**Marcelo Pereira da Silva**

# *O Número Áureo dentro de sala com Atividades Conceituais*

Niterói - RJ

Março / 2013

**Marcelo Pereira da Silva**

# *O Número Áureo dentro de sala com Atividades Conceituais*

Dissertação apresentada a Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal Fluminense para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora:
Miriam Abdón

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói - RJ
Março / 2013

Silva, Marcelo Pereira da
O Número áureo dentro da sala de aula como atividades conceituais/ Marcelo Pereira da Silva.
– Niterói, RJ : [s.n.], 2013.

103f.

Orientador: Profª. Miriam Abdón

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) –
Universidade Federal Fluminense, 2013.

1. História da matemática. 2. Número Áureo. 3. Ensino de matemática I. Título.

CDD 510.9

Trabalho de conclusão de curso sob o título “O Número Áureo dentro de sala com Atividades Conceituais ”, defendido por Marcelo Pereira da Silva e aprovado em 05 de março de 2013, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Miriam Abdón
Doutora em Matemática pela IMPA
Orientadora

Lhaylla Crissaff
Doutora em Matemática pela PUC-Rio

Carlos Gustavo Moreira
Doutor em Matemática pelo IMPA

# *Agradecimentos*

Agradeço a Deus, por ter me dado saúde, paciência e perseverança nas horas que mais precisei. Agradeço ao meu filho, a minha esposa e minha mãe por ter me dado força nos momentos mais difíceis. Agradeço a Miriam Abdón, pela sua dedicação e ajuda tanto na elaboração deste trabalho de conclusão de curso, como em todos os momentos onde foi necessária ao longo do mestrado. Agradeço a todos os professores e coordenadores pela participação na minha formação educacional e aos meus colegas de classe que me ajudaram muito nestes dois anos, em especial ao Antonio Carlos Barros e Augusto Schwager .

# *Sumário*

# *Lista de Figuras*

# *Resumo*

Sabendo da importância de tornar as aulas mais atrativas, reunimos neste trabalho o conteúdo necessário para que o professor possa resgatar da história da matemática para a sala de aula o Número Áureo. Apresentamos as principais definições teóricas sobre o número áureo, onde podemos encontra-lo em nosso cotidiano e como podemos trabalhar este número em sala de aula.

# *Abstract*

Knowing the importance of making more attractive lessons, we have placed together enough content to try to bring back the history of mathematics in classroom the ‘número áureo’. In this assignment we present the main theoretical definitions about ‘número áureo’, where we can find it in our daily lives and how we can work this issue in classroom.

# 1. INTRODUÇÃO

O número áureo é um dos mais antigos números irracionais estudados pelo homem e assim como o número π (PI) ele pode ser trabalhado tanto na geometria como na álgebra.

O número áureo, também apresentado como proporção áurea, número de ouro, proporção de ouro, seção áurea, razão de ouro, razão áurea ou divina proporção, entre outros nomes, é representado pela letra grega Φ (PHI) e é igual a —— que vale, com um valor arredondado de 10 casas decimais 1,6180339887.

Sabemos da importância de apresentar para os alunos a parte histórica de todo conteúdo ministrado em sala de aula, pois isso traz um maior significado ao conhecimento que será assimilado pelos alunos. Quando trabalhamos o número áureo, conseguimos resgatar da história da matemática para a sala de aula esse assunto que vem chamando a atenção e intrigando várias pessoas ao longo do tempo.

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso é registrar de maneira organizada o conhecimento que um professor deve possuir sobre o número áureo, para que ele possa trazê-lo da história da matemática para dentro da sala de aula. Para isso dividiremos o trabalho em três capítulos: Definições teóricas do número áureo, Onde encontramos o número áureo em nosso cotidiano e Como trabalhar o número áureo em sala de aula.

Na primeira parte iremos apresentar para o leitor as definições teóricas necessárias para que o número áureo possa ser trabalhado em sala de aula.

Iremos apresentar e/ou definir o que é a razão áurea, segmento áureo, triângulos áureos e retângulo áureo. Iremos ainda apresentar onde podemos encontrar o número áureo em um pentágono regular, como podemos dividir uma circunferência em dois arcos cuja razão entre eles é o número áureo, quando que uma pirâmide pode ser classificada como sendo uma pirâmide áurea, onde encontramos o número áureo quando analisamos a sequência de Fibonacci e finalizaremos este capítulo apresentando o que é uma espiral áurea e como podemos construí-la.

Após apresentar as definições teóricas do número áureo, nós iremos apresentar onde muitos dizem poder ser encontrado o número áureo em nosso cotidiano e, analisaremos cada caso para constatarmos quando é mesmo possível encontrarmos o número de ouro ou apenas uma aproximação do mesmo. Inicialmente iremos apresentar onde alguns autores dizem ser possível encontrar o número áureo realizando razões no corpo humano, iremos analisar a pirâmide de Quéops, o Parthenon, três grandes obras de Leonardo da Vinci: Homem Vitruviano, Mona Lisa e San Girolamo. Em seguida analisaremos alguns cartões utilizados em nosso dia a dia e finalizaremos este capítulo analisando onde é possível encontrar o número áureo nos Náutilos.

Para concluir nosso objetivo iremos apresentar uma sugestão de como podemos trabalhar o número áureo em sala de aula. Neste trabalho de conclusão de curso apresentaremos como o número áureo pode ser trabalhado no 6º ano e no 7º ano do ensino fundamental, relatando como foi a experiência realizada nas turmas 503 e 504 da escola municipal Leda Vargas Gianerinni no município de São Gonçalo.

## 2. DEFINIÇÕES TEÓRICAS DO NÚMERO ÁUREO

Iremos inicialmente apresentar como é definida algebricamente a Razão Áurea e quando que um ponto divide um segmento de tal maneira que a razão entre os novos segmentos criados é a razão áurea. Apresentaremos, usando apenas régua e compasso, como podemos encontrar este ponto dado um segmento de qualquer tamanho.

Após esta introdução iremos mostrar que independente do tipo de triângulo, quando classificados pelos seus ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo), poderemos ter um triângulos áureo. Demonstraremos que um triângulo acutângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a razão do tamanho de um dos seus lados congruentes pelo lado não congruente for o número de ouro. Um triângulo retângulo é dito áureo se for semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a  e catetos iguais a  e 1. E finalmente, um triângulo obtusângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a divisão do tamanho do seu lado não congruente por um dos seus lados congruentes for o número de ouro.

No subcapítulo seguinte apresentaremos a definição do retângulo áureo e como podemos construir um retângulo áureo usando apenas régua e compasso.

Mostraremos a seguir como é possível encontrar a razão áurea em diversas razões entre segmentos em um pentágono regular, como por exemplo, a razão entre a diagonal  deste pentágono regular e o seu lado.

A seguir demonstraremos que dois pontos, pertencentes a uma circunferência, dividem esta mesma circunferência em uma razão áurea quando a razão entre o comprimento da circunferência está para o arco maior assim como a razão entre o arco maior está para o arco menor e, ambas as razões, serão iguais ao número de ouro.

Após este subcapítulo mostraremos que nem todas as pirâmides podem ser classificadas como sendo uma pirâmide áurea. Definiremos então, quais pirâmides poderão ser classificadas como pirâmide áurea.

Definido o que é uma pirâmide áurea apresentaremos que a sequência de Fibonacci, é uma sequência de números naturais definida recursivamente de tal maneira que o 1º termo e o 2º termo são iguais a 1 e:

- O 1º termo somado com o 2º gera o 3º termo;
- O 2º termo somado com o 3º gera o 4º termo;
- O 3º termo somado com o 4º gera o 5º termo;
- O 4º termo somado com o 5º gera o 6º termo;

E assim sucessivamente.

Logo, após a definição, demonstraremos que a razão entre dois termos consecutivos (maior dividido pelo menor) tende para o número de ouro quando tomamos termos cada vez maiores.

E, finalmente, será apresentado o que é uma espiral áurea e como podemos construir esta espiral usando apenas régua e compasso.

## 2.1. RAZÃO ÁUREA

A razão áurea é definida algebricamente como:

$-$ , com a > b e a, b .

Temos então que $-$, logo Substituindo o valor de a em $-$ teremos .

Simplificando a igualdade por b em ambos os membros teremos que . Multiplicando ambos os membros por teremos = 0, ou seja, é uma das soluções da equação quadrática . E assim teremos que e .

Utilizando a fórmula de Bháskara teremos:

Como - 0,618033988... e 1,618033988... , temos que a solução positiva da equação será o valor da razão áurea, já que como a, b , não poderemos ter que $-$ seja igual a - 0,618033988... , ou seja, teremos que 1,618033988...

## 2.2 SEGMENTO ÁUREO

Podemos encontrar o número áureo através de um segmento de reta da seguinte forma: Dado o segmento de reta AB.

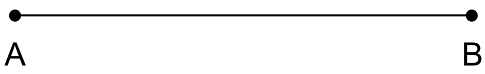
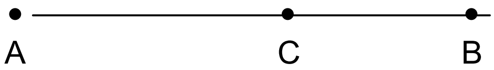



Fig.1 : Divisão do segmento AB na Razão Áurea - Passo 1

Marcaremos um ponto C de tal maneira que este ponto divida o segmento AB em uma razão áurea, se e somente se:

Ou seja,




Divisão do segmento AB na Razão Áurea - Passo 2

Seja AC = a e CB = b teremos que:


Divisão do segmento AB na Razão Áurea - Passo 3

Que como foi visto no subcapítulo 2.1. vale = = 1,618033988... que é a razão áurea.

Podemos verificar que o ponto C foi marcado de tal forma que o segmento AC é a média geométrica entre o segmento CB e o segmento AB.

Desta forma a razão do segmento AC com o segmento CB é a razão áurea.

<u>Observação</u>: Podemos ainda construir um segmento áureo utilizando apenas régua e compasso ou um software de geometria dinâmica. Para isso deveremos seguir os seguintes passos:

1) Tracemos um segmento AB com qualquer medida.

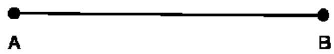
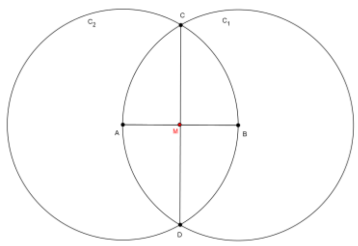


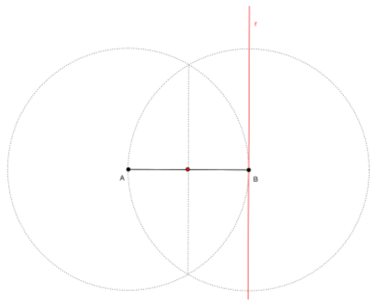

Fig.2: Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 1

2) Construamos a circunferência $C_1$ de centro B e raio de medida do segmento e a circunferência $C_2$ de centro A e raio de medida do segmento . Marquemos os pontos C e D onde estes pontos são as interseções entre as circunferências $C_1$ e $C_2$. Tracemos o segmento e marquemos M, que será a interseção entre o segmento e o segmento . M é o ponto médio de .



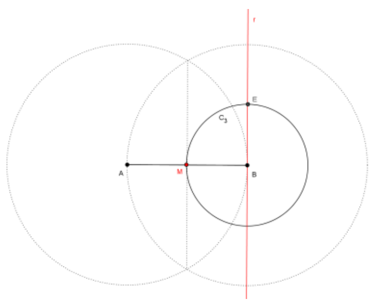

Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 2

3) Traçamos uma reta perpendicular a passando por B que chamaremos de r.



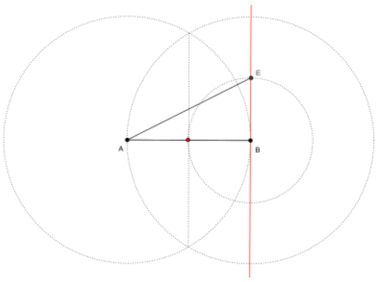

Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 3

4) Construamos a circunferência $C_3$ de centro B e raio de medida do segmento e marquemos o ponto E, que será a interseção entre esta circunferência C3 e a reta r.



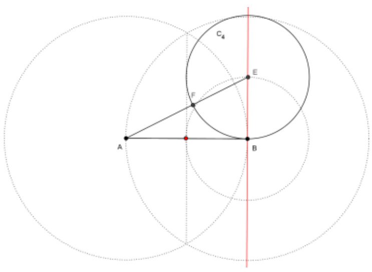

Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 4

5) Tracemos AE.



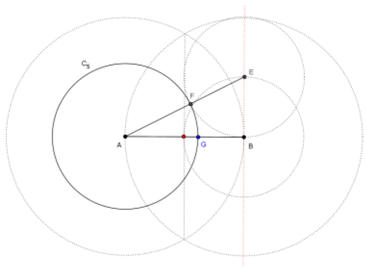

Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 5

6) Construamos $C_4$ de centro E e raio de medida do segmento e marquemos o ponto F que será a interseção de $C_4$ com o segmento .



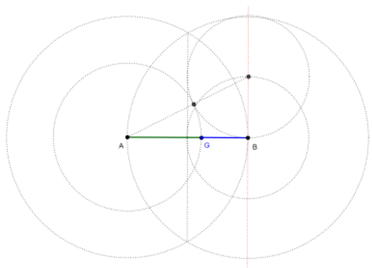

Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 6

7) Construamos $C_5$ de centro A e raio de medida do segmento e marquemos o ponto G que será a interseção de $C_5$ com o segmento .




Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 7

8) O ponto G divide o segmento AB na razão áurea, onde — =




Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 8

Podemos concluir que o ponto G divide o segmento AB na razão áurea, já que:

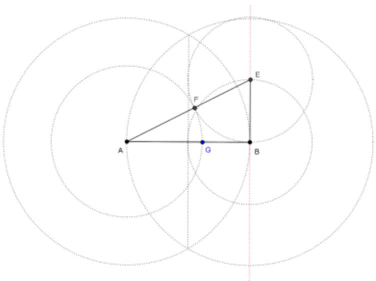



Fig.3: Prova que o ponto G divide o segmento AB na razão áurea

Seja x unidades o tamanho do segmento . Por construção temos que o segmento será igual a – unidades. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABE teremos que $^2 = \ ^2 + \ ^2$ logo, $^2 = x^2 + — = —$ e assim $= —$.

Como = por construção e sabemos que = –, e ainda = + teremos que — = + – , logo = — – ——— .

Como = , por construção e sabendo que = ———, e ainda = + teremos que x = ——— + , logo = x - ——— = ———.

Assim temos que = ——— e = ———. Logo — ——— = ——— . ——— = ——— = ——— . ——— = ——————— = ——— = ——— = 1,6108033989... =

.

## 2.3. TRIÂNGULOS ÁUREOS

Os triângulos podem ser classificados de acordo com os seus ângulos da seguinte forma: acutângulo, obtusângulo e retângulo.

Iremos apresentar nos subcapítulos a seguir quais triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo podem ser classificados como sendo triângulos áureos.

### 2.3.1. Triângulo Acutângulo

Um triângulo acutângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a razão do tamanho de um dos seus lados congruentes pelo lado não congruente for o número de ouro.

Vamos mostrar que este fato só ocorre se, e somente se, os ângulos deste triângulo acutângulo medirem 36º, 72º e 72º.

Para provar esta afirmação, dado o triângulo isósceles ABC, com a razão entre seu lado congruente pelo lado não congruente igual ao número de ouro iremos demonstrar que os seus ângulos medem 36º, 72º e 72º.

De fato, seja o triângulo ABC isósceles com a razão entre seu lado congruente pelo lado não congruente igual ao número de ouro. Seja = = r, = l e o ângulo = . Teremos que - —— que é o número de ouro.

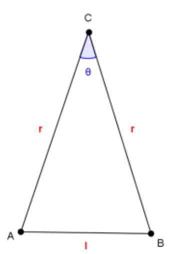



Fig.4: Demonstração 1 - Triângulo Acutângulo Áureo

Pela lei dos cossenos teremos que:

Como teremos:

36º

E como o triângulo ABC é isósceles nós teremos que os ângulos

72º. Como queríamos demonstrar.

Agora seja o triângulo ABC, isósceles com seus ângulos medindo 36º, 72º e 72º iremos demonstrar que a razão entre seu lado congruente pelo lado não congruente será igual ao número de ouro.

De fato, dado o triângulo ABC isósceles com seus ângulos medindo 36º, 72º e 72º.

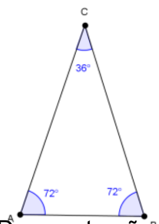
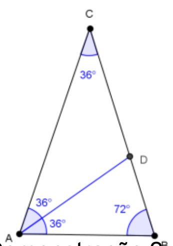


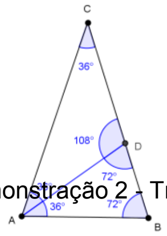

Fig.5: Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo - Passo 1

Tracemos a bissetriz do ângulo , e chamemos de ponto D a interseção da bissetriz com o lado




Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo - Passo 2

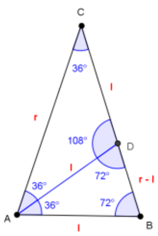
Analisando o triângulo ADC temos que o ângulo mede 108º , já que sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180º e temos que = = 36º. E como e são ângulos suplementares, teremos que medirá 72º.




Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo - Passo 3

Observemos agora que os triângulos ACB e BAD são semelhantes por AAA (ângulo, ângulo, ângulo), já que = = 72º, = = 36º e = = 72º.

Chamemos a medida do lado de r e a medida de de l, por construção teremos que = = r. Como o triângulo BAD é isósceles teremos que = = l, analogamente no triângulo ADC teremos que = = l. Sabemos que = + teremos que r = l + , e assim = r - l.




Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo - Passo 4

Aplicando a semelhança de triângulo nos triângulos ACB e BAD teremos que:

E como foi visto no capítulo anterior, teremos que:

Como queríamos demonstrar.

### 2.3.2. Triângulo Obtusângulo

Um triângulo obtusângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a divisão do tamanho do seu lado não congruente por um dos seus lados congruentes for o número de ouro.

Este fato só ocorre se, e somente se, os ângulos deste triângulo obtusângulo medirem 36º, 36º e 108º.

Para provar esta afirmação, dado o triângulo obtusângulo ABC, com a razão entre seu lado não congruente pelo lado congruente igual ao número de ouro iremos demonstrar que os seus ângulos medem 36º, 36º e 108º.

De fato, pois seja o triângulo ABC isósceles com a razão entre seu lado não congruente pelo lado congruente igual ao número de ouro. Seja = = l, = r e o ângulo = . Teremos que - —— que é o número de ouro.

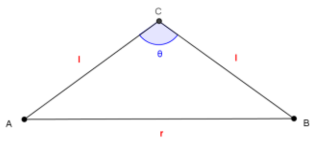



Fig.6: Demonstração 1 - Triângulo Obtusângulo Áureo

Pela lei dos cossenos teremos que:

-

Como - —— teremos:

108º

E como o triângulo ABC é isósceles nós teremos que os ângulos 36º. Como queríamos demonstrar.

Agora seja o triângulo ABC, isósceles com seus ângulos medindo 36º, 36º e 108º iremos demonstrar que a razão entre seu lado não congruente pelo lado congruente será igual ao número de ouro.

De fato, dado o triângulo ABC isósceles com seus ângulos medindo 36º, 36º e 108º.

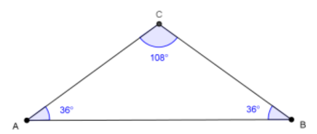
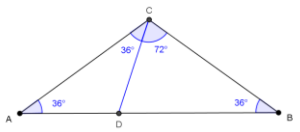


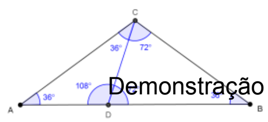

Fig.7: Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 1

Marquemos um ponto D pertencente ao segmento de tal forma que o ângulo seja igual a 36º e o ângulo seja igual a 72º.



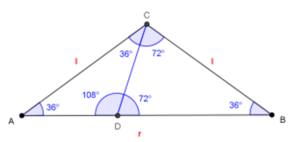

Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 2

Analisando o triângulo ADC temos que o ângulo mede 108º , já que sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180º. E como e são ângulos suplementares, teremos que medirá 72º.



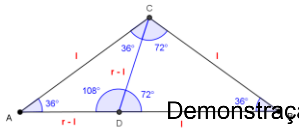

Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 3

Chamemos a medida do lado de r e a medida de de l, por construção teremos que = = l.




Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 4

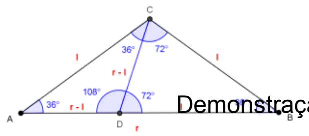
Ao construirmos o segmento , criamos o triângulo CBD que é isósceles, logo a medida de é igual a medida de , que vale l. Como , teremos que r , e assim . E finalmente, como o triângulo ADC também é isósceles, teremos que a medida de é igual a medida de , que vale .




Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 5

Podemos observar que os triângulos ACB e ADC são semelhantes por AAA (ângulo, ângulo, ângulo), já que = = 108º, = = 36º e = = 36º.

Aplicando a semelhança de triângulo nos triângulos ACB e ADC teremos que:




Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 6

E como visto no capítulo anterior:

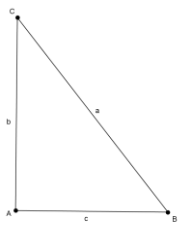
Como queríamos demonstrar.

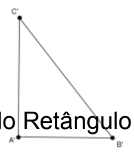
### 2.3.3. Triângulo Retângulo

> Um triângulo retângulo é dito áureo se for semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a e catetos iguais a e 1.

Este fato só ocorre se, e somente se, os ângulos deste triângulo retângulo medirem 38º, 52º e 90º.

Dado o triângulo retângulo ABC, semelhante ao triângulo retângulo A'B'C' com hipotenusa igual a e catetos iguais a e 1.



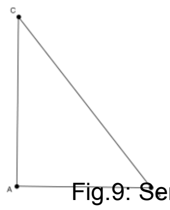




1

Fig.8: Semelhança 1 - Triângulo Retângulo Áureo

Seja = c, = b e = a. Como ABC é semelhante a A'B'C', teremos que a = k , b = k e c = k, para algum k pertencente ao conjunto dos números reais positivos.

K — K



K

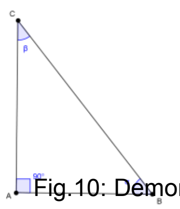
Fig.9: Semelhança 2 - Triângulo Retângulo Áureo

Iremos demonstrar que se o triângulo retângulo é semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a e catetos iguais a — e 1, sendo assim classificado como áureo, os ângulos deste triângulo retângulo irão medir 38º, 52º e 90º.

De fato, pois seja = 90º , = e =

K

K —



K

Fig.10: Demonstração 1 - Triângulo Retângulo Áureo

Temos que:

—

–

, e sendo assim teremos que:

= 52º

E como º, teremos que = 38º como queríamos demonstrar.

Demonstraremos agora que se os ângulos de um triângulo retângulo medem 38º, 52º e 90º, este triângulo retângulo é semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a e catetos iguais a e 1 e, sendo assim, classificado como triângulo retângulo áureo.

De fato, pois seja o triângulo ABC com = 90º, = 52º, = 38º e ainda que = c, = b e = a

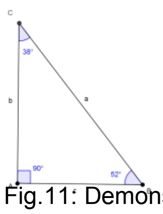



Fig.11: Demonstração 2 - Triângulo Retângulo Áureo

Teremos que:

cos 52º = –

e

Logo $\cos^2 52º =$

Como $\operatorname{sen}^2 52º + \cos^2 52º = 1$, temos que:

$\operatorname{sen}^2 52º + \quad = 1$

$\operatorname{sen}^2 52º = 1$

Como $\operatorname{sen}^2 52º =$ , teremos que:

$= 1$

$= 1$

$=$

$=$

$=$

Observe que

. Logo,

$=$

$=$

Assim, teremos que e $=$ , logo este triângulo retângulo é semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a e catetos iguais a e 1 e, sendo assim, classificado como triângulo retângulo áureo, como queríamos demonstrar.

## 2.4 RETÂNGULO

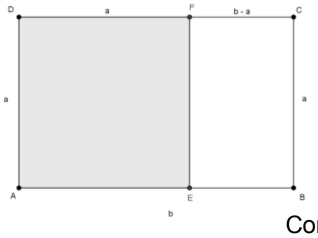
Para que um retângulo seja classificado como sendo um retângulo áureo ele deve apresentar uma característica particular: todo retângulo será classificado como Áureo se dele ao extrairmos um quadrado de lado igual ao menor lado do retângulo, o retângulo restante for semelhante ao retângulo inicial.

Observemos o retângulo abaixo para ilustrar como podemos identificar um retângulo áureo.

Seja um retângulo de lados a, b, com a < b.


Fig.12: Como identificar um retângulo áureo - Passo 1

Retiremos um quadrado de lado a do retângulo acima.




Como identificar um retângulo áureo - Passo 2

Caso o retângulo de lados b e a e o retângulo de lados a e a - b sejam semelhantes, o retângulo inicial de lados b e a será classificado como sendo um retângulo áureo.

Observamos que caso os retângulos de lados b e a e o retângulo de lados a e b - a sejam semelhantes, teremos que:

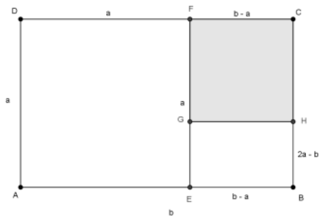
Como a e b representam os comprimentos dos lados do retângulo ABCD a razão entre estes valores nunca será um número negativo, por este motivo descartaremos a solução negativa da equação.

Assim:

Onde encontramos a razão áurea.

Assim concluímos que outra definição para retângulo áureo é: Todo retângulo será classificado como retângulo áureo quando a razão entre o seu maior e menor lado for igual ao número de ouro.

Podemos observar que se do retângulo restante (EBCF), extrairmos um quadrado (GHCF) de lado igual ao menor lado do retângulo, o novo retângulo (EBHG) será semelhante ao retângulo EBCF e, sendo assim o retângulo EBHG também será classificado como um retângulo áureo.




Como identificar um retângulo áureo - Passo 3

Vejamos que:

— ——

E como visto anteriormente teremos que – ——.

Iremos provar agora que este processo pode ser repetido infinitamente sempre nos dando um novo retângulo áureo.

Sabemos do estudo de relações entre proporções que: – —— ——, ou seja, – ——. Assim, podemos afirmar que se o retângulo de lados b e a for áureo, os retângulo de lados a e b - a e lados b - a e 2a - b também serão áureos.

Sendo assim, dada a sequência: b, a, b - a, 2a - b, 2b - 3a, 5a - 3b... Cujo termo geral será $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$ teremos pelo raciocínio de relações entre proporções que quaisquer dois valores consecutivos desta sequência serão os lados de um retângulo áureo se em nosso retângulo inicial − ——.

Fecharemos este capítulo mostrando como é possível construir um retângulo áureo utilizando apenas régua e compasso.

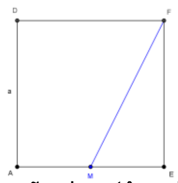
Inicialmente deveremos construir o quadrado AEFD de lado a.

Fig.13: Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 1

Marquemos M, o ponto médio do segmento .

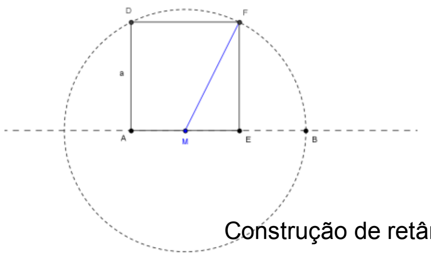
Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 2

Tracemos o segmento .



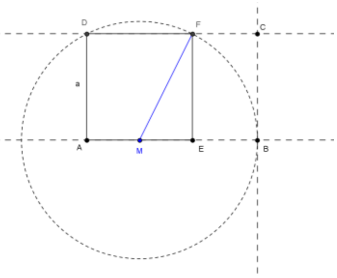

Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 3

Desenhemos a reta e o círculo de centro M e raio . Chamemos de B a interseção da reta com o círculo de centro M e raio .




Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 4

Tracemos uma reta perpendicular a reta que passe por B. Tracemos a reta . Chamemos de C a interseção entre essas duas retas.




Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 5

O retângulo ABCD é um retângulo áureo.

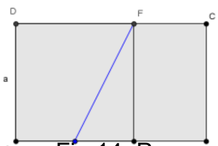
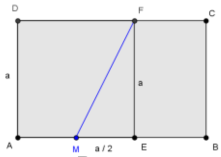


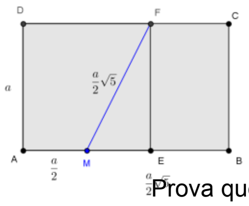

Fig.14: Prova que o retângulo ABCD é Áureo - Passo 1

De fato pois, como − e , por Pitágoras temos que:




Prova que o retângulo ABCD é Áureo - Passo 2

Como , – e teremos que:



Prova que o retângulo ABCD é Áureo - Passo 3

Sendo assim,

.

## 2.5 PENTÁGONO REGULAR

Em um pentágono regular podemos encontrar diversas vezes a razão áurea. Iremos mostrar como encontrar algumas dessas razões utilizando o pentágono regular ABCDE de lado l.

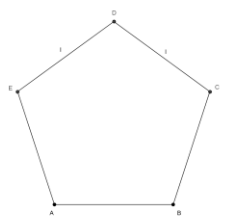


Fig.15: Pentágono

Caso 1

Tracemos o segmento e definamos que .

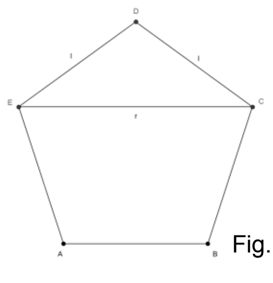
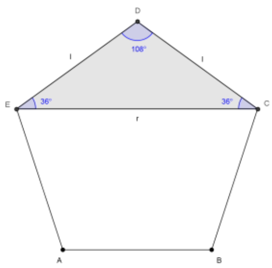


Fig.16: Pentágono - Caso 1 - Passo 1

Como ABCDE é um pentágono regular temos que º. Temos ainda, que o triângulo EDC é isósceles e, com isso, º



Pentágono - Caso 1 - Passo 2

E como demonstrado no capítulo 2.3.2 Triângulo Obtusângulo teremos que a razão entre – será igual ao número de ouro.

Caso 2

Ainda utilizando o pentágono regular ABCDE tracemos a diagonal .

Como ABCDE é um pentágono regular temos que º. Temos ainda, que o triângulo EDA é isósceles e, com isso, º.

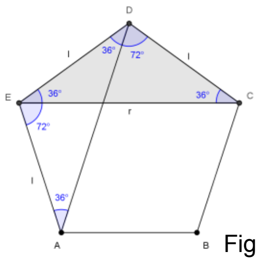
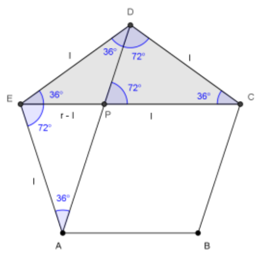


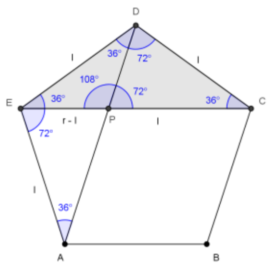
Fig.17: Pentágono - Caso 2 - Passo 1

Seja P o ponto de interseção entre os segmentos e . No triângulo CDP teremos que o ângulo º, logo l. E como teremos que r - l.



Pentágono - Caso 2 - Passo 2

No triângulo EPD teremos que º, assim teremos um triângulo com os ângulos iguais a 36º, 36º e 108º, e como demonstrado no capítulo 2.3.2. Triângulo Obtusângulo, teremos que a razão entre — será igual ao número de ouro.




Pentágono - Caso 2 - Passo 3

<u>Caso 3</u>

Vemos que o triângulo EPD é isósceles, logo r - l.

E como demonstrado no capítulo 2.3.1. Triângulo Acutângulo, teremos que a razão entre — será igual ao número de ouro.

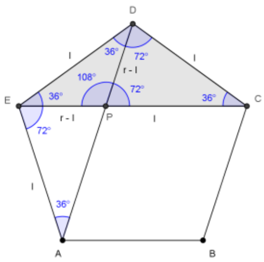



Fig.18: Pentágono - Caso 3

Caso 4

Como demonstrado no Caso 2 sabemos que a razão entre — será igual ao número de ouro logo, podemos observar que a interseção de duas diagonais no pentágono regular, divide elas de tal forma que podemos encontrar o número áureo ao fazermos a razão entre o maior e o menor comprimento.

Como exemplo, ainda utilizando o pentágono regular ABCDE, podemos citar que — — — que será igual ao número de ouro.

Caso 5

Como demonstrado no Caso 1 sabemos que a razão entre - será igual ao número de ouro logo, podemos observar que a interseção de duas diagonais no pentágono regular, divide elas de tal forma que podemos encontrar o número áureo ao fazermos a razão entre a diagonal de um pentágono e o maior comprimento obtido após realizarmos a divisão da diagonal.

Como exemplo, ainda utilizando o pentágono regular ABCDE, podemos citar que — — - que será igual ao número de ouro.

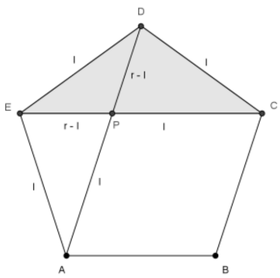



Fig.19: Pentágono - Caso 5

### *2.6 RAZÃO ÁUREA NA CIRCUNFERÊNCIA*

Dizemos que dois pontos pertencentes a uma circunferência dividem a circunferência em uma razão áurea quando a razão entre o comprimento da circunferência está para o arco maior assim como a razão entre o arco maior está para o arco menor e, ambas as razões, serão iguais ao número de ouro.

Seja a circunferência de centro O e raio R.

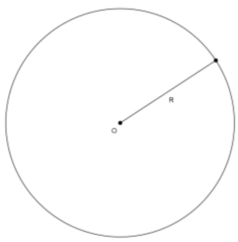


Fig.20: Circunferência

Marquemos os pontos A e B de maneira que estes pontos estejam em uma razão áurea.

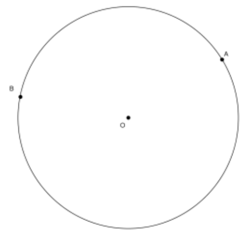



Fig.21: Circunferência - Razão Áurea

Vamos mostrar que estes pontos dividem a circunferência em razão áurea se, somente se, o menor ângulo AÔB medir 137,5º (aproximado).

Para provar está afirmação iremos inicialmente demonstrar que se os pontos A e B pertencentes a circunferência estão em razão áurea, o ângulo AÔB mede 137,5º.

De fato, pois seja A e B dois pontos pertencentes a circunferência de tal maneira que eles dividam a circunferência em razão áurea.

Seja a medida do menor arco AB igual a t.

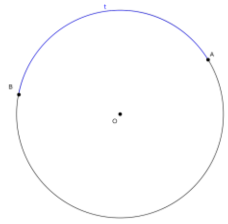
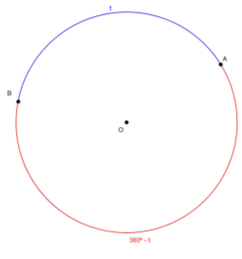



Fig.22: Demonstração 1 - Circunferência - Passo 1

Logo a medida do maior arco AB será igual a 360º - t.




Demonstração 1 - Circunferência - Passo 2

Como os pontos A e B dividem a circunferência na razão áurea teremos que:

$$\frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{-}{\quad}$$

Logo,

$$\frac{\quad}{\quad} \quad \frac{-}{\quad}$$

t

Como queríamos demonstrar.

Iremos demonstrar agora que dado dois pontos A e B pertencentes a uma circunferência de centro O, onde o menor ângulo AÔB mede 137,5º, estes pontos dividem a circunferência em razão áurea.

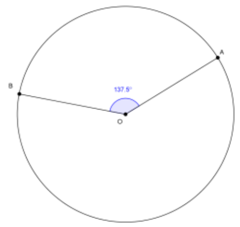
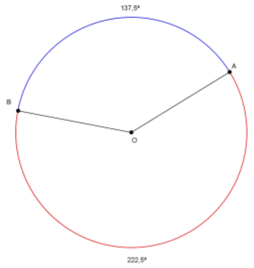



Fig.23: Demonstração 2 - Circunferência - Passo 1

Sabemos que o menor arco AB medirá 137,5º e o maior arco AB, por ser replementar ao menor, medirá 222,5º.




Demonstração 2 - Circunferência - Passo 1

Assim teremos que:

Como queríamos demonstrar.

Cabe ressaltar que teremos resultados aproximados, pois o valor de 137,5º é um valor aproximado.

## 2.7. PIRÂMIDE ÁUREA

Seja uma pirâmide de base quadrada de lado igual a “b”, altura igual a “c” e altura de suas faces iguais a “a”. Está pirâmide será classificada como sendo uma pirâmide áurea quando o triângulo retângulo de lados c, − e a for um triângulo áureo.

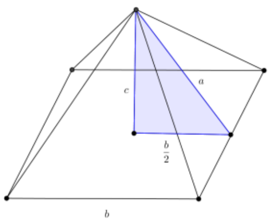



Fig.24: Definição Pirâmide Áurea

Como visto no subcapítulo 2.3.3 Triângulo retângulo, sabemos que um triângulo retângulo é dito áureo se for semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a e catetos iguais a ‾ e 1. Logo para que uma pirâmide de base quadrada seja classificada como áurea ela terá lado da base igual a 2x, altura igual a x ‾ e altura de suas faces iguais a x , com x ϵ $^{*}_{+}$.

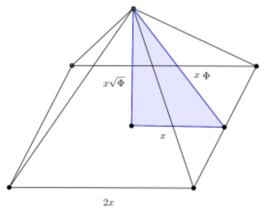



Fig.25: Pirâmide Áurea

Uma propriedade interessante encontrada nas pirâmides áureas é a de que a área de cada face triangular é igual a área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide.

Iremos demonstrar que está propriedade só ocorre se, e somente se, a pirâmide em questão for uma pirâmide áurea.

De fato, suponhamos que a pirâmide seja áurea, logo ela terá lado da base igual a 2, altura igual a e altura de suas faces iguais a .

Com isso a área da face triangular será:

Já a área do quadrado cujo lado é a altura da pirâmide será:

Logo, demonstramos que a área de cada face triangular é igual a área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide.

Iremos demonstrar agora que se a área de cada face triangular é igual a área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide, esta pirâmide será classificada como áurea e assim terá base igual a 2, altura igual a e altura de suas faces iguais a .

De fato, dado a pirâmide abaixo de base quadrada de lado igual a "b", altura igual a "c" e altura de suas faces iguais a "a".

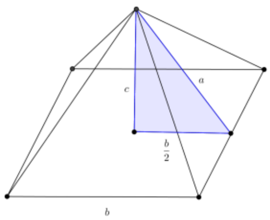


Fig.26: Demonstração 1 - Pirâmide Áurea

O triângulo formado pela altura da pirâmide, metade da base e altura do triângulo da face lados iguais c, – e a (supondo c > – ).

Por Pitágoras teremos que — e pela suposição feita temos que área de cada face triangular é igual a área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide, ou seja, — .

Como — , temos que:

Como por Pitágoras temos que —, podemos substituir o valor de b que nos dará:

— —— —

— —

– –

Seja – x, então:

, que como foi visto em 2.1. Razão Áurea terá como uma de suas raízes o número Φ. Assim:

–

– — .

Vimos que , — , logo:

—

– —

– –
–

E como – —·, teremos que:

– – —, o que só ocorre se o triângulo retângulo for áureo e como a
–

pirâmide possuí a base quadrada se trata de uma pirâmide áurea.

## 2.8. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de Fibonacci é uma sequência de números naturais definida recursivamente de tal maneira que o 1º termo e o 2º termo são iguais a 1 e:

- O 1º termo somado com o 2º gera o 3º termo;
- O 2º termo somado com o 3º gera o 4º termo;
- O 3º termo somado com o 4º gera o 5º termo;
- O 4º termo somado com o 5º gera o 6º termo;

E assim sucessivamente.

Denotando a sequência por $F = F_n$ poderemos escrever a sequência da seguinte forma $F_0 = F_1 = 1$, e:

$F_2 = F_1 + F_{0;}$

$F_3 = F_2 + F_{1;}$

$F_4 = F_3 + F_{2;}$

$F_5 = F_4 + F_{3;}$

$F_6 = F_5 + F_{4; \dots}$

Em termos gerais teremos que:

$\boxed{F_0 = F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n}$

Esta sequência não é limitada superiormente.

Se tomarmos as razões entre cada termo pelo seu antecessor teremos uma sequência numérica, cujo termo geral é dado por —— .

Analisando os primeiros termos da sequência $A_n$ observamos que:

–

–

–

–

–

—

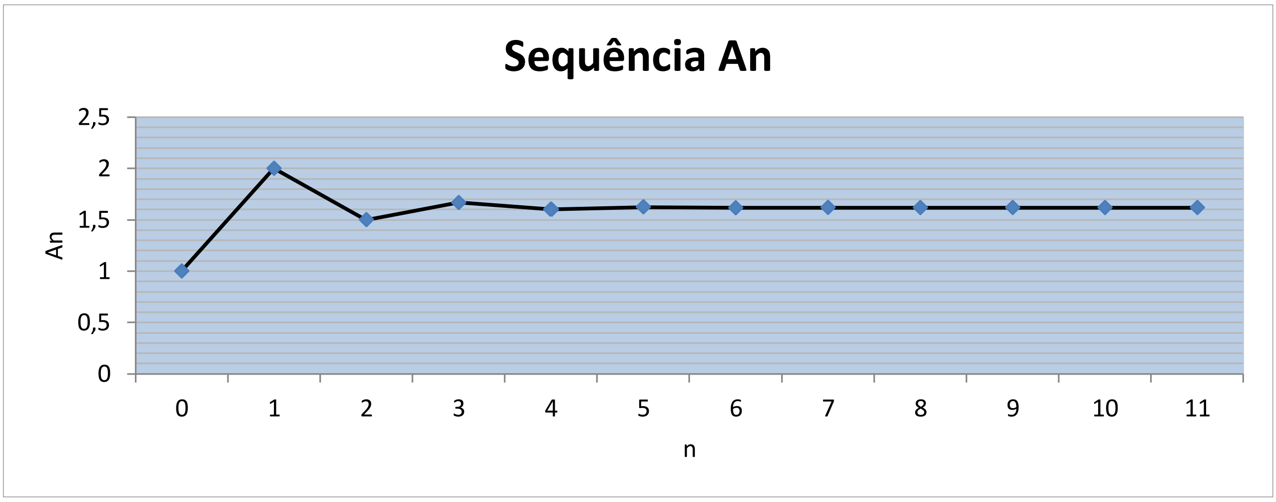



Fig.27: Sequência An

Podemos perceber que esta sequência é limitada e tende para o número de ouro, como iremos demonstrar a seguir:

De fato, pois como vimos a sequência de Fibonacci é definida por $F_0 = F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, sendo assim ela é uma sequência de segunda ordem e possuí equação característica igual a $r^2 = r + 1$ e como já visto nos subcapítulos anteriores possuí raízes iguais a r .

Logo teremos que:

Usando que $F_0 = F_1 = 1$ obteremos o sistema:

Multiplicando a primeira linha por

Somando as duas linhas teremos:

E como , teremos que:

Assim e .

Substituindo em teremos:

Temos que logo

Como , quando n tender ao infinito teremos que e irão se aproximar cada vez mais de zero. Além disso, como temos no numerador e no denominador, quando n tender ao infinito $A_n$ será igual a .

## 2.9. ESPIRAL ÁUREA

Uma espiral é uma linha curva que gira em torno de um ponto central se afastando progressivamente obedecendo a uma lei de formação. A espiral áurea tem como lei de formação a composição de quadrados com lados de medidas proporcionais a sequência de Fibonacci.

Iremos mostrar como construir uma espiral áurea utilizando apenas régua e compasso.

Inicialmente construiremos o quadrado ABCD de lado igual a uma unidade.

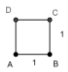
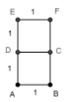


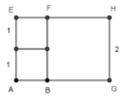

Fig.28: Construção Espiral Áurea - Passo 1

Construiremos um novo quadrado CDEF utilizando o lado CD, com tamanho igual a 1 unidade, pegando o primeiro quadrado como base para esta construção.



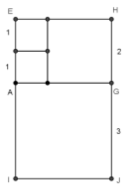

Construção Espiral Áurea - Passo 2

Usaremos agora o lado FB como base , com tamanho igual a 2 unidade, para construirmos um novo quadrado. Este novo quadrado será o BFHG.



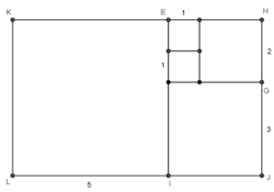

Construção Espiral Áurea - Passo 3

O novo quadrado que iremos construir será o AGJI e terá como base o lado AG, de tamanho igual a 3 unidade.



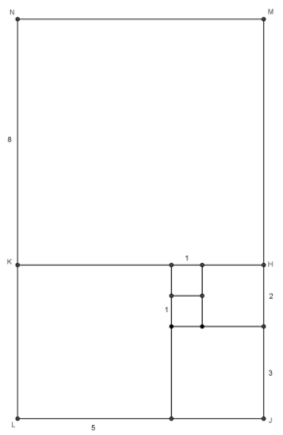

Construção Espiral Áurea - Passo 4

Continuando com o mesmo processo construiremos o quadrado EILK, com lado medindo 5 unidade.




Construção Espiral Áurea - Passo 5

O próximo passo será construir o quadrado de lado 8, HKMN utilizando o lado HK de base.

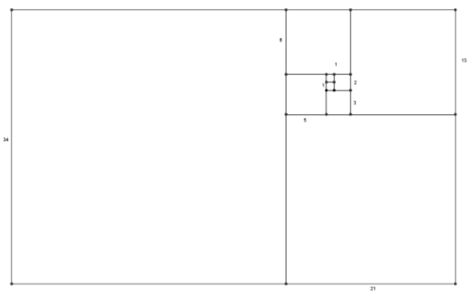



Construção Espiral Áurea - Passo 6

Observamos que o processo pode ser repetido infinitamente, sempre utilizando o maior lado do último retângulo formado como base para um novo quadrado.

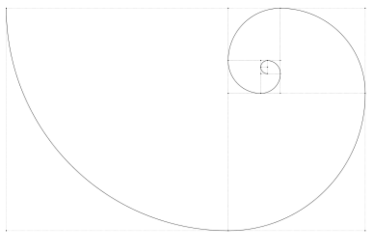
Podemos observar também que os quadrados formados possuem lados iguais a 1,1, 2, 3, 5, 8,... , ou seja, possuem medidas iguais a sequência de Fibonacci.

Observe na figura a seguir que repetimos este mesmo processo até avançarmos alguns passos e construirmos o quadrado de lado 34.




Construção Espiral Áurea - Passo 7

Para construirmos a espiral áurea iremos traçar um quarto de circunferência em cada quadrado feito anteriormente de maneira a termos uma linha curva que estará girando em torno de um ponto central.



Construção Espiral Áurea - Passo 8

O ponto central da espiral áurea será a intercessão das diagonais dos dois maiores retângulos (que não são quadrados). Quanto maior o número de quadrados construídos a interseção das diagonais citadas tenderão para o ponto central.

Abaixo temos um desenho de uma espiral áurea.

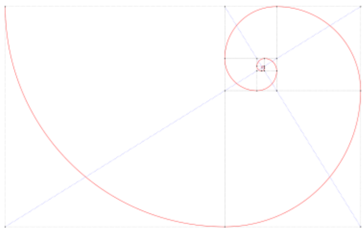


Fig.29: Espiral Áurea

# 3. ONDE ENCONTRAMOS O NÚMERO ÁUREO EM NOSSO COTIDIANO

Aproximações do número áureo podem ser encontradas tanto na natureza, em construções ou em obras de arte. Em todos os casos existem divergências sobre se é mesmo possível encontrar o número de ouro. Iremos apresentar nos subcapítulos seguintes algumas situações onde isto ocorre.

Inicialmente apresentaremos onde alguns autores afirmam podermos encontrar a razão áurea, ao realizarmos a razão entre diversos comprimentos de partes do corpo humano.

Após este subcapítulo iremos apresentar a Pirâmide de Quéops e mostraremos porque alguns autores conseguem classificar ela como sendo uma pirâmide áurea enquanto outros autores mostram que isso não é possível.

No subcapítulo posterior apresentaremos uma das construções mais citadas quando se fala do número de ouro: o Parthenon. Alguns autores afirmam que o Parthenon foi construído tendo como base um retângulo áureo e, justamente por isso, o número de ouro foi denotado pela letra grega $\Phi$ (PHI) em homenagem a Phideas, que foi o arquiteto que projetou o Parthenon.

A seguir, analisaremos três grandes obras de Leonardo da Vinci: o desenho do Homem Vitruviano, o quadro de Mona Lisa também conhecida como A Gioconda e finalmente analisaremos a pintura em óleo San Girolamo.

Após analise das obras de Leonardo da Vinci veremos como podemos encontrar o número áureo em diversos cartões utilizados em nosso cotidiano, como por exemplo, o cartão de crédito.

Finalmente analisaremos um molusco marinho muito citado quando falamos sobre o número áureo, em especial sobre a espiral áurea. Muitos autores afirmam que os náutilos apresentam a razão áurea em seu corpo e neste subcapítulo iremos analisar esta informação.

## 3.1. CORPO HUMANO

Muitos autores afirmam que conseguimos encontrar a razão áurea ao realizarmos a proporção entre diversos comprimentos de partes do corpo humano. Citaremos como exemplos, três possibilidades de onde estes autores afirmam encontrar uma aproximação do número áureo, ao se realizar a divisão entre as seguintes medidas:

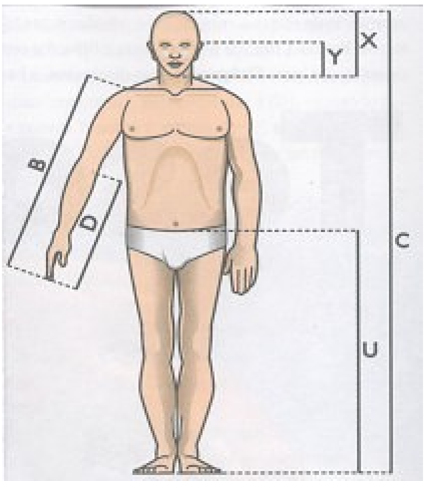



Fig.30: Corpo Humano

- Altura do corpo humano (C) pela distância do umbigo até o chão (U);
- Tamanho do braço (B) pelo tamanho do cotovelo até a ponta do dedo médio (D);
- Tamanho da face (X) pela distância entre o queixo até os olhos (Y).

Estes mesmo autores costumam afirmar que quanto mais próximo do número áureo se encontram estas razões, a proporção se torna mais agradável ao olho humano.

Já outros autores afirmam que não conseguimos encontrar a razão áurea ao realizarmos a proporção entre as partes citadas. Dizem ainda que além de conseguirmos apenas aproximações do número áureo, não existe nenhum estudo científico que mostra que a razão áurea é mais agradável ao olho humano.

## 3.2. PIRÂMIDE DE QUÉOPS

A construção mais antiga, onde muitos autores dizem encontrar o número áureo, é na Pirâmide de Quéops.

Fig.31: Pirâmide de Quéops

A Pirâmide de Quéops é a maior das três grandes pirâmides de Gizé (as outras duas são: Quéfrem e Míquerinos) e por isso também é conhecida como “A grande Pirâmide”. A pirâmide foi construída a aproximadamente 4500 anos atrás e muitos acreditam que ela foi construída para ser a tumba do Faraó de Quéops.

A Pirâmide de Quéops foi construída utilizando como unidade de medida a vara egípcia que possuí 0,525 metros. A Pirâmide possui uma base quadrangular de lado medindo 440 varas e a sua altura media, na época da construção, 280 varas.

Logo, as suas medidas em metros seriam:

| Quéops | |
|---|---|
| Altura | 147 metros |
| Base | 231 metros |

E como visto em **2.7. Pirâmide Áurea**, temos que a pirâmide de Quéops pode ser classificada como sendo uma pirâmide áurea, pois o triângulo retângulo formado pela metade da aresta da base, altura da pirâmide e altura da face triangular da pirâmide é um triângulo retângulo áureo como veremos a seguir.

De fato, pois dado o triangulo retângulo ABC formado pela metade da aresta da base, altura da pirâmide e altura da face triangular da pirâmide. Teremos que o segmento AB medirá 115,5 metros e o segmento AC medirá 147 metros.

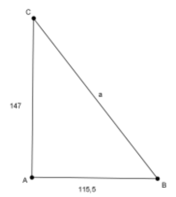



Fig.32: Triângulo Retângulo Áureo na Pirâmide de Quéops

Aplicando Pitágoras teremos que:

E como:

Temos então que a Pirâmide de Quéops pode ser classificada como sendo uma pirâmide áurea.

Já alguns autores afirmam que não se trata de uma pirâmide áurea, pois a pirâmide, pelas suas verdadeiras dimensões nem teria uma base quadrada. A sua base original seria um retângulo de 755,43 pés por 756,08 pés, o que nos dariam em metros um retângulo de 230,255064 metros por 230,453184 metros. Ou seja, afirmam mais uma vez que se trata apenas de uma aproximação do número áureo, sem nenhum registro histórico de que tenha sido usada esta razão na construção da pirâmide.

## 3.3. PARTHENON

Uma das construções mais citadas quando se fala do número áureo é o Parthenon, também conhecido como o templo das virgens. O Parthenon foi construído entre 477 e 433 a.C. em Atenas, por Phideas (Fídeas), que era um grande arquiteto e escultor que viveu na Grécia antiga entre os anos de 490 e 430 a.C.

Os autores que defendem que conseguimos encontrar o número áureo na construção deste templo afirmam que o Parthenon foi construído tendo como base um retângulo áureo e, justamente por isso, o número de ouro foi denotado pela letra grega Φ (PHI) em homenagem a Phideas.

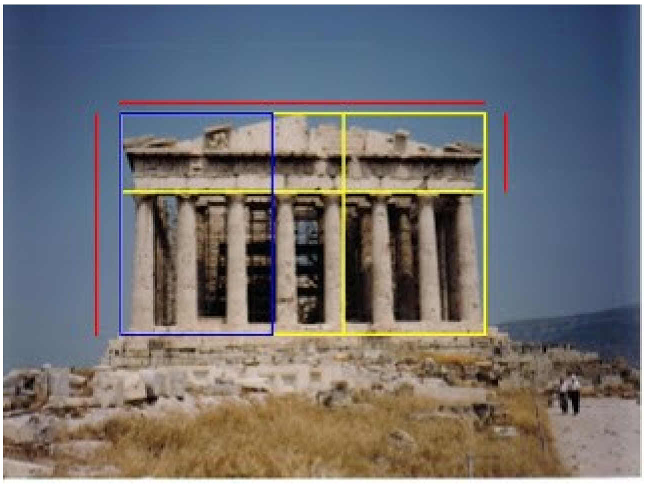


Fig.33: Parthenon

Estes autores afirmam ainda, que podemos encontrar diversos outros retângulos áureos, em outras partes da construção como, por exemplo, o retângulo formado entre duas pilastras consecutivas.

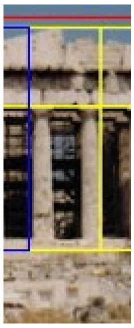


Fig.34: Detalhe Parthenon

Já outros autores dizem que tudo não passa de um grande equívoco, pois afirmam que não seria possível conseguirmos construir um retângulo áureo utilizando as dimensões do Parthenon. Estes autores dizem que as pessoas que querem encontrar retângulos áureos utilizam dimensões aproximadas das dimensões reais do Parthenon, a fim de conseguir assim encontrar os retângulos áureos.

## 3.4. OBRAS DE LEONARDO DA VINCI

Quando associamos o número áureo a obras de artes um dos artistas mais citado é o Leonardo di Ser Piero da Vinci, mais conhecido como Leonardo da Vinci. Ele nasceu em Anchiano, Itália, em 15 de abril de 1452 e morreu em Ambroise, França, em 2 de maio de 1519, com 67 anos. Leonardo da Vinci foi uma das figuras mais importantes do Renascimento e se destacou como matemático, engenheiro, cientista, escultor, arquiteto, botânico, poeta, músico, pintor, entre outras áreas.

Muitos autores afirmam que podemos encontrar o número áureo em diversas obras de Leonardo da Vinci. Mostraremos nos subcapítulos a seguir, três exemplos de trabalhos de Leonardo da Vinci, onde estes autores afirmam encontrar o número áureo.

Analisaremos o desenho do Homem Vitruviano, feito aproximadamente em 1490 para ilustrar a obra “De Architectura” do autor Marcus Vitruvius Pollio.

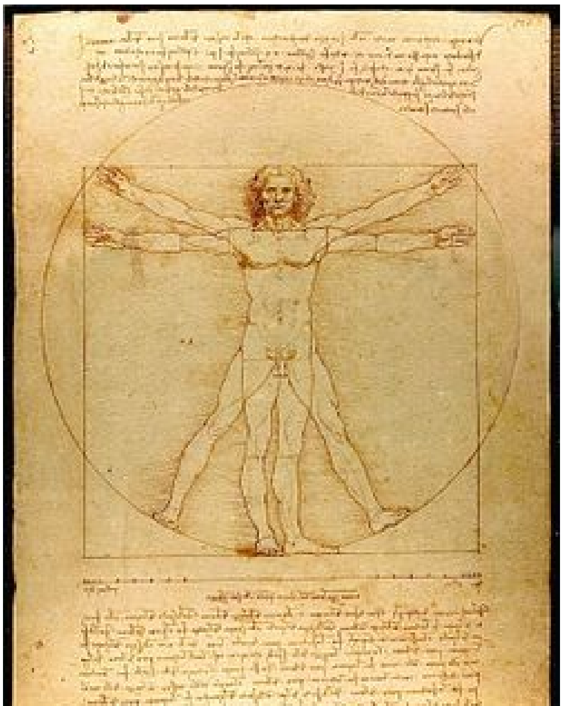


Fig.35: Homem Vitruviano

A segunda obra a ser analisada é o quadro de Mona Lisa também conhecida como A Gioconda.

Fig.36: Mona Lisa

E finalmente analisaremos a pintura em óleo San Girolamo.

Fig.37: San Girolamo

### 3.4.1. Homem Vitruviano

O Homem Vitruviano é um desenho feito aproximadamente em 1490 a. C., a pedido do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio (Século I a.C.), para ilustrar suas notas da obra "De Architectura", um tratado de arquitetura composto por 10 livros.

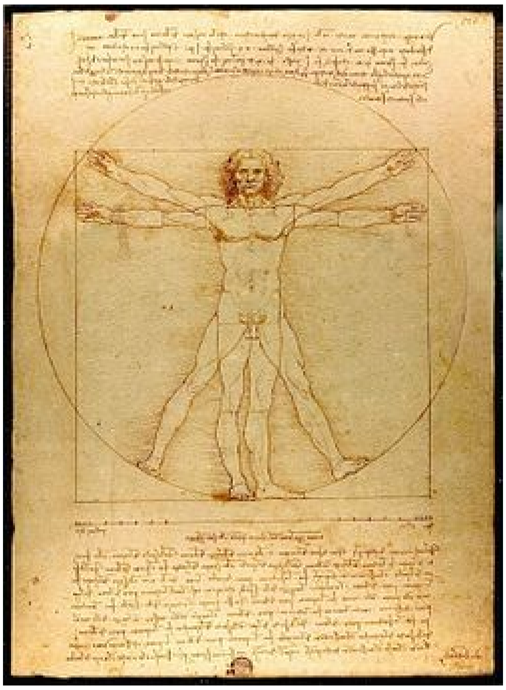


Fig.38: Homem Vitruviano

Muitos autores afirmam que podemos encontrar a razão áurea ao realizarmos a proporção entre os diferentes comprimentos de partes do corpo humano, as mesmas proporções já citadas no subcapítulo 3.1. Corpo Humano.

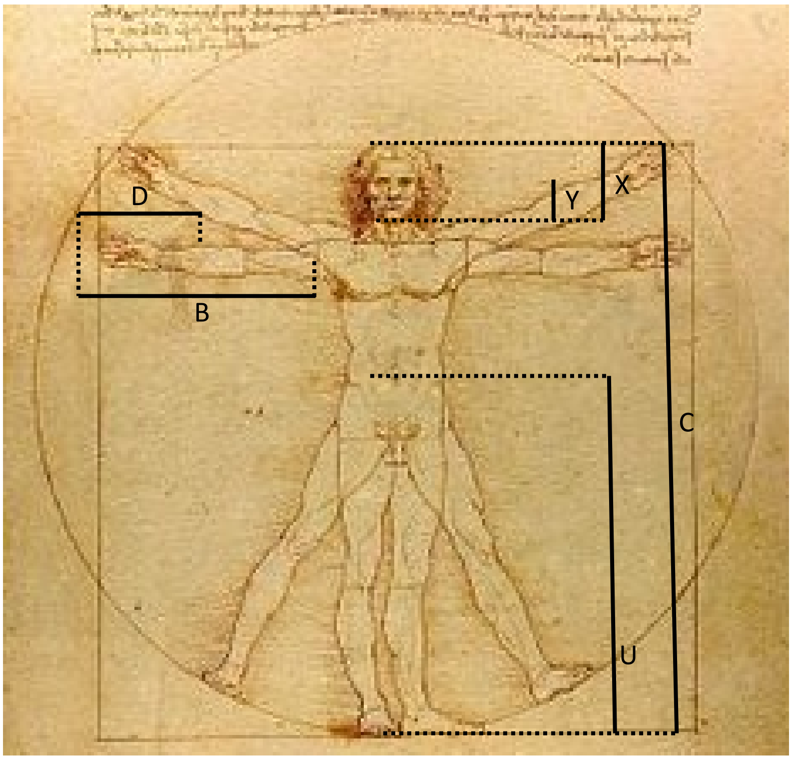



Fig.39: Homem Vitruviano e o Número Áureo

Já outros autores afirmam que não conseguimos encontrar a razão áurea ao realizarmos a proporção entre as partes citadas e, dizem ainda, que não existe nenhum registro histórico de que Leonardo da Vinci tenha se utilizado desta proporção para a confecção do desenho.

Estes autores justificam sua afirmação baseados no que o próprio Marcus Vitruvius Pollio escreveu no terceiro livro de sua obra, quando descreve as proporções do corpo humano masculino:

- um palmo é o comprimento de quatro dedos;
- um pé é o comprimento de quatro palmos;
- um côvado é comprimento de seis palmos;
- um passo são quatro côvados;
- a altura de um homem é quatro côvados;
- o comprimento dos braços abertos de um homem (envergadura dos braços) é igual a sua altura;
- a distância entre a linha de cabelo na testa e o fundo do queixo é um décimo da altura de um home;

- a distância entre o topo da cabeça e o fundo do queixo é um oitavo da altura de um homem;
- a distância entre o fundo do pescoço e a linha de cabelo na testa é um sexto da altura de um homem;
- o comprimento máximo dos ombros é um quarto da altura de um homem;
- a distância entre o meio do peito e o topo da cabeça é um quarto da altura de um homem;
- a distância entre o cotovelo e a ponta da Mao é um quarto da altura de um homem;
- a distância entre o cotovelo e a axila é um oitavo da altura de um homem;
- o comprimento da mão é um décimo da altura de um homem;
- a distância entre o fundo do queixo e o nariz é um terço do comprimento do rosto;
- a distância entre a linha de cabelo na testa e as sobrancelhas é um terço do comprimento do rosto;
- o comprimento da orelha é um terço da face;
- o comprimento do pé é um sexto da altura.

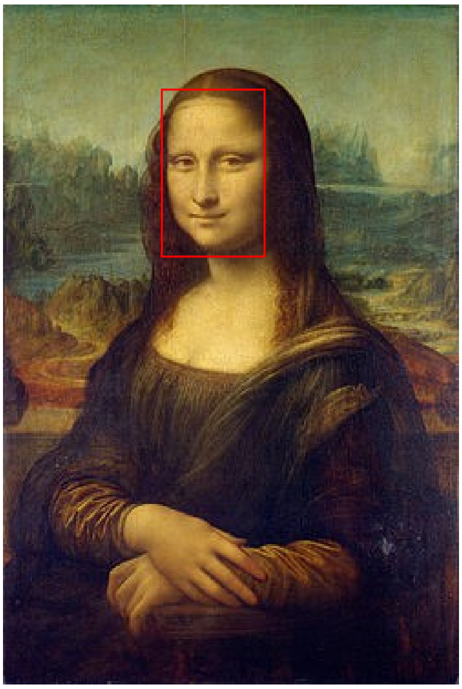
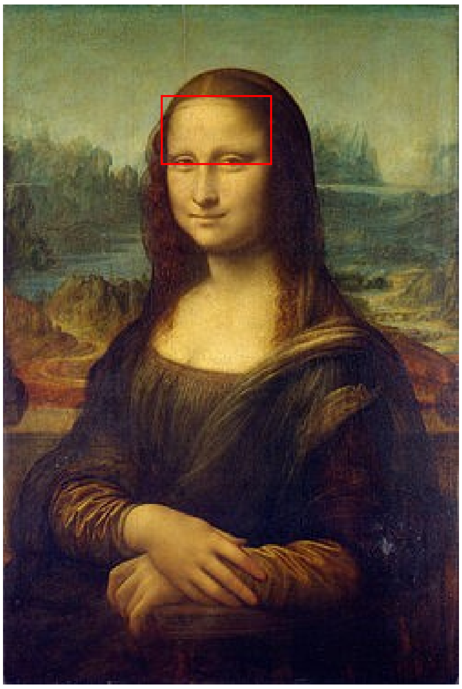
Podemos observar que em nenhum momento ele cita como proporção o número de ouro.

### 3.4.2. Mona Lisa

O quadro de Mona Lisa de Leonardo da Vinci, também conhecido como A Gioconda, teve o início de sua pintura no ano de 1503 e foi finalizada no ano de 1506.

Fig.40: Mona Lisa

Alguns autores defendem que Leonardo da Vinci utilizou-se de retângulos áureos como parâmetros de harmonia, como mostraremos nestes dois exemplos na reprodução abaixo.

Figuras 41 e 42: Mona Lisa e o Número Áureo

Estes autores afirmam que tanto ao construirmos um retângulo em torno do rosto ou um retângulo em torno da testa teremos exemplos de retângulos áureos.

Como no subcapítulo 3.3.1. Homem Vitruviano, existem alguns autores que afirmam que não existem registros de que estes retângulos áureos foram utilizadas para criar harmonia na pintura do quadro. Estes mesmos autores mostram que, diferente do que muitos dizem, as dimensões do quadro não formam um retângulo áureo já que o mesmo mede setenta e sete centímetros por cinquenta e três centímetros, onde teríamos  a razão entre os seus lados igual a 1,4528...

### 3.4.3. San Girolamo

Não se tem um ano preciso de quando foi iniciada, ou finalizada, a pintura em óleo de Leonardo da Vinci chamada San Girolamo.

Muitos autores afirmam que ao se desenhar um retângulo ao redor do corpo de San Girolamo iremos obter um retângulo áureo e, que este fato foi feito propositalmente para termos uma maior harmonia na pintura.

Construímos um retângulo áureo sobre a pintura para ilustrar tal afirmação.

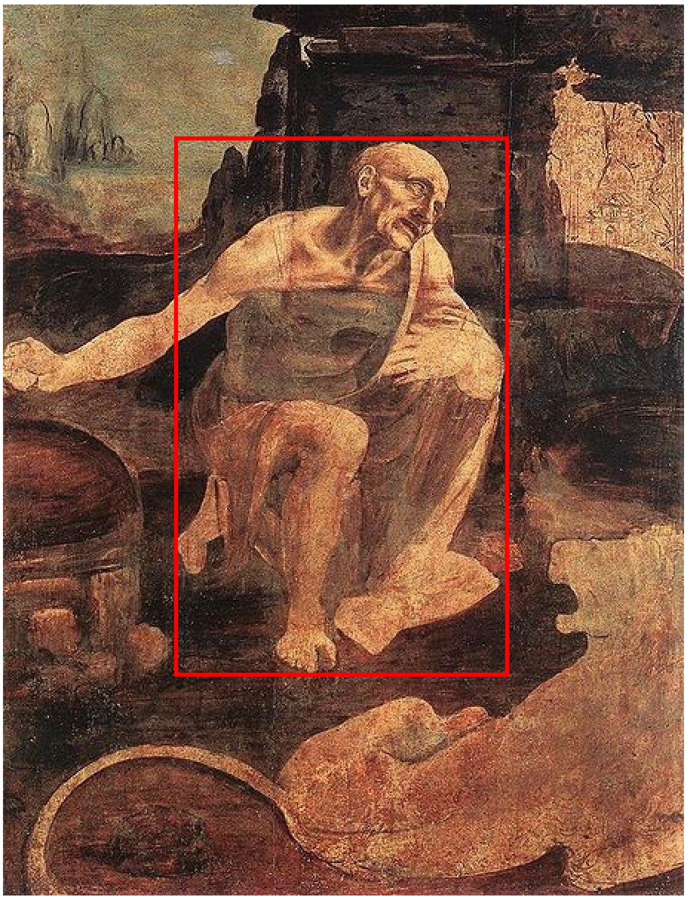


Fig.43: San Girolamo - Retângulo Áureo

Os autores que discordam de que Leonardo da Vinci utilizava retângulos áureos para obter harmonia em seus quadros, apontam que o braço de San Girolamo ficaria de fora desse retângulo áureo e, se fizéssemos um retângulo que englobasse também o braço de San Girolamo, este retângulo não seria áureo.

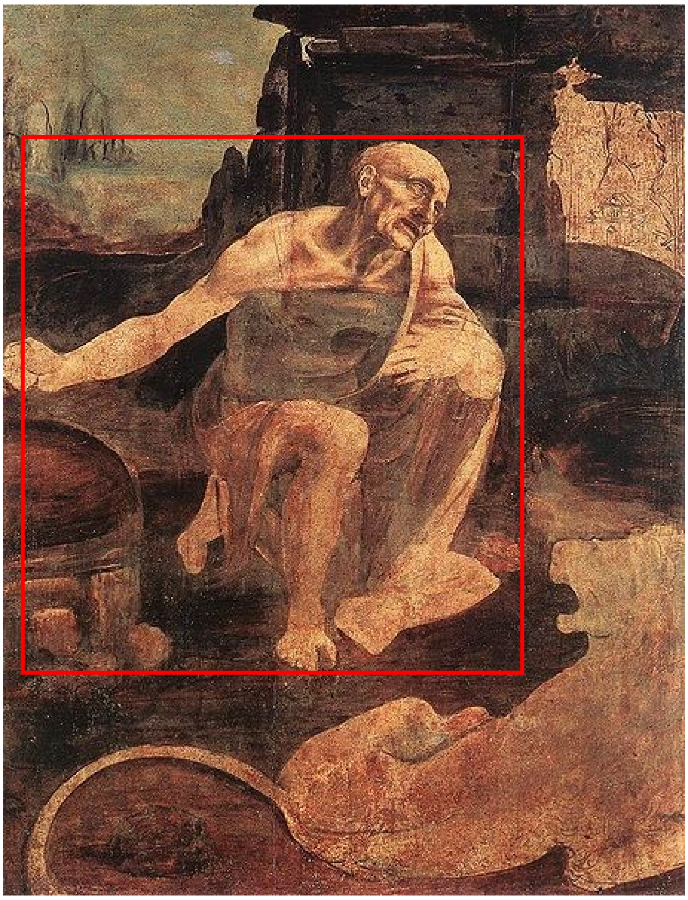


Fig.44: San Girolamo - Retângulo que não é Áureo

De fato, o retângulo englobando o braço teria a razão entre seus lados igual a 1,74242...diferente do retângulo áureo que como visto no capítulo 2.4 Retângulo tem razão entre seus lados igual a 1,618...

## 3.5. CARTÕES

Outro exemplo, onde muitos autores afirmam que podemos encontrar a razão áurea em nosso cotidiano é quando analisamos a razão entre as dimensões dos cartões que nós utilizamos diariamente. A grande maioria dos cartões de crédito, cartões de alimentação, de transporte público, entre outros, tem sua forma e tamanho padronizados, especificado pelo padrão ISO 7810.

O ISO 7810 específica na ID-1 o tamanho dos cartões como sendo um retângulo de 85,60 mm X 53,98 mm. Ao fazermos a razão entre seu comprimento e sua altura obtemos como resposta 1,615704039... Que é um valor muito próximo da razão áurea.

Estes autores afirmam que estas dimensões foram escolhidas para que o cartão se torna-se mais harmonioso.

Porém nem todos os autores concordam com esta afirmação e dizem que novamente não existe registro de que estas medidas foram escolhidas com esta intenção e que o que é encontrado é novamente uma aproximação do número áureo.


Fig.45: Cartão de banco


Fig.46: Ticket Restaurante


Fig.47: Bilhete Único

## 3.6. NÁUTILOS

Os Náutilos pertencem a mesma classe de moluscos marinhos que pertencem os polvos e as lulas. Os Naútilos possuem olhos bem desenvolvidos e uma concha formada por uma série de câmaras que se comunicam por orifícios. Eles vivem na última câmara enquanto as outras ficam cheias de gás para facilitar o processo de flutuação.

Fig.48: Náutilo

Muitos autores afirmam que os náutilos apresentam a razão áurea em seu corpo, pois dizem que a sua concha cresce de tal maneira a reproduzir uma espiral áurea.

Fig.49: Concha do Náutilo

Porém, com o uso do GeoGebra, podemos constatar que sobrepondo uma espiral áurea na concha do náutilo nós não teremos um encaixe perfeito, como podemos observar nos exemplos abaixo.

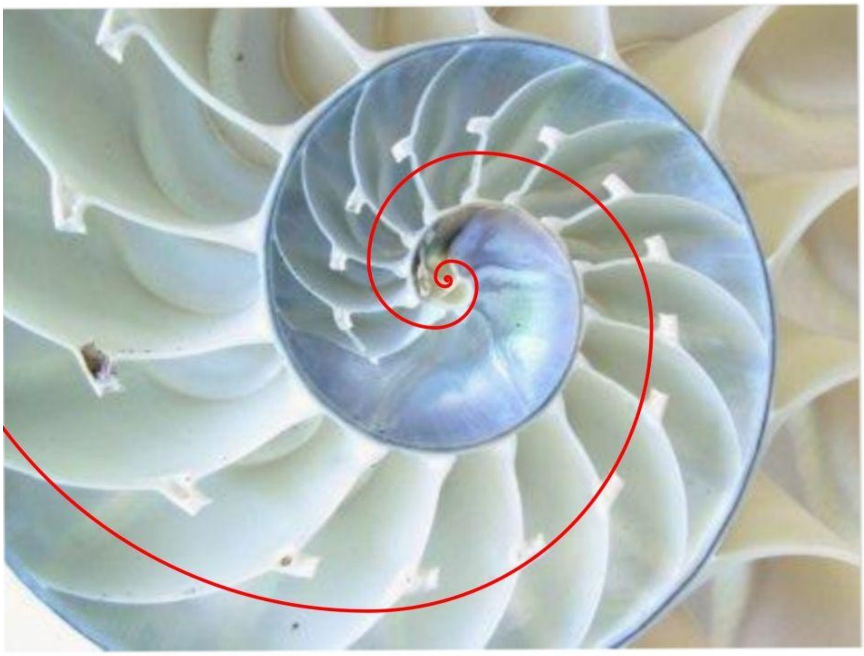


Fig.50: Análise da concha do Náutilo - 1

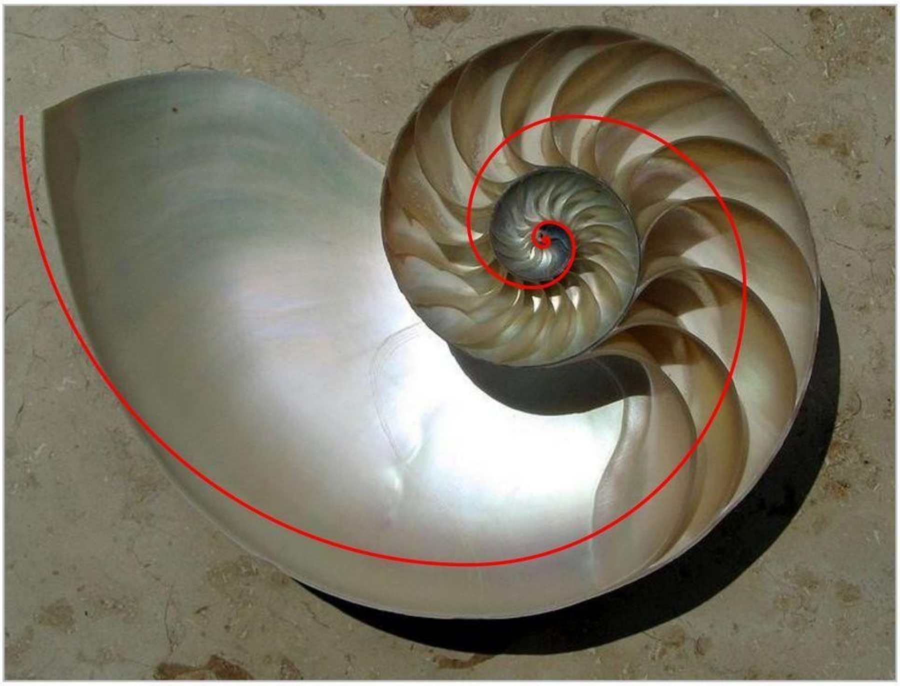


Fig.51: Análise da concha do Náutilo - 2

Pesquisamos em diversas imagens de náutilos utilizando a ferramenta de busca do Google e, em todas elas não conseguimos um encaixe perfeito, somente conchas que cresciam em um formato aproximado de uma espiral áurea.

E é justamente isso que alguns autores nos apresentam: não é possível encontrar uma concha de náutilo que cresceu reproduzindo fielmente uma espiral áurea.

# 4. COMO TRABALHAR O NÚMERO ÁUREO EM SALA DE AULA.

Irei apresentar neste trabalho de conclusão de curso duas sugestões de atividades que podem ser aplicadas em todos os três anos do ensino médio. Para poder descobrir algumas das dificuldades que poderão ser encontradas pelos professores que irão aplicar estas sugestões, eu apliquei estas atividades em dois colégios diferentes: o Colégio Bahiense, situado na barra da Tijuca, no município do Rio de Janeiro e no Colégio Santa Mônica, situado na Taquara, também no município do Rio de Janeiro. No colégio Bahiense eu apliquei as atividades em uma turma do 3º ano do ensino médio e no colégio Santa Mônica eu apliquei as atividades em duas turmas do 2º ano do ensino médio.

Em ambos os colégios eu iniciei a atividade fazendo um resumo da história do número áureo, explicando para os alunos que muitos autores acreditam que a pirâmide de Quéops, uma das três grandes pirâmides do Egito, seja uma pirâmide áurea. Neste momento foi apresentado a definição de quando que um triângulo pode ser classificado como sendo áureo. Foi então definido quando temos um triângulo acutângulo áureo, um triângulo obtusângulo áureo e um triângulo retângulo áureo. A seguir foi contada a história da construção do Parthenon idealizado pelo arquiteto Fídias e apresentado a definição do retângulo áureo.

Após esta introdução histórica foi entregue a primeira atividade envolvendo o número áureo para os alunos. Os principais assuntos do currículo abordados nesta atividade foram:

- Razão e proporção;
- Semelhança de triângulos;
- Fórmula de Bhaskara;

- Circunferência;
- Polígonos regulares.

A primeira atividade tinha como objetivo que o aluno fosse capaz de perceber que a razão entre o tamanho do raio do círculo que o decágono regular está inscrito e o lado deste mesmo decágono regular sempre se mantém constante e igual ao número áureo. A primeira atividade entregue nos dois colégios será reproduzida a seguir:

COLÉGIO BAHIENSE

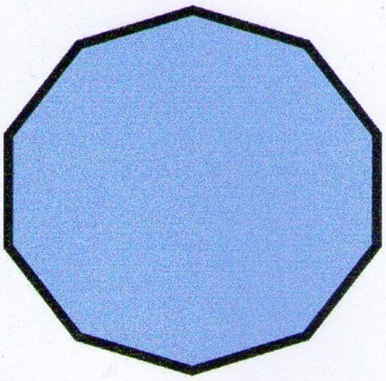
Aluno (a): ______________________________________________

Professor: Marcelo Pereira Turma: __________ Nº: ________

# Número Áureo 1 - Φ

## O que é o Número Áureo?

O Número Áureo é um número irracional misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão, sendo considerada por muitos como uma oferta de Deus ao mundo. Podemos encontrar aproximações do Número Áureo em diversas relações no corpo humano, artes, na natureza de um modo geral, na álgebra e na geometria.



**1)** Um decágono regular de lado 10 cm está inscrito em um círculo de raio R.

**a)** Você seria capaz de achar o valor de R?

**b)** Qual seria o valor da razão do raio do círculo e o lado do decágono?

**2)** Se o lado do decágono fosse 20 cm, qual seria o valor do raio do círculo? E a razão do raio e o lado do decágono?

**3)** Se os lados mudassem a razão mudaria?

**4)** Caso seja possível generalize essa razão? (sugestão: trabalhar com o lado igual a l e o raio igual a R)

**5)** Qual é a conclusão que você chegou?

Boa Atividade!

# Colégio Santa Mônica

Aluno (a): ________________________________________

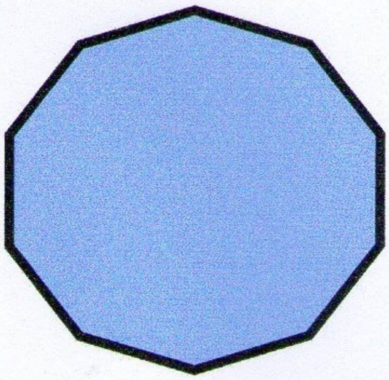
Professor: Marcelo Pereira   Turma: ________ Nº: _______

COLÉGIO SANTA MÔNICA

## Número Áureo 1 - Φ

### O que é o Número Áureo?

O Número Áureo é um número irracional misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão, sendo considerada por muitos como uma oferta de Deus ao mundo. Podemos encontrar aproximações do Número Áureo em diversas relações no corpo humano, artes, na natureza de um modo geral, na álgebra e na geometria.



**1)** Um decágono regular de lado 10 cm está inscrito em um círculo de raio R.

   **a)** Você seria capaz de achar o valor de R?

   **b)** Qual seria o valor da razão do raio do círculo e o lado do decágono?

**2)** Se o lado do decágono fosse 20 cm, qual seria o valor do raio do círculo? E a razão do raio e o lado do decágono?

**3)** Se os lados mudassem a razão mudaria?

**4)** Caso seja possível generalize essa razão? (sugestão: trabalhar com o lado igual a l e o raio igual a R)

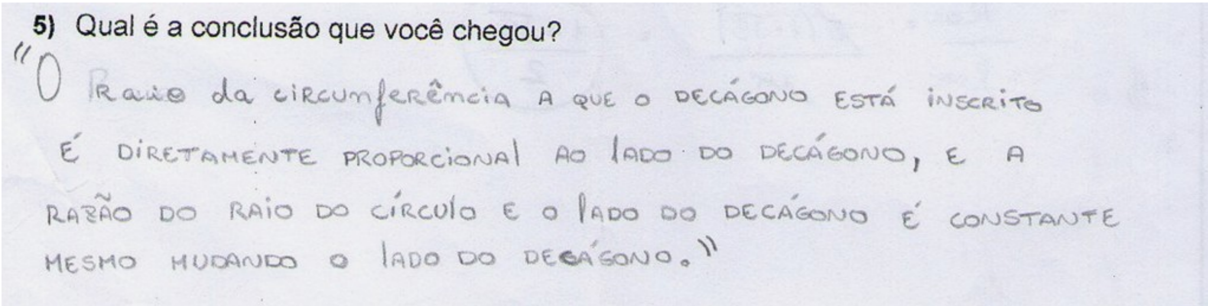
**5)** Qual é a conclusão que você chegou?

**Boa Atividade!**

Fig.53: Atividade 1 - Colégio Santa Mônica

Ao realizar a primeira atividade se mostrou necessário realizar uma revisão sobre polígonos regulares e semelhança de triângulos. Após esta revisão a grande maioria dos alunos conseguiu chegar aos resultados esperados, inclusive conseguindo responder de maneira satisfatória a questão número 5, concluindo que independente do tamanho do raio do círculo que o decágono regular está inscrito, a razão entre este raio e o lado do decágono regular sempre será igual a —— , ou seja, igual ao número áureo.

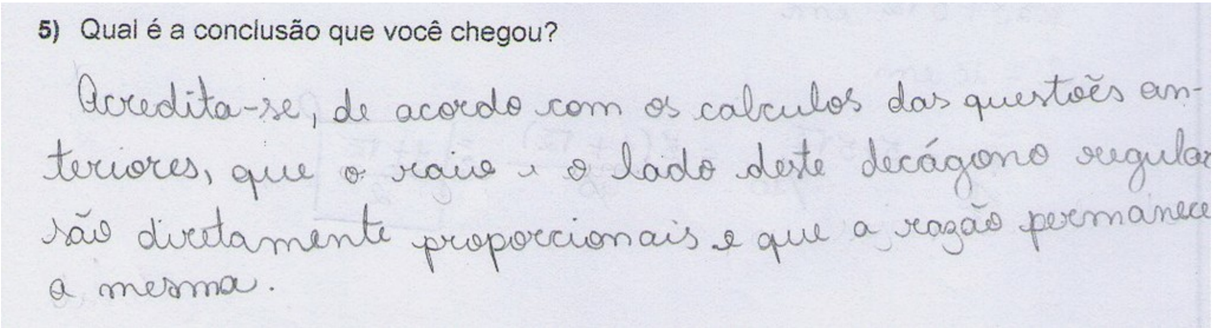
Para ilustrar como o objetivo da atividade foi alcançado reproduzirei a seguir duas respostas dadas pelos alunos.



5) Qual é a conclusão que você chegou?

"O Raio da circunferência a que o decágono está inscrito é diretamente proporcional ao lado do decágono, e a razão do raio do círculo e o lado do decágono é constante mesmo mudando o lado do decágono."

Fig.54: Resposta questão 5 - Aluno 1



5) Qual é a conclusão que você chegou?

Acredita-se, de acordo com os calculos das questões anteriores, que o raio e o lado deste decágono regular são diretamente proporcionais e que a razão permanece a mesma.

Fig.55: Resposta questão 5 - Aluno 2

Na segunda atividade entregue para os alunos, os assuntos do currículo abordados foram:

- Razões;
- Sequências;
- Progressões aritméticas
- Progressões geométricas;

A segunda atividade tinha como objetivo que o aluno fosse capaz de perceber que quanto maior o termo da sequência de Fibonacci, a razão entre este termo e o seu antecessor estará convergindo para o número áureo. Reproduzirei a seguir o modelo da atividade entregue nos dois colégios.

COLÉGIO BAHIENSE

Aluno (a): ______________________________

Professor: Marcelo Pereira Turma: __________ Nº: __________

# Número Áureo 2 - Φ

1) Escreva a sequencia $a_n = 2n + 1$.

2) Agora calcule as razoes abaixo:

a) $a_2/a_1 =$ b) $a_3/a_2 =$ c) $a_4/a_3 =$ d) $a_5/a_4 =$

3) Você percebe alguma convergência na razão desses números na medida em que os números vão aumentando?

4) Você conseguiria calcular $a_n/a_{n-1}$ ?

5) Escreva a sequencia $2^n + 1$.

6) Calcule as razões abaixo:

a) $a_2/a_1 =$ b) $a_3/a_2 =$ c) $a_4/a_3 =$ d) $a_5/a_4 =$

7) Você percebe alguma convergência na razão desses números na medida em que os números vão aumentando?

Um dos problemas que Fibonacci apresenta em seu livro é o problema dos pares de coelhos (paria coniculorum): Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano? Um homem tem um par de coelhos em um ambiente inteiramente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a produção de um par e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida.

Como um par adulto produz um par novo a cada 30 dias, no inicio do segundo mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par de adultos e outro de coelhos jovens, assim no inicio do mês um, existirão 2 pares: 1 par de adultos + 1 par de recém nascido.

No inicio do terceiro mês o par adulto produzira de novo mais um par enquanto que o par jovem terá completado 1 mês de vida e ainda não estará apto a produzir, assim no inicio do terceiro mês existirão três pares de coelhos, sendo: 1 par adulto + 1 par com 1 mês de idade + 1 par recém nascido.

No inicio do quarto mês, existirão dois pares adultos sendo que um já produziu um novo par e um par novo que completou 1 mês, logo teremos cinco pares: 2 pares adultos + 1 par com um mês + 2 pares recém nascidos.

No inicio do quinto mês, existirão 3 pares adultos sendo que cada u já produziu um novo par e dois pares novos que completaram 1 mês de vida, assim teremos 8 pares: 5 pares adultos + 3 pares com um mês + 5 pares recém nascidos.

O texto refere-se as questões 8, 9, 10 e 11

8) Você seria capaz de representar o número de pares de coelhos ao final de cada mês em forma de sequencia numérica ou de conjuntos?

9) Calcule as razoes abaixo:

a) $a_2/a_1 =$ b) $a_3/a_2 =$ c) $a_4/a_3 =$ d) $a_5/a_4 =$

e) $a_6/a_5 =$ f) $a_7/a_6 =$ g) $a_8/a_7 =$ h) $a_9/a_8 =$

10) Você percebe alguma convergência na razão desses números na medida em que os números vão aumentando?

11) O que você percebe em relação a razão encontrada na atividade 1?

Cálculos:

**Boa Atividade!**

Fig.56: Atividade 2 - Colégio Bahiense

Colégio Santa Mônica

Aluno (a): ________________________________________

Professor: Marcelo Pereira Turma: ________ Nº: _______

COLÉGIO SANTA MÔNICA

# Número Áureo 2 - Φ

1) Escreva a sequencia $a_n = 2n + 1$.

2) Agora calcule as razoes abaixo:

a) $a_2/a_1 =$ b) $a_3/a_2 =$ c) $a_4/a_3 =$ d) $a_5/a_4 =$

3) Você percebe alguma convergência na razão desses números na medida em que os números vão aumentando?

4) Você conseguiria calcular $a_n/a_{n-1}$ ?

5) Escreva a sequencia $2^n + 1$.

6) Calcule as razões abaixo:

a) $a_2/a_1 =$ b) $a_3/a_2 =$ c) $a_4/a_3 =$ d) $a_5/a_4 =$

7) Você percebe alguma convergência na razão desses números na medida que os números vão aumentando?

Um dos problemas que Fibonacci apresenta em seu livro é o problema dos pares de coelhos (paria coniculorum): Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano? Um homem tem um par de coelhos em um ambiente inteiramente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a produção de um par e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida.

Como um par adulto produz um par novo a cada 30 dias, no inicio do segundo mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par de adultos e outro de coelhos jovens, assim no inicio do mês um, existirão 2 pares: 1 par de adultos + 1 par de recém nascido.

No inicio do terceiro mês o par adulto produzira de novo mais um par enquanto que o par jovem terá completado 1 mês de vida e ainda não estará apto a produzir, assim no inicio do terceiro mês existirão três pares de coelhos, sendo: 1 par adulto + 1 par com 1 mês de idade + 1 par recém nascido.

No inicio do quarto mês, existirão dois pares adultos sendo que um já produziu um novo par e um par novo que completou 1 mês, logo teremos cinco pares: 2 pares adultos + 1 par com um mês + 2 pares recém nascidos.

No inicio do quinto mês, existirão 3 pares adultos sendo que cada u já produziu um novo par e dois pares novos que completaram 1 mês de vida, assim teremos 8 pares: 5 pares adultos + 3 pares com um mês + 5 pares recém nascidos.

O texto refere-se as questões 8, 9, 10 e 11

8) Você seria capaz de representar o número de pares de coelhos ao final de cada mês em forma de sequencia numérica ou de conjuntos?

9) Calcule as razoes abaixo:

a) $a_2/a_1 =$ b) $a_3/a_2 =$ c) $a_4/a_3 =$ d) $a_5/a_4 =$

e) $a_6/a_5 =$ f) $a_7/a_6 =$ g) $a_8/a_7 =$ h) $a_9/a_8 =$

10) Você percebe alguma convergência na razão desses números na medida em que os números vão aumentando?

11) O que você percebe em relação a razão encontrada na atividade 1?

Cálculos:

**Boa Atividade!**

Fig.57: Atividade 2 - Colégio Santa Mônica

Já na segunda atividade não foi necessário realizar nenhum tipo de revisão e mais de 80% dos alunos conseguiram perceber que, quanto maior o termo da sequência de Fibonacci, a razão entre este termo e o seu antecessor está mais próximo do número áureo, ou seja, quanto maior o número da sequência a razão entre este termo e o seu antecessor está convergindo para o número áureo.

Posso concluir que ambas as atividades puderam alcançar os seus objetivos esperados e, dessa maneira, foi possível levar para a sala de aula o conceito de número áureo.

## 5. CONCLUSÃO

Foram reunidos neste trabalho de conclusão de curso, os principais conhecimentos que um professor deve possuir para poder apresentar para o seu aluno o número áureo.

Acredito que foi alcançado o objetivo de reunir no capítulo 2 as principais definições teóricas sobre o que é o número áureo e onde ele é encontrado em figuras geométricas, polígonos, sólidos geométricos e sequências. Neste capítulo o leitor foi apresentado, ou pode aprimorar os seus conhecimentos sobre o número áureo e, assim torna-se possível, ou através de aulas expositivas, ou através da criação de exercícios abrangendo este tema, trazer o número áureo para dentro da sala de aula.

No capítulo 3 o objetivo foi apresentar onde seria possível encontrar o número áureo em nosso cotidiano. Percebi que, diferente do que imaginei inicialmente, nem todas as informações encontradas na internet e em livros são verdadeiras. Constatei, por exemplo, o caso dos Naútilos. Diversos sites e livros dizem que todos estes moluscos crescem no mesmo padrão, formando uma espiral áurea e, descobri após analises feitas sobre fotos destes moluscos, utilizando o GeoGebra, que isso não acontece em todos os casos, já que em todas as fotos analisadas por mim, não consegui encontrar nenhuma que obedecesse este padrão de crescimento. O caso do crescimento dos Naútilos foi um bom exemplo de fato que destaca a importância de se ter uma visão crítica ao pesquisarmos sobre qualquer assunto em diferentes meios de informação.

Para concluir o objetivo de reunir o conhecimento que o professor deve possuir para poder apresentar para o seu aluno o número áureo, foi escrito um capítulo expondo duas sugestões de como trabalhar este conteúdo em sala de aula. Consegui observar que ao realizar uma introdução histórica sobre o número áureo os alunos demonstraram maior interesse em participar da atividade proposta, interagindo mais do que o comum, e com um nível de assimilação maior do que o habitual. Trabalhar com atividades deste tipo é importante, pois cria uma motivação maior para os alunos, que deveria ser o objetivo de todos os professores para tornar a sua aula mais dinâmica e agradável.

Finalizo este trabalho de conclusão de curso apresentando duas ideias de pesquisas que podem ser feitas para se aprofundar no assunto proposto neste trabalho:

- Como trabalhar o número áureo de maneira interdisciplinar e,
- Verificar, experimentalmente, quais informações sobre o número áureo, encontradas na internet, são realmente verdadeiras.

## 6. BIBLIOGRAFIA

ARTE E MATEMÁTICA: NÚMERO DE OURO. Disponível em <http://www2.tvcultura.com.br/artematematica/home.html> . Acesso em 15 de setembro de 2012.

ÁVILA, G. Retângulo áureo, divisão áurea e a seqüência de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, número 6, 1992

BOYER, C. B. História da Matemática , Editora: Edgard Blücher, 1996.

BROWN, D. O Código Da Vinci. Rio de Janeiro, Editora Sextante, 2004.

CASPAR, M. Kepler, Editora Dover, 1993.

ENCICLOPÉDIA DE PINTORES DA HISTÓRIA. Disponível em <http://pt.wikipedia. org/wiki> . Acessado em 25 de outubro de 2012.

FERREIRA, A. B. H. Minidicionário da Língua Portuguesa. Rio de Janeiro, Editora Nova Fronteira, 1993.

GARBI, G. O Romance das Equações Algébricas, São Paulo , Editora Makron Books, 1998.

GARDNER, M. Notes on a Fringe-Watcher: The Cult of the Golden Ratio. Skeptical Inquirer, n.18, pp. 243-247, 1994.

HISTÓRIA . Disponível em <www.historianet.com.br>. Acessado em 19 de outubro de 2012.

HUNTLEY, H. E. A divina proporção- um ensaio sobre a beleza da matemática Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1985.

LIVIO, M. Razão Áurea, Editora Record, 2010.

MARKOWSKY, G. Misconcertions About the Golden Ratio. College Mathematics Journal, vol.23, n. 1, pp. 2-19, 1992.

MATHEMATIKOS. Disponível em <http://www.lec.ufrgs.br/index.php/ Mathematikos>. Acessado em 15 de setembro de 2012.

O número de ouro. Disponível em < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html> . Acessado em 02 de dezembro de 2012.

OLARIU, A. Golden Section and The art of Paiting. Cornell University Library, arXiv.org e-Print archive, arXiv:physics/9908036v1 [physics.soc-ph], 1999.

Olimpíadas Brasileira de Matemática. Disponível em <http://www.obm.org.br>. Acessado em 15 de setembro de 2012.

PARÂMETROS Curriculares Nacionais. Disponível em < http://portal.mec.gov.br >. Acesso em 23 de setembro de 2012.

Portal do Professor - Número PHI. Disponível em < http://portal doprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1115>. Acesso em 05 de dezembro de 2012.

Portal do Professor - O número de ouro. Disponível em <http://portaldoprofessor. mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=31724>. Acesso em 05 de dezembro de 2012.

SARAIVA, J. C. V. As pirâmides do Egito e a razão áurea. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, número 48, 2003.

SBMAC - Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional. Disponível em <www.sbmac.org.br>. Acessado em 20 de outubro de 2012.

SIQUEIRA, A. S. Roteiro para elaboração de trabalhos acadêmicos. Duque de Caxias, 2004.

SÓ MATEMÁTICA - PORTAL MATEMÁTICO. Disponível em <www.somatematica. com.br>. Acessado em 02 de dezembro de 2012.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Disponível em <http://www.sbem.com.br>. Acessado em 20 de outubro de 2012.

WWW.MATEMATICA.COM.BR. Disponível em <www.matematica.com.br>. Acessado em 02 de dezembro de 2012.