UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Rafael Gomes de Oliveira

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO: DO CONCRETO AO RACIOCÍNIO DEDUTIVO COM UMA PASSAGEM PELA TECNOLOGIA

Santa Maria, RS
2016

Rafael Gomes de Oliveira

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO: DO CONCRETO AO RACIOCÍNIO DEDUTIVO COM UMA PASSAGEM PELA TECNOLOGIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Edson Sidney Figueiredo

Santa Maria, RS
2016

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Gomes de Oliveira, Rafael
GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO: DO CONCRETO AO RACIOCÍNIO DEDUTIVO COM UMA PASSAGEM PELA TECNOLOGIA / Rafael Gomes de Oliveira.- 2016.
143 p.; 30 cm

Orientador: Edson Sidney Figueiredo
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, RS, 2016

1. Geometria Espacial de Posição 2. Raciocínio dedutivo 3. Construções tridimensionais 4. Linguagem da Teoria dos Conjuntos I. Sidney Figueiredo, Edson II. Título.

Rafael Gomes de Oliveira

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO: DO CONCRETO AO RACIOCÍNIO DEDUTIVO COM UMA PASSAGEM PELA TECNOLOGIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 1º de setembro de 2016:

Edson Sidney Figueiredo, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

José Carlos Leivas, Dr. (Unifra)

Santa Maria, RS
2016

DEDICATÓRIA

À minha esposa e filho queridos que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter me dado a força necessária para nos momentos difíceis desta caminhada erguer a cabeça e continuar lutando em prol deste grande objetivo.

Aos colegas Villa Nova e Edgard José, do Colégio Militar de Campo Grande, que me incentivaram a concorrer ao processo seletivo do mestrado.

Aos professores da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul e Universidade Federal de Santa Maria por todos os ensinamentos repassados nestes dois anos de caminhada.

Aos colegas de curso, que compartilharam muitas horas de estudo.

Às diretorias do Colégio Militar de Campo Grande e Colégio Militar de Santa Maria, pelo incentivo à participação no mestrado.

Ao Professor Doutor Edson Figueiredo, pela orientação dada, que muito contribuiu para a conclusão deste trabalho.

Aos queridos alunos do segundo ano do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria, que participaram efetivamente desta pesquisa.

À minha família, pela paciência e amor dedicados em todas as horas necessárias.

O sofrimento é passageiro, desistir é para sempre.

Lance Armstrong

RESUMO

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO: DO CONCRETO AO RACIOCÍNIO DEDUTIVO COM UMA PASSAGEM PELA TECNOLOGIA

AUTOR: Rafael Gomes de Oliveira
ORIENTADOR: Edson Sidney Figueiredo

O presente trabalho tem por finalidade apresentar o desenvolvimento e a aplicação de uma proposta didática sobre geometria espacial de posição que visou contribuir com o aprendizado dos alunos do segundo ano do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria, por meio de um estudo mais voltado para os aspectos teóricos da geometria euclidiana espacial. Antes de desenvolver a proposta, realizou-se uma pesquisa junto a sete colégios integrantes do Sistema Colégio Militar do Brasil, de modo a verificar como os mesmos estão trabalhando a parte introdutória de geometria espacial e quais livros didáticos estão sendo utilizados para esta finalidade. De posse destes livros, fez-se um levantamento da forma como cada autor vem tratando desse tema e procurou-se confrontar as ideias apresentadas com os objetivos da proposta. Desenvolvida a proposta didática, a mesma foi aplicada em todo o grupo de alunos do segundo ano do colégio supracitado, durante o período normal de aulas, destacando-se a apresentação de um grupo de axiomas e a demonstração de propriedades decorrentes dos mesmos, a construção geométrica tridimensional e a utilização da linguagem da teoria dos conjuntos como forma de representação. Algumas atividades de construções tridimensionais foram realizadas no laboratório de informática utilizando-se o *software Geogebra* 5.0 3D. Não obstante, buscou-se em cada etapa da proposta explorar a visualização e a percepção dos alunos, utilizando-se para isso materiais concretos que simbolizassem os entes geométricos primitivos, suas relações e propriedades. Os dados obtidos na aplicação foram tabulados e analisados sob a forma predominantemente qualitativa, entretanto, também foram analisados os índices alcançados pelos alunos nas avaliações pertinentes aos objetivos pretendidos. Da análise feita junto aos colégios e livros didáticos, concluiu-se que a ênfase em geometria espacial não é a posicional e axiomática, no entanto, após três semanas de trabalho com os alunos e analisando-se os resultados obtidos, percebe-se que é possível se trabalhar os aspectos mais formais e abstratos da geometria espacial, que envolvem dedução, construção e representação.

Palavras-chave: Geometria Espacial de Posição. Dedução. Construção. Representação.

ABSTRACT

SPATIAL GEOMETRY OF POSITION: FROM CONCRETE TO DEDUCTIVE REASONING BASED ON TECHNOLOGY

AUTHOR: Rafael Gomes de Oliveira
ADVISOR: Edson Sidney Figueiredo

This study aims to present the development and the usage of a didactic proposal about spatial geometry of position in order to contribute to the learning of second year of high school students of the Military School of Santa Maria, through a a study focused on the theoretical aspects of spatial euclidian geometry. Before carrying out the study, it was done a research in seven schools which are part of the Military School System of Brazil, in order to verify how they are teaching the introductory part of Spatial Geometry and which didactic books are being used for this purpose. With these textbooks in hand, an analysis was made to verify the way each author has approached this topic and also to confront the ideas presented with the aims of the proposal. Once the didactic proposal was made, it was applied to the group of students aforementioned, during regular classes. It is important to highlight the presentation of a group of axioms as well as of the properties that derive from them, the tridimensional geometric construction and the use of group theory language as a way of representation. Some tridimensional building activities were carried out in the computer laboratory using the *Geogebra 5.0 3D* software. In addition, it was attempted to explore students' visualization and perception in every step of the process, using concrete materials which represented the primitive geometric entities, their relations and properties. The data from this application were then put in a table and analyzed predominantly qualitatively, as well as the indices reached by the students in the evaluations concerning the objectives proposed. From the analysis made in the schools and didactic books, it was concluded that the emphasis in spatial geometry is not the positional and axiomatic one. However, after three weeks' work with students and the analysis of the results, it was realized that it is possible to work the more formal and abstract aspects of spatial geometry, ones involving intuition, construction, deduction and representation.

Key words: Spatial Geometry of Position. Deduction. Construction. Representation.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Índice de Acertos: questão 1 109
Gráfico 2 – Índice de Acertos: questão 2 110
Gráfico 3 – Índice de Acertos: questão 3 111
Gráfico 4 – Índice de Acertos: questão 1 112
Gráfico 5 – Índice de Acertos: questão 2 113
Gráfico 6 – Índice de Acertos: questão 3, letra a.......... 114
Gráfico 7 – Índice de Acertos: questão 3, letra b.......... 115
Gráfico 8 – Índice de Acertos: questão 3, letra c.......... 116

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Proposição consequente de axioma 20
Figura 2 – Utilização da linguagem dos conjuntos 22
Figura 3 – Demonstração/Construção Geométrica 26
Figura 4 – Entes primitivos 51
Figura 5 – Reta determinada por dois pontos distintos 52
Figura 6 – Plano determinado por três pontos não colineares 52
Figura 7 – Inclusão da reta no plano 52
Figura 8 – Demonstração: primeira construção 53
Figura 9 – Demonstração: segunda construção 53
Figura 10 – Demonstração: construção final 54
Figura 11 – Retas concorrentes 55
Figura 12 – Retas paralelas 55
Figura 13 – Retas reversas 56
Figura 14 – Representação das retas reversas: material concreto 56
Figura 15 – Reta contida no plano 57
Figura 16 – Reta secante ao plano 58
Figura 17 – Reta paralela ao plano 59
Figura 18 – Representação da reta paralela ao plano: material concreto 59
Figura 19 – Planos secantes 60
Figura 20 – Planos paralelos 61
Figura 21 – Paralelepípedo ABCDEFGH 62
Figura 22 – Desabilitação de eixos 63
Figura 23 – Desabilitação do *clipping* 64
Figura 24 – Plano base 64
Figura 25 – Construção de uma reta sobre o plano 65
Figura 26 – Construção de um ponto fora da reta 65
Figura 27 – Construção de um ponto fora do plano 66
Figura 28 – Construção da reta reversa à primeira 66
Figura 29 – Projeção de um ponto sobre um plano 67
Figura 30 – Projeção de uma figura sobre um plano 68
Figura 31 – Projeção de uma reta perpendicular a um plano 68
Figura 32 – Projeção de uma reta oblíqua a um plano 69
Figura 33 – Representação da projeção ortogonal de uma reta sobre um plano: material concreto 69
Figura 34 – Ângulo entre duas retas paralelas 70
Figura 35 – Ângulo entre duas retas concorrentes 70
Figura 36 – Ângulo entre duas retas reversas 71
Figura 37 – Retas ortogonais 71
Figura 38 – Retas perpendiculares 72
Figura 39 – Ângulo entre reta e plano 72
Figura 40 – Reta perpendicular a um plano 72
Figura 41 – Lema: primeira parte 74
Figura 42 – Lema: segunda parte 74
Figura 43 – Demonstração: construção inicial 75
Figura 44 – Demonstração: construção final 76
Figura 45 – Representação do Teorema do Pé-de-Galinha: material concreto 76
Figura 46 – Ângulo entre dois semiplanos 77

Figura 47 – Representação do ângulo entre dois semiplanos: material concreto 77
Figura 48 – Paralelepípedo ABCDEFGH 78
Figura 49 – Prisma ABCDEFGHIJKL 78
Figura 50 – Distância entre dois pontos 79
Figura 51 – Distância de ponto à reta. 79
Figura 52 – Distância de ponto a plano 80
Figura 53 – Distância entre retas paralelas 80
Figura 54 – Distância entre reta e plano paralelos 81
Figura 55 – Distância entre planos paralelos 81
Figura 56 – Segmento perpendicular comum: procedimento 1 82
Figura 57 – Segmento perpendicular comum: procedimento 2 82
Figura 58 – Segmento perpendicular comum: procedimento 3 83
Figura 59 – Segmento perpendicular comum: procedimento 4 83
Figura 60 – Segmento perpendicular comum: procedimento 5 84
Figura 61 – Segmento perpendicular comum: procedimento 6 84
Figura 62 – Representação do segmento perpendicular comum a duas retas reversas: material concreto 85
Figura 63 – Resolução do exercício 1 93
Figura 64 – Resolução do exercício 2 94
Figura 65 – Resolução do exercício 3 95
Figura 66 – Resolução do exercício 4 95
Figura 67 – Resolução do exercício 5 96
Figura 68 – Resolução do exercício 6 97
Figura 69 – Resolução do exercício 7 98
Figura 70 – Resolução da questão 1: linguagem dos conjuntos 99
Figura 71 – Resolução da questão 1: linguagem natural 99
Figura 72 – Resolução da questão 2: linguagem dos conjuntos 100
Figura 73 – Resolução da questão 2: linguagem natural 101
Figura 74 – Resolução da questão 3: linguagem dos conjuntos 102
Figura 75 – Resolução da questão 3: linguagem dos natural 102
Figura 76 – Resolução do exercício 1: ângulos 103
Figura 77 – Resolução do exercício 3: distâncias 104
Figura 78 – Resolução da questão 1 105
Figura 79 – Resolução da questão 2 106
Figura 80 – Resolução da questão 3: letra a 107
Figura 81 – Resolução da questão 3: letra b 107
Figura 82 – Resolução da questão 3: letra c 108

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Tempo de aula e matriz de descritores 41
Quadro 2 – Extrato do PED – CMBH 42
Quadro 3 – Extrato do PED – CMB..43
Quadro 4 – Extrato do PED – CMCG..44
Quadro 5 – Distribuição dos livros de matemática 45
Quadro 6 – Descrição das obras segundo aos objetivos da proposta didática 46

LISTA DE ABREVIATURA E SIGLAS

CM	Colégio Militar
CMB	Colégio Militar de Brasília
CMBH	Colégio Militar de Belo Horizonte
CMC	Colégio Militar de Curitiba
CMCG	Colégio Militar de Campo Grande
CMF	Colégio Militar de Fortaleza
CMJF	Colégio Militar de Juiz de Fora
CMM	Colégio Militar de Manaus
CMPA	Colégio Militar de Porto Alegre
CMR	Colégio Militar de Recife
CMRJ	Colégio Militar do Rio de Janeiro
CMS	Colégio Militar de Salvador
CMSM	Colégio Militar de Santa Maria
DEPA	Diretoria de Educação Preparatória e Assistencial
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PED	Plano de Execução Didática
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PSD	Plano de Sequências Didáticas
SCMB	Sistema Colégio Militar do Brasil

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15
2 REVISÃO DE LITERATURA 18
2.1 DO INTUITIVO ÀS PRIMEIRAS DEDUÇÕES 18
2.2 A EXPLORAÇÃO DA LINGUAGEM DA TEORIA DOS CONJUNTOS 21
2.3 DO CONCRETO ÀS CONSTRUÇÕES TRIDIMENSIONAIS 23
2.4 OS RECURSOS COMPUTACIONAIS E SUAS POSSIBILIDADES 27
2.5 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO 29
2.5.1 Dos entes primitivos aos grupos de axiomas 29
2.5.1.1 Axiomas de Incidência ou Conexão 31
2.5.1.2 Axioma das Paralelas (Axioma de Euclides) 32
2.5.2 Paralelismo 33
2.5.2.1 Paralelismo entre reta e plano 34
2.5.2.2 Paralelismo entre planos 34
2.5.3 Ortogonalidade ou Perpendicularidade 35
2.5.3.1 Perpendicularidade entre reta e plano 35
2.5.3.2 Perpendicularidade entre planos 37
3 ANÁLISE DE DOCUMENTOS E LIVROS DIDÁTICOS 39
3.1 O PLANO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA 39
3.2 OS PLANOS DE EXECUÇÃO DIDÁTICA DOS COLÉGIOS MILITARES 40
3.3 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS 45
4 A PROPOSTA DIDÁTICA 48
4.1 PLANEJAMENTO 48
4.2 NOTAS DE AULA 51
4.2.1 Geometria Espacial de Posição – Conceitos Iniciais 51
4.2.1.1 Introdução 51
4.2.1.2 Primeiros Axiomas 51
4.2.1.3 Outras formas de determinação de um plano 53
4.2.1.4 Posições relativas entre duas retas distintas no espaço 54
4.2.1.5 Posições relativas entre uma reta e um plano no espaço 57
4.2.1.6 Posições relativas entre dois planos distintos 60
4.2.1.7 Exercícios 62
4.2.2 Geometria Espacial de Posição – Construções tridimensionais: laboratório de informática 63
4.2.2.1 Exemplo resolvido 63
4.2.2.2 Atividades propostas 67
4.2.3 Geometria Espacial de Posição – Ângulos e Distâncias 67
4.2.3.1 Projeções Ortogonais 67
4.2.3.2 Ângulo entre duas retas no espaço 70
4.2.3.3 Ângulo entre uma reta e um plano 72

4.2.3.4 Perpendicularismo entre reta e plano...73
4.2.3.5 Teorema do Pé-de-Galinha (T5)...73
4.2.3.6 Demonstração do Teorema do Pé-de-Galinha...75
4.2.3.7 Ângulo entre dois semiplanos...77
4.2.3.8 Exercícios...78
4.2.3.9 Distância entre dois pontos...79
4.2.3.10 Distância de um ponto a uma reta...79
4.2.3.11 Distância de um ponto a um plano...80
4.2.3.12 Distância entre retas paralelas...80
4.2.3.13 Distância entre reta e plano paralelos...81
4.2.3.14 Distância entre planos paralelos...81
4.2.3.15 Distância entre duas retas reversas...82
4.2.3.16 Exercício...85
4.2.4 Avaliações Somativas...86
4.2.4.1 Avaliação no laboratório de informática...86
4.2.4.1 Avaliação individual final...87
5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS...90
5.1 INTRODUÇÃO...90
5.2 CARACTERIZAÇÃO DAS TURMAS E ETAPAS DA PROPOSTA...90
5.3 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES...91
5.4 LEVANTAMENTO DE DADOS E SELEÇÃO DA AMOSTRA...92
6 ANÁLISE DESCRITIVA DAS ATIVIDADES...93
6.1 DOS CONCEITOS INICIAIS ÀS PRIMEIRAS ATIVIDADES...93
6.2 DAS ATIVIDADES NO LABORATÓRIO À PRIMEIRA AVALIAÇÃO...98
6.3 DA SEGUNDA PARTE DA TEORIA AOS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS...103
6.4 A AVALIAÇÃO FINAL...105
7 RESULTADOS OBTIDOS NAS AVALIAÇÕES...109
7.1 AVALIAÇÃO SOBRE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS...109
7.2 AVALIAÇÃO FINAL...112
8 CONCLUSÃO...117
REFERÊNCIAS...119
APÊNDICE A – SOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS: CONCEITOS INICIAIS...121
APÊNDICE B – SOLUÇÃO DE ATIVIDADES: CONSTRUÇÕES TRIDIMENSIONAIS...123
APÊNDICE C – SOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS: ÂNGULOS E DISTÂNCIAS...134
APÊNDICE D – SOLUÇÕES DA AVALIAÇÃO NO LABORATÓRIO...139
APÊNDICE E – SOLUÇÕES DA AVALIAÇÃO FINAL...141

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, acredita-se que o ensino de geometria espacial seja baseado na realização de problemas envolvendo o cálculo de áreas e volumes, onde, em muitos casos, a exigência é muito mais algébrica do que geométrica. Cada vez mais ignora-se o que se denomina geometria espacial de posição, ou seja, a construção de uma base sólida que encaminhe a construção geométrica tridimensional. Essa construção não deve ser tarefa fácil, pois, desde os primeiros anos da educação básica, pela primeira vez, os alunos terão que descrever sistematicamente e de forma organizada representações tridimensionais e isso terá que ser feito em um plano, incitando a imaginação e a criatividade, devido à perda de exatidão e distorções compatíveis com essa situação.

Outra razão pela qual é possível ter-se deixado de lado essa parte da matemática, é que a mesma exige um raciocínio lógico dedutivo, o que não é atraente para os alunos e difícil de ser trabalhado pelos professores, pois os primeiros têm uma preferência por receitas prontas, que permitam resolver diretamente os problemas a eles apresentados e acabam por não se interessar por algo que possa ser mais rigoroso matematicamente. Cabe ressaltar que, nesta modalidade de raciocínio, dada uma generalização, infere-se particularidades a respeito de determinado conhecimento, organizando e especificando aquilo que se tem como premissa. Desta forma, tem-se na geometria espacial de posição, a oportunidade de ajudar a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo dos alunos, não desenvolvendo apenas o aspecto instrumental da matemática e, sim, podendo contribuir para a organização do pensamento, propiciando hábitos investigativos e uma visão mais abrangente da disciplina.

Nesse contexto, a questão que surge é a seguinte: é possível trabalhar os conceitos mais abstratos da geometria espacial no âmbito do Ensino Médio? Buscando responder esse questionamento, o objetivo principal deste trabalho é apresentar e avaliar a aplicação de uma proposta didática para o ensino de geometria espacial de posição do 2º Ano do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria (CMSM), colégio que integra o Sistema Colégio Militar do Brasil (SCMB). Esse sistema é composto atualmente por treze colégios, distribuídos pelas cinco regiões do Brasil, onde apenas um não trabalha com o Ensino Médio. Como objetivos específicos, a proposta didática visou desenvolver três competências: a exploração de um sistema básico de axiomas e o desenvolvimento de propriedades consequentes (raciocínio dedutivo); a representação geométrica tridimensional (construção) e a utilização da linguagem da Teoria dos Conjuntos (representação).

Antes de concretizar a proposta, alguns procedimentos foram realizados. Primeiramente, fez-se uma revisão de literatura capaz de fundamentar e dar embasamento teórico ao tema da pesquisa, sendo esta etapa descrita no capítulo 2, relacionando-se ao sistema dedutivo, às construções tridimensionais, à utilização da linguagem da teoria dos conjuntos, às tecnologias no ensino de matemática e aos aspectos conceituais relativos à geometria de posição.

O capítulo 3 destina-se a descrever a análise de alguns documentos que regem o funcionamento das disciplinas dos Colégios Militares (CM) do SCMB. Entre esses, está o Plano de Sequência Didática (PSD), documento elaborado pela Diretoria de Educação Preparatória e Assistencial (DEPA), órgão central que regula e controla as atividades do SCMB. O PSD visa nortear o processo de construção das sequências didáticas, encontrando-se nele uma lista de competências e habilidades relacionadas com os objetos do conhecimento a serem trabalhados em cada disciplina dos colégios. A análise do PSD visou justificar a apresentação da proposta didática. Outro documento importante é o Plano de Execução Didática (PED). O PED apresenta as sequências didáticas elaboradas pelo grupo de docentes de cada CM, que lecionam determinada disciplina, num determinado ano escolar. Foram analisados os PED de matemática de sete CM, utilizados durante o ano de 2015, buscando-se verificar como os professores estão trabalhando o conteúdo de geometria espacial em sua fase introdutória. Na sequência, levantou-se junto aos CM, quais livros didáticos de matemática estão sendo utilizados no 2º Ano do Ensino Médio. Verificou-se que o trabalho pedagógico dos professores do SCMB é subsidiado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), onde todos os colégios utilizam livros desse programa. De posse dos livros de matemática utilizados pelos doze colégios do sistema, procurou-se verificar como os autores vêm tratando do tema em questão, confrontando as ideias apresentadas com os objetivos descritos na proposta didática.

Após análise documental e de livros didáticos, foi elaborada a proposta didática sobre geometria espacial de posição, que se encontra descrita no capítulo 4, destacando-se o seu planejamento (matriz de descritores e PED); as notas de aula utilizadas (teoria, atividades e exercícios); e as avaliações somativas aplicadas.

O capítulo 5 apresenta os procedimentos metodológicos utilizados na aplicação da proposta didática, tais como a caracterização das turmas, a metodologia de ensino utilizada durante a aplicação, os instrumentos de coleta de dados utilizados, a seleção da amostra e o processo de análise dos resultados.

A proposta didática foi desenvolvida com todo grupo de alunos do segundo ano do Ensino Médio do CMSM durante o período normal de aulas, por três semanas. Duas avaliações somativas foram aplicadas, uma no laboratório de informática e em duplas, e outra individual, no final do desenvolvimento da proposta. As atividades realizadas pelos alunos, tais como exercícios e avaliações, foram analisadas através da observação e descrição das resoluções, conforme o capítulo 6. Os dados referentes ao índice de acertos nas avaliações somativas foram compilados e analisados no capítulo 7.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 DO INTUITIVO ÀS PRIMEIRAS DEDUÇÕES

Segundo Lima (2010), a ideia central da geometria espacial é realizar uma descrição sistemática e organizada das figuras tridimensionais e as propriedades que as caracterizam, tendo-se basicamente duas formas de apresentar para os alunos esse conteúdo: pelo método intuitivo, baseando-se na visualização ou percepção das coisas e/ou pelo método dedutivo, onde se admite um certo número de propriedades, considerando-as verdadeiras e, a partir daí, desenvolve-se as propriedades consequentes, através do raciocínio lógico. O mesmo autor indica que o ideal para o Ensino Médio é fazer uma mescla destes métodos, iniciando-se pela parte intuitiva da geometria e tornando-a paulatinamente dedutiva, dando condições aos alunos de explorar as estruturas espaciais e criar argumentos.

De acordo com Morgado, Wagner e Jorge (1990, p. 3), Euclides, em “Os Elementos”, introduziu o método axiomático.

> O grande passo dado por Euclides consistiu na introdução do método axiomático que consiste em estabelecer um conjunto de proposições que admitimos serem verdadeiras. Os axiomas, são, pois, relações entre os conceitos primitivos admitidos como verdadeiros e não concluídos, mediante encadeamento lógico de conceitos anteriores.

A escolha do sistema de axiomas, ou seja, o número de propriedades iniciais a serem trabalhadas, é do professor, tendo este uma certa liberdade de ação. O importante é mostrar aquilo que é essencial para um determinado ponto de partida, sem, é claro, perder em generalidade. Morgado, Wagner e Jorge (1990, p. 5) ressaltam que “o conjunto de proposições que servem de fundamento a uma ciência é seu SISTEMA DE AXIOMAS. Como ele é arbitrário, respeitando certas normas, podemos inventar geometrias tão esquisitas, mas tão lógicas, quanto quisermos. ”

Embora sejam elementos que surjam com a geometria euclidiana plana, vista pelos alunos durante o Ensino Fundamental, a geometria espacial normalmente é introduzida pelos entes primitivos *ponto*, *reta* e *plano*. Sendo assim, os alunos estão familiarizados aos mesmos, que não têm uma definição formal.

Segundo Manfio (2013, p. 108):

> a fundamentação da geometria espacial parte de três termos primitivos que são as noções de ponto, reta e plano; o ambiente de trabalho será chamado de espaço. Embora não seja necessário enunciar propriedades a respeito de retas e pontos contidos em um plano, devemos reafirmar, para o espaço, as propriedades básicas de pontos e retas.

Após a escolha das propriedades primitivas é o momento das primeiras argumentações. Deste modo, é essencial que surja o que se denomina *teorema* ou *proposições* que venham a ser demonstradas pela utilização dos axiomas escolhidos*.* Para Morgado, Wagner e Jorge (1990, p.5):

> um teorema é, pois, qualquer proposição que seja consequência de proposições anteriores. Os teoremas constam de duas partes essenciais: a HIPÓTESE, que é o conjunto de proposições dadas, e a TESE, que é a proposição deduzida da hipótese mediante encadeamento lógico das proposições dadas; é, pois, a conclusão. Se tomarmos a experiência e intuição como únicas bases das investigações matemáticas, fatalmente erraremos em algum ponto, pois, sendo imperfeitos nossos sentidos, deveremos concluir que não necessariamente nossa intuição sempre nos levará a um resultado correto. Realmente, deveremos apoiar nossas primeiras deduções em conceitos não definidos e proposições indemonstráveis, que admitiremos verdadeiras, mas, a partir daí, a lógica deve ser a responsável pela elaboração de outras proposições e propriedades decorrentes.

Machado (2013, p. 115) apresenta um sistema axiomático divido em seis grupos. Vejamos os axiomas do grupo I, denominado axiomas de incidência.

> **Axiomas: grupo I, axiomas de incidência**
> **Axioma I.1.** Por dois pontos distintos do espaço passa uma e somente uma reta.
> **Axioma I.2.** Toda reta do espaço possui pelo menos dois pontos distintos.
> **Axioma I.3.** O espaço contém pelo menos três pontos distintos que não pertencem a uma mesma reta.
> **Axioma I.4.** Por três pontos distintos não colineares do espaço passa um e somente um plano.
> **Axioma I.5.** Todo plano do espaço contém pelo menos um ponto.
> **Axioma I.6.** Se uma reta possui dois pontos distintos em comum com um plano, então esta reta está inteiramente contida no plano.

Na sequência, o mesmo autor faz uso do raciocínio lógico dedutivo para demonstrar algumas proposições consequentes, utilizando os axiomas do grupo I.

Observando a figura 1, percebemos a utilização da base axiomática para demonstrar a proposição 1.1, que aborda a determinação do plano por duas retas concorrentes.

Figura 1: Proposição consequente de axioma

1.3 Algumas consequências dos axiomas do grupo I

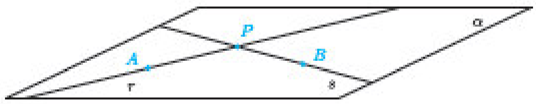


Figura 1.8

Proposição 1.1. *Por duas retas concorrentes passa um único plano.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam r e s duas retas concorrentes num ponto P. Para provar este resultado vamos seguir os seguintes passos (veja figura 1.8):

(1) Tome os pontos $A \in r$ e $B \in s$ distintos de P (existem pelo axioma I.2);

(2) tome α o único plano que passa por A, B e P (axioma I.4);

(3) a reta r está contida em α, pois é determinada pelos pontos A e P que pertencem a α (axiomas I.1 e I.6). Analogamente prova-se que $s \subset \alpha$.

Provamos assim que o plano α determinado pelos pontos A, B e P é o único plano que contém simultaneamente as retas r e s.

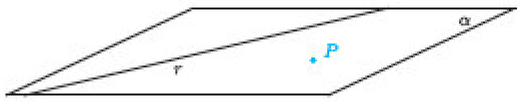


Figura 1.9

Fonte: MACHADO (2013, p. 16)

Nesse sentido, tem-se nessa parte da geometria a oportunidade de auxiliar na estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo dos alunos, contribuindo para que haja o desenvolvimento de processos mentais que irão transcender ao âmbito da própria matemática e ajudar na resolução de problemas complexos em muitas outras áreas. É o momento de estimular os hábitos investigativos dos alunos, que bem utilizados, irão trazer confiança e desprendimento, gerando uma visão ampla da realidade científica.

2.2 A EXPLORAÇÃO DA LINGUAGEM DA TEORIA DOS CONJUNTOS

Atualmente, toda matemática é formulada por meio da linguagem da teoria dos conjuntos, sendo esta, a noção mais fundamental, onde todo conceito pode ser expresso por ela. As figuras geométricas são conjuntos, ou mais precisamente, conjunto de pontos. Portanto, tem-se na geometria espacial de posição a possibilidade de implantar e/ou reforçar essa linguagem nos alunos, através da caracterização das propriedades por meio da simbologia própria dos conjuntos, que dá uma maior simplicidade e clareza às ideias apresentadas. Segundo Lima (2013, p. 2):

> a linguagem dos conjuntos, hoje universalmente adotada na apresentação da Matemática, ganhou essa posição porque permite dar aos conceitos e às proposições desta ciência a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica. Os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições". Assim, em vez de dizermos que "o objeto x goza da propriedade P" ou o "objeto y satisfaz a condição C", podemos escrever $x \in A$ e $y \in B$, onde A é o conjunto dos objetos que gozam da propriedade P e B é o conjunto dos objetos que satisfazem a condição C.

Para se iniciar o trabalho de geometria espacial de posição com os alunos e utilizar de maneira precisa a linguagem da teoria dos conjuntos, deve-se deixar claro que qualquer *ponto* é um elemento, e que *retas* e *planos* são conjuntos com infinitos pontos. Uma das propriedades iniciais da geometria espacial é o estabelecimento da condição para que uma reta esteja contida em um plano, assim descrita: *"se uma reta tiver dois de seus pontos em um plano, a reta está contida ao plano"*. É o que Lima (2013, p. 4) denomina Relação de Inclusão.

> Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um subconjunto de B, que A está contido em B ou que A é parte de B. para indicar este fato, usa-se a notação $A \subset B$. Exemplo: sejam T o conjunto dos triângulos e P o conjunto dos polígonos. Todo triângulo é um polígono, logo $T \subset P$. A relação $A \subset B$ chama-se relação de inclusão. Quando A não é um subconjunto de B, escreve-se $A \not\subset B$.

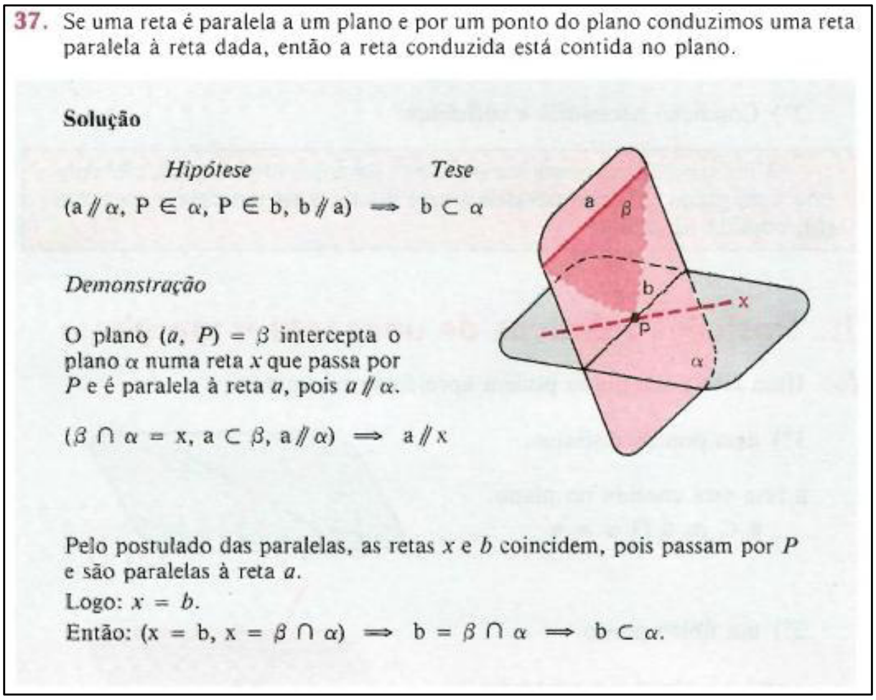
Mas as possibilidades vão além de simplesmente utilizar as relações de pertinência e inclusão, "pois na linguagem e na notação de conjuntos existe uma álgebra, montada sobre as operações de união ($A \cup B$) e intersecção ($A \cap B$), além da relação de inclusão ($A \subset B$)". (LIMA, 2013, p. 5)

Vejamos como a linguagem e a simbologia da teoria dos conjuntos pode colaborar para tornar simples uma demonstração. Na sequência dos primeiros postulados e das formas de se determinar um plano, é usual que se trabalhe a posição relativa entre os entes primitivos: pontos, retas e planos. Uma das posições relativas entre dois planos é que sejam concorrentes, surgindo a seguinte proposição: *"a intersecção de dois planos distintos e concorrentes é uma reta".* Neto (2013, p. 293) se utiliza da linguagem dos conjuntos, demonstrando a proposição acima da seguinte forma:

> Sejam γ e δ dois planos distintos e concorrentes, e $A, B \in \gamma \cap \delta$. Então, de acordo com nossas discussões anteriores, temos $\overleftrightarrow{AB} \subset \gamma, \delta$. Por outro lado, se existisse um ponto $C \in \gamma \cap \delta$ e tal que $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, então teríamos $\gamma = (C, AB) = \delta$, o que é uma contradição. Logo $\gamma \cap \delta = \overleftrightarrow{AB}$.

Ainda no tocante às posições relativas entre os entes primitivos, Dolce e Pompeo (2005, p. 22) se utilizam amplamente da linguagem da teoria dos conjuntos na resolução de exercícios. Notemos, na figura 2, a utilização dessa linguagem como forma de resolver o exercício 37.

Figura 2: Utilização da linguagem dos conjuntos



37. Se uma reta é paralela a um plano e por um ponto do plano conduzimos uma reta paralela à reta dada, então a reta conduzida está contida no plano.

Solução

Hipótese — *Tese*

$(a \mathbin{/\!/} \alpha,\ P \in \alpha,\ P \in b,\ b \mathbin{/\!/} a) \implies b \subset \alpha$

Demonstração

O plano $(a, P) = \beta$ intercepta o plano α numa reta x que passa por P e é paralela à reta a, pois $a \mathbin{/\!/} \alpha$.

$(\beta \cap \alpha = x,\ a \subset \beta,\ a \mathbin{/\!/} \alpha) \implies a \mathbin{/\!/} x$

Pelo postulado das paralelas, as retas x e b coincidem, pois passam por P e são paralelas à reta a.

Logo: $x = b$.

Então: $(x = b,\ x = \beta \cap \alpha) \implies b = \beta \cap \alpha \implies b \subset \alpha$.

Fonte: DOLCE; POMPEO, 2005, p. 22

De acordo com Lima (2013, p. 15):

> A adoção da linguagem e da notação de conjuntos em Matemática só se tornou uma prática universal a partir da terceira ou quarta década do século vinte. Esse uso, responsável pelos elevados graus de precisão, generalidade e clareza nos enunciados, raciocínios e definições, provocou uma grande revolução nos métodos, no alcance e na profundidade dos resultados matemáticos. No final do século 19, muitos matemáticos ilustres viam com séria desconfiança as novas ideias lançadas nos trabalhos pioneiros de G. Cantor. Mas, lenta e seguramente, esse ponto de vista se impôs e, no dizer de D. Hilbert, com extraordinária autoridade, "ninguém nos expulsará desse paraíso, que Cantor nos doou". Portanto, se queremos iniciar os jovens em Matemática, é necessário que os familiarizemos com os rudimentos da linguagem e na notação dos conjuntos.

Fica claro então, que a utilização dessa forma de representar a matemática, inserida no contexto da geometria, pode trazer uma maior simplificação e clareza às propriedades. Quanto mais os alunos estiverem familiarizados com essa linguagem e notações, mais facilitado ficará o trabalho, pois tornar preciso e simplificados os conceitos é imprescindível para uma construção sólida do conhecimento.

2.3 DO CONCRETO ÀS CONSTRUÇÕES TRIDIMENSIONAIS

Acredita-se que um dos objetivos da geometria espacial de posição seja desenvolver nos alunos a capacidade de representar objetos tridimensionais no plano. Isso não é uma tarefa simples, devido às distorções que ocorrem, principalmente, na perda de propriedades e informações a respeito do objeto a ser representado e até mesmo pela falta de visualização e percepção que os alunos têm dessa situação. Uma forma de contribuir para o desenvolvimento dessas habilidades é a utilização de materiais concretos que façam a representação inicial dos modelos geométricos apresentados. A visualização é muito importante no contexto do ensino de geometria, pois a partir dela passa-se a ter um maior controle sobre as operações mentais exigidas, sendo primordial que o aluno consiga fazer a diferenciação do que é uma representação plana e uma tridimensional. Conforme Lorenzato (2006, p. 3):

> Muitos foram os educadores famosos que, nos últimos séculos, ressaltaram a importância do apoio visual ou do visual-tátil como facilitador para aprendizagem. Assim, por exemplo, por volta de 1650, Comenius escreveu que o ensino deveria dar-se do concreto ao abstrato, justificando que o conhecimento começa pelos sentidos e que só se aprende fazendo.

A utilização de materiais concretos favorece a construção do conhecimento, levando o aluno a abstrair e a identificar as propriedades, desenvolvendo o raciocínio e fazendo com que tenha uma maior assimilação das formas. Para Miguel (2003, p. 385):

> O fato é que para a criança é sempre importante criar situações pedagógicas que lhes permitam visualizar os fatos fundamentais das operações, levantar hipóteses, testá-las, poder voltar atrás e refazer a trajetória, o que não é possível quando se pauta apenas em raciocínios simbólicos e formais. Do mesmo modo, cumpre alertar para o fato de que o sujeito não retira do material concreto o fato matemático que se concretiza sempre como raciocínio logicamente encadeado, abstrato e formalizável, portanto.

Cabe ressaltar que o material concreto a ser utilizado em sala de aula deve ser apropriado para o nível de ensino que se pretenda trabalhar, tendo que ser pensado e repensado pelo professor a sua utilização e/ou confecção. Segundo Mendes (2009, p. 25), os materiais a serem utilizados:

> Devem ser motivadores da aprendizagem matemática dos alunos, bem como apropriados para serem usados em diferentes níveis de escolaridade e em diferentes níveis de formação de um mesmo conceito matemático, favorecendo a abstração matemática, através de manipulação individual ou em grupo.

Filho (2013, p. 5) faz uma verificação dos principais postulados e definições da geometria espacial de posição através da construção e utilização de um material concreto, denominado kit de geometria espacial. De acordo com esse autor:

> Algumas noções ou conceitos, chamados **primitivos**, são aceitos sem definição e devem ser aceitos como verdadeiros. Em Geometria, os conceitos primitivos são: **ponto, reta** e **plano**. Observe que vários dos elementos que estão no nosso cotidiano podem ser usados para tentar representar estes conceitos. Por exemplo:
> • As estrelas podem representar pontos;
> • Uma linha bem esticada pode representar uma reta;
> • Uma quadra de esportes pode representar um plano.

O mesmo autor chama a atenção para o cuidado a se tomar na utilização de materiais concretos.

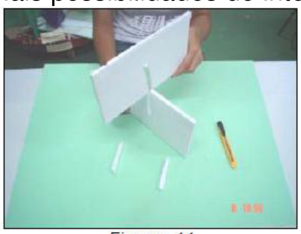
> **ATENÇÃO:** Como *ponto*, *reta* e *plano* são entes abstratos, o material concreto é simplesmente uma tentativa de *representá-los*. Portanto, tenha muita cautela ao relacionar tais conceitos aos seus respectivos modelos. Por exemplo, ao representar um plano por uma folha de papel, poderia

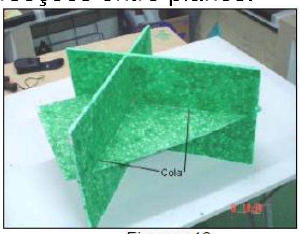
> transparecer para um aluno desavisado que um plano seria um conjunto limitado! (FILHO, 2013, p. 5)

Analisando-se a posição relativa dos entes primitivos em geometria espacial e, em particular, a posição entre planos, existe a possibilidade de três planos se intersectarem sob um único ponto. Filho (2013, p. 5) mostra como representar essa possibilidade por meio de materiais concretos. Vejamos:

> Posição entre Planos
> • Sobreponha uma folha de isopor a outra. A partir de um dos lados faça um recorte perpendicular em ambas as folhas até o seu centro, de modo que a espessura deste recorte seja a mesma da folha de isopor (*Figuras 10*).
> • Encaixe uma folha na outra (*Figuras 11*).
> **OBSERVAÇÃO 1:** Alguns casos de interseção entre planos apresentam dificuldades para o encaixe. Assim, é recomendável utilizar a cola para fixar os planos (*Figura 12*).
> **OBSERVAÇÃO 2:** Usando o mesmo procedimento de construção acima, podemos construir as demais possibilidades de interseções entre planos.


Figuras 10


Figuras 11



Figuras 12

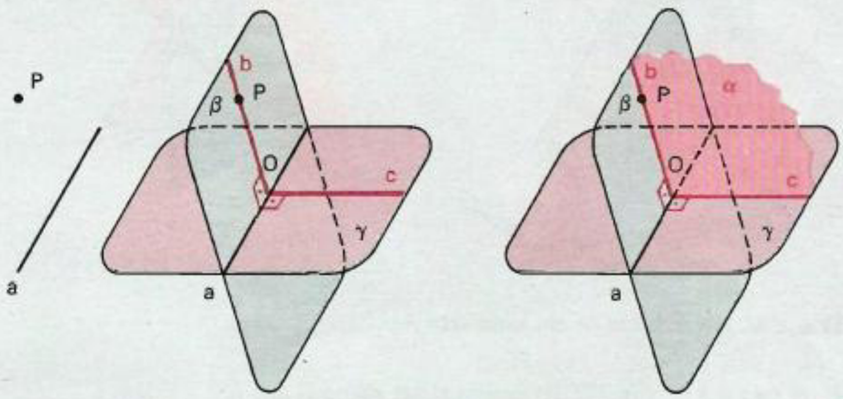
A utilização de materiais concretos, para a criação de modelos representativos, pode ajudar na visualização e até mesmo na compreensão sobre determinados aspectos da geometria, entretanto, é preciso ir além. O objetivo principal é que os alunos consigam construir e entender as figuras geométricas tridimensionais em um plano, tirando a partir daí as conclusões necessárias sobre as propriedades que regem o objeto de estudo. O concreto é apenas um meio e não um fim. E qual é o significado de construção geométrica? A resposta não é tão simples, pois pode-se pensar que construir geometricamente é apenas representar um objeto. Mas não é bem assim. Segundo Almeida, Bellemain e Rodrigues (2012, p. 2), “entende-se que fazer uma construção geométrica consiste em utilizar as premissas iniciais e as propriedades geradas a partir delas para poder representar um determinado objeto geométrico”.

Muitas vezes, para que se possa chegar a uma conclusão a respeito das propriedades que regem determinadas figuras, ou mesmo realizar a demonstração a de determinado teorema ou proposição, é preciso que se faça uma construção geométrica. Dolce e Pompeo (2005, p. 42) enunciam a seguinte proposição: “Por um ponto *P* pode-se conduzir um único plano perpendicular a uma reta *a*”.

Observa-se, na figura 3, a prova da existência do plano, mencionado na proposição anterior, em que os autores se utilizaram de construções geométricas simultaneamente ao raciocínio dedutivo para realizar a demonstração.

Figura 3: Demonstração/Construção Geométrica

a) Construção:



1º) Tomamos o plano $\beta = (a, P)$ e um plano γ, contendo a reta a, distinto de β.

2º) Em β, pelo ponto P traçamos a reta b perpendicular à reta a. Seja O a interseção de b com a.
Em γ, construímos a reta c, passando por O, perpendicular à reta a.

3º) As retas b e c determinam um plano $\alpha = (b, c)$ pedido.

b) Prova:

1º) O plano $\alpha = (b, c)$ passa por P, pois a reta b foi conduzida por P.

2º) $(a \perp b,\ a \perp c;\ b \cap c = \{O\};\ b \subset \alpha,\ c \subset \alpha) \implies a \perp \alpha$.

Logo, existe pelo menos um plano (α) passando por P, perpendicular à reta a.
No 2º caso ($P \in a$), a construção é análoga, sendo β e γ planos distintos quaisquer contendo a reta a.

Fonte: DOLCE; POMPEO, 2005, p. 43

Percebe-se que uma construção tridimensional vai além de uma simples representação, sendo realizada por meio de uma sequência de pressupostos teóricos e organizados de maneira lógica.

2.4 OS RECURSOS COMPUTACIONAIS E SUAS POSSIBILIDADES

Como ignorar o fato de que se vive a era digital, onde tecnologia e informação fazem parte do cotidiano do homem moderno. Nossos alunos estão cada vez mais conectados e inseridos nos recursos tecnológicos, tais como: computadores, celulares, entre outros. Criar um ambiente de aprendizagem que favoreça a utilização desses recursos é uma realidade e temos de estar preparados para explorá-los em sua plenitude. Entretanto, tem de se fazer uma reflexão no objetivo da utilização de um recurso computacional em uma aula de matemática. O foco continua sendo o aprendizado, a construção de determinado conhecimento e não o simples manusear de um *software* ou aplicativo qualquer. Não é somente tornando uma aula mais atraente e participativa por parte dos alunos que se vai consolidar o saber, muitas vezes formal, da disciplina. É preciso planejamento para a utilização eficaz destes recursos. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) em sua parte 3, Ciências da Natureza, matemática e suas Tecnologias,

> (...) cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento. É preciso ainda uma rápida reflexão sobre a relação entre Matemática e tecnologia. Embora seja comum, quando nos referimos às tecnologias ligadas à Matemática, tomarmos por base a informática e o uso de calculadoras, estes instrumentos, não obstante sua importância, de maneira alguma constituem o centro da questão. O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. (BRASIL, 2002, p. 42)

Assim, acredita-se que cabe ao professor um planejamento visando a utilização de determinado recurso computacional. Esse planejamento vem ao encontro do objetivo da proposta de sua aula. Podemos nomear uma série de situações que devem ser analisadas para que o recurso cumpra efetivamente seu papel, estando entre elas: o objetivo da aula, o recurso a ser utilizado, o custo, a possibilidade de o aluno interagir ou não com o recurso, e mesmo o domínio que o professor tem sobre sua utilização.

Particularmente, em relação ao ensino de geometria, surge o que se denomina *geometria dinâmica*.

De acordo com Alves e Soares (2003, p. 4):

> O termo geometria dinâmica foi inicialmente usado por Nick Jakiw e Steve Rasmussen da *Key Curriculum Press, Inc.* com o objetivo de diferenciar este tipo de *software* dos demais *softwares* geométricos. Comumente ele é utilizado para designar programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades, não devendo ser visto como referência a uma nova geometria. O desenvolvimento destes *softwares* foi proporcionado pelos avanços nos recursos disponíveis no *hardware* dos computadores pessoais. Eles apareceram a partir do crescimento na capacidade de memória e na velocidade de processamento das informações dos microcomputadores, além do surgimento do mouse como meio de comunicação do usuário com a interface gráfica. Além de serem importantes ferramentas para o ensino da geometria euclidiana, estes *softwares* também costumam ser usados em pesquisas e em outras áreas da geometria, como as geometrias não-euclidianas, geometria analítica e geometria descritiva, assim como podem ser explorados em outras áreas como a física, por exemplo. Por realizarem as construções que podem ser feitas com régua e compasso, algumas pessoas referem-se aos programas de geometria dinâmica como "régua e compasso eletrônicos".

Existem muitas vantagens na utilização de um *software* geométrico tanto para alunos quanto para professores. Segundo Giraldo (2012, p. 39):

> A grande vantagem apontada em relação às construções geométricas com papel e lápis está justamente no aspecto dinâmico do ambiente: uma vez concluída uma construção no computador, é possível alterar um de seus elementos (em geral, por meio do arrastar do mouse) e observar as alterações consequentes nos demais elementos. Assim, uma figura construída em geometria dinâmica representa, de forma mais efetiva, uma classe de objetos geométricos definida por propriedades e relações comuns – que se preservam quando esses objetos são arrastados na tela. Como muitos autores têm apontado, esse aspecto permite ao aluno investigar um grande número de exemplos e explorar conjecturas, construindo uma preparação para o exercício de argumentação matemática.

De acordo com Alves e Soares (2003), a abertura de qualquer programa de geometria dinâmica permite ao usuário deparar-se com uma tela em branco e uma quantidade razoável de recursos que vão possibilitar caminhos para a construção do conhecimento. Os autores exemplificam algumas possibilidades na utilização correta de um *software* de geometria dinâmica, destacando que

> quando o usuário utiliza corretamente as propriedades geométricas na construção, a dinâmica dos movimentos possibilita que ele perceba o que permanece invariante, alertando-o para determinados padrões e motivando-o a fazer conjecturas e a testar suas convicções. O paralelismo, a

> ortogonalidade, a proporcionalidade, a simetria axial, a simetria pontual (rotação de 180º) e a incidência são os chamados invariantes geométricos. (ALVES; SOARES, 2003, p. 5)

Não obstante ao fato de se ter uma gama de *softwares* geométricos que exploram a geometria euclidiana plana, temos ainda possibilidades para a geometria espacial. O *GeoGebra*, a partir da versão *5.0* é um exemplo disso, pois além de possibilitar o trabalho em duas dimensões, possui uma janela 3D capaz de oferecer muitas possibilidades para o ensino de geometria espacial.

Nessa concepção, cabe ao professor conduzir atividades que contemplem as potencialidades do *software* a ser utilizado, avaliando as possibilidades e limitações em seu planejamento, fazendo com que a construção do conhecimento matemático seja o foco da atividade.

2.5 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

A geometria espacial de posição é uma subárea da geometria espacial euclidiana. É responsável por estudar as posições relativas das formas geométricas espaciais e suas propriedades. Embora os entes primitivos ponto, reta e plano e algumas propriedades já tenham sido enunciadas por ocasião da geometria plana, é necessário que sejam reafirmadas por ocasião da introdução da geometria espacial.

2.5.1 Dos entes primitivos aos grupos de axiomas

Conforme a tradução dos Elementos de Euclides por Commandino (1944), “Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma”. Da mesma forma, definiu que “Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades” e que ”Superfície plana é aquela sobre a qual assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer que estiverem na mesma superfície”.

A geometria espacial de posição tem por base os axiomas e se desenvolve a partir destes, ou seja, os axiomas são tomados como verdades absolutas e partir destas são construídas as proposições consequentes. Segundo Moreira (2006), David Hilbert, em 1899, em seu livro Fundamentos da Geometria, buscou dar um tratamento moderno e tornar mais rigorosa a geometria euclidiana, identificando um conjunto completo de axiomas, através dos quais se pudesse deduzir os mais importantes teoremas geométricos.

> O matemático alemão David Hilbert (1862 a 1943) apresentou um sistema de axiomas completo para a Geometria Euclidiana plana e espacial numa série de conferências na Universidade de Gottingen. Isto significa que todos os resultados dos Elementos permaneciam válidos assumindo seus postulados. Seu sistema axiomático é um dos marcos na História da Matemática pois organiza os fundamentos da Geometria e Análise. A comparação mais próxima que pode ser feita é com a organização ocorrida na Álgebra ao ser introduzido o conceito de Grupo. (MOREIRA, 2006, p. 6)

Hilbert (1902) considerou três sistemas distintos de coisas, o primeiro se referiu aos pontos, designados por letras latinas maiúsculas; o segundo, às linhas retas, designadas por letras latinas minúsculas e o terceiro aos planos, designados por letras gregas minúsculas. Estes sistemas, assim como “pertence”, “está entre” e “congruência”, foram propostos sem definição, Moreira (2006). Hilbert chamou os pontos de elementos da geometria linear; pontos e linhas, elementos da geometria plana; e os pontos, linhas e planos, os elementos da geometria espacial. Esses elementos apresentavam relações indicadas por meio de palavras, tais como “estão situados”, “entre”, “paralelo”, congruentes”, “contíguo” etc. A descrição completa e exata dessas relações é uma consequência dos axiomas da geometria que foram divididos por Hilbert em cinco grupos:

- ✓ Grupo I: Axiomas de Incidência ou Conexão: 7 axiomas;
- ✓ Grupo II: Axiomas de Ordem: 5 axiomas;
- ✓ Grupo III: Axioma das Paralelas (axioma de Euclides);
- ✓ Grupo IV: Axiomas da Congruência: 6 axiomas;
- ✓ Grupo V: Axioma de Continuidade (axioma de Arquimedes).

De acordo com Manfio (2013, p. ix):

> Os axiomas de incidência expressam a noção de *estar em*, enquanto os axiomas de ordem expressam a noção de *estar entre*. Os axiomas de continuidade não envolvem uma nova relação primitiva mas tratam de garantir que certas construções, que vão nos permitir medir distâncias entre pontos, são possíveis. O axioma das paralelas abre porta à Geometria Euclidiana.

Ainda sobre os entes primitivos e os axiomas, Manfio (2013, p. ix) destaca que:

> O fundamental dos termos e relações primitivas, bem como dos axiomas, é entender claramente o adjetivo primitivo. Com isso, o que se quer dizer é que estes termos e relações não vão ser definidos através de outros, mas cada pessoa deve fazer a sua própria representação do que são pontos, retas, estar em, etc. Não importa a imagem que cada um faça desses objetos e relações, o que é essencial é que as interconexões entre eles, expressas pelos axiomas, sejam reconhecidos como verdadeiras.

Nesse sentido, descreveremos os grupos de axiomas I e III, segundo a teoria de Hilbert (1902), uma vez que se referem ao objeto de estudo geometria espacial de posição, trazendo o aprofundamento suficiente para o nível a que se propõe este trabalho.

2.5.1.1 Axiomas de Incidência ou Conexão

Os axiomas deste grupo visam definir a noção de "estar em", além de estabelecer relações de conexão entre os elementos primitivos ponto, reta e plano. São eles:

Axioma 1: Dois pontos distintos A e B determinam uma única reta r que passa por eles. Escreve-se: $r = \overleftrightarrow{AB}$ ou r = $\overleftrightarrow{BA}$.

Axioma 2: Quaisquer dois pontos distintos de uma reta a determinam completamente. Se $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC} = r$ e $B \neq C$, $\overleftrightarrow{BC} = r$.

Axioma 3: Três pontos A, B e C não colineares, determinam completamente um plano α. Escreve-se $\alpha = pl\,(ABC)$.

Axioma 4: Quaisquer três pontos de um plano que não se encontram sobre a mesma reta determinam completamente este plano.

Axioma 5: Se dois pontos A e B de uma reta r estão contidos em um plano α, a reta r está contida nesse plano. Em símbolos: $r = \overleftrightarrow{AB}$; $\{A,B\} \subset \alpha \Rightarrow r \subset \alpha$.

Axioma 6: Se dois planos *α* e *β* possuem um ponto *A* em comum, então eles possuem pelo menos um ponto $B \neq A$ em comum. Assim, como consequência do Axioma 1, se dois planos possuem um ponto em comum, eles possuem uma reta em comum.

Axioma 7: Em cada reta existe pelo menos dois pontos; em cada plano existe pelo menos três pontos que não estão sobre a mesma reta; e no espaço, existem pelo menos quatro pontos que não estão sobre o mesmo plano.

Os axiomas 1 e 2 trazem informações a respeito de pontos e retas, ou seja, são os axiomas do plano. Os axiomas de 3 a 7 contêm declarações de pontos, retas e planos, portanto, serão designados por axiomas do espaço.

Teorema 1: Por uma reta *r* e um ponto *A* que não está sobre *r* passa um e somente plano *α*.
Demonstração:
Considere dois pontos distintos *B* e *C* pertencentes a *r*. Como *A*, *B* e *C* não estão situados sobre uma mesma reta, segue do Axioma 3, que existe um único plano *α* contendo estes pontos. Como *B* e *C* pertencem a *α,* pelo Axioma 5, *r* está em *α.*

Teorema 2: Através de duas retas *r* e *s* que possuem um único ponto *A* em comum passa um e somente um plano *α*.
Demonstração:
Seja *A* o ponto de intersecção entre *r* e *s* e considere um ponto *B* pertencente a *r* e um ponto *C* pertencente a *s*, ambos distintos de *A*. Segue do Axioma 3, que existe um único plano *α* contendo *A*, *B* e *C*. Por outro lado, cada uma das retas possui um par de pontos distintos em *α,* logo pelo Axioma 5, *r* e *s* estão contidas em *α.*

2.5.1.2 Axioma das Paralelas (Axioma de Euclides)

O axioma que segue simplifica os princípios fundamentais da geometria, facilitando muito o seu desenvolvimento.
Axioma: Em um plano *α* pode ser traçada de qualquer ponto *A*, que esteja fora da reta *r*, uma e somente uma reta que não corta a reta *r*. Essa reta é chamada de paralela à reta *r* através do ponto *A* dado.

O axioma das paralelas traz duas informações importantes. A primeira diz que no plano α existe uma reta que passa pelo ponto A, que não intersecta a reta r. A segunda afirma que apenas uma reta é possível nessa construção. Resumindo, trata-se da existência e unicidade da reta paralela.

Teorema 3: Se duas retas r e s de um plano não intersectarem uma terceira reta t do mesmo plano, então r e s não se intersectam entre si.

Demonstração:

Supondo que r e s tenham um ponto A em comum e que não intersectem t. Então teríamos duas retas passando por A, que não intersectam t, uma contradição segundo o axioma das paralelas.

O axioma das paralelas é um axioma do plano. Em relação à posição relativa entre duas retas no espaço, existem três possibilidades: *retas concorrentes* (que possuem um único ponto de intersecção; *retas paralelas* (coplanares que não possuem nenhum ponto de intersecção); *retas reversas* (que não possuem um plano comum que as contenha).

Apresentados os axiomas, algumas definições e teoremas, a geometria de posição ganha forma a partir de outras especificidades, tais como: o paralelismo e o perpendicularismo. Tomaremos como base os trabalhos de Manfio (2013), Morgado, Wagner e Jorge (1990), Machado (2013), Dolce e Pompeo (2005), para, na sequência, descrever estes conceitos, adaptados segundo o nível da proposta.

2.5.2 Paralelismo

Como vimos, duas retas coplanares que não têm nenhum ponto de intersecção são denominadas retas paralelas. A construção de duas retas paralelas é realizada pela aplicação do Axioma da Paralelas, também conhecido por Axioma de Euclides, que define a existência de uma única reta paralela a outra passando por um ponto localizado fora desta reta.

2.5.2.1 Paralelismo entre reta e plano

Em relação à posição relativa entre uma reta r e um plano α no espaço temos três possibilidades: *reta paralela ao plano* (não possuem pontos em comum); *reta secante ao plano* (possuem um ponto em comum apenas); *reta contida no plano* (todos os pontos da reta pertencem ao plano).

<u>Teorema 4</u>: Uma reta r e um plano α são paralelos se, e somente se, existe uma reta s contida em α que seja paralela a r.

<u>Demonstração:</u>

Suponha que r e α sejam paralelos. Dado um ponto A pertencente a α, considere o plano β determinado por r e A. Como os planos α e β têm um ponto A em comum, irão se intersectar ao longo de uma reta s. As retas r e s são paralelas, pois são coplanares e não possuem pontos em comum. Reciprocamente, suponha que uma reta s contida em α seja paralela a r. Vamos provar que r é paralela a α. Considere o plano β determinado por r e s. Se r intersectasse o plano α, seria necessariamente um ponto da intersecção s de β e α, o que é um absurdo, pois r e s são paralelas. Assim, r e α são paralelos.

2.5.2.2 Paralelismo entre planos

Em relação à posição relativa entre dois planos α e β no espaço, temos duas possibilidades: *planos secantes* (que possuem uma reta em comum); *planos paralelos* (que não possuem pontos em comum).

<u>Critério de paralelismo entre dois planos</u>: Se dois planos α e β são paralelos, então α é paralelo a qualquer reta contida em β. Por outro lado, se α é paralelo a duas retas concorrentes contidas em β, então α e β são paralelos.

<u>Demonstração</u>:

Suponha que α e β sejam paralelos. Tomemos uma reta r contida em β. Esta reta não pode intersectar o plano α, caso contrário, β intersectaria α, uma contradição, pois, por hipótese, α e β são paralelos, logo, r e α são paralelos. Reciprocamente, tomemos duas retas r e s contidas no plano β, concorrentes em um ponto A e paralelas ao plano α. Suponha que α e β se intersectem numa reta t. Como r e s são paralelas a α, r e s

não intersectam *t*. Deste modo, como a reta *t* está contida em *β*, *r* e *s* são paralelas a *t*, contradizendo o Axioma de Euclides, que trata da unicidade de uma paralela passando por um ponto. Logo, *α* e *β* são paralelos.

Proposição: Por um ponto *P*, situado fora de um plano *α*, passa um único plano *β* paralelo a *α.*

Demonstração:

Existência.

Sejam *r* e *s* duas retas concorrentes que estão contidas no plano *α*. Por *P*, segundo o Axioma de Euclides, passam duas retas *r'* e *s'* paralelas, respectivamente a *r* e *s*. Seja *β* um plano determinado por *r'* e *s'*. Como *r'* e *s'* são paralelas a *α, β* é paralelo a *α.*

Unicidade.

Suponhamos que existam dois planos *β'* e *β"* que passam por *P* e sejam paralelos a *α.* Como *β'* e *β"* têm o ponto *P* em comum, a intersecção dos mesmos é uma reta *r*, paralela a *α.* Tomemos uma reta *s* contida em *α*, que não seja paralela a *r* e que determina com *P* um plano *γ*. A intersecção de *γ* com *β'* é uma reta *t'*, que é paralela a *s*, pois *s* e *t'* são coplanares e estão contidas em planos paralelos, implicando que *t'* e *r* são distintas. Da mesma forma, a intersecção de *γ* com *β"* é uma reta *t"*, que é paralela a *s*. Como *t'* e *t"* passam por *P*, elas são coincidentes. Desta forma, *β'* e *β"* contêm, além de *r*, uma outra reta comum *t'*. Logo, *β'* e *β"* são planos coincidentes, o que prova a unicidade do plano paralelo a *α* passando pelo ponto *P*.

2.5.3 Ortogonalidade ou Perpendicularidade

Duas retas concorrentes são perpendiculares caso se intersectem segundo quatro ângulos congruentes. Um par de retas reversas *r* e *s* são ortogonais se por um ponto *P*, fora de *r* e *s*, tomarmos um par de retas concorrentes *r'* e *s'*, paralelas, respectivamente a *r* e *s* e *r'* e *s'* formarem quatro ângulos congruentes.

2.5.3.1 Perpendicularidade entre reta e plano

Uma reta *r* é perpendicular a um plano *α* caso seja ortogonal a qualquer reta contida nesse plano. O teorema a seguir fornecerá a condição suficiente para que uma reta e um plano sejam perpendiculares.

Proposição: Se uma reta *r* e um plano *α* são perpendiculares, qualquer reta *r'*, paralela a *r*, é perpendicular a *α*. Reciprocamente, qualquer plano *α'*, paralelo a *α*, é perpendicular a *r*.

Demonstração:

Seja *s'* uma reta contida no plano *α* e concorrente a *r'*. Pelo ponto de intersecção de *r* com *α*, trace a reta *s*, contida em *α* e paralela à reta *s'*. O ângulo entre as retas *r'* e *s'* é igual ao ângulo entre as retas *r* e *s*, que nesse caso é igual a 90º. Assim, *r'* e *s'* são perpendiculares, logo, *r'* é perpendicular a *α.*

Proposição: Se duas retas distintas *r* e *r'* são perpendiculares a um plano *α*, então elas são paralelas. Se dois planos *α* e *β* são perpendiculares a uma reta *r*, então eles são paralelos.

Demonstração:

Suponha que *r* e *r'* não sejam paralelas. Pelo ponto de intersecção de *r'* e *α,* traça-se a reta *s*, paralela à *r*. Como *r'* e *s* são retas distintas, elas determinam um plano *β*, que intersecta *α* segundo uma reta *t*. De acordo com a proposição anterior, a reta *s* é perpendicular ao plano *α*. Como *r'* e *s* são perpendiculares a *α*, são perpendiculares à reta *t*. Deste modo, no plano *β* existem duas retas perpendiculares à reta *t* passando pelo mesmo ponto, ou seja, uma contradição. Logo, *r* e *r'* só podem ser paralelas. A segunda afirmação se prova de maneira análoga.

Teorema 5: Se uma reta *r* é ortogonal a duas retas *s* e *t*, concorrentes e contidas em um plano *α, r* é perpendicular a *α.*

Vejamos, segundo Manfio (2013, p. 125), a demonstração deste teorema, conhecido como Teorema do Pé-de-Galinha:

> Demonstração. Sejam *s* e *t* duas retas contidas em *π*, concorrentes em um ponto *P*, e suponha que sejam ortogonais à reta *r*. Podemos supor, sem perda de generalidade, que *r* intercepta *π* no ponto *P*. Dado uma reta *u* contida em *π*, passando por *P*, considere uma reta *v*, também contida em *π*, que intercepta as retas *s*; *t*; *u* nos pontos *S*, *T* e *U*, respectivamente, distintos de *P* (cf. Figura 14.3). Temos três possibilidades: *S* está entre *T* e *U*, *T* está entre *S* e *U*, e *U* está entre *S* e *T*. Suponha que *S* esteja entre *T* e *U*. Em cada semi-espaço determinado por *π*, considere dois pontos A_1, $A_2 \in r$ tais que $PA_1 \equiv PA_2$. Pelo caso *LAL*, os triângulos A_1PT e A_2PT são congruentes. Analogamente os triângulos A_1PS e A_2PS são congruentes. Disso decorre que $\widehat{A_1SU} \equiv \widehat{A_2SU}$. Assim, pelo caso *LAL*, os triângulos A_1SU e A_2SU são congruentes. Em particular, tem-se $A_1U \equiv A_2U$. Isso implica, pelo caso *LLL*, que os triângulos A_1PU e A_2PU são congruentes. Disso segue que $\widehat{A_1PU} \equiv$

$\widehat{A_2PU}$. Como A_1; P; A_2 são colineares, segue que $\widehat{A_1PU} = 90º = \widehat{A_2PU}$. Portanto, *r* é ortogonal a *u*. Os demais casos podem ser provados de forma inteiramente análoga.

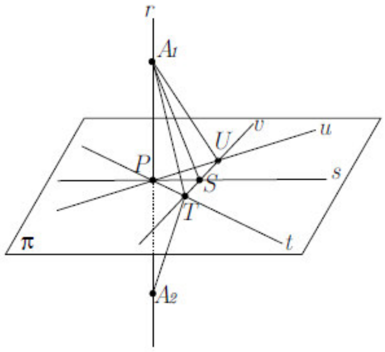


Figura 14.3

Teorema 6: Por um ponto *P* dado, pode-se traçar uma única reta *r* perpendicular a um plano *α* dado.

Demonstração:

Considere um plano *α* e um ponto *P* que não pertence a *α*. Tomemos sobre *α* duas retas *t'* e *t''*, concorrentes num ponto *A*. Pelo ponto *A*, considere um plano *β'* perpendicular a *t''* e um plano *β''* perpendicular a *t'*. A reta *r'*, intersecção dos planos *β'* e *β''* é perpendicular às retas *t'* e *t''* e, de acordo com o Teorema do Pé-de-Galinha, é perpendicular ao plano *α*. Passando pelo ponto *P*, considere uma reta *r*, paralela a *r'* e, consequentemente perpendicular a *α*. Caso existisse outra reta que passasse por *P* e fosse perpendicular a *α*, também seria paralela a *r'*, um absurdo segundo o Axioma de Euclides. Daí, conclui-se que a reta *r* é única.

2.5.3.2 Perpendicularidade entre planos

Dados dois planos *α* e *β* que se intersectam ao longo de uma reta *r*, considere duas retas *s* e *t*, contidas em *α* e *β*, respectivamente. Se *s* e *t* forem perpendiculares à reta *r*, os planos *α* e *β* são perpendiculares.

Proposição: Um plano *α* é perpendicular a um plano *β* se, e somente se, o plano *α* contém uma reta perpendicular ao plano *β*.

<u>Demonstração:</u>

Suponha que α e β sejam perpendiculares, logo, a reta *s*, contida em α, é perpendicular às retas *r* e *t*, contidas em β, ou seja, a reta *s* está contida em α e é perpendicular ao plano β. Reciprocamente, seja s uma reta contida no plano α perpendicular ao plano β. Os planos α e β se intersectam segundo a reta r, perpendicular a s. Considere uma reta t contida em β, que intersecta r e s. De acordo com o Teorema do Pé-de-Galinha, o plano determinado por s e t é perpendicular a r, logo, s e t são perpendiculares à intersecção r, ou seja, os planos α e β são perpendiculares.

3 ANÁLISE DE DOCUMENTOS E LIVROS DIDÁTICOS

3.1 O PLANO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segundo Orozco (2014), este documento, elaborado pela DEPA, é fruto de troca de experiências entre os professores integrantes dos Colégios Militares e busca nortear o trabalho do SCMB na elaboração de sequências didáticas. O objetivo é que as sequências didáticas sejam elaboradas de maneira que se busque, entre outras coisas, a contextualização e o multiletramento, visando o desenvolvimento de competências e habilidades, fazendo com que os alunos se tornem autônomos na construção de seu conhecimento. O PSD traz uma lista de competências e habilidades, denominada matriz de referência, relacionada aos objetos do conhecimento (conteúdos) a serem trabalhados no âmbito dos CM, que são comuns a todo SCMB. Cada CM, por sua vez, tem liberdade na elaboração dos descritores, criando suas sequências didáticas a partir da matriz de referência. Os descritores são elementos que orientam o planejamento das aulas, descrevendo as habilidades em relação aos objetos do conhecimento. Os objetos do conhecimento, representados no PSD, são amplos e abrangentes em cada disciplina, devendo os professores detalhá-los, de maneira que se evite aprofundamentos que comprometam por excesso de conteúdos o ensino por competências. A ordem de desenvolvimento desses objetos do conhecimento pode ser diferente da prevista no PSD, desde que se justifique pela melhora do processo de ensino e aprendizagem e não prejudique o desencadeamento lógico da disciplina. As competências e habilidades previstas do PSD compõem um mínimo necessário para o desenvolvimento do trabalho e a elaboração de sequências didáticas, podendo os professores proporem outras competências e habilidades que julguem necessárias para a construção do conhecimento em sua disciplina.

Especificamente, em relação ao PSD de matemática do segundo ano do Ensino Médio, as orientações para o desenvolvimento do objeto do conhecimento geometria espacial começa por elencar uma série de competências e habilidades a serem desenvolvidas. Vejamos uma competência e respectiva habilidade associada à geometria espacial de posição:

> **C10** - Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas de conhecimento.
> **HM26** - Compreender a matemática como ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo. A forma lógica dedutiva que a geometria utiliza para interpretar as formas geométricas e deduzir propriedades dessas formas é um exemplo de como a matemática lê e interpreta o mundo à nossa volta. (OROZCO, 2014, p. 16)

Desta forma, percebe-se que é previsto no PSD o trabalho mais formal dentro da disciplina de matemática, especificamente, neste caso, quando se refere à geometria e a utilização do sistema dedutivo como forma de deduzir propriedades.

3.2 OS PLANOS DE EXECUÇÃO DIDÁTICA DOS COLÉGIOS MILITARES

Conforme Orozco (2014), o PED é o documento que tem por objetivo apresentar as sequências didáticas elaboradas pelos professores dos CM, responsáveis por lecionar cada disciplina em determinado ano escolar. As sequências didáticas devem ser planejadas de maneira a orientar o desenvolvimento das competências e habilidades previstas no PSD, selecionar as estratégias de aprendizagem dos alunos em meio ao desenrolar dos objetos do conhecimento propostos em cada disciplina. No PED, deve constar os descritores a serem utilizados, além de alterações nas sequências didáticas, sempre que for necessário fazê-las.

Tendo em vista verificar como está sendo desenvolvido o conteúdo de geometria espacial, especificamente a parte posicional, entrou-se em contato com os doze CM, verificando-se a possibilidade de ser disponibilizado os PED de matemática específicos de geometria espacial. Sete destes colégios disponibilizaram o respectivo documento para consulta. Sendo assim, foram coletados os PED e respectivas matrizes de descritores.

Observemos, no quadro 1, o tempo de aula destinado para o ensino de geometria espacial de posição e os descritores que foram utilizados no desenvolvimento deste objeto do conhecimento no ano de 2015.

Quadro 1 – Tempo de aula e matriz de descritores

CM	Tempo 45’	Descritores
Colégio Militar de Brasília (CMB)	8 T	Reconhecer o significado de semi-espaço e as proposições primitivas da geometria espacial de posição.
		Compreender as posições relativas de dois entes geométricos primitivos.
		Reconhecer as propriedades decorrentes das relações entre os entes geométricos primitivos.
		Compreender o significado de projeção ortogonal.
Colégio Militar de Salvador (CMS)	4T	Conhecer os postulados que estabelecem as relações entre ponto, reta e plano
Colégio Militar de Santa Maria (CMSM)	9T	Apresentar os postulados da geometria espacial;
		Apresentar as formas de determinação do plano;
		Determinar a posição relativa de duas retas no espaço;
		Determinar a posição relativa de retas e planos no espaço;
		Determinar a posição relativa de planos no espaço;
		Determinar o ângulo entre duas retas reversas;
		Determinar o ângulo entre retas e planos;
		Apresentar o Teorema do Pé-de-Galinha;
		Determinar o ângulo entre dois semiplanos;
		Determinar a distância entre dois pontos;
		Determinar a distância de ponto à reta;
		Determinar a distância de ponto a plano;
		Determinar a distância entre retas paralelas;
		Determinar a distância entre planos paralelos;
		Determinar a distância entre retas reversas.
Colégio Militar de Recife (CMR)	6T	Abstrair os conceitos de ponto, reta e plano, valendo-se de objetos e também de espaço físico da sala de aula.
		Ter noção do que vem a ser método lógico-dedutivo em matemática.
		Conceituar distância entre dois pontos, entre ponto e reta, entre retas paralelas entre ponto e plano, entre reta e plano paralelos, entre planos paralelos e entre duas retas reversas.
Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ)	-	Não apresenta descritores relativos à geometria espacial de posição.
Colégio Militar de Juiz de Fora (CMJF)	2T	Conhecer e analisar os axiomas e teoremas da geometria espacial de posição.
Colégio Militar de Campo Grande (CMCG)	6T	Identificar a posição relativa entre: retas; planos; retas e planos.
		Calcular distâncias entre: retas; planos; retas e planos.
		Determinar o ângulo entre: retas; planos; retas e planos.

Fonte: do autor

Analisando os PED confeccionados pelos sete Colégios Militares, percebe-se que possuem características diferentes em relação à elaboração da proposta didática geometria espacial de posição. As diferenças vão desde os tempos de aula previstos para o desenvolvimento do objeto do conhecimento até a matriz de descritores utilizada. Não há unanimidade para a construção desse conhecimento, embora os sete colégios possuam estruturas semelhantes, tanto organizacional, quanto de pessoal. Nota-se que existe colégio que nem mesmo prevê tempo de aula para esta finalidade, bem como há colégios com cargas horárias relativamente grandes e com uma lista bem definida de descritores a serem utilizados. Isto é fruto da liberdade dada pelo PSD, que mesmo sendo único para todo o SCMB, respalda os docentes na elaboração de suas sequências didáticas, desde que se justifique em prol do desenvolvimento de competências e habilidades.

No PED, dentre outras características previstas, também se elenca uma série de estratégias de aprendizagem que visam organizar o desenvolvimento dos objetos do conhecimento, podendo-se prever ainda algum tipo de avaliação. Dos PED disponibilizados pelos sete CM, por apresentarem características semelhantes, foram selecionados três para serem analisados em relação às estratégias de aprendizagem e avaliações estabelecidas.

Vejamos, nos quadros 2, 3 e 4, o extrato dos PED desses três CM, analisando-se prioritariamente as estratégias de aprendizagem e os tipos de avaliações que são previstas.

Quadro 2 – Extrato do PED – CMBH

SEQUÊNCIA DIDÁTICA Nº 14 - GEOMETRIA ESPACIAL: GEOMETRIA DE POSIÇÃO

<table>
<tr><th>Aulas 1, 2, 3 e 4</th><th>Competências a serem desenvolvidas</th><th>Habilidades a serem trabalhadas</th><th>Estratégias de aprendizagem – desenvolvimento</th><th>Tempo previsão</th></tr>
<tr><td rowspan="2">20 a 24 JUL</td><td>C10</td><td>HM26</td><td>1) Rememória: posições relativas de retas no plano.
2) Aula expositiva: resolução de problemas.
3) Leitura: posições relativas no espaço.</td><td>4T</td></tr>
<tr><td colspan="2">AVALIAÇÃO</td><td>- Avaliação formativa não mensurada: resolução de questões. D75</td><td>-</td></tr>
</table>

Fonte: CMBH

Quadro 3 – Extrato do PED – CMB

Sequência didática: **Geometria Espacial.**

Aulas 1 a 4	Competências a serem desenvolvidas	Habilidades a serem trabalhadas	Desenvolvimento de aprendizagem - desenvolvimento	Tempo Previsto
13/julho a 17/julho	C10	HM26	1. Retificação de aprendizagem da 2ª VI.	1T
			2. Apresentação dos conceitos primitivos, do conceito de semi-espaço explorando a figura de um cubo.	1T
			3. Apresentação das posições relativas de dois planos no espaço, das posições relativas de uma reta e um plano no espaço, das posições relativas de duas retas no espaço, utilizando cadernos, réguas e os materiais dos próprios alunos.	2T
	AVALIAÇÃO		Através da observação das atividades desenvolvidas em sala de aula com a resolução dos exercícios em dupla.	-
Aulas 5 a 8	**Competências a serem desenvolvidas**	**Habilidades a serem trabalhadas**	**Desenvolvimento de aprendizagem - desenvolvimento**	**Tempo Previsto**
20/julho a 24/julho	C10	HM26	1. Apresentação das propriedades referentes a retas e planos no espaço decorrentes da definição, utilizando cadernos, réguas e os materiais dos próprios alunos.	2T
			2. Apresentação do conceito de ângulos entre duas retas no espaço.	2T
			3. Apresentação do conceito de uma reta perpendicular a um plano e das propriedades decorrentes desse conceito.	
			4. Apresentação do conceito de dois planos secantes no espaço e das propriedades decorrentes desse conceito.	
			5. Apresentação do conceito de projeção ortogonal para definir as distâncias entre ponto, reta e plano.	
	AVALIAÇÃO		1ª Verificação Imediata	-

Fonte: CMB

Quadro 4 – Extrato do PED – CMCG

SEQUÊNCIA DIDÁTICA Nº 17 – Geometria de Posição

AULAS 65 a 73	**COMP a serem desenvolvidas**	**HABILIDADES a serem trabalhadas**	**Estratégias de aprendizagem - desenvolvimento**	**Tempo previsto**
Semana **24 e 25 13/07 a 24/07**	C7 C8 C12	HM18 HM23 HM32	- Conhecer, por meio do desenvolvimento histórico, a conceituação da geometria. - Resolução de exemplos/problemas em aula com a participação de todos os alunos. - Exercícios de fixação para serem feitos em sala de aula. - Apresentação e discussão de estratégias empregadas para a resolução das atividades propostas.	8T
	AVALIAÇÃO		Formativa (Resolução de exercícios)	

Fonte: CMCG

Em relação às estratégias utilizadas para o desenvolvimento do objeto do conhecimento, estas baseiam-se, sobretudo, em aulas expositivas com a apresentação da teoria e resolução de exercícios. Fica claro que não há uma preocupação por parte dos CM analisados em apresentar uma forma diferenciada para o ensino de geometria espacial de posição. Pelo tempo médio que é dedicado para este tema, os descritores utilizados e as estratégias de ensino, é evidente que a ênfase em geometria espacial não é a posicional. É raro o colégio que faz menção ao sistema dedutivo e nenhum colégio, por exemplo, faz referência à utilização de materiais concretos, o uso do laboratório de informática e as construções geométricas tridimensionais. As avaliações previstas são basicamente formativas, baseando-se na resolução de exercícios.

3.3 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Do levantamento feito junto aos colégios militares, verificou-se que foram utilizados, no 2º Ano do Ensino Médio, em 2015, fundamentalmente, cinco livros didáticos de matemática, todos incluídos no PNLD, distribuídos no quadro 5.

Quadro 5 – Distribuição dos livros de matemática

Colégio Militar de Brasília (CMB)	Matemática Volume Único (Iezzi et al, 2011) Livro 1
Colégio Militar de Manaus (CMM)	
Colégio Militar de Juiz de Fora (CMJF)	
Colégio Militar de Belo Horizonte (CMBH)	
Colégio Militar de Porto Alegre (CMPA)	Conexões com a Matemática Volume Único (Obra coletiva, 2013) Livro 2
Colégio Militar de Fortaleza (CMF)	
Colégio Militar de Campo Grande (CMCG)	
Colégio Militar de Recife (CMR)	Matemática – Contexto e Aplicações Volume 2 (Dante, 2014) Livro 3
Colégio Militar de Salvador (CMS)	
Colégio Militar de Curitiba (CMC)	Matemática – Ciência e Aplicações Volume 2 (Iezzi et al, 2013) Livro 4
Colégio Militar de Santa Maria (CMSM)	
Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ)	Matemática Volume 2 (Paiva, 2013) Livro 5

Fonte: do autor

Os livros didáticos foram consultados separadamente, de forma a confrontar os objetivos da proposta didática com as ideias apresentadas pelos autores. Numerou-se os livros de 1 a 5 tendo em vista descrevê-los no quadro 6.

Quadro 6 – Descrição das obras segundo aos objetivos da proposta didática

Objetivo/Livro Didático	**Livro 1**	**Livro 2**	**Livro 3**	**Livro 4**	**Livro 5**
Sistema de axiomas e deduções	Apresenta um pequeno sistema de propriedades primitivas, mas não faz uso das mesmas para demonstrar propriedades decorrentes, nem na teoria, tampouco nos exemplos e exercícios.	Apresenta um bom número de propriedades primitivas e as utiliza para fazer demonstrações de teoremas consequentes no decorrer do desenvolvimento da teoria. Traz alguns exercícios que exigem o raciocínio lógico dedutivo.	Apresenta um bom número de propriedades primitivas e as utiliza para fazer demonstrações de teoremas consequentes, entretanto, isso só ocorre no final do capítulo como tópico adicional. Apresenta como desafio a demonstração de um teorema.	Apresenta um pequeno sistema de propriedades primitivas, mas não faz uso das mesmas para demonstrar propriedades decorrentes, nem na teoria, tampouco nos exemplos e exercícios. Demonstra alguns teoremas no final do capítulo, como tópico adicional.	Apresenta um pequeno sistema de propriedades primitivas, mas não faz uso das mesmas para demonstrar propriedades decorrentes. Traz apenas um exercício resolvido sobre a demonstração de um teorema.
Construções geométricas tridimensionais	Não são apresentadas.	Traz alguns exercícios que trabalham construções geométricas, porém, que não fazem uso das propriedades para resolução.	Não são apresentadas.	Não são apresentadas.	Não são apresentadas.
Cálculo de ângulos e distâncias	Faz a definição, mas não apresenta exemplos e exercícios.	Faz a definição e traz exemplos e exercícios sobre estas definições.	Faz a definição e traz poucos exemplos e exercícios sobre estas definições.	Faz a definição, mas não apresenta exemplos e exercícios.	Faz a definição e traz exemplos e exercícios sobre estas definições.
Linguagem da teoria dos conjuntos para relacionar entes geométricos	Bastante utilizada.	Utilizada em algumas relações.	Praticamente não é utilizada.	Bastante utilizada.	Utilizada em algumas relações.

Fonte: do autor

Da descrição realizada sobre os livros didáticos, principalmente ao confrontar os objetivos principais da proposta didática, o que mais se assemelha é a apresentação de um sistema básico axiomático, todavia, a maior parte dos livros não utiliza esse sistema para deduzir propriedades consequentes, tampouco o utiliza em construções geométricas tridimensionais. Alguns dos livros apresentam teoremas no final da teoria, como tópico adicional. Em relação às definições de ângulos e distâncias sobre os entes geométricos primitivos, todos os livros o fazem no decorrer da teoria, mas poucos apresentam exemplos e exercícios. Sobre a linguagem da teoria dos conjuntos, apenas um livro não a utiliza para representar os entes geométricos e suas características. No tocante às atividades propostas, há uma convergência dos livros didáticos para exercícios do tipo: determinação das posições relativas dos entes geométricos e classificação em verdadeiro ou falso de certas proposições.

4 A PROPOSTA DIDÁTICA

4.1 PLANEJAMENTO

O planejamento inclui elaboração de uma matriz de descritores juntamente com um plano de execução didática. No quadro 7, encontra-se uma lista de trinta e um descritores, que nesta sequência, irão embasar o desenvolvimento do objeto do conhecimento geometria espacial de posição.

Quadro 7 – Matriz de descritores

Matriz de Descritores	
Sequência	**Descritor**
D1	- Explorar intuitivamente o que vem a ser ponto, reta e plano.
D2	- Introduzir o que vem a ser raciocínio lógico dedutivo.
D3	- Apresentar um sistema inicial de axiomas da geometria euclidiana: A1: Determinação da reta; A2: Determinação do plano; A3: Inclusão da reta em um plano;
D4	- Apresentar e demonstrar as outras formas de determinação do plano.
D5	- Determinar as posições relativas de duas retas no espaço.
D6	- Apresentar o axioma de Euclides – A4 (Paralelismo).
D7	- Realizar a construção de duas retas em função de suas posições.
D8	- Determinar as posições relativas entre uma reta e um plano.
D9	- Realizar a construção de uma reta e um plano em função de suas posições.
D10	- Apresentar o axioma da intersecção de dois planos – A5.
D11	- Determinar as posições relativas entre dois planos.
D12	- Realizar a construção de dois planos em função de suas posições.
D13	- Definir projeção ortogonal.
D14	- Apresentar os possíveis ângulos entre duas retas no espaço.
D15	- Definir ortogonalidade entre duas retas.
D16	- Calcular o ângulo entre duas retas reversas.
D17	- Apresentar os possíveis ângulos entre uma reta e um plano.
D18	- Calcular o ângulo entre uma reta e um plano.
D19	- Definir perpendicularismo entre reta e plano.
D20	- Apresentar e demonstrar o Teorema do Pé de Galinha (Perpendicularismo).
D21	- Apresentar os possíveis ângulos entre dois semiplanos.
D22	- Calcular o ângulo entre dois semiplanos.
D23	- Definir perpendicularismo entre dois planos.
D24	- Determinar a condição necessária e suficiente para que dois planos sejam perpendiculares.
D25	- Definir, representar e calcular a distância entre dois pontos.
D26	- Definir, representar e calcular a distância entre ponto e reta.
D27	- Definir, representar e calcular a distância entre ponto e plano.
D28	- Definir, representar e calcular a distância entre duas retas paralelas.
D29	- Definir, representar e calcular a distância entre reta e plano paralelos.
D30	- Definir, representar e calcular a distância entre dois planos paralelos.
D31	- Definir, representar e calcular a distância entre duas retas reversas.

Fonte: do autor

No PED, descrito nos quadros 8 e 9, estão listadas as estratégias para se desenvolver o assunto, bem como o tempo previsto para cada atividade, as competências e habilidades elencadas no PSD e as avaliações a serem realizadas.

Quadro 8 – Plano de execução didática

Plano de Execução Didática **COLÉGIO MILITAR DE SANTA MARIA** **2° TRIMESTRE** **Sequência didática nº 04:** Geometria Espacial de Posição	
SCMB/DEPA	**PLANO DE EXECUÇÃO DIDÁTICA / ANO LETIVO: 2016**
CMSM	**Área:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
COORD **2 º ANO**	**Disciplina:** Matemática **Ano Escolar:** 2º / Ensino Médio

Semana Data	**COMP a serem desenvolvidas**	**HAB a serem trabalhadas**	**Desenvolvimento da Estratégia**	**Tempo previsto**
14ª Sem. 2 a 6 de maio	C10	HM26	- Num primeiro momento, fazer uma reflexão sobre a ideia intuitiva dos entes geométricos: ponto, reta e plano. Serão representados por: alfinetes, jogos de varetas e isopor, entretanto, deixando-se claro que retas e planos se expandem indefinidamente. - Em seguida, fazer menção ao que vem a ser raciocínio lógico dedutivo, através de uma troca de ideias. Fazer referência a axioma ou postulado e teorema. Induzir os alunos a tirarem as primeiras conclusões a partir de proposições conhecidas. - Explorar a construção geométrica tridimensional, utilizando-se de postulados ou teoremas como referência para estas construções. Utilizar constantemente a linguagem dos conjuntos para relacionar os entes geométricos e as operações decorrentes das definições. - Serão objetos de estudo nestes primeiros dois tempos os descritores de 1 a 12. - Será entregue uma lista com 7 exercícios, visando trabalhar o raciocínio lógico dedutivo, construções geométricas básicas e visualização tridimensional.	2T
			- Realização da lista de exercícios.	2T
	AVALIAÇÃO		- 1ª Formativa: acompanhamento da resolução da lista de exercícios, levantando as dificuldades encontradas para realizar a tarefa.	

Fonte: do autor

Quadro 9 – Plano de execução didática: continuação

Semana Data	COMP a serem desenvolvidas	HAB a serem trabalhadas	Desenvolvimento da Estratégia	Tempo previsto
15ª Sem. 9 a 13 de maio	C10	HM26	- Estes dois tempos de aula serão no laboratório de informática, onde os alunos deverão realizar algumas construções geométricas baseadas nas definições e construções apresentadas nas aulas anteriores. O *software* a ser utilizado é o *geogebra* 5.0, de maneira a se usar a janela 3D. Um exemplo será realizado pelo professor e as demais atividades propostas deverão ser executadas em duplas pelos alunos.	2T
	AVALIAÇÃO		- 2ª Formativa: através da observação das construções geométricas realizadas no laboratório de informática.	
			- Somativa em duplas: realização de atividades de construção geométrica tridimensional no laboratório de informática.	1T
	C10	HM26	- Neste período, serão apresentados através de uma aula expositiva os conceitos de projeção ortogonal, onde o objetivo é o entendimento sobre os ângulos entre entes geométricos primitivos, o perpendicularismo e as condições para que aconteça. - Serão resolvidos exemplos envolvendo o cálculo do ângulo entre os entes geométricos. - Serão objetos de estudo os descritores de 12 a 24.	1T
16ª Sem. 16 a 20 de maio	C10	HM26	- Estes três períodos serão destinados a uma aula expositiva com foco no cálculo de distâncias entre os entes geométricos primitivos. Será dada a ênfase para o cálculo da distância entre duas retas reversas bem como a construção do segmento perpendicular comum. - Serão resolvidos exemplos envolvendo o cálculo de distância entre os entes geométricos. - Serão objetos de estudo os descritores de 25 a 31.	3T
	AVALIAÇÃO		- Somativa individual: realização de uma prova contendo quatro exercícios, com o objetivo de avaliar os seguintes pontos: raciocínio lógico dedutivo; visualização tridimensional; e cálculo de ângulos e distâncias.	1T

Fonte: do autor

4.2 NOTAS DE AULA

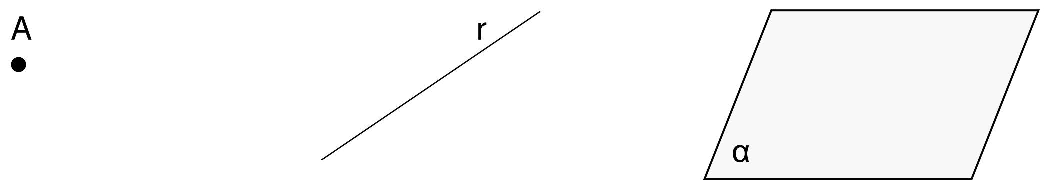
Na sequência estão descritas as notas de aula sobre geometria espacial de posição. Nessas notas encontram-se a teoria desenvolvida, as atividades propostas, o trabalho realizado no laboratório e alguns modelos geométricos utilizados e confeccionados com material concreto.

4.2.1 Geometria Espacial de Posição – Conceitos Iniciais

4.2.1.1 Introdução

Pontos, retas e planos são entes geométricos primitivos, adotados sem definição. Serão assim representados:

Figura 4 – Entes primitivos



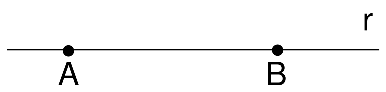
Fonte: do autor

Pontos serão representados por letras latinas maiúsculas.
Retas serão representadas por letras latinas minúsculas.
Planos serão representados por letras gregas minúsculas

4.2.1.2 Primeiros Axiomas

A1) Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

Figura 5 – Reta determinada por dois pontos distintos

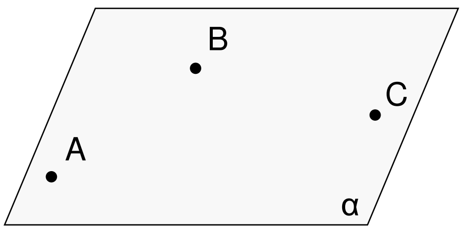


$r = \overleftrightarrow{AB}$

Fonte: do autor

A2) Três pontos distintos e não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Figura 6 – Plano determinado por três pontos não colineares

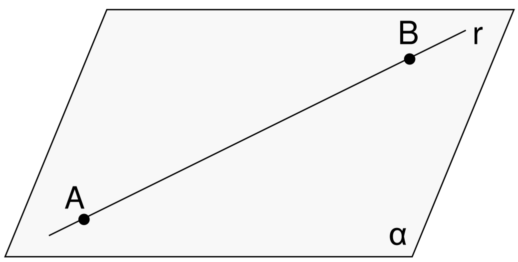


$\alpha = pl\ (ABC)$

Fonte: do autor

A3) Se uma reta contém dois de seus pontos distintos em um plano, então a reta está contida no plano.

Figura 7 – Inclusão da reta no plano



$A, B \in r$

$A, B \in \alpha$

$\Rightarrow r \subset \alpha$

Fonte: do autor

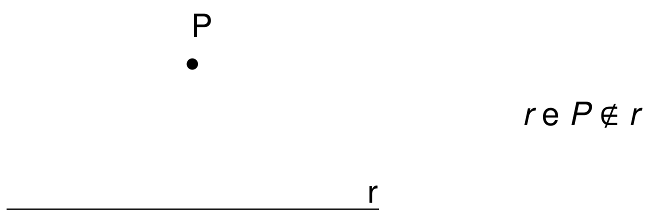
4.2.1.3 Outras formas de determinação de um plano

Teorema 1 (T1): Uma reta e um ponto não pertencente a ela determinam um único plano que os contém.

Demonstração:

Tomemos uma reta *r* e um ponto *P* que não pertence a *r*.

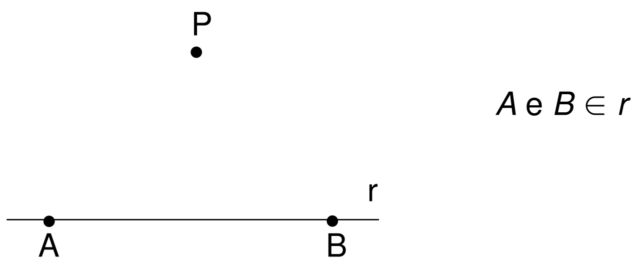
Figura 8 – Demonstração: primeira construção



Fonte: do autor

Tomemos dois pontos *A* e *B* distintos sobre *r*.

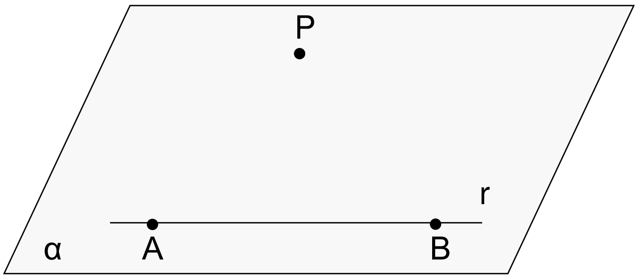
Figura 9 – Demonstração: segunda construção



Fonte: do autor

Por A2, sabemos que três pontos distintos e não colineares determinam um único plano que passa por eles. Denotamos este plano por *α*.

Figura 10 – Demonstração: construção final



$\alpha = pl\ (ABP) = pl\ (r,P)$

Fonte: do autor

Por A3, sabemos que uma reta que contém dois de seus pontos em um plano está contida no plano. Portanto, a reta *r* e o ponto *P* determinam um único plano que os contém.

Teorema 2 (T2): duas retas paralelas determinam um único plano que as contém.
Teorema 3 (T3): duas retas concorrentes determinam um único plano que as contém.
A demonstração destes teoremas será objeto de exercício.

4.2.1.4 Posições relativas entre duas retas distintas no espaço

Em relação ao número de pontos em comum de duas retas distintas no espaço, podem ocorrer duas situações:

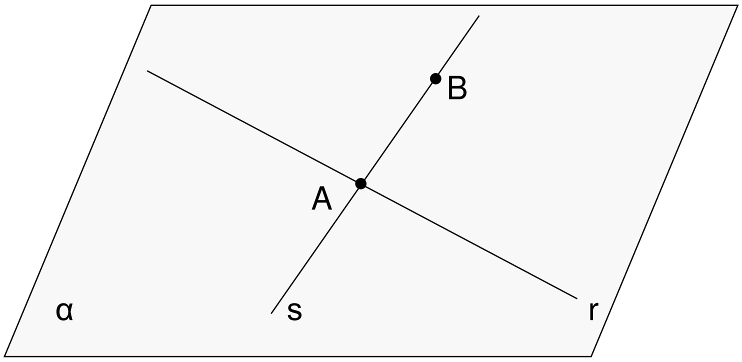
a) <u>As retas possuem um ponto de intersecção - retas concorrentes</u>

Definição: retas coplanares que se intersectam em um único ponto.

Construção

1) Tomemos uma reta *r*;
2) Sobre *r* marquemos um ponto *A*;
3) Tomemos um ponto *B* não pertencente a *r*;
4) Por A1, temos uma única reta que passa por *A* e *B*, denotemos por *s*.

Figura 11 – Retas concorrentes



$r, s \subset \alpha$

$r \cap s = \{A\}$

r e *s* são concorrentes

Fonte: do autor

b) *<u>As retas não possuem nenhum ponto de intersecção</u>*

Neste caso, especificamente em geometria espacial, temos dois casos:

b.1) *<u>Retas paralelas</u>*

Definição: são retas coplanares que não possuem nenhum ponto em comum.

Construção

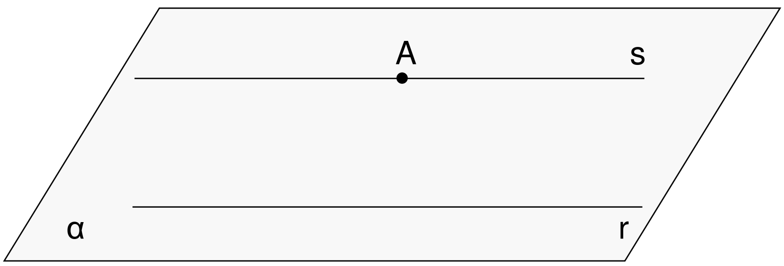
A4) Axioma de Euclides: por um ponto fora de uma reta dada, passa uma única outra reta paralela à reta dada.

1) Tomemos uma reta *r*;

2) Tomemos um ponto *A* fora de *r*;

3) Por A4, temos uma única reta passando por *A* e paralela a *r*, denotada por *s.*

Figura 12 – Retas paralelas



$r, s \subset \alpha$

$r \cap s = \emptyset$

$r \,//\, s$

Fonte: do autor

b.2) <u>*Retas reversas*</u>

Definição: retas que não possuem nenhum plano que as contenha simultaneamente.

Construção

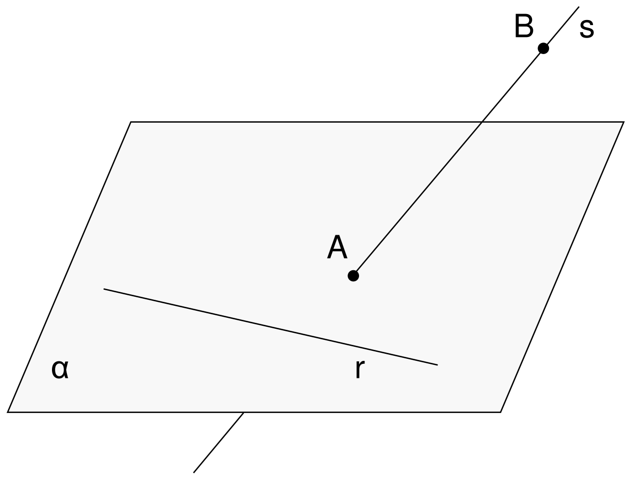
1) Tomemos um plano *α* e uma reta *r* contida neste plano*;*

2) Tomemos uma ponto *A* pertencente a *α* e não pertencente a *r*;

3) Tomemos um ponto *B* não pertencente a *α;*

4) Por *A* e *B* tracemos uma reta *s* que intersecta *α* em *A*. As retas *r* e *s* são ditas reversas.

Figura 13 – Retas reversas



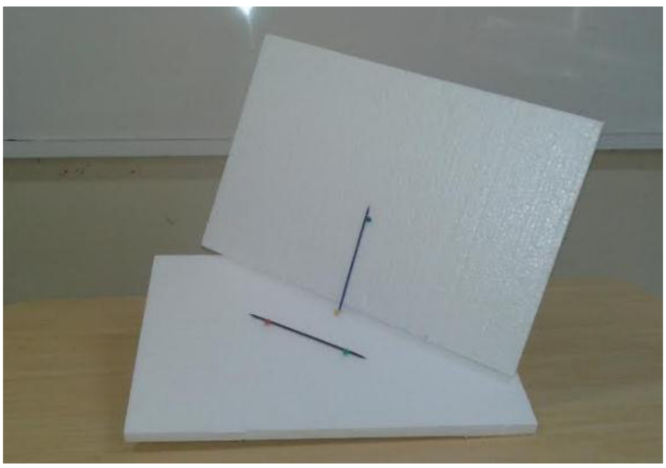
$r \cap s = \emptyset$

r e *s* são não coplanares

r e *s* são reversas

Fonte: do autor

Figura 14 – Representação das retas reversas: material concreto



Fonte: do autor

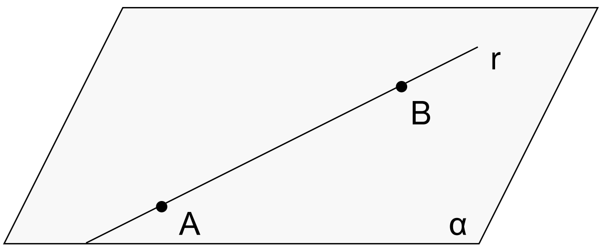
Além da construção, podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 4 (T4): não existe nenhum plano comum que contenha duas retas reversas.
Demonstração:
Suponhamos que exista um plano que contenha as retas *r* e *s*, logo, este plano contém a reta *r* e o ponto *A*, pois *A* pertence a *s*. Entretanto, este plano é exatamente o plano *α* que, por sua vez, não contém o ponto *B*, construído fora de *α*. Logo, conclui-se que não existe um plano comum que contenha as retas *r* e *s*.

4.2.1.5 Posições relativas entre uma reta e um plano no espaço

Neste caso, existem três possibilidades:
a) <u>*Reta contida no plano*</u>
Definição: uma reta está contida em um plano quando todos os pontos da mesma pertencem ao plano.
Construção:
Observação: uma condição suficiente para que uma reta esteja contida em um plano é possuir dois de seus pontos neste plano.
1) Tomemos um plano *α*;
2) Tomemos dois pontos *A* e *B* pertencentes a *α*;
3) Por *A* e *B* construímos uma reta *r*, usando A1;
4) E por *A3*, sabemos que *r* está contida em *α*.

Figura 15 – Reta contida no plano



$A, B \in \alpha$

$r = \overleftrightarrow{AB}$

$r \subset \alpha$

Fonte: do autor

b) <u>Reta secante ao plano</u>

Definição: quando a reta possui apenas um ponto de intersecção com o plano.

Construção:

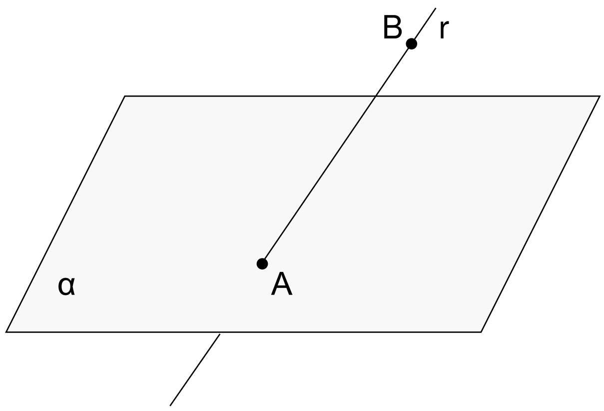
1) Tomemos um plano *α*;

2) Tomemos um ponto *A* pertencente a *α*;

3) Tomemos um ponto *B* não pertencente a *α*;

4) Por *A* e *B* construímos uma reta *r,* usando A1.

Figura 16 – Reta secante ao plano



$A \in \alpha$; $B \notin \alpha$

$r = \overleftrightarrow{AB}$

$r \cap \alpha = \{A\}$

r é secante a *α*

Fonte: do autor

c) <u>Reta paralela ao plano</u>

Definição: quando reta e plano não têm pontos de intersecção.

Construção:

1) Tomemos um plano *α;*

2) Tomemos uma reta *r* contida em *α*;

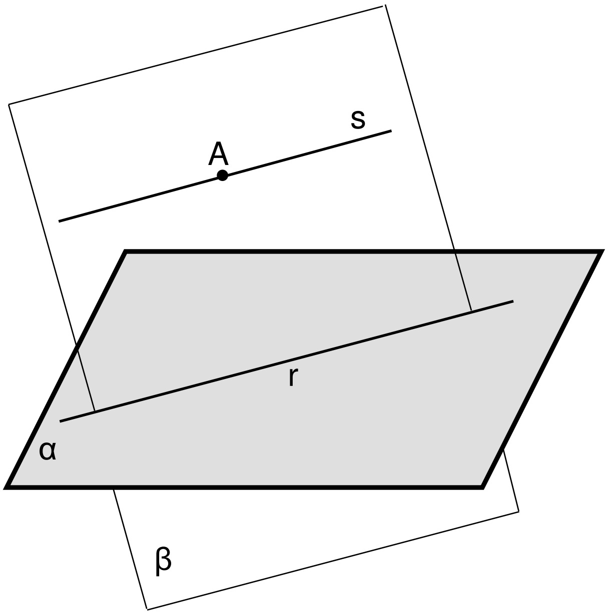
3) Tomemos um ponto *A* não pertencente a *α;*

4) Por T1, construímos um plano *β* determinado por *r* e *A*;

Observação: uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja paralela a um plano é que seja paralela a uma reta contida neste plano.

5) Por A4, sabemos que por *A* passa uma única reta paralela a *r*, que chamaremos de *s.* Esta reta *s*, como é paralela a *r*, está contida em *β* e será paralela ao plano *α,* que contém *r.*

Figura 17 – Reta paralela ao plano



$r \subset \alpha$

$A \notin \alpha$

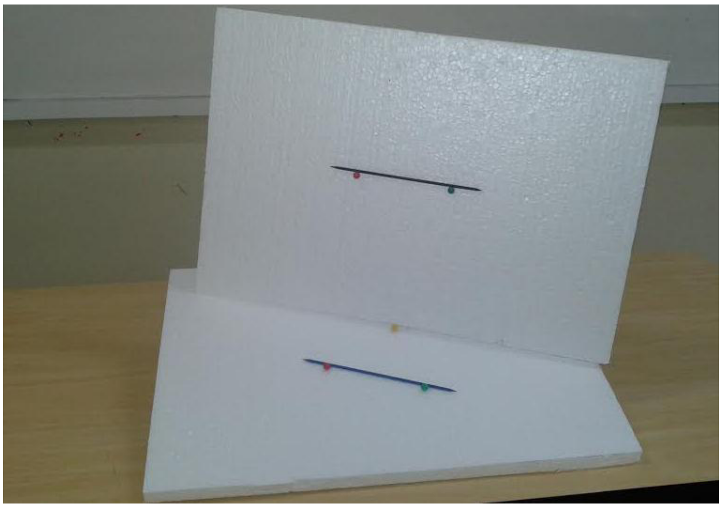
$\beta = pl\ (rA)$

$s \subset \beta$

$s \mathbin{/\!/} r \Rightarrow s \mathbin{/\!/} \alpha$

Fonte: do autor

Figura 18 – Representação da reta paralela ao plano: material concreto



Fonte: do autor

4.2.1.6 Posições relativas entre dois planos distintos

Neste caso, existem duas possibilidades:

a) *Planos secantes*

Definição: dois planos que se intersectam segundo uma única reta.

A5) Se dois planos têm um ponto em comum, então eles têm uma reta em comum.

Construção:

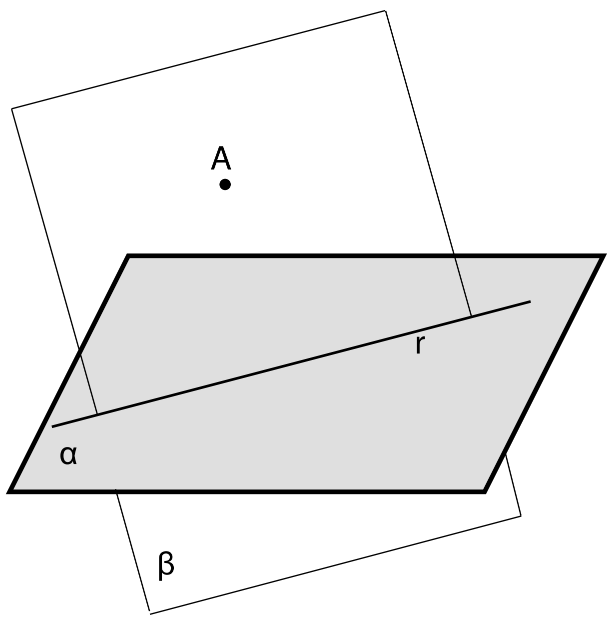
1) Tomemos um plano *α;*

2) Tomemos uma reta *r* contida em *α*;

3) Tomemos um ponto *A* não pertencente a *α;*

4) Por T1, construímos um plano *β* que será secante a *α.*

Figura 19 – Planos secantes



$r \subset \alpha$

$A \notin \alpha$

$\beta = pl\ (rA)$

$\alpha \cap \beta = r$

β é secante a *α*

Fonte: do autor

b) *Planos paralelos*

Definição: dois planos são paralelos se não possuem nenhum ponto em comum.

Construção:

1) Tomemos um plano *α;*

2) Tomemos duas retas *r* e *s* contidas em *α* e concorrentes em *P;*

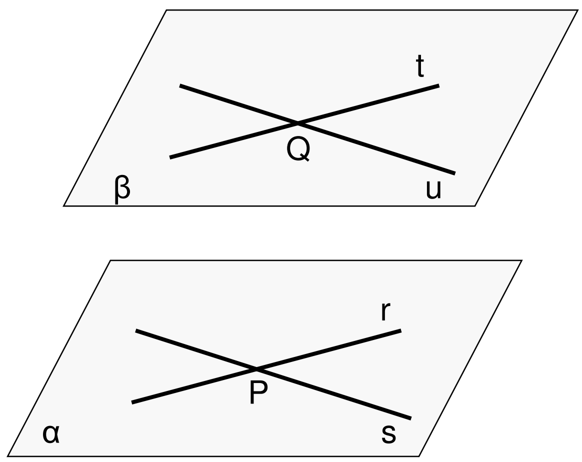
3) Tomemos um ponto *Q* não pertencente a *α;*

4) Pelo ponto *Q*, tracemos duas retas *t* e *u* paralelas a *r* e *s*, respectivamente;

Observação: uma condição necessária e suficiente para que dois planos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas concorrentes, ambas paralelas ao outro.

5) Por T3, as retas *t* e *u* determinam um único plano, denotado por *β,* e este plano é paralelo ao plano *α.*

Figura 20 – Planos paralelos



$r, s \subset \alpha$

$r \cap s = \{P\}$

$Q \notin \alpha$

$t \cap u = \{Q\}$

$t \,//\, r$ e $u \,//\, s$

$\beta = pl\,(t,u)$

$\beta \,//\, \alpha$

Fonte: do autor

4.2.1.7 Exercícios

1. Demonstre o teorema 2 (T2): duas retas paralelas determinam um único plano que as contém.

2. Demonstre o teorema 3 (T3): duas retas concorrentes determinam um único plano que as contém.

3. Demonstre que num plano existem infinitas retas.

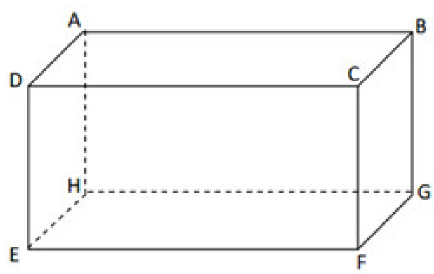
4. Prove que duas retas paralelas distintas e uma concorrente com as duas são coplanares.

5. Demonstre o seguinte teorema: se dois planos α e β são paralelos, então toda reta r contida em α é paralela a β.

6. Prove que três retas, duas a duas concorrentes e que não passam por um mesmo ponto, estão contidas em um mesmo plano.

7. Para cada um dos subitens a seguir, copie em seu caderno o paralelepípedo retângulo representado abaixo. Em seguida, desenhe no paralelepípedo um triângulo contido no plano determinado pelos entes primitivos de cada subitem.

Figura 21 – Paralelepípedo ABCDEFGH



Fonte: do autor

a) Pelos pontos *A*, *B* e *C;*
b) Pelas retas suporte de $\overline{DB}$ e $\overline{EG}$;
c) Pelas retas suporte de $\overline{\text{BF}}$ e $\overline{\text{CG}}$;
d) Pela reta que dá suporte a $\overline{AB}$ e o ponto *F*.

4.2.2 Geometria Espacial de Posição – Construções tridimensionais: laboratório de informática

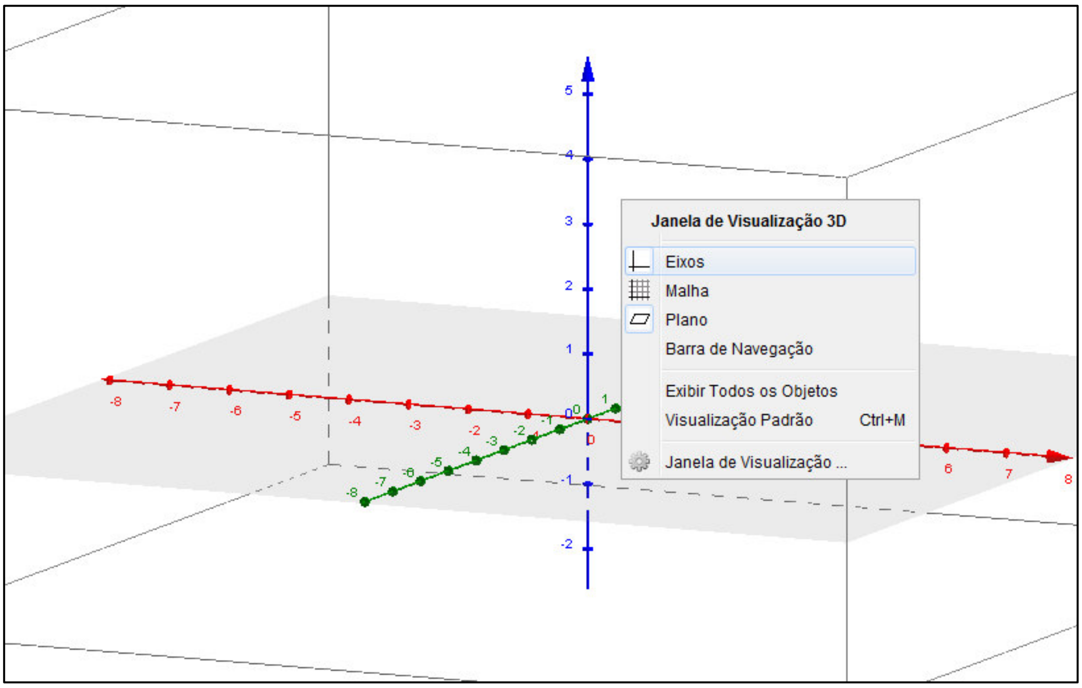
Esta etapa do desenvolvimento da proposta didática tem por finalidade realizar construções geométricas tridimensionais. As mesmas construções foram realizadas “com lápis e papel” por ocasião da teoria anteriormente apresentada, entretanto, a utilização do *software* permitirá a manipulação das figuras e uma visualização 3D mais apropriada.

4.2.2.1 Exemplo resolvido

<u>Construção de duas retas reversas.</u>

Procedimento 1: na opção “janela de visualização 3D”, desabilite os eixos.

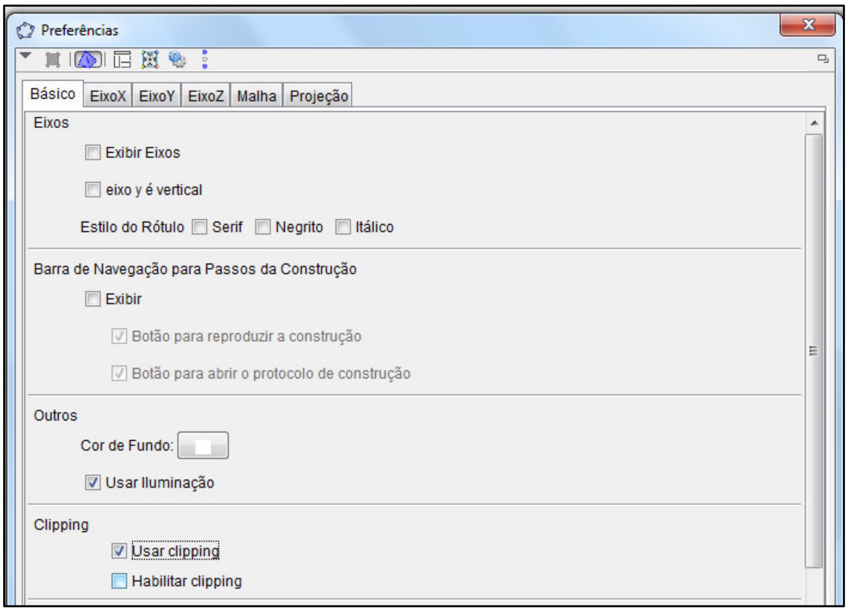
Figura 22 – Desabilitação de eixos



Fonte: do autor

Procedimento 2: na opção “Preferências” desabilite o *clipping.*

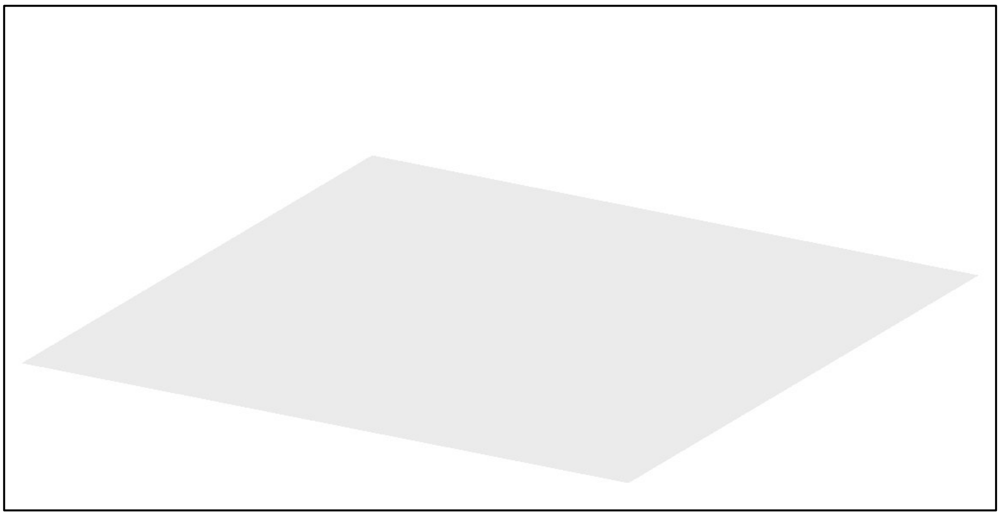
Figura 23 – Desabilitação do *clipping*



Fonte: do autor

Procedimento 3: tome como plano base o plano que permaneceu na janela 3D.

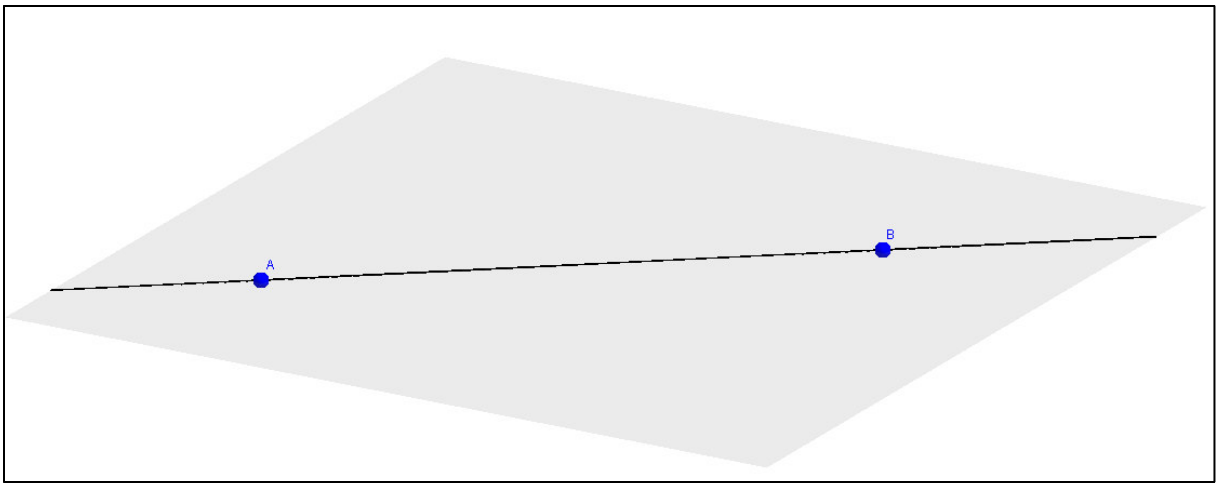
Figura 24 – Plano base



Fonte: do autor

Procedimento 4: construa uma reta sobre o plano base.

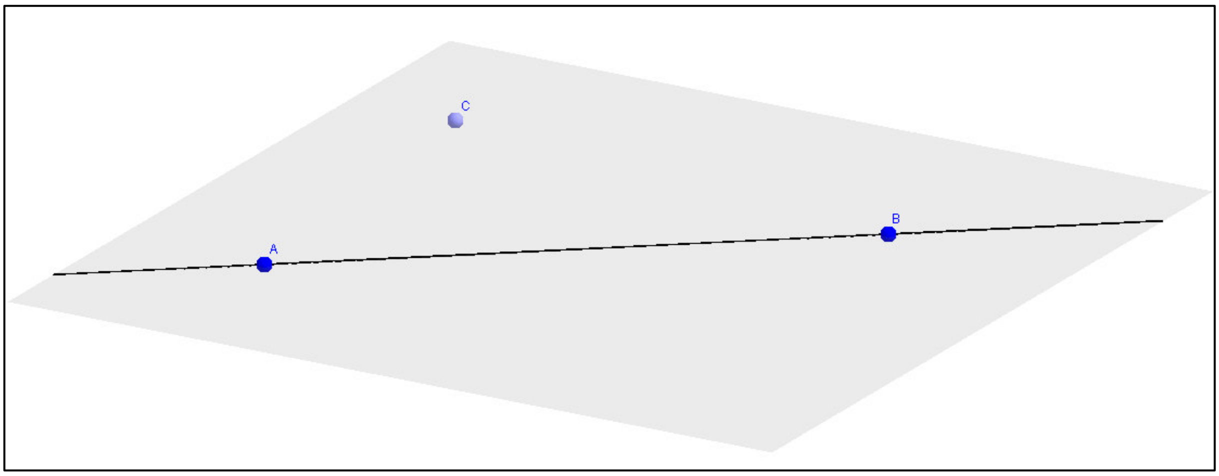
Figura 25 – Construção de uma reta sobre o plano



Fonte: do autor

Procedimento 5: construa um ponto sobre o plano base não pertencente a reta contida no plano.

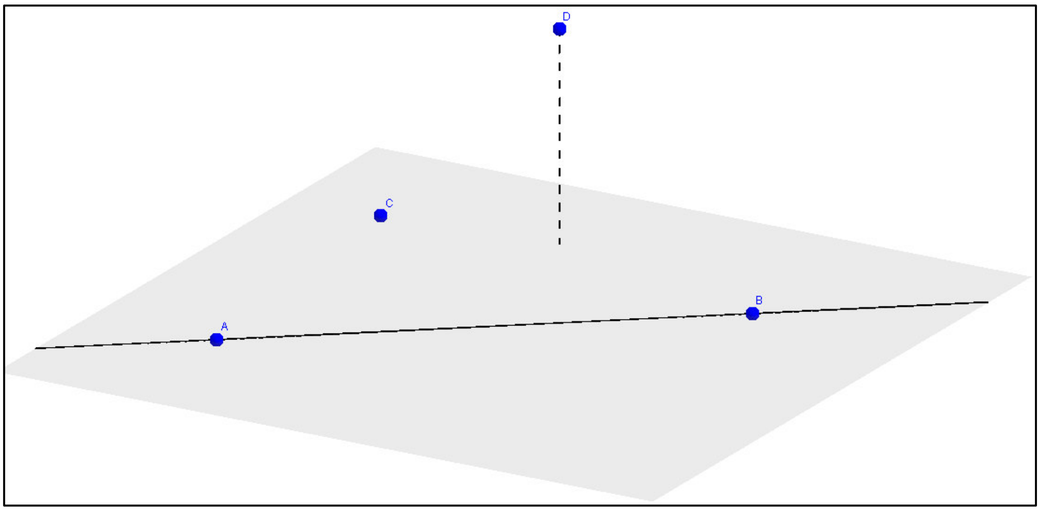
Figura 26 – Construção de um ponto fora da reta



Fonte: do autor

Procedimento 6: construa um ponto fora do plano base. Para construir um ponto fora do plano base, construa-o sobre o plano e arraste para uma posição que o faça não pertencer a este plano.

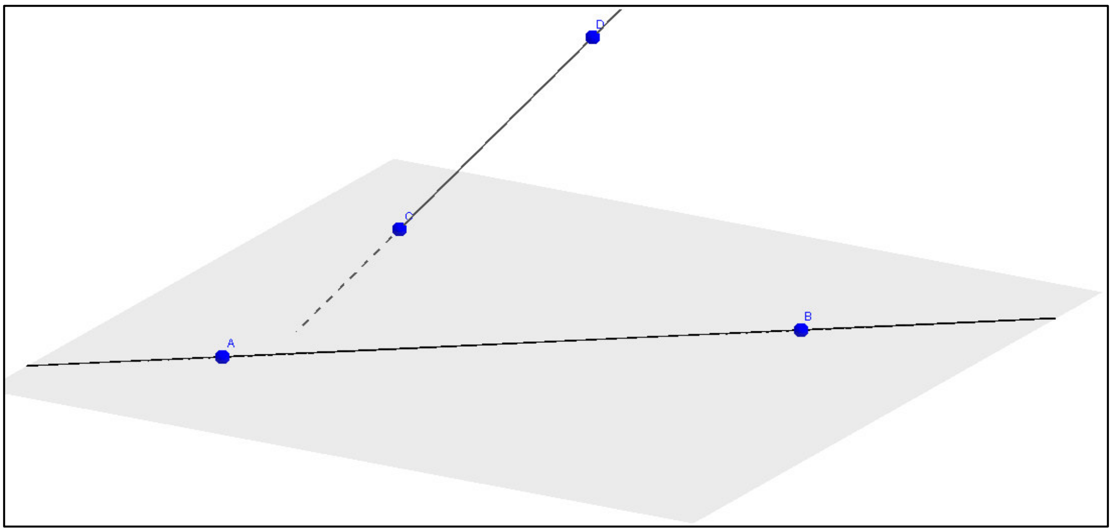
Figura 27 – Construção de um ponto fora do plano



Fonte: do autor

Procedimento 7: construa uma reta passando pelos dois últimos pontos construídos.

Figura 28 – Construção da reta reversa à primeira



Fonte: do autor

4.2.2.2 Atividades propostas

Em duplas, realize as construções geométricas tridimensionais abaixo relacionadas, utilizando o *Geogebra* 5.0.

1. Construa duas retas paralelas.

2. Construa duas retas concorrentes.

3. Construa uma reta paralela a um plano.

4. Construa uma reta secante a um plano.

5. Construa dois planos secantes.

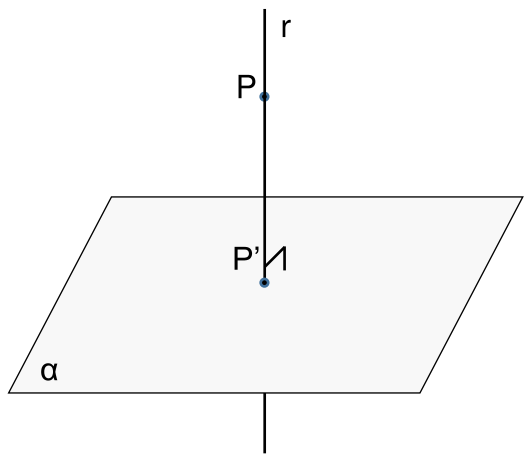
6. Construa dois planos paralelos.

4.2.3 Geometria Espacial de Posição – Ângulos e Distâncias

4.2.3.1 Projeções Ortogonais

Projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é a intersecção do plano com a reta perpendicular a ele, conduzida pelo ponto *P.*

Figura 29 – Projeção de um ponto sobre um plano



$P \notin \alpha$

$P \in r$

$r \perp \alpha$

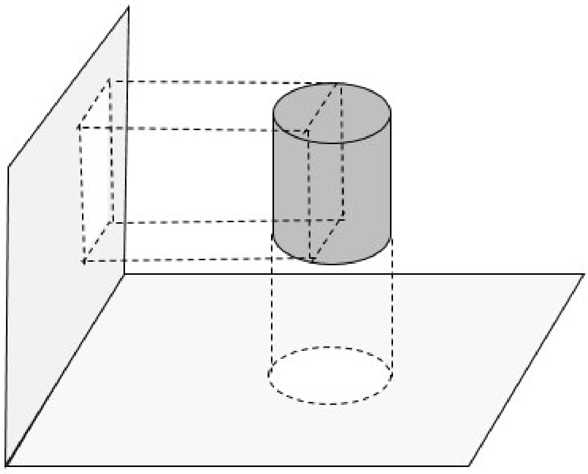
$r \cap \alpha = \{P'\}$

$P' = proj_{\alpha} P$

Fonte: do autor

Projeção Ortogonal de uma figura sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da figura sobre o plano.

Figura 30 – Projeção de uma figura sobre um plano



Na figura ao lado, a projeção ortogonal do cilindro em relação ao plano horizontal é um círculo de mesma medida que o círculo da base do cilindro e a projeção ortogonal em relação ao plano vertical é um retângulo de mesma medida que a seção meridiana do cilindro.

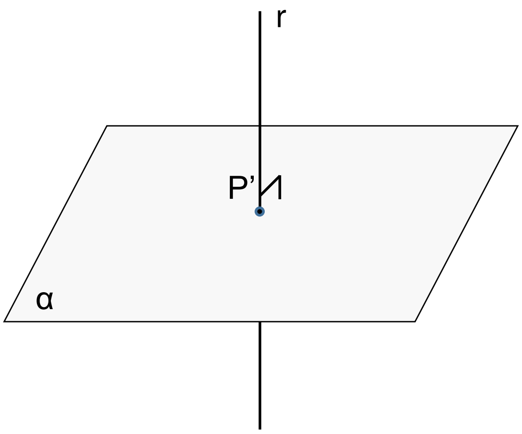
Fonte: do autor

Projeção Ortogonal de uma reta sobre um plano: temos que considerar dois casos:

a) <u>A reta ser perpendicular ao plano</u>

A projeção é o ponto de intersecção da reta com o plano, denominado pé da perpendicular.

Figura 31 – Projeção de uma reta perpendicular a um plano



$r \perp \alpha$

$r \cap \alpha = P'$

$P' = proj_{\alpha}\, r$

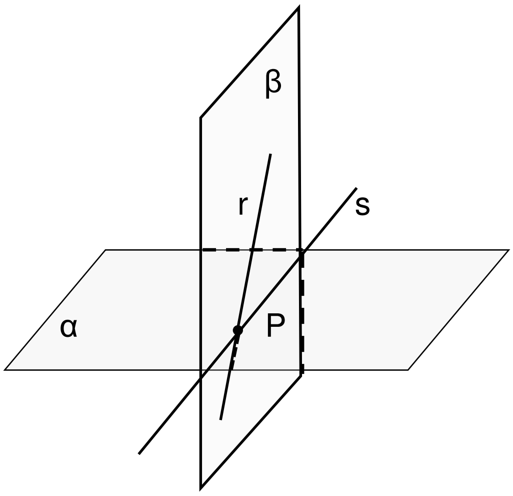
Fonte: do autor

b) <u>A reta não ser perpendicular ao plano</u>

A projeção da reta sobre o plano é a intersecção deste plano com um outro plano, perpendicular ao primeiro, conduzido pela reta.

Figura 32 – Projeção de uma reta oblíqua a um plano

.



$r \subset \beta$

$\beta \perp \alpha$

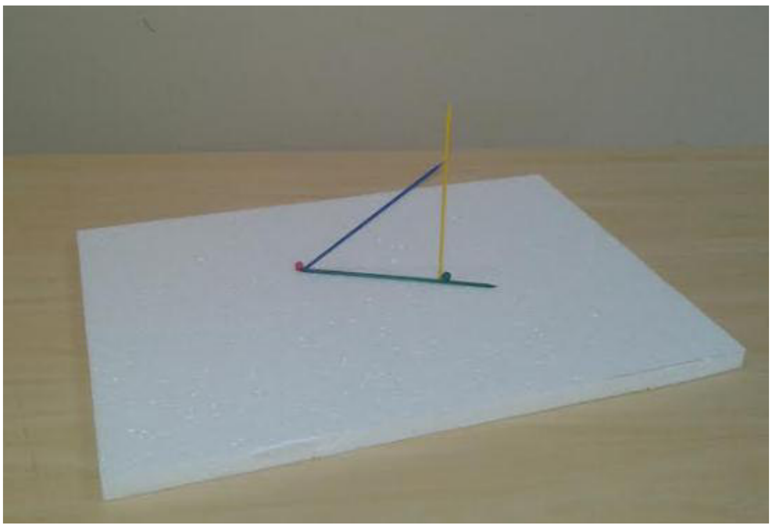
$\beta \cap \alpha = s$

$r \cap \alpha = P$

$s = proj_{\alpha}\, r$

Fonte: do autor

Figura 33 – Representação da projeção ortogonal de uma reta sobre um plano: material concreto



Fonte: do autor

4.2.3.2 Ângulo entre duas retas no espaço

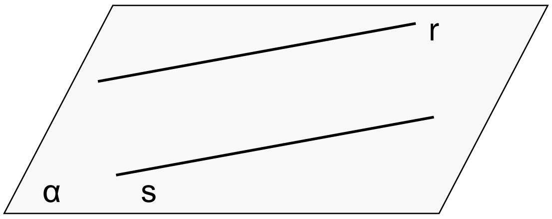
Retas coplanares

Temos dois casos a considerar:

a) <u>Retas paralelas</u>

O ângulo formado é nulo, ou seja, tem medida igual a zero.

Figura 34 – Ângulo entre duas retas paralelas



$r, s \subset \alpha$

$r \,//\, s$

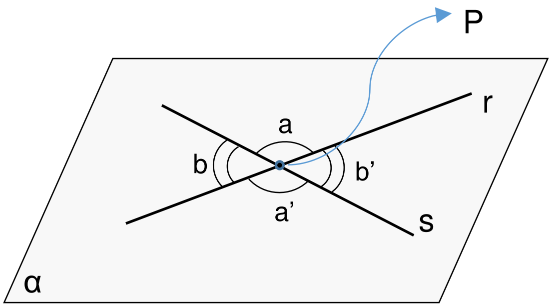
$m(\measuredangle(r,s)) = 0$

Fonte: do autor

b) <u>Retas concorrentes</u>

São demarcados quatro ângulos, dois a dois congruentes, e definimos o ângulo entre elas como sendo o menor dos ângulos.

Figura 35 – Ângulo entre duas retas concorrentes



$r, s \subset \alpha$ e $r \cap s = P$

$\measuredangle a \equiv \measuredangle a'$

$\measuredangle b \equiv \measuredangle b'$

Se $m(\measuredangle b) \leq m(\measuredangle a)$

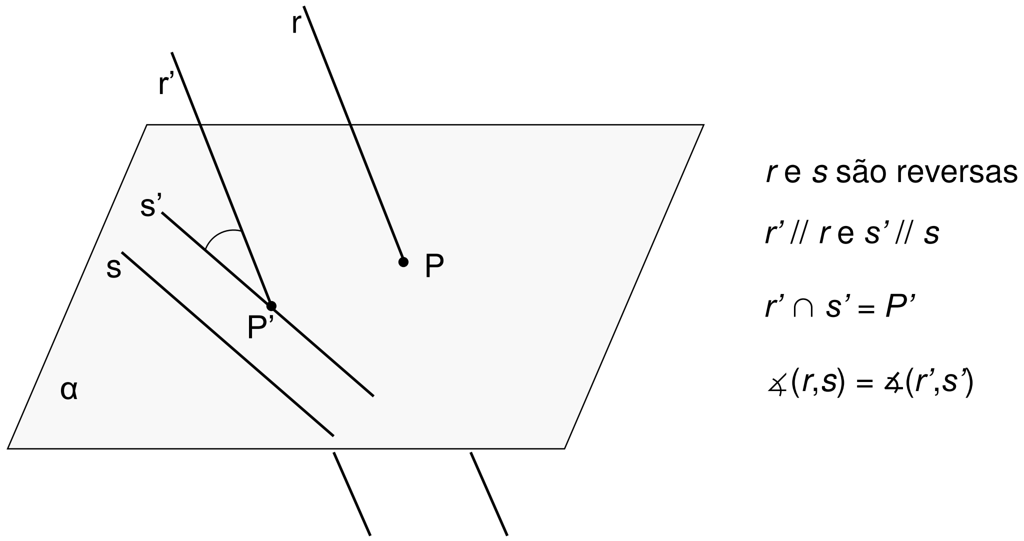
$\Rightarrow \measuredangle(r,s) = \measuredangle b$

Fonte: do autor

Retas reversas

Definição: o ângulo entre duas retas reversas *r* e *s* é o ângulo formado por duas retas *r'* e *s'* concorrentes e respectivamente paralelas às retas *r* e *s.*

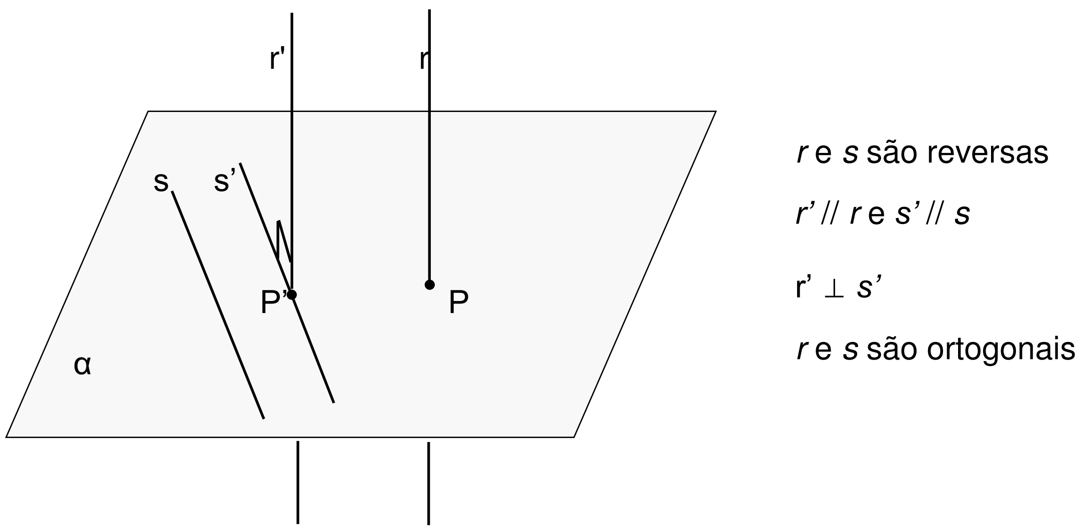
Figura 36 – Ângulo entre duas retas reversas



Fonte: do autor

No caso das retas *r'* e *s'* formarem um ângulo reto (90º), as retas *r* e *s* são ditas *ortogonais*.

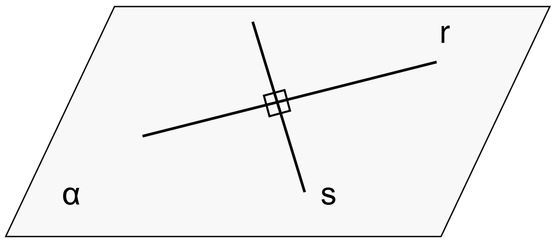
Figura 37 – Retas ortogonais



Fonte: do autor

Uma condição particular de ortogonalidade ocorre quando duas retas são concorrentes e formam quatro ângulos retos. Ou seja, retas perpendiculares são um caso específico de ortogonalidade.

Figura 38 – Retas perpendiculares



$r \perp s$

r e *s* são ortogonais ou ainda, *r* e *s* são perpendiculares.

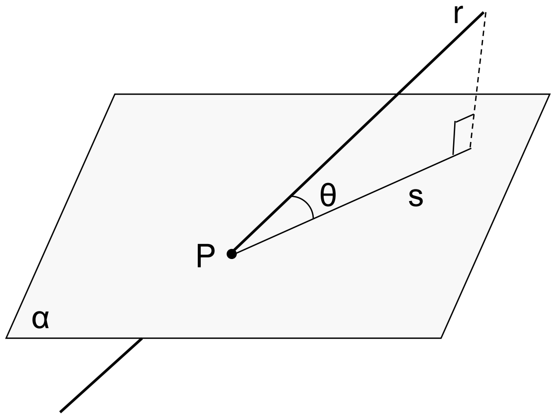
Fonte: do autor

Assim, todas as retas perpendiculares são ortogonais, mas nem todas retas ortogonais são perpendiculares.

4.2.3.3 Ângulo entre uma reta e um plano

Definição: é o ângulo que a reta forma com sua projeção no plano.

Figura 39 – Ângulo entre reta e plano



$r \cap \alpha = P$

$s = proj_{\alpha}\, r$

$\measuredangle(r,\alpha) = \theta = \measuredangle(r,s)$

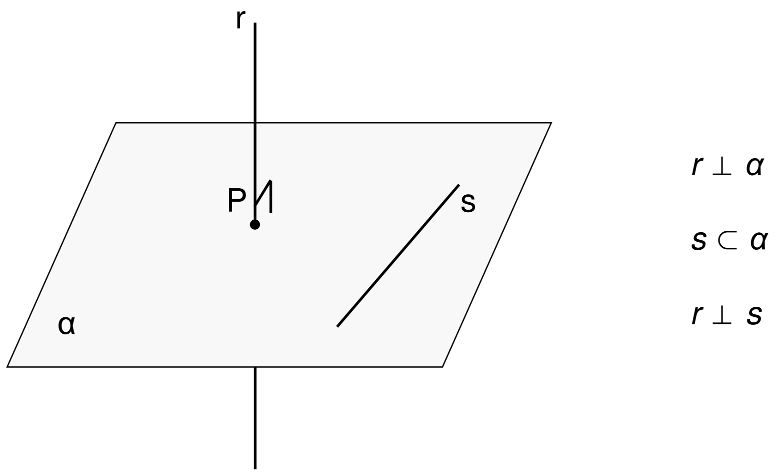
Se $\theta = 90^{\circ}$, *r* é perpendicular ao plano.

Fonte: do autor

4.2.3.4 Perpendicularismo entre reta e plano

Se uma reta é perpendicular a um plano, ela é ortogonal a todas as retas desse plano.

Figura 40 – Reta perpendicular a um plano



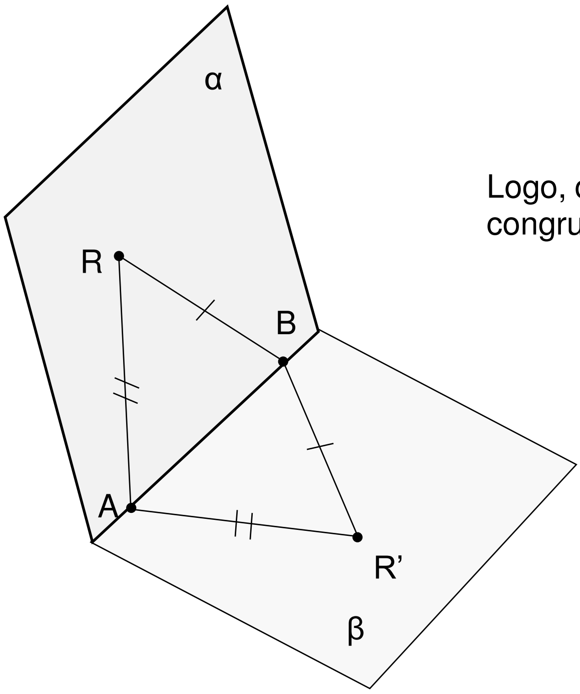
Fonte: do autor

4.2.3.5 Teorema do Pé-de-Galinha (T5)

Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, ela é perpendicular a este plano. Antes de fazer a demonstração do teorema, precisamos do seguinte resultado.

Lema: se dois pontos *A* e *B* equidistam de dois pontos *R* e *R'*, respectivamente, então qualquer ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$ equidista de *R* e *R'*.
Demonstração
Supondo que dois pontos *A* e *B* equidistem de dois pontos *R* e *R'*, conforme a figura 41.

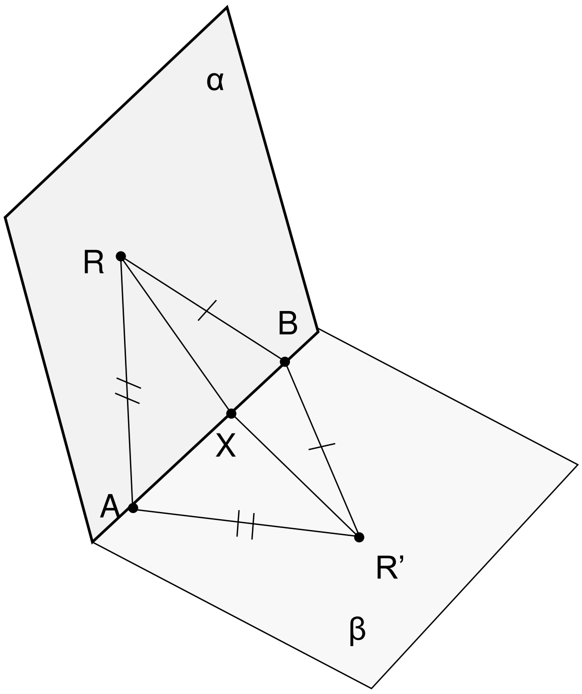
Figura 41 – Lema: primeira parte



Logo, os triângulos *ABR* e *ABR'* são congruentes por LLL e *BÂR* ≡ *BÂR'*.

Fonte: do autor

Figura 42 – Lema: segunda parte

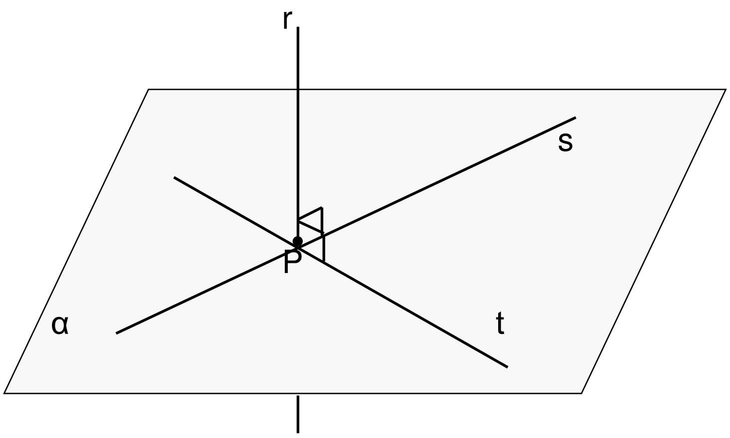


Assim, se tomarmos arbitrariamente um ponto *X* pertencente a $\overleftrightarrow{AB}$, teremos *XÂR* ≡ *XÂR'* e os triângulos *AXR* e *AXR'* congruentes por *LAL*. Desta forma, $\overline{XR} \equiv \overline{XR'}$, o que prova que *X* equidista de *R* e *R'*.

Fonte: do autor

4.2.3.6 Demonstração do Teorema do Pé-de-Galinha

Figura 43 – Demonstração: construção inicial



$s, t \subset \alpha$

$s \cap t = P$

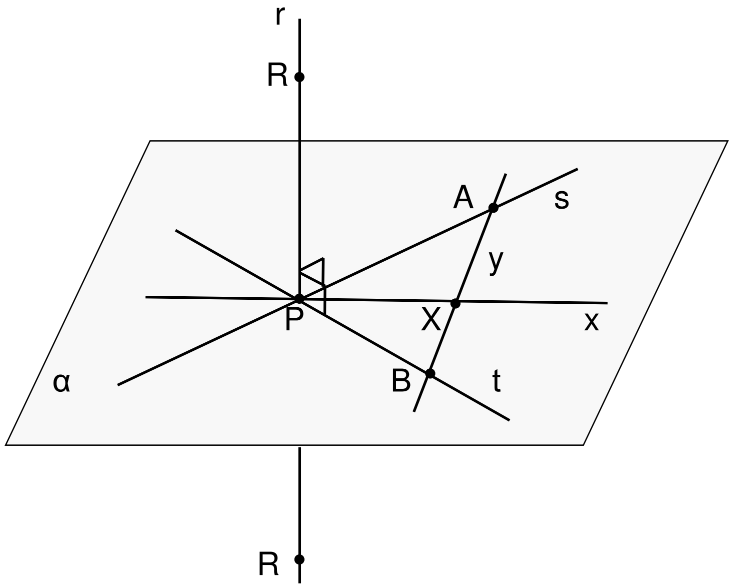
$r \perp s$

$r \perp t$

Fonte: do autor

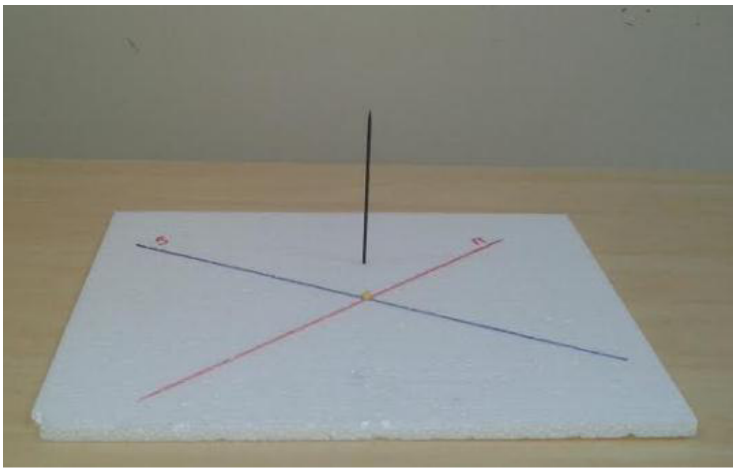
Hipótese: a reta *r* é ortogonal a duas retas *s* e *t* concorrentes e contidas no plano *α*.
O que queremos provar é que *r* é perpendicular a *α*. Faremos isso, provando que *r* é ortogonal a qualquer reta contida em *α.*
Tomemos uma reta genérica *x*, passando por *P*.
Tomemos sobre *r*, dois pontos *R* e *R'* simétricos em relação a *P*.
Tomemos uma reta *y*, contida no plano *α,* passando pelas retas *s*, *x* e *t,* com intersecções em *A*, *X* e *B*, respectivamente.
As retas *s* e *t* são mediatrizes do segmento $\overline{RR'}$, pois passam por *P,* que é seu ponto médio e são perpendiculares a reta *r*, suporte de $\overline{RR'}$. Como qualquer ponto de uma mediatriz equidista das extremidades do segmento, tem-se que: $\overline{RA} \equiv \overline{R'A}$ e $\overline{RB} \equiv \overline{R'B}$
Como *A* e *B* equidistam de *R* e *R'*, qualquer ponto do segmento $\overline{AB}$ equidista também de *R* e *R'.* Logo, o ponto *X* é equidistante de *R* e *R'*, assim, *x* também é mediatriz do segmento $\overline{RR'}$, ou seja, *r* e *x* são perpendiculares.
Como *r* é perpendicular a uma reta *x* qualquer contida no plano *α*, *r* é perpendicular a *α*, conforme queríamos demonstrar.

Figura 44 – Demonstração: construção final



Fonte: do autor

Figura 45 – Representação do Teorema do Pé-de-Galinha: material concreto

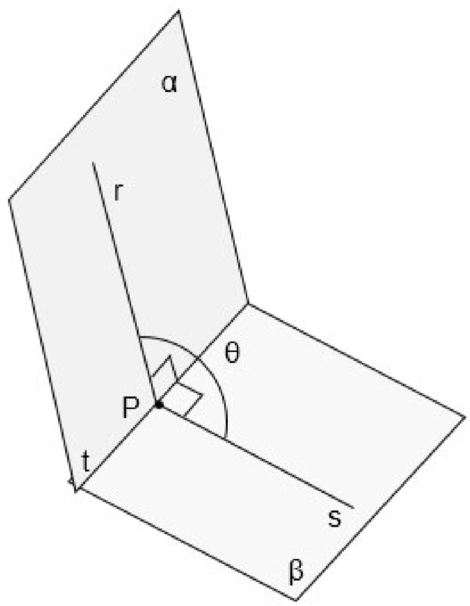


Fonte: do autor

4.2.3.7 Ângulo entre dois semiplanos

Definição: é o ângulo formado por duas semirretas, cada uma contida em um dos semiplanos e ambas perpendiculares a intersecção dos mesmos.

Figura 46 – Ângulo entre dois semiplanos



$\alpha \cap \beta = t$

$r \subset \alpha$ e $r \perp t$

$s \subset \beta$ e $s \perp t$

$s \cap r = P$

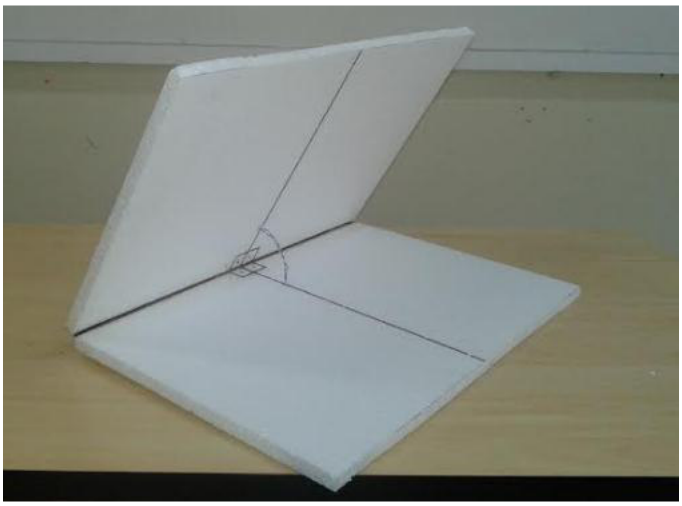
$\theta = \measuredangle(\alpha,\beta) = \measuredangle\,(r,s)$

Se $\theta = 90^{\circ}$, então os planos α e β são perpendiculares.

Observação: não será objeto de demonstração, mas uma condição necessária e suficiente para que dois planos secantes sejam perpendiculares é que toda reta de um deles, perpendicular à intersecção, seja perpendicular ao outro.

Fonte: do autor

Figura 47 – Representação do ângulo entre dois semiplanos: material concreto

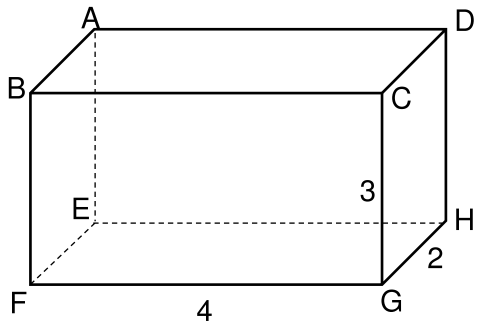


Fonte: do autor

4.2.3.8 Exercícios

1. Dado o paralelepípedo retângulo da figura abaixo, com as medidas indicadas em cm, dê o que se pede:

Figura 48 – Paralelepípedo ABCDEFGH



Fonte: do autor

a) A tangente do ângulo entre $\overleftrightarrow{FC}$ e $\overleftrightarrow{FG}$;

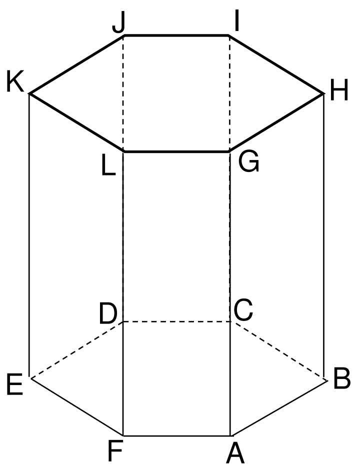
b) O seno do ângulo entre $\overleftrightarrow{GD}$ e $\overleftrightarrow{GH}$;

c) O cosseno do ângulo entre $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FC}$;

d) A tangente do ângulo entre $\overleftrightarrow{EC}$ e o *pl* (*FGH*)

2. A figura abaixo é um prisma hexagonal regular. Determine o ângulo formado entre as faces *ABHG* e *BCIH.*

Figura 49 – Prisma ABCDEFGHIJKL

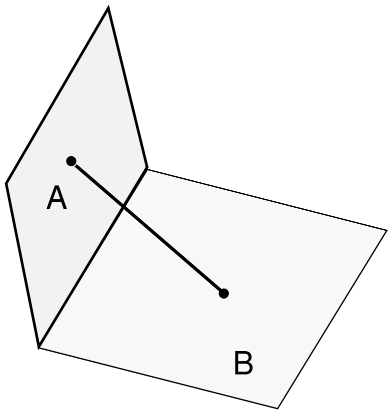


Fonte: do autor

4.2.3.9 Distância entre dois pontos

<u>Definição</u>: comprimento do segmento de reta que une os dois pontos.

Figura 50 – Distância entre dois pontos



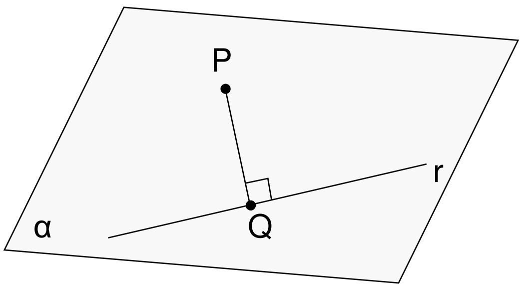
$d_{AB} = \overline{AB}$

Fonte: do autor

4.2.3.10 Distância de um ponto a uma reta

<u>Definição</u>: é o comprimento do segmento perpendicular traçado do ponto até a reta.

Figura 51 – Distância de ponto à reta.



$\alpha = pl\,(P,r)$

$\overline{PQ} \perp r$

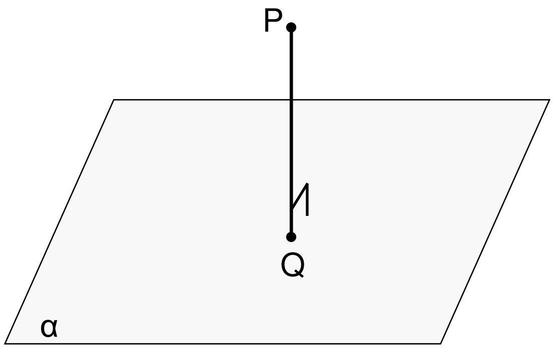
$d_{P,r} = \overline{PQ}$

Fonte: do autor

4.2.3.11 Distância de um ponto a um plano

<u>*Definição*</u>: é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto ao plano.

Figura 52 – Distância de ponto a plano



$\overline{PQ} \perp \alpha$

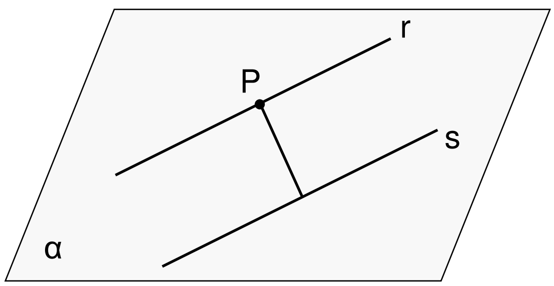
$d_{P,\alpha} = \overline{PQ}$

Fonte: do autor

4.2.3.12 Distância entre retas paralelas

Definição: é a distância de um ponto pertencente a uma das retas à outra.

Figura 53 – Distância entre retas paralelas



$P \in r$

$r \,//\, s$

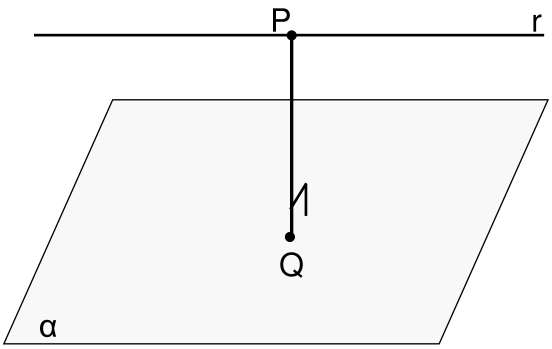
$d_{r,s} = d_{P,s}$

Fonte: do autor

4.2.3.13 Distância entre reta e plano paralelos

<u>*Definição*</u>: é a distância de um ponto qualquer da reta e o plano.

Figura 54 – Distância entre reta e plano paralelos



$P \in r$

$r \,//\, \alpha$

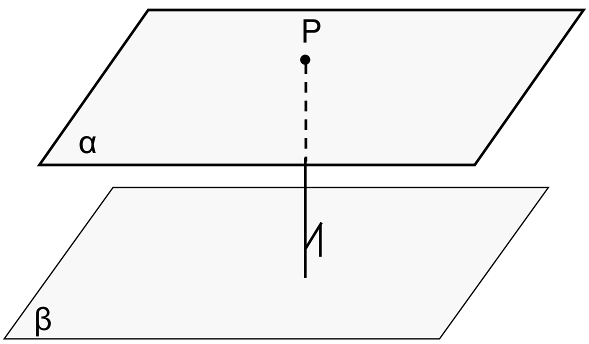
$d_{r,\alpha} = d_{P,\alpha}$

Fonte: do autor

4.2.3.14 Distância entre planos paralelos

<u>*Definição*</u>: é a distância de um ponto pertencente a um dos planos ao outro plano.

Figura 55 – Distância entre planos paralelos



$P \in \alpha$

$d_{\alpha,\beta} = d_{P,\beta}$

Fonte: do autor

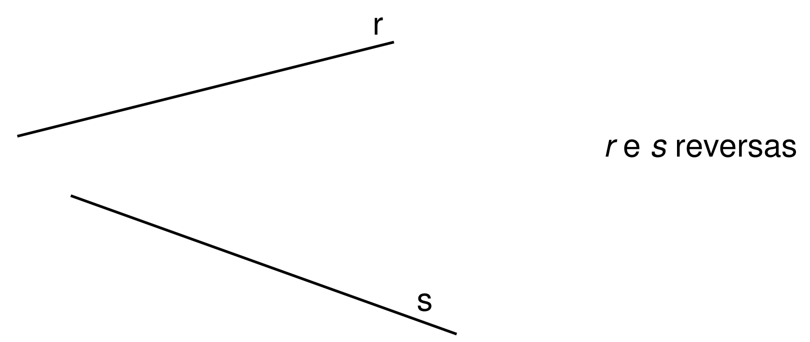
4.2.3.15 Distância entre duas retas reversas

<u>*Definição*</u>: é o comprimento de um segmento de reta perpendicular comum às duas retas.

Construção do segmento perpendicular comum.

1) Tomemos duas retas *r* e *s* reversas;

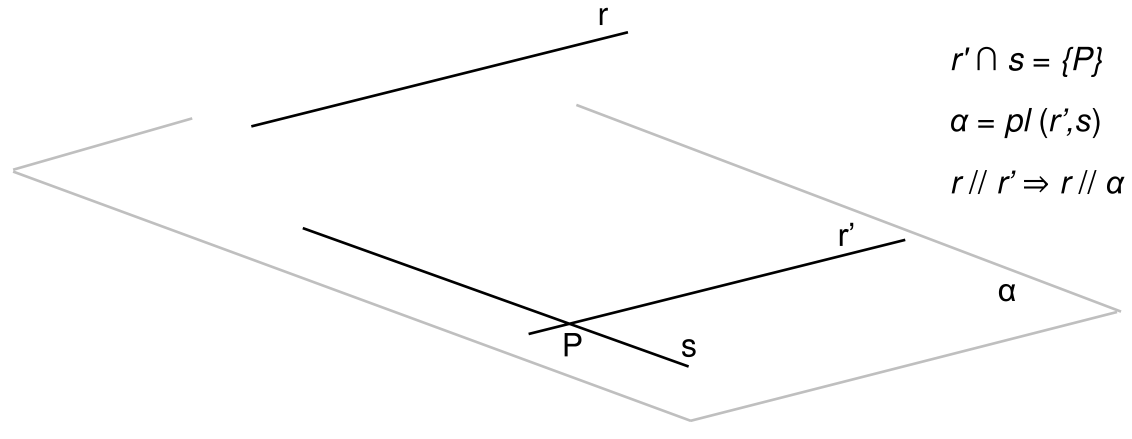
Figura 56 – Segmento perpendicular comum: procedimento 1



Fonte: do autor

2) Construa um plano que contém *s* e é paralelo a *r*. Para isso, construa uma reta *r'* paralela a *r* e concorrente a *s* em um ponto de *s,* denominado *P*. Sabe-se por T3, que *s* e *r'* determinam um único plano e ainda que uma reta é paralela a um plano quando for paralela a uma reta do plano;

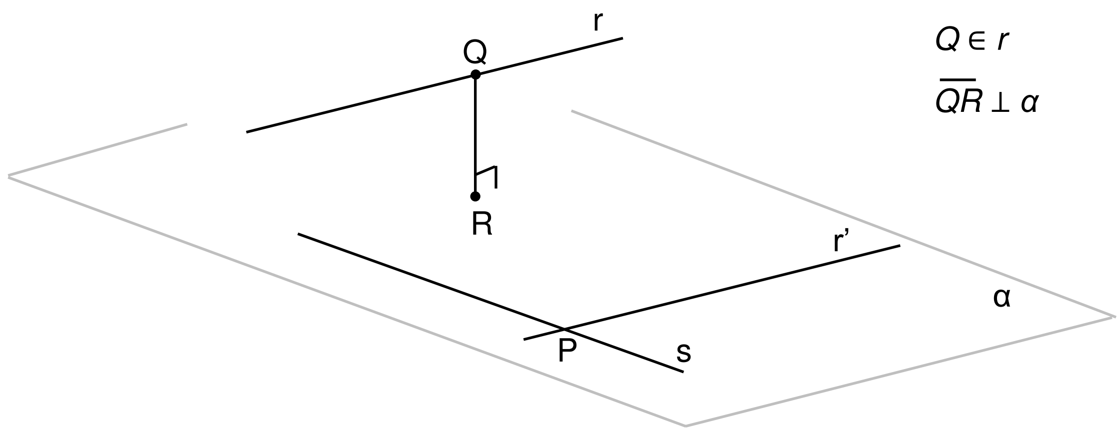
Figura 57 – Segmento perpendicular comum: procedimento 2



Fonte: do autor

3) Tomemos um ponto *Q* pertencente a *r* e por *Q*, tracemos uma perpendicular ao plano *α,* sendo *R* a projeção de *Q* sobre *α*;

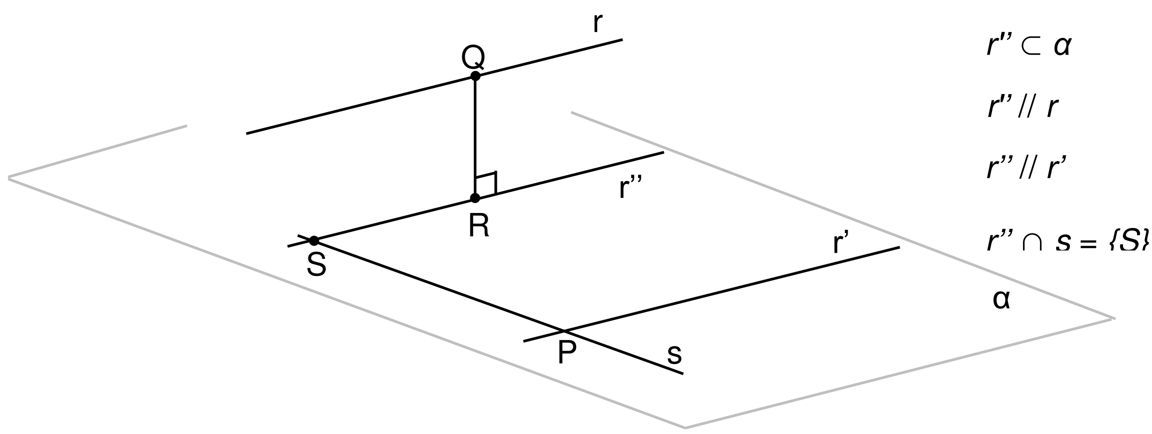
Figura 58 – Segmento perpendicular comum: procedimento 3



Fonte: do autor

4) Tracemos por *R* uma reta *r”*, paralela a *r*; que será paralela a *r’* também. A reta *r”* intersectará *s* em um ponto *S;*

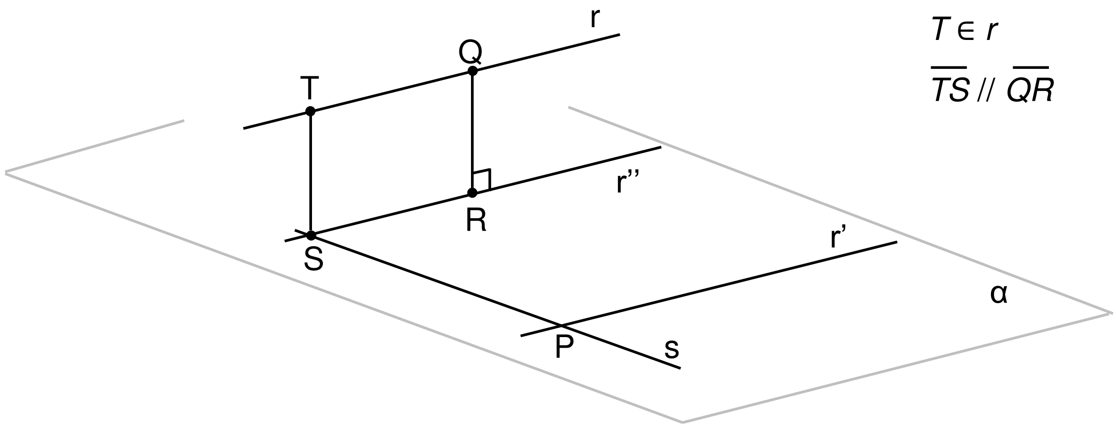
Figura 59 – Segmento perpendicular comum: procedimento 4



Fonte: do autor

5) Tracemos por *S* uma paralela a $\overline{QR}$, obtendo-se em *r* um ponto *T*;

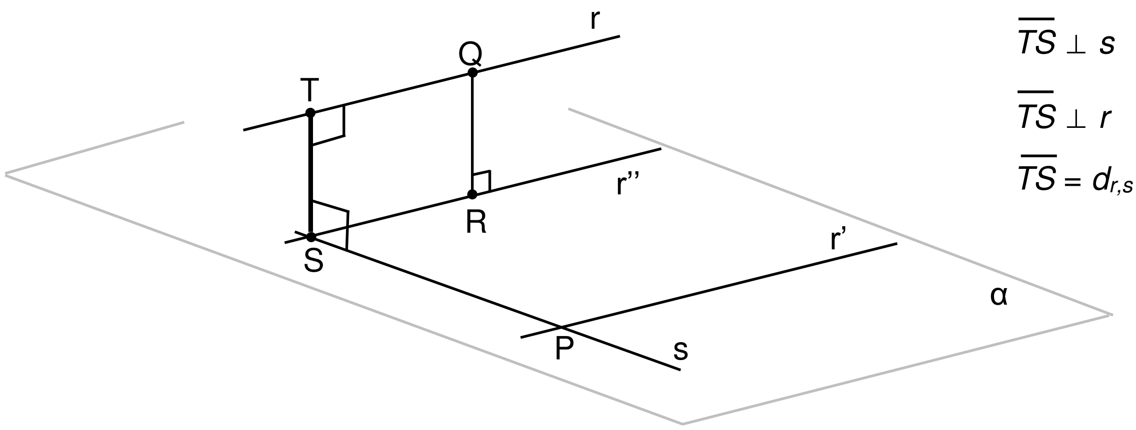
Figura 60 – Segmento perpendicular comum: procedimento 5



Fonte: do autor

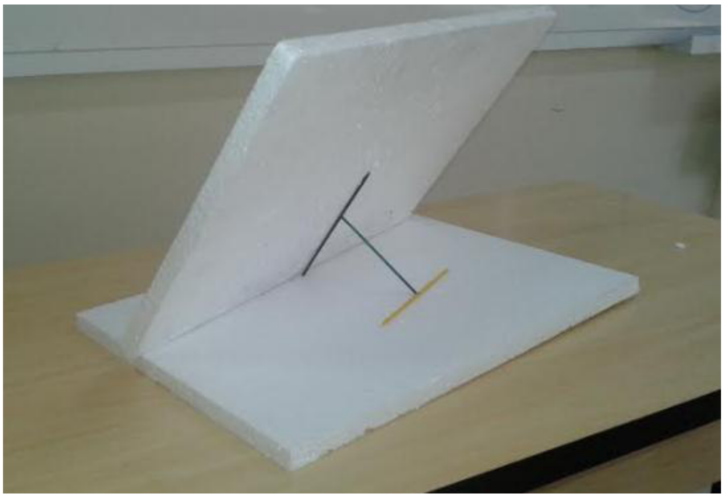
6) Como $\overline{TS}$ é paralelo a $\overline{QR}$ e $\overline{QR}$ é perpendicular ao plano *α*, então $\overline{TS}$ também é perpendicular ao plano *α*. Se $\overline{TS}$ é perpendicular ao plano *α*, $\overline{TS}$ é perpendicular a qualquer reta de *α*, portanto, é perpendicular a *s*. Por outro lado, o quadrilátero *TSRQ* é um retângulo, portanto, $\overline{TS}$ também é perpendicular à reta *r*. Logo, $\overline{TS}$ é a perpendicular comum às retas *r* e *s*, ou seja, $\overline{TS}$ é a distância entre as retas reversas *r* e *s*.

Figura 61 – Segmento perpendicular comum: procedimento 6



Fonte: do autor

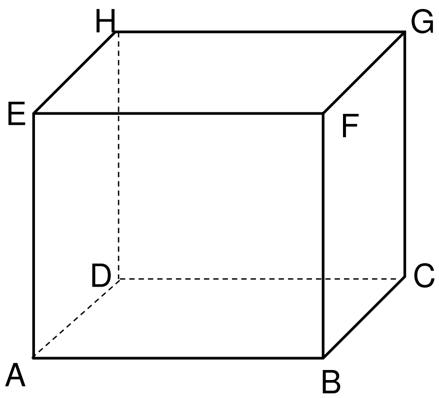
Figura 62 – Representação do segmento perpendicular comum a duas retas reversas: material concreto



Fonte: do autor

4.2.3.16 Exercício

3. A figura abaixo é um cubo de aresta 10 cm. Determine o que se pede:



a) A distância entre os pontos *B* e *H*;

b) A distância entre o ponto *G* e a reta suporte de $\overline{HF}$;

c) A distância entre o ponto *A* e o plano determinado por *BDH;*

d) A distância entre as retas suporte de $\overline{AB}$ e $\overline{GH}$;

e) A distância entre a reta suporte de $\overline{BC}$ e o plano determinado por *ADH;*

f) A distância entre os planos determinados por *ABF* e *CDH;*

g) A distância entre as retas suporte de $\overline{AE}$ e $\overline{BH}$.

4.2.4 Avaliações Somativas

Nesta seção, estão descritas as avaliações aplicadas ao término da apresentação da teoria. A primeira delas se refere a construções geométricas tridimensionais realizadas no laboratório de informática e em duplas. A segunda é uma avaliação individual, que buscou verificar o aprendizado obtido ao longo do desenvolvimento da proposta.

4.2.4.1 Avaliação no laboratório de informática

Faça o que se pede:

Em cada item abaixo, faça a construção geométrica tridimensional solicitada, utilizando o *Geogebra 3D* e anotando os passos utilizados para a construção. Em cada item será considerado 1 escore para a representação, sendo os demais atribuídos aos passos utilizados.

01. Construa duas retas reversas. (06 escores)

Passo1____

____

Passo2____

____

Passo3____

____

Passo4____

____

Passo5____

____

02. Dadas duas retas reversas, construa por uma delas um plano paralelo à outra. Serão considerados os passos da construção anterior. No último passo, conclua por que o plano é paralelo à reta. (05 escores)

Passo1____

____

Passo2____

____

Passo3____

Passo4____

03. Construa por um ponto, uma reta paralela a dois planos secantes. (07 escores)

Passo1____

Passo2____

Passo3____

Passo4____

Passo5____

Passo6____

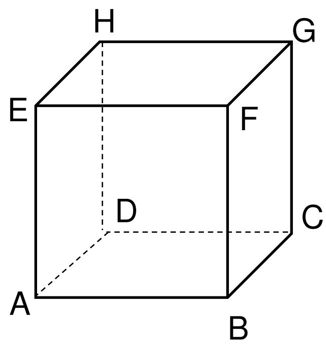
4.2.4.1 Avaliação individual final

<u>Faça o que se pede</u>:

01. Prove a unicidade do plano determinado por duas retas concorrentes. (03 escores)

02. Prove a existência de duas retas reversas. (06 escores)

03. O cubo, representado na figura abaixo, tem aresta medindo 12 cm.



a) Determine o ângulo entre os semiplanos *ABC* e *BCE*. (3 escores)

b) Calcule a distância entre as retas suporte de $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{AH}$. (3 escores)

c) Calcule a distância do ponto *A* ao plano *BDH*. Após encontrar o segmento de reta que representa a distância solicitada, justifique, de acordo com a teoria sobre perpendicularismo, o porquê de sua utilização. (06 escores)

____
____
____
____
____
____

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

5.1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da proposta didática deu-se por meio de aulas expositivas sobre tópicos introdutórios de geometria espacial, a denominada geometria espacial de posição. A proposta didática está descrita no capítulo 4, incluindo a confecção de uma matriz de descritores, um plano de execução didática, notas de aula, listas de exercícios, avaliações e materiais concretos utilizados.

A partir de um sistema de axiomas previamente escolhido, buscou-se criar condições para que os alunos fossem construindo o conhecimento geométrico tridimensional. De maneira a introduzir cada conceito, foram utilizados materiais concretos, tais como: folhas de isopor, jogos de varetas e alfinetes, visando-se explorar o aspecto visual e tátil, facilitando-se, desta forma, o entendimento sobre os entes geométricos primitivos e possibilitando o levantamento de hipóteses. Como uma das dificuldades da geometria espacial são as construções tridimensionais, o laboratório de informática foi utilizado para esta finalidade. Os alunos, utilizando o *software GeoGebra* versão *5.0*, em particular, a janela 3D, puderam realizar estas construções, amparadas nos conceitos apresentados até aquele momento. Cabe salientar, que a proposta didática foi apresentada durante o período normal de aulas, para todo o grupo de alunos do 2º Ano do Ensino Médio do CMSM.

5.2 CARACTERIZAÇÃO DAS TURMAS E ETAPAS DA PROPOSTA

O segundo ano do Ensino Médio do CMSM é composto por 156 alunos, distribuídos equitativamente em cinco turmas. Cada um destes alunos recebeu a nota de aula sobre geometria espacial de posição. Em um primeiro momento, relativo aos conceitos iniciais, optou-se pelo trabalho individualizado com os alunos, até a realização da primeira lista de exercícios. A segunda etapa foi destinada a fazer uma revisão das construções geométricas das primeiras aulas, utilizando o laboratório de informática, sendo que os alunos puderam trabalhar em grupo. A primeira avaliação foi realizada no laboratório e em duplas, onde os mesmos realizaram construções geométricas utilizando o *GeoGebra*. Nas últimas etapas da aplicação voltou-se para o trabalho individualizado, com aulas expositivas, lista de exercícios, finalizando-se com uma avaliação somativa individual.

5.3 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

A proposta didática foi desenvolvida durante 3 semanas, com 4 períodos de 45 minutos semanais, onde se buscou acompanhar as atividades criando-se determinados pontos de controle, divididos em 4 etapas.

Na primeira etapa, foram trabalhados os conceitos introdutórios de geometria espacial, elencando-se um grupo de axiomas e, a partir destes, foi se desenvolvendo os conceitos subsequentes. Enfatizou-se a determinação da reta, a determinação do plano e a construção destes entes, a inclusão da reta no plano e o Axioma de Euclides, fundamental para o paralelismo. Ao término da teoria, uma lista com 7 exercícios foi passada como tarefa para os alunos, que de forma individual deveriam resolvê-la. Essa lista foi corrigida e as dúvidas foram sanadas. Foram utilizados 4 tempos de aula para esta etapa.

O segundo momento ocorreu no laboratório de informática, onde em duplas os alunos deveriam realizar uma lista contendo 6 exercícios relativos a construções geométricas tridimensionais. Um exemplo foi resolvido visando demonstrar a utilização do *software* e enumerar os passos que os alunos deveriam tomar para obter sucesso na atividade. Para a realização destes exercícios, foram utilizados 2 tempos de aula. Encerraram-se as atividades no laboratório com a aplicação de uma avaliação somativa em duplas, durante 1 tempo de aula, na qual os alunos teriam que realizar construções geométricas decorrentes das realizadas na aula anterior, com foco na construção de retas reversas e no paralelismo.

O terceiro momento deu-se por meio da apresentação da teoria relativa ao cálculo de ângulos e distâncias, enfatizando-se o teorema fundamental do perpendicularismo e a construção do segmento perpendicular comum entre duas retas reversas. Foram resolvidos três exercícios sobre cálculo de ângulos e distâncias. Esta etapa teve duração de 3 tempos de aula.

A última etapa foi destinada à realização de uma avaliação somativa individual, englobando os principais assuntos trabalhados, com duração de 1 tempo de aula. Cabe ressaltar que as avaliações somativas aplicadas compuseram a média dos alunos em suas avaliações parciais do segundo trimestre letivo.

5.4 LEVANTAMENTO DE DADOS E SELEÇÃO DA AMOSTRA

Os instrumentos de coleta de dados utilizados foram as atividades apresentadas em cada etapa da proposta didática, tais como: exercícios, atividades realizadas no laboratório de informática e avaliações somativas aplicadas. Nesse sentido, a abordagem é predominantemente qualitativa, entretanto, serão descritos e analisados sob a forma quantitativa os índices alcançados pelos alunos nas avaliações.

Do universo de 156 alunos, a seleção da amostra para descrição e análise das atividades foi realizada de forma aleatória como segue:

- ✓ Exercícios de 1 a 7: escolhidos 7 alunos, denominados A, B, C, D, E, F e G;
- ✓ Avaliação somativa no laboratório (3 questões): escolhidas 6 duplas de alunos, denominados HI, JK, LM, NO, PQ e RS;
- ✓ Exercícios sobre ângulos e distâncias (2 questões): escolhidos 2 alunos, denominados T e U;
- ✓ Avaliação somativa (3 questões): escolhidos 5 alunos, denominados V, W, X, Y e Z.

Esta análise está descrita no capítulo 6 deste trabalho, onde foram destacados os acertos, erros e possibilidades de melhoria em suas resoluções, sempre relacionado aos objetivos principais da proposta didática.

No capítulo 7, estão descritos os índices de acertos de todo o grupo de 156 alunos nas avaliações somativas, por meio de gráficos. Cada gráfico será analisado de maneira a elencar o tipo de questão apresentada e os motivos pelos quais os alunos obtiveram êxito ou não em suas resoluções.

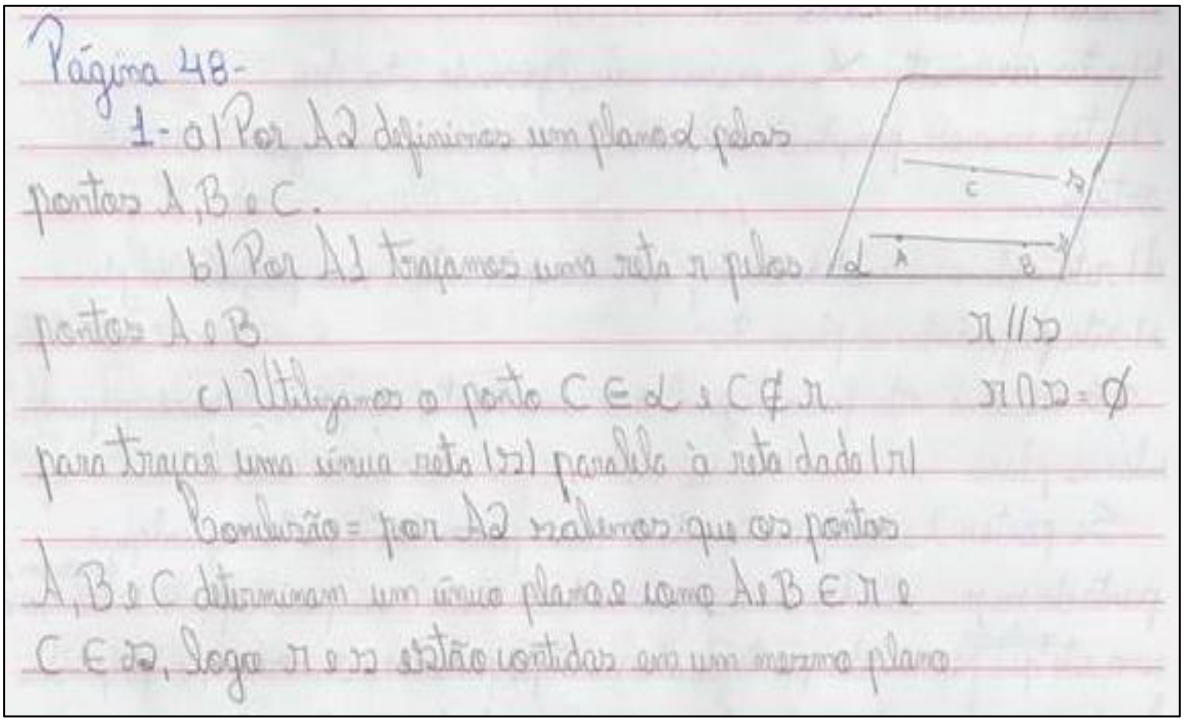
6 ANÁLISE DESCRITIVA DAS ATIVIDADES

6.1 DOS CONCEITOS INICIAIS ÀS PRIMEIRAS ATIVIDADES

Os exercícios propostos nessa primeira parte visaram, sobretudo, fazer com que os alunos realizassem demonstrações básicas, utilizando a teoria previamente apresentada. Analisaremos, na sequência, a resolução de alguns exercícios resolvidos pelos alunos.

1. Demonstre o teorema 2 (T2): duas retas paralelas determinam um único plano que as contém.

Figura 63 – Resolução do exercício 1

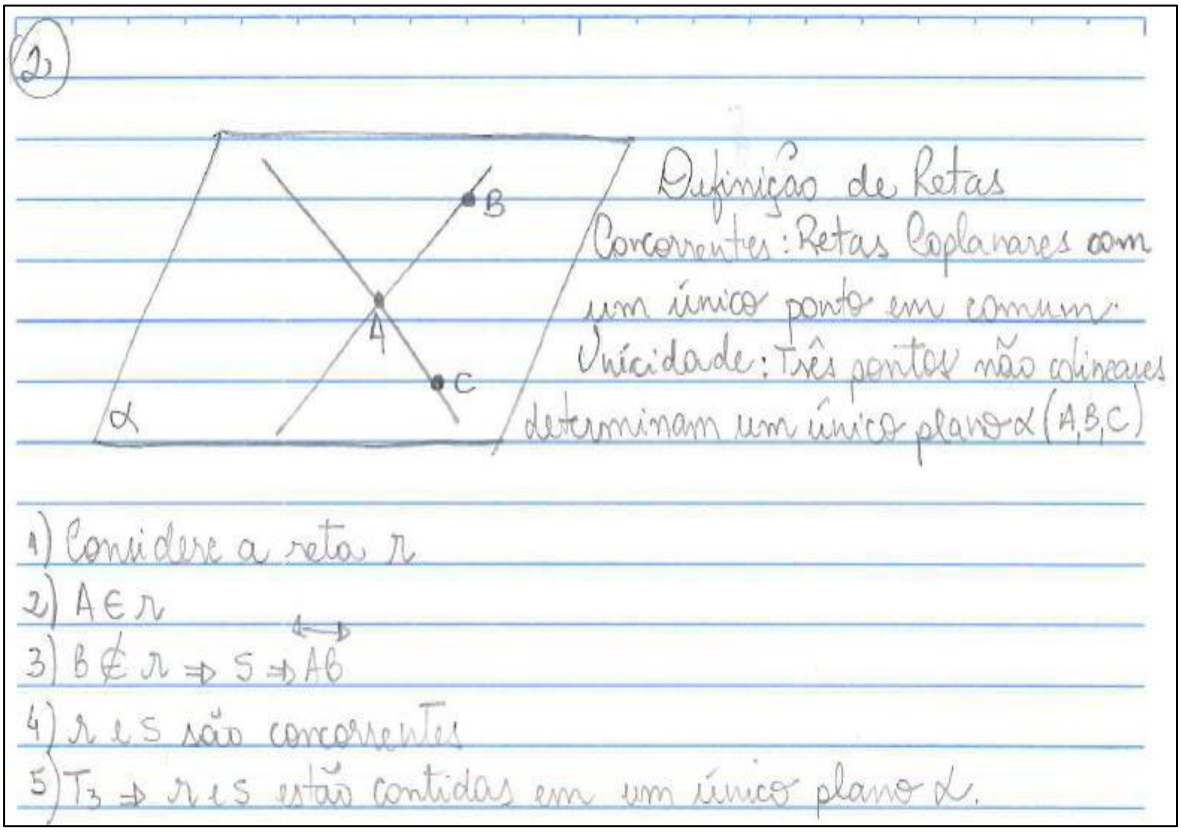

Página 48-
1- a) Por A2 definimos um plano α pelos pontos A, B e C.
b) Por A1 traçamos uma reta r pelos pontos A e B
c) Utilizamos o ponto $C \in \alpha$ e $C \notin r$ para traçar uma única reta (s) paralela à reta dada (r)
Conclusão = por A2 sabemos que os pontos A, B e C determinam um único plano e como A e $B \in r$ e $C \in s$, logo r e s estão contidos em um mesmo plano.

Fonte: aluno A

Embora a resolução deste exercício passe pela existência e unicidade do plano, o que o aluno não mencionou em sua demonstração, a resolução está correta, uma vez que se baseou, primeiramente, na construção do plano e de retas paralelas contidas no mesmo, posteriormente usando o fato de três pontos não colineares determinarem um único plano para provar o teorema.

<u>**2.** Demonstre o teorema 3 (T3): duas retas concorrentes determinam um único plano que as contém.</u>

Figura 64 – Resolução do exercício 2

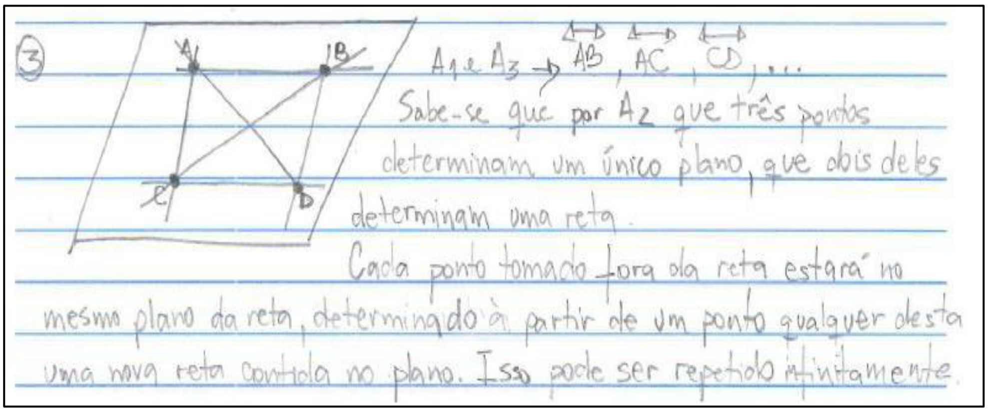


Fonte: aluno B

A questão 2 da lista é muito similar à primeira e o aluno resolveu de maneira parcialmente correta, embora não usasse o termo existência do plano quando define retas concorrentes e sugerisse a existência de mais planos quando se refere a unicidade. Demonstrou usando o argumento correto ao mencionar o axioma da determinação do plano único passando por três pontos não colineares. Nota-se a preocupação em realizar a construção do plano, detalhada nos procedimentos de 1 a 5.

3. Demonstre que num plano existem infinitas retas.

Figura 65 – Resolução do exercício 3

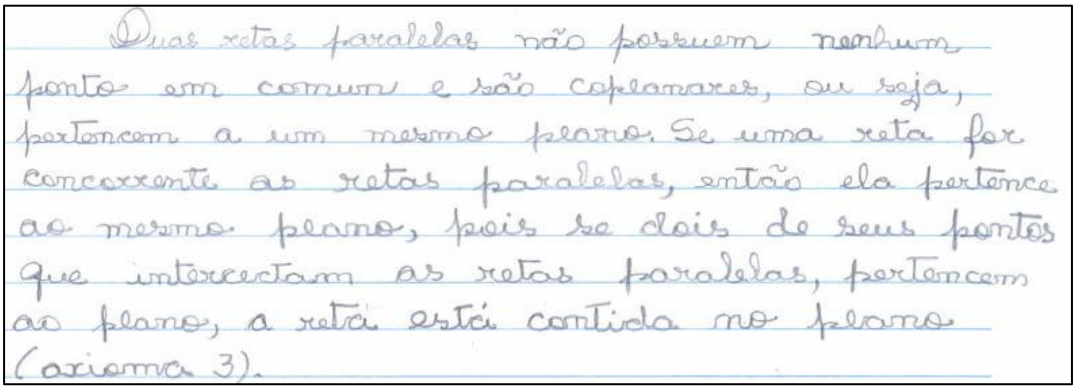

3
A B C D
A_1 e A_3 → $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, ...
Sabe-se que por A_2 que três pontos determinam um único plano, que dois deles determinam uma reta.
Cada ponto tomado fora da reta estará no mesmo plano da reta, determinado à partir de um ponto qualquer desta uma nova reta contida no plano. Isso pode ser repetido infinitamente.

Fonte: aluno C

O aluno explica nesse exercício que um plano é determinado por três pontos não colineares, quando menciona o axioma 2 e que por dois desses pontos passa uma única reta. Quando se refere a se repetir o acontecimento infinitamente, baseia-se no fato que por uma reta e um ponto fora delas também passa um único plano e que sempre poderia ser tomado um ponto fora dessas retas e continuaria se tendo o mesmo plano.

4. Prove que duas retas paralelas distintas e uma concorrente com as duas são coplanares.

Figura 66 – Resolução do exercício 4

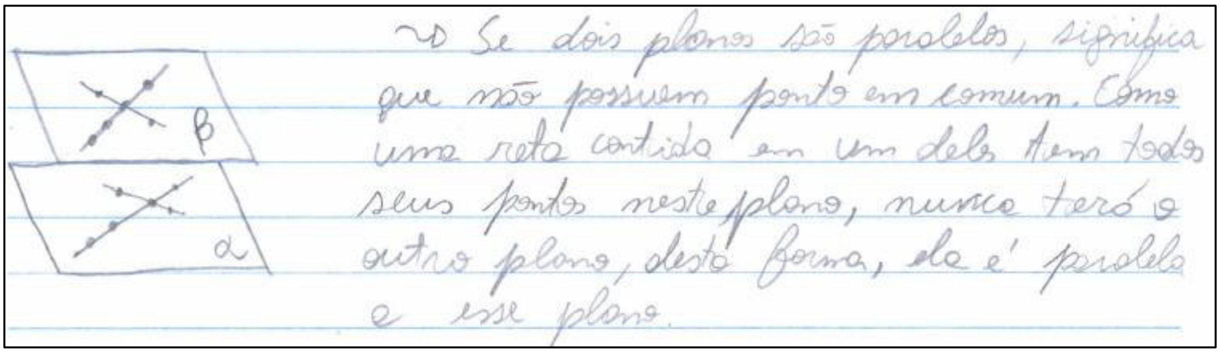

Duas retas paralelas não possuem nenhum ponto em comum e são coplanares, ou seja, pertencem a um mesmo plano. Se uma reta for concorrente as retas paralelas, então ela pertence ao mesmo plano, pois se dois de seus pontos que intercectam as retas paralelas, pertencem ao plano, a reta está contida no plano (axioma 3).

Fonte: aluno D

O aluno conseguiu realizar a demonstração exigida no exercício, definindo o que são duas retas paralelas e o que seria uma reta concorrente a ambas. Ele deixa claro que esta reta que está concorrendo com duas paralelas não pode ficar num plano diferente no momento em que faz uso do axioma 3, ou seja, a condição para que uma reta esteja contida em um plano. Percebe-se que há certo desprendimento por parte do aluno selecionado para escrever matematicamente, porém, o mesmo erra no momento em que diz que as retas pertencem a um mesmo plano, pelo fato de usar a relação de pertinência entre dois conjuntos, onde o correto seria dizer que as retas estão contidas no plano.

5. Demonstre o seguinte teorema: se dois planos *α* e *β* são paralelos, então toda reta *r*, contida em *α* é paralela a *β*.

Figura 67 – Resolução do exercício 5

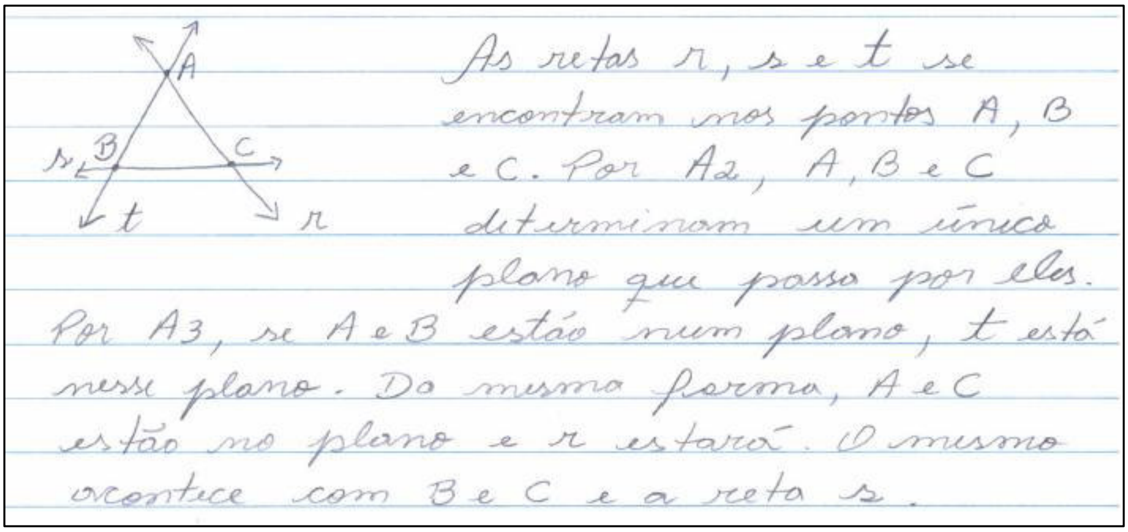


Fonte: aluno E

Embora utilizando uma linguagem bem simples, a resolução foi feita corretamente, pois o aluno teve o entendimento da condição dada no teorema e a utilizou como verdade, provando o que isto implicaria. Percebe-se que além de fazer a demonstração, houve a preocupação em construir dois planos paralelos e estabelecer nesta construção a condição de paralelismo entre os planos no momento em que inclui duas retas concorrentes em um plano e toma duas paralelas a estas retas para daí construir o segundo plano.

6. Prove que três retas, duas a duas concorrentes e que não passam por um mesmo ponto, estão contidas em um mesmo plano.

Figura 68 – Resolução do exercício 6

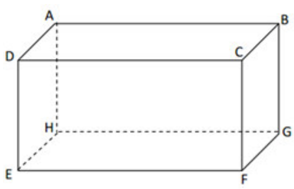


As retas r, s e t se encontram nos pontos A, B e C. Por A2, A, B e C determinam um único plano que passa por eles. Por A3, se A e B estão num plano, t está nesse plano. Da mesma forma, A e C estão no plano e r estará. O mesmo acontece com B e C e a reta s.

Fonte: aluno F

Nessa questão, a linguagem utilizada pelo aluno também foi simples, mas o mesmo respondeu corretamente o que foi pedido. Percebe-se que poderia dizer que as retas se “intersectam” ao invés usar se “encontram”, ou mesmo dizer, no lugar de “um plano que passa por eles”, “um plano que os contém”. De qualquer forma, a utilização correta dos axiomas 2 e 3 torna correta a demonstração.

7. Para cada um dos subitens a seguir, copie em seu caderno o paralelepípedo retângulo representado abaixo. Em seguida, desenhe no paralelepípedo um triângulo contido no plano determinado pelos entes primitivos de cada subitem.



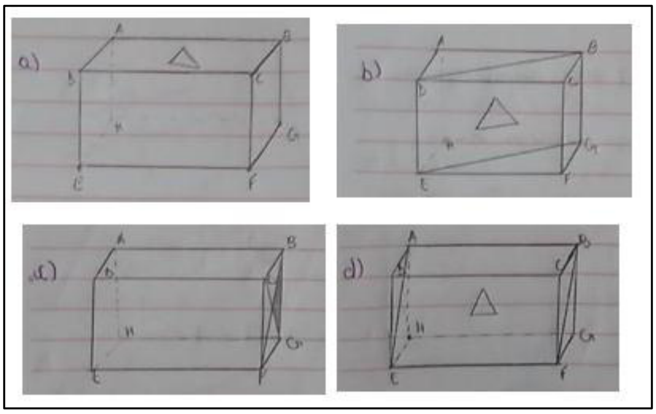
a) Pelos pontos *A*, *B* e *C;*

b) Pelas retas suporte de $\overline{DB}$ e $\overline{EG}$;

c) Pelas retas suporte de $\overline{BF}$ e $\overline{CG}$;

d) Pela reta que dá suporte a $\overline{AB}$ e o ponto *F*.

Figura 69 – Resolução do exercício 7



Fonte: aluno G

O objetivo deste exercício era fazer uma revisão das quatro formas de determinação do plano, sendo que os alunos deveriam identificar o plano e nele desenhar um triângulo. Percebe-se que a resolução do aluno está de acordo com o que se pede no exercício.

6.2 DAS ATIVIDADES NO LABORATÓRIO À PRIMEIRA AVALIAÇÃO

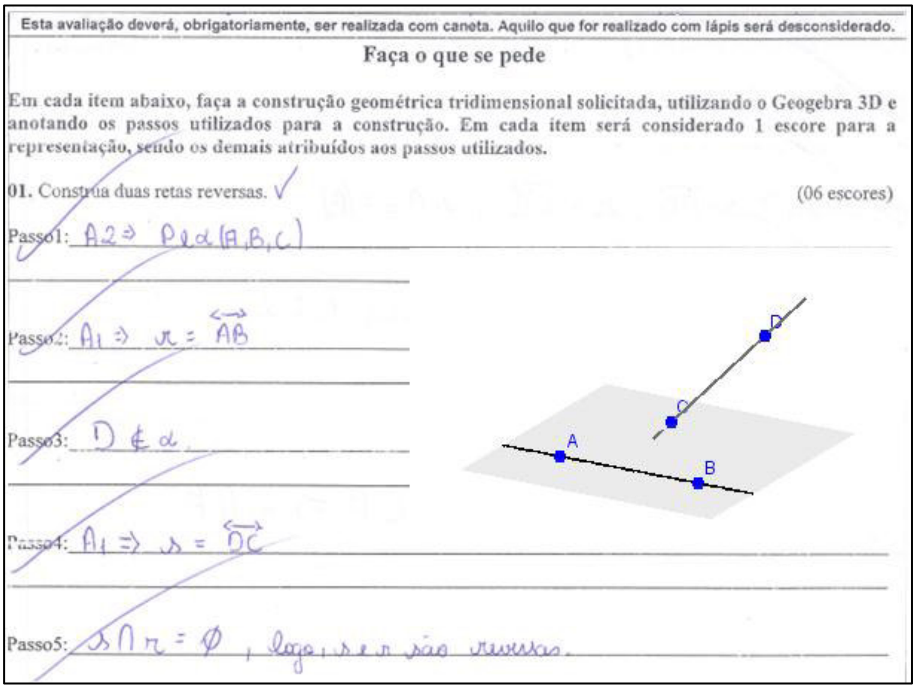
A utilização do laboratório de informática permitiu aos alunos realizar construções geométricas tridimensionais de uma forma mais apropriada do que com "lápis e papel". As 6 atividades de construções, propostas nas primeiras duas aulas no laboratório, foram realizadas em 2 tempos de aula e serviram para que os alunos se familiarizassem com o *software* e percebessem o quanto eram necessários os conceitos iniciais para que essas construções pudessem realmente ser feitas. Essas 6 atividades foram realizadas em grupos e os resultados não foram salvos.

As atividades no laboratório foram encerradas por meio de uma avaliação somativa, realizada em duplas, onde os alunos deveriam realizar construções geométricas utilizando o *software GeoGebra*. Sendo assim, foi distribuído para cada dupla uma prova contendo três questões. Em cada questão, as duplas deveriam descrever todos os procedimentos utilizados para se chegar ao produto final, ou seja, a representação tridimensional requerida. Assim que cada dupla concluía a questão, o resultado era salvo em uma pasta de arquivos no computador, sendo que no final da avaliação todos os arquivos foram recolhidos por meio de um *pendrive*.

No que segue, será realizada agora uma análise de algumas provas, verificando como a atividade foi desenvolvida pelas duplas de alunos. Analisaremos duas resoluções para cada questão, mostrando uma em que determinada dupla de alunos optou pela linguagem da teoria dos conjuntos e outra em que outra dupla usou a linguagem natural.

<u>Questão 1: Construção de duas retas reversas</u>

Figura 70 – Resolução da questão 1: linguagem dos conjuntos


Esta avaliação deverá, obrigatoriamente, ser realizada com caneta. Aquilo que for realizado com lápis será desconsiderado.

Faça o que se pede

Em cada item abaixo, faça a construção geométrica tridimensional solicitada, utilizando o Geogebra 3D e anotando os passos utilizados para a construção. Em cada item será considerado 1 escore para a representação, sendo os demais atribuídos aos passos utilizados.

01. Construa duas retas reversas. (06 escores)

Passo1: A2 ⇒ Pl α (A,B,C)

Passo2: A1 ⇒ $r = \overleftrightarrow{AB}$

Passo3: $D \notin \alpha$

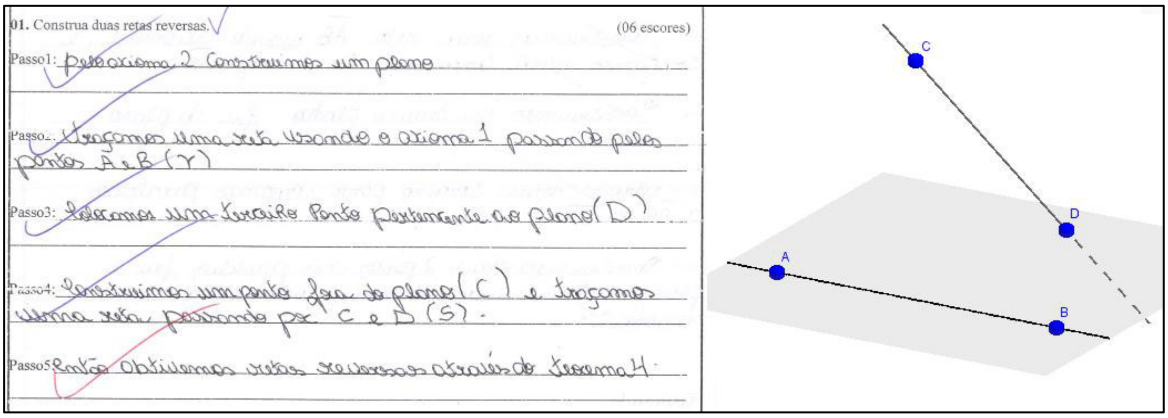
Passo4: A1 ⇒ $s = \overleftrightarrow{DC}$

Passo5: $s \cap r = \emptyset$, logo, s e r são reversas.

Fonte: alunos HI

A dupla HI acertou completamente a atividade, inclusive descrevendo cada passo por meio da simbologia da teoria conjuntos. No passo 1 da construção, por exemplo, se referem a utilização do Axioma 2 (determinação de um plano dados três pontos não colineares). A construção encerra-se no passo 5, quando utilizam $s \cap r = \emptyset$ para definirem que as retas construídas são reversas, uma vez que não estão contidas em um mesmo plano.

Figura 71 – Resolução da questão 1: linguagem natural

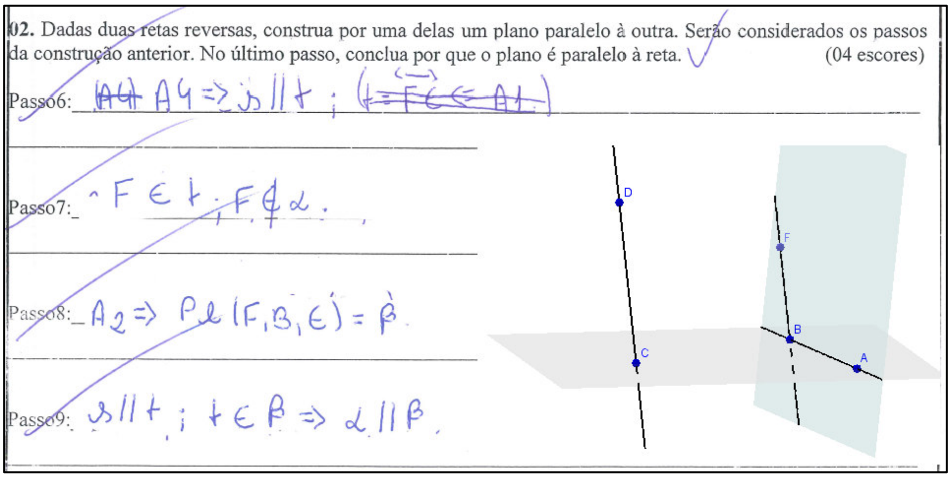


Fonte: alunos JK

Percebe-se que a dupla JK perdeu um escore da questão, uma vez que não concluíram a razão pela qual as retas construídas eram reversas, apenas citando o teorema 4 (não existe um plano comum que contenha duas retas reversas).

<u>Questão 2: Dadas duas retas reversas, construa por uma delas um plano paralelo à outra. Serão considerados os passos da construção anterior. No último passo, conclua por que o plano é paralelo à reta.</u>

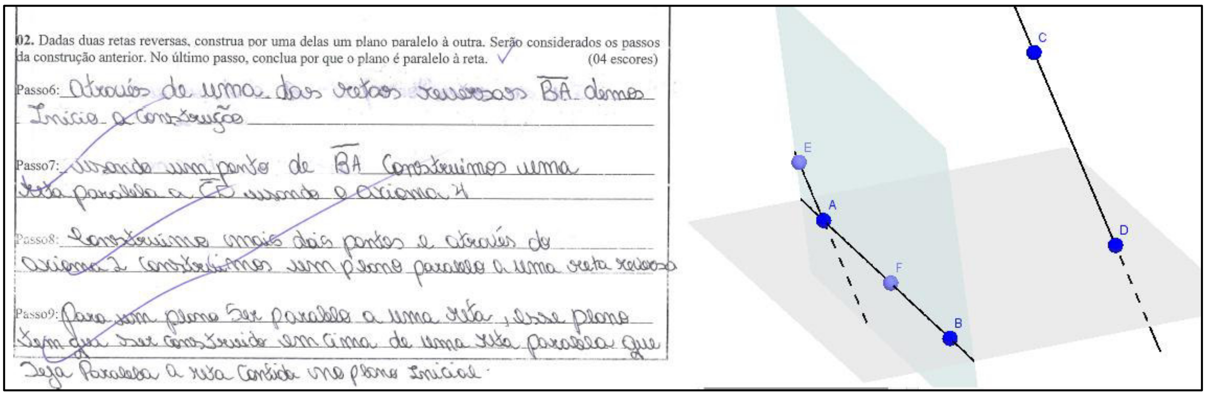
Figura 72 – Resolução da questão 2: linguagem dos conjuntos



Fonte: alunos LM

Na segunda questão, os alunos deveriam aproveitar a construção das retas reversas da questão 1 e construir por uma delas um plano paralelo à outra. Por último, deveriam concluir o porquê deste plano ser paralelo a uma das reversas. A dupla LM obteve êxito na resolução, tanto na construção, quanto nos passos elencados. Começam citando o Axioma 4 (Axioma de Euclides: por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela a esta reta) para construírem pela reta *r* uma reta *t* paralela a *s*. Se utilizam do Axioma 2 para a construção do plano e concluem a questão se utilizando da condição suficiente para que um plano seja paralelo a uma reta.

Figura 73 – Resolução da questão 2: linguagem natural



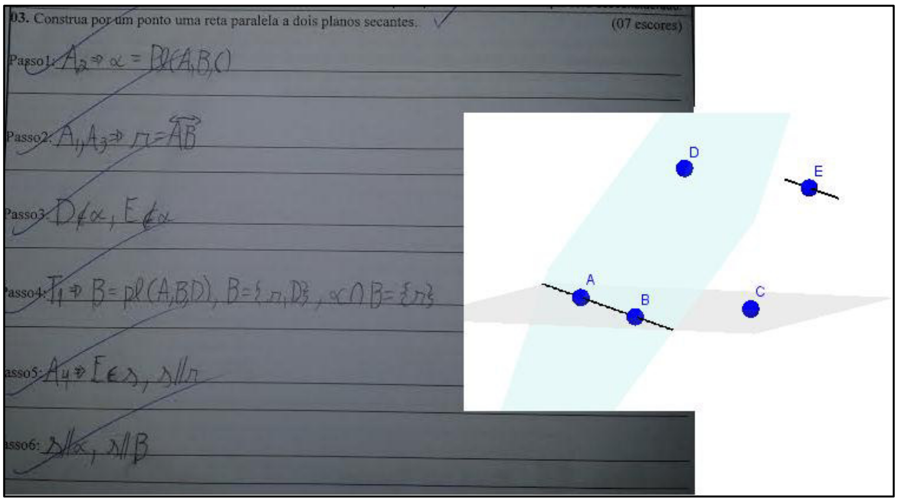
Fonte: alunos NO

A dupla NO acetou todos os escores da questão, tanto nos procedimentos, quanto na construção, utilizando-se da linguagem natural

<u>Questão 3: Construção por um ponto de uma reta paralela a dois planos secantes</u>

Analisaremos a resolução desta questão por duas duplas de alunos. Vejamos as figuras 74 e 75 e a abordagem adotada pelas duas duplas.

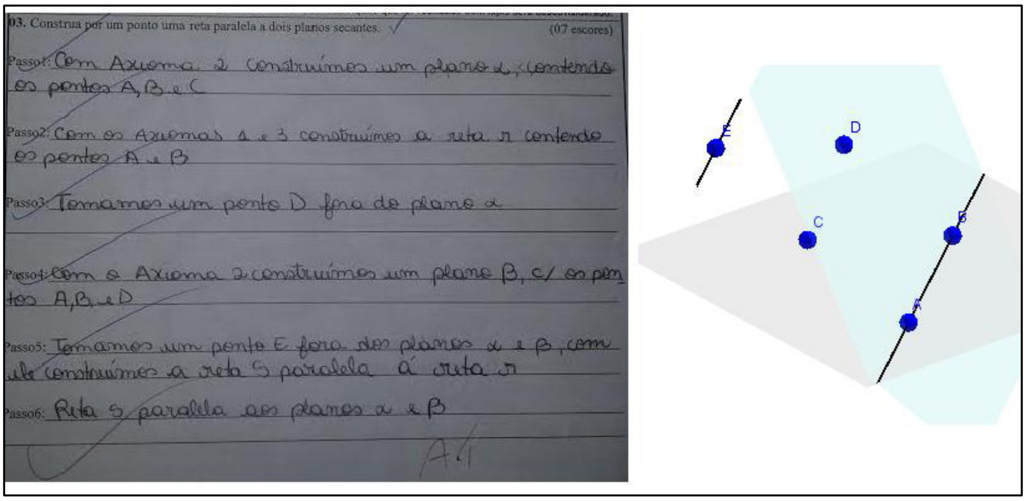
Figura 74 – Resolução da questão 3: linguagem dos conjuntos



Fonte: alunos PQ

A dupla PQ acertou todos escores da questão. Citou o Axioma 2 (Determinação do plano); combinou os Axiomas 1 e 3 para construir uma reta no plano determinado; tomou pontos *D* e *E* fora do plano determinado; usou o Teorema 1 para determinar um plano passando pela reta construída no plano e pelo ponto *D;* usou o Axioma 4 (Axioma de Euclides) para construir uma reta paralela à reta construída no plano e concluiu a atividade.

Figura 75 – Resolução da questão 3: linguagem dos natural



Fonte: alunos RS

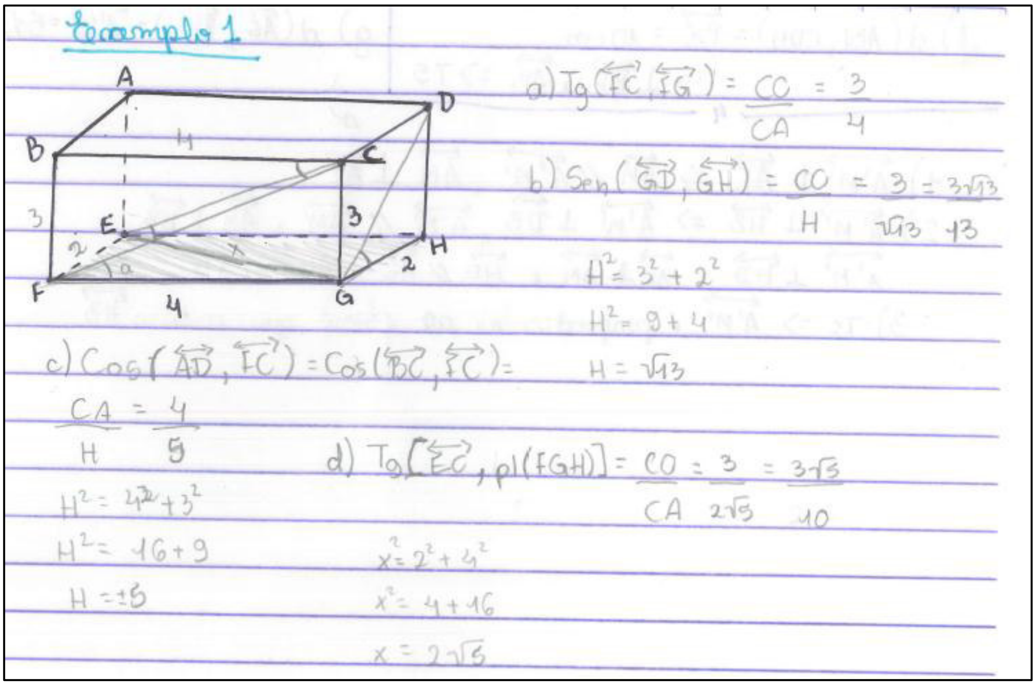
A dupla RS determinou primeiramente um plano e uma reta contida neste, usando os axiomas 1, 2 e 3. Posteriormente ao tomar um ponto fora do plano, usou o teorema da construção de um plano passando por uma reta e um ponto fora dela, sendo assim, construindo dois planos secantes. Ao traçar uma paralela à reta de intersecção dos planos, concluíram que esta reta seria paralela aos planos construídos, entretanto, perdendo um escore por não mencionar o Axioma de Euclides.

6.3 DA SEGUNDA PARTE DA TEORIA AOS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

O objetivo desta etapa da proposta didática foi definir e calcular ângulos e distâncias entre os entes primitivos. Embora tenha-se trabalhado todos esses conceitos, deu-se prioridade às novidades inerentes à geometria espacial, entre elas, o cálculo do ângulo entre retas reversas, a construção do segmento perpendicular comum entre duas retas reversas e o teorema fundamental do perpendicularismo. Os exercícios apresentados foram trabalhados em sala de aula e corrigidos.

A figura 76 mostra a resolução do exercício 1 sobre ângulos.

Figura 76 – Resolução do exercício 1: ângulos

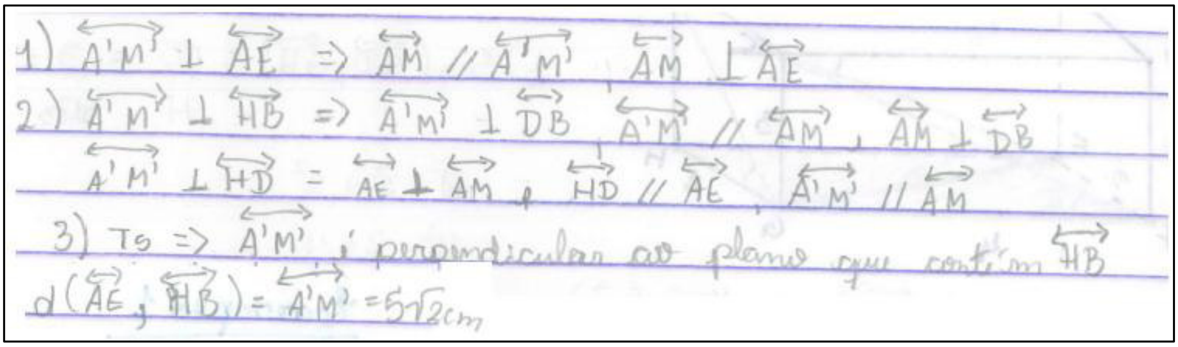


Fonte: aluno T

Analisando-se a resolução, percebe-se o quanto de pré-requisitos foram necessários para se atingir o objetivo. Além de o aluno T ter os conceitos de geometria espacial bem definidos, ou seja, saber localizar corretamente os entes no espaço, ter a definição de projeção ortogonal bem clara, saber projetar uma reta reversa em direção à outra, foi necessário o conhecimento sobre razões trigonométricas e Teorema de Pitágoras, fazendo com que houvesse uma conexão entre assuntos dentro da disciplina. O aluno resolveu o exercício de forma correta.

A figura 77 mostra a resolução da letra g do exercício 3 que solicitava o cálculo da distância entre duas retas reversas.

Figura 77 – Resolução do exercício 3: distâncias



Fonte: aluno U

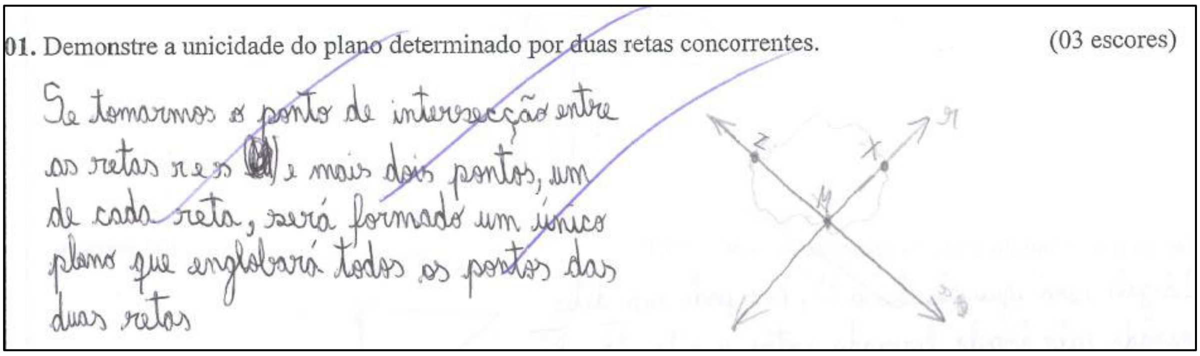
Além de calcular a distância entre as retas reversas corretamente, o aluno U buscou justificar a utilização do segmento de reta que a representasse. Utilizando-se somente de símbolos, mostrou que o segmento escolhido era perpendicular a uma das retas e utilizou, embora sem mencionar, o Teorema do Pé-de-Galinha, ao concluir que o segmento era perpendicular ao plano que continha a outra reta, assim sendo, seria perpendicular às duas reversas.

6.4 A AVALIAÇÃO FINAL

A avaliação final teve por objetivo verificar o aprendizado dos alunos em relação aos principais tópicos desenvolvidos na proposta didática, ou seja, a utilização do raciocínio lógico dedutivo, a construção tridimensional, o cálculo de ângulos e distâncias e a utilização do teorema fundamental do perpendicularismo.

Vamos descrever a resolução das questões da avaliação por alguns alunos. A figura 78 mostra a questão 1 e respectiva resolução.

Figura 78 – Resolução da questão 1



01. Demonstre a unicidade do plano determinado por duas retas concorrentes. (03 escores)

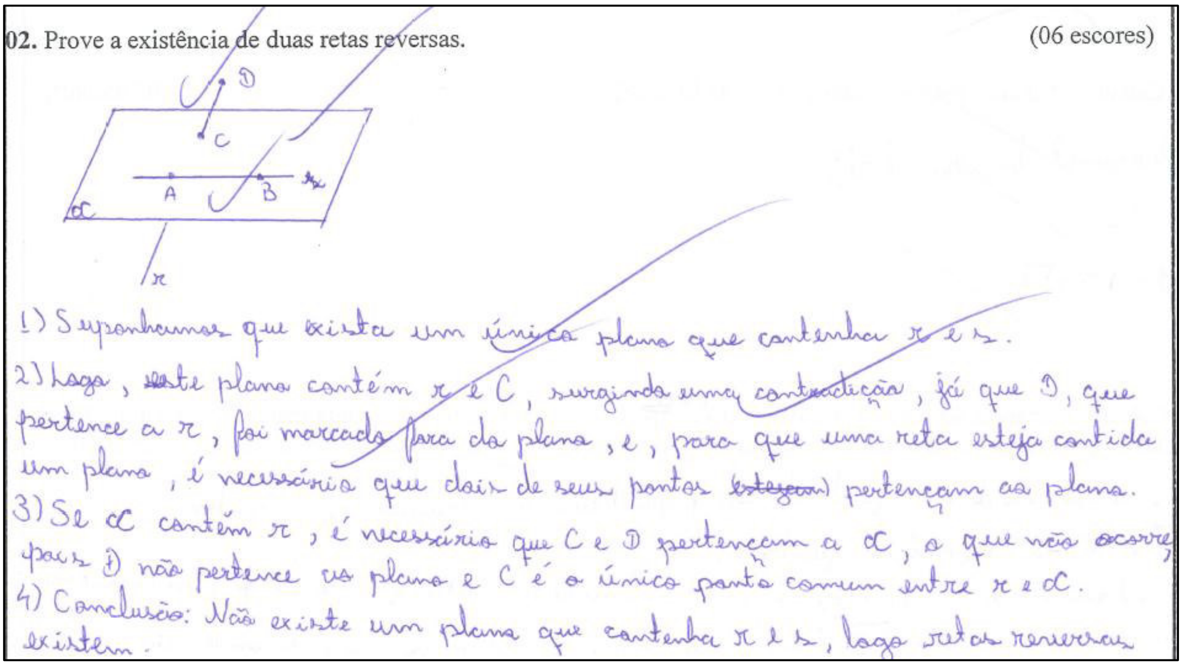
Se tomarmos o ponto de intersecção entre as retas r e s (M) e mais dois pontos, um de cada reta, será formado um único plano que englobará todos os pontos das duas retas

Fonte: aluno V

Embora o aluno V não tenha suposto a existência de mais de um plano que englobasse duas retas concorrentes e provasse que isso é um absurdo, tomou corretamente três pontos não colineares e usou o axioma de determinação do plano para provar a unicidade do plano.

A figura 79 traz a questão 2 e respectiva resolução.

Figura 79 – Resolução da questão 2


02. Prove a existência de duas retas reversas. (06 escores)

1) Suponhamos que exista um único plano que contenha r e s.
2) Logo, este plano contém r e C, surgindo uma contradição, já que D, que pertence a r, foi marcado fora do plano, e, para que uma reta esteja contida num plano, é necessário que dois de seus pontos ~~estejam~~ pertençam ao plano.
3) Se α contém r, é necessário que C e D pertençam a α, o que não ocorre, pois D não pertence ao plano e C é o único ponto comum entre r e α.
4) Conclusão: Não existe um plano que contenha r e s, logo retas reversas existem.

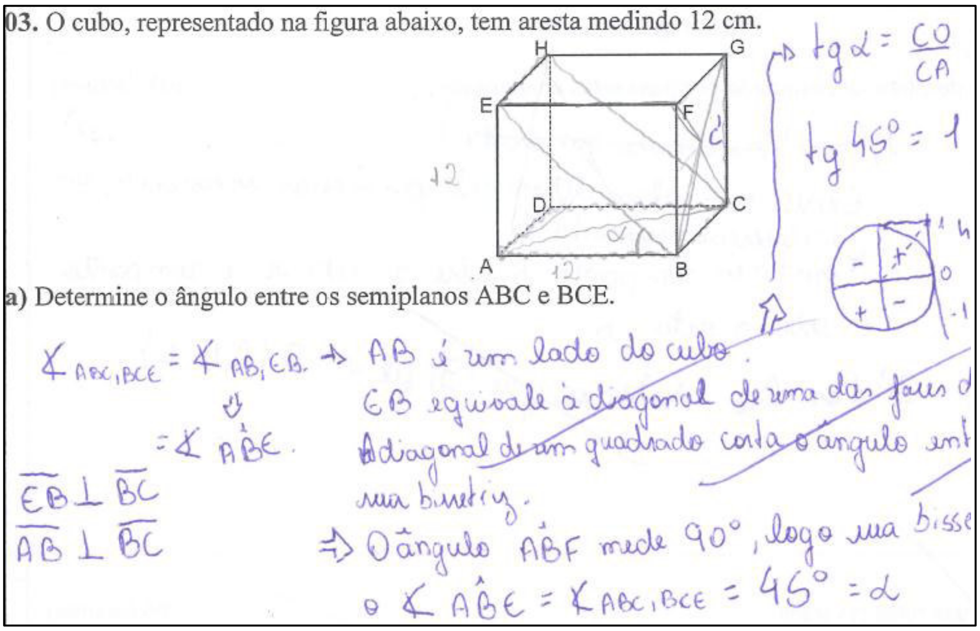
Fonte: aluno W

O aluno W iniciou a resolução da questão realizando a construção de duas retas reversas. Como deveria provar a existência das mesmas, levantou a possibilidade de que não existisse essas retas, ou seja, que pudesse haver um plano que englobasse as duas retas, contrariando a definição. Usando argumentos da própria construção, provou por absurdo que seria impossível existir esse plano, ou seja, demonstrou que existem duas retas reversas.

A terceira questão da prova solicitava o cálculo de ângulo na letra *a* e de distâncias nas letras *b* e *c*. Cabe salientar que na letra *c,* além de calcular a distância solicitada, os alunos deveriam justificar a utilização do segmento escolhido, embasando-se no Teorema do Pé-de-Galinha.

A figura 80 mostra a resolução da questão 3, letra a, que solicita o ângulo entre dois semiplanos.

Figura 80 – Resolução da questão 3: letra a


03. O cubo, representado na figura abaixo, tem aresta medindo 12 cm.

a) Determine o ângulo entre os semiplanos ABC e BCE.

$\measuredangle_{ABC,BCE} = \measuredangle_{AB,EB} \rightarrow$ AB é um lado do cubo.
EB equivale à diagonal de uma das faces d
$= \measuredangle A\hat{B}E$. A diagonal de um quadrado corta o ângulo ent
sua bissetriz.
$\overline{EB} \perp \overline{BC}$
$\overline{AB} \perp \overline{BC}$
$\Rightarrow$ O ângulo $A\hat{B}F$ mede $90°$, logo sua bisse
o $\measuredangle A\hat{B}E = \measuredangle_{ABC,BCE} = 45° = \alpha$

$\rightarrow tg\,\alpha = \frac{CO}{CA}$

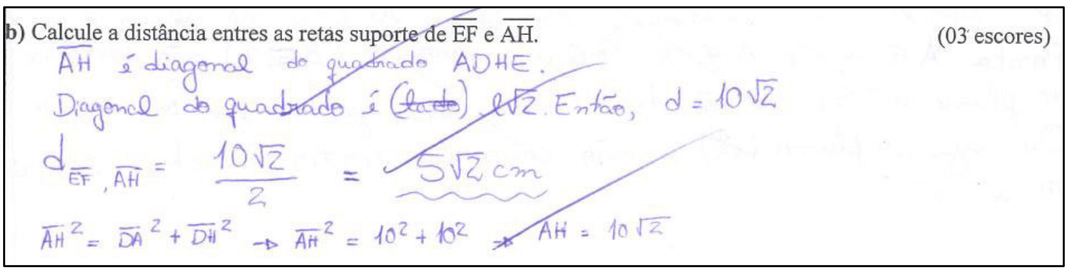
$tg\,45° = 1$

Fonte: aluno X

Analisando a resolução feita pelo aluno X, percebe-se que primeiramente o mesmo identificou os semiplanos e, a partir daí, utilizou argumentos de geometria plana para calcular precisamente o ângulo solicitado.

A figura 81 traz a resolução da questão 3, letra b, que solicita a distância entre duas retas reversas.

Figura 81 – Resolução da questão 3: letra b


b) Calcule a distância entres as retas suporte de $\overline{EF}$ e $\overline{AH}$. (03 escores)

$\overline{AH}$ é diagonal do quadrado ADHE.
Diagonal do quadrado é (~~lado~~) $l\sqrt{2}$. Então, $d = 10\sqrt{2}$

$d_{\overline{EF},\overline{AH}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ cm

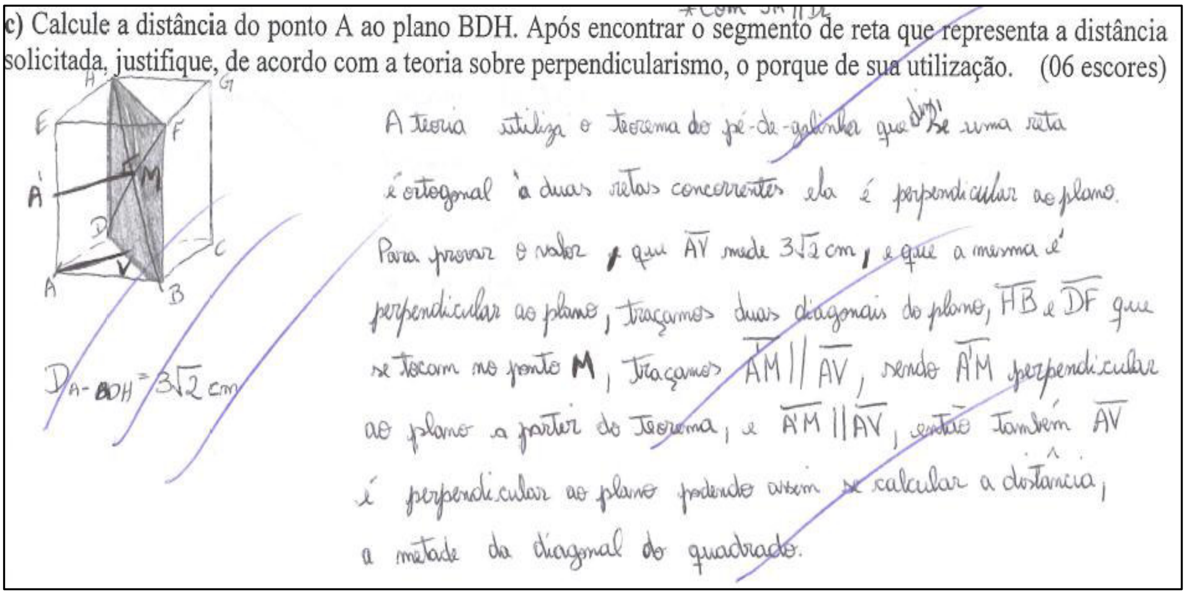
$\overline{AH}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{DH}^2 \rightarrow \overline{AH}^2 = 10^2 + 10^2 \rightarrow AH = 10\sqrt{2}$

Fonte: aluno Y

Usando argumentos da geometria plana e após encontrar o segmento perpendicular comum a duas retas reversas, o aluno Y calculou de maneira correta a distância entre as retas.

A figura 82 mostra a resolução da questão 3, letra c, que solicita a distância entre um ponto e um plano. Logo em seguida, pede que se justifique a escolha do segmento que representa a distância solicitada.

Figura 82 – Resolução da questão 3: letra c


c) Calcule a distância do ponto A ao plano BDH. Após encontrar o segmento de reta que representa a distância solicitada, justifique, de acordo com a teoria sobre perpendicularismo, o porque de sua utilização. (06 escores)

A teoria utiliza o Teorema do pé-de-galinha que diz se uma reta é ortogonal à duas retas concorrentes ela é perpendicular ao plano. Para provar o valor, que $\overline{AV}$ mede $3\sqrt{2}$ cm, e que a mesma é perpendicular ao plano, traçamos duas diagonais do plano, $\overline{HB}$ e $\overline{DF}$ que se tocam no ponto M, traçamos $\overline{A'M} \parallel \overline{AV}$, sendo $\overline{A'M}$ perpendicular ao plano a partir do Teorema, e $\overline{A'M} \parallel \overline{AV}$, então também $\overline{AV}$ é perpendicular ao plano podendo assim se calcular a distância, a metade da diagonal do quadrado.

$D_{A-BDH} = 3\sqrt{2}$ cm

Fonte: aluno Z

O aluno Z, antes de calcular a distância solicitada, justificou o porquê da escolha do segmento que representa a mesma. Para isso, utilizou o Teorema do Pé-de-Galinha, encontrando um segmento de reta que fosse ortogonal a duas retas do plano e consequentemente, perpendicular ao plano. Após encontrar esse segmento, traçou um segmento paralelo partindo do ponto ao plano, concluindo o exercício.

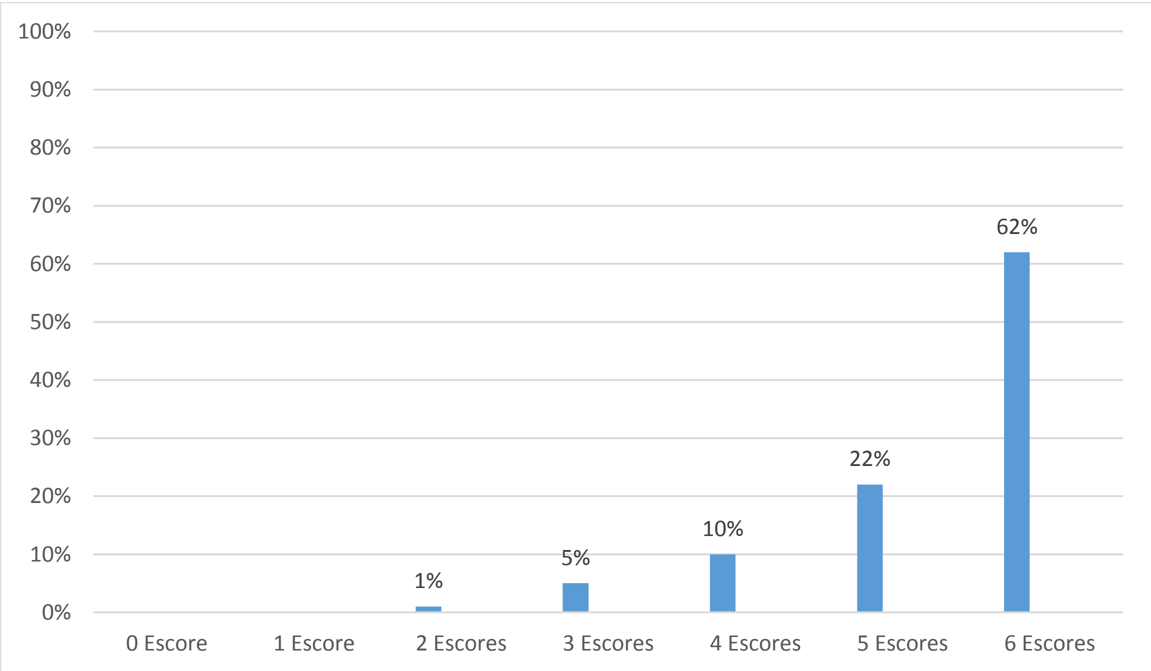
7 RESULTADOS OBTIDOS NAS AVALIAÇÕES

7.1 AVALIAÇÃO SOBRE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Os dados referentes a esta atividade foram obtidos da avaliação realizada em duplas no laboratório de informática. O objetivo foi de realizar construções geométricas tridimensionais sempre amparadas nos pressupostos teóricos apresentados. Analisaremos as três questões da avaliação e o percentual de acertos em relação a todo grupo de alunos, ou seja, 78 duplas. Os gráficos, abaixo descritos, fazem a relação entre o percentual de duplas de alunos e o número de escores (ideias avaliadas) corretos.

<u>Questão 1: Construção de duas retas reversas – 06 escores</u>

Gráfico 1 – Índice de Acertos: questão 1

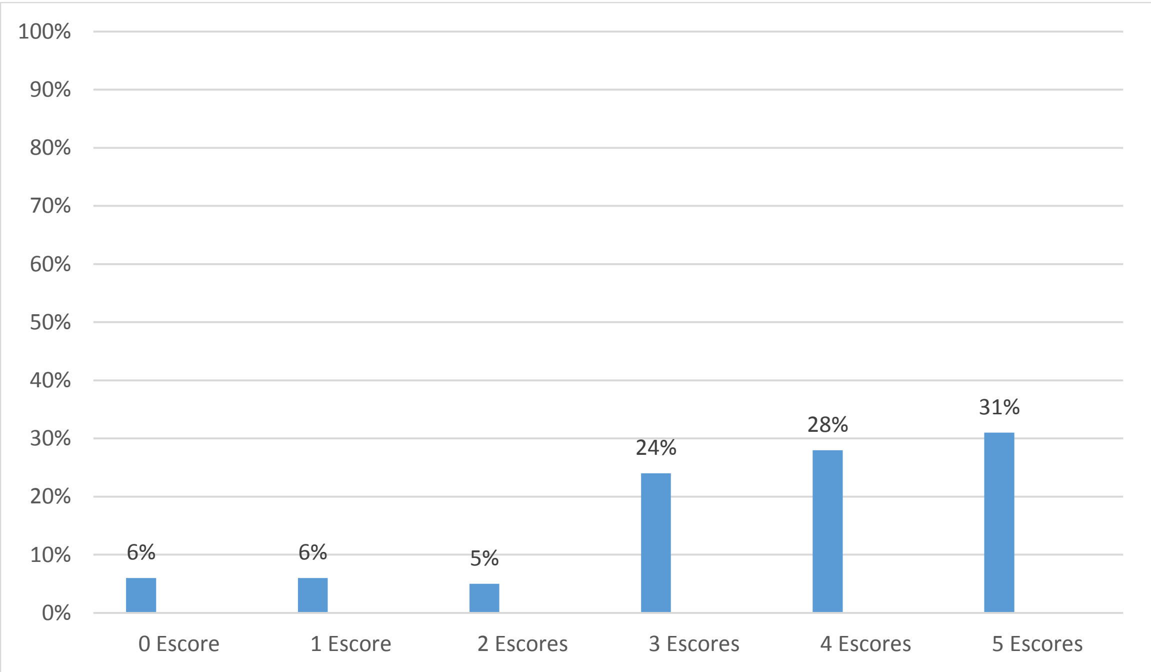


Fonte: do autor

Analisando o gráfico 1, percebe-se que grande parte do grupo de alunos obteve êxito na construção das duas retas reversas e na descrição dos passos dessa construção. Apenas 1% das duplas não atingiu a média de acertos. O alto índice de acertos também é em virtude desta construção já ter sido trabalhada durante a aula de laboratório.

Questão 2: Dadas duas retas reversas, construa por uma delas um plano paralelo à outra. Serão considerados os passos da construção anterior. No último passo, conclua por que o plano é paralelo à reta – 05 escores.

Gráfico 2 – Índice de Acertos: questão 2

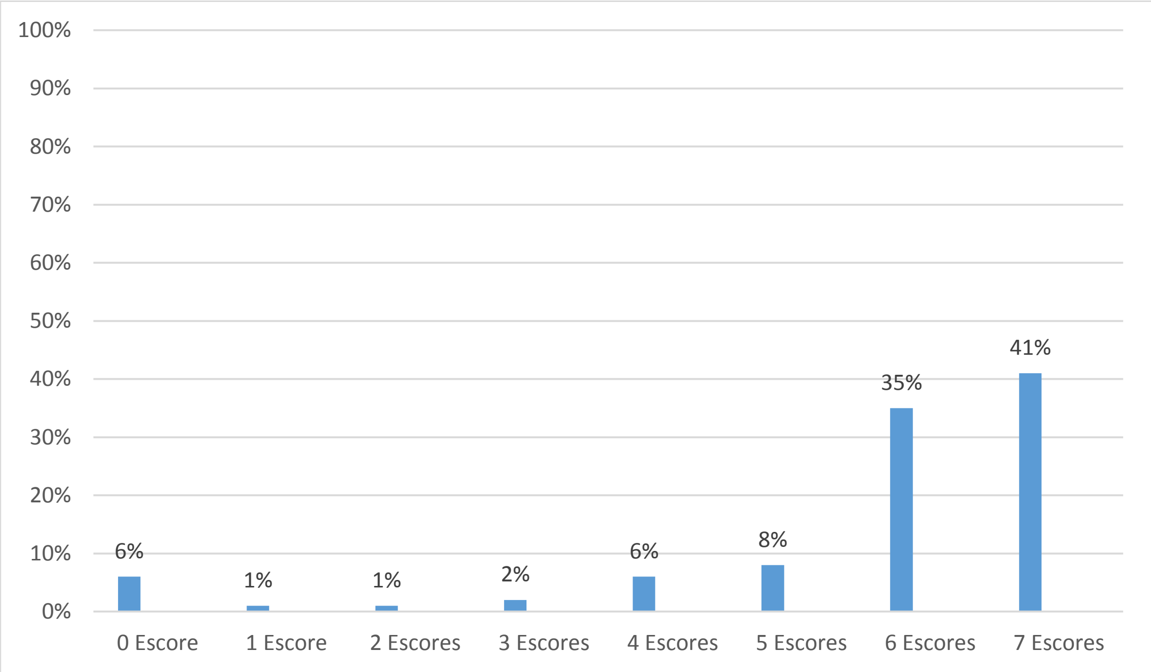


Fonte: do autor

No gráfico 2 é possível verificar que parte dos alunos teve algum grau de dificuldade, uma vez que 17 % ficou abaixo da média de acertos. A maioria dos erros cometidos nesta questão refere-se a não citação do Axioma de Euclides para a construção de uma reta paralela a uma das reversas e a não justificativa do por que do plano construído ser paralelo a uma das retas.

<u>Questão 3: Construção por um ponto, de uma reta paralela a dois planos secantes – 07 escores.</u>

Gráfico 3 – Índice de Acertos: questão 3



Fonte: do autor

A partir do gráfico 3 pode-se perceber que mais uma vez as duplas de alunos lograram êxito na atividade, onde apenas 10% ficaram abaixo da média de acertos. A maior parte dos erros cometidos girou em torno da não citação do Axioma de Euclides.

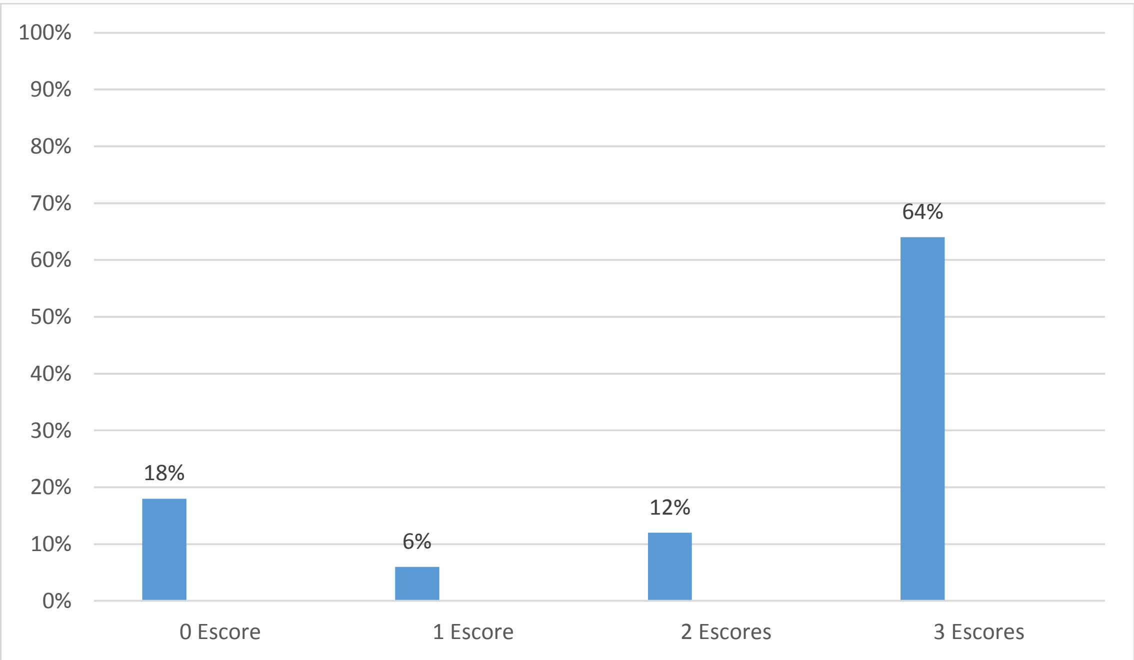
Embora não fosse avaliada nesta prova a utilização da linguagem da teoria dos conjuntos para a descrição dos procedimentos de construção, das 78 duplas que realizaram a prova em torno de 31% descreveram os passos das atividades utilizando a linguagem simbólica dos conjuntos.

7.2 AVALIAÇÃO FINAL

Os dados descritos a seguir referem-se à avaliação final somativa e individual aplicada em todo grupo de alunos do segundo ano do Ensino Médio, ou seja, 156 alunos. Esta avaliação teve por objetivo verificar o aprendizado obtido durante o desenvolvimento da proposta didática, envolvendo demonstrações, construções geométricas tridimensionais, cálculo de ângulos e distâncias e aplicação do Teorema do Pé-de-Galinha. Segue abaixo as respectivas questões da avaliação e o índice de acertos por questão.

Questão 1: Demonstre a unicidade do plano determinado por duas retas concorrentes – 03 escores.

Gráfico 4 – Índice de Acertos: questão 1

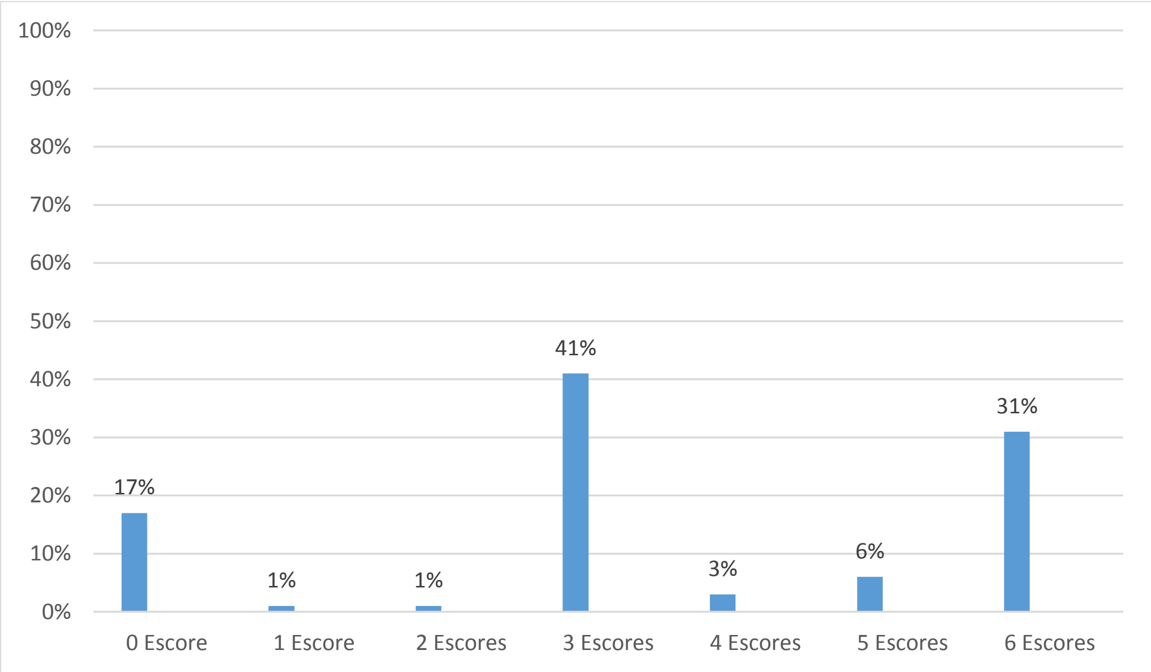


Fonte: do autor

Analisando os resultados do gráfico 4, percebe-se que 76% ficaram acima da média nesta questão. Os 24% que ficaram abaixo da média, tiveram dificuldade, principalmente em supor a existência de mais de um plano e realizar a demonstração por absurdo.

<u>Questão 2: Prove a existência de duas retas reversas – 06 escores.</u>

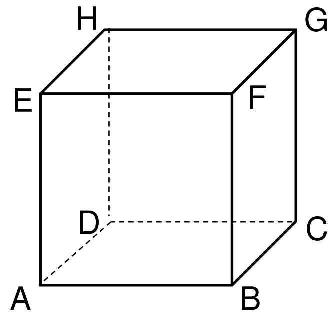
Gráfico 5 – Índice de Acertos: questão 2



Fonte: do autor

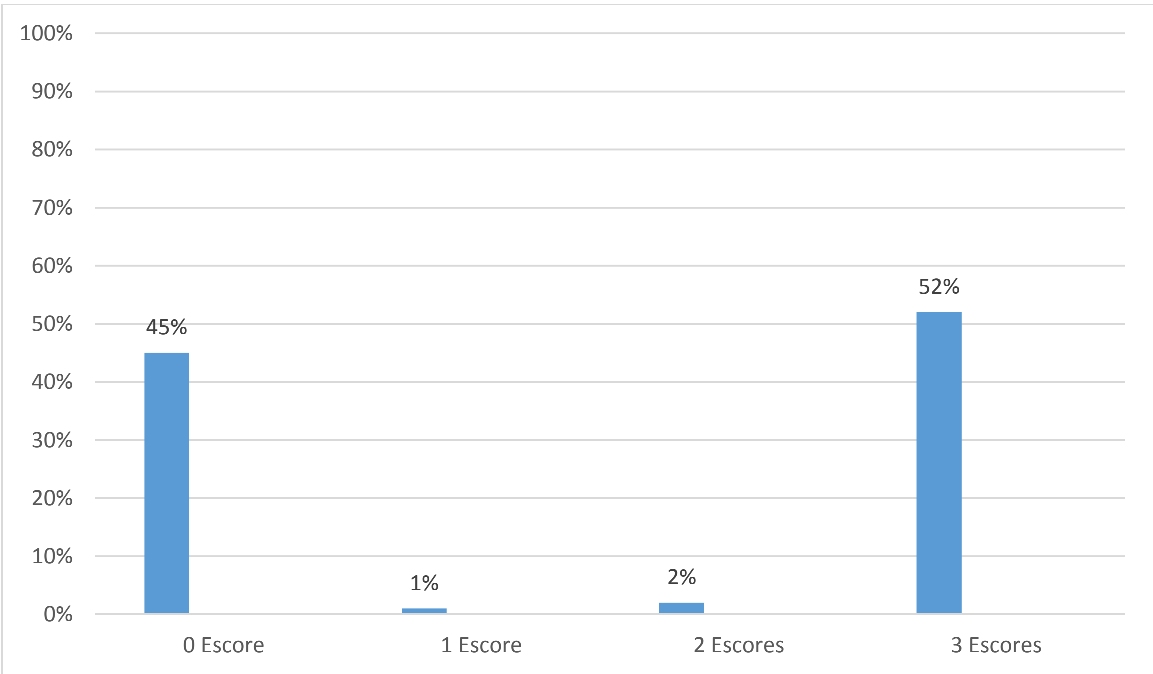
Percebe-se no gráfico 5 que 41% dos alunos acertaram 50% da questão. Este índice refere-se, principalmente, à construção de duas retas reversas, que faz parte da demonstração. Os 31% que acertaram toda a questão, construíram, supuseram a existência de um plano que contivesse duas reversas e provaram pela definição e por absurdo que seria impossível a existência desse plano. Dos 17% que não acertaram nenhum escore da questão, deixando a questão em branco.

Questão 3: O cubo, representado na figura abaixo, tem aresta medindo 12 cm.



a) Determine o ângulo entre os semiplanos *ABC* e *BCE* – 3 escores.

Gráfico 6 – Índice de Acertos: questão 3, letra a

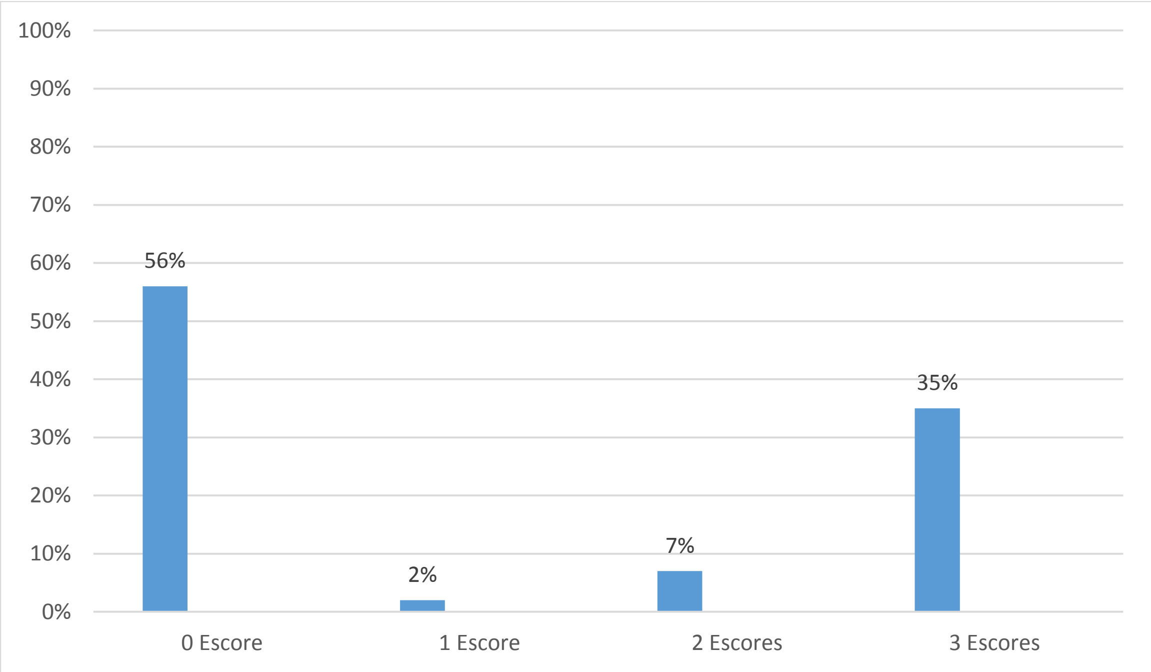


Fonte: do autor

O gráfico 6 mostra que o número de alunos que acertou totalmente a questão é semelhante ao número de alunos que errou totalmente. Dos 45% que erraram totalmente a questão, boa parte não identificou de forma correta o plano, sendo assim, não conseguiu determinar o ângulo solicitado, perdendo todos os escores da atividade.

<u>b) Calcule a distância entre as retas suporte de *EF* e *AH* – 3 escores.</u>

Gráfico 7 – Índice de Acertos: questão 3, letra b

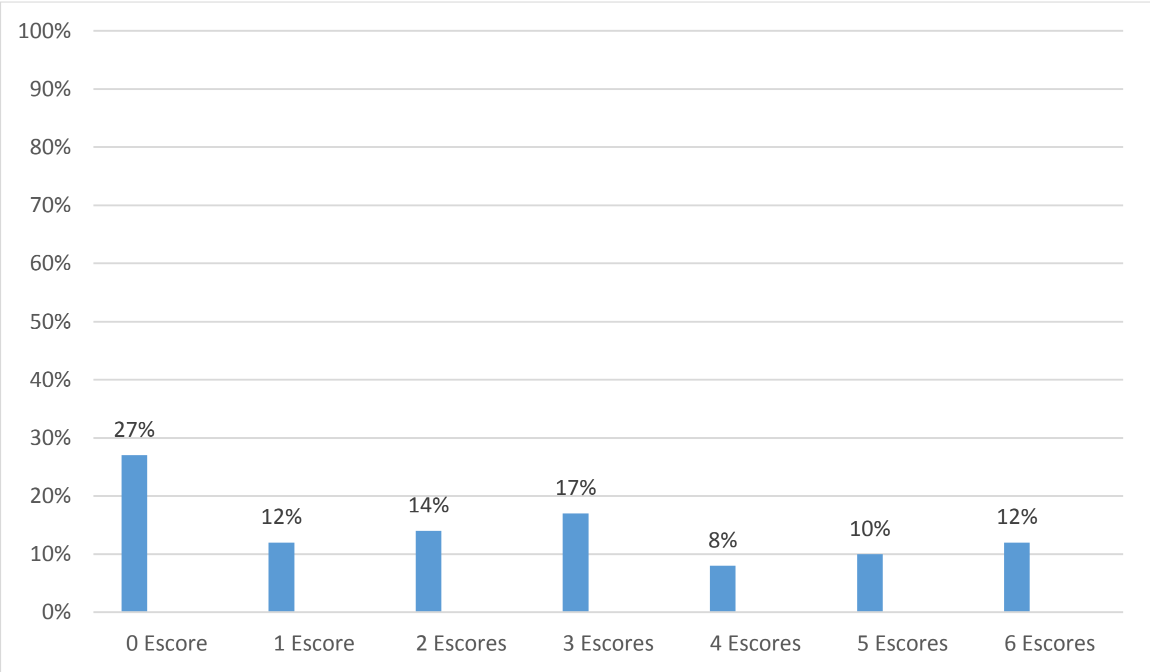


Fonte: do autor

O gráfico 7 mostra um maior percentual para os erros, onde 56 % dos alunos acabaram por errar toda a questão. Analisando as provas destes alunos, percebe-se que grande parte errou pela falta de alguns pré-requisitos, tais como identificar e calcular semidiagonal de um quadrado. Houve a identificação do segmento perpendicular comum, mas grande parte da turma calculou a distância de forma equivocada.

<u>c) Calcule a distância do ponto *A* ao plano *BDH*. Após encontrar o segmento de reta que representa a distância solicitada, justifique, de acordo com a teoria sobre perpendicularismo, o porquê de sua utilização – 6 escores.</u>

Gráfico 8 – Índice de Acertos: questão 3, letra c



Fonte: do autor

Conforme ilustra o gráfico 8, foi a questão com maior equilíbrio entre o número de acertos, com a predominância daqueles que não acertaram nenhum escore. A questão envolvia a identificação e o cálculo da distância e ainda solicitava que se justificasse a utilização do segmento escolhido. Os 12% que acertaram toda a questão, conseguiram identificar, calcular e ainda citar o Teorema do Pé-de-Galinha, ou seja, provando que o segmento de reta escolhido para determinar a distância entre o ponto e o plano era ortogonal a duas retas concorrentes desse plano, consequentemente perpendicular ao plano.

8 CONCLUSÃO

O objetivo principal deste trabalho foi apresentar e avaliar a aplicação de uma proposta didática para o ensino de geometria espacial de posição, tendo-se como público alvo os alunos do segundo ano do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria.

Antes de desenvolver essa proposta, buscou-se verificar como professores do Sistema Colégio Militar do Brasil estavam trabalhando tais conteúdos e como os autores dos livros didáticos utilizados pelo sistema abordavam esta parte inicial da geometria espacial. De posse da documentação que rege o funcionamento de cada disciplina dos Colégios Militares, verificou-se que praticamente não são trabalhados esses fundamentos geométricos, até mesmo porque a ênfase dos livros adotados recai muito mais nos aspectos relacionados a cálculos de volumes e áreas de sólidos geométricos, praticamente abandonando a lógica dedutiva apoiada nas propriedades primitivas e decorrentes. Cabe ressaltar que o Plano de Sequência Didática dos Colégios Militares prevê que se utilize a forma lógica dedutiva da geometria para interpretar formas e deduzir propriedades, conforme descrito no capítulo 3.1 deste trabalho.

Ainda na fase de pré-desenvolvimento da proposta didática, procurou-se verificar que elementos seriam necessários para que se obtivesse algum sucesso na proposta. Explorar o raciocínio intuitivo seria um começo e isso se fez por meio da utilização de materiais concretos. Nesta fase, o aluno deveria levantar hipóteses, buscando fundamentos necessários e suficientes para determinado acontecimento geométrico. A escolha do sistema de axiomas, por exemplo, não deveria ser exaustiva, caso contrário, a maturidade matemática dos alunos, ainda pequena, faria com que objetivo da proposta não fosse atingido por excesso. Assim, foram enunciados alguns axiomas elementares e a partir deles foram elaboradas atividades nas quais os alunos pudessem dar um passo à frente, ou seja, ir complementando a teoria com a demonstração de alguns teoremas e propriedades decorrentes. Outra característica pensada no momento de desenvolver a proposta didática foi a de realizar as construções geométricas ao invés de apenas apresentar determinados conceitos como, por exemplo, a posição relativa de determinados entes. Nesse contexto, os alunos poderiam verificar que se não tivessem o domínio da teoria, como axiomas e proposições consequentes, poderiam até realizar um desenho, porém, não teriam como enunciar os procedimentos adotados em suas representações tridimensionais. Desta forma, a realização das construções tridimensionais se fazia necessária para o bom andamento da proposta, porém, esbarrava-se num problema: representar tridimensionalmente no plano. Distorções, falta de visibilidade e até mesmo a falta de criatividade seria um empecilho para o cumprimento destas atividades. Surgiu aí a ideia de se utilizar um *software* que pudesse reproduzir de maneira mais eficiente o trabalho dos alunos. Certamente, a utilização do *software GeoGebra,* em particular a janela 3D, tornou viável as construções, além de oportunizar a utilização das novas tecnologias para o ensino de matemática.

No tocante ao cálculo de ângulos e distâncias, buscou-se não apenas a operacionalização matemática e, sim, que o aluno se preocupasse em construir ou justificar determinada escolha, por exemplo, de determinado segmento de reta. Construir o segmento perpendicular comum e utilizar o Teorema Fundamental do Perpendicularismo foi mais difícil para os alunos do que deduzir algumas propriedades geométricas. Sendo assim, a sugestão é que esta parte do trabalho seja desenvolvida com mais tempo, pois além de se deparar com novos conceitos, o aluno esbarra na falta de alguns pré-requisitos de geometria plana.

Paralelamente ao objetivo principal da proposta didática, buscou-se incentivar ao a utilização dos símbolos da teoria dos conjuntos. Foi a oportunidade que o grupo de alunos teve de verificar o quanto essa linguagem é apropriada para descrever a matemática, neste caso, utilizando a simbologia para representar os entes geométricos e suas relações. Simplicidade, precisão e generalidade tornam imprescindíveis esse conhecimento e devemos sempre que possível incentivar os alunos a esta utilização.

Desta forma, entende-se que a proposta didática geometria espacial de posição, por si só, não é suficiente para desenvolver o raciocínio lógico dedutivo completo de um grupo de alunos do Ensino Médio, todavia, é uma forma de se fazer uma iniciação a este tipo de conhecimento e, com certeza, é uma oportunidade que se tem de mostrar uma parte da matemática mais formal, que vai nascendo a partir de um conjunto de teorias, expandindo-se através da lógica, mostrando-se a partir de construções e sendo representada pelos conjuntos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, I. A. C.; BELLEMAIN, F.; RODRIGUES, W.L. Construções geométricas com papel e lápis ou utilizando software gráfico: que mudanças ocorrem quando se opta por uma dessas mídias? Disponível em: <http://limc.ufrj.br/htem4/papers/79.pdf.>. Acesso em: 12 Mar. 16.

ALVES, G.S.; SOARES, A.B. (2003). “Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do Software Tabulae”. In: XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação – IX Workshop de Informática na Escola. Campinas: Unicamp. 2003, pp. 275-286.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, MEC, 2002.

COMMANDINO, Frederico. **Euclides-Elementos de Geometria**. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações.** 2. ed, São Paulo: Ática, v. 2, 2014.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial**. 5 ed, São Paulo, Atual, 2005.

FILHO, Daniel Cordeiro de Morais. Minicursos de Laboratório de Matemática para Professores do Ensino Médio. Disponível em: <http://150.165.78.3/Lapem/Documentos/M%C3%B3dulo%202%20%20Geometria%20Posicional.pdf>. Acesso em: 20 Fev. 2016.

GIRALDO, V.. **Integrando Geometria e Funções: Gráficos Dinâmicos.** Revista do Professor de Matemática (RPM), São Paulo, v. 30, n. 79, p. 39 - 46, 3º quadrimestre, 2012.

HILBERT, David. **The foundations of geometry**. Open Court Publishing Company, 1902.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: volume único**. 5. ed., São Paulo: Atual, 2011.

____. **Matemática: ciência e aplicações.** 7. ed., São Paulo: Saraiva, v.2, 2013.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática.** São Paulo: Moderna, v. 2, 2013.

LIMA, Elon Lajes. **Números e Funções Reais.** 1ª ed**,** Rio de Janeiro, SBM, 2013.

LORENZATO, Sérgio (org.) **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de Professores.** Coleção formação de professores. Autores associados. Campinas/SP, 2006

MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. **Fundamentos de Geometria Espacial.** Belo Horizonte, CAED-UFMG, 2013.

MANFIO, F. Fundamentos da Geometria, 2013. Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/pessoas/manfio/Fundamentos.pdf>. Acesso em: 20 Mar. 2016.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula**. 1ª. ed., São Paulo: Livraria da Fisica, 2009.

MIGUEL, J.C. (2003). O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas. Núcleos de Ensino: **Artigos dos Projetos realizados em 2003**. p.375-394. Disponível em: www.unesp.br/prograd/PDFNE2003/O%20**ensino**%20de%20**matematica**.pdf. Acesso em: 20 Fev. 2016.

MOREIRA, Ana Cláudia. Geometrias sob a Axiomática de Hilbert, 2006. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/sobhilbert.pdf>. Acesso em: 20 Jul. 2016.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; JORGE, Miguel. **Geometria I**. 59 ed. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1990.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria.** 1ª **.**ed.**,** Rio de Janeiro, SBM, 2013.

OROZCO, Juan Carlos. **Plano de Sequências didáticas – 2º ano / Ensino Médio.** Rio de Janeiro, 2012.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática Volume 2.** 2. ed., Rio de Janeiro: Ética, v.2, 2013.

APÊNDICE A – SOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS: CONCEITOS INICIAIS

Exercícios

1. *Existência:* pela definição de retas paralelas, existe pelo menos um plano que contenha duas dessas retas.
Unicidade: suponha que existam dois planos α e α' que contenham duas retas r e s, tal que $r \,//\, s$. Tomando-se dois pontos distintos A e B, pertencentes a r e C pertencente a s, teríamos:
α = pl (ABC) = α', logo não existe mais que um plano que contenha r e s.

2. *Existência:* pela definição de retas concorrentes, existe pelo menos um plano que contenha duas dessas retas.
Unicidade: suponha que existam dois planos α e α' que contenham duas retas r e s, tal que $r \cap s = \{P\}$. Tomando-se dois pontos A e B, pertencentes a r e a s, respectivamente, tem-se que:
α = pl (ABP) = α', logo não existe mais que um plano que contenha r e s.

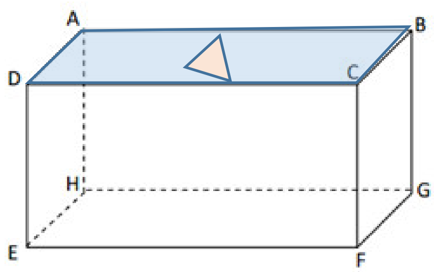
3. Tomemos um plano α e sobre este plano dois pontos A e B. Pelo Axioma 1, A e B determinam uma única reta r, que pelo Axioma 3, está contida em α. Tomando-se um ponto C não pertencente a α, tem-se que A e C determinam também uma reta s. Desta forma, podemos construir em α tantas retas quisermos.

4. Duas retas distintas estão contidas em um mesmo plano, conforme demonstração anterior. Uma reta concorrente a ambas intersectará as mesmas em dois pontos que pertencem ao plano que contém as paralelas. Logo, pelos axiomas 1 e 3, esta reta estará contida no mesmo plano que as paralelas.

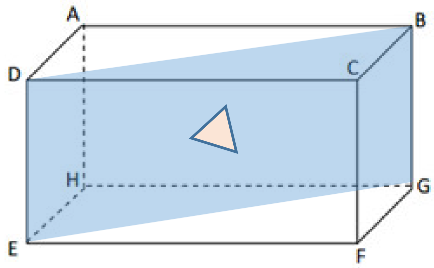
5. Suponha que dois planos α e β são paralelos, logo, não terão pontos em comum. Se uma reta r está contida em α, todos os seus pontos pertencerão a α. Como $\alpha \cap \beta = \varnothing$, $r \cap \beta = \varnothing$, ou seja, r é paralela a β.

6. Duas retas r e s concorrentes num ponto P estão contidas em um único plano α. Uma terceira reta t concorrente a r e s, não em P, estará no mesmo plano, uma vez que conterá um ponto de cada uma das retas e pelo Axioma 3, estará contida em α.

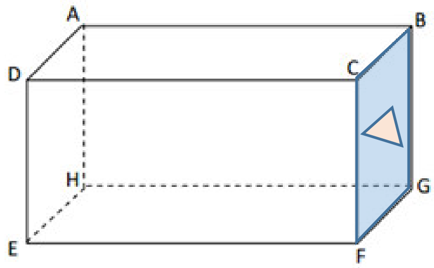
7.
a)



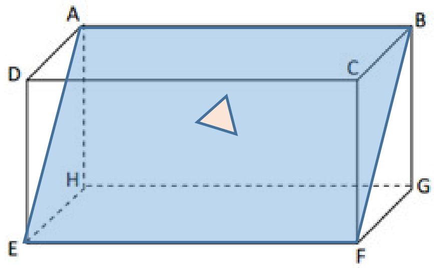
b)



c)



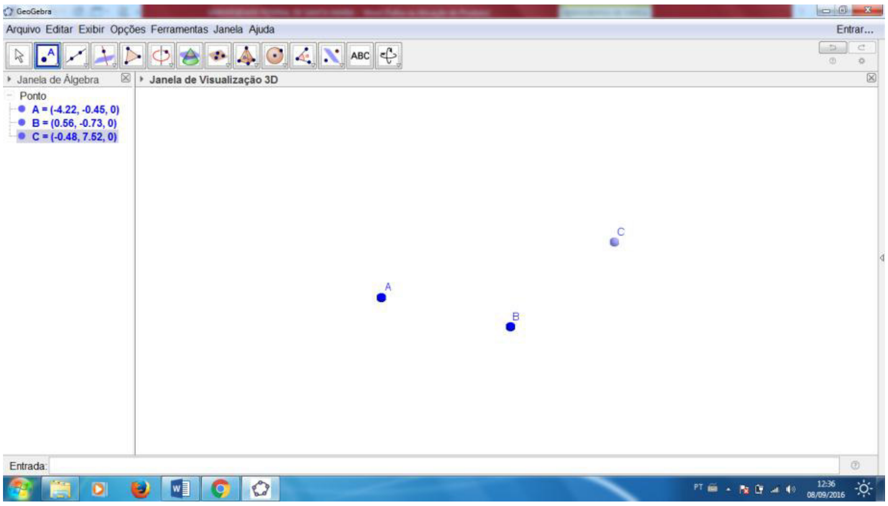
d)



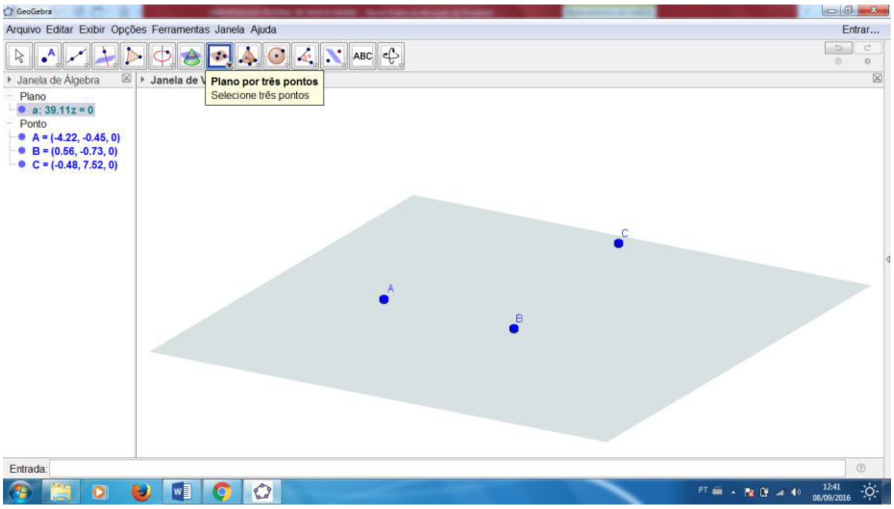
APÊNDICE B – SOLUÇÃO DE ATIVIDADES: CONSTRUÇÕES TRIDIMENSIONAIS

1.

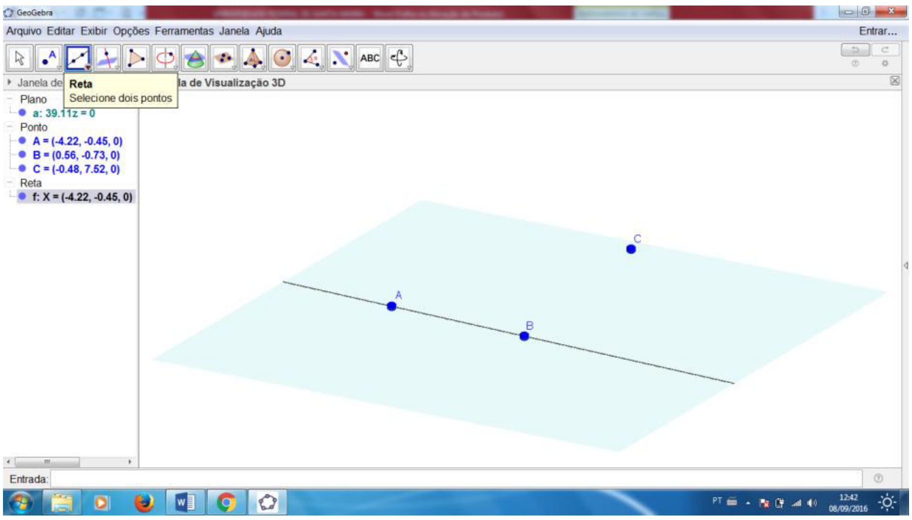
Tomar três pontos não colineares



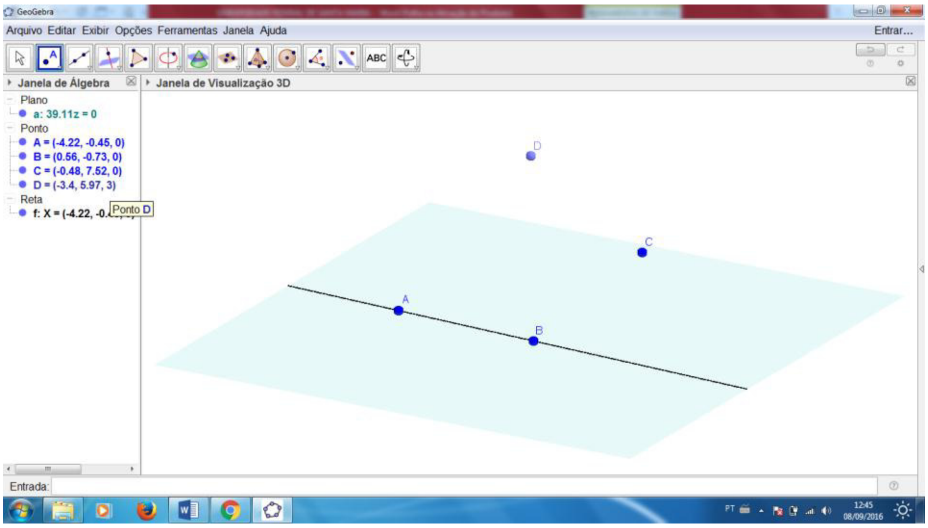
Construir um plano pelos três pontos



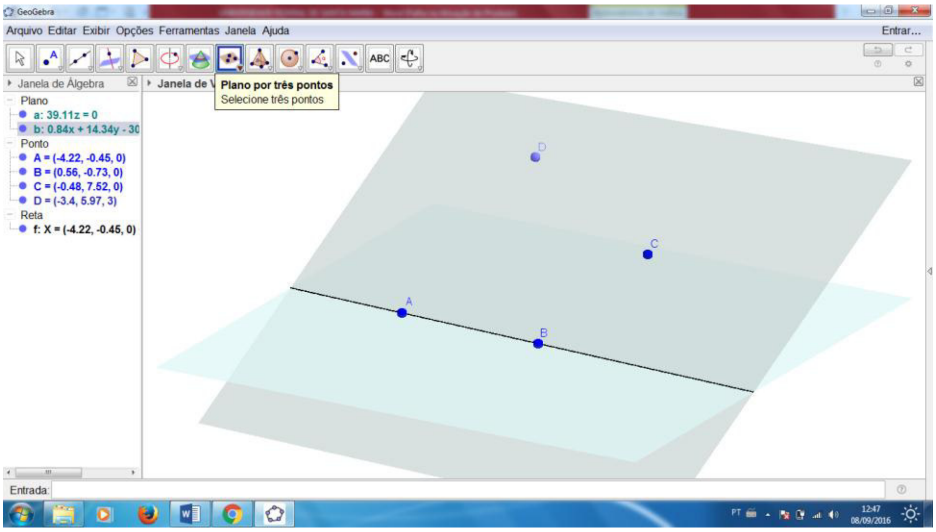
Construir uma reta por dois desses pontos (A,B)



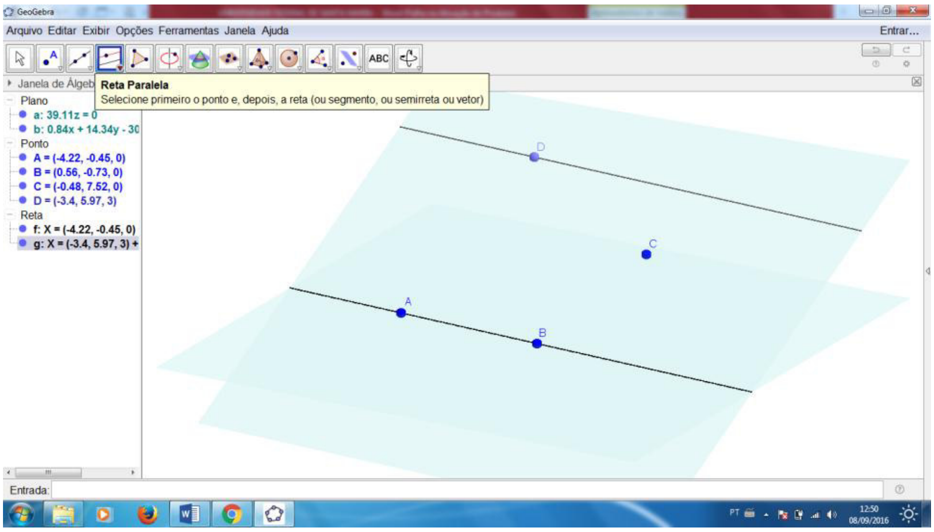
Tomar um ponto fora do plano (D)



Construir um plano passando por D e pela reta AB

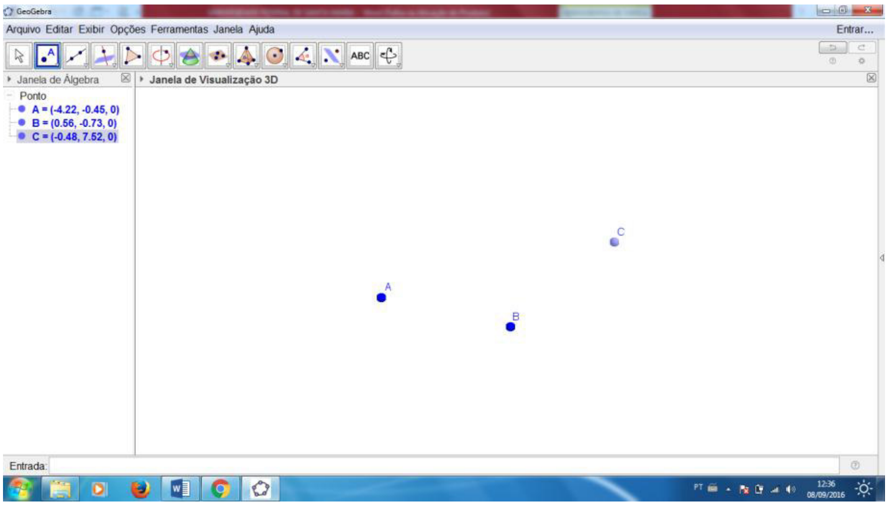


Construir pelo ponto D, uma reta paralela à reta AB

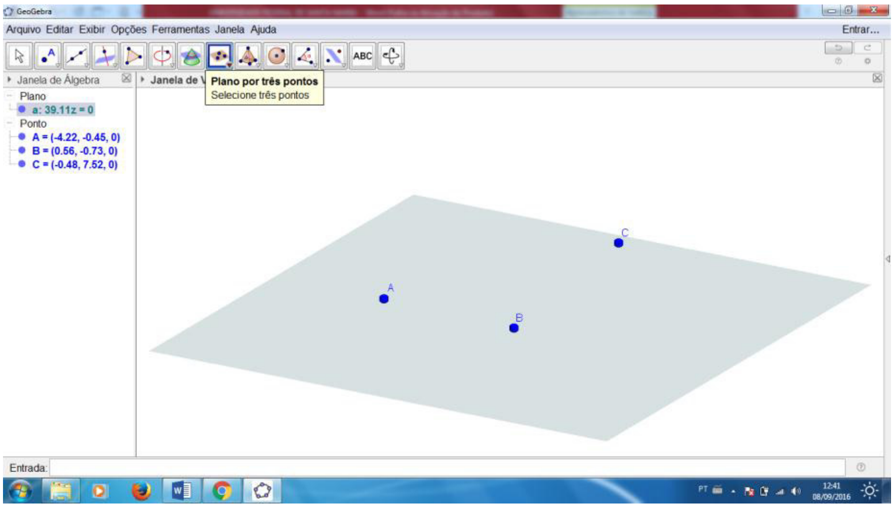


2.

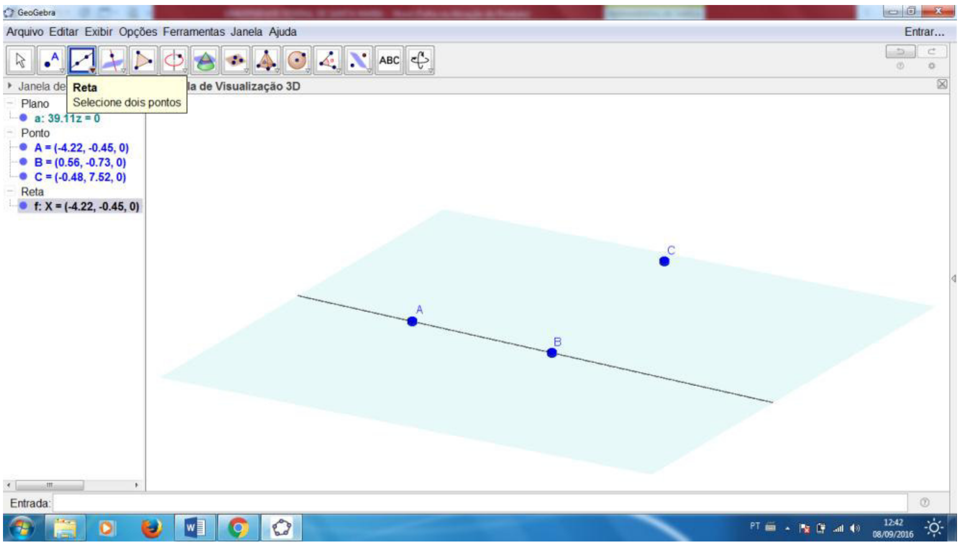
Tomar três pontos não colineares



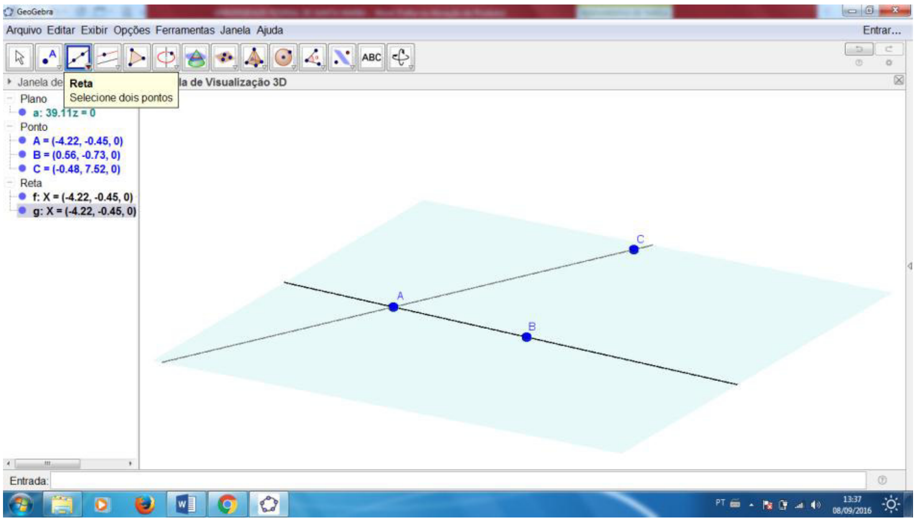
Construir um plano pelos três pontos



Construir uma reta por dois desses pontos (A,B)

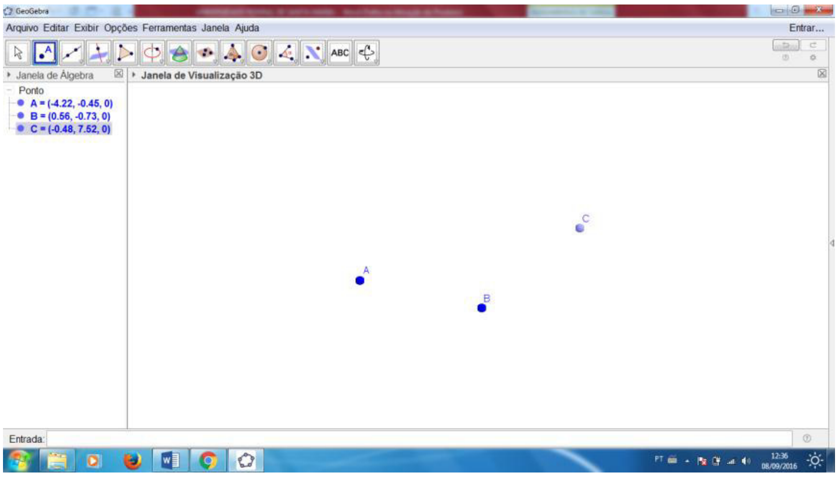


Construir uma reta por dois outros desses pontos (A,C)

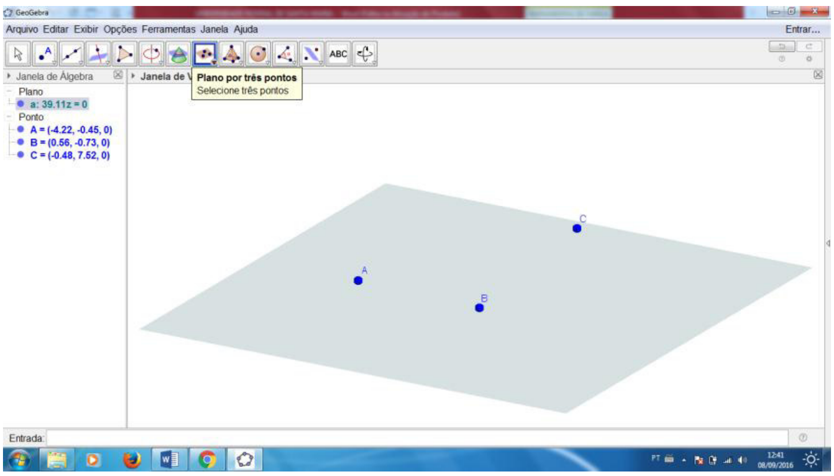


3.

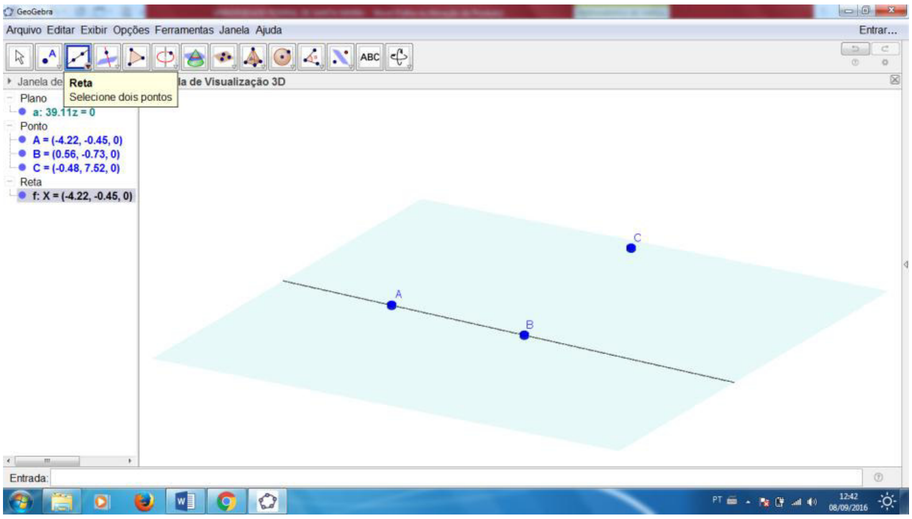
Tomar três pontos não colineares



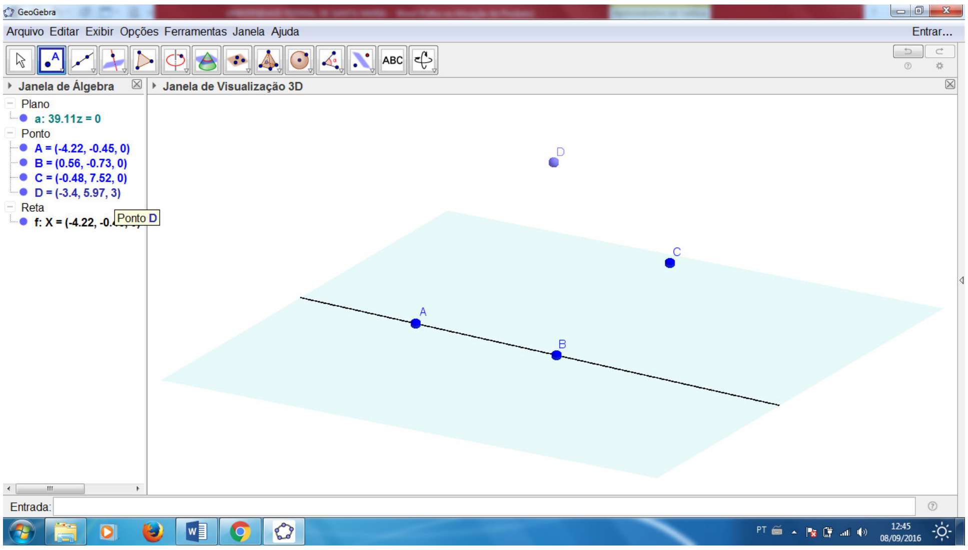
Construir um plano pelos três pontos



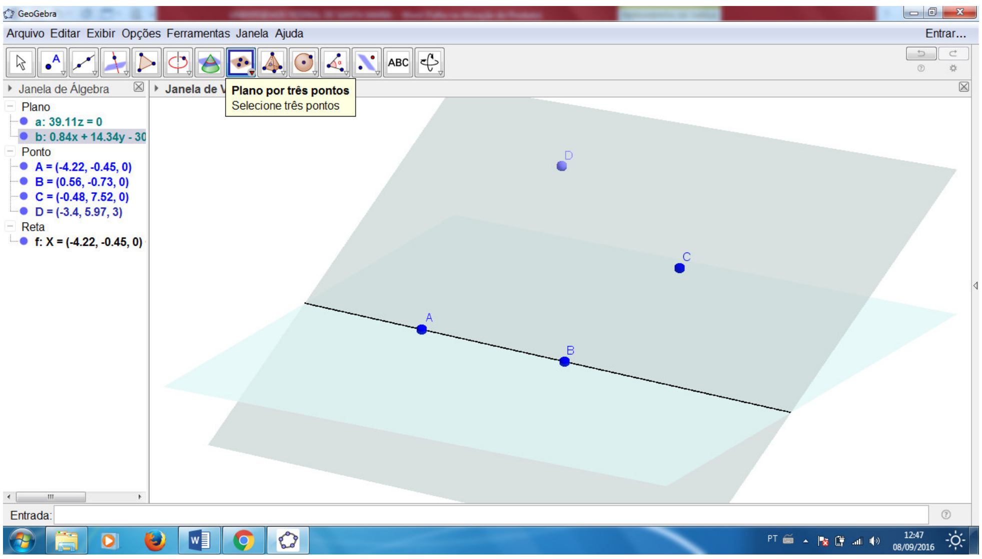
Construir uma reta por dois desses pontos (A,B)

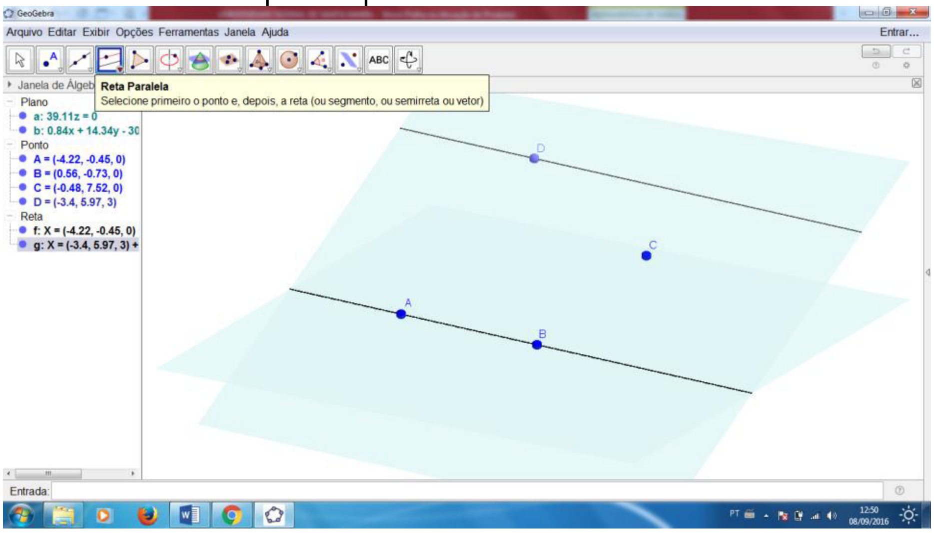


Tomar um ponto fora do plano (D)

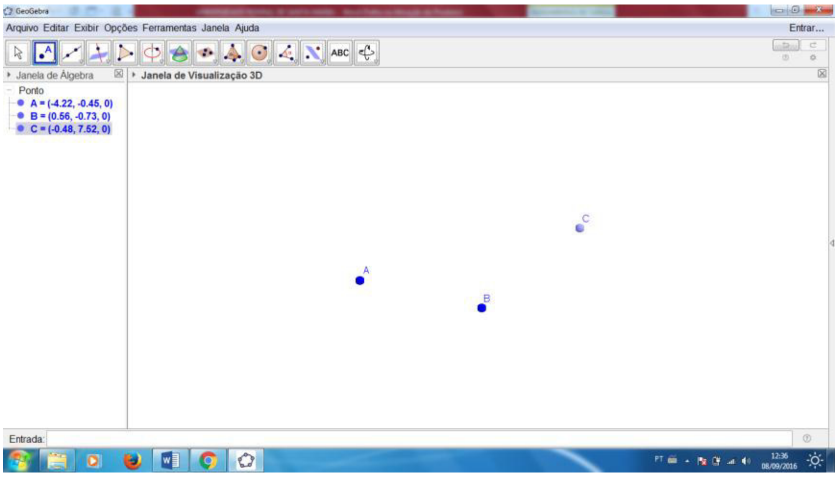
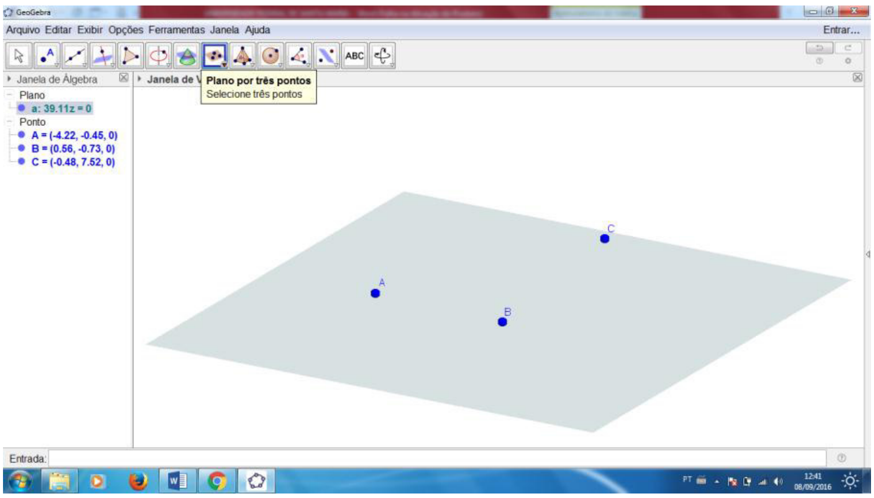


Construir um plano passando por D e pela reta AB

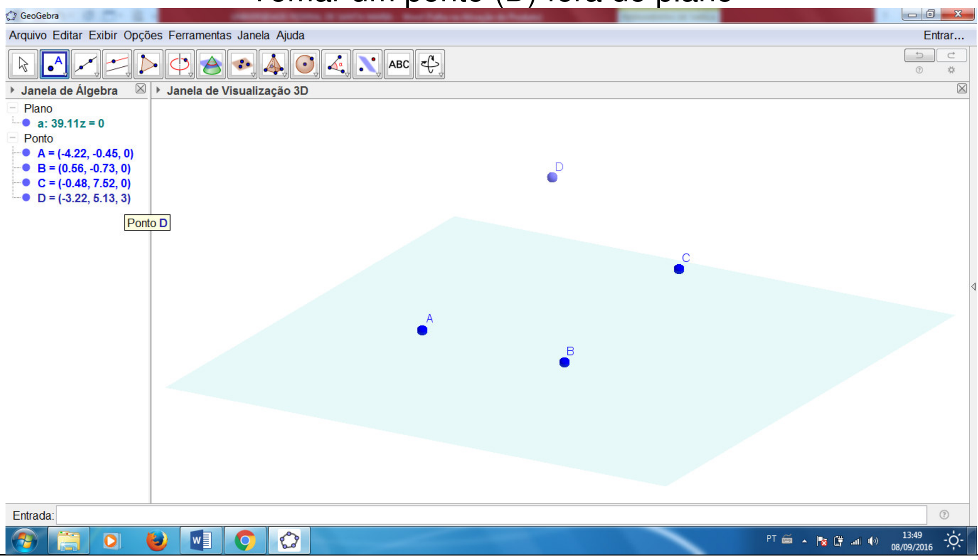


Construir pelo ponto D, uma reta paralela à reta AB. A reta será paralela ao plano que contém a reta AB. 

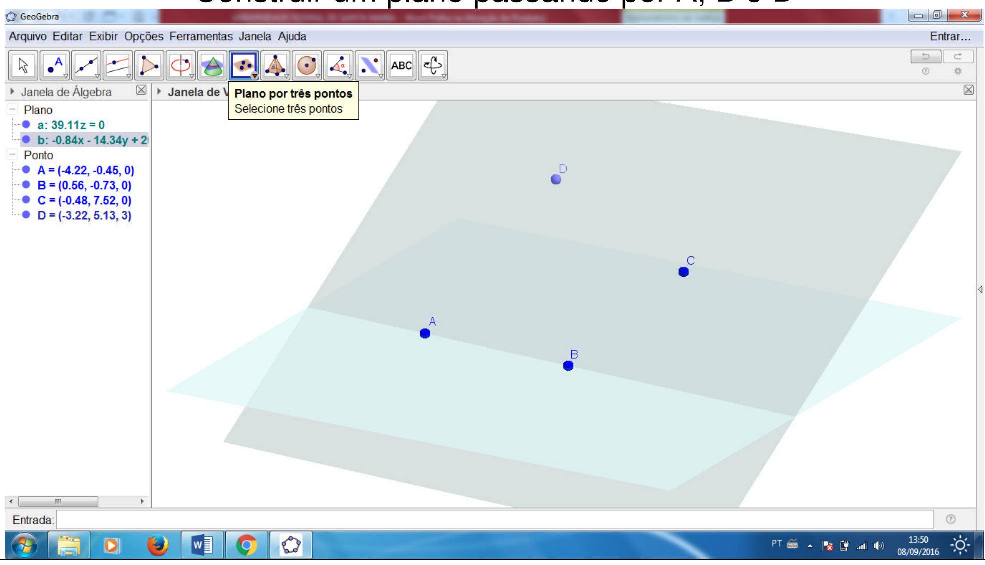
4.

Tomar três pontos não colineares 
Construir um plano pelos três pontos 

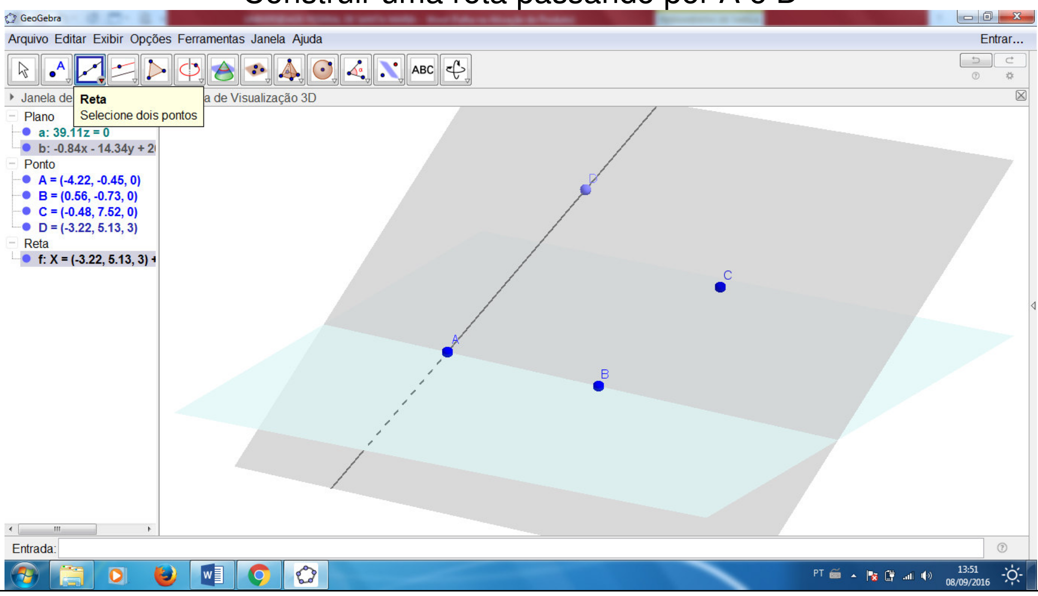
Tomar um ponto (D) fora do plano



Construir um plano passando por A, B e D

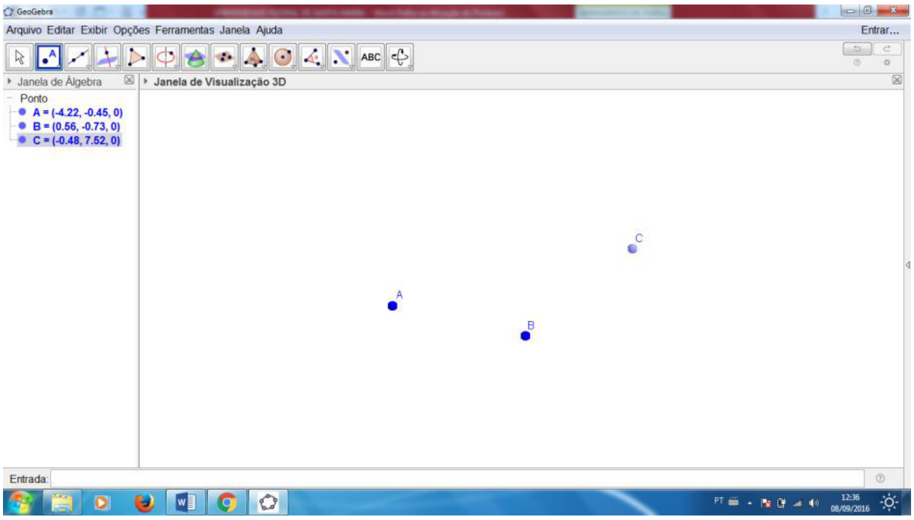


Construir uma reta passando por A e D

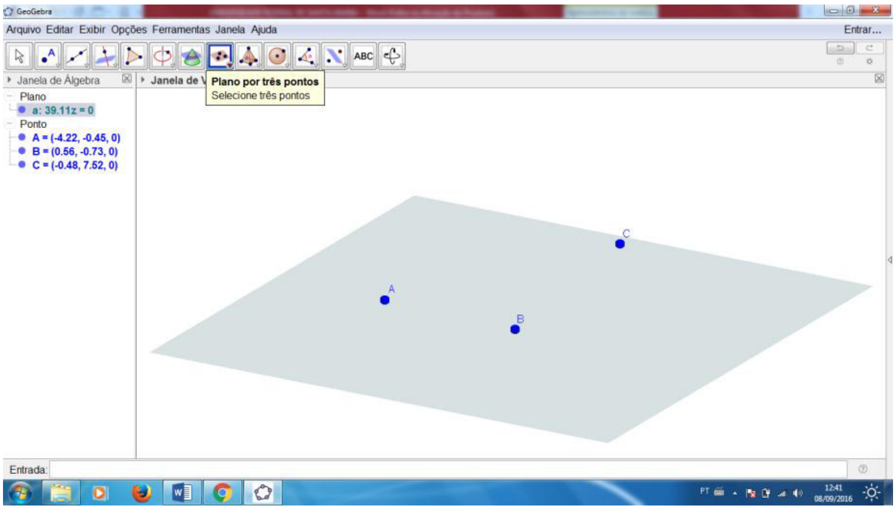


5.

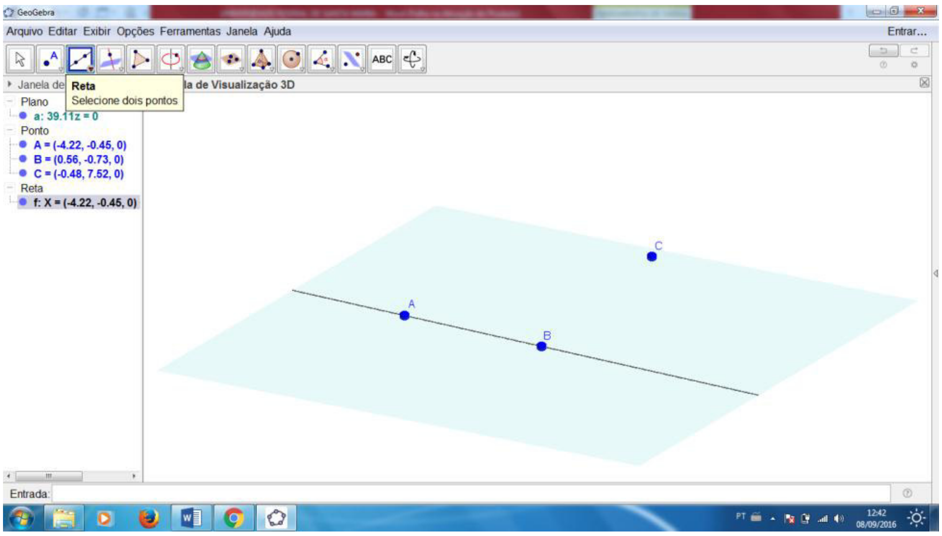
Tomar três pontos não colineares



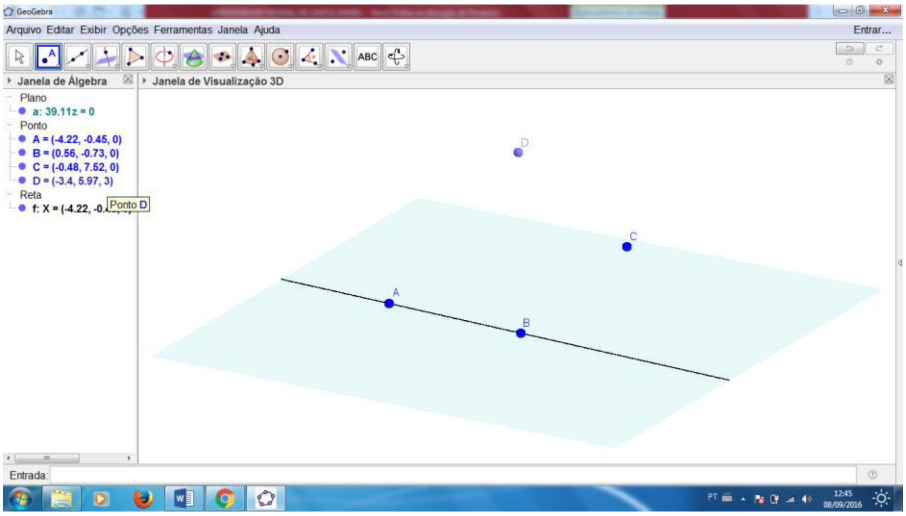
Construir um plano pelos três pontos



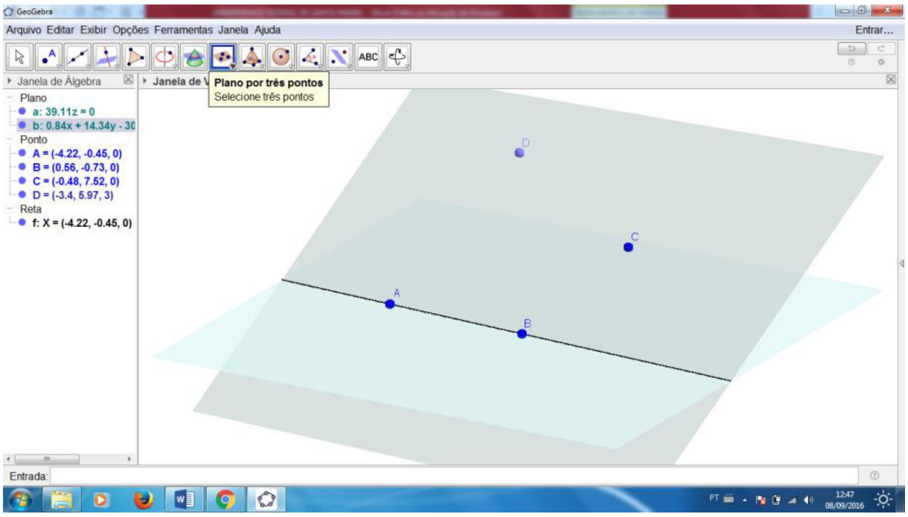
Construir uma reta por dois desses pontos (A,B)



Tomar um ponto fora do plano (D)

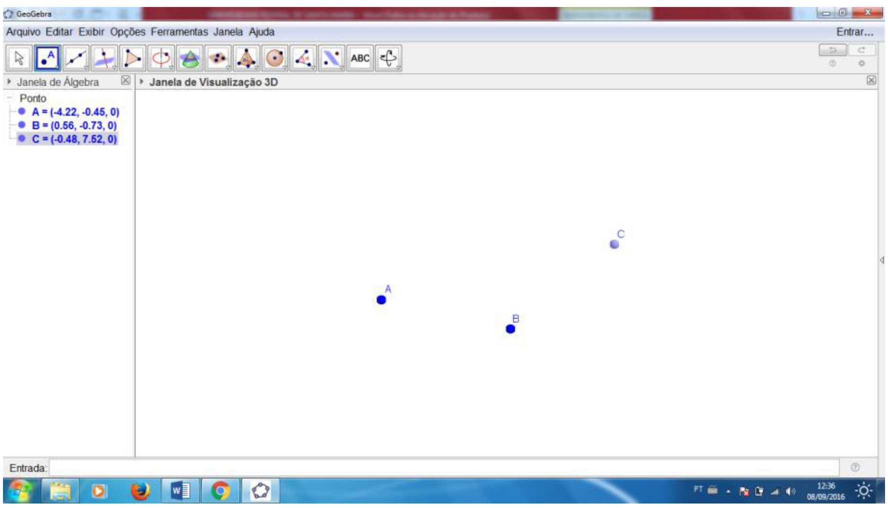


Construir um plano passando por D e pela reta AB

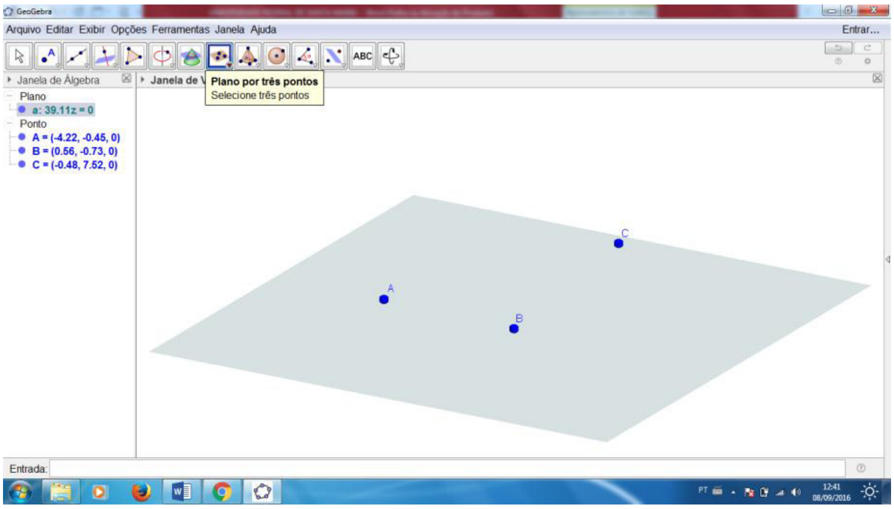


6.

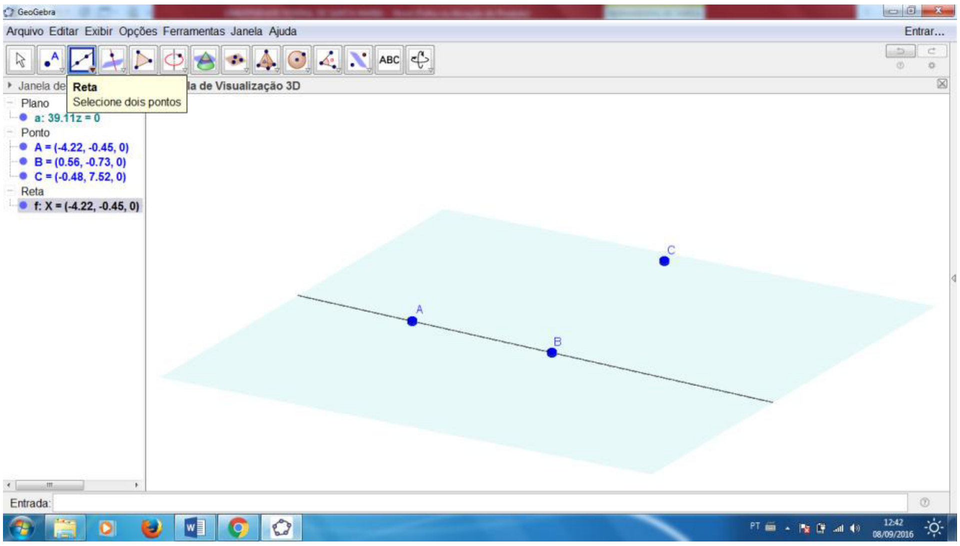
Tomar três pontos não colineares



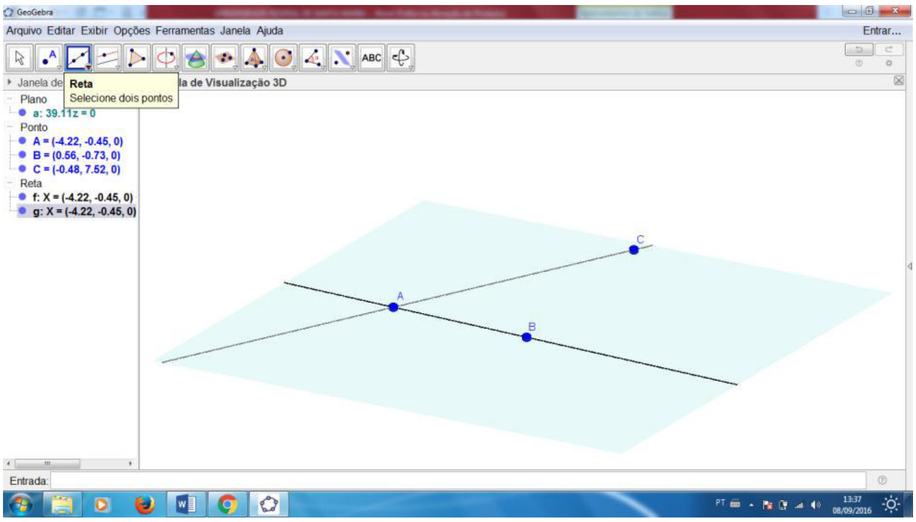
Construir um plano pelos três pontos



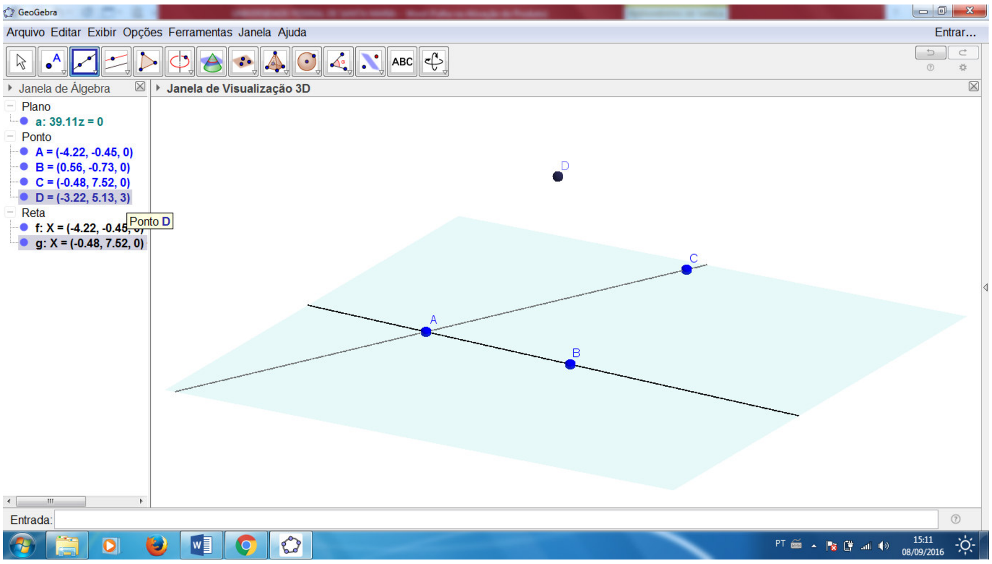
Construir uma reta por dois desses pontos (A,B)



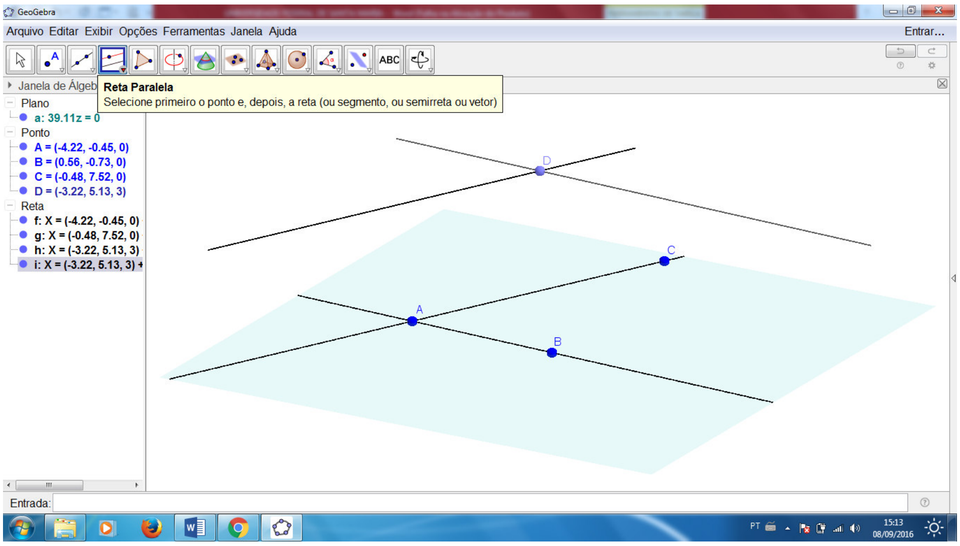
Construir uma reta por dois outros desses pontos (A,C)



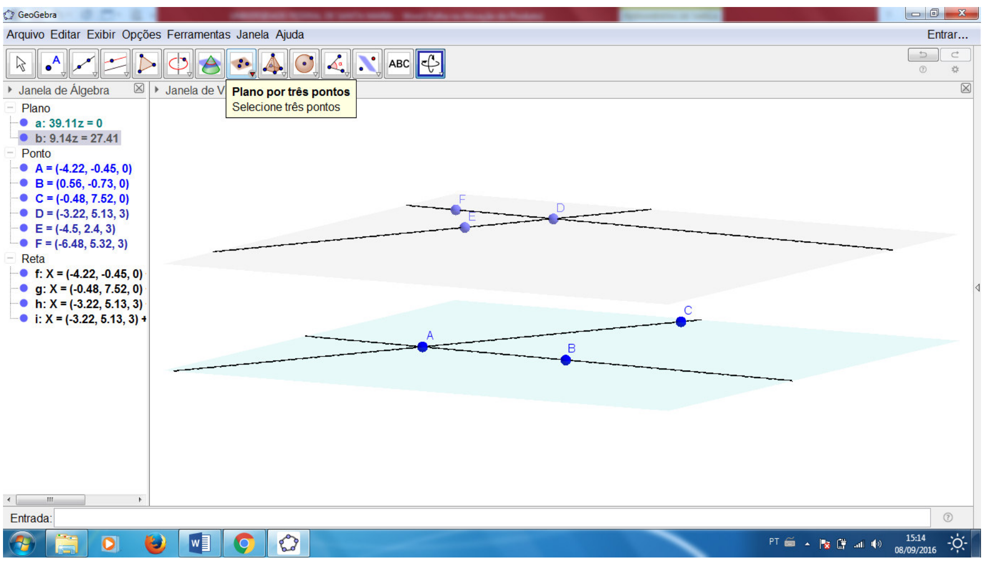
Tomar um ponto (D) fora do plano



Construir duas paralelas a AC e BC, passando por D



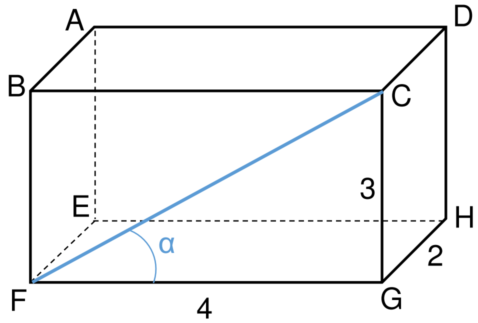
Construir um plano paralelo às últimas retas construídas



APÊNDICE C – SOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS: ÂNGULOS E DISTÂNCIAS

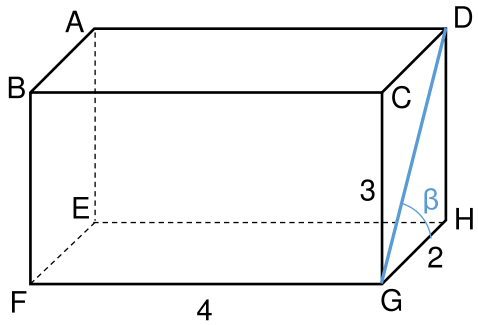
1.

a) O ângulo *α*, assinalado na figura abaixo, é o ângulo solicitado.



$$tg\ \alpha = \frac{Cat.op.}{Cat.adj.} = \frac{3}{4}$$

b) O ângulo *β*, assinalado na figura abaixo, é o ângulo solicitado.



$$sen\ \beta = \frac{Cat.op.}{Hip.} = \frac{3}{\overline{GD}}$$

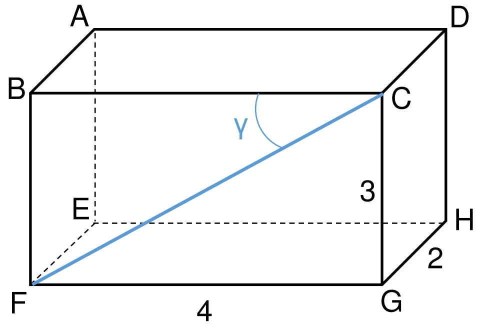
$$\overline{GD}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{HD}^2$$

$$\overline{GD}^2 = 2^2 + 3^2$$

$$\overline{GD}^2 = 13 \Rightarrow \overline{GD} = \sqrt{13}$$

$$sen\ \beta = \frac{3}{\overline{GD}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

c) Como $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FC}$ são retas reversas, tomemos $\overleftrightarrow{BC}$ que é paralela a $\overleftrightarrow{AD}$ e concorrente a $\overleftrightarrow{FC}$. O ângulo *γ*, assinalado na figura abaixo, é o ângulo solicitado.



$$cos\ \gamma = \frac{Cat.adj.}{Hip.} = \frac{4}{\overline{FC}}$$

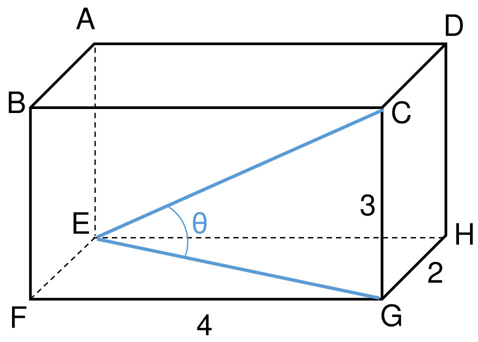
$$\overline{FC}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{FC}^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\overline{FC} = \sqrt{25} = 5$$

$$cos\ \gamma = \frac{4}{\overline{FC}} = \frac{4}{5}$$

d) Neste caso queremos calcular a tangente do ângulo entre uma reta e um plano. Por definição, sabemos que o ângulo entre uma reta e um plano, é o ângulo que a reta forma com sua projeção no plano. O ângulo θ, assinalado na figura abaixo, é o ângulo solicitado.



$$tg\ \theta = \frac{Cat.op.}{Cat.adj.} = \frac{3}{\overline{EG}}$$

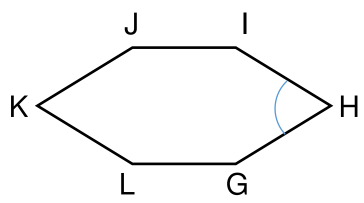
$$\overline{EG}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2$$

$$\overline{EG}^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$

$$\overline{EG} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

2.

Neste caso, o ângulo solicitado é o ângulo entre dois semiplanos, que por definição, é o ângulo formado por duas semirretas, cada uma contida em um dos semiplanos e ambas perpendiculares a intersecção dos mesmos. A intersecção dos semiplanos é o segmento de reta $\overline{BH}$ e como as faces laterais são retângulos, os segmentos $\overline{GH}$ e $\overline{IH}$ são perpendiculares ao segmento $\overline{BH}$. Logo, o ângulo solicitado é o ângulo $G\hat{H}I$.



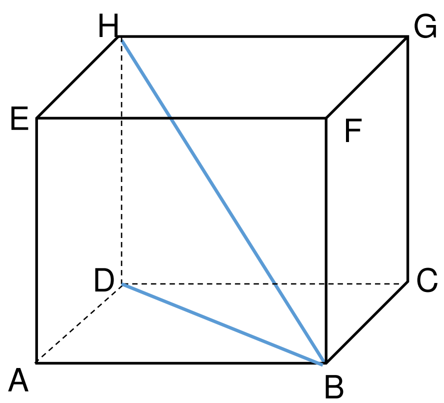
$G\hat{H}I$= ângulo interno de um hexágono regular. Calculamos a soma dos ângulos internos e dividimos por 6, obtendo-se $G\hat{H}I$, logo:

$$G\hat{H}I = \frac{(n-2)180º}{n} = \frac{(6-2)180º}{6} = 4.30 = 120º$$

3.

Solução

a) A distância está assinalada na figura abaixo



Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$\overline{BH}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DH}^2$

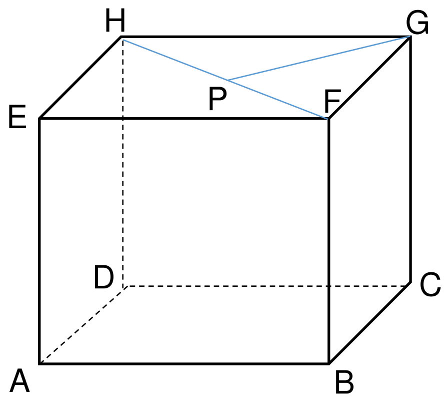
Por outro lado, o segmento $\overline{BD}$ é a diagonal do quadrado ABCD, logo, $BD = 10\sqrt{2}$.

Então:

$\overline{BH}^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 + 10^2 = 100.2 + 100 = 200 + 100 = 300$

$\overline{BH} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}\ cm$

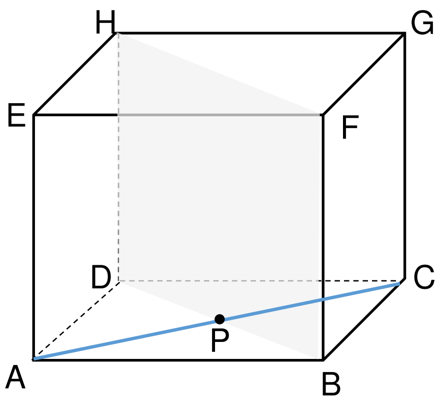
b) A distância está assinalada na figura abaixo.



Como as diagonais de um quadrado são perpendiculares e cortam-se nos respectivos pontos médios, indicado neste caso pelo ponto *P,* a distância é igual a metade da diagonal do quadrado *EFGH.*

$$d_{G,\overleftrightarrow{HF}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\,cm$$

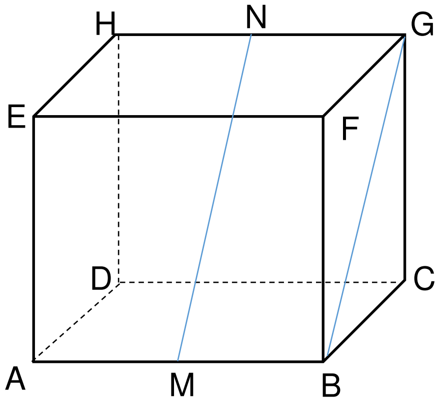
c) O plano e a distância estão assinalados na figura abaixo.



O plano determinado por *BDH* contém o segmento de reta $\overline{BD}$, que é diagonal do quadrado *ABCD*. Como as diagonais de um quadrado são perpendiculares e intersectam em seus pontos médios, o segmento *AP* é perpendicular a *BD* e como é ortogonal também ao segmento de reta *BF*, é perpendicular ao plano determinado por *BDH*. Logo, a distância do ponto *A* ao plano determinado por *BDH* é a metade da diagonal do quadrado *ABCD*, ou seja:

$$d_{A,pl(BDH)} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\,cm$$

d) A distância está assinalada pelo segmento de reta $\overline{MN}$, onde M e N são respectivamente os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{HG}$. Por outro lado, o segmento $\overline{MN}$ é congruente ao segmento $\overline{BG}$, diagonal do quadrado $BCFG$. Assim:



$$d_{\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{HF}} = \overline{BG} = 10\sqrt{2}\ cm$$

e) Neste caso, a distância é igual ao comprimento de qualquer segmento de reta que parta do segmento $\overline{BC}$ e seja perpendicular ao plano determinado por ADH. Este segmento pode ser $\overline{AB}$, logo:

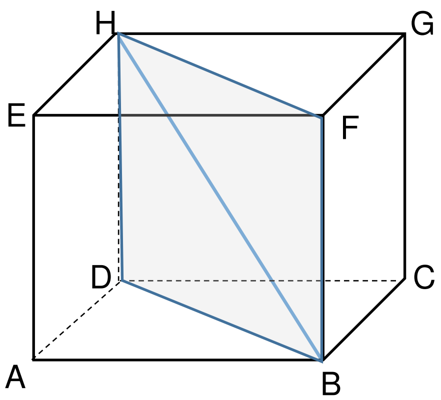
$$d_{\overleftrightarrow{BC},pl(ADH)} = \overline{AB} = 10\ cm$$

f) Neste caso, a distância é dada pelo comprimento de qualquer segmento de reta que seja perpendicular simultaneamente aos planos determinados por ABF e CDH. Este pode ser o segmento $\overline{BC}$, logo:

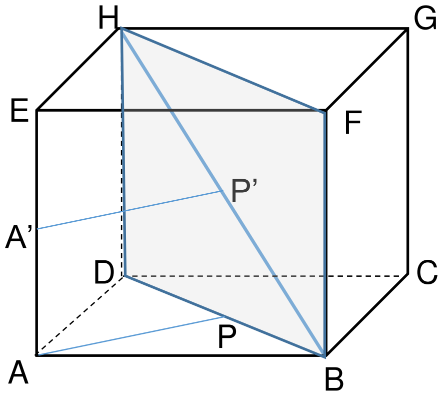
$$d_{pl(ABF),pl(CDH)} = \overline{BC} = 10\ cm$$

g) Como as retas suporte de $\overline{AE}$ e $\overline{BH}$ são reversas, há a necessidade de encontrar um segmento de reta que seja perpendicular comum a essas duas retas.

Primeiramente, notemos que o segmento de reta $\overline{BH}$ está contido no plano determinado por BDH, como mostra a figura abaixo.



Como vimos do subitem c, o segmento de reta $\overline{AP}$ é perpendicular ao plano determinado por *BDH,* logo o segmento $\overline{AP}$ é ortogonal a qualquer reta deste plano. Assim, $\overline{AP} \perp \overline{BH}$. Como $\overline{AP}$ é perpendicular também ao segmento $\overline{AE}$, tomemos um segmento de reta *A'P'*, paralelo e congruente a $\overline{AP}$ que intersecte $\overline{BF}$ em um ponto *P'*. Este segmento é perpendicular comum às retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{BH}$.



$$d_{\overleftrightarrow{AE},\overleftrightarrow{BH}} = \overline{A'P'} = \overline{AP} = 5\sqrt{2}\ cm$$

APÊNDICE D – SOLUÇÕES DA AVALIAÇÃO NO LABORATÓRIO

01. Construa duas retas reversas. (06 escores)

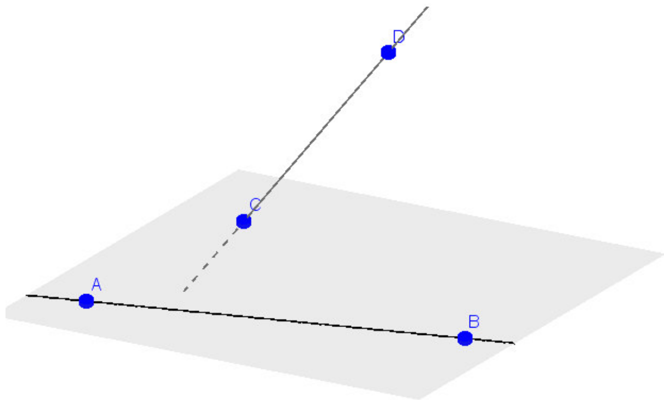
Passo 1: axioma 2: construir um plano *α*;

Passo 2: axiomas 1 e 3: construir uma reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ em *α;*

Passo 3: tomar um ponto *C* pertencente a α e não pertencente a *r;*

Passo 4: tomar um ponto *D* não pertencente a *α;*

Passo 5: axioma 1: construir uma reta $s = \overleftrightarrow{CD}$*.*



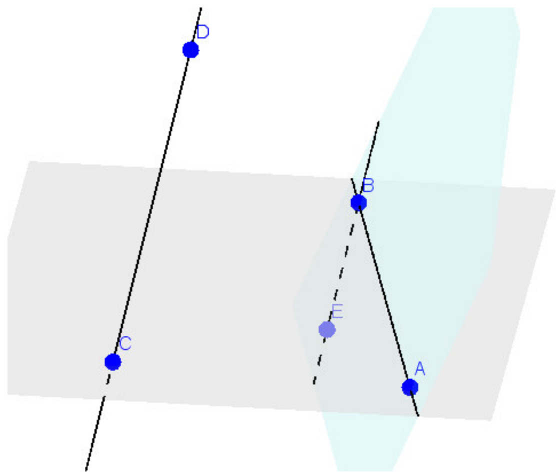
02. Dadas duas retas reversas, construa por uma delas um plano paralelo à outra. Serão considerados os passos da construção anterior. No último passo, conclua por que o plano é paralelo à reta. (05 escores)

Passo 1: axioma 4: construir uma reta *t* paralela a *s*, passando por *r*;

Passo 2: teorema 3: tomar um ponto de *r;*

Passo 3: construir um plano *β* passando pelas retas concorrentes *t* e *r*;

Passo 4: o plano *β* é paralelo a *s* pois contém uma a reta *t* que é paralela a *s.*



03. Construa por um ponto, uma reta paralela a dois planos secantes. (07 escores)

Passo1: axioma 2: construir um plano *α*;

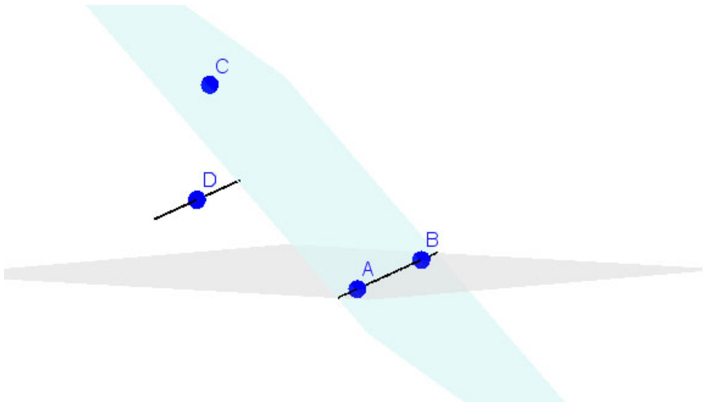
Passo 2: axiomas 1 e 3: construir uma reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ em *α;*

Passo 3: tomar um ponto C não pertencente a *α;*

Passo 4: teorema 1: construir um plano *β* passando por *r* e *C*;

Passo 5: tomar um ponto D não pertencente a *α* nem a *β;*

Passo 6: axioma 4: construir uma reta *s* paralela a *r*, que é intersecção dos planos *α* e *β.*

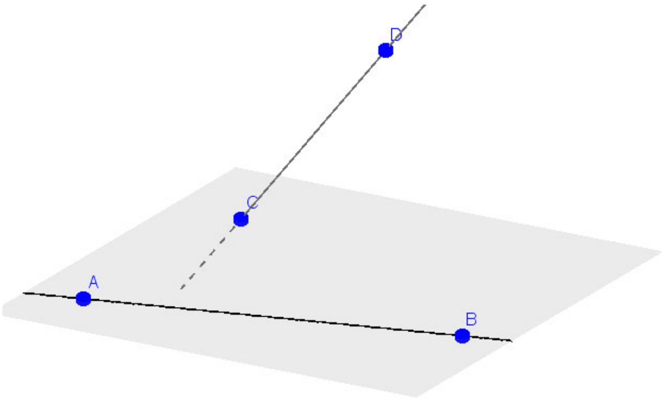


APÊNDICE E – SOLUÇÕES DA AVALIAÇÃO FINAL

01. Prove a unicidade do plano determinado por duas retas concorrentes. (03 escores)
Tomemos duas retas *r* e *s* concorrentes em *A*;
Tomemos dois pontos *B* e *C* diferentes de *A* pertencentes, respectivamente a *r* e *s*;
Pelo axioma 2, sabe-se que *A*, *B* e *C* determinam um único plano que passa por A, B e C.

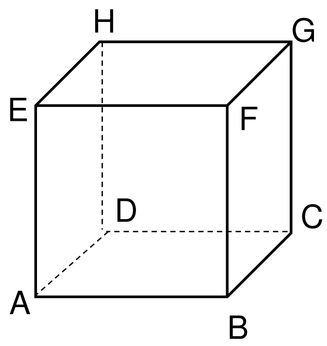
02. Prove a existência de duas retas reversas. (06 escores)

1ª Parte: construção



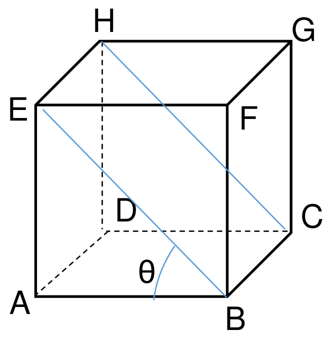
Por definição, duas retas reversas são retas que não possuem um plano comum que as contenha.
Suponha que exista um plano comum que contenha as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Se esse plano existe, então contém a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o ponto *C*, ou seja, o mesmo plano já construído. Como o ponto *D* não pertence a esse plano, decorre que a suposição é um absurdo, ou seja, não existe um plano comum que contenha duas retas reversas e por definição essas retas existem.

03. O cubo, representado na figura abaixo, tem aresta medindo 12 cm.



a) Determine o ângulo entre os semiplanos *ABC* e *BCE*. (3 escores)

Identificação dos planos e o ângulo solicitado.

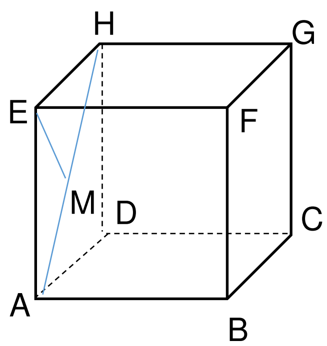


$$tg\ \theta = \frac{Cat.op.}{Cat.adj.} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\theta = acr\ tg\ 1 = 45º$$

b) Calcule a distância entre as retas suporte de $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{AH}$. (3 escores)

Identificar o segmento que representa a distância solicitada.

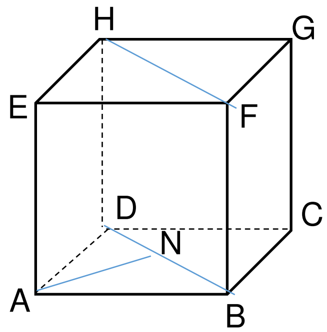


O segmento *EM* é perpendicular ao segmento *AH,* pois é semidiagonal do quadrado *AEHD*. Como *EF* é perpendicular ao plano *AEH*, é perpendicular a *EM*, que está contido neste plano.

$EM = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ cm

c) Calcule a distância do ponto *A* ao plano *BDH*. Após encontrar o segmento de reta que representa a distância solicitada, justifique, de acordo com a teoria sobre perpendicularismo, o porquê de sua utilização. (06 escores)

Identificação do segmento que representa a distância solicitada.



Como *HD* e *DB* são perpendiculares a *AN*, semidiagonal do quadrado *ABCD*, *AN* é perpendicular a este plano, pois segundo o Teorema do Pé-de-Galinha, se uma reta é ortogonal a duas retas de um plano, será perpendicular ao plano.

$AN = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ cm