

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

RAFAEL FERRAZ THOMÉ

O CÁLCULO DA ÁREA DO CÍRCULO COM O AUXÍLIO DO
SOFTWARE GEOGEBRA

São Carlos
Outubro 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

RAFAEL FERRAZ THOMÉ

O CÁLCULO DA ÁREA DO CÍRCULO COM O AUXÍLIO DO
SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) - Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa

São Carlos
Outubro 2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

T465c Thomé, Rafael Ferraz
O cálculo da área do círculo com o auxílio do software GeoGebra / Rafael Ferraz Thomé. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
33 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Área. 2. Círculo. 3. Polígonos. 4. Ensino. 5. Geogebra. I. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Rafael Ferraz Thomé, realizada em 03/10/2016:

Grazielle F. Barbosa

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa
UFSCar

Rodrigo Martins

Prof. Dr. Rodrigo Martins
UEM

Alessandra Verri

Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri
UFSCar

Dedicatória

A finalização deste trabalho me proporcionou diversos momentos de alegria e a sensação de dever cumprido, porém reconheço que sem o auxílio da família, minha orientadora e amigos eu jamais conseguiria. Dedico-o a minha mãe, meu pai, meu irmão, minha orientadora e a todos os meus amigos que sempre estiveram comigo compartilhando diversos momentos de alegria.

Epígrafe

Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.
Albert Einstein

Agradecimentos

A Deus por sempre estar presente abençoando minha vida.

A todos os professores do PROFMAT que sempre se dedicaram nos oferecendo aulas excelentes e enriquecedoras.

Em específico, a minha orientadora Grazielle Feliciani Barbosa que de forma sublime me orientou nesse gratificante trabalho.

Aos meus companheiros de estudos Leonardo Tartaglia e Mateus Beluca que sempre estiveram ao meu lado nessa árdua caminhada, sempre me ajudando e colaborando para o sucesso no curso.

Aos meus amigos Eric Segato e Edson Gonçalves pela compreensão e auxílio durante a trajetória percorrida.

A todos os professores e funcionários que trabalham ou já trabalharam comigo.

A minha família, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos demonstrando muito amor de forma incondicional.

Em especial a minha mãe Sônia pela paciência e auxílio durante todo o tempo.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo abordar em sala de aula um método contextualizado e motivador de introduzir a fórmula da área de um círculo no ensino fundamental por aproximação de áreas poligonais através de atividades em que o aluno vai deduzindo a área do círculo por excesso ou escassez das áreas dos polígonos que o circunscrevem e inscrevem, com auxílio do software GeoGebra. Procuramos também contar um pouco da história desde o Egito antigo da busca que se teve para se chegar a tal fórmula, incluindo a descoberta do número π , e todo trabalho em torno dessa maravilhosa fórmula que é usada e lecionada hoje em dia aos estudantes do ensino fundamental do nono ano da escola Antônio de Pádua Martins de Melo.

Palavras chave: Área, círculo, aproximação, polígonos, ensino, Geogebra.

Abstract

This work aims to approach the formula for a circle's area in a contextualized and motivating method in the basic school classroom via the approximation of polygonal areas through activities in which the student deduces the circle's area by excess or scarcity of the area of the polygons that surround and inscribe it, all with using the GeoGebra software. We also mean to trace the history, going back to Ancient Egypt, of the search for such formula, including the discovery of the number π , and all the work around this marvelous formula that is used and taught today to students enrolled in the 9th grade of the Antonio Pádua Martins de Melo School.

Keywords: Area, circle, approximation, polygons, teaching, GeoGebra.

Sumário

Introdução	xix
1 Área do círculo	1
1.1 A história da área do círculo	1
1.1.1 Área do círculo no Antigo Egito	2
1.1.2 Área do círculo por Babilônios e Chineses	2
2 O Método da Exaustão	5
2.1 A constante π	6
2.2 Arquimedes e a constante π	12
3 Demonstrações da área de um círculo	15
3.1 Demonstração por fatias triangulares do círculo	15
3.2 Demonstração por aproximação de polígonos regulares inscritos	16
3.3 Demonstração por integral de Riemann	19
3.3.1 Demonstração do volume e área de uma esfera por integral de Riemann	21
3.4 A área de um círculo nos livros didáticos	22
4 Propostas de atividades	25
5 Conclusão	31

Lista de Figuras

2.1	Quadrado prolongado	7
2.2	Quadrado circunscrito	8
2.3	Octógono circunscrito	9
2.4	Hexágono inscrito	13
2.5	Hexágono inscrito	13
3.1	Círculo fatiado	15
3.2	Paralelogramo	16
3.3	Hexágono inscrito	17
3.4	Circunferência	19
3.5	Esfera	21
3.6	Fatia de esfera	22
4.1	Triângulo no círculo	25
4.2	Hexágono dividido em triângulos	26
4.3	Hexágono circunscrito e inscrito	26
4.4	Decágono inscrito e circunscrito	27
4.5	GeoGebra 1	28
4.6	GeoGebra 2	28
4.7	GeoGebra 3	29
4.8	GeoGebra 4	29
4.9	Semicírculo	30

Lista de Tabelas

4.1	Área de Polígonos	27
-----	-----------------------------	----

Introdução

I Contexto

Este trabalho tem por objetivo apresentar um projeto de aulas, para introduzir a fórmula da área de um círculo aos discentes do ensino fundamental ou médio de forma distinta do que geralmente é apresentada nos livros didáticos que são utilizados pela maioria dos professores em território nacional. Normalmente, os livros apresentam a fórmula pronta, sem sequer expor uma estrutura que proporcione ao aluno a compreensão da complexidade que foi determinar tal área ao longo da história matemática. O texto apresentará de forma sucinta e objetiva uma colocação de como tal área foi sendo trabalhada pelos matemáticos, desde o Egito Antigo até os dias atuais, para que os discentes percebam que a fórmula não veio pronta e que existe todo um trabalho por trás da construção desta. Através de atividades em que se procura calcular a área de um círculo por aproximações de áreas de polígonos, regulares ou não, os discentes induzirão a área do círculo como sendo o limite da soma dessas áreas quando elas completam todo o círculo. Para facilitar a compreensão e a construção quando tivermos um polígono com um número n grande de lados, será utilizado o software Geogebra, assim a visualização de que ocorre quando o número n de lados do polígono se torna tão grande que a soma dos n lados tende ao comprimento da circunferência em si se torna mais clara e menos abstrata.

II Motivação e Objetivos

Devido a grande dificuldade de abstração do conteúdo de área de um círculo perante os discentes do ensino básico, buscou-se apresentar algumas atividades em que se facilite o entendimento e a aplicação do conteúdo nas aulas dos docentes. As atividades que serão apresentadas posteriormente têm como objetivo facilitar o acesso e abstração da área de um círculo, de forma que o discente conclua por si só a irracionalidade do número π e como através dos tempos o círculo foi sendo trabalhado pelos matemáticos, tendo sua área calculada através de varias aproximações de áreas de polígonos que ao tender para um número grande, tendem a preencher toda a área do círculo.

III Metodologia de Desenvolvimento do Trabalho

Através de pesquisas bibliográficas em livros, artigos, dissertações de mestrado buscou-se compreender como o tema vem sendo trabalhado ao longo dos tempos por professores e educadores, quais foram as maiores dificuldades apresentadas perante a explanação do conteúdo em sala de aula, considerando também quais estratégias deram certo e o porquê desse sucesso. Também foi realizada, uma pesquisa de campo, com alguns questionamentos sobre o tópico com professores da região de Porto Feliz, aonde foram catalogados diversos aspectos interessantes que enriqueceram e proporcionaram chegar à uma conclusão mais precisa sobre a solução do problema.

IV Organização do Trabalho

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: temos um pouco sobre a história da área de um círculo na antiguidade, a área de um círculo através do Método Da Exaustão, uma abordagem sobre a área de um círculo em diferentes contextos como história do conteúdo ao longo dos tempos, demonstrações de fórmulas como os livros didáticos o abordam em seus textos; também um aprofundamento do tópico com propostas de atividades para serem inseridas em sala de aula, com o propósito de enriquecê-las facilitando assim a abstração dos discentes perante a complexidade e dificuldade do tema; além disso, temos uma extensão para a área e volume de uma esfera, para expansão dos assuntos aqui abordados.

Capítulo 1

Área do círculo

Este capítulo têm o propósito de apresentar tópicos breves sobre a história da área de um círculo em diversas civilizações antigas, apresentando seus trabalhos e contribuições.

1.1 A história da área do círculo

Começamos com a seguinte definição: segundo o MiniDicionário prático da língua portuguesa círculo é o espaço limitado numa circunferência (curva plana fechada, cujos pontos são todos equidistantes do centro). Podemos entender também um círculo como sendo a união de todos os pontos que distam de um determinado ponto fixo (chamado de centro do círculo), uma distância d , sendo $d < r$, com r o raio.

Desde o começo dos tempos, na pré-história o círculo aparece dentro de várias civilizações em toda parte do mundo, seja ligado as áreas de astronomia, religião, arquitetura, ou nas demais áreas que compõe uma sociedade. Considerando todas as figuras geométricas de mesmo perímetro o círculo é aquela que possui a maior área. Por exemplo, considere que você possui uma linha de n unidades de comprimento e com essa linha você tem que fazer uma figura geométrica tal que a sua área seja a maior possível, então sua área será um círculo de circunferência de comprimento n e raio $r = n/2\pi$.

Durante todas as civilizações, desde a antiguidade, buscaram se encontrar diversas fórmulas e métodos para encontrar o valor numérico da área de um círculo, algumas exatas e algumas aproximações bem próximas da realidade. Dentre essas civilizações, destacamos as seguintes:

- Egípcia;
- Babilônica;
- Chinesa;
- Indiana.

1.1.1 Área do círculo no Antigo Egito

Primeiramente vamos analisar como os egípcios trabalhavam com a área do círculo. Todo o conhecimento egípcio, seja ele matemático ou não, era escrito em papíros, que eram um meio físico utilizado para a escrita pelos escribas (pessoas responsáveis por grafar no Egito Antigo).

Dentre os papíros que sobreviveram durante os tempos e chegaram até nós, o mais famoso é o Papiro Rhind, nos dias atuais uma versão do papiro Rhind se encontra depositado no Museu Britânico em Londres. O papiro Rhind tem 85 problemas matemáticos e foi escrito pelos escribas aproximadamente na data de 1650 a.C. [3] Desses 85 problemas destacam-se o problema 48 e o 50 que se referem a área de um círculo. Analisando esses dois problemas, podemos ter uma noção de como os antigos egípcios faziam para calcular e trabalhar com problemas que envolviam o conhecimento de área de um círculo. O problema 48 trata-se de uma comparação entre a área de um quadrado circunscrito e a área de um círculo. O problema 50 trata de calcular a área de uma região circular tendo a seguinte solução apresentada pelo escriba:

Subtrai-se do diâmetro sua nona parte, elevando o restante ao quadrado.

Não se sabe ao certo, como os egípcios chegaram a este método, mesmo tendo algumas possíveis explicações. Não vamos apresentar essas explicações que foram deduzidas como possíveis de serem as utilizadas pelos egípcios, apenas focaremos na resolução do problema dado.

Do problema 50 temos que:

$$A_C \approx A_Q = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}2r\right)^2 = \left(\frac{16}{9}r\right)^2 = \frac{16^2}{9^2}r^2,$$

sendo A_C a área do círculo e A_Q a área do quadrado. Assim temos que a fração $16^2/9^2$ se trata de uma aproximação para o número irracional π . Sendo $\frac{16^2}{9^2} = 3,160493827160494 \approx 3,16$.

1.1.2 Área do círculo por Babilônios e Chineses

Os babilônios e os chineses detinham o mesmo conhecimento quanto à área de um círculo. Eles conheciam bem os conceitos de diâmetro, raio e circunferência e, apesar de não conhecerem o número π , possuíam duas fórmulas para o cálculo da área de um círculo que com manipulações algébricas, uma delas idêntica a que utilizamos hoje em dia [3].

A primeira fórmula, onde C é o comprimento da circunferência e D o seu diâmetro, é:

$$A_C = \frac{C}{2} \frac{D}{2} \quad (i).$$

Observe que:

$$A_C = \frac{C}{2} \frac{D}{2} = \frac{2\pi r}{2} \frac{2r}{2} = \frac{4\pi r^2}{4} = \pi r^2,$$

a qual é idêntica a fórmula atual. A outra fórmula utilizada era: $A_C = \frac{C^2}{12}$. Observe também que:

$$A_C = \frac{C^2}{12} = \frac{(2\pi r)^2}{12} = \frac{4\pi^2 r^2}{12} = \frac{\pi^2 r^2}{3}.$$

Fazendo um dos $\pi = 3$, temos que: $A_C = \pi r^2$.

Uma justificativa bastante plausível para (i) é que eles utilizaram um corte em setores de um círculo, transformando-o em um retângulo.

Capítulo 2

O Método da Exaustão

O *Método da Exaustão* que aqui será apresentado e demonstrado, também é conhecido como *O Princípio de Eudoxo*. Antes de sua apresentação mostraremos o *Axioma de Eudoxo*, axioma esse que teve sua primeira aparição sendo enunciado por Arquimedes, fato que implica em, as vezes, ele ser encontrado em livros com o nome de Axioma de Arquimedes. Porém, como o próprio Arquimedes reconhece a credibilidade do Axioma a Eudoxo, será feito o mesmo [6].

Axioma de Eudoxo: Sejam a e b dois números quaisquer positivos. Então, existe um número inteiro positivo n tal que $nb > a$.

O Axioma de Eudoxo foi apresentado antes do Método da Exaustão pois ele é requisitado em sua demonstração.

Teorema 2.1 O Método da Exaustão ou Princípio de Eudoxo. Sejam: $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots$ números positivos tais que: $A_1 < \frac{1}{2}A_0$, $A_2 < \frac{1}{2}A_1$, $A_3 < \frac{1}{2}A_2$, $A_4 < \frac{1}{2}A_3$, e assim sucessivamente. Para cada $\epsilon > 0$, existe um número positivo inteiro N tal que $A_N < \epsilon$.

Demonstração. Pelo Axioma de Eudoxo, dado um $\epsilon > 0$, existe um número positivo inteiro N tal que:

$$(N + 1)\epsilon > A_0.$$

Mostraremos que $A_N < \epsilon$. Observe que:

$$2N\epsilon = N\epsilon + N\epsilon \geq (N + 1)\epsilon > A_0.$$

Logo,

$$2N\epsilon > A_0 \quad e \quad N\epsilon > \frac{1}{2}A_0 > A_1.$$

Se $N = 1$ temos $A_1 < \epsilon$ e acabamos a demonstração. Suponhamos $N \geq 2$. Como $N\epsilon > A_1$ temos que:

$$2(N - 1)\epsilon = 2N\epsilon - 2\epsilon = N\epsilon + N\epsilon - 2\epsilon = N\epsilon + (N - 2)\epsilon \geq N\epsilon > A_1.$$

E portanto

$$(N - 1)\epsilon > \frac{1}{2}A_1 > A_2.$$

Se $N = 2$ acabamos a demonstração. Assim seguimos por indução, o que resulta em:

$$(N - (N - 1))\epsilon > A_N, \quad \text{ou} \quad \epsilon > A_N.$$

□

2.1 A constante π

O Método da Exaustão foi um grande avanço para a época quanto a parte de demonstrações. Antes dele ser enunciado e apresentado por Arquimedes os matemáticos da época só podiam ter justificativas heurísticas para alguns problemas, ou seja, justificativas com métodos de investigações que se baseavam em aproximações progressivas. Dentre os problemas estavam o fato que é constante a razão entre a área de um disco e o quadrado do seu raio, apesar dos antigos já souberem da existência dessa constante, que se trata do número π . Só depois o aparecimento do Método da Exaustão chegaram a construir demonstrações sobre esse fato [6].

Vamos reproduzir a demonstração que comprova que é constante a razão entre a área de um disco e o quadrado do seu raio. Para tal demonstração precisaremos de dois lemas que serão enunciados a seguir. Antes de anunciarmos os lemas, vamos definir as notações que serão utilizadas. Sendo P um polígono qualquer e C uma circunferência, denotamos por (P) a área do polígono e por (C) a área do círculo formado pela circunferência.

Lema 2.2 Sejam P_0 um polígono regular de n lados inscrito (circunscrito) numa circunferência C_0 que possui raio r_0 e P_1 um polígono regular de n lados inscrito (circunscrito) em uma circunferência C_1 que possui raio r_1 . Então:

$$\frac{(P_0)}{(P_1)} = \frac{r_0^2}{r_1^2}$$

Esse Lema é um resultado da Geometria Euclidiana que admitiremos conhecido [6].

Lema 2.3 Considere uma circunferência C e um número positivo ϵ , reside um polígono regular P inscrito em C tal que a área da circunferência subtraída da área do

polígono seja menor que o valor numérico de ϵ , ou seja, $(C) - (P) < \epsilon$.

Demonstração. Vamos começar primeiramente com um polígono regular de 4 lados inscritos em C , ou seja, um quadrado. Sendo $P_0 = ABDE$ o quadrado inscrito em C , considere: $Q_0 = (C) - (P_0)$. Se dobramos o número de lados obtemos um polígono de 8 lados, um octógono regular que chamaremos de P_1 e seja $Q_1 = (C) - (P_1)$. Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio teremos definido uma sequência de polígonos regulares inscritos na circunferência C . Obtemos uma sequência:

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n, \dots,$$

em que cada P_n possui 2^{n+2} lados e $Q_n - Q_{n-1} > \frac{1}{2}Q_n$. Agora considere o quadrado $ABDE$ inscrito na circunferência C , prolongando D e E até F e G , respectivamente, de forma que o segmento \overline{FG} tangencie C em T . Obtemos o retângulo $EDFG$ como mostra a figura 2.1:

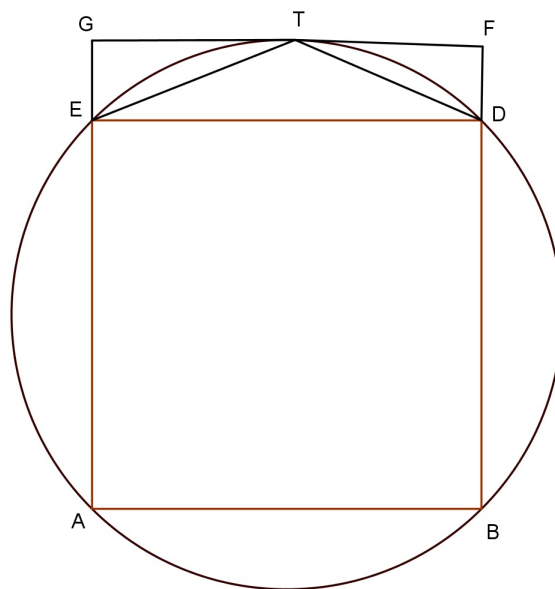


Figura 2.1: Quadrado prolongado

Observe que \overline{ET} e \overline{TD} são dois lados consecutivos do polígono P_1 . Como T é ponto médio de \overline{FG} , é simples observar que:

$$(ETD) = \frac{1}{2}(EDFG).$$

De forma geral, também temos

$$Q_n - Q_{n+1} = (P_{n+1}) - (P_n) = n(ETD) = \frac{1}{2}n(EDFG) >$$

$$> \frac{1}{2}n(\widehat{ETD}) = \frac{1}{2}[(C) - (P_n)] > \frac{1}{2}Q_n,$$

sendo $(E\widehat{T}D)$ a área delimitada pelo segmento \overline{ED} e pelo arco de circunferência $E\widehat{T}D$. Assim,

$$Q_n - Q_{n+1} > \frac{1}{2}Q_n,$$

ou seja,

$$Q_{n+1} < \frac{1}{2}Q_n.$$

Segundo o Método da Exaustão (ou Princípio de Eudoxo), existe N tal que $Q_N < \epsilon$, logo:

$$(C) - (P_N) < \epsilon.$$

Basta tomarmos $P = P_N$. □

Lema 2.4 Considere uma circunferência C e um número positivo ϵ , existe um polígono regular Q circunscrito a C tal que:

$$(Q) - (C) < \epsilon.$$

Demonstração. Considere a figura 2.2, em que temos um quadrado $Q_0 = ABCD$ circunscrito a circunferência C . Seja $J_0 = (Q_0) - (C)$. Dobrando o número de lados do quadrado Q_0 obtém-se um octógono regular circunscrito a C . Seja Q_1 esse octógono e $J_1 = (Q_1) - (C)$. Seguindo esse raciocínio, obtemos uma sequência de polígonos regulares circunscritos em C :

$$Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{n-1}, Q_n, \dots$$

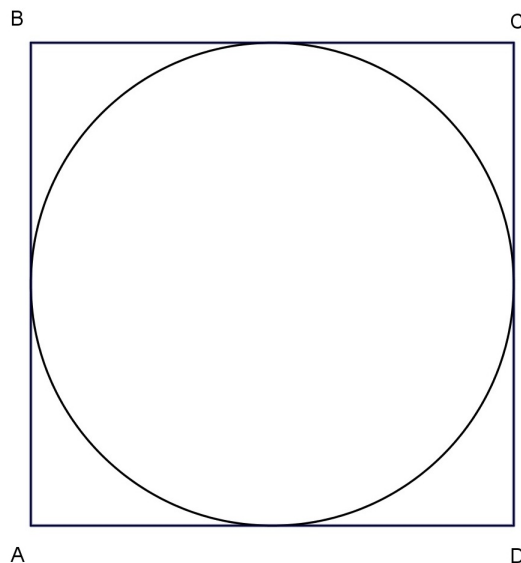


Figura 2.2: Quadrado circunscrito

Observe que Q_n possui 2^{n+2} lados e seja $J_n = (Q_n) - (C)$. Queremos mostrar que

$$J_n - J_{n+1} > \frac{1}{2}J_n.$$

Agora, considere a figura 2.3, a qual representa o primeiro caso.

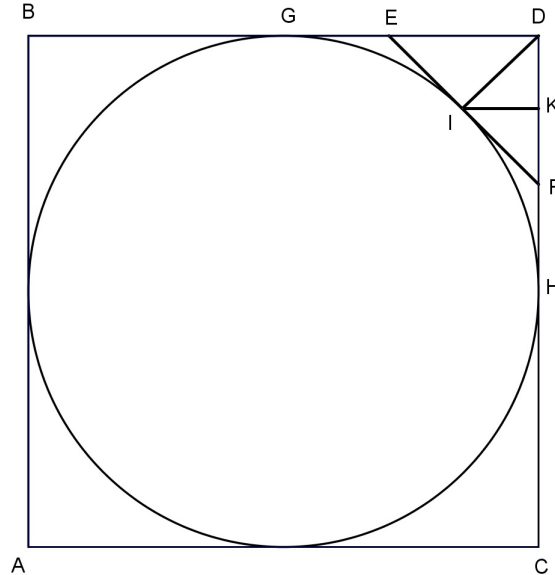


Figura 2.3: Octógono circunscrito

Observe que

- $\overline{EF} \perp \overline{ID}$ em I e \overline{EF} é um lado de Q_{n+1} ;
- \overline{BD} e \overline{DC} são lados consecutivos de Q_n ;
- \overline{BD} tangencia C em G e \overline{DC} tangencia C em H ;
- O ponto I está na reta que passa pelo centro de C ;
- Os lados vizinhos de \overline{EF} têm seus respectivos pontos médios em G e H ;
- $\overline{KI} \perp \overline{DF}$;
- (\widehat{IHD}) é a área da região delimitada por \overline{ID} e \overline{DH} e pelo arco \widehat{IH} ;
- (\widehat{GIHD}) é a área da região delimitada por \overline{GD} e \overline{DH} e pelo arco \widehat{GIH} ;

Assim,

$$GE = FH = NI = EI = \frac{1}{2}EF \quad e \quad (IDE) \sim (IDF).$$

Desde que $IK < ID$, tem-se

$$(IFD) = \frac{1}{2}ID \cdot IF > \frac{1}{2}IK \cdot FH = (FIH).$$

Logo,

$$J_n - J_{n+1} = (Q_n) - (C) - [(Q_{n+1}) - (C)] = (Q_n) - (Q_{n+1}),$$

$$J_n - J_{n+1} = n(EFD) = n2(IFD) = n(IFD) + n(IFD) > n(IFD) + n(IFH),$$

$$J_n - J_{n+1} > n(IHD),$$

$$J_n - J_{n+1} > n(\widehat{IHD}),$$

$$J_n - J_{n+1} > n\frac{1}{2}(G\widehat{IHD}),$$

$$J_n - J_{n+1} > \frac{1}{2}[(Q_n) - (C)],$$

$$J_n - J_{n+1} > \frac{1}{2}J_n \implies J_{n+1} < \frac{1}{2}J_n.$$

Em razão do método da Exaustão existe um n inteiro positivo em que $J_n < \epsilon$. Portanto $(Q_n) - (C) < \epsilon$. \square

Agora, temos condições de provar o teorema anunciado no início da seção.

Teorema 2.5 Se temos duas circunferências C_1 e C_2 , de raios r_1 e r_2 , respectivamente, então temos que:

$$\frac{(C_1)}{(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Demonstração. Pela propriedade da relação de ordem, chamada tricotomia, temos os seguintes casos:

$$\frac{(C_1)}{(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (i)$$

ou

$$\frac{(C_1)}{(C_2)} > \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (ii)$$

ou

$$\frac{(C_1)}{(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (iii).$$

Suponhamos que seja válida a condição (iii), ou seja, $\frac{(C_1)}{(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$. Colocando $J = \frac{(C_1)r_2^2}{r_1^2}$, temos que $J < (C_2)$.

Seja $\epsilon = (C_2) - J$. Observe que como $J < (C_2)$, então $\epsilon > 0$. O Lema 2.3 nos garante que existe um polígono regular P_2 inscrito em C_2 , tal que

$$(C_2) - (P_2) < \epsilon.$$

Logo,

$$(C_2) - (P_2) < (C_2) - J \implies -(P_2) < -J \implies J < (P_2).$$

O Lema 2.2 nos garante que

$$\frac{(P_1)}{(P_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Assim,

$$J = \frac{(C_1)r_2^2}{r_1^2} = \frac{(C_1)(P_2)}{(P_1)} = (P_2)\frac{(C_1)}{(P_1)} > (P_2),$$

ou seja, $J > (P_2)$. Porém, isto nos leva a uma contradição, logo não vale a condição (iii). Analogamente, se chega a conclusão que não vale a condição (ii).

Portanto, se concluí que vale a condição (i),

$$\frac{(C_1)}{(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

□

Corolário 2.6 A razão entre a área de uma circunferência e o quadrado do seu raio é uma constante.

Demonstração. Pelo teorema 2.5 temos

$$\frac{(C_1)}{(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Logo,

$$\frac{(C_1)}{r_1^2} = \frac{(C_2)}{r_2^2} = \textit{constante}.$$

Chamando de π essa constante, e como o Teorema 2.4 vale para qualquer circunferência C de raio r , temos

$$\frac{(C)}{r^2} = \pi \quad \textit{ou} \quad (C) = \pi r^2.$$

□

2.2 Arquimedes e a constante π

Arquimedes utilizava o *Método da Exaustão* ou *Princípio de Eudoxo* para diversas demonstrações, entre elas temos: o tratado sobre equilíbrios planos, a quadratura da parábola, sobre volume de esfera e cilindro, sobre a medida da circunferência sobre espirais, sobre conóides e esferóides, sobre corpos flutuantes, entre outros.

Nesta seção será apresentado um teorema de Arquimedes que aparece na sua obra famosa **sobre a medida da circunferência** [6].

Teorema 2.7 A área de um disco é igual a metade do produto do seu raio pelo comprimento de sua circunferência. De outra forma, seja C uma circunferência de raio r que possua comprimento c e seja (C) a área do disco delimitado por C . Então,

$$(C) = \frac{1}{2}rc.$$

Demonstração. Pela propriedade da tricotomia, temos as seguintes opções:

$$(C) > \frac{1}{2}rc \quad (i),$$

$$(C) < \frac{1}{2}rc \quad (ii),$$

$$(C) = \frac{1}{2}rc \quad (iii).$$

Logo, para provarmos que vale (iii), basta provarmos que não vale (i) e nem vale (ii). Esse método de demonstração se chama *método da dupla redução ao absurdo*.

Primeiramente assuma que seja válido (i), ou seja, $(C) > \frac{1}{2}rc$. Tomemos $\epsilon = (C) - \frac{1}{2}rc > 0$.

Em razão do Lema 2.3, temos que existe um polígono regular Q de n lados inscrito em C tal que $(C) - (Q) < \epsilon$. Logo,

$$(C) - (Q) < \epsilon = (C) - \frac{1}{2}rc \implies (Q) > \frac{1}{2}rc \quad (\alpha).$$

Considere a figura 2.4 em que a_n é o lado de Q , b_n é o apótema e seja p o perímetro de Q . Então, temos

$$b_n < r \quad e \quad na_n = p < c.$$

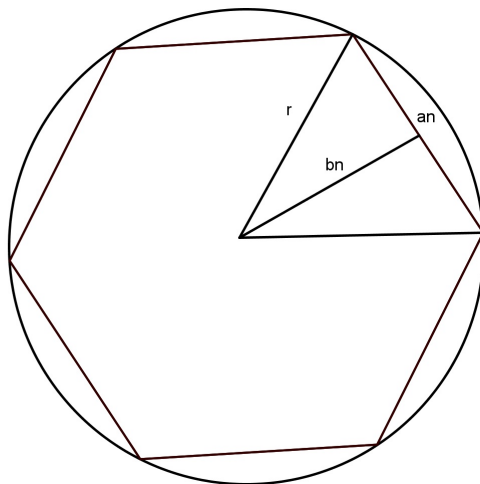


Figura 2.4: Hexágono inscrito

Daí,

$$(Q) = \frac{1}{2}nb_n a_n = \frac{1}{2}b_n(na_n) < \frac{1}{2}rc.$$

Porém, isso é uma contradição com (α) . Logo, a condição (i) é falsa.

Agora assumamos que seja válida a condição (ii), ou seja, $(C) < \frac{1}{2}rc$. Considere $\epsilon = \frac{1}{2}rc - (C) > 0$. Em razão do Lema 2.4 existe um polígono regular Q_1 de n lados circunscritos a C em que $(Q_1) - (C) < \epsilon$. Logo,

$$(Q_1) - (C) < \epsilon = \frac{1}{2}rc - (C) \implies (Q_1) < \frac{1}{2}rc \quad (\beta).$$

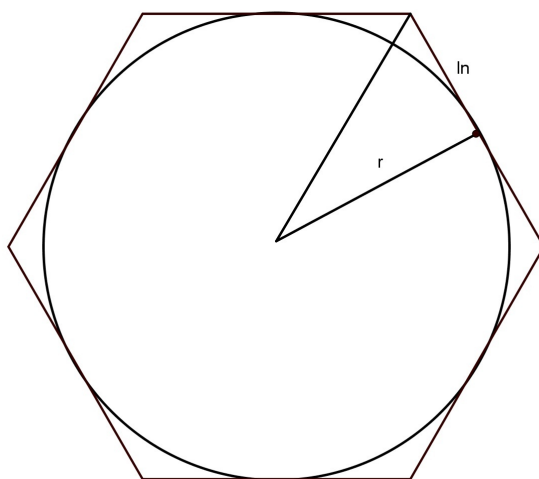


Figura 2.5: Hexágono inscrito

Considere a figura 2.5 em que ln é a metade do lado do polígono Q_1 e p_1 é o perímetro de Q_1 . Logo,

$$p_1 = 2nl_n \quad e \quad p_1 > c.$$

Daí,

$$Q_1 = n \frac{1}{2} r (2ln) = \frac{1}{2} r (2nl_n) = \frac{1}{2} r p_1 > \frac{1}{2} r c.$$

Porém, isto está em contradição com (β) e portanto a condição (ii) é falsa. Assim, segue que a condição (iii) é verdadeira.

Agora, desde que $(C) = \frac{1}{2} r c$ e também pelo Corolário 2.6, temos $(C) = \pi r^2$. Assim,

$$\pi r^2 = \frac{1}{2} r c \implies c = 2\pi r.$$

□

Capítulo 3

Demonstrações da área de um círculo

Neste capítulo serão abordadas algumas demonstrações da fórmula da área de um círculo, como por fatias triangulares, por aproximação de polígonos, por integral de Riemann e também a demonstração da área e do volume de uma esfera. Além disso sugerimos quais dessas são aconselháveis para inserção nas aulas do ensino fundamental médio.

3.1 Demonstração por fatias triangulares do círculo

Essa demonstração geralmente quando aplicada em sala de aula tem um retorno muito aceitável perante os alunos, por ser de simples abstração. A demonstração consiste no seguinte: dividir o círculo em "polígonos" semelhantes, como mostra a figura 3.1:

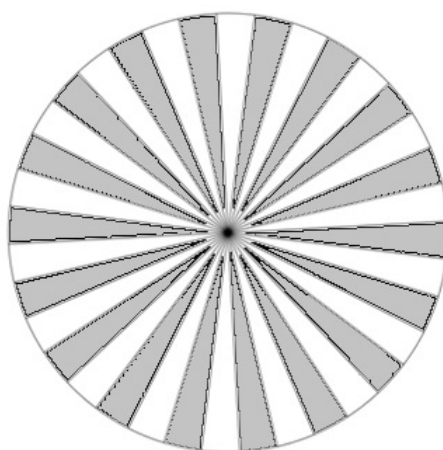


Figura 3.1: Círculo fatiado

Note que os "polígonos" se assemelham a triângulos isósceles de mesma base, porém essas bases são um pouco arredondadas. Os outros lados possuem comprimento igual ao raio do círculo. Substituímos cada uma dessas bases arredondadas por um segmento e assim obtemos efetivamente triângulos isósceles.

Após essa divisão se recorta os triângulos e se monta um paralelogramo com os mesmos, como mostra a figura 3.2:

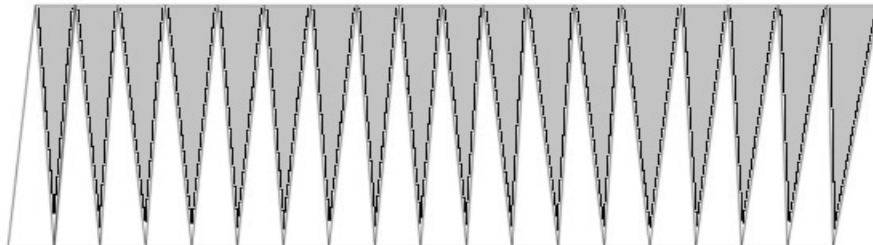


Figura 3.2: Paralelogramo

Cada triângulo possui área igual ao produto da base pela altura, logo temos que a área do círculo pode ser aproximada pela área do paralelogramo; quanto maior for a quantidade de triângulos, melhor será a aproximação.

Como a área total do paralelogramo é dada por $A_P = n.b.r$ em que n é o número de triângulos, b a base de cada triângulo e r a altura, temos que a soma das bases, ou a base do paralelogramo se aproxima de πr , logo

$$A_C \approx A_P = \pi r.r = \pi r^2.$$

Pois, a base do paralelogramo é metade do comprimento da circunferência e a altura é o raio do círculo.

Essa demonstração, apesar de não ser muito rigorosa, é muito aconselhável e é muito utilizada por diversos livros didáticos do ensino básico. É uma demonstração de simples abstração perante os discentes, levando em conta o conhecimento prévio do comprimento da circunferência e do número irracional π . Porém, geralmente a maioria dos livros didáticos traz o número π como uma descoberta da razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, isso implica que o conteúdo abordado em um todo fica de certa forma um pouco difícil de ser abstraída perante os discentes em sala de aula.

3.2 Demonstração por aproximação de polígonos regulares inscritos

Essa demonstração consiste em inscrever polígonos regulares dentro da circunferência para se obter uma aproximação para a área da circunferência e a medida que aumentamos o número de lados do polígono inscrito, melhoramos a aproximação. E assim fazemos com

que o número n de lados do polígono tenda ao infinito de forma a se obter que a soma desses n lados se aproximem do comprimento da circunferência.

Para efeitos de visualização, será considerado um hexágono regular inscrito na circunferência, como mostra a figura 3.3:

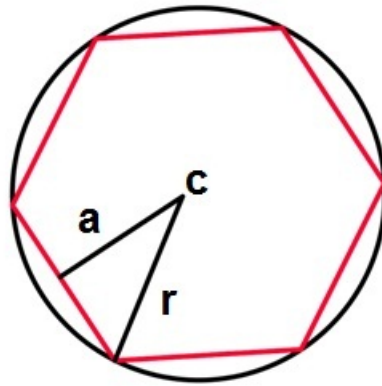


Figura 3.3: Hexágono inscrito

Para se calcular a área de um polígono regular de n lados, basta dividir o polígono em n triângulos e a área do polígono será a soma dessas n áreas triangulares. Por exemplo, baseado na figura 3.3, a área do hexágono regular é dada por:

$$A_H = 6A_T = 6 \frac{la}{2} = 3la,$$

em que l é o lado do polígono e a é o apótema (medida do segmento que oriunda do centro geométrico e é perpendicular a um dos lados do polígono). Assim, a área de um polígono regular de n lados é dada por:

$$A_P = nA_T = n \frac{la}{2}.$$

Logo, quando fazemos o número n de lados do polígono tender ao infinito, ou seja, ficar tão grande quanto se queira, temos que o produto nl se aproxima do comprimento da circunferência, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nl = C = 2\pi r.$$

Observe que, quando o número n lados do polígono tende ao infinito e com o limite de sua soma sendo igual ao comprimento da circunferência, temos então que a área do

polígono se confunde com a área do círculo. Logo,

$$A_P = A_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nla}{2}.$$

Porém, quando isso acontece o apótema que é a altura do triângulo se iguala ao comprimento do raio, ou seja,

$$A_P = A_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nla}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nlr}{2}. \quad (1)$$

Agora, desde que

$$C = 2\pi r \Rightarrow \pi = \frac{C}{2r}$$

e

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} nl,$$

temos

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} nl/2r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nl}{2r}. \quad (2)$$

Multiplicando numerador e denominador em (1) pelo raio r , e utilizando (2), temos

$$A_P = A_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nla}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nlr}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nlr^2}{2r} = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nl}{2r} = r^2 \pi.$$

Essa demonstração, apesar de ser mais rigorosa, é esteticamente melhor que a anterior. Porém, gera grande dificuldade durante sua explanação em aulas do ensino básico pois o conceito de limite geralmente não é apresentado aos discentes o que ocasiona uma difícil abstração perante os alunos.

Aconselha-se apresentar uma noção, mesmo que de forma superficial, aos discentes sobre o conceito básico de limite, pois além de facilitar a apresentação dessa demonstração, também facilitará a apresentação de outros conteúdos. Por exemplo, soma infinita de uma progressão geométrica. Além disso, ao saírem do ensino básico, os discentes que adentrarem ao ensino superior, precisamente em cursos ligados ao ramo de exatas, não ficarão tão perdidos, como muitas pesquisas apontam que ficam hoje em dia, devido a esse déficit de cálculo.

3.3 Demonstração por integral de Riemann

Tendo uma função $F(x)$ contínua e positiva, definida num intervalo fechado $[a, b]$, temos que a integral definida desta função determina a área abaixo da curva. Da geometria sabe-se que a equação geral [8] de uma circunferência C , com centro em $(0, 0)$ e raio r é dada por: $x^2 + y^2 = r^2$. Observe a figura 3.4:

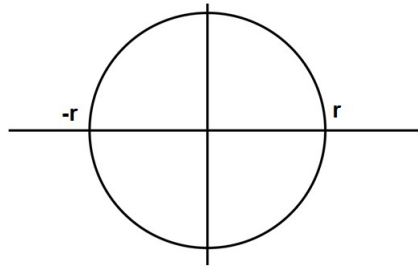


Figura 3.4: Circunferência

Podemos escrever a equação da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ de duas formas, sendo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ a semicircunferência acima do eixo das abscissas e $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ a semicircunferência abaixo do eixo.

Como o círculo é uma figura simétrica temos que a área do círculo é dada por

$$A_C = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \delta x.$$

Porém, desde que a função integrando se trata de uma função par, temos

$$A_C = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \delta x = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \delta x.$$

Logo, a área do círculo será dada pela resolução de uma integral trigonométrica simples. Para resolvê-la fazemos a substituição de coordenadas cartesianas para as coordenadas polares:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \Rightarrow dx = r \operatorname{cos} \theta d\theta.$$

Note que

$$x = r \Rightarrow r \operatorname{sen} \theta = r \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = 1.$$

Como $\theta \in [0, \pi/2]$, tem-se $\theta = \frac{\pi}{2}$

Agora,

$$x = 0 \Rightarrow r \operatorname{sen} \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A_C &= 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \delta x = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - (r \operatorname{sen} \theta)^2} r \cos \theta \delta \theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} r \cos \theta \delta \theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} r \cos \theta \delta \theta. \end{aligned}$$

Da identidade fundamental da trigonometria $\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$, temos que $\operatorname{cos}^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$, logo:

$$\begin{aligned} A_C &= 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} r \cos \theta \delta \theta = 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(\operatorname{cos}^2 \theta)} \cos \theta \delta \theta = 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\operatorname{cos} \theta) \cos \theta \delta \theta \\ A_C &= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cos}^2 \theta \delta \theta \quad (i) \end{aligned}$$

Relembrando a fórmula do cosseno da soma, $\operatorname{cos}(a+b) = \operatorname{cos}(a)\operatorname{cos}(b) - \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(a)$, temos

$$\operatorname{cos}(\theta + \theta) = \operatorname{cos}(2\theta) = \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta,$$

logo,

$$\operatorname{cos}^2 \theta = \operatorname{cos}(2\theta) + \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Utilizando novamente a identidade fundamental, temos

$$\operatorname{cos}^2 \theta = \operatorname{cos}(2\theta) + (1 - \operatorname{cos}^2 \theta) \quad \text{assim} \quad 2\operatorname{cos}^2 \theta = \operatorname{cos}(2\theta) + 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos}(2\theta)) \quad (ii).$$

Substituindo (ii) em (i),

$$\begin{aligned} A_C &= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cos}^2 \theta \delta \theta = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos}(2\theta)) \delta \theta \\ A_C &= 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{cos}(2\theta)) \delta \theta = 2r^2 \left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ A_C &= 2r^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\operatorname{sen}(2(\frac{\pi}{2}))}{2} - \left(0 + \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot 0)}{2} \right) \right] \\ A_C &= 2r^2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen} \pi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 0}{2} \right] = 2r^2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{0}{2} - \frac{0}{2} \right] = 2r^2 \left[\frac{\pi}{2} \right] = \pi r^2. \end{aligned}$$

Essa demonstração é a mais rigorosa de todas mas é extremamente inviável para

ser utilizada no ensino básico. São necessários pré-requisitos de cálculo diferencial e integral, conteúdo que só é abordado em cursos de ensino superior.

3.3.1 Demonstração do volume e área de uma esfera por integral de Riemann

Nesta seção aprofundamos um pouco sobre o cálculo de área e volume por integral, incluindo o caso do volume e área de uma esfera. Apesar do curso de cálculo diferencial e integral não fazer parte do conteúdo programático do Ensino Médio, vale incrementar em aulas de reforço para vestibulares de discentes candidatos a entrarem em curso de exatas, mesmo que seja de forma intuitiva.

Uma circunferência é o lugar geométrico definido por todos os pontos P que distam R unidades de um ponto C , denominado centro da circunferência. Também podemos dizer que a circunferência de raio R e centro (a, b) é o lugar dos pontos que satisfazem a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Sejam $P = (x, y)$ todos os pontos que distam R unidades de $C = (a, b)$ temos que a equação de uma circunferência é dada por

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$$

ou

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Para facilitar os cálculos, considere a circunferência C de centro na origem, $C = (0, 0)$ cuja equação é $x^2 + y^2 = R^2$. Rotacionando a circunferência em torno do eixo das coordenadas (OY) , temos que a circunferência gera uma esfera de raio R , como mostra a figura 3.5:

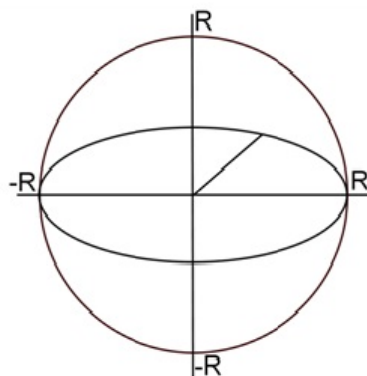


Figura 3.5: Esfera

Isolando y na equação da circunferência, temos: $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ ou $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Agora, considere uma fatia da esfera como na Figura 3.6

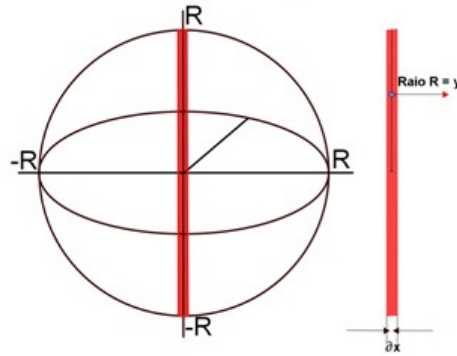


Figura 3.6: Fatia de esfera

A fatia ilustrada na figura 3.6 possui largura infinitesimal δx e raio y . Note que a somatória infinita das fatias, em que o raio y varia para cada uma dessas fatias, compõem o volume total da esfera. Logo, temos que o volume da esfera é dado pela integral definida do volume da fatia, ou seja, como cada fatia é um cilindro de área da base igual a πy^2 e altura δx , temos que:

$$V_e = \int_{-R}^R y^2 \pi \delta x.$$

Portanto,

$$V_e = \int_{-R}^R y^2 \pi \delta = \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 \pi \delta x = \int_{-R}^R (R^2 - x^2) \pi \delta x = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) \delta x$$

$$V_e = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right]$$

$$V_e = \pi \left[\left(\frac{3R^3 - R^3}{3} \right) - \left(\frac{-3R^3 + R^3}{3} \right) \right] = \pi \left(\frac{2R^3}{3} + \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Do curso de cálculo [8], sabemos que a área de uma figura geométrica é a derivada do volume. Logo,

$$A_e = \frac{\delta V_e}{\delta R} = \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right) = 3 \frac{4\pi R^2}{3} = 4\pi R^2.$$

3.4 A área de um círculo nos livros didáticos

Segundo a grade curricular do estado de São Paulo [9], o conteúdo de corpos redondos, que envolve o número π , a circunferência, o círculo e suas partes e a área do círculo, é referente ao nono ano/ oitava série mais precisamente no quarto bimestre, sendo revisado no ensino médio. Com base nessas informações procurou-se analisar alguns livros

didáticos do 9 ano quando se referem à área de um círculo e também como os professores que lecionam esse conteúdo abordam em suas respectivas aulas o tema proposto e em que os livros ajudam ou interferem de forma negativa.

Analisando os livros didáticos chega-se a conclusão que os livros apresentam diversas demonstrações para a área de um círculo, como dividindo o círculo em setores circulares e transformando-o em um paralelogramo, ou como aproximações de polígonos regulares, entre outros. Porém todas essas demonstrações utilizam o número π de uma forma não muito explicativa. Por exemplo, geralmente os livros contam uma pequena história que o comprimento de uma circunferência sempre esteve envolvido diretamente com o comprimento do diâmetro de um círculo e que hoje em dia conhecemos que eles estão ligados pelo número π através da fórmula: $\pi = C/D$, em que C é o comprimento da circunferência e D o diâmetro, sendo o número π um número irracional, com $\pi = 3.14159265359\dots$. Entretanto, ao ser apresentado dessa forma dificulta a abstração perante os discentes, pois já existe uma grande dificuldade por parte deles de identificar o que é um número irracional, o argumento de que é um número que não pode ser expresso na razão de dois inteiros a e b , tais que o denominador é diferente de zero, fica meio vago [2].

Geralmente a maior dificuldade quanto aos discentes ao absorverem de uma forma esperada o conteúdo de corpos redondos: área de círculo, comprimento de circunferência, etc., é a abstração do número π , eles comentam que a maioria das atividades presentes nos livros didáticos são compostas de exercícios de fixação de fórmulas e que não estimulam os discentes a concluírem a irracionalidade do número π .

Este trabalho tem o objetivo de proporcionar atividades que facilitem a abstração do número π , com cálculo de áreas de forma que induza os discentes a concluírem por si só que independente da atividade, sempre a área de um círculo se aproxima do número 3,14 (todas as atividades utilizaram raio igual a uma unidade de comprimento) e com o auxílio de softwares como o Geogebra atingir a irracionalidade do π .

Capítulo 4

Propostas de atividades

Neste capítulo propomos atividades para serem aplicadas em sala de aula, para facilitar a explanação do conteúdo perante os discentes. As atividades a seguir consistem em determinar a área de um círculo através de aproximações sucessivas de áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência que o delimita.

Atividade 1 Nessa atividade vamos preencher o círculo com triângulos. Cada triângulo deve possuir um vértice no centro do círculo, o qual assumimos que seu raio mede 1 unidade, e os outros dois vértices pertencentes a circunferência. Observe a figura 4.1:

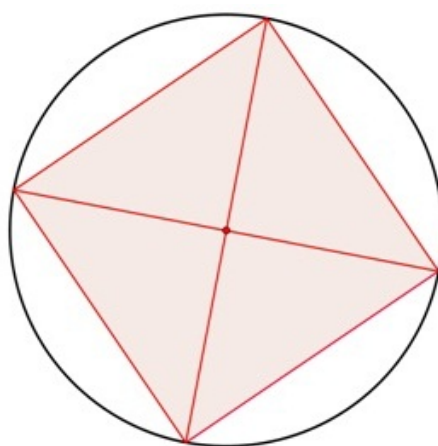


Figura 4.1: Triângulo no círculo

Na figura 4.1, inscrevemos quatro triângulos isósceles dentro do círculo, resultando em área $A = 2u^2$. Fato simples de observar, pois a área de cada triângulo é igual a $\frac{1}{2}$. Agora a ideia é construir círculos com triângulos isósceles inscritos, primeiro com 5 triângulos, e assim sucessivamente, colocando os dados coletados em uma tabela. A figura 4.2 mostra uma das etapas deste processo.

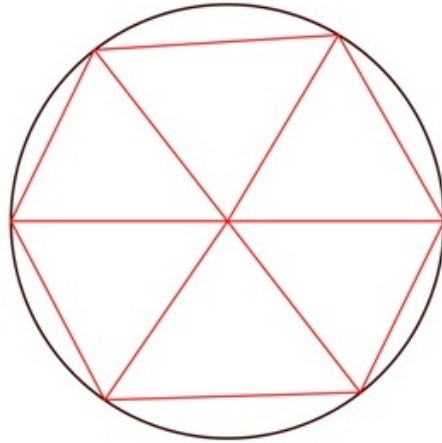


Figura 4.2: Hexágono dividido em triângulos

Nessa primeira atividade os discentes terão que calcular a soma das áreas dos triângulos de forma tradicional, sem a ajuda de equipamentos eletrônicos ou softwares. Serão dados a todos os grupos de discentes, círculos especiais de uma unidade de medida, assim como réguas calibradas para esses círculos. Assim, eles poderão determinar as áreas dos triângulos medindo os lados e as alturas dos mesmos.

Após os cálculos, os dados serão colocados em uma tabela para uma análise posterior e reflexão detalhada.

Os discentes perceberão a grande dificuldade, mesmo com o auxílio da régua, pois para uma precisão maior, precisa aumentar cada vez mais o número de lados do polígono que se forma com a soma dos triângulos. Assim, será apresentada a segunda atividade.

Atividade 2 Construa dois círculos de raio $R = 1$ unidade de medida. No primeiro círculo inscreva um polígono regular e no segundo circunscreva um polígono regular e determine suas áreas. As figuras 4.3 e 4.4 ilustram um exemplo de um hexágono e um decágono inscrito e circunscrito.

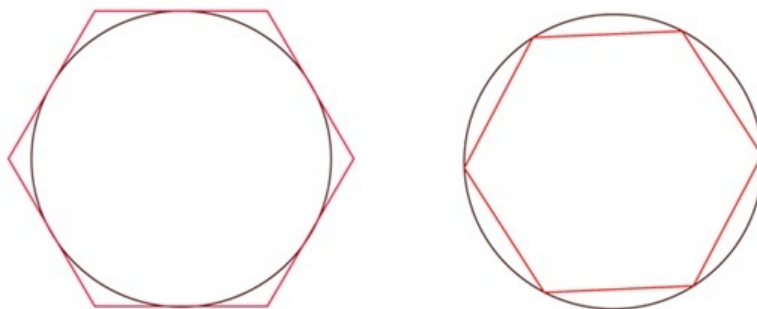


Figura 4.3: Hexágono circunscrito e inscrito

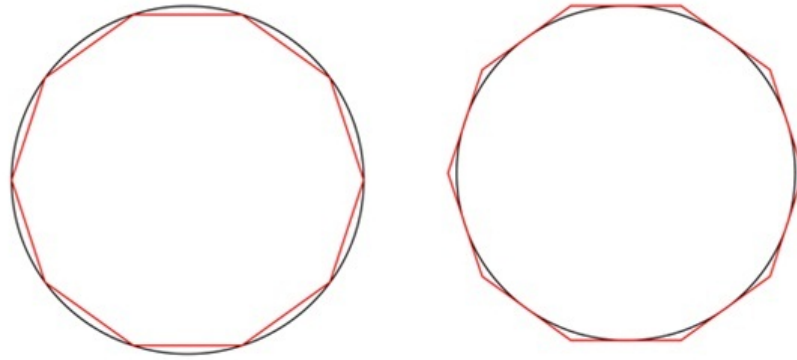


Figura 4.4: Decágono inscrito e circunscrito

Primeiramente considere um polígono de $n=3$ lados (triângulo equilátero) e depois $n = 4$, $n = 5$ e assim, sucessivamente. Coloque os dados em uma tabela.

Tabela 4.1: Área de Polígonos

Número n de lados	Área do polígono inscrito	Área do polígono circunscrito
3	1,3	5,2
4	2	4
5	2,4	3,6
6	2,6	3,5
7	2,73	3,40
20	3,10	3,16
50	3,133	3,146

O que podemos perceber durante o cálculo dessas áreas?

Que os discentes percebam que quanto maior é o número de lados do polígono inscrito e circunscrito, eles vão se aproximando da figura original que é o círculo e a área dos dois polígonos vai tendendo a um determinado número, que corresponderá à área do círculo.

O valor se aproxima de algum número?

Com o auxílio do software Geogebra na construção geométrica, para inscrevermos e circunscrevermos um número de lados tão grande quanto se queira, os discentes perceberão que o valor das duas áreas, tanto quanto por falta, tanto quanto por excesso, se aproximam de um determinado número e se espera que se conclua que esse número se trata da área do círculo.

O que acontece se aumentarmos o número de lados n tão grande quanto se queira?

Logo após a apresentação da fórmula da área de um círculo como sendo a área de um polígono inscrito de n lados, quando esse n se torna tão grande quanto se queira, fazendo com que a soma desses n lados preencham exatamente o comprimento da circunferência, espera-se que os discentes cheguem a conclusão que esse número se trata do número

irrational π .

Observação: Até um número pequeno de lados do polígono a construção geométrica é possível de se realizar com régua e compasso, através de conhecimentos de desenho geométrico. No entanto, conforme o número n de lados aumenta, a construção tende a se tornar um tanto quanto complexa para se realizar a mão, para isso, para facilitar a construção e o cálculo dessas áreas aconselhamos a utilização de softwares. Por exemplo, o GEOGEBRA, como no link:

<https://www.geogebra.org/material/simple/id/70751>

O link acima nos direciona diretamente ao Software GeoGebra on line, criado por Douglas Daniel, para a atividade de aproximação da área do círculo por polígonos regulares. Assim conforme aumentamos o número n de lados dos polígonos regulares inscrito e circunscrito na circunferência de raio $r = 1$ teremos que o valor da área dos polígonos regulares cada vez mais se aproximam da área do círculo, ou seja, se aproximam do valor de π . As figuras a seguir ilustram a atividade para alguns valores de n .

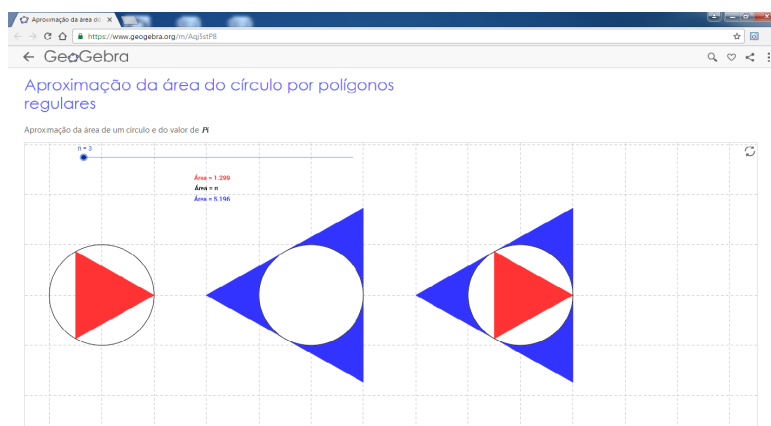


Figura 4.5: GeoGebra 1

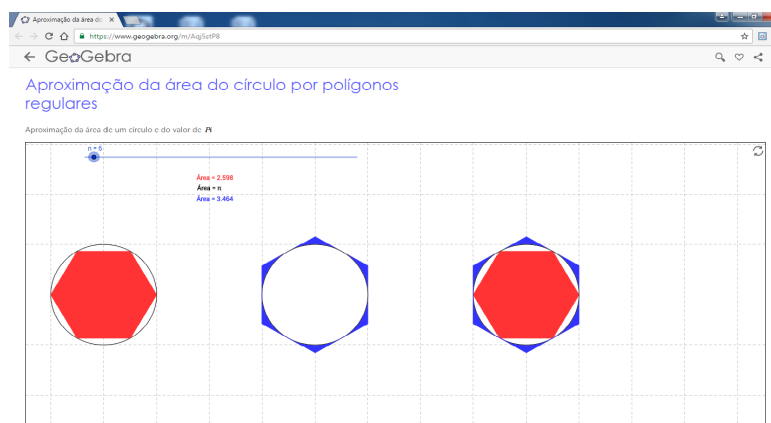


Figura 4.6: GeoGebra 2

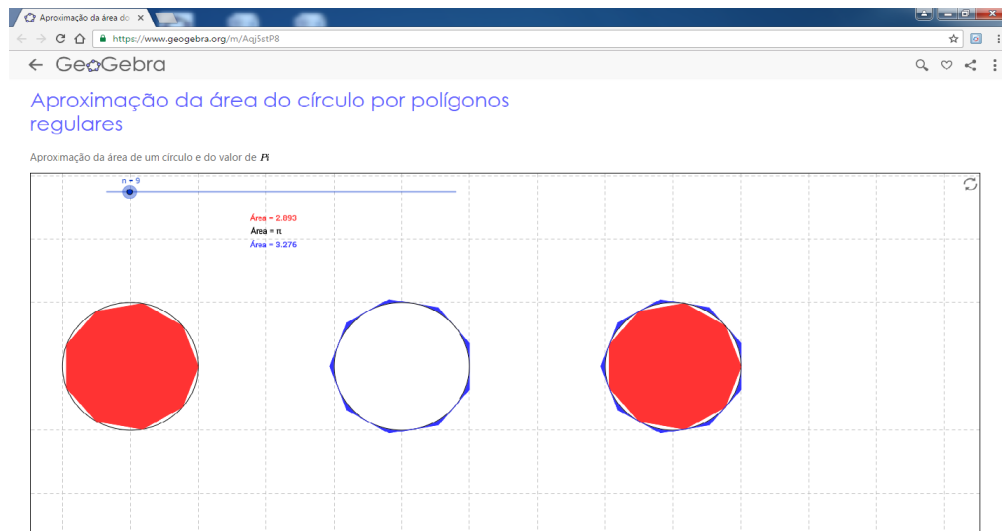


Figura 4.7: GeoGebra 3

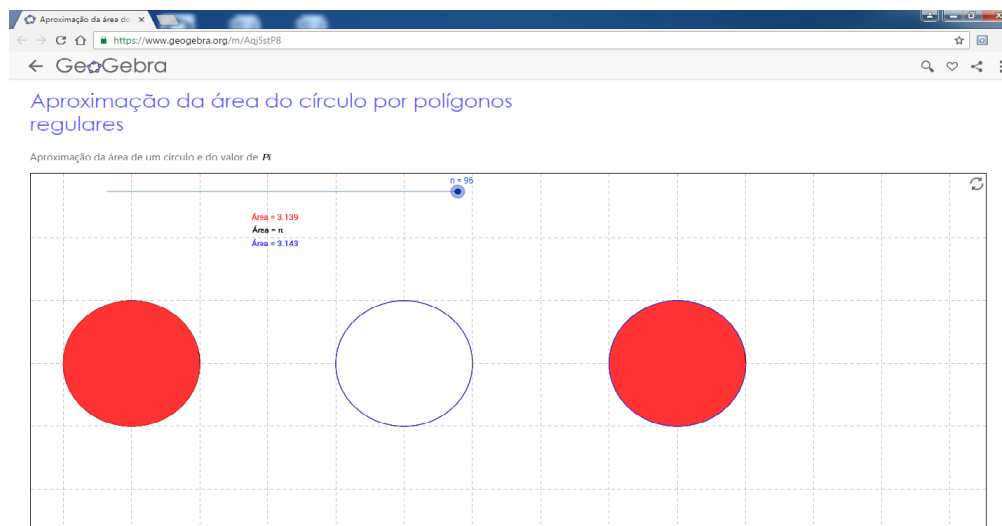


Figura 4.8: GeoGebra 4

Expectativas e objetivos: As atividades 1 e 2 são complementares, pois basta observar que cada polígono regular inscrito e circunscrito de n lados, na atividade 2 tem sua área calculada sendo dividido em n triângulos equiláteros. Por isso a atividade 1 é aconselhada a ser utilizada primeiro para que os discentes calculem a área desses polígonos e percebam que quanto o número n de lados do polígono tende a aumentar implica em uma grande dificuldade de se realizar o cálculo sem a ajuda de um software. Assim, na atividade 2, com a ajuda do Geogebra, podemos calcular a área de um polígono com um números de lados tão grande quanto se queira.

Atividade 3 Para facilitar os cálculos vamos determinar a área do círculo considerando um semicírculo de raio $R = 1$ unidade. Como o círculo se trata de uma figura simétrica, ao considerar um semicírculo teremos uma aproximação para metade da área do círculo.

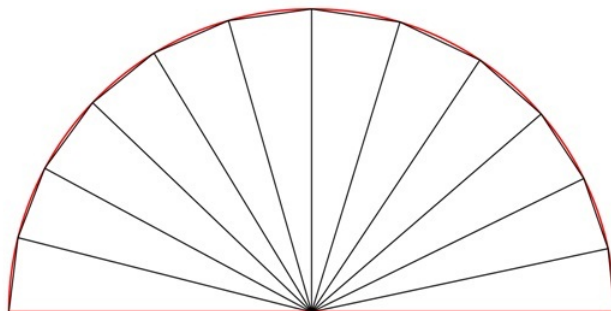


Figura 4.9: Semicírculo

Expectativas e objetivos: Nessa terceira atividade, além de trabalhar com os conteúdos oriundos do círculo e circunferência, vamos trabalhar também o assunto de simetria. Pode ser muito provável que durante a primeira atividade algum dos discentes questionem se não seria mais fácil ao invés de inscrever triângulos em um círculo, inscrevê-los em um semicírculo, para facilitar os cálculos e depois apenas multiplicar por dois, pelo fato do círculo ser uma figura simétrica. Até mesmo, poderiam considerar um quarto da circunferência e depois multiplicar por quatro. Se algum discente fizer essa pergunta, aconselha-se elogiá-lo e responder que sim, que isso facilitaria o cálculo e pouparia tempo.

Essa atividade tem justamente esse fundamento, de apresentar aos alunos a simetria do círculo utilizando-a para facilitar o cálculo de sua área aproximada.

Resultados A atividade 2 foi aplicada em sala de aula tendo um retorno extremamente positivo perante os discentes do nono ano do ensino fundamental. A grande maioria compreendeu o intuito de que ao aumentar o número n de lados, sucessivamente, implica em uma aproximação cada vez melhor da área do círculo e que o limite de quando n tende ao infinito (se torna tão grande quanto se queira) é o valor exato da área do círculo e também o valor do número π pois, se trata de um círculo de raio $r = 1$.

Capítulo 5

Conclusão

Contribuições e Limitações

O trabalho contribuiu de forma significativa para a validação da grande dificuldade de se lecionar conteúdos em que estão inseridos números irracionais, como o π , pois fica meio abstrata a ideia de sua descoberta. Porém, as atividades em que estimulam os discentes a percorrer o caminho que induzam os por si próprios a validarem a irracionalidade do número e como foi a árdua trajetória até a sua descoberta, ajudam e muito na absorção e aceitação das fórmulas geométricas circulares.

Há uma grande limitação em se trabalhar demonstrações de tais fórmulas, porque as mais aceitas e rigorosas exigem conhecimento avançado de cálculo diferencial e integral, conhecimento esse que os discentes não possuem, porém é sempre proveitoso dar uma noção a eles, mesmo que seja de forma superficial para se ter um melhor entendimento do assunto. A demonstração da área de uma esfera, por exemplo, fica extremamente complicado explicá-la sem o auxílio do cálculo, toda via a fórmula do volume da para se recorrer ao uso do princípio de Cavalieri.

Lições aprendidas O auxílio de softwares como o Geogebra e afins ajudam de forma muito significativa a visualização e absorção do conteúdo, e deve ser mais explorado em sala de aula como recurso auxiliar em vários conteúdos que tenham um nível de abstração um quanto tanto difícil perante os discentes.

Trabalhos Futuros Para futuros trabalhos aconselha-se uma exploração e aprofundamento maior quanto à esfera, pois se relatou em pesquisas de livros didáticos o quanto o assunto é de certa forma mostrado, sem qualquer preocupação com demonstrações e rigor. Precisa-se tratar o conteúdo com maior preocupação quanto ao entendimento

Referências Bibliográficas

- [1] PAULO, G.B. Uma Proposta para o Ensino e Aprendizagem dos Conceitos de Área de Círculo de Perímetro de Circunferência, 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) PUC-SP, São Paulo.
- [2] BORTOLETTO, A.R.S. Reflexões relativas às definições do número π (PI) e a presença da sua história em livros didáticos de matemática do ensino fundamental, 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba, São Paulo.
- [3] GASPAR, M. T. e MAURO, S. Explorando a geometria através da história da matemática e da etnomatemática. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004.
- [4] PEREIRA, T.V. Regiões Circulares e o Número π , 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) Universidade Federal de Goiás, Goiás.
- [5] <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2009/08/demonstracao-da-area-do-circulo.html>. Consultado em 10/02/2016.
- [6] PATERLINI, R. e AZEVEDO, E. de. HIPERTEXTO PITÁGORAS.
- [7] <http://ecalculo.if.usp.br>. Acesso em 15/01/2016.
- [8] STEWART, James. Cálculo, volume I, 5a. edição. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2006.
- [9] CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO, Matemática e suas tecnologias, 1 edição atualizada, São Paulo, 2011.