Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Lançamento Oblíquo: Uma Abordagem Matemática

Francisco Fabio Monteiro de Almeida

Goiânia

2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Francisco Fabio Monteiro de Almeida
E-mail:	ffmatematica@yahoo.com.br
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não	
Vínculo empregatício do autor	Professor de Matemática
Agência de fomento:	Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal — Sigla: SEDF
País: Brasil	UF: DF — CNPJ: 00.394.676/0001-07
Título:	Lançamento Oblíquo: Uma Abordagem Matemática
Palavras-chave:	Lançamento Oblíquo, Matemática, Função Quadrática, Movimento Uniformemente Variado, Velocidade Média.
Título em outra língua:	Oblique Launch: A Mathematical Approach
Palavras-chave em outra língua:	Oblique launch, Math, Quadratic function, Uniformly Varied Movement, Average speed.
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	31/03/2016
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática - PROFMAT
Orientador (a):	Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima
E-mail:	lidymaths@gmail.com

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Francisco F. M. de Almeida

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 27 / 04 / 2016.

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Francisco Fabio Monteiro de Almeida

Lançamento Oblíquo: Uma Abordagem Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientadora: Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima.

Goiânia

2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Almeida, Francisco Fabio Monteiro de
Lançamento Oblíquo: Uma Abordagem Matemática [manuscrito] / Francisco Fabio Monteiro de Almeida. - 2016.
lxv, 65 f.

Orientador: Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2016.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Lançamento Oblíquo. 2. Matemática. 3. Função Quadrática. 4. Movimento Uniformemente Variado. 5. Velocidade Média. I. Lima, Lidiane dos Santos Monteiro, orient. II. Título.

Francisco Fabio Monteiro de Almeida

Lançamento Oblíquo: Uma Abordagem Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 31 de março de 2016, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Lidiane S. M. Lima

Prof[a]. Dr[a]. Lidiane dos Santos Monteiro Lima
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Thaynara Arielly de Lima

Prof[a]. Dr[a]. Thaynara Arielly de Lima
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro Externo - IFG-GOIÂNIA

Francisco Fabio Monteiro de Almeida graduou-se em Matemática pela Universidade Católica de Brasília (UCB) e, atualmente, é Professor de Matemática na Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal.

Este trabalho é dedicado a toda minha família, em especial, a minha esposa, ao meu filho e aos meus pais que muito me apoiam e incentivam.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que está sempre do meu lado em todos os momentos.

Agradeço a minha esposa Débora e ao meu filho Davi Felipe pelo apoio e confiança durante esses 2(dois) anos de curso e que me motivam sempre a ser um esposo e pai melhor.

Agradeço aos meus pais José Ivandi e Teresa de Fátima e aos meus irmãos Fabiana, Maria Cecília e Cléber por tudo que me ofereceram e que fizeram eu me tornar a pessoa que sou hoje.

Agradeço aos demais familiares (sogra, sogro, cunhados, sobrinhas, etc) que de alguma forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradeço a todos os professores da UFG que contribuíram e aprimoraram a minha fundamentação teórica como professor de matemática, em especial, à minha orientadora Dra. Lidiane Santos que se dedicou no auxílio à concretização deste trabalho, me dando conselhos, contribuições e orientações.

Agradeço a todos os colegas do PROFMAT, em especial, aos colegas Afonso, Vanessa e seu esposo Edson (nosso motorista particular), que de alguma forma compartilharam e contribuíram para que este sonho pudesse ser realizado.

Agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela iniciativa em criar o programa PROFMAT que proporciona a vários professores e professoras a oportunidade de se qualificarem.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

O objetivo principal desse trabalho é verificar que podemos atribuir ao lançamento oblíquo uma abordagem matemática. Para chegarmos a esta conclusão, abordamos assuntos importantes da Matemática e da Física, como funções afim e quadrática, e movimentos uniforme e uniformemente variado. Tais conceitos foram apresentados para facilitar o entendimento e implementar uma equação que permita determinar o instante de subida, a altura máxima e o alcance horizontal, conhecendo um ângulo de tiro, a velocidade inicial e a aceleração da gravidade.

Palavras-chave

Lançamento Oblíquo, Matemática, Função Quadrática, Movimento Uniformemente Variado.

Abstract

The main goal of this work is to verify that we can assign the oblique launch a mathematical approach. To reach this conclusion, we address important issues of mathematics and physics, as linear functions and quadratic functions , and uniform and uniformly varied movements. These concepts were presented to facilitate understanding and implement an equation that allows to determine the moment of rise, the maximum height and horizontal reach, knowing an shot's angle, the initial velocity and gravity's acceleration.

Keywords

Oblique launch, Math, Quadratic function, Uniformly Varied Movement.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

É comum em sala de aula se deparar com assuntos de difícil compreensão por parte dos alunos do Ensino Médio, principalmente por parte daqueles que iniciam seus estudos nesta nova etapa. Assuntos como funções, em Matemática, e movimento uniformemente variado, em Física, parecem tirar o sono da maioria dos alunos.

Como professores, ficamos frustrados em determinadas situações e começamos a procurar culpados para tamanha dificuldade apresentada. Portanto, tal trabalho tem como meta, além dos objetivos abaixo apresentados, auxiliar o aluno, na sua capacidade crítica, que é possível desenvolver o conhecimento científico por meio de outras estratégias.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Ensino Médio, uma das competências a serem perseguidas durante a educação básica e complementar do Ensino Fundamental é a contextualização das ciências no âmbito sócio cultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

Por isso, os principais objetivos deste trabalho são:

1. Despertar o interesse e a curiosidade do aluno pela Matemática;

2. Mostrar a interdisciplinariedade que a Matemática tem com outras áreas, neste caso a Física;

3. Ampliar o conhecimento adquirido em ambas disciplinas, mostrando que podemos resolver um exercício de Física por meio de um conceito matemático.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos uma introdução ao estudo das funções, abordando a sua definição e a definição de gráfico, dando logo após uma maior ênfase no estudo das funções afim e quadrática.

No Capítulo 2 será abordada a definição de derivadas tanto pela interpretação geométrica quanto pela interpretação cinemática, apesar de tal conteúdo não ser abordado no ensino Médio. Além de alguns conceitos físicos importantes para o desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 3 abordamos conceitos da Física, como os movimentos uniforme e uniformemente variado.

No Capítulo 4 apresentamos a definição de Lançamento Oblíquo - abordando os assuntos tratados no Capítulo 3, além de darmos um enforque matemático a este assunto.

E, por fim, no Capítulo 5, mostramos alguns exemplos sobre lançamento oblíquo e suas respectivas resoluções usando tanto a abordagem da Física quanto a abordagem da Matemática.

Vale, também salientar, que o livro [10] teve um importante papel no desenvolvimento desta dissertação.

Espero que tal trabalho supere as expectativas alcançando, assim, os seus objetivos.

Capítulo 1

O Estudo da Função Afim e da Função Quadrática

Neste capítulo, vamos rever os principais tópicos sobre *funções*, como definição, domínio, imagem e gráfico. Também vamos rever as propriedades referentes às funções afim e quadrática.

1.1 Estudo das Funções

Nesta seção, definimos função por meio da relação entre os elementos de dois conjuntos quaisquer, além da noção de domínio e imagem de uma função. A definição de produto cartesiano e de gráfico de uma função também é exposta nesta seção.

Considere dois conjuntos não vazios A e B. Podemos definir uma função f de A em B, como:

Definição 1.1.1. *[3] Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação f de A em B é uma função se para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$.*

Alguns pontos devemos levar em consideração em relação a Definição 1.1.1. Primeiro, que usamos $f : A \to B$ para denotar que f é uma função de A em B. E a visualização de uma função $f : A \to B$ por meio de uma representação de diagramas expressa bem a Definição 1.1.1, pois cada seta indica que cada elemento $x \in A$ está associado a um único elemento $y \in B$ (Figura 1.1).

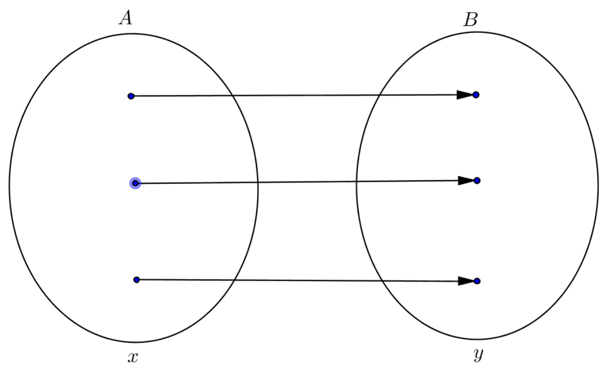


Figura 1.1: Definição de Função por Diagramas

Denotamos, então assim, o elemento y associado a x por $y = f(x)$, sendo y denominado **imagem** de x pela função f.

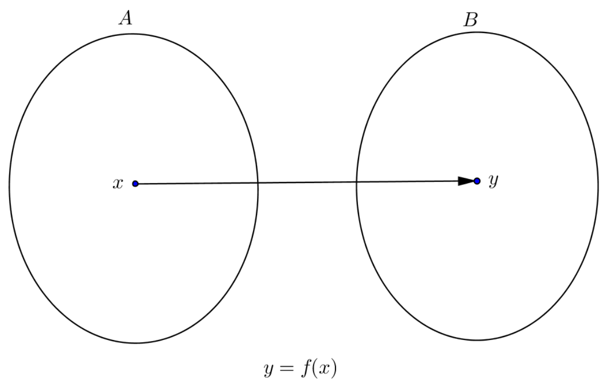
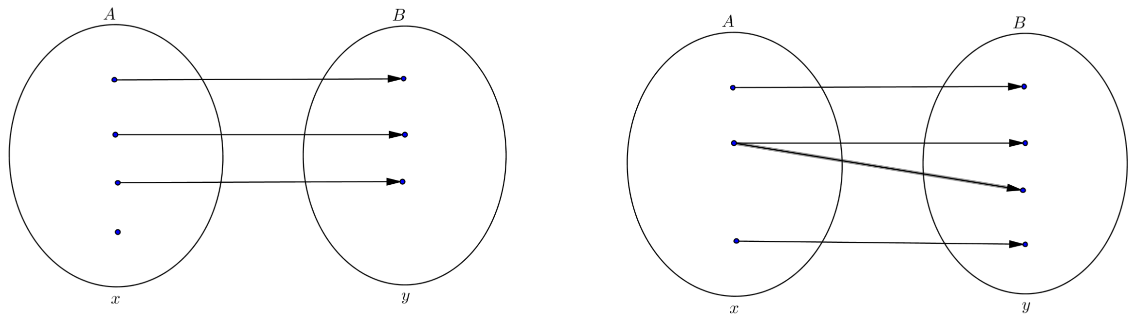


Figura 1.2: Representação de Função por Meio de Diagramas

Outro ponto que deve ser observado é que a definição é bem exata no termo **para**

todo, mostrando assim que uma representação de diagramas conforme o parágrafo anterior pode ou não ser uma função. Podemos ter elementos do conjunto A a partir dos quais não *parte* nenhuma seta (Figura 1.3(a)), como pode haver mais de uma seta *partindo* de um mesmo elemento de A (Figura 1.3(b)). Nestes dois casos, o diagrama colocado não representa uma função.



(a) (b)

Figura 1.3: Diagramas que Não Representam Funções.

Antes de definirmos a *relação* entre dois conjuntos, vamos definir *produto cartesiano.*

Definição 1.1.2. *Dados dois conjuntos não vazios A e B, seu produto cartesiano* $A \times B$ *é o conjunto* $A \times B = \{(x, y);\ x \in A \text{ e } y \in B\}$.

Com base na representação de diagramas da Figura 1.1, podemos dizer que uma função é um caso particular de uma **relação** entre dois conjuntos, de acordo com a definição a seguir:

Definição 1.1.3. *Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação de A em B é um subconjunto* F *do produto cartesiano* $A \times B$*, ou seja,* F *é o conjunto de pares ordenados* (x, y)*, com* $x \in A$ *e* $y \in B$.

O exemplo abaixo nos mostra um procedimento a qual podemos recorrer para construirmos uma relação F entre conjuntos não-vazios.

Exemplo 1.1.4. *Considere os conjuntos* $A=\{0,\ 1,\ 2\}$*,* $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ *e a seguinte relação* $F = \{(x, y) \in A \times B; y = x + 1\}$ *e vamos determinar* $A \times B$ *e o conjunto* F.

O conjunto $A \times B = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,1), (1,2), (1,3),$
$(1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4)\}$.

O conjunto F definido acima é formado por todos os pares ordenados que obedecem a relação $y = x + 1$. Logo, F=$\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$.

Observe que $F \subset A \times B$, conforme exposto acima. É fácil também verificar pela Definição 1.1.1 que o conjunto $F = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ representa uma função $f : A \to B$, já que cada elemento do conjunto A está relacionado a um único elemento do conjunto B.

Ao trabalharmos com uma função $f : A \to B$, denominamos os conjuntos A e B, respectivamente, de **domínio** e **contradomínio** da função f. Logo, no Exemplo 1.1.4, o conjunto A é domínio de f e o conjunto B é contradomínio de f.

Dada uma função $f : A \to B$, o **conjunto imagem**, ou somente **imagem** de f, denotado aqui por $Im(f)$, é o conjunto dos elementos $y \in B$ tal que existe $x \in A$ com $y = f(x)$, ou seja,

$$Im(f) = \{f(x) \in B; x \in A\}. \tag{1.1}$$

Note que $Im(f) \subset B$.

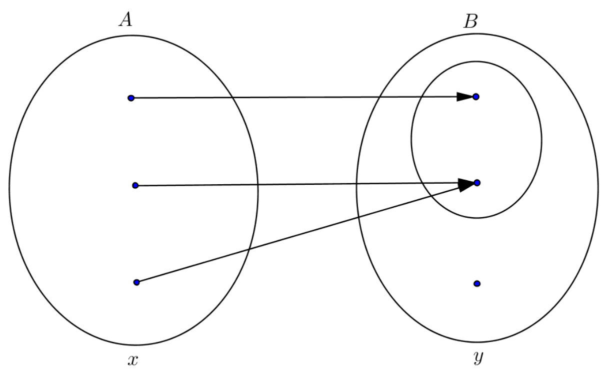


Figura 1.4: Conjuntos Domínio, Contradomínio e Imagem

É comum trabalharmos com funções $f : A \to B$ tais que $A, B \subset \mathbb{R}$. Nestes casos, indicamos o elemento $f(x) \in B$ associado a um elemento genérico $x \in A$, por meio de uma *expressão* em x, tal qual representa uma regra que a função deve satisfazer. Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 1.1.5. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = 2x$*. Vamos determinar* $f(0)$*,* $f(1)$ *e* $f(2)$*.*

Observe que a definição de função é verificada, pois para cada $x \in \mathbb{R}$, temos associado um único número real $y = f(x)$. De fato, $f(0) = 2.0 = 0$, $f(1) = 2.1 = 2$ e $f(2) = 2.2 = 4$.

O exemplo citado acima, também pode ser denotado pela seguinte correspondência

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto 2x.$$

É comum trabalharmos com funções $f : A \to \mathbb{R}$ tais que $A \subset \mathbb{R}$. Neste caso, diremos que f é uma *função real de uma variável real.*

Para finalizarmos, damos uma definição sobre gráfico de uma função.

Definição 1.1.6. *[3] Dada uma função* $f : A \to B$*, o gráfico de* f *é o subconjunto* G_f *do produto cartesiano* $A \times B$*, definido por* $G_f = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\}$*.*

Quando A=B=$\mathbb{R}$, temos que A e B representam retas numeradas e $A \times B$ representa um plano, munido com um sistema cartesiano de coordenadas. Tal sistema é denotado por $x0y$.

É importante compreender que nem todo subconjunto do plano (sistema cartesiano xOy) representa um gráfico de uma função. Suponha uma função real de uma variável real $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e considere que $(x_0, y_0) \in G_f$. Logo, pelas Definições 1.1.1 e 1.1.6 temos que para $x_0 \in A$ existe apenas um $y_0 \in B$ tal que $y_0 = f(x_0)$. Isso significa que a reta vertical $x = x_0$ intersecta o gráfico de f apenas uma única vez.

Por outro lado, se G é um subconjunto do plano tal que a reta vertical $x = x_0$ intersecta G em pelo menos dois pontos, então G não representa o gráfico de função alguma. Pois, caso contrário, temos $y_0 = f(x_0) = y_1$ conforme a Figura 1.5 a seguir.

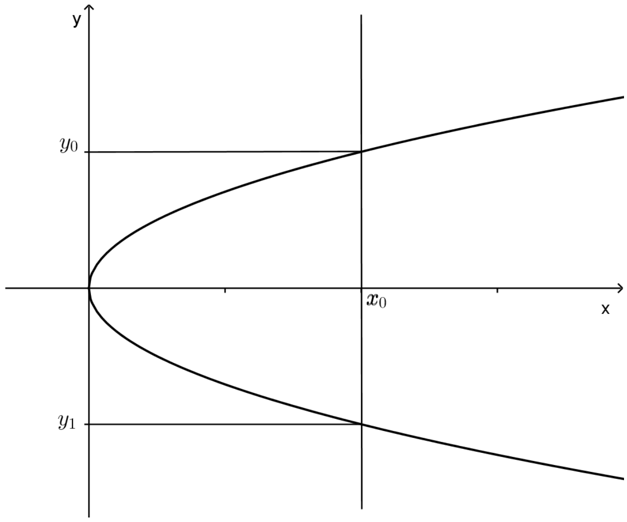


Figura 1.5: Não Representa uma Função

1.2 Função Afim

Nesta seção fazemos um estudo da função afim, analisando a sua definição e seu gráfico. A função afim desempenha um papel importante em outras áreas do conhecimento, como administração, economia, entre outras.

Definição 1.2.1. *[1] Uma função* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *chama-se afim quando, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *o valor f(x) é dado por uma expressão do tipo* $f(x) = ax + b$*, onde* a *e* $b \in \mathbb{R}$ *são constantes e* $a \neq 0$.

O exemplo a seguir é uma aplicação clássica da função afim.

Exemplo 1.2.2. *Uma corrida de táxi custa a reais por km rodado mais uma taxa fixa de b reais, chamada "bandeirada". Então o preço de uma corrida de* x *km é* $f(x) = ax + b$ *reais.*

Pela Definição 1.2.1 é fácil verificar que numa função afim $f(x) = ax + b$, o número b que representa $f(0)$ chama-se o *valor inicial*, e que no exemplo representa a "bandeirada", ou seja, o valor fixo. O coeficiente a que representa $f(1) - f(0)$ é chamado de *taxa de variação* de f e no exemplo representa o que está variando conforme a quilometragem x rodada. Segundo [2], o motivo para esta denominação é que, para quaisquer

$x, h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, tem-se $a = [f(x+h) - f(x)]/h$. Portanto, a é a variação de $f(x)$ por unidade de variação de x.

Isto leva à caracterização das funções afins, dada pelo Teorema a seguir.

Teorema 1.2.3. *(Caracterização das Funções Afins) Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente. Se a diferença $f(x+h) - f(x) = \phi(h)$ depender apenas de h, então f é uma função afim.*

A demonstração de tal Teorema é uma aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Demonstração. Supomos que a função f seja crescente. Logo, $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ também é crescente, com $\phi(0) = 0$. Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, temos que $f(nx) = n.f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^+$. Portanto, $\phi(nh) = n.\phi(h)$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $h \in \mathbb{R}$.

Então, mais uma vez pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo $a = \phi(1)$, tem-se $\phi(h) = ah$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Ou seja, $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0) = b$, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A demonstração no caso em que f é decrescente é análoga. □

O coeficiente a também pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos (quaisquer) x_1 e x_2. De fato, verifica-se que

$$f(x_1) = ax_1 + b \tag{1.2}$$

e

$$f(x_2) = ax_2 + b. \tag{1.3}$$

Subtraindo (1.2) de (1.3) obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

e portanto,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

O gráfico de uma função afim é uma reta. Para provarmos esta afirmação, usamos a fórmula da distância entre dois pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, segundo a qual se tem $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Considere uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ e seja $G_f = \{(x, y); (x, ax+b)\} \subset \mathbb{R}^2$. Sejam M=$(x_1, ax_1+b)$, N=$(x_2, ax_2+b)$ e P=(x_3, ax_3+b) três pontos quaisquer do gráfico. Sem perda de generalidade, suponha que $x_1 < x_2 < x_3$. Mostramos a seguir que $d(M, N) + d(N, P) = d(M, P)$.

De fato, temos que

$$d(M, N) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

De modo análogo,

$$d(N, P) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}.$$

Logo,

$$\text{d(M,N)+d(N,P)}=(x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} =(x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} =\text{d(M,P)}.$$

Portanto, verificamos que três pontos quaisquer M, N e P sobre o gráfico de f são colineares, o que significa que o gráfico G_f representa uma reta.

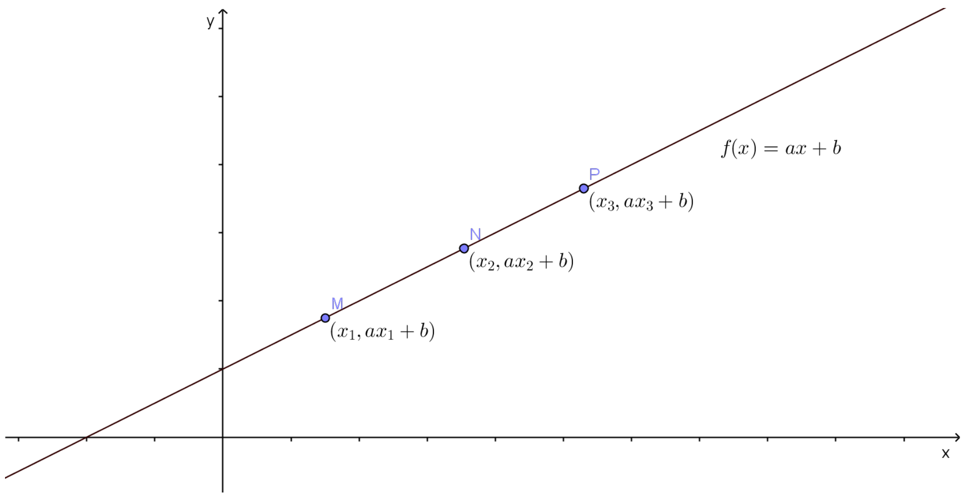


Figura 1.6: Gráfico da Função Afim

Quando $a > 0$, a função afim $f(x) = ax + b$ é crescente, isto é, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$. De fato, se $x_1 < x_2$, então $x_2 - x_1 > 0$. Daí

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) > 0,$$

ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$.

De modo análogo, se $a < 0$, f é decrescente, ou seja, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

Vale ressaltar os casos particulares da função afim, que são:

1. A função linear representada na forma $f(x) = ax$; e

2. A função constante representada na forma $f(x) = b$.

1.3 Função Quadrática

Nesta seção, apresentamos a definição de função quadrática, a forma canônica do trinômio da função quadrática e o estudo do gráfico desta função com seus principais elementos.

Começamos considerando o seguinte exemplo.

Exemplo 1.3.1. *A soma das medidas das diagonais de um losango é 8 cm. Qual o maior valor possível da área desse losango?*

Problemas como este são solucionados por meio de uma função quadrática.

Definição 1.3.2. *[1] Uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes com $a \neq 0$.*

A origem das funções quadráticas está ligada à resolução de equações do segundo grau. Um dos mais antigos problemas, que recae numa equação desse tipo, consiste em achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p.

Ou seja, se um desses números chamarmos de x, o outro é chamado de $s - x$. Logo, pelos dados do problema temos a seguinte equação

$$x.(s - x) = p. \tag{1.4}$$

Manipulando a Equação (1.4) encontramos

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Encontrar o número x e, consequentemente, o número $s - x$, é resolver a equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$. Em outras palavras, é achar os valores de x para os quais a função quadrática $f(x) = x^2 - sx + p$ se anula. Esses valores são chamados de *zeros* da função quadrática ou de *raízes* da equação correspondente.

É importante observar que se x for uma raiz da equação $x^2 - sx + p = 0$, então $s - x$ também o é, pois

$(s - x)^2 - s(s - x) + p = s^2 - 2sx + x^2 - s^2 + sx + p = x^2 - sx + p = 0.$

Deve-se observar entretanto que apesar de ser um problema clássico, nem sempre existem dois números cuja soma é s e cujo produto é p. Por exemplo, não existem dois números reais cuja a soma seja 6 e o produto seja 10. Pois se pensarmos em dois números naturais em que o produto seja 10, temos como possíveis resultados 2 e 5 ou 1 e 10. Como consequência temos que a soma são 7 ou 11, respectivamente.

Um dos procedimentos mais importante e útil para o desenvolvimento do estudo da função quadrática é o *completamento do quadrado*. De um modo geral, dada a função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, podemos, manipulando-a, encontrar a expressão abaixo:

$$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{1.5}$$

Chamando $-\dfrac{b}{2a} = m$ e $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = k$, verificamos facilmente que $k = f(m)$.

Com esta notação, temos, para todo $x \in \mathbb{R}$ que $f(x) = a(x-m)^2+k$, onde $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = f(m)$.

Esta representação é chamada *forma canônica* do trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Algumas observações importantes sobre a forma canônica de uma função quadrática:

Observação 1.3.3. *A forma canônica nos fornece, quando $b^2 - 4ac \geq 0$, as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, pois esta igualdade é equivalente a*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.6}$$

A igualdade representada pela Equação (1.6) é a chamada Fórmula de *Bháskara*.

De fato, pela Igualdade (1.5) fazendo $f(x)$ igual a zero obtemos:

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$$

$$a(x+\frac{b}{2a})^2 = -\frac{4ac-b^2}{4a}$$
$$(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$(x+\frac{b}{2a}) = \pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Na fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, o número $\Delta = b^2 - 4ac$ é denominado o *discriminante* da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. É fácil verificar que, quando $\Delta > 0$, a equação $f(x) = 0$ tem duas raízes reais e diferentes. Quando $\Delta = 0$, a mesma equação possui duas raízes reais e iguais e quando $\Delta < 0$, a equação $f(x) = 0$ não possui raiz real (veja Equação 1.6).

Observação 1.3.4. *As expressões* $-\dfrac{b}{2a} = m$ *e* $\dfrac{4ac-b^2}{4a} = k$ *coincidem com as coordenadas do vértice da parábola, que são dados mais adiante. Estas coordenadas também podem ser encontradas por meio das raízes de uma função quadrática. Suponha que* $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *e* $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *sejam essas raízes. A média aritmética delas nos dá a abscissa do vértice, ou seja,*

$$x_v = -\frac{b}{2a}. \tag{1.7}$$

Substituindo o valor x_v *da Equação 1.7 na Equação 1.5, obtemos*

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}. \tag{1.8}$$

As coordenadas do vértice (x_v, y_v) representam *o ponto de máximo* ou de *mínimo* da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Definição 1.3.5. *[1] Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e* *de d, conforme a Figura 1.7 abaixo.*

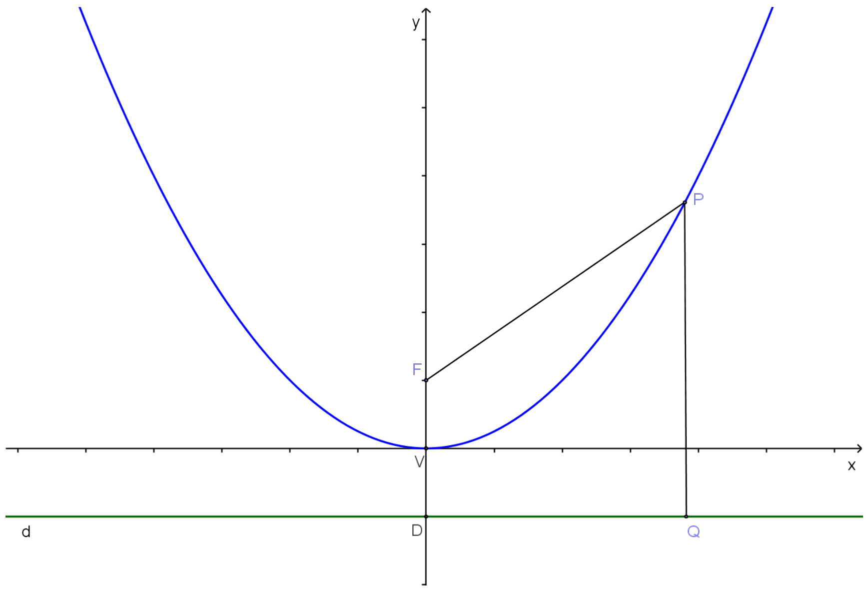


Figura 1.7: Parábola

A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se o *eixo* da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se o *vértice* dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e o ponto D - interseção do eixo com a diretriz.

Proposição 1.3.6. *Considere a parábola cujo foco é o ponto* $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ *e cuja diretriz é a reta horizontal* $y = -\dfrac{1}{4a}$. *Então, a equação de tal parábola é* $f(x) = y = ax^2$.

Demonstração. Para confirmarmos isso, vamos utilizar a definição de parábola, ou seja, que $d(P, F) = d(P, Q)$, onde P(x, y) é um ponto do gráfico e Q$\left(x, -\dfrac{1}{4a}\right)$ é um ponto sobre a diretriz.

Com efeito, se $d(P, F) = d(P, Q)$, então temos pela fórmula da distância entre dois pontos que

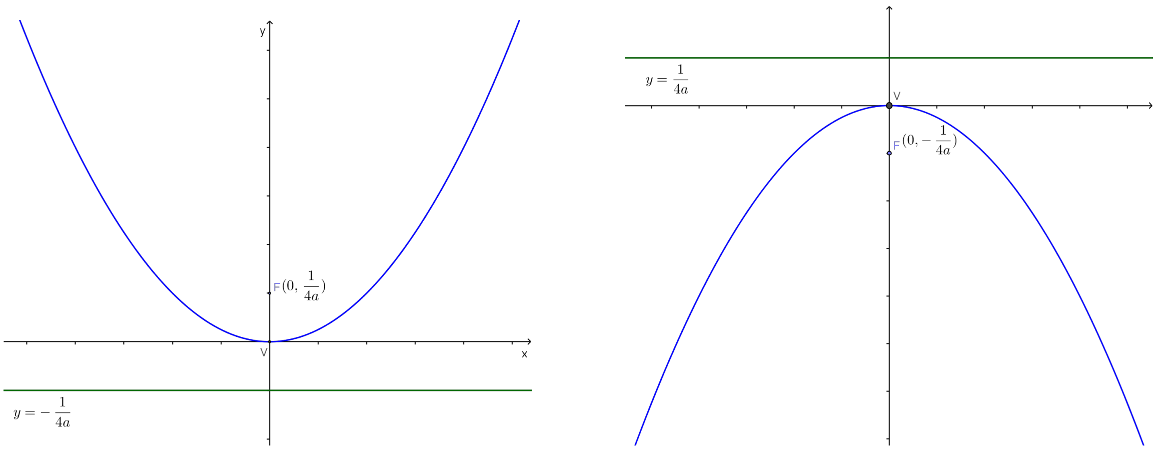
$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2$$

Desenvolvendo esta última igualdade, obtemos

$$
\begin{aligned}
x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 &= \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 \\
x^2 + y^2 - 2y\frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2} &= y^2 + 2y\frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2} \\
x^2 &= \frac{y}{a} \\
y &= ax^2.
\end{aligned}
$$

□

As figuras abaixo representam os gráficos da função $y = ax^2$.



(a) (b)

Figura 1.8: Gráficos da Função $y = ax^2$

A partir do gráfico de $f(x) = y = ax^2$ chegamos ao gráfico das funções $g(x) = a(x-m)^2$ e $h(x) = a(x-m)^2 + k$.

O gráfico de $g(x) = a(x-m)^2$ resulta de $f(x) = ax^2$ pela translação horizontal de $(x, y) \mapsto (x+m, y)$, que leva o eixo vertical $x = 0$ na reta vertical $x = m$.

Do mesmo modo, o gráfico da função quadrática $h(x) = a(x-m)^2 + k$ resulta de $g(x) = a(x-m)^2$ pela translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y+k)$, que leva o eixo Ox na reta $y = k$ e a reta $y = -\dfrac{1}{4a}$ na reta $y = k - \dfrac{1}{4a}$.

Se $a > 0$, a parábola $y = ax^2$ tem a concavidade voltada para cima e seu vértice $(0, 0)$ é o ponto de menor ordenada. Se $a < 0$, a concavidade da parábola $y = ax^2$ é voltada para baixo e seu vértice $(0,0)$ é o ponto de maior ordenada.

É importante também compreender o significado gráfico dos coeficientes a, b, c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

O coeficiente a mede a abertura da parábola. Quanto maior for a mais fechada será a parábola e quanto menor é a mais aberta é a parábola.

O coeficiente b é a inclinação da reta tangente à parábola no ponto P=$(0, c)$, interseção da parábola com o eixo y. No Capítulo 2, expomos sobre derivada em um ponto e aprofundamos mais sobre o coeficiente b ser a inclinação da reta tangente à parábola.

O valor c que representa $f(0)$ é a ordenada do ponto em que a parábola corta o eixo Oy.

Para finalizar a seção, resolvemos o Exemplo 1.3.1.

Representando as diagonais maior e menor do losango por D e d, temos que $D + d = 8$. Sabemos que a área do losango A é dado por

$$A = \frac{D.d}{2}. \tag{1.9}$$

Da igualdade $D + d = 8$, temos

$$d = 8 - D. \tag{1.10}$$

Substituindo a Equação (1.10) na Equação (1.9), obtemos

$$A = \frac{D.(8 - D)}{2}.$$

Ou seja,

$$A = \frac{-D^2 + 8D}{2}. \tag{1.11}$$

A equação acima representa uma função quadrática em que a área A está em função da diagonal D. Logo, a área máxima é dada pela ordenada do vértice da parábola, ou seja, pela Equação (1.8). Logo,

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$A = -\frac{4^2 - 4.\left(-\frac{1}{2}\right).0}{4.\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

já que os coeficientes a, b e c são, respectivamente, $-\frac{1}{2}$, 4 e 0. Portanto,

$$A = -\frac{16}{(-2)}$$

$$A = 8\ cm^2.$$

Logo, a maior área do losango cuja a soma das medidas das diagonais é 8 cm é 8 cm^2.

Capítulo 2

Velocidade e Aceleração por Meio de Derivadas

O objetivo deste capítulo é relembrar os principais conceitos físicos, usados neste trabalho, por meio de derivadas.

2.1 Reta Tangente e Declive Angular

Nesta seção definimos reta tangente que passa por um ponto em uma curva e também a derivada pela interpretação geométrica.

Inicialmente, traçamos a reta tangente à uma curva dada num determinado ponto dessa curva. Vamos considerar que a curva seja o gráfico de uma determinada função f.

Seja a e $f(a)$ as coordenadas do ponto P, onde deseja-se traçar a reta tangente. Considere um ponto Q do gráfico de f, cuja abscissa é $a+h$ e ordenada $f(a+h)$. Conforme o gráfico da Figura 2.1 , o declive da reta secante PQ é dado pelo quociente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

chamado *razão incremental*.

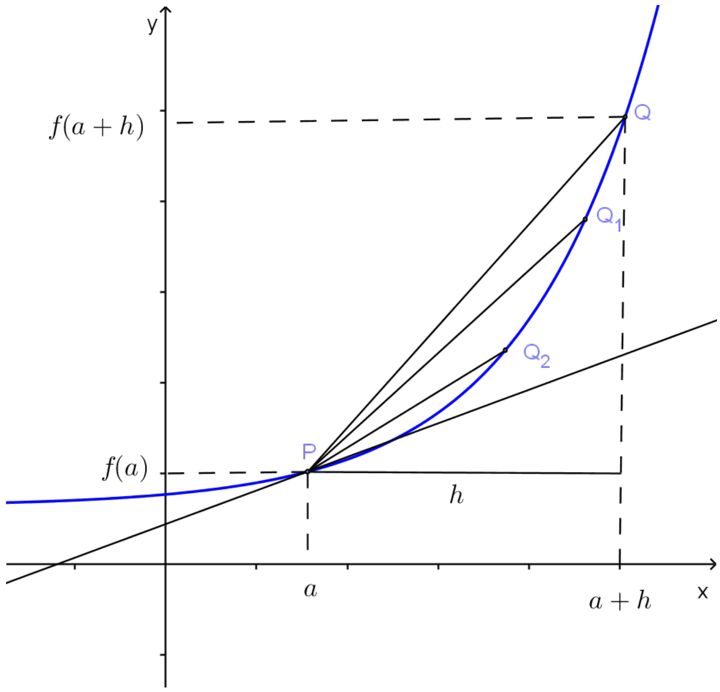


Figura 2.1: Reta Tangente no Ponto a

Considere o ponto P fixo. Enquanto o ponto P está fixo, o ponto Q se aproxima de P, passando por sucessivas posições Q_1, Q_2, Q_3, etc. Assim, a secante PQ assume as posições das secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3, etc. O que observamos com esse procedimento é que a razão incremental, que é o declive da secante, se aproxima de um valor m, à medida que o ponto Q se aproxima de P. Caso isso ocorra, podemos definir o que é reta tangente.

Definição 2.1.1. *[4] A reta tangente à uma curva no ponto P é a reta que passa por este ponto P e cujo declive ou coeficiente angular ou inclinação da reta é m.*

É importante salientar que fazer Q se aproximar de P consiste em fazer o número h cada vez mais próximo de zero na razão incremental. Neste caso, dizemos que h está *tendendo* a *zero* e representamos como "$h \to 0$".

É importante observar que quando $h \to 0$, a razão incremental se aproxima de um valor finito m. Ou seja, m é o *limite da razão incremental com h tendendo a zero* caso este limite exista. Logo,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{2.1}$$

O exemplo a seguir nos mostra como determinar a reta tangente utilizando a sua definição.

Exemplo 2.1.2. *Encontre a equação da reta tangente à parábola* $f(x) = x^2$ *no ponto* $P{=}(2,4)$.

Temos que $f(2) = 2^2 = 4$ e $f(2+h) = (2+h)^2 = 4 + 4h + h^2$. Logo,

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

Portanto, sabemos por (2.1) que

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 4.$$

Da geometria analítica, sabe-se que a reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$, tem como equação

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Então,

$$y - 4 = 4(x - 2).$$

Manipulando a equação acima, obtemos

$$y = 4x - 4$$

que é a equação da reta tangente procurada.

2.2 Interpretação Geométrica e Cinemática da Derivada

Nesta seção definimos a derivada de uma função em um ponto, tanto pela interpretação geométrica quanto por uma interpretação cinemática (utilizando o gráfico do espaço pelo tempo), além de apresentar alguns exemplos aplicando ambas as definições.

Na seção anterior foi definido o declive de uma curva $y = f(x)$, num ponto $x = a$, como o limite da razão incremental quando $h \to 0$ dada pela Equação (2.1).

Pela Equação (2.1) observa-se que o valor de m depende do valor de $x = a$. Ou seja, o valor de m está em função de a. Isto nos dá a ideia da definição de *derivada* da função f pela interpretação geométrica.

Definição 2.2.1. *[5] A derivada de uma função f no ponto $x = a$ é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a.*

Denotamos a derivada de f no ponto a (se esta existir) por $f'(a)$. Neste caso escrevemos,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{2.2}$$

Observe que,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.3}$$

É importante salientarmos que há uma interpretação cinemática para o estudo da derivada. Da Física, sabemos que a posição de um ponto material em movimento, sobre uma curva r - trajetória - conhecida, pode ser determinada em cada instante t, por meio de sua abscissa s, medida sobre a curva r. Portanto, a expressão que dá a posição s em função do instante t é

$$s = s(t)$$

Esta expressão é chamada *equação horária.*

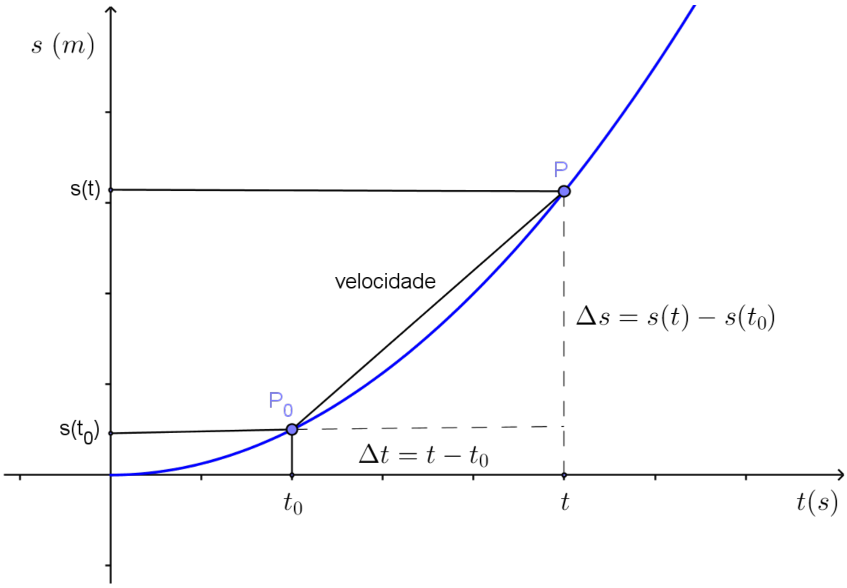


Figura 2.2: Equação Horária do Espaço em Função do Tempo

Observando a Figura 2.2, dado um instante t_0 e sendo t um instante diferente de t_0, podemos determinar a *velocidade média* entre estes instantes, definindo-a como o quociente

$$V_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2.4}$$

Chama-se de *velocidade escalar* do ponto no instante t_0 ou *velocidade instantânea* o limite

$$V(t_0) = \lim_{t \to t_0} V_m = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0). \tag{2.5}$$

Logo, segundo [5] podemos concluir que a derivada da função $s = s(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0.

Sabe-se também que a velocidade v de um ponto material em movimento pode variar de instante para instante. A equação que dá a velocidade v em função do tempo t é

$$v = v(t).$$

A expressão acima é chamada *equação da velocidade* no ponto t.

Dado um instante t_0 e um instante t diferente de t_0, chama-se *aceleração escalar* *média* do ponto entre os instantes t_0 e t o quociente

$$a_m = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{2.6}$$

Chama-se *aceleração escalar* do ponto no instante t_0 o limite

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} a_m = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_0). \tag{2.7}$$

E novamente conclui-se segundo [5] que a derivada da função $v = v(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0.

Exemplo 2.2.2. *Calcule a derivada $f'(x)$ da função $f(x) = x^2$, pela definição da derivada.*

Como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} 2x + h \\
f'(x) &= 2x.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.3. *Calcule a derivada $f'(x)$ da função $f(x) = 3x^2 - 5x$, pela definição da derivada.*

Temos por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 5(x+h)] - (3x^2 - 5x)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h - 3x^2 + 5x}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(6x + 3h - 5)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 6x + 3h - 5$$
$$f'(x) = 6x - 5.$$

Exemplo 2.2.4. *Qual é a derivada de x^n, utilizando a definição de derivada?*

Vamos determinar a derivada de $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro positivo, utilizando a resolução feita para calcular a derivada de x^2. Logo,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}. \tag{2.8}$$

Desenvolvendo $(x+h)^n$ pelo binômio de Newton, obtemos

$$(x+h)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} h + C_2^n x^{n-2} h^2 + ... + C_n^n h^n.$$

Como sabemos que $C_p^n = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dbinom{n}{p}$, temos

$$(x+h)^n = x^n + n x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + ... + h^n. \tag{2.9}$$

Portanto, na Equação (2.8) substituindo a Expressão (2.9) temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + h^n - x^n}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1})}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + ... + h^{n-1}.
\end{aligned}$$

Fazendo h tender a zero, concluímos que

$$f'(x) = nx^{n-1}. \tag{2.10}$$

Observação 2.2.5. *A derivada de uma constante é zero.*

Exemplo 2.2.6. *Calcule a aceleração de uma partícula no instante t_0=5, sabendo que sua velocidade obedece à equação $v(t) = 2 + 3t$.(Unidades SI)*

A aceleração no instante $t_0 = 5$ é igual a derivada de v no instante t_0. Logo,

$$\begin{aligned}
v'(5) &= \lim_{t\to 5} \frac{v(t) - v(5)}{t-5} \\
v'(5) &= \lim_{t\to 5} \frac{(2+3t) - (2+3.5)}{t-5} \\
v'(5) &= \lim_{t\to 5} \frac{3t-15}{t-5} \\
v'(5) &= \lim_{t\to 5} \frac{3.(t-5)}{t-5} \\
v'(5) &= 3\ m/s^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.7. *A função horária de determinada partícula é dada por $s = 100 - 40t + 2t^2$(SI). Determine a função horária da velocidade e aceleração escalar usando derivadas.*

Pela Equação (2.5), temos que a derivada da função $s = s(t)$ dá a função horária

$v = v(t)$. Pelo Exemplo 2.2.4 e pela Observação 2.2.5, temos

$$s(t) = 100 - 40t + 2t^2$$

$$s'(t) = -40 + 4t = v(t).$$

Pela Equação (2.7) e pelo Exemplo 2.2.6, temos que a derivada da função horária $v = v(t)$ dá à aceleração escalar da partícula. Portanto,

$$v(t) = -40 + 4t,$$

$$v'(t) = 4\ m/s^2,$$

Ou seja,

$$a = 4\ m/s^2.$$

Para finalizar este capítulo, demonstramos que o coeficiente b da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ representa a inclinação da reta tangente à parábola no ponto $(0, c)$.

Proposição 2.2.8. *Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Então, b representa a inclinação da reta tangente à parábola no ponto $(0, c)$.*

Demonstração. Determinando $f(0)$ e $f(h)$, temos $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c$ e $f(h) = a.h^2 + b.h + c$. Pela Equação (2.3),

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a.h^2 + b.h + c - c}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h(a.h + b)}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} a.h + b$$

Como h tende a zero, logo

$$f'(0) = b.$$

$\square$

Capítulo 3

Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado

Neste capítulo apresentamos as principais características dos movimentos uniforme e uniformemente variado, como definições e, respectivas, funções horárias.

3.1 Movimento Uniforme

Antes de começarmos a falar do movimento uniforme é importante definirmos alguns conceitos físicos que são de suma importância para o entendimento deste capítulo e do Capítulo 4.

1. *Cinemática* [7]: parte da Mecânica que descreve os movimentos, sem investigar suas causas.

2. *Móvel* [9]: é todo corpo em movimento.

3. *Movimento* [9]: um corpo está em movimento quando sua posição varia no espaço, com o decorrer do tempo, relativamente a um dado referencial.

4. *repouso* [9]: um corpo está em repouso se sua posição permanece a mesma, no decorrer do tempo, relativamente a um dado referencial.

5. *referencial* [9]: é qualquer corpo que serve como referência para se definir a posição de um dado corpo.

6. *trajetória* [9]: é o caminho descrito pelo móvel.

7. *aceleração da gravidade(g)* [8]: é a aceleração constante que um corpo adquire quando, próximo a superfície terrestre, é abandonado de uma certa posição.

Considere o exemplo abaixo.

Exemplo 3.1.1. *Imagine-se dirigindo um carro numa estrada de maneira a manter o velocímetro sempre na mesma posição, indicando a mesma velocidade, por exemplo* $110km/h$*, durante um certo tempo.*

Isso significa que ao prosseguir durante um intervalo de tempo a esta velocidade, a cada hora percorre uma distância de $110km$. O movimento do veículo na situação descrita pelo exemplo é o que chamamos *movimento uniforme*.

Definição 3.1.2. *[8] O movimento uniforme é aquele em que o móvel tem velocidade escalar instantânea constante, coincidindo com a velocidade escalar média, qualquer que seja o intervalo de tempo considerado.*

Segundo [7], no movimento uniforme, o móvel percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais.

Observação 3.1.3. *No Capítulo 2, sobre Derivadas, foram definidos velocidade escalar média e velocidade instântanea.*

Considere, agora, que um móvel, em movimento uniforme, passe de uma posição ocupada no instante $t_0 = 0$, caracterizada pelo *espaço inicial* s_0 para uma posição caracterizada pelo espaço s num instante posterior t, conforme a Figura 3.1.

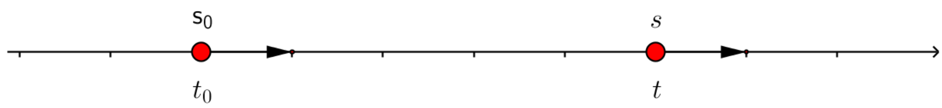


Figura 3.1: Trajetória de um Móvel em Movimento Uniforme

Como já foi visto na Definição 3.1.2, no movimento uniforme, a velocidade escalar média é igual à velocidade instantânea. Logo,

$$v_m = \frac{s - s_0}{t - t_0}.$$

Como $v_m = v$ e $t_0 = 0$, segue:

$$v = \frac{s - s_0}{t}. \tag{3.1}$$

Manipulando a Equação (3.1), obtemos:

$$s - s_0 = vt,$$

$$s = s_0 + vt. \tag{3.2}$$

A Equação (3.2) é o que chamamos *função horária do movimento uniforme*, sendo s_0 o espaço inicial e v a velocidade escalar constante para cada movimento.

É importante salientar que no movimento uniforme as acelerações média e instantânea são nulas, isto é,

$$a_m = a = 0.$$

De fato, como no movimento uniforme a velocidade é constante e diferente de zero, pela Equação (2.6), considerando $v(t) = v(t_0) = v$, temos

$$a_m = a = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{v - v}{t - t_0} = 0.$$

Outra maneira de provar que $a = 0$ é derivando a função velocidade.

A função horária do movimento uniforme ($s = s_0 + vt$) é uma função afim, assunto já abordado no Capítulo 1 e, portanto, é representada graficamente por uma reta de inclinação não nula. Esta inclinação não nula é a velocidade escalar.

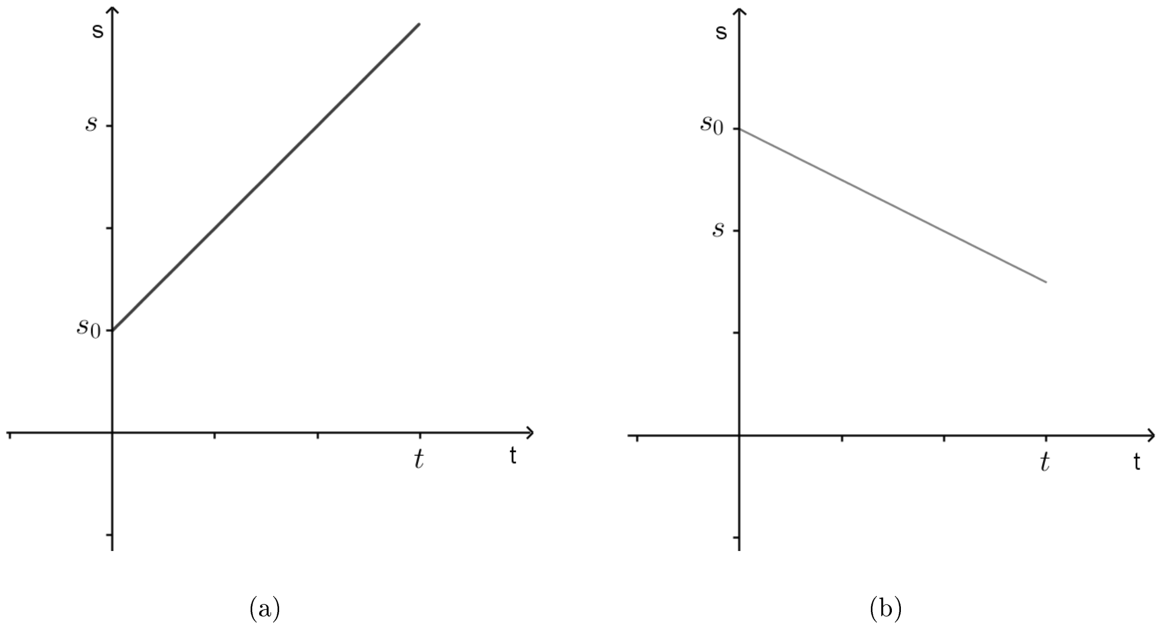


Figura 3.2: Gráfico do Espaço em Função do Tempo no Movimento Uniforme

Quando representamos graficamente a velocidade escalar, obtemos então um gráfico de uma função constante. Isto é, uma *reta paralela ao eixo dos tempos*, num sistema cartesiano ortogonal t0v.

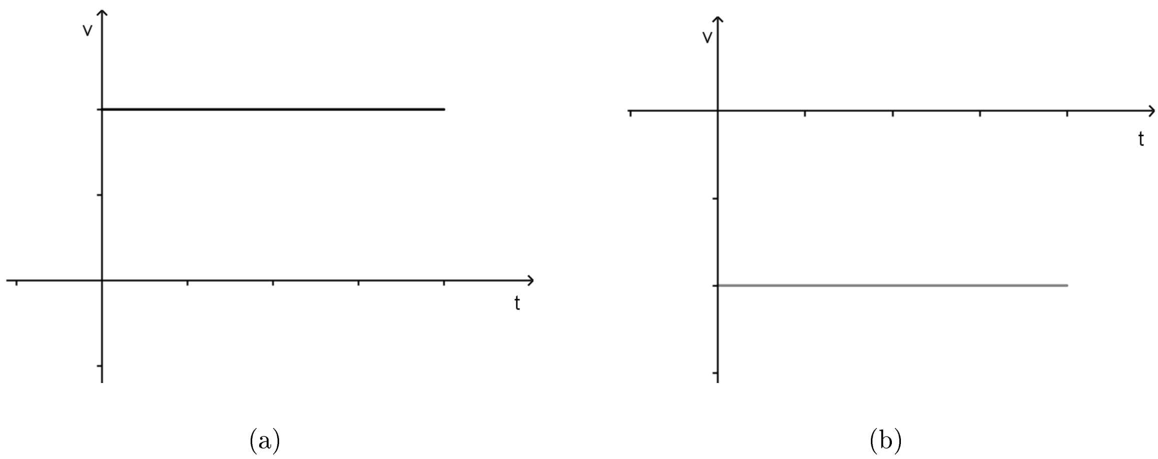
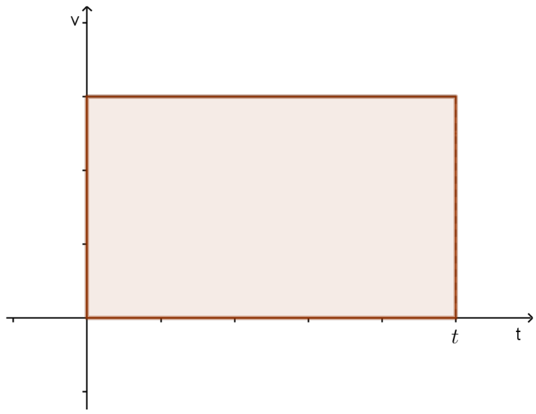
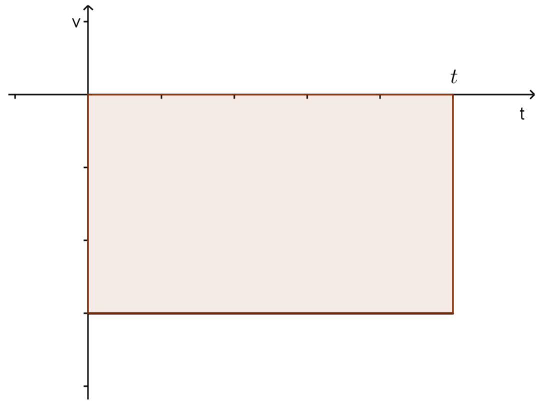


Figura 3.3: Gráficos da Velocidade em Função do Tempo no Movimento Uniforme

Observe na Figura 3.4 a seguir, que a área limitada pelo gráfico da função velocidade e eixo dos tempos, em um intervalo [0, t] é igual a variação do espaço Δs. Com efeito, a área do retângulo $= |v.t|$.



(a)



(b)

Figura 3.4: Área = Velocidade x Tempo

Vemos agora alguns exemplos sobre movimento uniforme.

Exemplo 3.1.4. *A função horária do movimento de um móvel, adotando unidades do Sistema Internacional, é* $s = 2 + 6t$. *Determine o espaço inicial do móvel, a sua velocidade e a variação de espaço nos vinte primeiros segundos de movimento.*

Segundo a Equação (3.2), temos que $s_0 = 2m$ e $v = 6m/s$. Já a variação do espaço nos vinte primeiros segundos seria dada por $s(20) - s(0)$. Logo,

$$s(20) = 2 + 6.20 = 122$$

e

$$s(0) = 2 + 6.0 = 2.$$

Portanto, $s(20) - S(0) = 122 - 2 = 120\ m$.

Exemplo 3.1.5. *Dois automóveis, A e B, realizam movimentos uniformes no mesmo sentido. No instante t=0, os automóveis estão a* 30 *km um do outro. Sabendo que* $v_A = 60\ km/h$ *e* $v_B = 40\ km/h$, *determine o instante em que A encontra B, sabendo que A está atrás de B, e a que distância da posição inicial de A ocorre esse encontro.*

Como os automóveis estão em movimentos uniformes, devem obedecer a Equação (3.2). Considerando $s_{0A} = 0$ e $s_{0B} = 30\ km$, temos:

$$s_A = 60t$$

e

$$s_B = 30 + 40t.$$

No instante em que A encontra B, temos $s_A = s_B$. Portanto,

$$60t = 30 + 40t,$$

$$20t = 30,$$

$$t = 1,5\ h.$$

Para determinarmos a que distância da posição inicial de A ocorre esse encontro, basta substituir $t = 1,5\ h$ em $s_A = 60t$. Logo,

$$s_A = 60.1,5$$

$$s_A = 90\ km.$$

3.2 Movimento Uniformemente Variado

Nesta seção, definimos movimento Uniformemente Variado, além de verificarmos as suas funções horárias e seus respectivos gráficos.

Definição 3.2.1. *[8] Movimento uniformemente variado (MUV) é o movimento em que a velocidade escalar varia uniformemente no decorrer do tempo.*

O MUV é aquele movimento em que a velocidade escalar sofre variações sempre *iguais em intervalos de tempos iguais.*

Como consequência, de acordo com [6], a *aceleração escalar instantânea* do movimento é constante. Ou seja, a aceleração média é igual à aceleração escalar em qualquer instante.

Considere o Exemplo 3.2.2 a seguir.

Exemplo 3.2.2. *A velocidade de uma partícula varia com o tempo desde o instante zero, segundo a tabela a seguir.*

$t(s)$	0	1	2	3	4
$v(m/s)$	3	7	11	15	19

Pela tabela acima, verificamos que a partir da velocidade escalar inicial $v_0 = 3\ m/s$, a velocidade escalar varia $4\ m/s$ a cada intervalo de um segundo decorrido. Logo, a aceleração escalar média e instantânea para o exemplo citado é $4\ m/s^2$, pois

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ a_m &= \frac{v(1) - v(0)}{1 - 0} = \frac{7 - 3}{1} \\ a_m &= 4\ m/s^2. \end{aligned}$$

Com base na definição de aceleração escalar média (veja a Equação 2.6 página 21), obtemos a função da velocidade escalar do *MUV*. Considere v_0 a velocidade escalar inicial no instante $t_0 = 0$ e v a velocidade escalar num instante t, conforme a figura abaixo.

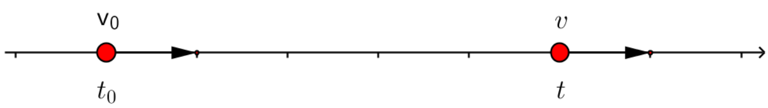


Figura 3.5: Variação da Velocidade em Função do Tempo

Como a aceleração média a_m é igual a aceleração instantânea a, pois no *MUV* a aceleração é constante, logo

$$\begin{aligned} a &= \frac{v - v_0}{t - 0}, \\ v - v_0 &= at. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$v = v_0 + at. \tag{3.3}$$

A Equação (3.3) acima é chamada *função horária da velocidade do MUV*. A velocidade escalar inicial v_0 e a aceleração escalar a são constantes para cada movimento.

A função da velocidade escalar em relação ao tempo no MUV é uma função afim, sendo representada graficamente por uma reta de inclinação não nula. Esta inclinação não nula representa a aceleração escalar.

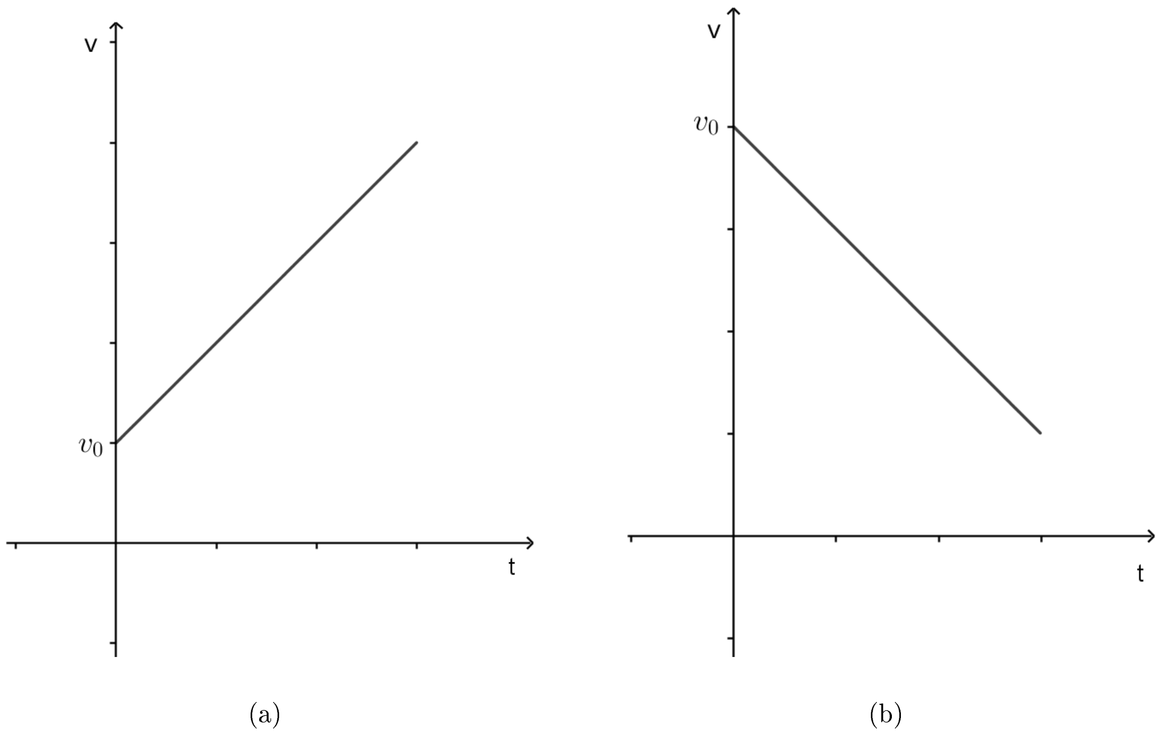


Figura 3.6: Gráficos da Velocidade em Função do Tempo no Movimento Uniformemente Variado

Na Seção 3.1 do Capítulo 3, que falamos sobre Movimento Uniforme, vimos que ao estudar o gráfico da velocidade, a área da figura compreendida entre a reta e o eixo dos tempos é a medida numérica do módulo da variação de espaço Δs sofrida pelo móvel. Isso também vale para o Movimento Uniformemente Variado.

Com base nisso, podemos determinar a função horária do movimento uniformemente variado.

Proposição 3.2.3. *Seja s o espaço final, s_0 o espaço inicial, v_0 a velocidade inicial e a a aceleração de um móvel, podemos expressar a função horária do MUV como* $s = s_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$.

Demonstração. À medida que um móvel descreve um MUV, sua posição varia sobre a trajetória. No instante inicial $t_0 = 0$, o móvel ocupa uma posição dada pelo espaço inicial s_0. Num instante posterior t, a posição do móvel corresponde ao espaço s.

Como vimos, a variação do espaço Δs, sofrida pelo móvel, pode ser calculada por meio da área no gráfico da velocidade em função do tempo.

A variação do espaço Δs é dada pela área do trapézio destacado conforme a figura abaixo.

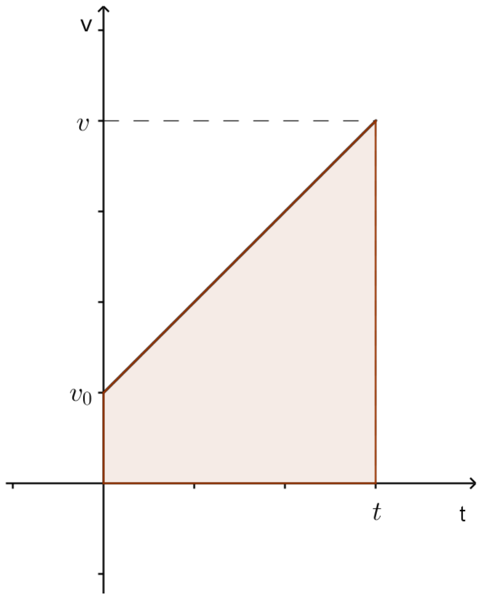


Figura 3.7: Gráfico que Representa a Variação do Espaço Δs

Assim,

$$\Delta s = \frac{v + v_0}{2} t.$$

Mas,

$$\Delta s = s - s_0$$

e

$$v = v_0 + at,$$

logo,

$$s - s_0 = \frac{v_0 + at + v_0}{2} .t$$

$$s - s_0 = \frac{2v_0 + at}{2} .t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{3.4}$$

□

Sendo a função horária do MUV uma função quadrática, o gráfico do espaço s em função do tempo t é uma parábola.

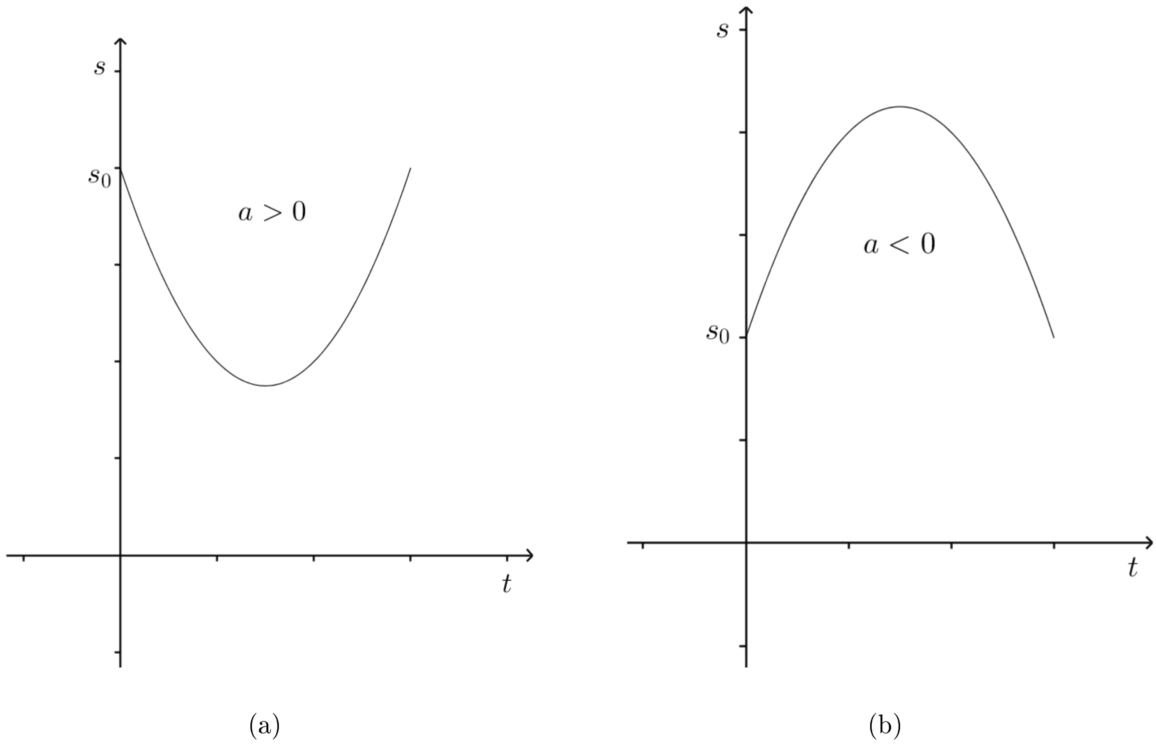


Figura 3.8: Gráficos do Espaço em Função do Tempo no Movimento Uniformemente Variado

Relembrando e comparando alguns conceitos vistos no primeiro capítulo, temos:

Observação 3.2.4. *A concavidade da parábola é determinada pelo sinal da aceleração escalar:*

1. *Aceleração escalar positiva: concavidade para cima;*

2. *Aceleração escalar negativa: concavidade para baixo.*

Observação 3.2.5. *O vértice da parábola corresponde ao instante em que a velocidade escalar do móvel se anula, isto é, ao instante em que o móvel muda de sentido.*

É importante salientar que no Capítulo 2 ao estudar derivadas, vimos o significado do coeficiente angular em um determinado ponto. Considere, agora, o gráfico horário do MUV num instante t qualquer, conforme a Figura 3.9 a seguir.

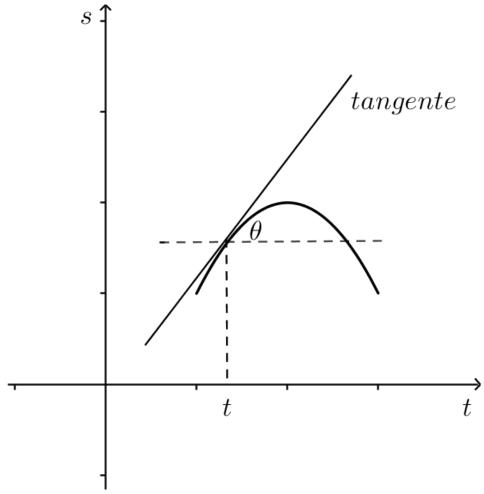


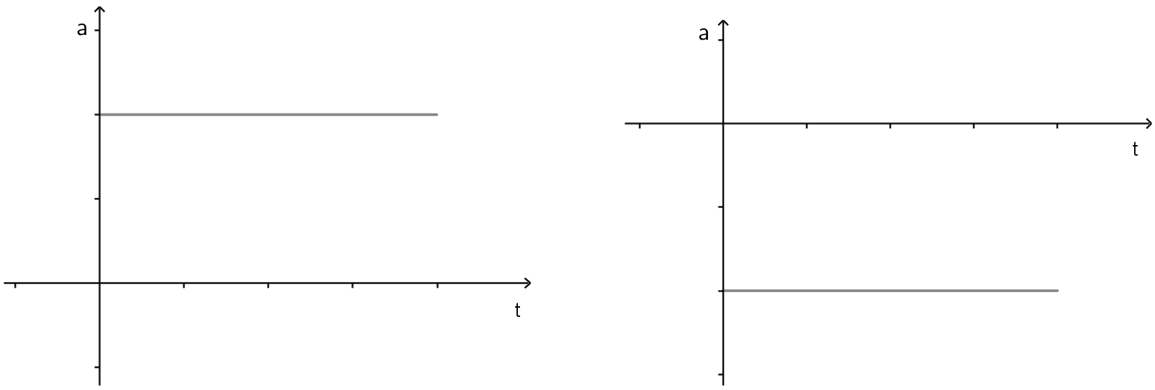
Figura 3.9: Reta Tangente à Curva num Instante t

Se traçarmos a reta tangente à curva neste instante t, obtemos um ângulo θ, formado por esta reta e o eixo dos tempos. O coeficiente angular dessa reta mede a velocidade escalar v do móvel no instante t considerado, ou seja,

$$\tan\theta = v$$

.

Como sabemos, no MUV a aceleração escalar é constante e diferente de zero. Logo, o gráfico da aceleração no MUV em função do tempo, é uma reta paralela ao eixo dos tempos.



(a) (b)

Figura 3.10: Gráficos da Aceleração em Função do Tempo no Movimento Uniformemente Variado

Mas uma vez, é fácil verificar que a área da região compreendida entre a reta e o eixo dos tempos mede, numericamente, o módulo da variação de velocidade escalar Δv do móvel no intervalo de tempo considerado. Numericamente,
área do retângulo $= |a.t|$.

Uma outra equação bastante utilizada no MUV é a equação de Torricelli, demonstrada a seguir.

Proposição 3.2.6. *Seja v a velocidade final, v_0 a velocidade inicial, a a aceleração e Δs a variação do espaço, então*

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s. \tag{3.5}$$

A Equação 3.5 é conhecida como *Equação de Torricelli.*

Demonstração. Como já vimos, temos que a velocidade escalar v se relaciona com o tempo t pela Equação 3.3 e que o espaço se relaciona com o tempo t pela Equação 3.4. Isolando t na Equação (3.3) temos,

$$t = \frac{v - v_0}{a}. \tag{3.6}$$

Substituindo a Equação (3.6) na Função (3.4), obtemos

$$
\begin{aligned}
s &= s_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2}\right) \\
s - s_0 &= \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} \\
s - s_0 &= \frac{2vv_0 - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} \\
2a(s - s_0) &= v^2 - v_0^2.
\end{aligned}
$$

Como $s - s_0 = \Delta s$, segue que

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s,$$

como queríamos demonstrar. □

Para finalizar esta seção, mostramos alguns exemplos sobre movimento uniformemente variado.

Exemplo 3.2.7. *Dada a função horária do MUV de uma partícula $s = -t^2 + 16t - 24$, sendo os espaços medidos em metros e os instantes de tempo em segundos, determine o instante e o espaço em que o móvel muda de sentido.*

Conforme a Equação (3.4), temos $s_0 = -24\ m$, $v_0 = 16\ m/s$ e $a = -2\ m/s^2$. Pela Equação (3.3), temos

$$v = 16 - 2t.$$

Com base na Observação 3.2.5, temos:

$$
\begin{aligned}
0 &= 16 - 2t \\
2t &= 16 \\
t &= 8\ s.
\end{aligned}
$$

Para determinarmos em qual espaço ocorre a mudança de sentido é só substituir

$t = 8\ s$ na função $s = -t^2 + 16t - 24$. Portanto,

$$s = -8^2 + 16.8 - 24$$
$$s = -64 + 128 - 24$$
$$s = 40\ m.$$

Exemplo 3.2.8. *Um automóvel está parado num sinal luminoso. Quando o sinal abre, ele começa a se movimentar com aceleração constante de* $4\ m/s^2$*. No mesmo instante passa por ele uma moto que se move com velocidade constante de* $10\ m/s$*. Determine em quanto tempo, após a abertura do sinal, o carro alcança a moto.*

Como o automóvel tem aceleração constante, logo ele descreve um movimento uniformemente variado. Já a moto descreve um movimento uniforme, pois a velocidade é constante. Então, pelas Equações (3.2) e (3.4), temos $s_{0A} = s_{0M} = 0$, onde s_{0A} e s_{0M} representam a posição inicial do automóvel e da moto respectivamente. Também temos $v_{0A} = 0$, onde $v_{0A} = 0$ representa a velocidade inicial do automóvel, pois o automóvel está parado. Logo,

$$s_M = 10t$$

e

$$s_A = 2t^2.$$

Para o carro alcançar a moto basta temos $s_A = s_M$. Portanto,

$$2t^2 = 10t$$
$$t^2 - 5t = 0$$
$$t(t-5) = 0.$$

Logo,

$$t = 0 \text{ e } t = 5.$$

Portanto, o automóvel alcança a moto após 5 segundos.

Exemplo 3.2.9. *Um carro inicialmente em repouso é sujeito à aceleração constante de* $5\ m/s^2$. *Determine a distância percorrida pelo carro até atingir a velocidade de* $10\ m/s$.

Na resolução deste exemplo, utilizamos a equação de Torricelli, pois temos $a = 5\ m/s^2$, $v_0 = 0$, $v = 10\ m/s$ e queremos determinar a distância Δs. Portanto,

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$$

$$10^2 = 0^2 + 2.5.\Delta s$$

$$100 = 10.\Delta s$$

$$\Delta s = 10\ m.$$

Logo, a distância percorrida pelo carro até atingir a velocidade de $10\ m/s$ é $10\ m$.

Capítulo 4

Lançamento Oblíquo

Neste capítulo vemos uma aplicação dos movimentos uniforme e uniformemente variado no movimento de um corpo próximo a superfície terrestre: lançamento oblíquo.

Inicialmente consideramos um móvel representado pelo ponto P, lançado com velocidade inicial v_0, que faz com a horizontal um ângulo θ, chamado ângulo de tiro. Ao longo da trajetória de P, serão analisadas as projeções de P sobre os eixos Ox (eixo horizontal) e Oy (eixo vertical), ou seja, os movimentos P_x e P_y, respectivamente. As origens desses eixos coincidem com o ponto de lançamento, conforme a Figura 4.1.

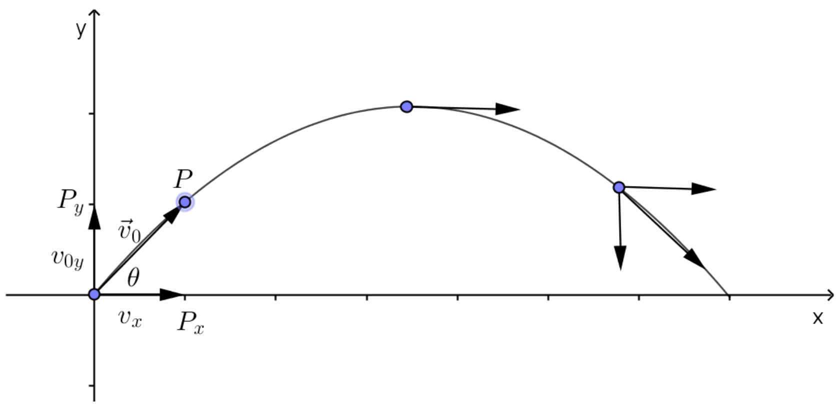


Figura 4.1: Lançamento Oblíquo

Desprezando a resistência do ar, o corpo P descreve seu movimento sob a ação da *aceleração da gravidade* g. No eixo Ox, a projeção de g é nula e, portanto, o movimento de P_x é *uniforme*. No eixo Oy, a projeção de g é $+g$ ou $-g$, conforme a orientação desse eixo. Como essa projeção é constante, o movimento de P_y é *uniformemente variado*. Usamos a Figura 4.2 abaixo para analisar a trajetória do ponto P durante os movimentos P_x e P_y.

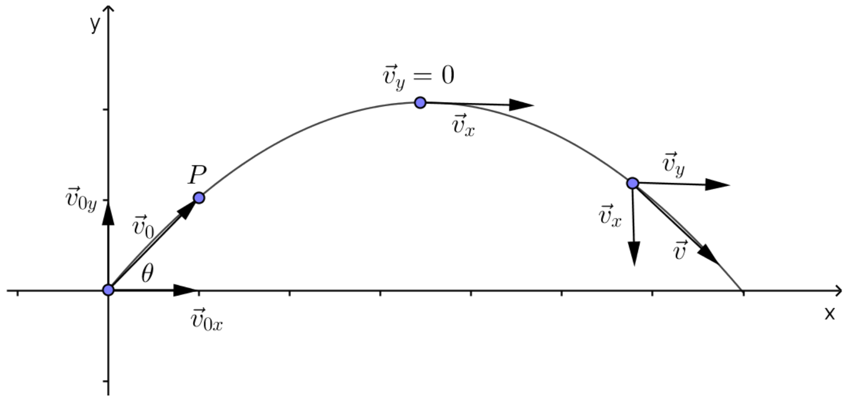


Figura 4.2: Trajetória do Ponto P Analisando os Pontos P_x e P_y

Para o movimento retilíneo uniforme de P_x, podemos escrever

$$x = v_{0x}t, \tag{4.1}$$

onde v_{0x} é a projeção de v_0 sobre o eixo Ox e é dada por

$$v_{0x} = v_0. \cos\theta. \tag{4.2}$$

Observação 4.0.10. *A Equação (4.1) nos fornece a posição do móvel ao longo do eixo Ox.*

Para o movimento retilíneo uniformemente variado de P_y temos aceleração escalar +g, se o eixo Oy é orientado para baixo, ou -g, se o eixo Oy é orientado para cima. Sua velocidade inicial v_{0y} é a projeção de v_0 no eixo Oy, sendo dada por

$$v_{0y} = v_0. \operatorname{sen}\theta. \tag{4.3}$$

Para o movimento de P_y podemos escrever

$$y = v_{0y}.t \pm \frac{gt^2}{2}. \tag{4.4}$$

Observação 4.0.11. *A função (4.4) representa a posição do móvel ao longo do eixo Oy.*

Observação 4.0.12. *A função (4.4) vale para lançamento inicial coincidindo com a origem. Caso o lançamento seja de um ponto, cuja ordenada é $\pm y_0 \neq 0$, devemos acrescentar tal ordenada a função (4.4), obtendo assim*

$$y = \pm y_0 + v_{0y}.t \pm \frac{gt^2}{2}. \tag{4.5}$$

A velocidade v_y de P_y varia com o tempo segundo a função

$$v_y = v_{0y} \pm gt. \tag{4.6}$$

Também podemos utilizar a equação de Torricelli (3.5) para o movimento de P_y, obtendo assim

$$v_y^2 = v_{0y}^2 \pm 2g\Delta y. \tag{4.7}$$

A velocidade num ponto qualquer da trajetória é calculada mediante a aplicação do Teorema de Pitágoras, exceto quando o móvel atinge o vértice da parábola, cuja a componente v_y é nula e, portanto, a velocidade do móvel é v_x.

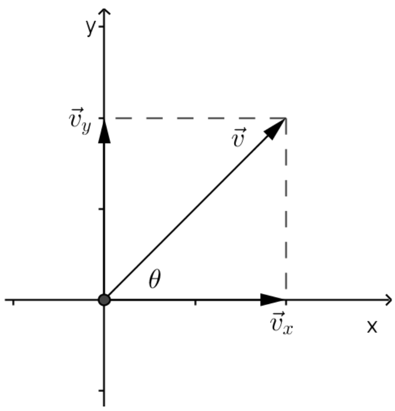


Figura 4.3: Velocidade em um Ponto Qualquer da Trajetória

Conforme a Figura 4.3 acima, temos:

$$\vec{v}^2 = \vec{v}_x^2 + \vec{v}_y^2. \tag{4.8}$$

4.1 Tempo de Subida. Altura Máxima. Alcance Horizontal.

Considere um corpo lançado a um ângulo θ conforme a Figura 4.4. Vamos determinar o tempo de subida, a altura máxima e o alcance horizontal em função de θ.

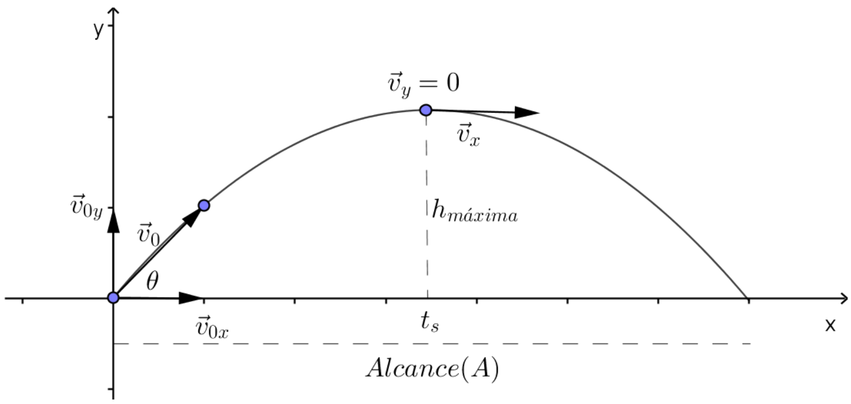


Figura 4.4: Tempo de Subida, Altura Máxima e Alcance Horizontal

O tempo de subida t_s corresponde ao intervalo de tempo decorrido desde o instante de lançamento até o instante em que o móvel atinge o vértice da parábola, conforme a Figura 4.4.

Como já foi apresentado antes, no vértice da parábola, tem-se que $v_y = 0$. Logo, pela Equação (4.6):

$$0 = v_0.\operatorname{sen}\theta - gt.$$

Isolando t, temos que o tempo de subida é

$$t_s = \frac{v_0.\operatorname{sen}\theta}{g}. \tag{4.9}$$

Observação 4.1.1. *O tempo de descida é igual ao tempo de subida. Portanto, o tempo de percurso total t_T é igual a $2t_s$.*

Com base na Equação (4.7), podemos calcular a altura máxima h. Basta fazermos $v_y = 0$ quando $\Delta y = h$. Logo,

$$0 = v_{0y}^2 - 2gh. \tag{4.10}$$

Pela Equação (4.3), temos

$$v_{0y}^2 = v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta. \tag{4.11}$$

Substituindo a Equação (4.11) na Equação (4.10), obtemos

$$0 = v_0^2 . \operatorname{sen}^2 \theta - 2gh.$$

Isolando h na expressão acima, temos

$$h = \frac{v_0^2 . \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}. \tag{4.12}$$

Para finalizarmos a seção, falamos sobre o alcance horizontal (A) que é calculado pela função horária de P_x, ou seja, pela Equação (4.1). Quando $t = t_T$ tem-se $x = A$. Logo,

$$A = v_x . t_T. \tag{4.13}$$

Substituindo as Equações (4.2) e (4.9) na Equação (4.13), obtém-se

$$A = v_0 . \cos \theta . \frac{2v_0 . \operatorname{sen} \theta}{g}.$$

Manipulando-a, temos

$$A = \frac{2v_0^2 . \operatorname{sen} \theta . \cos \theta}{g}.$$

Como $2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \operatorname{sen} 2\theta$, concluimos que

$$A = \frac{v_0^2 . \operatorname{sen} 2\theta}{g}. \tag{4.14}$$

4.2 Equação da Trajetória - Uma Abordagem Matemática

Nesta seção, apresentamos uma abordagem matemática à trajetória do ponto P em função dos eixos Ox e Oy.

Proposição 4.2.1. *Seja θ o ângulo de tiro ou de lançamento, v_0 a velocidade inicial e g a aceleração da gravidade, então podemos descrever a altura y em função do alcance x pela função*

$$y = tg\theta.x - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta}.x^2. \tag{4.15}$$

Demonstração. Para demonstrar a Função (4.15) basta utilizar as Equações (4.1) e (4.4). Observe que a Função (4.15) justifica o fato da trajetória do lançamento oblíquo ser uma parábola.

Da Equação (4.1) isolando t, temos

$$t = \frac{x}{v_{0x}}. \tag{4.16}$$

Substituindo a Equação (4.16) na Equação (4.4), obtemos

$$y = v_{0y}.\frac{x}{v_{0x}} - \frac{g.\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2}{2}. \tag{4.17}$$

Substituindo as Equações (4.2) e (4.3) na Equação (4.17) e manipulando-a obtemos:

$$y = v_0.sen\theta.\frac{x}{v_0.cos\theta} - \frac{g.\left(\frac{x}{v_0.cos\theta}\right)^2}{2}.$$

Como $tg\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, temos

$$y = tg\theta.x - \frac{g}{2.v_0^2.cos^2\theta}.x^2.$$

□

Observação 4.2.2. *As Equações (4.12) e (4.14) podem ser obtidas a partir da Função (4.15). Para determinarmos a altura máxima h, basta utilizar a fórmula que determina a ordenada do vértice. E para calcularmos o alcance A é só determinar os zeros da função, ou seja, basta fazer $y = 0$.*

Observação 4.2.3. *A Função (4.15) vale para lançamento inicial coincidindo com a origem. Caso o lançamento seja de um ponto, cuja ordenada seja* $\pm y_0 \neq 0$*, devemos acrescentar tal ordenada a Função (4.4), obtendo assim:*

$$y = \pm y_0 + tg\theta.x - \frac{g}{2.v_0^2.cos^2\theta}.x^2. \tag{4.18}$$

Capítulo 5

Problemas Sobre Lançamento Oblíquo

Neste capítulo, resolvemos alguns problemas sobre lançamento oblíquo utilizando tanto a abordagem da física quanto a abordagem matemática.

Problema 5.0.4. *No nível do solo, uma bomba é disparada com velocidade inicial de* $80\ m/s$, *a* $60°$ *sobre a horizontal e sem sofrer resistência significativa do ar. a) Quanto tempo ela leva para atingir seu ponto mais alto? b) Ache sua altura máxima em relação ao solo. c) A que distância do seu ponto de disparo a bomba aterrissa? (Considere* $g = 10\ m/s^2$, $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ *e* $tg60° = \sqrt{3}$*).*

Resolução por meio da Física

a) Para determinar quanto tempo leva para atingir seu ponto mais alto basta utilizar a Equação (4.9), logo

$$t_s = \frac{80. \operatorname{sen} 60°}{10}.$$

Pelo enunciado temos que $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Assim,

$$t_s = \frac{80.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{10}$$

$$t_s = \frac{40\sqrt{3}}{10}$$

$$t_s = 4\sqrt{3}\ s.$$

b) Para achar a altura máxima utilizamos a Equação (4.12). Ou seja,

$$h = \frac{80^2 . \operatorname{sen}^2 60^\circ}{2.10}.$$

Como já vimos anteriormente, se $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $sen^2 60^\circ = \frac{3}{4}$. Portanto,

$$h = \frac{6400 . \frac{3}{4}}{20}$$
$$h = \frac{4800}{20}$$
$$h = 240\ m.$$

c) Determinar a que distância do seu ponto de disparo a bomba aterrissa é determinar o alcance horizontal. Então, pela Equação (4.14), temos

$$A = \frac{80^2 . \operatorname{sen} 120^\circ}{10}.$$

Sabemos que $\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo,

$$A = \frac{6400 . \frac{\sqrt{3}}{2}}{10}$$
$$A = \frac{3200\sqrt{3}}{10}$$
$$A = 320\sqrt{3}\ m.$$

Resolução por meio da Matemática

a) Para determinarmos o instante em que a bomba leva para atingir seu ponto mais alto, é necessário utilizarmos inicialmente a Função (4.3) obtendo assim

$$v_{0y} = 80.\operatorname{sen} 60^\circ$$
$$v_{0y} = 80.\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$v_{0y} = 40.\sqrt{3}\ m/s.$$

Substituindo o valor acima na Função (4.4) temos

$$y = 40.\sqrt{3}t - 5t^2. \tag{5.1}$$

A Função (5.1) é uma função quadrática e o tempo necessário para atingir o ponto mais alto pode ser determinado pela abscissa do vértice x_v, ou seja, pela Equação (1.7). Portanto,

$$t_s = -\frac{40.\sqrt{3}}{2.(-5)}$$
$$t_s = -\frac{40.\sqrt{3}}{-10}$$
$$t_s = 4\sqrt{3}\ s.$$

Observe que deu o mesmo resultado encontrado pela abordagem da Física.

Para resolvermos as letras b e c, fazemos uso da Função (4.15), obtendo assim a função

$$y = tg60^\circ.x - \frac{10}{2.80^2.cos^2 60^\circ}.x^2.$$

Sabemos que $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ e $tg60^\circ = \sqrt{3}$. Logo

$$y = \sqrt{3}x - \frac{1}{320}x^2. \tag{5.2}$$

Como a Função (5.2) representa uma função quadrática, podemos determinar a altura máxima pela Equação (1.8), que representa a ordenada do vértice, e o alcance horizontal, pelos zeros da função. Consequentemente, a altura máxima é

$$\begin{aligned}
y_v &= -\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 4.\left(-\frac{1}{320}\right).0}{4\left(-\frac{1}{320}\right)} \\
y_v &= -\frac{3}{-\frac{1}{80}} \\
y_v &= 240\ m.
\end{aligned}$$

Calculando os zeros da Função (5.2) pela Observação 4.2.2, obtemos

$$\sqrt{3}x - \frac{1}{320}x^2 = 0.$$

Utilizando a Fórmula (1.6) para resolver a equação do 2º grau acima, temos

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 4.\left(-\frac{1}{320}\right).0}}{2\left(-\frac{1}{320}\right)} \\
x &= \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{-\frac{1}{160}} \\
x &= \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{-\frac{1}{160}}.
\end{aligned}$$

Daí temos $x' = \dfrac{-\sqrt{3} + \sqrt{3}}{-\frac{1}{160}}$ e $x" = \dfrac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{-\frac{1}{160}}$ obtendo assim $x' = 0$ e $x" = 320\sqrt{3}\ m$.

Problema 5.0.5. *Uma partícula é lançada de um ponto O do solo, no instante $t_0 = 0$, com velocidade $\vec{v_0}$, formando um ângulo θ com a horizontal. São dados: o módulo da aceleração da gravidade igual a $10\ m/s^2$, o módulo da velocidade $\vec{v_0}$ igual a $200\ m/s$, $sen\theta = 0,80$ e $cos\theta = 0,60$. Desprezando os efeitos do ar e adotando um sistema de* *coordenadas de origem em O, determine:*

a) o instante em que a partícula atinge o vértice da trajetória;

b) o instante em que a partícula atinge o solo;

c) o alcance horizontal da partícula;

d) a altura máxima atingida pela partícula.

Resolução pela abordagem da Física

a) Nesta alternativa, recorremos novamente a Equação (4.9), pois o instante em que a partícula atinge o vértice da trajetória coincide com tempo de subida. Portanto,

$$t_s = \frac{200.\operatorname{sen}\theta}{10}.$$

Conforme o enunciado, $\operatorname{sen}\theta = 0,80$. Logo,

$$t_s = \frac{200.0,80}{10}$$
$$t_s = \frac{160}{10}$$
$$t_s = 16\ s.$$

b) Pela Observação 4.1.1, vimos que o instante em que a partícula atinge o solo, ou seja, o tempo total, corresponde ao dobro do tempo de subida. Assim,

$$t_T = 2.t_s = 2.16 = 32\ s.$$

c) Para calcular o alcance horizontal da partícula fazemos uso da Equação (4.14). Ou seja,

$$A = \frac{200^2.\operatorname{sen}2\theta}{10}. \tag{5.3}$$

Sabemos que $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.

Substituindo os valores do $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ apresentadas no enunciado, obtemos

$$\operatorname{sen}2\theta = 2.0,80.0,60$$

$$\operatorname{sen}2\theta = 0,96.$$

Substituindo o valor do $\operatorname{sen} 2\theta$ na Equação (5.3), temos

$$A = \frac{200^2.0,96}{10}$$
$$A = \frac{40000.0,96}{10}$$
$$A = 3840\ m.$$

d) Para determinar a altura máxima recorremos a Equação (4.12). Logo,

$$h = \frac{200^2.\operatorname{sen}^2\theta}{2.10}. \tag{5.4}$$

Se $\operatorname{sen}\theta = 0,80$, então $\operatorname{sen}^2\theta = (0,80)^2 = 0,64$.
Substituindo o valor do $\operatorname{sen}^2\theta$ na Equação (5.4), obtemos

$$h = \frac{200^2.0,64}{2.10}$$
$$h = \frac{25600}{20}$$
$$h = 1280\ m.$$

Agora, resolvemos as mesmas alternativas com a abordagem matemática.

Para resolvermos as alternativas a) e b) fazemos uso das Equações (4.3) e (4.4). Assim, temos

$$v_{0y} = 200.0,80 = 160\ m/s.$$

e

$$y = 160t - 5t^2. \tag{5.5}$$

A Função horária (5.5), como já vimos, representa uma função quadrática, e é com o auxílio dessa função que resolvemos as letras a) e b). Portanto, para calcularmos o tempo de subida, basta utilizar a Equação (1.7). Assim,

$$\begin{aligned}
t_s &= -\frac{160}{2(-5)} \\
t_s &= -\frac{160}{(-10)} \\
t_s &= 16\ s.
\end{aligned}$$

Para determinar o tempo total, que corresponde o instante que a partícula toca o solo, é só achar os zeros da Função (5.5). Ou seja, deve-se resolver a equação do 2º grau

$$160t - 5t^2 = 0.$$

Para resolver tal equação fazemos uso da Fórmula (1.6). Logo,

$$\begin{aligned}
t &= \frac{-160 \pm \sqrt{160^2 - 4.(-5).0}}{2(-5)} \\
t &= \frac{-160 \pm \sqrt{25600}}{-10} \\
t &= \frac{-160 \pm 160}{-10}
\end{aligned}$$

Daí temos, $t' = \dfrac{-160 + 160}{-10}$ e $t" = \dfrac{-160 - 160}{-10}$, obtendo assim, $t' = 0$ e $t" = 32\ s$.

Para responder as letras c) e d) fazemos uso da Função (4.15), que resulta em

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{2880}x^2,$$

pois temos que $tg\theta = \dfrac{0,80}{0,60} = \dfrac{4}{3}$ e desenvolvendo a expressão $\dfrac{10}{2.200^2.(0,60)^2}$ obtemos $\dfrac{1}{2880}$.

Para achar o alcance horizontal usamos a Equação (1.6). Logo,

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4.\left(-\frac{1}{2880}\right).0}}{2\left(-\frac{1}{2880}\right)} \\
x &= \frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}}}{-\frac{1}{1440}} \\
x &= \frac{-\frac{4}{3} \pm \frac{4}{3}}{-\frac{1}{1440}}
\end{aligned}
$$

Daí temos, $x' = \dfrac{-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{-\frac{1}{1440}} = 0$ e $x" = \dfrac{-\frac{4}{3} - \frac{4}{3}}{-\frac{1}{1440}}$. Manipulando a igualdade $x"$, obtemos $x" = 3840\ m$.

Para finalizarmos a questão, a altura máxima é determinada com o auxílio da Equação (1.8). Portanto,

$$
\begin{aligned}
y_v &= -\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4.\left(-\frac{1}{2880}\right).0}{4\left(-\frac{1}{2880}\right)} \\
y_v &= -\frac{\frac{16}{9}}{-\frac{1}{720}} \\
y_v &= \left(-\frac{16}{9}\right).\left(-\frac{720}{1}\right) \\
y_v &= 1280\ m.
\end{aligned}
$$

Problema 5.0.6. *Um jogador A de basquete, parado, lança obliquamente uma bola da altura de* $1,70\ m$*, com velocidade de* $10\ m/s$*, formando um ângulo* θ*, tal que* $\operatorname{sen}\theta = 0,80$ *e* $\cos\theta = 0,60$*, acima da horizontal, para outro jogador B situado a* $9,0\ m$ *dele.*

Adotando $g = 10\ m/s^2$ e desprezando a resistência do ar, determine a altura, em relação ao solo, que o jogador B deve colocar a mão, com o braço vertical, para apanhar a bola.

Na resolução deste problema, damos uma abordagem da Física e depois uma abordagem Matemática.

Resolvendo pela abordagem da Física, utilizamos as Equações (4.1),(4.2),(4.3) e (4.4). Pela Equação (4.1), temos

$$x = v_{0x}.t.$$

Mas pela Equação (4.2), obtemos

$$x = v_0.\cos\theta.t.$$

Substituindo $x = 9\ m$, $v_0 = 10\ m/s$ e $cos\theta = 0,60$ conforme o enunciado, temos

$$\begin{aligned} 9 &= 10.0,60.t \\ t &= \frac{9}{6} \\ t &= \frac{3}{2}\ s. \end{aligned}$$

Pela Funções (4.3) e (4.4) obtemos

$$y = v_0.\operatorname{sen}\theta.t - \frac{g}{2}.t^2, \tag{5.6}$$

já que substituimos a Função (4.3) na Função (4.4). Só que esta relação vale se a posição inicial de lançamento coincidir com a origem do sistema, caso que não ocorre segundo o enunciado, pois a bola é lançada a $1,70m$ de altura. Como queremos determinar a altura, em relação ao solo, devemos acrescentar $1,70m$ à Função (5.6). Assim,

$$y = 1,70 + v_0.\operatorname{sen}\theta.t - \frac{g}{2}t^2. \tag{5.7}$$

Substituindo $t = \dfrac{3}{2}\ s$, $v_0 = 10\ m/s$ e $\operatorname{sen}\theta = 0,80$ e $g = 10\ m/s^2$ conforme o enunciado na Função (5.7), obtemos

$$
\begin{aligned}
y &= 1,70 + 8.\frac{3}{2} - 5.\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
y &= 1,70 + 12 - 5.\frac{9}{4} \\
y &= 13,70 - 11,25 \\
y &= 2,45\ m.
\end{aligned}
$$

Pela abordagem matemática, utilizamos a Função (4.15) acrescido de $1,70\ m$ conforme já explicado antes. Portanto,

$$y = 1,70 + tg\theta.x - \frac{g}{2.v_0^2.cos^2\theta}x^2. \tag{5.8}$$

Substituindo os respectivos valores mencionados segundo o enunciado e manipulando a função acima, obtemos

$$y = 1,70 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{36}x^2. \tag{5.9}$$

Como a Função (5.9) refere-se a uma função quadrática, para determinar a altura desejada no enunciado, basta substituir $x = 9m$ na referida função. Logo,

$$
\begin{aligned}
y &= 1,70 + \frac{4}{3}.9 - \frac{5}{36}.9^2 \\
y &= 1,70 + 12 - \frac{5}{36}.81 \\
y &= 1,70 + 12 - \frac{5}{4}.9 \\
y &= 13,70 - 11,25 \\
y &= 2,45\ m.
\end{aligned}
$$

Problema 5.0.7. *Um disco é lançado para cima com velocidade de módulo* $10\sqrt{2}\ m/s$*, a* $45°$ *com a horizontal. O ponto de lançamento encontra-se a* $5\ m$ *acima do solo.*

Sabendo que $g = 10\ m/s^2$*, determine a altura máxima atingida pelo disco em relação ao nível de lançamento.(Considere* $\operatorname{sen} 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $tg 45° = 1$*).*

Diferentemente do exercício anterior, aqui determinamos a altura máxima atingida pelo disco em relação ao nível de lançamento e não em relação ao solo.

Os dados do problema segundo o enunciado são $v_0 = 10\sqrt{2}\ m/s$, $y_0 = 5\ m$ e $g = 10\ m/s^2$ além das razões trigonométricas do ângulo de 45°.

Pela abordagem da Física, utilizaremos a Equação (4.12). Substituindo os respectivos valores, temos

$$\begin{aligned} h &= \frac{(10\sqrt{2})^2.\operatorname{sen}^2 45°}{2.10} \\ h &= \frac{100.2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{20} \\ h &= \frac{100.2\left(\dfrac{2}{4}\right)}{20} \\ h &= \frac{100}{20} \\ h &= 5\ m. \end{aligned}$$

Observação 5.0.8. *Esta altura é a procurada, pois a Equação (4.12) vale para determinar a altura máxima a partir do ponto inicial de lançamento.*

Pela abordagem matemática fazemos uso da Função (4.18), pelo fato do lançamento não partir da origem. Então, substituindo os respectivos valores que estão no enunciado na Função (4.18) e manipulando-a, obtemos

$$y = 5 + x - \frac{1}{20}x^2. \tag{5.10}$$

Com base na Equação (1.8) determinamos a altura máxima em relação ao eixo Ox.

Logo,

$$
\begin{aligned}
y_v &= -\frac{1^2 - 4.\left(-\dfrac{1}{20}\right).5}{4.\left(-\dfrac{1}{20}\right)} \\
y_v &= -\frac{1+1}{\left(-\dfrac{1}{5}\right)} \\
y_v &= -\frac{2}{\left(-\dfrac{1}{5}\right)} \\
y_v &= -2.\left(-\frac{5}{1}\right) \\
y_v &= 10\ m.
\end{aligned}
$$

Como dito antes, esse valor representa a altura máxima em relação ao eixo Ox. Portanto, para calcular a altura máxima em relação ao nível de lançamento basta subtrair 5 m, que representa o ponto de lançamento, do valor acima (10 m), resultando assim em 5 m.

Capítulo 6

Considerações finais

Este estudo teve o objetivo de realizar uma explanação sobre os principais tópicos da Matemática e da Física que são abordados no Lançamento Oblíquo, de tal modo que ampliem os conhecimentos adquiridos pelos alunos do Ensino Médio.

Na pesquisa realizada, procuramos apresentar um trabalho com uma linguagem de fácil entendimento para qualquer aluno, desde que possua um conhecimento mínimo matemático.

Ao longo do período da coleta de dados para a realização deste estudo, percebemos que os livros didáticos, principalmente os de Física (Nicolau e Toledo, Matias e Frattezi), dão um enfoque físico. O livro [2] na pág.160 dá um enfoque matemático para o movimento uniformemente variado. Porém, achamos insuficiente pelo número de autores renomados que temos. Em boa parte dos livros de Matemática, o que se observa é um ou outro exercício aplicado a uma outra área do conhecimento.

Ao desenvolver este trabalho, um dos objetivos é mostrar a alunos e professores que o conhecimento não é um fim em si mesmo. Alunos apresentam dificuldades ao visualizarem uma função afim aplicada na Economia, por exemplo. Professores não se sentem seguros em contextualizarem determinados assuntos em outras áreas, como na Engenharia.

Por fim, vale ressaltar que outro objetivo deste estudo foi aprofundar a interdisciplinariedade entre os conteúdos. Não se pode estudar função quadrática, por exemplo, apenas pensando que é um assunto da Matemática. Assim como, também não podemos imaginar a Matemática como um simples instrumento de auxílio para as outras ciências. A Matemática e as demais ciências se completam e é isso que precisamos cultivar em nossas escolas e universidades.

Referências Bibliográficas

[1] Lima, Elon Lages. *Temas e Problemas*, Editora SBM, Coleção do professor de matemática, 3ª edição (2010), 225 páginas.

[2] Lima, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio - volume 1*, Editora SBM, coleção do professor de matemática, 10ª edição (2012), 280 páginas.

[3] Muniz Neto, Antônio Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, Editora SBM, coleção PROFMAT, 1ª edição (2015)

[4] Ávila, Geraldo. *Cálculo das funções de uma variável - volume 1*, Editora LTC, 7ª edição (2014).

[5] Iezzi, Gelson. Muramaki, Carlos. Machado, Nilson José. *Fundamentos de Matemática Elementar - volume 8*, Editora Atual, 5ª edição (1998).

[6] Young, Hugh D. Freedman, Roger A. *Física I*, Editora Pearson, 12ª edição (2008).

[7] Matias, Roque. Frattezi, André *Física Geral para o ensino médio - volume único*, Editora HARBRA, 2ª edição (2011).

[8] Ferraro, Nicolau Gilberto. Soares, Paulo Antonio de Toledo. *Física Básica - volume único*, Atual editora (1998).

[9] Omote, Noriyasu *Física - Série Sinopse*, Editora Moderna, 3ª edição (1985).

[10] Morais Filho, Daniel Cordeiro de *Manual de Redação Matemática*, Editora SBM, 1ª edição, (2014).

[11] Ministério da Educação *Parâmetros Curriculares Nacionais*, Ensino Médio.

[12] GEOGEBRA. *www.geogebra.org.*