Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Aplicação do mínimo múltiplo comum generalizado nas ondas de pêndulos

Jean Carlo de Sousa e Silva

Goiânia

2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor :	Jean Carlo de Sousa e Sila				
E-mail:	Jean.fisica@hotmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Seletista				
Agência de fomento:	Nenhuma			Sigla:	
País:		UF:		CNPJ:	
Título:	Aplicação do mínimo múltiplo comum generalizado nas ondas de pêndulos				
Palavras-chave:	Ondas de pêndulo, mmc, mmcg, comensurabilidade.				
Título em outra língua:	Minimum application multiple widespread common in waves of pendulums				
Palavras-chave em outra língua:	Pendulum waves, lcm, lcmw, commensurability				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	30/03/2016				
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT				
Orientador (a):	Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues				
E-mail:	paulo.mat.ufg@gmail.com				
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

____ Data: _30_ / __03_ / _2016_

Assinatura do (a) autor (a)
Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Jean Carlo de Sousa e Silva

Aplicação do mínimo múltiplo comum generalizado nas ondas de pêndulos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues

Goiânia

2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Silva, Jean Carlo de Sousa e
Aplicação do mínimo múltiplo comum generalizado nas ondas de pêndulos [manuscrito] / Jean Carlo de Sousa e Silva. - 2016.
iv, 43 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2016.
Bibliografia. Anexos.

1. Ondas de pêndulo. 2. mmc. 3. mmcg. 4. comensurabilidade. I. de Azevedo Rodrigues, Paulo Henrique , orient. II. Título.

Jean Carlo de Sousa e Silva

Aplicação do Mínimo Múltiplo Comum Generalizado nas Ondas de Pêndulos

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 30 de março de 2016, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos
Membro externo – IFG-GOIÂNIA

Jean Carlo de Sousa e Silva é licenciado em Física pela Universidade Federal de Goiás. Atua como professor do ensino médio e cursos preparatórios para o vestibular e o ENEM desde o ano de 2009.

Dedico esse trabalho primeiramente a Deus, pois a Ele toda honra e glória. Não esquecendo de todos aqueles que se alegraram comigo desde o ínicio até nesse momento de conclusão do mestrado. À vocês meus amigos, familiares, meus queridos pais e a minha amada esposa.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter concedido-me vida, saúde além da oportunidade de realizar esse mestrado. Reconheço também a importância de minha família, minha amada esposa, meus pais, minha irmã, dentre outros que motivaram-me e compreenderam a importância de tal curso para mim. Não posso esquecer do apoio dos amigos que contriubuiram muito para a realização desse sonho, em especial aos amigos do PROFMAT, que aproximamos muito por conta das dificuldades e objetivos terem se aproximados. Agradeço muito aos professores, que conduziram-me a uma autonomia nos estudos, em especial ao meu orientador Professor Dr. Paulo Henrique, que com muita paciência e competência me auxiliou na confecção desse trabalho. Por fim, quero agradecer à SBM e a UFG por criarem e oferecerem, respectivamente, esse programa de mestrado, contribuindo assim com minha formação acadêmica.

Resumo

Os pêndulos simples possuem movimentos oscilatórios e periódicos. Assim, se analisarmos alguns deles com movimentos independentes, eles poderão voltar a se encontrar no mesmo ponto se seus períodos forem comensurávies. Para isso apresentamos os conceitos básicos necessários para a compreensão desse fenômeno. Finalizando com uma sugestão de aplicação do mesmo.

Palavras-chave

Ondas de pêndulo, mmc, mmcg, comensurabilidade.

Abstract

The simple pendulums have oscillatory and periodic movements. Thus, if we analyze some of them with independent movements, they may again return to be in the same spot, if your periods are comensurávies. We present the basic concepts needed to understand this phenomenon. Ending with a hint of implementation.

Keywords

Pendulum waves, lcm, lcmw, commensurability.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Nesse trabalho, trataremos da aplicação do mínimo múltiplo comum generalizado no movimento de pêndulos independentes. O objetivo inicial é verificar se dois ou mais pêndulos em movimentos independentes, porém analisados simultaneamente, voltariam a se encontrar na mesma posição. Além disso, se tais pêndulos se encontrassem, qual seria o padrão para tais encontros?

Os Paramêtros curriculares nacionais do ensino médio(PCN+) determina dentre os conteúdos programáticos para o ensino básico, o ensino de mínimo múltiplo comum, *mmc* e de Movimento Harmônico Simples ($M.H.S.$).[7] Assim, como ambos são conteúdos que devem ser trabalhados no ensino básico, temos aqui a sugestão de uma abordagem interdisciplinar que contemple ambos conteúdos de uma forma mais aplicável ao cotidiano do aluno.

Com a finalidade de elucidar os objetivos acima, montamos uma sequência em que no capítulo da fundamentação teórica, explicamos todos os principais conceitos para o entendimento. Nesse capítulo, teremos seções explicando o mínimo múltiplo comum, *mmc*, entre números inteiros, depois definimos segmentos comensuráveis e incomensuráveis para podermos generalizar o conceito do *mmc*. Em seguida, explicamos todos os conceitos físicos que são necessários à compreensão do trabalho, deixando na bibliografia algumas referências para o leitor mais curioso ampliar seu conhecimento em tal área. Posteriormente, explicamos de fato alguns casos para o movimento dos pêndulos. Desse modo, mostramos o caso de vários pêndulos em movimentos independentes porém analisados simultâneamente. Mostrando que para tais pêndulos voltarem a se encontrar na mesma posição é necessária a comensurabilidade de seus períodos. Respondendo assim nossa questão fundamental, os pêndulos voltam a se encontrarem se os seus períodos forem comensuráveis. Sendo que se encontrarão no mínimo múltiplo comum, generaliado ou não, entre seus períodos. Finalmente, deixamos como sugestão de aplicação em forma de planos de aula explicativos para que essa abordagem possa ser aplicada pelos leitores.

Capítulo 1

Fundamentação teórica

Neste capítulo trataremos dos conceitos fundamentais para a compreensão do restante do trabalho. Portanto, o objetivo inicial é estabelecer os princípios matemáticos e físicos para a elucidação das ondas de pêndulos. Que trata da observação do movimento de alguns pêndulos em movimentos independentes.

1.1 Segmentos comensuráveis e *mmcg*

1.1.1 *mmc* e *mdc*

Dentro do conjunto dos inteiros temos definidos o mínimo múltiplo comum (*mmc*) e o máximo divisor comum (*mdc*). O *mmc* é o menor múltiplo comum de dois números A e B. Diremos que um número M é múltiplo de x se pudermos achar $n \in \mathbb{Z}$ tal que $M = n \cdot x$. Assim diremos que M é múltiplo comum de dois números x e y se existirem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $M = n \cdot x = m \cdot y$. Além disso, é importante definirmos o menor múltiplo comum ou o Mínimo Múltiplo Comum, *mmc*, entre dois números.

Definição 1.1. *Diremos que M é o mínimo múltiplo comum de x e y, escrevendo que $M = mmc(x, y)$ ou que $M = [x, y]$, se M satisfizer as condições a seguir:*

- *M ser múltiplo tanto de x como de y, ou seja, $M = n \cdot x$ e $M = m \cdot y$;*
- *M ser positivo;*

- *se M_1 também é múltiplo comum de x e y, devemos ter que $M < M_1$.*

Por semelhante modo, podemos falar que D é um divisor de x se existe u tal que $u \in \mathbb{Z}$ e $x = D \cdot u$, escrevendo que $D \mid x$, D divide x. Portanto, podemos usar a seguinte definição.

Definição 1.2. *Dizemos que D é o máximo divisor comum de x e y, escrevendo que $D = mdc(x, y)$ ou que $D = (x, y)$, se D satisfizer as condições a seguir:*

- *D ser divisor tanto de x como de y, ou seja, $x = D \cdot u$ e $y = D \cdot v$;*
- *se D_1 também é divisor comum de x e y, devemos ter que $D > D_1$*

Demonstraremos duas proprosições sobre o *mmc*, que serão importantes para a compreensão do restante desse trabalho.

Proprosição 1.1. *O módulo do produto de dois inteiros quaisquer é igual ao produto entre o mmc e mdc desses números.*

$$\mid x \cdot y \mid = [x, y] \cdot (x, y) \tag{1.1}$$

Demonstração. Tal propriedade pode ser verificada facilmente pois tomando d um divisor comum de x e y poderemos escrever que: $m = \dfrac{\mid x \cdot y \mid}{d}$. Onde m será um múltiplo comum de x e y pois $m = \mid x \mid \cdot \dfrac{\mid y \mid}{d}$ e $m = \mid y \mid \cdot \dfrac{\mid x \mid}{d}$. Dessa forma, teremos que todo múltiplo comum de x e y será da forma mencionada anteriormente. Sendo assim, tomando o maior d possível que seja divisor de x e de y teremos que $d = (x, y)$ e por consequência, m será o menor múltiplo comum de x e y, sendo assim $m = [x, y]$, portanto teremos que:

$$\begin{aligned}
m &= \mid x \mid \cdot \frac{\mid y \mid}{d} \\
m &= \mid y \mid \cdot \frac{\mid x \mid}{d} \\
\mid x \cdot y \mid &= m \cdot d \\
\mid x \cdot y \mid &= [x, y] \cdot (x, y)
\end{aligned}$$

[6] $\square$

Proprosição 1.2. *O mdc de dois números que possuem um fator comum, é tal fator comum multiplicado pelo mdc dos números originais dividos por tal fator, escrevemos então que:*

$$(a \cdot x, a \cdot y) = a \cdot (x, y) \tag{1.2}$$

Demonstração. Pela definição de *mdc* temos que D é o *mdc* entre x e y se D for o maior inteiro que seja divisor de ambos os números. Sendo $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{x}{a} \notin \mathbb{Z}$ e $\frac{y}{a} \notin \mathbb{Z}$ teremos que $\mid a \mid \cdot D$ será o maior divisor de $a \cdot x$ e de $a \cdot y$ dessa forma teremos que:

$$\begin{aligned} (a \cdot x, a \cdot y) &= \mid a \mid \cdot D \\ (a \cdot x, a \cdot y) &= \mid a \mid \cdot (x, y) \end{aligned}$$

□

Proprosição 1.3. *O mmc de dois números que possuem um fator comum, é tal fator comum multiplicado pelo mmc dos números originais dividos por tal fator, escrevemos então que:*

$$[a \cdot x, a \cdot y] = a \cdot [x, y] \tag{1.3}$$

Demonstração. O que pode ser entendido pois dado um inteiro a tal que $(a, x) = (a, y) = 1$ teremos que da **Proposição** 1.1 temos que:

$$\begin{aligned} \mid a \cdot x \cdot a \cdot y \mid &= [a \cdot x, a \cdot y] \cdot (a \cdot x, a \cdot y) \\ \mid a \cdot x \cdot a \cdot y \mid &= [a \cdot x, a \cdot y] \cdot a \cdot (x, y) \end{aligned}$$

Pois como $(a, x) = (a, y) = 1$ temos que se d divide x e divide y irá também dividir $a \cdot x$ e $a \cdot y$ entretanto, $a \cdot d$ também dividirá $a \cdot x$ e $a \cdot y$ e como por definição o *mdc* entre dois números é o maior divisor comum entre eles temos que $(a \cdot x, a \cdot y) = a \cdot (x, y)$ e ainda da **Proposição** 1.1 chegaremos que:

$$\begin{aligned} a^2 \mid \cdot x \cdot y \mid &= [a \cdot x, a \cdot y] \cdot a \cdot (x, y) \\ a \cdot (x, y) \cdot [x, y] &= [a \cdot x, a \cdot y] \cdot (x, y) \\ a \cdot [x, y] &= [a \cdot x, a \cdot y] \end{aligned}$$

□

1.1.2 Segmentos comensuráveis

Um segmento é uma parte de uma reta, que fora limitado. Dessa forma, o segmento $\overline{AB}$ é um segmento de reta que inicia-se em A e termina em B. Podemos associar à esse segmento um valor para seu comprimento. Para definir a medida do comprimento do segmento $\overline{AB}$ temos que analizar quantas vezes o segmento unitário u é menor do que $\overline{AB}$.

Definição 1.3. *Se a quantidade de vezes que o segmento unitário u for menor do que o segmento $\overline{AB}$ for um número inteiro, diremos que tal segmento é comensurável em relação à unidade de medida estabelecida. Assim, seu comprimento será o número de vezes que o segmento unitário é menor do que o segmento a ser medido e tal segmento unitário é a unidade de medida. Entretanto, se não for possível encontrar um número inteiro de vezes que o segmento unitário acomoda-se em $\overline{AB}$ tal segmento será classificado como segmento incomensurável em relação à unidade estabelecida.*

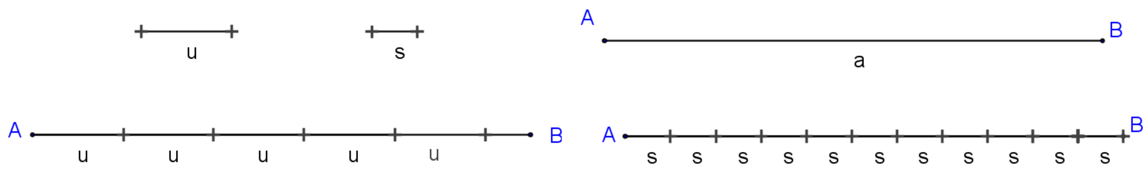

Figura 1.1: Segmentos

Para um único segmento, poderemos trocar nossa unidade de medida, ou segmento unitário, de forma que o segmento que antes era incomensurável em relação ao segmento unitário u será comensurável em relação ao segmento unitário s. Ou seja, a clasificação quanto a comensurabilidade é relativa. Na Figura 1.1 temos um exemplo disso: o segmento $\overline{AB}$ é incomensurável em relação ao segmento u entretanto, ele é comensurável em relação ao segmento s.

Definição 1.4. *Podemos assim generalizar que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis se existir um segmento unitário que possa medir, ao mesmo tempo, ambos segmentos. Agora, se não existir um segmento unitário que possa medir, ao mesmo tempo, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ eles serão incomensuráveis.*

Uma importante consequência de dois segmentos serem comensuráveis é que a razão entre eles será um número racional. Pois ambos os segmentos serão escritos como um produto de um número inteiro por uma unidade de medida. Como exemplo podemos ter: $\overline{AB} = m \cdot u$ e $\overline{CD} = n \cdot u$ portanto $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$. Como tanto m quanto n são números inteiros e considerando $n \neq 0$ teremos que $\frac{m}{n}$ será um número racional.

Então, outra maneira de expressar que dois segmentos de dimensões x e y são comensuráveis é discutir a existência de dois números inteiros m e n tais que:

$$m \cdot y = n \cdot x \tag{1.4}$$

Tal consequência é implicada pela definição dos segmentos comensuráveis. Pois se x e y são comensuráveis, podemos tomar um segmento unitário u tal que $x = m \cdot u$ e $y = n \cdot u$. Portanto, dividindo ambas equações teremos que:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{m \cdot u}{n \cdot u} \\ \frac{x}{y} &= \frac{m}{n} \\ x \cdot n &= y \cdot m \end{aligned}$$

Em que pela definição temos que m e $n \in \mathbb{Z}$

Na Antiguidade, os gregos acreditavam que dois segmentos eram sempre comensuráveis em relação a alguma unidade, ou seja, sempre poderíamos trocar o segmento unitário para que tais segmentos fossem comensuráveis. Entretanto, entre 450 e 400 a.C. provou-se que o lado e a diagonal de um quadrado eram incomensuráveis.[5]

Se fosse possível encontrar uma unidade em que o lado e a diagonal de um mesmo quadrado fosse comensuráveis, teríamos que ter:

$$\begin{aligned} m \cdot x &= n \cdot x\sqrt{2} \\ m^2 \cdot x^2 &= n^2 \cdot x^2 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$m^2 = 2 \cdot n^2 \tag{1.5}$$

O que é um absurdo pois do lado esquerdo da Equação (1.5) temos que, quando tais números forem escritos como fatoração em números primos, o primo 2 aparecerá uma quantidade par de vezes na fatoração do inteiro, m, enquanto que do lado direito ele aparecerá um quantidade ímpar de vezes. Por isso, o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis.

1.1.3 *mmcg* e *mdcg*

As noções de mínimo múltiplo comum, *mmc*, e máximo divisor comum, *mdc*, de dois números inteiros, podem ser extendidas para pares de números reais comensuráveis. Dessa forma, faz-se necessário a compreensão de segmentos comensuráveis, elucidadas na Seção 1.1.2, para que possamos aplicar a ideia de *mmc* e *mdc* de forma generalizada.

Quando dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de dimensões x e y, respectivamente, forem comensuráveis, poderemos escrever que $x = m \cdot u$ e $y = n \cdot u$ com m e $n \in \mathbb{Z}$. Ou ainda, como na equação (1.4) podemos escrever que $m \cdot y = n \cdot x$ tais que m e $n \in \mathbb{Z}$.

Como x e y são medidas de segmentos comensuráveis teremos que a razão entre eles será um número racional e poderemos escrever que:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{m \cdot u}{n \cdot u} \\ \frac{x}{y} &= \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Tomando u de forma que ele seja o maior segmento unitário que faça $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ serem comensuráveis teremos que $(m, n) = 1$ e assim a fração $\frac{m}{n}$ é a fração irredutível de $\frac{\mid x \mid}{\mid y \mid}$. O que nos permite escrever tais grandezas como na definição acima. Além disso podemos, facilmente, verificar que $M = m \cdot \mid y \mid = n \cdot \mid x \mid$ é o menor múltiplo comum entre x e y pois $(m, n) = 1$ porque tomamos a maior unidade de medida que permitia a comensurabilidade entre os segmentos. Pois se $(m, n) \neq 1$ seria possível encontrar um $u_1 = (m, n) \cdot u$ tal que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ ainda fossem comensuráveis, entretanto se $(m, n) \neq 1$ teremos que $u_1 > u$ o que é um absurdo pois escolhemos u o maior segmento possível para que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ fossem comensuráveis. Assim pode-se associar a tais números um mínimo múltiplo comum generalizado (*mmcg*) respeitando a seguinte definição:

Definição 1.5. *$M = \mid y \mid \cdot m = \mid x \mid \cdot n$ será o mmcg entre x e y, escrevendo que $M = mmcg(x, y)$, se M satisfizer as condições a seguir:*

- *M ser múltiplo tanto de x como de y;*
- *M ser positivo;*
- *se M_1 também é múltiplo comum de x e y devemos ter que $M < M_1$.*

$$mmcg(x, y) = m \cdot y = n \cdot x \tag{1.6}$$

Definição 1.6. *D será o máximo divisor comum generalizado (mdcg) entre x e y se $D = u$ onde u é o maior segmento que consegue dividir em uma quantidade inteira de vezes tanto $\overline{AB}$ como $\overline{CD}$ sendo assim $u = \dfrac{|\,x\,|}{m} = \dfrac{|\,y\,|}{n}$. Logo D será o mdcg entre x e y se ele satisfizer as condições:*

- *D ser divisor tanto de x como de y, ou seja, $x = D \cdot u$ e $y = D \cdot v$;*
- *se D_1 também é divisor comum de x e y devemos ter que $D > D_1$*

$$mdcg(x, y) = \frac{x}{m} = \frac{y}{n} \tag{1.7}$$

Proprosição 1.4. *Considerando x e $y \in \mathbb{Q}$ tais que suas frações irredutíveis serão, respectivamente a/b e c/d poderemos calcular o mmcg entre x e y da seguinte maneira:*

$$mmcg(x, y) = \frac{[a, c]}{(b, d)} \tag{1.8}$$

Demonstração. Como $x = \dfrac{a}{b}$ e $y = \dfrac{c}{d}$, teremos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Dividindo tanto o numerador como o denominador por $(a, c) \cdot (b, d)$ teremos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{\dfrac{a \cdot d}{(a, c) \cdot (b, d)}}{\dfrac{c \cdot b}{(a, c) \cdot (b, d)}} = \frac{\dfrac{a}{(a, c)} \cdot \dfrac{d}{(b, d)}}{\dfrac{c}{(a, c)} \cdot \dfrac{b}{(b, d)}}$$

Assim, tanto o numerador como o denominador serão frações irredutíveis e por essa razão, como feito na Equação (1.6), podemos dizer que o *mmcg* entre x e y, representado por M, será igual a:

$$\begin{aligned} M &= y \cdot \frac{a}{(a,c)} \frac{d}{(b,d)} \\ M &= x \cdot \frac{c}{(a,c)} \frac{b}{(b,d)} \\ M &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{(a,c)} \frac{b}{(b,d)} \\ M &= a \cdot \frac{c}{(a,c)} \frac{1}{(b,d)} \end{aligned}$$

Como o módulo do produto de dois números é sempre igual ao produto do *mmc* pelo *mdc* entre eles, que foi demonstrado na **Proposição** 1.1 temos que: $[a,c] = \dfrac{a \cdot c}{(a,c)}$ e com isso teremos que:

$$M = mmcg(x,y) = \frac{[a,c]}{(b,d)}$$

$\square$

Proprosição 1.5. *Considerando x e $y \in \mathbb{Q}$ tais que suas frações irredutíveis serão, respectivamente a/b e c/d poderemos calcular o mdcg entre x e y da seguinte maneira:*

$$mdcg(x,y) = \frac{(a,c)}{[b,d]} \tag{1.9}$$

Demonstração. Pelo que fizemos na demonstração anterior, podemos dizer que:

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{c}{(a,c)} \frac{b}{(b,d)} &= y \cdot \frac{a}{(a,c)} \frac{d}{(b,d)} \\ y &= \frac{x \cdot \frac{c}{(a,c)} \frac{b}{(b,d)}}{\frac{a}{(a,c)} \frac{d}{(b,d)}} \end{aligned}$$

Disso podemos concluir que: $\dfrac{x}{\frac{a}{(a,c)} \cdot \frac{d}{(b,d)}}$ divide tanto x como y, além disso que tal valor é o maior divisor comum de x e y sendo assim, representando o $mdcg(x, y)$ por D, teremos:

$$\begin{aligned} D &= \frac{x}{\frac{a}{(a,c)} \cdot \frac{d}{(b,d)}} \\ D &= \frac{a/b}{\frac{a}{(a,c)} \cdot \frac{d}{(b,d)}} \\ D &= \frac{a \cdot (a,c) \cdot (b,d)}{a \cdot b \cdot d} \\ D &= \frac{(a,c) \cdot (b,d)}{b \cdot d} \end{aligned}$$

Mas como $b \cdot d = (b, d) \cdot [b, d]$ poderemos escrever que:

$$mdcg(x, y) = \frac{(a, c)}{[b, d]}$$

□

Tais conceitos foram baseados no trabalho de Cydara Ripoll et al[5]. Essas generalizações quando aplicadas a números inteiros não perdem signficado pois voltam para as definições usuais do mmc e do mdc dos números inteiros. Pois, suponha dois inteiros x e y então teremos que para escrevê-los como frações, basta tomarmos $a = x$, $c = y$ e $b = d = 1$, então tanto o $mmcg$ quanto o $mdcg$ voltam para as definições iniciais de mmc e mdc.

$$\begin{aligned} mmcg(x,y) &= \frac{mmc(a,c)}{mdc(b,d)} \\ mmcg(x,y) &= mmc(a,c) \\ mmcg(x,y) &= mmc(x,y) \\ &e \\ mdcg(x,y) &= \frac{mdc(a,c)}{mmc(b,d)} \\ mdcg(x,y) &= mdc(a,c) \\ mdcg(x,y) &= mdc(x,y) \end{aligned}$$

Além disso vale as proposições semelhantes as **Proposições** 1.1 e 1.3

Proprosição 1.6. *O módulo do produto dos números é igual ao produto entre o mmcg e mdcg desses números.*

$$\mid x \cdot y \mid = mmcg(x,y) \cdot mdcg(x,y) \tag{1.10}$$

Demonstração. Considerando x e y como racionais tais que suas frações irredutíveis serão, respectivamente a/b e c/d teremos que:

$$\begin{aligned}
\mid x \cdot y \mid &= mmcg(x,y) \cdot mdcg(x,y) \\
\mid x \cdot y \mid &= \frac{mmc(a,c)}{mdc(b,d)} \cdot \frac{mdc(a,c)}{mmc(b,d)} \\
\mid x \cdot y \mid &= \frac{a \cdot c}{b \cdot d}
\end{aligned}$$

□

Proprosição 1.7. *Se os números x e y forem tais que $mmcg(x,y) = a$ teremos que o $mmcg(x,y)$ será o produto de a pelo $mmcg(x_1,y_1)$ onde $x_1 = \frac{x}{a}$ e $y_1 = \frac{y}{a}$.*

$$mmcg(a \cdot x, a \cdot y) = a \cdot mmcg(x,y) \tag{1.11}$$

Demonstração. Porque poderemos escrever que dado um real a tal que $mdcg(a,x) = mdcg(a,y) = 1$ teremos, da **Proposição** 1.6, que:

$$\begin{aligned}
\mid a \cdot x \cdot a \cdot y \mid &= mmcg(a \cdot x, a \cdot y) \cdot mdcg(a \cdot x, a \cdot y) \\
\mid a \cdot x \cdot a \cdot y \mid &= mmcg(a \cdot x, a \cdot y) \cdot a \cdot mdcg(x,y)
\end{aligned}$$

Pois como $mdcg(a,x) = mdcg(a,y) = 1$ temos que se d divide x e divide y irá também dividir $a \cdot x$ e $a \cdot y$ entretanto, $a \cdot d$ também dividirá $a \cdot x$ e $a \cdot y$ e como por definição o *mdcg* entre dois números é o maior divisor comum entre eles temos que $mdcg(a \cdot x, a \cdot y) = a \cdot mdcg(x,y)$ e então chegaremos que:

$$
\begin{aligned}
a^2 \mid \cdot x \cdot y \mid &= mmcg(a \cdot x, a \cdot y) \cdot a \cdot mdcg(x, y) \\
a \cdot mdcg(x, y) \cdot mmcg(x, y) &= mmcg(a \cdot x, a \cdot y) \cdot mdcg(x, y)
\end{aligned}
$$

$$
a \cdot mmcg(x, y) = mmcg(a \cdot x, a \cdot y)
$$

$\square$

Como a generalização tanto do *mmc* quanto do *mdc* não perde a essência de tais conceitos, podemos justificar tal feito e agora aplicá-los aos casos que outrora não podíamos.

Exemplo 1.1. *Qual o mmcg e o mdcg entre os números* $2 \cdot \sqrt{3}$ *e* $7 \cdot \sqrt{3}$*?*

Nesse caso, podemos simplificar nossos cálculos apenas colocando o fator comum em evidência e assim calcularmos o *mmcg* da parte não comum, desse modo teremos que:

$$
\begin{aligned}
mmcg(2 \cdot \sqrt{3}, 7 \cdot \sqrt{3}) &= \sqrt{3} \cdot mmcg(2, 7) \\
mmcg(2 \cdot \sqrt{3}, 7 \cdot \sqrt{3}) &= \sqrt{3} \cdot 14 \\
mmcg(2 \cdot \sqrt{3}, 7 \cdot \sqrt{3}) &= 14 \cdot \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Para o *mdcg* basta pegarmos o maior número que divide ambos os números, dessa forma teremos que;

$$
mdcg(2 \cdot \sqrt{3}, 7 \cdot \sqrt{3}) = \sqrt{3}
$$

Exemplo 1.2. *Qual o mmcg e o mdcg entre os números* $\frac{5}{14}$ *e* $\frac{9}{10}$*?*

Para resolver tal exemplo deve-se usar a **proposição** 1.8, como esses números já estão na forma de frações irredutíveis, teremos que $a = 5$,$b = 14$,$c = 9$ e $d = 10$ e assim:

$$\begin{aligned}
mmcg(x,y) &= \frac{[a,c]}{(b,d)}\\
mmcg\left(\frac{5}{14},\frac{9}{10}\right) &= \frac{[5,9]}{(14,10)}\\
mmcg\left(\frac{5}{14},\frac{9}{10}\right) &= \frac{45}{2}
\end{aligned}$$

Para o *mdcg* teremos que:

$$\begin{aligned}
mdcg(x,y) &= \frac{(a,c)}{[b,d]}\\
mdcg\left(\frac{5}{14},\frac{9}{10}\right) &= \frac{(5,9)}{[14,10]}\\
mdcg\left(\frac{5}{14},\frac{9}{10}\right) &= \frac{1}{70}
\end{aligned}$$

Exemplo 1.3. *Qual o mmcg e o mdcg entre os números* $2\cdot\sqrt{5}$ *e* $7\cdot\sqrt{3}$*?*

Nesse caso, como esses números não são comensuráveis, não é possível encontrar o *mmcg* e o *mdcg* entre eles.

1.2 Encontro de corpos e aplicações do *mmc* e do *mmcg*

Existem inúmeras aplicações para resolução de problemas com o uso do mínimo múltiplo comum, e agora apresentaremos, também, algumas aplicações para o mínimo múltiplo comum generalizado onde a definição inicial não pode ser aplicada diretamente.

Exemplo 1.4. *Considere que professor de matemática A compareça no colégio de 3 em 3 dias enquanto o professor de matemática B compareça de 5 em 5 dias, independendetemente do dia da semana que caia seu plantão. Se ambos professores estiveram presentes no colégio no dia 30 de novembro, qual será o dia do mês de dezembro, do mesmo ano, que teremos o próximo encontro entre os professores?*

Como o professor A comparece no colégio de 3 em três dias, podemos pensar que nesse primeiro mês de observação ele irá ao colégio nos dias múltiplos de 3. Analogamente, o professor B estará presente nos dias múltiplos de 5. Assim para que os dois professores estejam no colégio, o dia deve ser múltiplo tanto de 3 como de 5. Por essa razão, para responder a esse tipo de problema basta pegarmos o mínimo múltiplo comum entre os períodos, que é o tempo que tal situação gasta para voltar a ocorrer.

Logo no caso desse exemplo basta pegarmos $[3, 5]$ sendo o período que eles se encontrarão, então, como $[3, 5] = 15$, temos que de 15 em 15 dias eles se encontram, portanto o primeiro dia do mês de dezembro do referido ano em que ambos professores estarão presentes será o dia 15.

Tal exemplo é um modelo clássico de vários problemas. Entretanto existe casos onde tal resolução fica um pouco limitada por conta de sua definição. Como exemplo temos um problema que podemos tirar de uma brincadeira com dois times de futebol brasileiro.

Exemplo 1.5. *Sabendo que o Vasco da Gama foi rebaixado de divisão 3 vezes nos últimos 8 anos e o Botafogo foi rebaixado 2 vezes a cada 12 anos. Se considerarmos os eventos acima como regra, ou seja, cada time ser rebaixado é algo periódico, e considerando hipoteticamente que no ano de 2000 ambos clubes foram rebaixados. Qual será o ano que ambos os times serão rebaixados juntos?*

Nesse caso, temos que o período para o rebaixamento do Botafogo é igual a 6 anos, pois o mesmo sofre 2 vezes nos últimos 12 anos. Entretanto, o período para o rebaixamento do Vasco é de $\frac{8}{3}$ anos e como esse número não pertence ao conjunto dos números inteiros, não poderemos utilizar o *mmc*. Assim, tal exemplo pode ser resolvido pela generalização do *mmc*. Como ambos períodos são números racionais, podemos utilizar a equação (1.8) para resolvê-lo. Como ambos períodos já estão na forma de frações irredutíveis, basta tomar $a = 6$, $b = 1$, $c = 8$ e $d = 3$ e dessa forma teremos que:

$$
\begin{aligned}
x &= mmcg\left(6, \frac{8}{3}\right) \\
x &= \frac{[6,8]}{(1,3)} \\
x &= \frac{24}{1} \\
x &= 24
\end{aligned}
$$

Portanto, ambos os clubes rebaixarão em 2024, considerando que o fenômeno de rebaixamento seja períodico. Além disso podemos afirmar que ambos clubes rebaixarão a cada 24 anos.

Outra aplicação do mínimo múltiplo comum (mmc) é para o caso em que dois corpos em movimento circular uniforme ($M.C.U.$) voltem a se encontrarem no mesmo ponto. Suponha dois corpos, o corpo A que gira no sentido horário e gasta um tempo T_A para dar uma volta em torno do percurso regressando à origem O. Enquanto um corpo B, que gira no sentido anti-horário, gasta um tempo T_B para completar uma volta.

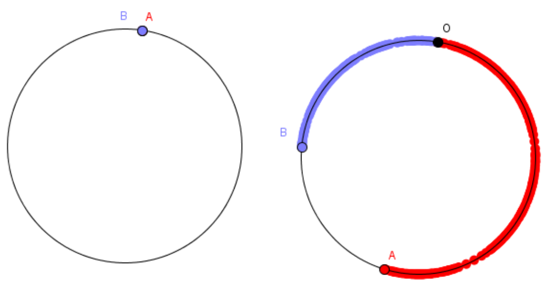

Figura 1.2: Corpos em M.C.U.

Esses corpos se encontrarão algumas vezes em pontos diferentes desse percurso, mas somente se encontrarão no mesmo ponto em um tempo igual ao mmc entre T_A e T_B. Pois em tal intervalo de tempo, o corpo A terá dado uma quantidade de voltas N_A equanto que o corpo B terá dado N_B voltas, voltando os dois a se encontrarem no ponto O.

Por definição, poderíamos resolver esse problema somente se os corpos possuíssem períodos inteiros de tempos. Entretanto, com a generalização do conceito do mmc, podemos agora resolver tal problema para qualquer par de reais que sejam comensuráveis. De forma que o tempo que os corpos gastarão para se encontrarem na mesma posição será o *mmcg* entre os tempos gastos para que cada um deles completem uma volta.

1.3 Pêndulo Simples e o M.H.S.

Na natureza, existem inúmeros movimentos oscilatórios e periódicos. Como exemplo desses movimentos temos: o movimento de uma mola, da corda de um violão, de uma criança sentada em um balanço, de uma escova de dentes elétrica etc. Além desses movimentos, a audiçao, visão e fala são resultantes de fenômenos oscilatórios.[3]

Movimento oscilatório é aquele em que o corpo balança em relação a um ponto de equilíbrio. Atingindo assim pontos de amplitudes máximas para o sentido considerado positivo e para o negativo. Se tal movimento gastar o mesmo tempo em todas idas e vindas, será também um movimento períodico. Dentre tais movimentos, o mais simples é o Movimento Harmônico Simples ($M.H.S.$).

Basicamente, um corpo estará em $M.H.S.$ se o mesmo estiver em um movimento oscilatório e periódico. Dois fatores são indispensáveis para tal oscilação: a presença de uma força restauradora e a inércia do corpo. A força restauradora age no intuito de fazer o corpo voltar à posição de equilíbrio. Por essa razão representaremos tal força como:

$$\vec{F} = -K \cdot \vec{x} \tag{1.12}$$

Em que $\vec{F}$ representa o vetor força restauradoura do movimento, $\vec{x}$ representa o vetor posição em relação à posição de equilíbrio, K é a constante de proporção entre a força e a elongação, ou posição, e o sinal negativo representa que tal força sempre terá o sentido oposto ao da deformação sofrida pelo corpo, por isso do nome restauradora.

Já a inércia é a propriedade que os corpos possuem de continuar seu estado, ou em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Por essa razão, os corpos não param no instante e na posição onde a força é nula. Nesse trabalho, trataremos de um caso particular do $M.H.S.$ o Pêndulo Simples. Quando um corpo de massa m, preso a um fio de comprimento L oscila em torno de uma posição O, descrevendo o arco $\widehat{BOC}$ teremos um Pêndulo Simples.

Nesse caso, a força restauradora do $M.H.S.$ será a componente da força Peso na direção tangencial, $\vec{P}_x$. Tal componente, depende da posição do corpo, ou seja, não é constante ao longo do movimento e o Peso é a força gravitacional que a terra exerce em um corpo próximo à ela. Tal força pode ser calculada como o produto entre a massa do corpo e a aceleração da gravidade ou campo gravitacional.

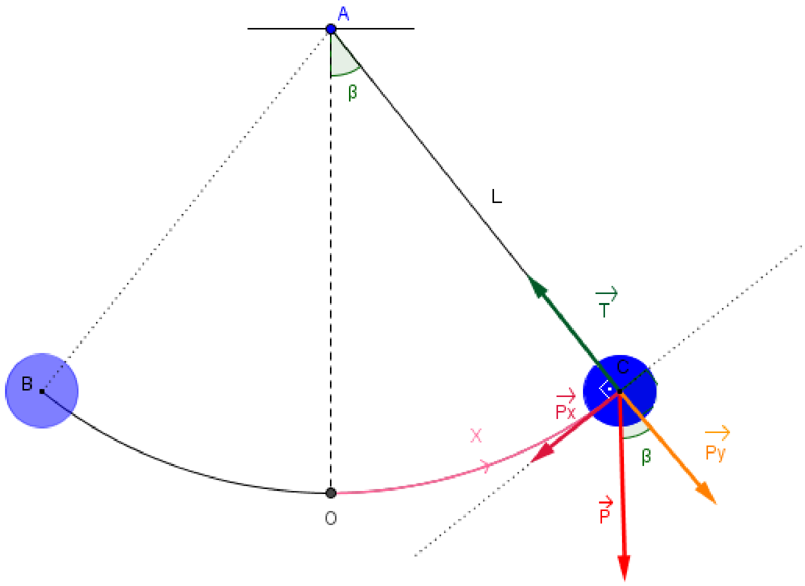

Figura 1.3: Pêndulo Simples

Da Figura 1.3 temos que o módulo de $\vec{P}_x$ será dado por:

$$P_x = P \cdot \text{sen}\beta \qquad (1.13)$$

Se considerarmos β um ângulo pequeno, menor do que 10°, podemos utilizar a aproximação para tais ângulos[2], onde:

$$\text{sen}\beta \approx \text{tg}\beta \approx \beta \qquad (1.14)$$

para β em radianos. Pois temos do cálculo diferencial e integral que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1 \qquad (1.15)$$

Então para ângulos até 10° teremos que $\beta = 0,1745rad$ e $\text{sen}10^\circ = 0,1736$ e dessa forma, para uma aproximação para três casas decimais temos que $\text{sen}\beta \approx \beta$. Por essa razão, temos que o comportamento dos Pêndulos será próximo ao esperado teoricamente se o ângulo de abandono for menor ou igual à $10\,°$.

Desse modo, como $\beta = \frac{x}{L}$ temos que:

$$P_x = P \cdot \text{sen}\beta = P \cdot \frac{x}{L} = \frac{P}{L} \cdot x \tag{1.16}$$

Assim a primeira característica para o movimento do Pêndulo ser um $M.H.S$ é representado pela Equação (1.12), pois a força restauradora é proporcional à deformação e ainda, como representado na figura, possui sentido oposto a mesma. Da Segunda lei de Newton, ou Princípio Fundamental da Dinâmica, temos que:

$$\vec{F_R} = m \cdot \vec{a} \tag{1.17}$$

Onde $\vec{Fr}$ é a força resultante, ou seja, a soma vetorial de todas as forças que agem no corpo, $\vec{a}$ é o vetor aceleração do corpo dado pela segunda derivada da posição em relação ao tempo e m é a massa ou a medida da inércia do corpo. Da definição de aceleração temos que:

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} \tag{1.18}$$

Utilizando tais equações temos que:

$$\begin{aligned} \vec{F_R} = m \cdot \vec{a} &= m \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} \\ \vec{F_R} = \vec{P_x} &= -K \cdot \vec{x} \\ -K \cdot \vec{x} &= -\frac{P}{L} \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

Desse modo, para melhor evidenciarmos a constante de proporcionalidade entre a força e a elongação, podemos escrever que:

$$-\frac{P}{L} \cdot \vec{x} = m \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}'}{\partial t^2} \tag{1.19}$$

Em que a constante de proporção entre $\vec{F}$ e $\vec{x}$ é $K = \frac{P}{L}$. A solução para a equação diferencial ordinária acima é da forma:

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0) \tag{1.20}$$

Em que A representa a amplitude do movimento, distância em que o corpo oscila em relação a posição de equilíbrio O; ϕ_0 representa a fase incial, que está ligada à posição onde o corpo começa a oscilar e ω representa a pulsação. Onde essa pulsação é tal que:

$$\begin{aligned}
-\frac{P}{L} \cdot \vec{x} &= m \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} \\
-\frac{P}{L} \cdot (A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)) &= m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0))
\end{aligned}$$

Como $P = m \cdot g$, onde g é a aceleração da gravidade local, temos:

$$\begin{aligned}
-\frac{m \cdot g}{L} \cdot (A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)) &= m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)) \\
-\frac{m \cdot g}{L} \cdot (A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)) &= m \cdot (-\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0))
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da equação por: $m \cdot (-A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0))$ teremos que:

$$\frac{g}{L} = \omega^2$$

Pela definição de velocidade angular, que é a taxa de variação temporal da posição anular, chegamos que $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ onde T é o período do pêndulo, ou seja, tempo necessário para que o corpo complete uma oscilação completa.

$$\frac{g}{L} = \omega^2 = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2$$

Portanto, concluímos que o período de um pêndulo simples é dado pela equação e definido da seguinte maneira.

Definição 1.7. *Período de um pêndulo é o intervalo de tempo gasto para que o mesmo possa completar uma oscilação, ou seja, sair de um ponto passar por todas as posições* *possíveis e retornar ao mesmo ponto. Tal período dependerá, em um caso onde desprezarmos as forças dissipativas, do comprimento do pêndulo e da aceleração gravitacional que for submetido.*

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1.21}$$

[9]

Capítulo 2

Aplicação do *mmcg* no fenômeno de batimento

O presente trabalho objetiva-se em explicar o movimento de alguns pêndulos simples em movimentos independentes porém simultâneos. A Motivação veio após a visualização de um vídeo na internet denominado Pendulum Waves. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=yVkdfJ9PkRQ>. Acesso em: 30 mar. 2016. Onde foi feito uma analogia entre a imagem formada pelas posições dos pêndulos em movimento e uma onda. A partir disso, buscamos a interpretação matemática ou um padrão para as repetições das posições de tais pêndulos. Pois o vídeo mostra algumas situações que parecem repetir. Então buscamos a explicação para tal fenômeno.

A física explica que duas ondas sofrem interferência quando elas se encontram. A interferência de ondas é a superposição de duas ou mais ondas de mesma natureza. Como a onda é uma perturbação que transporta energia mas não transporta matéria, a superposição de duas ondas seria a soma das pertubações individuais. Agora, quando as ondas possuem períodos ligeiramente distintos, formarão um padrão que depende da posição e do tempo. Assim, a interferência de duas ondas com períodos próximos será denominado batimento [8].

Podemos extender esse conceito à fenômenos periódicos, que são aqueles que possuem um tempo determinado para começar e terminar. Como exemplo podemos citar as setas de dois carros parados em um sinaleiro. Cada seta precisará de um certo tempo para acender e apagar, período, e tais intervalos de tempo não necessariamente serão iguais. Sendo assim, elas irão acender e apagar independentemente porém pode acontecer de acenderem simultaneamente ou não. Na maioria das vezes, elas acendem juntas, depois quase juntas e ainda em tempos diferentes e depois pode voltar a ocorrer de acenderem juntas e assim por diante. A esses encontros e desencontros de tempos em tempos chamaremos de batimentos.

Voltando aos pêndulos, é mais ou menos isso que acontece. No início eles estavam juntos, depois um antige a posição inicial e os outros ocupam posições distintas. Em seguida atingem a mesma posição quase juntos, podendo até mesmo, depois de um certo intervalo de tempo, atingir tal posição no mesmo tempo. Um possível encontro na posição inicial pois, como elucidado adiante, nem sempre isso ocorre. Assim, analisaremos se os pêndulos voltam a se encontrarem na mesma posição e se sim, quando isso ocorre. Para ilustrar algumas situações utilizamos um software de animação para conseguir as sequências de posições dos pêndulos.

Como demonstrado na seção 1.3 o período do pêndulo simples, desconsiderando as forças dissipativas, é dado por:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Assim, na maioria das vezes, os períodos dos pêndulos não serão números inteiros, por isso não faria sentido em dizer que os pêndulos voltariam a se encontrar no mmc dos seus períodos. Por essa razão fizemos a generalização do conceito do mmc na seção 1.1.3. Entretanto ainda temos uma restrição, tais períodos devem ser comensuráveis para que seja possível encontrar o $mmcg$ dos mesmos. Desse modo, teremos que restringir os comprimentos dos pêndulos para que isso seja possível.

Como fizemos no caso de encontro de corpos em MCU na Seção 1.2, teremos o encontro de dois pêndulos A e B quaisquer na mesma posição quando passar um intervalo de tempo Δt igual ao mmc entre seus períodos. Entretanto para os pêndulos falaremos em mínimo múltiplo comum generalizado, $mmcg$, por esses períodos não necessariamente serem números inteiros.

Exemplificando podemos ter que o menor intervalo de tempo para dois pêndulos,

A e B, se encontrarem na mesma posição será dado por:

$$\begin{aligned}
\Delta t &= mmcg(T_A, T_B) \\
\Delta t &= mmcg\left(2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L_A}{g}}, 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L_B}{g}}\right) \\
\Delta t &= \left(\frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{g}}\right) \cdot mmcg\left(\sqrt{L_A}, \sqrt{L_B}\right)
\end{aligned}$$

Em um caso geral, sem restrição para os comprimentos dos pêndulos nem sempre será possível encontrar o $mmcg\left(\sqrt{L_A}, \sqrt{L_B}\right)$ porque isso somente será possível se $\left(\sqrt{L_A}\right)$ e $\left(\sqrt{L_B}\right)$ forem comensuráveis, ou seja, $\frac{\sqrt{L_A}}{\sqrt{L_B}} \in \mathbb{Q}$. Dessa forma, nem sempre se dará o encontro dos móveis no mesmo ponto. Do senso comum poderíamos achar que eles voltariam a se encontrar, como também achava-se que um par de números era sempre comensurável. Assim, só faz sentido a busca por um padrão para o encontro dos pêndulos se a raiz quadrada de seus comprimentos for comensurável. A figura abaixo ilustra quatro instantes de tempos do movimento de cinco pêndulos que não satisfazem a condição de seus períodos serem comensuráveis.

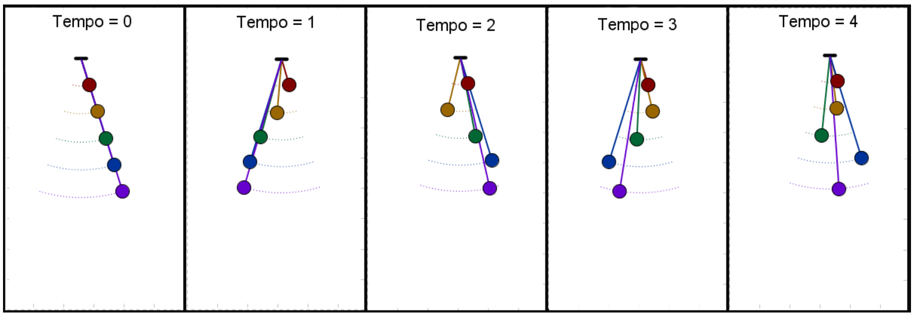

Figura 2.1: Pêndulos associados

Um dos casos onde as raízes dos comprimentos serão comensuráveis será quando tais raízes forem números inteiros. Assim podemos escolher comprimentos tais que suas raízes quadradas pertençam ao conjunto dos números inteiros, para isso escolhemos um padrão para tais comprimentos. A sequência dos menores números inteiros quadrados perfeitos formam uma progressão aritmética, (PA), de segunda ordem, ou seja, uma PA cuja razão varia linearmente. Exemplificando isso, temos que a sequência $1, 4, 9, 16, ...$ é o conjunto dos números inteiros que são quadrados perfeitos. Tal sequência pode ser obtida através da equação:

$$A_n = A_0 + n \cdot (n+2) \tag{2.1}$$

Em que A_0 é o primeiro termo e n é a variável para encontrarmos os elementos da série. Podemos interpretar a equação acima como uma progressão aritmética de segunda ordem, pois $n+2$ que é a razão da série acima forma uma PA de primeiro termo 2 e razão 1.

Assim, se tomarmos os comprimentos dos pêndulos A, B, C e D como sendo 1,4, 9 e 16 respectivamente, teremos que seus períodos serão dados por: $T_A = 1 \cdot \left(\dfrac{2\cdot\pi}{\sqrt{g}}\right)$, $T_B = 2 \cdot \left(\dfrac{2\cdot\pi}{\sqrt{g}}\right)$, $T_C = 3 \cdot \left(\dfrac{2\cdot\pi}{\sqrt{g}}\right)$ e $T_D = 4 \cdot \left(\dfrac{2\cdot\pi}{\sqrt{g}}\right)$. Portanto tais períodos serão comensuráveis, pois a razão entre eles é sempre um número racional, e assim poderemos determinar o $mmcg$ entre eles. Ou então, para simplificar a notação, podemos adotar $u = \left(\dfrac{2\cdot\pi}{\sqrt{g}}\right)$ como unidade de medida para o tempo e assim os períodos dos pêndulos A, B, C e D serão dados por $1u$, $2u$, $3u$ e $4u$, respectivamente.

Considerando os períodos acima listados, nem precisamos da generalização do mmc, pois basta fazermos o mmc entre 1, 2, 3 e 4. Assim o pêndulo A encontra todos os pêndulos na posição inicial, porque seu período é unitário e para qualquer período T inteiro teremos que o $mmc(1,T) = T$. Nesse caso, o pêndulo A terá dado T oscilações e o outro apenas uma. Analogamente, todas as vezes que o pêndulo D retornar a posição inicial o pêndulo B também estará nessa posição. Assim teremos a representação na figura dessa constatação. Agora para outros pêndulos devemos fazer o mmc entre eles.

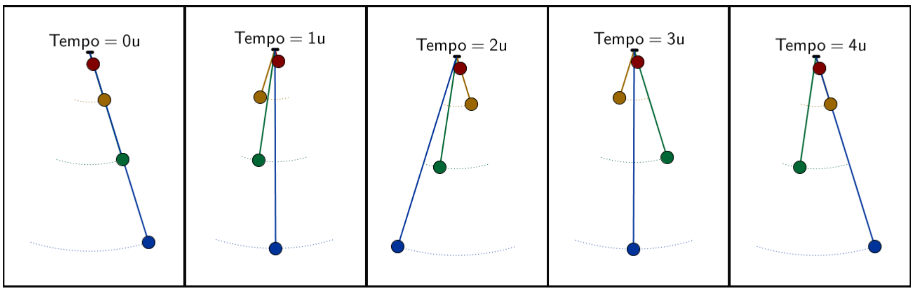

Figura 2.2: Sequência de posições dos pêndulos

Para os quatros pêndulos juntos teremos que o intervalo de tempo necessário para que eles se encontrem, na posição inicial, será dado por: $\Delta t = mmcg(T_A, T_B, T_C, T_D) = 12u$ Portanto, a cada intervalo de tempo de $12u$ eles terão a mesma disposição do que no início do movimento.

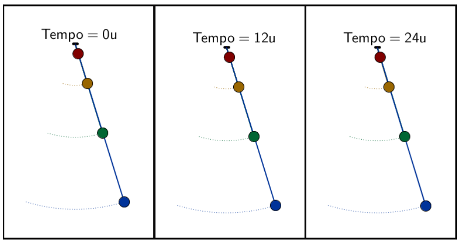

Figura 2.3: Encontro dos pêndulos

Porém existem casos onde mais simples do que adotar uma unidade de medida que possibilite usarmos o *mmc* será utilizar o *mmcg*. Como exemplo disso poderíamos citar um caso onde os comprimentos dos pêndulos fossem 1, $\frac{9}{4}$, $\frac{16}{9}$ e $\frac{25}{16}$. Consequentemente, tais pêndulos terão períodos dados por: $T_{A'} = 1 \cdot \left(\frac{2\cdot\pi}{\sqrt{g}}\right)$, $T_{B'} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2\cdot\pi}{\sqrt{g}}\right)$, $T_{C'} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2\cdot\pi}{\sqrt{g}}\right)$ e $T_{D'} = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{2\cdot\pi}{\sqrt{g}}\right)$.

Logo o menor tempo para que os quatro pêndulos A', B', C' e D' se encontrem será tal que: $\Delta t = mmcg(T_{A'}, T_{B'}, T_{C'}, T_{D'})$. Para calcularmos o *mmcg* entre mais de dois números basta fazermos o *mmcg* dos pares, depois o *mmcg* do *mmcg* de pares de números e assim por diante. Então, utilizando a mesma unidade de medida anterior, para a simplificação de notação, e a equação (1.8) para calcularmos os *mmcg*'s, teremos que:

$$\begin{aligned}
mmcg(T_{A'}, T_{B'}, T_{C'}, T_{D'}) &= mmcg(mmcg(T_{A'}, T_{B'}), mmcg(T_{C'}, T_{D'})) \\
mmcg(T_{A'}, T_{B'}, T_{C'}, T_{D'}) &= mmcg\left(\frac{[1,3]}{(1,2)}, \frac{[4,5]}{(3,4)}\right) \\
mmcg(T_{A'}, T_{B'}, T_{C'}, T_{D'}) &= mmcg\left(\frac{3}{(1)}, \frac{[20]}{(1)}\right) \\
mmcg(T_{A'}, T_{B'}, T_{C'}, T_{D'}) &= mmcg\,(\ 3, 20) \\
mmcg(T_{A'}, T_{B'}, T_{C'}, T_{D'}) &= 60u
\end{aligned}$$

Assim os pêndulos A', B', C' e D' se encontrarão a cada intervalo de tempo igual a 60 u. Todavia, o grande problema é que nem sempre dará para utilizarmos o *mmcg* para calcular o intervalo de tempo que os pêndulos se encontram. Pois o *mmcg* somente pode ser utilizado para pares de reais que sejam comensuráveis. Então se os comprimentos dos pêndulos envolvidos forem tais que os períodos sejam incomensuráveis, esses pêndulos não voltarão a se encontrar no mesmo ponto inicial, ou então, dois pêndulos que possuem períodos inconmensuráveis nunca voltam a se encontrar em uma configuração que eles, simultaneamente, já ocuparam. No começo dessa seção, na figura 2.1, mostramos as posições de um conjuto de pêndulos que exemplifica esse caso. Ou seja, não poderemos pegar duas imagens, das posições dos pêndulos, de instantes de tempo diferente que sejam iguais. Entretanto, se os períodos forem comensuráveis, para encontrarmos o encontro entre vários períodos, devemos calcular o *mmcg* entre dois a dois até encontrarmos o *mmcg* entre eles.

Capítulo 3

Sugestão de abordagem

No contexto do ensino médio, podemos aplicar tal trabalho com a turma de 2ª série. Pois tal turma já terá estudado os conceitos fundamentais sobre pêndulo e assim usará tal abordagem para aprender mais sobre *mmc* e *mmcg*. Podemos ter uma abordagem baseada em resolução de problemas. Utilizando assim uma metodologia de ensino por pesquisa[1] onde os alunos a partir de uma situação problema irá pesquisar sobre o assunto e no próximo encontro eles poderão discutir sobre o que estudaram e consequentemente sobre a solução do problema.[4]

Para tal, sugerimos a aplicação em 3 momentos, ou três aulas. No primeiro momento o professor terá a oportunidade de falar um pouco sobre o assunto de mínimo múltiplo comum com alguns exemplos de encontros de corpos ou de eventos, como mostrado na Seção 1.2, e depois mostrar o vídeo ou tentar levar o experimento para a sala de aula, perguntando se aqueles pêndulos voltam a se encontrar. Após essas explicações e endagações, o professor irá propor aos alunos que passem para a pesquisa e elaboração da resolução do problema. Instigando nos alunos a curiosidade sobre o tema e mostrando a importância em pesquisarem sobre aquilo. Então nas próximas aulas, o professor irá organizar uma discussão sobre as pesquisas. Tentando extrair o máximo de informações que os alunos pesquisaram e o que eles acham sobre a pergunta inicial. Mesmo com o mínimo de intervenções possíveis, o professor terá que conduzir os alunos à correta resposta ao problema.

Assim é proposta a seguinte sugestão para as aulas sobre a aplicação do mínimo múltiplo comum generalizado.

Aula 01 - Aplicações do *mmc* e a problematização

Objetivos

- Fazer com que o aluno crie competências para entender o *mmc*.

- Identificar as situações cotidianas que podem ser solucionadas com o uso do *mmc*.

- Desenvolver habilidades a resolução de problemas com a elaboração de hipoteses do mesmo como consequência da proposta de pesquisa do professor.

Conteúdo

- Múltiplos e divisores.

- Mínimo múltiplo comum, *mmc*.

- Pêndulo Simples.

Metodologia

O professor fará um resumo breve sobre múltiplos, divisores,mmc e mdc. Apresentando alguns exemplos de aplicações dos mesmo, como sugerido mais adiante. Depois o professor mostrará o vídeo intitulado Pendulum Waves, questionando aos alunos se tais pêndulos voltam a se encontrarem na mesma posição e se sim, quando isso ocorre. Para isso, o professor deve falar sobre os conceitos fundamentais de pêndulo simples, dando um resumo no conteúdo da Seção 1.3.

Sugestão de Atividades

Questão 3.1. *Determinado grupo de amigos se reunem sempre no terceiro sábado de cada mês de número ímpar. João faz parte desse grupo e sempre frequenta essas reuniões. Entretanto, João tem que ir também às reuniões da empresa, que ele trabalha, e tais reuniões ocorrem nos meses de números múltiplos de três sendo que essas também ocorrem no terceiro sábado dos referidos meses. Quais são os meses que as reuniões de João acontecerá no mesmo dia?*

Questão 3.2. *Dois atletas estão correndo em uma praça circular. O Atleta A gasta* 5 *min para completar uma volta, enquanto que o atleta B gasta* 7 *min para regressar ao início do percurso. Em quanto tempo tais atletas voltarão a se encontrar no ponto que ambos começaram a correr juntos? Em* $1h$ *de treino, quantas vezes esses atletas se encontraram em qualquer ponto da praça?*

Questão 3.3. *Se os atletas da questão anterior gastarem* $\frac{3}{4}h$ *e* $\frac{4}{5}h$ *respectivamente para completarem uma volta, quanto tempo eles gastarão para voltarem a se encontrarem no mesmo ponto? Quantas vezes eles se encontrarão em pontos quaisquer da praça? É possível resolver essa questão sem transforma os períodos de horas para minutos?*

Questão 3.4. *Se os atletas da questão 3.2 gastarem* $3 \cdot \sqrt{2}min$ *e* $4 \cdot \sqrt{3}min$ *respectivamente para completarem uma volta, quanto tempo eles gastarão para voltarem a se encontrarem no mesmo ponto? Quantas vezes eles se encontrarão em pontos quaiquer da praça?*

Aula 02 - Verificação dos resultados das pesquisas

Objetivos

- Identificar o que os alunos conseguiram pesquisar e entender.

- Avaliar o desempenho que os estudantes obtiveram em tais pesquisas.

- Introduzir o conceito de segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

- Introduzir o conceito do mínimo múltiplo comum generalizado mostrando suas aplicações.

Conteúdo

- Segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

- Mínimo múltiplo comum generalizado, *mmcg*.

- Máximo divisor comum generalizado.

- Pêndulo Simples.

Metodologia

Da forma que fora sugerido acima, o professor deve conduzir um debate entre os alunos com o intuito de verificar o que os alunos conseguiram aprender. Questionando-os sobre as questões propostas na aula e sobre o vídeo. Espera-se que os alunos não falem sobre o *mmcg*. Assim o professor explicará tais conceitos exemplificando e mostrando diversas aplicações. Então voltará a questão inicial, os pêndulos voltam a se encontrar na posição inicial? Caso afirmativo, quando isso ocorre? Para conduzir a essa pergunta, o professor poderá utilizar alguns simuladores, tais como o Geogebra, facilitando a visualização do problema. Finalmente o professor poderá pedir aos alunos que façam as questões sugeridas abaixo para que no posso encontro eles possam chegar a uma resposta à questão central.

Sugestão de Atividades

Questão 3.5. *Um pêndulo simples possui comprimento igual à* $0,4m$ *e está em uma região onde a aceleração da gravidade vale* $10m/s^2$. *Sabendo disso, qual o período de tal pêndulo? Se nessa mesma região, existir um pêndulo* B *cujo comprimento vale* $0,9m$ *qual será seu comprimento? Supondo que ambos os pêndulos comecem a oscilar juntos, qual será o intervalo de tempo necessário para que ambos voltem a se encontrar na posição inicial?*

Questão 3.6. *Dois pêndulos simples* A *e* B *possuem comprimentos iguais à* $L_A = 2m$ *e* $L_A = 3m$ *e estão em uma região onde a aceleração da gravidade vale* $10m/s^2$. *Supondo que ambos os pêndulos comecem a oscilar juntos, qual será o intervalo de tempo necessário para que ambos voltem a se encontrar na posição inicial?*

Aula 03 - Finalização

Objetivos

- Compreender quando ocorre o encontro de dois móveis.

- Comparar os casos onde os pêndulos possuem períodos inteiros ou reais comensuráveis.

- Entender o que acontece quando os períodos dos pêndulos são incomensuráveis.

Conteúdo

- Segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

- Mínimo múltiplo comum generalizado, *mmcg*.

- Pêndulo Simples.

Metodologia

Partindo mais uma vez da discussão a cerca da pesquisa dos alunos, conduzir os alunos para a solução do problema proposto. Respondendo as questões propostas inicialmente e dando mais exemplos inclusive com a visualização dos casos com auxílio de um simulador. Então falar aos alunos que o encontro do pêndulos se dá apenas nos casos onde seus períodos são comensuráveis mostrando que caso isso não ocorra, teremos que os pêndulos não mais encontrarão na mesma posição, mas estarão juntos em outra posição a cada encontro.

Para uma melhor compreensão dos alunos, é importante que sejam feitos muitos exemplos de encontro abordando muitos casos diferentes, incluindo a situação onde usaremos o *mmcg* para números racionais e para pares de reais comensuráveis. Então, se for possível uma aplicação em mais aulas, seria interessante que no momento da problematização o professor não somente conduza os alunos a pensarem em uma maneira de achar o *mmc* em um caso mais geral mais também faça exemplos disso com eles.

Após explicar que os pêndulos nem sempre voltam a se encontrarem, cabe ao professor montar modelos onde os pêndulos possuam períodos comensuráveis e outros modelos de períodos não comensuráveis. Para ajudar na visualiazação das situações acima o professor poderá utilizar software de animação para facilitar o entendimento.

Capítulo 4

Considerações finais

O propósito desse trabalho era de encontrar um padrão no encontro dos pêndulos. Dessa forma, nossa hipótese era estabelecer uma relação entre os instantes de tempo em que os pêndulos voltassem a se encontrar com os termos de uma sequência. Entretanto, verificou-se que tal encontro era condicionado ao fato dos períodos serem comensuráveis.

Assim, para uma melhor compreensão sobre o objetivo incial, foi necessário o conhecimento dos conceitos de comensurabilidade e mínimo múltiplo comum generalizado. Pois, para que os pêndulos voltassem a se encontrar na mesma posição, cada um deveria dar uma quantidade inteira de oscilações para que eles voltassem ao mesmo ponto ao mesmo tempo. Assim, ocorrerá tal fenômeno se existir um instante de tempo que seja múltiplo comum dos períodos. Por isso, os pêndulos somente voltam a se encontrar no mesmo ponto, se seus períodos forem comensuráveis. Então, se essa condição for satisfeita, eles se encontram em intervalos de tempos iguais a tal múltiplo.

Finalizando o trabalho, foi proposto uma sugestão de aplicação do mesmo à alunos da segunda série do ensino médio, porque tais alunos já adquiriram alguns dos conceitos básicos para o entendimento do assunto. Entretanto, tal proposta pode ser aplicada a outra série, desde que seja feita em mais aulas, enfatizando os conceitos básicos para que possa existir a compreensão do assunto.

Capítulo 5

Anexo

Tabela 5.1: Protocolo de construção - Pêndulos de comprimentos comensuráveis

N.	Nome	Valor	Comando	Legenda
1	Lista t1	t1 = 0, 0, 0, 0		
2	Número s1	s1 = 0	(Elemento[t1, 4] 60 + Elemento[t1, 3]) 60 + Elemento[t1, 2] + Elemento[t1, 1] / 1000	
3	Lista t0	t0 = 0, 0, 0, 0		
4	Número s0	s0 = 0	(Elemento[t0, 4] 60 + Elemento[t0, 3]) 60 + Elemento[t0, 2] + Elemento[t0, 1] / 1000	
5	Número ΔL	$\Delta L = 1$		
6	Número L_{min}	$L_{min} = 1$		
7	Número A2	A2 = 1	Lmin	
8	Ponto O	O = (0, 0)		
9	Número $\theta 0$	$\theta 0 = 0.3$		
10	Número α	$\alpha = 0$		
11	Número g	g = 9.8		
12	Número ω	$\omega = 3.13$	sqrt(g / Lmin)	

Tabela 5.2: Protocolo de construção - Pêndulos de comprimentos comensuráveis

N.	Nome	Valor	Comando	Legenda
13	Número t	t = 0	s1 - s0 + Se[Elemento[t1, 4] < Elemento[t0, 4], 3600 (24 + Elemento[t0, 4] - Elemento[t1, 4]), 0]	
14	Número θ	$\theta = 0$	θ0 sen(ω t + α)	
15	Ponto O'	O' = (0, 0)	Girar[O, θ, O]	
16	Ponto C	C = (-0.2, 0)	O + (-0.2, 0)	
17	Ponto D	D = (0.2, 0)	O + (0.2, 0)	
18	Segmento b	b = 0.4	Segmento[C, D]	
19	Texto texto1	Péndulos simples (vista frontal)		
20	Texto A1	Longitudes		
21	Número A3	A3 = 4	A2 + 3ΔL	Defini o
22	Número A4	A4 = 9	A2 + 8ΔL	comprimento
23	Número A5	A5 = 16	A2 + 15ΔL	dos pêndulos
24	Número A6	A6 = 25	A2 + 24ΔL	como uma
25	Número A7	A7 = 36	A2 + 35ΔL	PA de
26	Número A8	A8 = 49	A2 + 48ΔL	segunda
27	Número A9	A9 = 64	A2 + 63ΔL	ordem
28	Número A10	A10 = 81	A2 + 80ΔL	
29	Texto C1	Frecuencias (ωn)		
30	Texto D1	Ángulos(θn)		
31	Texto B1	Puntos(Bn)		
32	Ponto B2	B2 = (0, -1)	O - (0, A2)	
33	Texto E1	Puntos(Mn)		
34	Ponto B3	B3 = (0, -4)	O - (0, A3)	
35	Ponto B4	B4 = (0, -9)	O - (0, A4)	
36	Ponto B5	B5 = (0, -16)	O - (0, A5)	
37	Ponto B6	B6 = (0, -25)	O - (0, A6)	
38	Ponto B7	B7 = (0, -36)	O - (0, A7)	
39	Ponto B8	B8 = (0, -49)	O - (0, A8)	
40	Ponto B9	B9 = (0, -64)	O - (0, A9)	
41	Ponto B10	B10 = (0, -81)	O - (0, A10)	

Tabela 5.3: Protocolo de construção - Pêndulos de comprimentos comensuráveis

N.	Nome	Valor	Comando	Legenda
42	Número C2	C2 = 6.261	2sqrt(g / A2)	
43	Número C3	C3 = 3.13	2sqrt(g / A3)	
44	Número C4	C4 = 2.087	2sqrt(g / A4)	
45	Número C5	C5 = 1.565	2sqrt(g / A5)	
46	Número C6	C6 = 1.252	2sqrt(g / A6)	
47	Número C7	C7 = 1.043	2sqrt(g / A7)	
48	Número C8	C8 = 0.894	2sqrt(g / A8)	
49	Número C9	C9 = 0.783	2sqrt(g / A9)	
50	Número C10	C10 = 0.696	2sqrt(g / A10)	
51	Número D2	D2 = 0.3	θ0 cos(C2 t + α)	
52	Número D3	D3 = 0.3	θ0 cos(C3 t + α)	
53	Número D4	D4 = 0.3	θ0 cos(C4 t + α)	
54	Número D5	D5 = 0.3	θ0 cos(C5 t + α)	
55	Número D6	D6 = 0.3	θ0 cos(C6 t + α)	
56	Número D7	D7 = 0.3	θ0 cos(C7 t + α)	
57	Número D8	D8 = 0.3	θ0 cos(C8 t + α)	
58	Número D9	D9 = 0.3	θ0 cos(C9 t + α)	
59	Número D10	D10 = 0.3	θ0 cos(C10 t + α)	
60	Ponto E2	E2 = (0.296, -0.955)	Girar[B2, D2, O]	
61	Ponto E3	E3 = (1.182, -3.821)	Girar[B3, D3, O]	
62	Ponto E4	E4 = (2.66, -8.598)	Girar[B4, D4, O]	
63	Ponto E5	E5 = (4.728, -15.285)	Girar[B5, D5, O]	

Tabela 5.4: Protocolo de construção - Pêndulos de comprimentos comensuráveis

N.	Nome	Valor	Comando	Legenda
64	Ponto E6	E6 = (7.388, -23.883)	Girar[B6, D6, O]	
65	Ponto E7	E7 = (10.639, -34.392)	Girar[B7, D7, O]	
66	Ponto E8	E8 = (14.48, -46.811)	Girar[B8, D8, O]	
67	Ponto E9	E9 = (18.913, -61.142)	Girar[B9, D9, O]	
68	Ponto E10	E10 = (23.937, -77.382)	Girar[B10, D10, O]	
69	Texto F1	Hilos		
70	Segmento F2	F2 = 1	Segmento[O, E2]	
71	Segmento F3	F3 = 4	Segmento[O, E3]	
72	Segmento F4	F4 = 9	Segmento[O, E4]	
73	Segmento F5	F5 = 16	Segmento[O, E5]	
74	Segmento F6	F6 = 25	Segmento[O, E6]	
75	Segmento F7	F7 = 36	Segmento[O, E7]	
76	Segmento F8	F8 = 49	Segmento[O, E8]	
77	Segmento F9	F9 = 64	Segmento[O, E9]	
78	Segmento F10	F10 = 81	Segmento[O, E10]	
79	Texto G1	Arcos		
80	Arco G2	G2 = 0.6	ArcoCircular[O, Girar[B2, -θ0, O], Girar[B2, θ0, O]]	
81	Arco G3	G3 = 2.4	ArcoCircular[O, Girar[B3, -θ0, O], Girar[B3, θ0, O]]	
82	Arco G4	G4 = 5.4	ArcoCircular[O, Girar[B4, -θ0, O], Girar[B4, θ0, O]]	
83	Arco G5	G5 = 9.6	ArcoCircular[O, Girar[B5, -θ0, O], Girar[B5, θ0, O]]	
84	Arco G6	G6 = 15	ArcoCircular[O, Girar[B6, -θ0, O], Girar[B6, θ0, O]]	

Tabela 5.5: Protocolo de construção - Pêndulos de comprimentos comensuráveis

N.	Nome	Valor	Comando	Legenda
85	Arco G7	G7 = 21.6	ArcoCircular[O, Girar[B7, -θ0, O], Girar[B7, θ0, O]]	
86	Arco G8	G8 = 29.4	ArcoCircular[O, Girar[B8, -θ0, O], Girar[B8, θ0, O]]	
87	Arco G9	G9 = 38.4	ArcoCircular[O, Girar[B9, -θ0, O], Girar[B9, θ0, O]]	
88	Arco G10	G10 = 48.6	ArcoCircular[O, Girar[B10, -θ0, O], Girar[B10, θ0, O]]	
89	Texto texto2	Péndulos simples (vista lateral y cenital)		
90	Número A11	A11 = 100	A2 + 99ΔL	
91	Ponto B11	B11 = (0, -100)	O - (0, A11)	
92	Número C11	C11 = 0.626	2sqrt(g / A11)	
93	Número D11	D11 = 0.3	?0 cos(C11 t + α)	
94	Ponto E11	E11 = (29.552, -95.534)	Girar[B11, D11, O]	
95	Segmento F11	F11 = 100	Segmento[O, E11]	
96	Arco G11	G11 = 60	ArcoCircular[O, Girar[B11, -θ0, O], Girar[B11, θ0, O]]	
97	Número n	n = 4		
98	Ponto A	A = (-2, 0)		
99	Ponto B	B = (5.5, 0)		
100	Segmento a	a = 7.5	Segmento[A, B]	
101	Texto I1	Puntos suspensión		
102	Ponto I2	I2 = (-1.75, 0)	A + (0.25, 0)	
103	Ponto I3	I3 = (-1, 0)	A + (2 (0.5), 0)	
104	Ponto I4	I4 = (-0.25, 0)	2I3 - I2	
105	Ponto I5	I5 = (0.5, 0)	2I4 - I3	
106	Ponto I6	I6 = (1.25, 0)	2I5 - I4	
107	Ponto I7	I7 = (2, 0)	2I6 - I5	
108	Ponto I8	I8 = (2.75, 0)	2I7 - I6	
109	Ponto I9	I9 = (3.5, 0)	2I8 - I7	
110	Ponto I10	I10 = (4.25, 0)	2I9 - I8	
111	Ponto I11	I11 = (5, 0)	2I10 - I9	

Tabela 5.6: Protocolo de construção - Pêndulos de comprimentos comensuráveis

N.	Nome	Valor	Comando	Legenda
112	Texto J1	Puntos pendulos		
113	Ponto J2	J2 = (-1.75, -0.955)	(x(I2), y(E2))	
114	Ponto J3	J3 = (-1, -3.821)	(x(I3), y(E3))	
115	Ponto J4	J4 = (-0.25, -8.598)	(x(I4), y(E4))	
116	Ponto J5	J5 = (0.5, -15.285)	(x(I5), y(E5))	
117	Ponto J6	J6 = (1.25, -23.883)	(x(I6), y(E6))	
118	Ponto J7	J7 = (2, -34.392)	(x(I7), y(E7))	
119	Ponto J8	J8 = (2.75, -46.811)	(x(I8), y(E8))	
120	Ponto J9	J9 = (3.5, -61.142)	(x(I9), y(E9))	
121	Ponto J10	J10 = (4.25, -77.382)	(x(I10), y(E10))	
122	Ponto J11	J11 = (5, -95.534)	(x(I11), y(E11))	
123	Texto K1	Hilos lateral		
124	Segmento K2	K2 = 0.955	Segmento[I2, J2]	
125	Segmento K3	K3 = 3.821	Segmento[I3, J3]	
126	Segmento K4	K4 = 8.598	Segmento[I4, J4]	
127	Segmento K5	K5 = 15.285	Segmento[I5, J5]	
128	Segmento K6	K6 = 23.883	Segmento[I6, J6]	
129	Segmento K7	K7 = 34.392	Segmento[I7, J7]	
130	Segmento K8	K8 = 46.811	Segmento[I8, J8]	
131	Segmento K9	K9 = 61.142	Segmento[I9, J9]	
132	Segmento K10	K10 = 77.382	Segmento[I10, J10]	
133	Segmento K11	K11 = 95.534	Segmento[I11, J11]	
134	Texto L1	Puntos vista cenital		
135	Número k	k = 14		
136	Ponto L2	L2 = (-1.75, -13.704)	(x(J2), x(E2) - k)	

Tabela 5.7: Protocolo de construção - Pêndulos de comprimentos comensuráveis

N.	Nome	Valor	Comando	Legenda
137	Ponto A’	A’ = (-2, -14)	Transladar[A, (0, -k)]	
138	Ponto B’	B’ = (5.5, -14)	Transladar[B, (0, -k)]	
139	Segmento d	d = 7.5	Segmento[A’, B’]	
140	Ponto L3	L3 = (-1, -12.818)	(x(J3), x(E3) - k)	
141	Ponto L4	L4 = (-0.25, -11.34)	(x(J4), x(E4) - k)	
142	Ponto L5	L5 = (0.5, -9.272)	(x(J5), x(E5) - k)	
143	Ponto L6	L6 = (1.25, -6.612)	(x(J6), x(E6) - k)	
144	Ponto L7	L7 = (2, -3.361)	(x(J7), x(E7) - k)	
145	Ponto L8	L8 = (2.75, 0.48)	(x(J8), x(E8) - k)	
146	Ponto L9	L9 = (3.5, 4.913)	(x(J9), x(E9) - k)	
147	Ponto L10	L10 = (4.25, 9.937)	(x(J10), x(E10) - k)	
148	Ponto L11	L11 = (5, 15.552)	(x(J11), x(E11) - k)	
149	Texto M1	Hilos cenital		
150	Segmento M2	M2 = 0.296	Segmento[(x(I2), y(I2) - k), L2]	
151	Segmento M3	M3 = 1.182	Segmento[(x(I3), y(I3) - k), L3]	
152	Segmento M4	M4 = 2.66	Segmento[(x(I4), y(I4) - k), L4]	
153	Segmento M5	M5 = 4.728	Segmento[(x(I5), y(I5) - k), L5]	
154	Segmento M6	M6 = 7.388	Segmento[(x(I6), y(I6) - k), L6]	
155	Segmento M7	M7 = 10.639	Segmento[(x(I7), y(I7) - k), L7]	
156	Segmento M8	M8 = 14.48	Segmento[(x(I8), y(I8) - k), L8]	
157	Segmento M9	M9 = 18.913	Segmento[(x(I9), y(I9) - k), L9]	
158	Segmento M10	M10 = 23.937	Segmento[(x(I10), y(I10) - k), L10]	
159	Segmento M11	M11 = 29.552	Segmento[(x(I11), y(I11) - k), L11]	
160	Lista t2	t2 = 0, 0, 0, 0		
161	Lista t3	t3 = 0, 0, 0, 0		
162	Número s2	s2 = 0	(Elemento[t2, 4] 60 + Elemento[t2, 3]) 60 + Elemento[t2, 2] + Elemento[t2, 1] / 1000	

Tabela 5.8: Protocolo de construção - Pêndulos de comprimentos comensuráveis

N.	Nome	Valor	Comando	Legenda
163	Número s3	s3 = 0	(Elemento[t3, 4] 60 + Elemento[t3, 3]) 60 + Elemento[t3, 2] + Elemento[t3, 1] / 1000	
164	Botão botón1	botón1		
165	Número deslizadorAuxiliar	deslizadorAuxiliar = 0.37		
166	Texto texto3	Tempo = 0	"Tempo = "+ t +	
167	Botão botón2	botón2		

Referências Bibliográficas

[1] CACHAPUZ, Antônio F., PRAIA, João F.,JORGE, Manuela P., *Perspectivas de ensino das ciências* ,Centro de Estudos de Educação em Ciência Porto(2000).

[2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz, *Um curso de cálculo* , LTC, volume 1 5.ed.- São Paulo (2008).

[3] GUIMARÃES, Osvaldo, *Projeto Múltiplo: Física Osvaldo Guimarães, José Roberto Piqueira, Wilson Carron*, Ática, volume 2 1.ed.- São Paulo (2014).

[4] LEITE, Laurinda, ESTEVES, Esmeralda, *Ensino orientado para a aprendizagem baseada na resolução de problemas na licenciatura em ensino de física e química* ,Congresso Galaico Português Psicopedagogia 1751-1768 - Guimarães, Portugal(2005).

[5] RIPOLL,C., RIPOLL,J.,SANT'ANA,A., *O mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum generalizados* 59-74-(2006).

[6] MILIES,Francisco César Polcino, COELHO,Sônia Pitta, *Números: Uma Introdução à Matemática* , Editora da Universidade de São Paulo,3.ed.-São Paulo (2001).

[7] PCN+, ENSINO MÉDIO., *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf, Acessado em 22 de dezembro de 2015

[8] VILLAS BÔAS, Newton, *Conecte física, 2/ Newton Villas Bôas, Ricardo Helou Doca, Gualter José Biscuola.*, Saraiva, volume 2 São Paulo (2014).

[9] YOUNG, HUGH D.,FREEDMAN, ROGGER A., *Física II: Termodinâmica e ondas*, Addison Wesley, volume II 10.ed.- São Paulo (2003)