(t) \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) \tilde{\Psi}_m(x) dx &= \alpha \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}_m(t) \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) (-\lambda_m^2 \tilde{\Psi}_m(x)) dx \Rightarrow \\ \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}'_m(t) \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) \tilde{\Psi}_m(x) dx &= (-\lambda_m^2 \alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}_m(t) \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) \tilde{\Psi}_m(x) dx \Rightarrow \end{aligned}$$

Por fim:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}'_m(t) = (-\lambda_m^2 \alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}_m(t) \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}'_m(t) = (-\alpha \lambda_m \lambda_n \delta_{mn}) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{F}_m(t) \quad (4.22)$$

sendo  $\delta_{mn}$  o delta de Kronecker, isto é:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

A Equação refere-se a um sistema infinito de Equações Diferenciais Ordinárias lineares homogêneas. Na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} \bar{F}'_0(t) \\ \bar{F}'_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}'_n(t) \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_0^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -\lambda_1^2 \alpha & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & -\lambda_n^2 \alpha & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{F}_0(t) \\ \bar{F}_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}_n(t) \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Assim, o sistema acima reduz-se ao problema de valor inicial (PVI):

$$\bar{F}'_n(t) = -\alpha \lambda_n^2 \bar{F}_n(t) \quad (4.24)$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , cuja condição inicial é dada pela Transformada, Equação (4.18), no ponto  $t = 0$ :

$$\bar{F}_n(0) = \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_n(x) (f(x) - \tilde{T}) dx \quad (4.25)$$

A solução do PVI (4.24) e (4.25) é:

$$\bar{F}_n(t) = \bar{F}_n(0)e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \quad (4.26)$$

Pela fórmula de inversão, Equação (4.19), obtemos:

$$F_h(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L_x}} \text{sen}(\lambda_n x) \bar{F}_n(0) e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

Utilizando a Equação (4.5), obtemos a solução do problema inicial:

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L_x}} \text{sen}(\lambda_n x) \bar{F}_n(0) e^{-\alpha\lambda_n^2 t} + \tilde{T} \quad (4.27)$$

A condição inicial do sistema acima é:

$$\begin{aligned} \bar{F}_n(0) &= \int_0^{L_x} \tilde{\Psi}_m(x) F_h(0, x) dx = \int_0^{L_x} \text{sen}(\lambda_n x) (f(x) - \tilde{T}) dx \Rightarrow \\ \bar{F}_n(0) &= \int_0^{L_x} \sqrt{\frac{2}{L_x}} \text{sen}(\lambda_n x) f(x) dx - \int_0^{L_x} \sqrt{\frac{2}{L_x}} \text{sen}(\lambda_n x) \tilde{T} dx \Rightarrow \end{aligned}$$

ou seja, como:

$$\bar{F}_n(0) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \int_0^{L_x} \text{sen}(\lambda_n x) (f(x) - \tilde{T}) dx \quad (4.28)$$

Logo a solução via TTIC, do problema dado pelas Equações (4.1-4.4) é:

$$\bar{F}(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L_x}} \text{sen}(\lambda_n x) \left( \bar{F}_n(0) e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \right)$$

e substituindo a Equação (4.27), temos:

$$F(t, x) = \frac{2}{L_x} \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}(\lambda_n x) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \int_0^{L_x} \text{sen}(\lambda_n x) (f(x) - \tilde{T}) dx \quad (4.29)$$

A solução provinda do trabalho de Zill e Cullen (2001) do problema dado pelas Equações (4.1-4.3) é a mesma solução obtida via TTIC Equação (4.29).

## 4.2 Equação Bidimensional do Calor

O problema tem como objetivo encontrar a temperatura de uma placa bidimensional de um material condutor térmico. Para isso, definimos a equação que reproduz o problema e as suas condições iniciais da seguinte forma:

Dada a Equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.30)$$

sendo  $u = u(t, x, y)$ ,  $t \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq L_x$ ,  $0 \leq y \leq L_y$ . A placa estará submetidas as *Condições de Dirichlet*, cujas as condições de fronteira da EDP serão homogêneas e representadas da seguinte forma:

$$u(0, x, y) = f(x, y) \quad 0 \leq x \leq L_x \quad 0 \leq y \leq L_y \quad (4.31)$$

$$u(t, 0, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq L_y \quad t > 0 \quad (4.32)$$

$$u(t, L_x, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq L_y \quad t > 0 \quad (4.33)$$

$$u(t, x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq L_x \quad t > 0 \quad (4.34)$$

$$u(t, x, L_y) = 0 \quad 0 \leq x \leq L_x \quad t > 0 \quad (4.35)$$

sendo  $f(x)$  e 0 constantes que indicam, respectivamente, as temperaturas antes

e depois do início da propagação de calor.

### 4.2.1 Resolução via Separação de Variáveis

Para a resolução do problema de condução de calor bidimensional, será utilizado o método da separação de variáveis. Para se encontrar uma solução para o problema, fazemos a separação em forma de um produto de três funções de uma variável, da seguinte forma:

$$u(x, y, t) = F(x)G(y)H(t) \quad (4.36)$$

sendo  $F, G$  e  $H$  potenciais nas respectivas variáveis  $x, y$  e  $z$ .

Com isso temos que:

$$u_t = F(x)G(y)H_t(t)$$

$$u_{xx} = F_{xx}(x)G(y)H(t)$$

$$u_{yy} = F(x)G_{yy}(y)H(t)$$

Efetuamos a substituição de cada equação acima na Equação (4.30):

$$F(x)G(y)H_t(t) = \alpha[F_{xx}(x)G(y)H(t) + F(x)G_{yy}(y)H(t)] \quad (4.37)$$

Dividimos os lados por  $\alpha F(x)G(y)H(t)$ :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{H_t(t)}{H(t)} = \frac{F_{xx}(x)}{F(x)} + \frac{G_{yy}(y)}{G(y)}$$

O lado esquerdo da equação acima é uma função que depende apenas de  $t$  e o lado direito uma função que depende das variáveis  $x, y$ , com isso segue

que ambos os lados da equação são constantes, representados por " $-\sigma^2$ ":

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \frac{H_t(t)}{H(t)} = -\sigma^2 \\ \frac{F_{xx}(x)}{F(x)} = -\frac{G_{yy}(y)}{G(y)} - \sigma^2 \end{cases}$$

Pelas equações acima, temos:

$$\frac{F_{xx}(x)}{F(x)} = -\frac{G_{yy}(y)}{G(y)} - \sigma^2 = -\rho^2 \quad (4.38)$$

onde consideramos a igualdade acima constante e igual a  $-\rho^2$ , e:

$$H_t + \sigma^2 \alpha H = 0 \quad (4.39)$$

fazemos:

$$\gamma^2 = \sigma^2 \alpha \quad (4.40)$$

Com isso, temos as seguintes equações para resolver:

$$\begin{cases} H_t + \gamma^2 H = 0 \\ \frac{F_{xx}(x)}{F(x)} = -\rho^2 \\ -\frac{G_{yy}(y)}{G(y)} - \sigma^2 = -\rho^2 \end{cases}$$

Reorganizando:

$$H_t + \gamma^2 H = 0 \quad (4.41)$$

$$F_{xx} + \rho^2 F(x) = 0 \quad (4.42)$$

$$G_{yy} + \beta^2 G(y) = 0 \quad (4.43)$$

sendo:

$$\beta^2 = \sigma^2 - \rho^2 \quad (4.44)$$

Pelas Equações (4.42) a (4.43) e as condições da (4.32) à (4.35), temos os seguintes problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} F_{xx}(x) - \rho^2 F(x) = 0 \\ F(0) = F(L_x) = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

E:

$$\begin{cases} G_{yy}(y) - \beta^2 G(y) = 0 \\ G(0) = G(L_y) = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

Para os sistemas (4.45) e (4.46) as autofunções e autovalores são respectivamente Özisik e Murray (1974):

$$\begin{cases} F_n(x) = \text{sen}(\rho_n x) \\ \rho_n = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right) \end{cases}$$

e:

$$\begin{cases} G_m(y) = \text{sen}(\beta_m y) \\ \beta_m = \left(\frac{m\pi}{L_y}\right) \end{cases}$$

com  $m = 1, 2, \dots$  e  $n = 1, 2, \dots$

Como:

$$\sigma_m^2 - \rho_m^2 = \beta_m^2$$

logo:

$$\sigma_{mn}^2 = \beta_m^2 + \rho_m^2$$

Pela Equação (4.40), temos:

$$\gamma_m = \sqrt{\alpha\sigma_m^2}$$

A solução geral do problema da Equação (4.41):

$$H_m(t) = c_0 e^{-\gamma_m^2 t} \tag{4.47}$$

sem perda de generalidade, consideramos  $c_0 = 1$ .

Pelo princípio da superposição, temos que:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} u_{mn}(x, y, t) = 0$$

Como  $u = F(x)G(y)H(t)$ , então  $u_{mn}(x, y, t) = F_m(x)G_n(y)H(t)$ . Por fim, devemos encontrar o valor dos coeficientes  $A_{mn}$  acima, para isso utilizamos a condição inicial (4.31), logo:

$$\begin{aligned} f(x, y) = u(0, x, y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{mn} u_{mn}(x, y, 0) \Rightarrow \\ f(x, y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{mn} F_m(x) G_n(y) H(0) \Rightarrow \\ f(x, y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{mn} F_m(x) G_n(y) \end{aligned}$$



Seja o produto interno:

$$\langle u_1(x, y, t), u_2(x, y, t) \rangle = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} u_1 u_2 dy dx \quad (4.48)$$

Como  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ , e pelo princípio da superposição:

$$u(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} u_{mn}(x, y, 0) \Rightarrow f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \text{sen}(\rho_n x) \text{sen}(\beta_m y)$$

Em (4.49) considerando  $t = 0$ ,  $u_1 = f$  e  $u_x = F_k G_s$ , temos:

$$\langle f, F_k G_s \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} F_n G_m, F_k G_s \right\rangle \quad (4.49)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \langle F_n G_m, F_k G_s \rangle \quad (4.50)$$

Sabemos por Callioli, Domingues e Costa (1983) que:

$$\langle F_n G_m, F_k G_s \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq k \text{ e } m \neq s \\ 1, & n = k \text{ e } m = s \end{cases}$$

Pela proposição acima e por (4.50):

$$\begin{aligned} \langle f, F_n G_m \rangle &= A_{mn} \langle F_n G_m, F_n G_m \rangle = A_{mn} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} F_n^2 G_m^2 dy dx \Rightarrow \\ &= A_{mn} \frac{L_x L_y}{4} \end{aligned}$$

ou seja:

$$\langle f, F_n G_m \rangle = A_{mn} \frac{L_x L_y}{4} \Rightarrow A_{mn} = \langle f, F_n G_m \rangle \frac{4}{L_x L_y}$$

Dessa forma os coeficientes  $A_{mn}$  podem ser determinados através da

expressão:

$$A_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x, y) F_n(x) G_m(y) dy dx$$

Com isso a solução pelo método da separação de variáveis da EDP bidimensional do calor, submetida as condições de Dirichlet é, portanto,

$$u(t, x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{mn} e^{-\alpha\pi^2 \left( \left( \frac{n}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{m}{L_y} \right)^2 \right) t} \operatorname{sen} \left( \frac{nx\pi}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{my\pi}{L_y} \right) \quad (4.51)$$

Dessa forma podemos obter a função desejada e a solução do problema inicial via Separação de Variáveis. A solução encontrada pode ser validada através da literatura. Biezuner (2010) nos mostra a mesma solução encontrada..

## 5 | Análise dos Resultados

Neste capítulo serão analisados a solução, via TTIC, da equação do calor unidimensional, Equação (4.29), e a solução, via separação de variáveis, da equação do calor bidimensional, Equação (4.51). Para cada caso, será determinada a ordem de truncamento,  $N$ , com erro relativo global previamente definido, bem como a análise qualitativa (ou coerência dos resultados provindos da solução exata relativamente ao modelo físico) por intermédio de gráficos gerados pelos softwares matemáticos gratuitos SciDaVis <sup>1</sup> e Winplot<sup>2</sup>.

### 5.1 Equação do Calor Unidimensional – Solução via TTIC

Para esta análise, estabelecem-se os seguintes parâmetros iniciais:  $L_x = 0.06m$ ,  $\alpha = 1.14 \cdot 10^{-4} m^2/s$  (cobre),  $f(x) = 100^\circ C$ ,  $(\tilde{T}) = 0^\circ C$  e  $0s \leq t \leq 16s$ .

Iniciamos com a análise da ordem de truncamento,  $N$ , para isso efetuamos substituições nos parâmetros  $t, x$  da solução obtida de acordo com a sequência apresentada. A Tabela (3) apresenta resultados para o perfil de temperatura, relacionados à equação do calor unidimensional em função da coordenada  $t$ , enquanto  $x$  será fixa e com valor de  $x = 0.006m$ . Dessa forma, podemos estudar o comportamento da temperatura nos pontos  $(t, 0.006)$  com  $0 \leq t \leq 16s$ . Os valores da ordem de truncamento,  $N$ , na expansão do perfil de temperatura foram considerados sendo 1, 2 e 3. Os resultados gerados a par-

---

<sup>1</sup>SciDaVis - [www.scidavis.sourceforge.net](http://www.scidavis.sourceforge.net)

<sup>2</sup>Winplot - [www.mat.ufmg.br](http://www.mat.ufmg.br)

tir da formulação TTIC reproduzem as soluções completamente convergidas e estabelecidas, que nesta modelagem exigiu-se um erro relativo global de  $10^{-3}$ . Observamos na tabela que o comportamento da convergência da temperatura fica estabelecido para  $N \geq 3$ .

Tabela 3: Tabela de Convergência Unidimensional - Variação de  $t$

<b>F(°C)</b>				
<b>N</b>				
<b>t</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>2.4</b>	18.624	18.584	18.624	18.624
<b>3.2</b>	14.477	14.473	14.477	14.477
<b>4.0</b>	11.271	11.271	11.271	11.271
<b>4.8</b>	8.778	8.778	8.778	8.778
<b>5.6</b>	6.836	6.836	6.836	6.836
<b>6.4</b>	5,324	5.324	5.324	5.324
<b>7.2</b>	4.146	4.146	4.146	4.146
<b>8.0</b>	3.229	3.229	3.229	3.229
<b>8.8</b>	2.514	2.514	2.514	2.514
<b>9.6</b>	1.958	1.958	1.958	1.958
<b>10.4</b>	1.525	1.525	1.525	1.525
<b>11.2</b>	1.188	1.188	1.188	1.188
<b>12.0</b>	0.925	0.925	0.925	0.925
<b>12.8</b>	0.720	0.720	0.720	0.720
<b>13.6</b>	0.561	0.561	0.561	0.561
<b>14.4</b>	0.437	0.437	0.437	0.437
<b>15.2</b>	0.340	0.340	0.340	0.340
<b>16.0</b>	0.265	0.265	0.265	0.265

Fonte: Elaborado pelo autor

Segue a análise da convergência com a Tabela (4) que apresenta resultados para o perfil de temperatura, relacionados a equação do calor unidimensional em função da coordenada  $x$ , enquanto  $t$  será fixa e com valor de  $t = 1.6s$ , dessa forma pode-se estudar o comportamento da temperatura nos pontos  $(1.6, x)$  com  $0 \leq x \leq 0.06m$ . Do mesmo modo que a tabela anterior, essa apresentará as temperaturas nesses diferentes pontos e truncamentos do  $N$ . Os valores da ordem de truncamento,  $N$ , na expansão do perfil de temperatura foram considerados sendo 1, 2 e 3. Os resultados gerados a partir da formulação TTIC reproduzem as soluções completamente convergidas e es-

tabelecidas, que nesta modelagem exigiu-se um erro relativo global de  $10^{-3}$ . Observamos na tabela que o comportamento da convergência da temperatura fica estabelecido para  $N \geq 3$ .

Tabela 4: Tabela de Convergência Unidimensional - Variação de  $x$

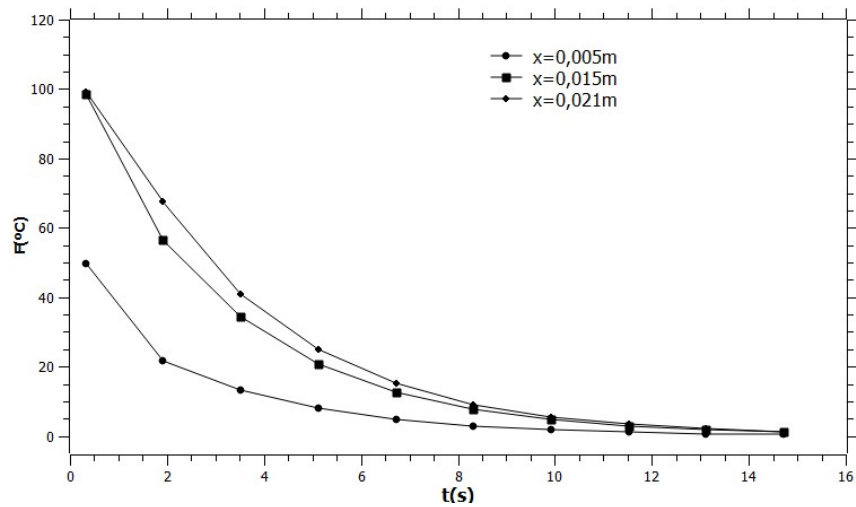
<b>F(°C)</b>				
<b>N</b>				
<b>x</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>0.006</b>	23.863	23.863	24.244	24.244
<b>0.009</b>	35.058	35.058	35.523	35.523
<b>0.012</b>	45.390	45.390	45.838	45.838
<b>0.015</b>	54.604	54.604	54.937	54.937
<b>0.018</b>	62.473	62.473	62.619	62.619
<b>0.021</b>	68.805	68.805	68.731	68.731
<b>0.024</b>	73.442	73.442	73.165	73.165
<b>0.027</b>	76.271	76.271	75.851	75.851
<b>0.030</b>	77.221	77.221	76.750	76.750
<b>0.033</b>	76.271	76.271	75.851	75.851
<b>0.036</b>	73.442	73.442	73.165	73.165
<b>0.039</b>	68.805	68.805	68.731	68.731
<b>0.042</b>	62.473	62.473	62.619	62.619
<b>0.045</b>	54.604	54.604	54.937	54.937
<b>0.048</b>	45.390	45.390	45.838	45.838
<b>0.051</b>	35.058	35.058	35.523	35.523
<b>0.054</b>	23.863	23.863	24.244	24.244
<b>0.057</b>	12.080	12.080	12.294	12.294
<b>0.060</b>	0.000	0.000	0.000	0.000

Fonte: Elaborado pelo autor

Através da análise da tabela (4), verificamos que a convergência do modelo unidimensional ocorre no  $N \geq 3$ , para uma aproximação de três casas decimais.

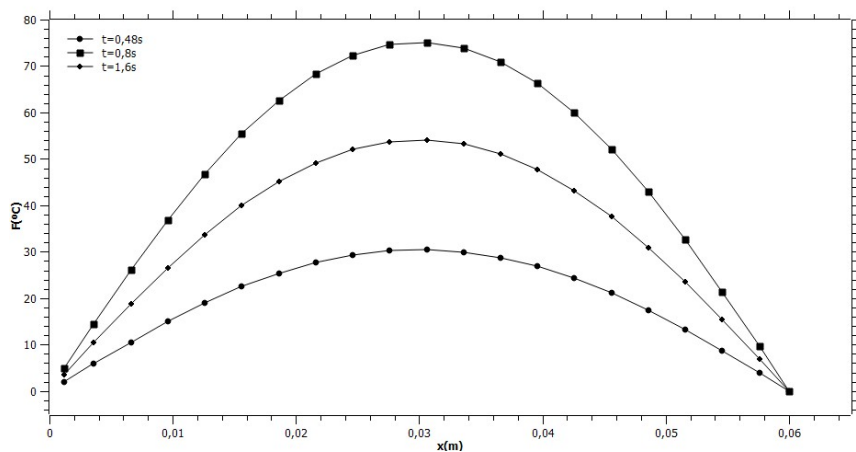
Nas Figuras (2) e (3) são apresentados os resultados para o perfil de temperatura em função dos eixos “Ot” e “Ox”, referentes à equação do calor unidimensional.

Figura 2: Perfil de Temperatura Unidimensional - Variação de  $t$



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3: Perfil de Temperatura Unidimensional - Variação  $x$



Fonte: Elaborado pelo autor

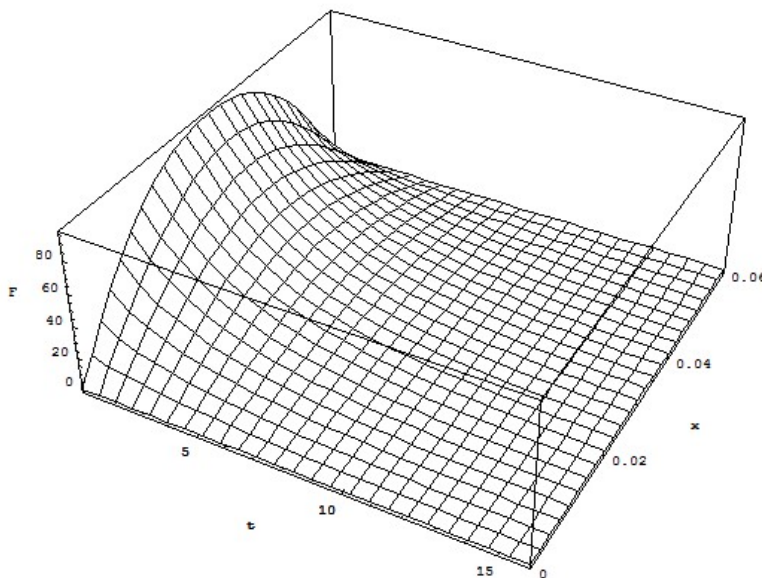
No primeiro caso, com variação de  $t$  o gráfico nos mostra a variação da temperatura nos pontos  $(t, 0.005)$ ,  $(t, 0.021)$  e  $(t, 0.015)$  com  $0 \leq t \leq 16s$ , onde se tem como valor inicial  $f(x)$  em  $t = 0$  e conforme o tempo aumenta a temperatura segue decrescendo, até atingir o valor mínimo de  $\tilde{T}$ . Essa evolução é totalmente coerente com a teoria física apresentada, o material condutor cede calor, e como resposta temos a diminuição da temperatura.

No segundo caso, com variação de  $x$  o gráfico nos mostra a variação da temperatura nos pontos  $(0.48, x)$ ;  $(0.8, x)$  e  $(1.6, x)$  com  $0 \leq x \leq 0.06m$ , tem

como valor inicial  $\tilde{T}$  para  $x = 0$ , ponto que faz parte do início de resfriamento, e conforme aumenta-se a coordenada observamos a temperatura aumentar, já que estamos nos aproximando de zonas onde o resfriamento ainda não atingiu a sua totalidade. Essa evolução é totalmente coerente com as condições impostas inicialmente pelo modelo apresentado.

Abaixo na Figura (4) segue o gráfico tridimensional do modelo unidimensional:

Figura 4: Perfil de Temperatura Unidimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

## 5.2 Equação do Calor Bidimensional – Solução via Separação Variáveis

Para esta análise, estabelecemos os seguintes parâmetros iniciais:  $L_x = 0.06m$ ,  $L_y = 0.1m$ ,  $\alpha = 1.14 \cdot 10^{-4} m^2/s$  (cobre),  $f(x, y) = 100^\circ C$  e  $0s \leq t \leq 16s$ .

Assim como o modelo unidimensional, iniciamos com a análise da ordem de truncamento,  $N$ , para isso efetuamos substituições nos parâmetros  $t, x, y$  da solução obtida de acordo com a sequência apresentada. A Tabela (5) apresenta resultados para o perfil de temperatura, relacionados à equação do

calor bidimensional em função da coordenada  $t$ , enquanto  $x, y$  serão fixas e com valor de  $x = 0.006m$  e  $y = 0.01m$ , dessa forma podemos estudar o comportamento da temperatura nos pontos  $(t, 0.006, 0.01)$  com  $0 \leq t \leq 16s$ . Os valores da ordem de truncamento,  $N$ , na expansão do perfil de temperatura foram considerados sendo 1, 2 e 3. Os resultados gerados a partir da formulação da Separação de Variáveis reproduzem as soluções completamente convergidas e estabelecidas, que nesta modelagem exigimos um erro relativo global de  $10^{-3}$ . Observamos na tabela que o comportamento da convergência da temperatura fica estabelecido para  $N \geq 5$ .

Tabela 5: Tabela de Convergência Bidimensional - Variação de  $t$

$u(^{\circ}C)$						
N						
t	1	2	3	4	5	6
<b>1.6</b>	7.842	7.842	9.614	9.614	9.683	9.683
<b>2.4</b>	5.582	5.582	6.156	6.156	6.162	6.162
<b>3.2</b>	3.973	3.973	4.168	4.168	4.169	4.169
<b>4.0</b>	2.827	2.827	2.895	2.895	2.895	2.895
<b>4.8</b>	2.012	2.012	2.036	2.036	2.036	2.036
<b>5.6</b>	1.432	1.432	1.440	1.440	1.440	1.440
<b>6.4</b>	1.019	1.019	1.022	1.022	1.022	1.022
<b>7.2</b>	0.726	0.726	0.727	0.727	0.727	0.727
<b>8.0</b>	0.516	0.516	0.517	0.517	0.517	0.517
<b>8.8</b>	0.368	0.368	0.368	0.368	0.368	0.368
<b>9.6</b>	0.262	0.262	0.262	0.262	0.262	0.262
<b>10.4</b>	0.186	0.186	0.186	0.186	0.186	0.186
<b>11.2</b>	0.133	0.133	0.133	0.133	0.133	0.133
<b>12.0</b>	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094
<b>12.8</b>	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067
<b>13.6</b>	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048
<b>14.4</b>	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034
<b>15.2</b>	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024
<b>16.0</b>	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017

Fonte: Elaborado pelo autor

Prosseguimos a análise da ordem de truncamento com a Tabela (6) que apresenta resultados para o perfil de temperatura, relacionados á equação do calor bidimensional em função da coordenada  $x$ , enquanto  $t, y$  serão fixas



e com valores iguais a  $t = 1.6s$  e  $y = 0.08$ , dessa forma pode-se estudar o comportamento da temperatura nos pontos  $(1.6, x, 0.08)$  com  $0 \leq x \leq 0.06m$ . Do mesmo modo que a tabela anterior, essa apresentará as temperaturas nesses diferentes pontos e truncamentos do  $N$ . Os valores da ordem de truncamento,  $N$ , na expansão do perfil de temperatura foram considerados sendo 1, 2 e 3. Os resultados gerados a partir da formulação da Separação de Variáveis reproduzem as soluções completamente convergidas e estabelecidas, que nesta modelagem exigiu-se um erro relativo global de  $10^{-3}$ . Observamos na tabela que o comportamento da convergência da temperatura fica estabelecido para  $N \geq 3$ .

Tabela 6: Tabela de Convergência Bidimensional - Variação de  $x$

$u(^{\circ}C)$				
$N$				
$x$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>0.006</b>	14.916	14.916	17.091	17.091
<b>0.009</b>	21.914	21.914	25.042	25.042
<b>0.012</b>	28.373	28.373	32.314	32.314
<b>0.015</b>	34.133	34.133	38.728	38.728
<b>0.018</b>	39.052	39.052	44.144	44.144
<b>0.021</b>	43.009	43.009	48.453	48.453
<b>0.024</b>	45.908	45.908	51.578	51.578
<b>0.027</b>	47.676	47.676	53.472	53.472
<b>0.030</b>	48.271	48.271	54.106	54.106
<b>0.033</b>	47.676	47.676	53.472	53.472
<b>0.036</b>	45.908	45.908	51.578	51.578
<b>0.039</b>	43.009	43.009	48.453	48.453
<b>0.042</b>	39.052	39.052	44.144	44.144
<b>0.045</b>	34.133	34.133	32.728	38.728
<b>0.048</b>	28.373	28.373	32.314	32.314
<b>0.051</b>	21.914	21.914	25.042	25.042
<b>0.054</b>	14.916	14.916	17.091	17.091
<b>0.057</b>	7.551	7.551	8.667	8.667
<b>0.060</b>	0.000	0.000	0.000	0.000

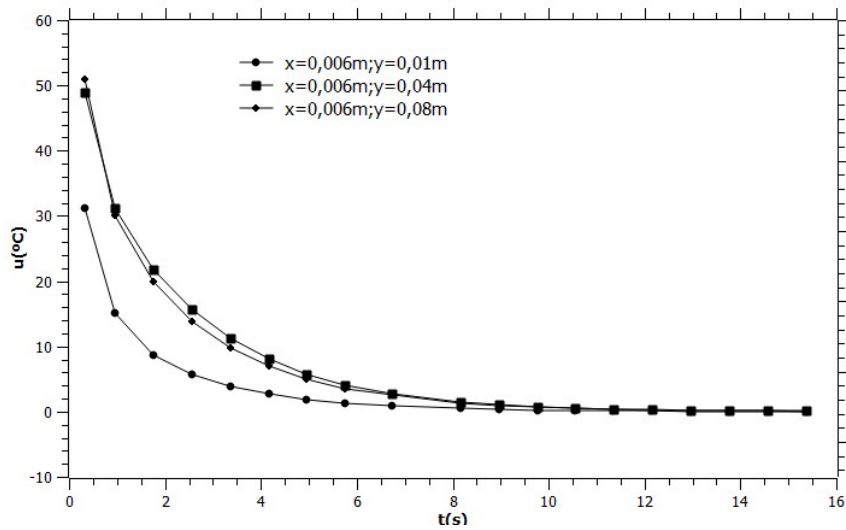
Fonte: Elaborado pelo autor

Como as tabelas de convergência apresentaram diferentes valores de truncamento, foi utilizado o maior deles, para garantir maior precisão, com

isso pode se verificar que a convergência do modelo bidimensional ocorre no  $N \geq 5$ , para uma aproximação de três casas decimais.

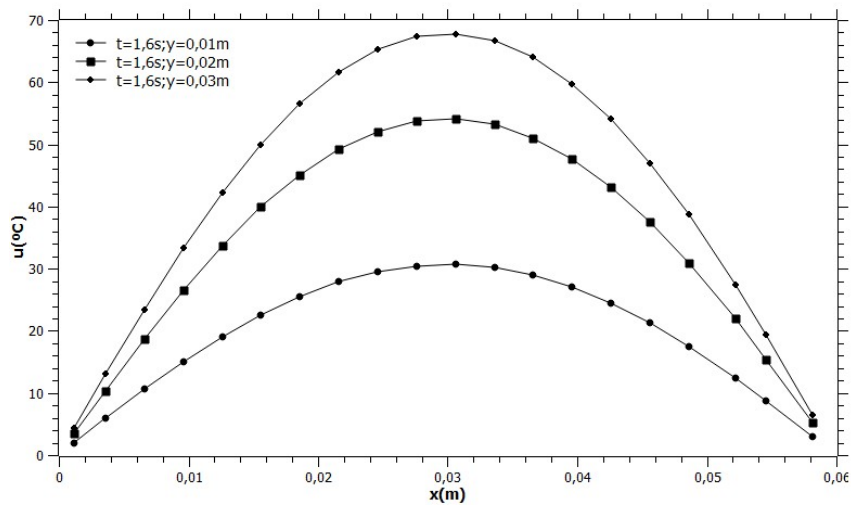
Da Figura (5) até a Figura (7) são apresentados os resultados para o perfil de temperatura em função dos eixos “Ot” e “Ox”, referentes a equação do calor bidimensional.

Figura 5: Perfil de Temperatura Bidimensional - Variação de  $t$



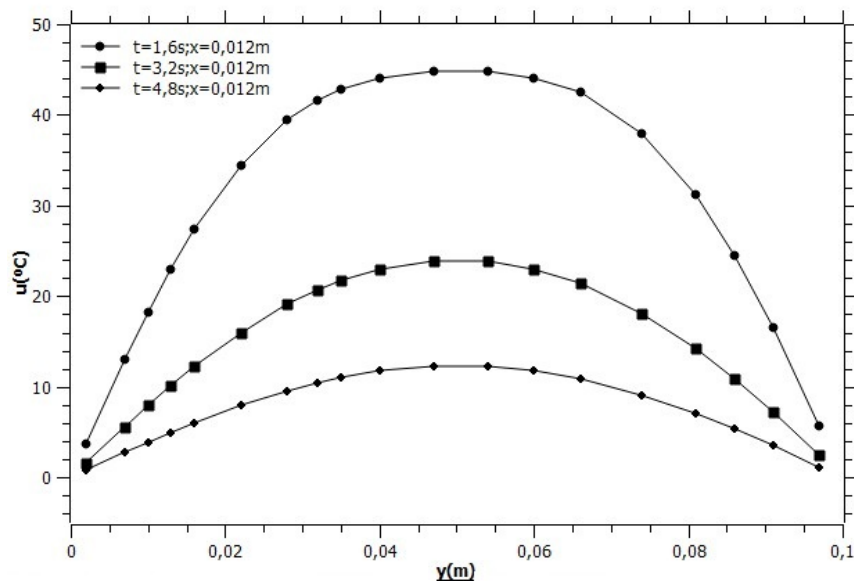
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 6: Perfil de Temperatura Bidimensional- Variação de  $x$



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 7: Perfil de Temperatura Bidimensional- Variação de  $y$



Fonte: Elaborado pelo autor

No primeiro caso, a variação será para  $t$ , o Gráfico (5) nos mostra a variação que a temperatura sofre nos pontos  $(t, 0.006, 0.01)$ ,  $(t, 0.006, 0.04)$  e  $(t, 0.006, 0.08)$  com  $0 \leq t \leq 16s$ , onde se tem como valor inicial  $f(x, y)$  em  $t = 0$  e conforme o tempo passa a temperatura entra em estágio de decrescimento, até atingir o valor mínimo de  $0^\circ C$ . É uma evolução completamente coerente com o que se poderia prever através da teoria apresentada, o material condutor cede calor, e como resposta temos a diminuição da temperatura.

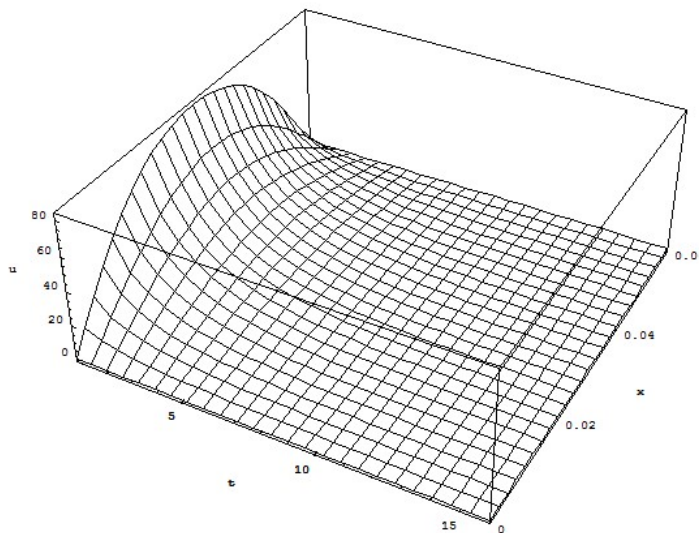
No segundo caso, com variação de  $x$  o gráfico nos evidencia a variação da temperatura nos pontos  $(1.6, x, 0.01)$ ,  $(1.6, x, 0.02)$  e  $(1.6, x, 0.03)$  com  $0 \leq x \leq 0.06m$ , que tem como valor inicial  $f(x, y)$  para  $x = 0$ , ponto que faz parte do início de resfriamento, por isso estará com uma temperatura reduzida, e conforme aumentamos a coordenada observamos a temperatura aumentar, a justificativa é que como estamos nos aproximando de zonas onde o resfriamento ainda não atingiu a sua totalidade, a temperatura se assemelha a temperatura inicial. Essa evolução é coerente com as condições impostas inicialmente.

No terceiro caso, fazemos a variação da coordenada  $y$ , da mesma forma que o  $x$ , estudamos a variação da temperatura nos pontos  $(1.6, 0.012, y)$ ,

$(3.2, 0.012, y)$  e  $(4.8, 0.012, y)$  com  $0 \leq y \leq 0.1m$ , e assim como no caso anterior podemos observar que a temperatura cresce no sentido das coordenadas, isso ocorre porque são zonas onde o resfriamento não atingiu a placa por completo, porém as extremidades estão com temperaturas reduzidas próximas a zero, como poderia ser previsto no resfriamento da placa.

Segue abaixo na figura (8) o gráfico tridimensional do modelo apresentado:

Figura 8: Perfil de Temperatura Bidimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

Os gráficos dos modelos uni e bidimensional, apresentados nas Figuras (4) e (8) apresentam certa similaridade, isso se deve as condições impostas no processo de ambos, tanto o modelo uni quanto o bidimensional estão a uma temperatura inicial de  $100^{\circ}C$  e são resfriados até atingir  $0^{\circ}C$ . Porém, sabemos que são modelos distintos, mas devido as restrições do software, não é possível inserir além do tempo as duas dimensões consideradas, portanto o gráfico do modelo bidimensional apresenta o eixo  $t$  e  $x$  assim como o unidimensional, mas essas curvas de temperatura estão presentes em toda dimensão  $y$  considerada, diferentemente do modelo unidimensional que possui apenas a apresentada na Figura (4).

# Conclusão

Este trabalho teve como objetivo principal analisar a equação diferencial parcial do calor unidimensional e bidimensional, para determinar seu perfil através da resolução por meio da (TTIC) Técnica da Transformada Integral Clássica e Separação de Variáveis, assim, com os resultados obtidos, pode-se verificar as temperaturas de acordo com o tempo em um condutor.

A aplicação da técnica da transformada integral para a obtenção do campo de temperatura unidimensional e da separação de variáveis para o modelo bidimensional se mostraram ferramentas eficazes, pois, a partir dos resultados obtidos no capítulo 4, viu-se que o perfil de temperatura foi desenvolvido com grande êxito, em todas as condições de contorno impostas, isso pode ser comprovado após a análise dos gráficos e tabelas obtidos computacionalmente.

Como sugestão para futuros trabalhos, para dar continuidade a mesma linha de pesquisa, seria o desenvolvimento de um modelo bidimensional, para se observar como a temperatura se comporta e se haveria semelhança com os resultados obtidos a partir da construção de um experimento, que consiste no aquecimento das bordas em uma placa condutora, dessa forma pode-se comparar a solução analítica com resultados experimentais, isso seria um ponto importante a ser estudado.

A expectativa desse estudo é que os resultados obtidos sirvam de suporte para a elaboração de trabalhos futuros, e assim mais estudos sejam feitos em relação ao tema e que se utilize a técnica de resolução de equações diferenciais parciais que envolvam problemas físicos.

# Bibliografia

- [1] B. Abdel-Hamid. *Modelling non-Fourier Heat Conduction With Periodic Thermal Oscillation Using the Finite Integral Transform*. Applied Mathematical Modelling, Vol. (23), pp. 899-914, 1999.
- [2] P. J. Antaki. *Analysis of hyperbolic heat conduction in a semi-infinite slab with surface convection*. International Journal of Heat Mass Transfer, Vol. (40), pp. 3247-3250, 1996, pp. 3247–3250.
- [3] P. Beheera. *Analysis of Transient Heat Conduction in Different Geometries*. 2009.
- [4] R.J. Biezuner. *Equações Diferenciais Parciais Lineares, Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/rodney>, Acessado em 27/04/2016*. 2010.
- [5] W. Boyce e R. Diprima. *Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, Rio de Janeiro, 2012.
- [6] C. A. Callioli, H.H. Domingues e R.C.F. Costa. *Álgebra Linear e Aplicações*. 4a. edição, São Paulo, Atual, 1983.
- [7] K. D. Cole. *Steady-Periodic Heating of a Cylinder*. Journal of Heat Transfer, Vol. 131, n. 9 (Set), 2009.
- [8] G.E. Cossali. *Periodic Heat Conduction in a solid Homogeneous Finite Cylinder*. International Journal of Thermal Sciences, Vol. 48, pp. 722-732, 2008.
- [9] R.M. Cotta. *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. CRC Press, Boca Raton, 1993.

- [10] J. Douglas Jr e H. H. Rachford Jr. *On The Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two a Three Space Variables*, vol(82), pp. 421-439. Transactions of the American Mathematical Society, 1956.
- [11] J. I Frankel, B. M. N. Vick e M. Özisik. *General Formulation and Analysis of Hyperbolic Heat Conduction in Composite Media*. International Journal of Heat Mass Transfer, vol (30), pp. 1293-1305, 1986, pp. 1293-1305.
- [12] F.P. Incropera e D.P. Dewitt. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. LTC, 3ª Edição, Rio de Janeiro, 1990.
- [13] V. Iório. *EDP: um curso de graduação*. SBM, Rio de Janeiro., 2012.
- [14] M.D. Mikhailov e M.N. Özisik. *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. John Wiley, New York, 1984.
- [15] F. de Monte. *Transient Heat Conduction in One-Dimensional Composite Slab. A Natural Analytic Approach*. International Journal of Heat e Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3607-3619, 1999.
- [16] E. R. Monteiro et al. *Integral Transform Solution for Hyperbolic Heat Conduction in a Finite Slab*. International Communications in Heat e Mass Transfer, Vol. 36, pp. 297-303, 2009.
- [17] A. G. Ostrogorsky. *Transient Heat Conduction in Spheres for  $Fo \geq 0.3$  and Finite  $B_i$* . Heat Mass Transfer, Vol. 44, pp. 1557-1562, 2008.
- [18] M.N. Özisik e R.L. Murray. *On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions*. J. Heat Transfer, v.96, pp.48-51, 1974.
- [19] C. R Regis, R. M. Cotta e J.S. Tan. *Improved Lumped Analysis of Transient Heat Conduction in a Nuclear Fuel Rod*, vol(27), pp.357-366. Int. Comm. Heat Mass Transfer, 2000.
- [20] W.C. Reynolds e H.C. Perkins. *Engineering Thermodynamics*. Mc Graw Hill, 1977.

- 
- [21] H. Sadat. *A General Lumped Model for Transient Heat Conduction in OneDimensional Geometries*. Applied Thermal Engineering, Vol. 25, pp. 567-576, 2004.
- [22] F Scofano Neto, R.M. Cotta e J.W. Ribeiro. *Alternative Analytical Approach to Diffusion Problems with General Coupling at the Boundaries*. Anais do X Congr. Bras. Eng. Mecânica, pp.173-176, Rio de Janeiro, 1989.
- [23] M. R Spiegel. *Coleção Schaum: Transformadas de Laplace*. McGraw-Hill, São Paulo, 1965.
- [24] G. Su, Z. Tan e J. Su. *Improved Lumped Models for Transient Heat Conduction in a Slab with Temperature-Dependent Thermal Conductivity, vol(33), pp. 274-283*. Applied Mathematical Modelling, 2009.
- [25] M.G Teixeira, M.A. Rincon e I.S. Liu. *Numerical Analysis of Quenching Heat Conduction in Metallic Materials*. Applied Mathematical Modelling, Vol. 33, pp.2464-2473, 2009.
- [26] D.G. Zill e M.R. Cullen. *Equações Diferenciais - Vol. 2*. Pearson Makron Books, São Paulo, 2001.