PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Vitor Dutra Soares Rosadas

Triângulo de Pascal: Curiosidades e Aplicações na Escola Básica

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática (opção profissional).

Orientadora: Profa. Christine Sertã Costa

Rio de Janeiro

Setembro de 2016

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Vitor Dutra Soares Rosadas

Triângulo de Pascal: Curiosidades e Aplicações na Escola Básica

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Profa. Christine Sertã Costa
Orientadora
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Marcos Craizer
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Sinésio Pesco
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Dirce Uesu Pesco
Instituto de Matemática e Estatística - UFF

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 13 de setembro de 2016

Vitor Dutra Soares Rosadas

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO) em 2013. Atualmente professor da rede particular de ensino do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Rosadas, Vitor Dutra Soares

Triângulo de Pascal: curiosidades e aplicações na escola básica / Vitor Dutra Soares Rosadas; orientadora: Christine Sertã Costa. – 2016.

70 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2016.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Triângulo de Pascal. 3. Triângulo aritmético. 4. Binômio de Newton. 5. Número binomial. 6. Interdisciplinar. I. Costa, Christine Sertã. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Dedico esta dissertação aos meus pais José Geraldo Soares Rosadas e Marli Dutra Rosadas e minha noiva Lidiane Roberto de Souza.

Agradecimentos

A Deus, por ser essencial em minha vida, autor do meu destino, meu guia, minha luz, meu socorro nas horas de angústia e minha fortaleza nas horas de fraqueza e desânimo.

Aos meus pais José Geraldo Soares Rosadas e Marli Dutra Rosadas pelo apoio, incentivo, por serem meus exemplos, meus alicerces acreditando sempre na minha vitória.

À minha noiva Lidiane Roberto de Souza, coadjuvante essencial nesta conquista, seguindo comigo nos momentos de grandes dificuldades, não permitindo que eu desistisse desse sonho.

Aos meus colegas da PUC-Rio por todo apoio, ajuda e companheirismo.

À minha orientadora, Profa. Christine Sertã Costa pela paciência, dedicação, rapidez nas respostas, comprometimento e disponibilidade em ajudar.

A toda equipe do PROFMAT por ter dividido seus conhecimentos conosco da melhor forma possível.

Aos amigos Herbert Rocha e André Gaglianone pela amizade e apoio intelectual.

A todos os amigos e familiares que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

Resumo

Rosadas, Vitor Dutra Soares; Costa, Christine Sertã (Orientadora). **Triângulo de Pascal: Curiosidades e Aplicações na Escola Básica**. Rio de Janeiro, 2016. 70p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Essa dissertação tem como objetivo principal proporcionar novos olhares sobre o Triângulo de Pascal na escola básica. Este é um assunto rico e pouco explorado nesse segmento escolar. Possibilita o desenvolvimento de aplicações e curiosidades interessantes que instigam o interesse do alunado e podem promover um processo tanto de ensino como de aprendizagem mais eficientes. Através de diversas abordagens é possível motivar ou incrementar conteúdos clássicos da Matemática da educação básica além de trabalhar com situações interdisciplinares. O trabalho apresenta um relato histórico do surgimento do Triângulo e seu uso ao longo do tempo por diversos matemáticos até Pascal. São também apresentados e demonstrados resultados matemáticos obtidos a partir da análise dos elementos deste Triângulo. Por fim, uma coletânea de abordagens interessantes que relacionam o Triângulo a diversos campos da Matemática são apresentadas visando possibilitar ao professor da educação básica o uso dessas propostas na criação de atividades da sua sala de aula. Algumas questões com conceitos matemáticos um pouco mais avançados também são explicitadas possibilitando que cada docente escolha e adapte à sua realidade àquelas que julgar pertinentes. Pretende-se assim possibilitar ao professor da escola básica mais um suporte para construção de propostas pedagógicas inovadoras e que contribuam para o desenvolvimento da educação básica de forma mais interessante e mais significativa.

Palavras-chave

Triângulo de Pascal; Triângulo Aritmético; Binômio de Newton; Número Binomial; Interdisciplinar.

Abstract

Rosadas, Vitor Dutra Soares; Costa, Christine Sertã (Advisor). **Pascal's Triangle: Curiosities and Applications in Primary School**. Rio de Janeiro, 2016. 70p. MSc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This thesis aims to provide new perspectives on Pascal's Triangle in elementary school. This is a rich subject and little explored in this school segment. It enables the development of interesting applications and curiosities that instigate the interest of the students and can promote a process of teaching and learning more effective. Through various approaches-gens can motivate or improve classical mathematics content of basic education as well as working with interdisciplinary situations. The paper presents a historical account of the emergence Triangle and its use over time by several mathematicians to Pascal. They are then presented and demonstrated mathematical results obtained from the analysis of the elements of this triangle. Finally, a collection of interesting approaches that relate the Triangle to various fields of mathematics are presented aiming to enable the primary education teachers use these proposals to create activities of your classroom. Some issues with mathematical concepts a little more advanced are also explicit allowing each teacher choice and adapt to their reality to those it considers relevant. The aim is to enable the teacher of primary school plus a support for building innovative educational proposals and contribute to the development of basic education more interesting and significant.

Keywords

Pascal's triangle; Arithmetic Triangle; Binomial of Newton; Binomial number; Interdisciplinary.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

A virtude de alguém deve ser medida não por seus esforços extraordinários, mas por sua conduta cotidiana.

Blaise Pascal

1
Introdução

O Triângulo Aritmético

Na escola básica, o tema Triângulo Aritmético (mais conhecido nos livros como Triângulo de Pascal) é pouco explorado. Na grande maioria das vezes, é utilizado como introdução ao estudo do Binômio de Newton ou como complementação ao conceito de Combinações Simples. A questão abordada neste trabalho, é de como empregar o Triângulo Aritmético como ferramenta para o Ensino Básico, tendo como principal objetivo trabalhar riquezas do Triângulo através de algumas de suas importantes aplicações, motivando professores da escola básica a explorá-lo não só como objeto de transmissão de conhecimento, mas também como um instrumento interessante para motivar o estudo da matemática.

O trabalho então se propõe a apresentar:

- Um resumo do contexto histórico no qual está inserido o Triângulo de Pascal;
- Um resumo teórico dos conteúdos básicos para o entendimento do Triângulo de Pascal;
- Os principais teoremas que aparecem nas linhas, colunas e diagonais do Triângulo de Pascal;
- Aplicações em aritmética, na álgebra e na geometria;
- Propostas interessantes e interdisciplinares envolvendo o uso do Triângulo Aritmético para aprofundamento em sala de aula.

Em cada seção do trabalho e em cada aplicação, se pensou o que poderia ser feito para transmitir o conhecimento tradicional de forma diferente.

É abordado, com suma importância para conhecimento dos alunos, a história do surgimento do Triângulo. O conteúdo mostra desde de Pingala, onde SILVA (2015), descreve que os primeiros registros do triângulo aritmético são concedidos ao Matemático indiano Pingala, que viveu por volta de 200 a.C, o que nos induz a dizer que esse assunto já era instrumento de análise na Índia dois mil anos antes de Pascal trabalhar no Triângulo Aritmético, passando pelo mais renomado matemático islâmico a explorar o Triângulo Aritmético, que foi al Samaw'al (1130-1180), que elaborou o tratado "A deslumbrante Álgebra", onde retificou e requintou o trabalho de seus predecessores sobre o Triângulo Aritmético e o Binômio de Newton e outros renomados nomes, como Yang Hui (1238-1298), Apianus (1495-1551) que redigiu em 1527 o livro denominado "Kauffmanns-Rechnung", que tratava de uma obra específica em aritmética comercial, nele o Triângulo aparece no canto inferior esquerdo de uma das páginas, o proclamador do Triângulo Aritmético na Europa que foi o matemático Michel Stifel (1487-1567), que explorou algumas propriedades deste triângulo e as pleiteou em sua obra "Arithmetica Integra", Tartaglia, utilizando o pseudônimo de Niccolò Fontana até chegar ao matemático, físico, filósofo e escritor francês Blaise Pascal (1623-1662), que apresentou significativas aplicações matemáticas ao Triângulo Aritmético.

Assim, este conteúdo teve seu início com uma necessidade de expandir o universo dos produtos notáveis em que muitos livros didáticos se limitam a trabalhar nos casos mais simples.

Na sequência, o trabalho apresenta as potências de 11 com um caso particular dos produtos notáveis, havendo uma relação direta com o Triângulo aritmético. A relação dos quadrados perfeitos com o Triângulo é algo notável e a partir do conhecimento dos mesmos, é possível criar uma relação intuitiva de qual seria o próximo quadrado perfeito de uma sequência.

No Ensino Fundamental, algumas situações aparecem em forma de combinação, mas sem que isso seja apresentado para o aluno. De fato, nesse momento o aluno desse seguimento não possui maturidade para entender alguns conceitos de maior complexidade, mas após o conhecimento do Triângulo Aritmético nas séries anteriores, é possível novamente criar uma relação para a teoria dos conjuntos e na geometria uma relação direta com o número de diagonais de um polígono.

Posteriormente, o trabalho mostra novas aplicações para assuntos do Ensino Médio e apresenta uma proposta interdisciplinar que tem como objetivo contextualizar com o maior exame de conhecimentos do país, o Enem.

2
A História do Triângulo de Pascal: um Breve Resumo

SILVA (2015), descreve que os primeiros registros do triângulo aritmético são concedidos ao Matemático indiano Pingala, que viveu por volta de 200 a.C. o que nos induz a dizer que esse assunto já era instrumento de análise na Índia dois mil anos antes de Pascal trabalhar no Triângulo Aritmético.

Para AFFONSO (2014), os indianos estudavam vários temas matemáticos, dentre eles, ressaltava-se o estudo de combinatória, assunto este que teve suas técnicas justapostos a vários outros estudos. Nesse contexto, afloram os primeiros livros com técnicas combinatórias, mas, como já descrito acima, é só com o erudito Pingala (200 a.C.), em sua obra "Chandra Sutra" que surge, pela primeira vez, o Triângulo Aritmético (figura 1), apresentando a primeira descrição conhecida de um sistema numérico binário. Ele relatou o sistema numérico binário em conexão à listagem das métricas védicas com uso de sílabas longas e curtas. A sua discussão sobre a combinação de métrica remete ao que hoje conhecemos como teorema binomial.

Figura 1: Primeiro Registro do Triângulo Aritmético.
(Fonte: AFFONSO, Alexandre. **O triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.** UFF. Niterói, 2014).

Cabe, porém, destacar que existe uma visível descontinuidade na tradição matemática na Índia. As contribuições significativas foram acontecimentos remotos e usualmente desligados por intervalos sem consumações (BOYER, 1996).

Ainda sobre os primórdios do Triangulo Aritmético AFFONSO (2014) descreve que no universo islâmico, o Triângulo Aritmético teve sua origem decorrente de uma junção de livros indianos. O mais renomado matemático islâmico a explorar o Triângulo Aritmético foi al Samaw'al (1130-1180), que elaborou o tratado "A deslumbrante Álgebra", onde retificou e requintou o trabalho de seus predecessores sobre o Triângulo Aritmético e o Binômio de Newton. Nesta obra, al Samaw'al incumbe o Triângulo Aritmético a Al-Karaji (953-1029), que em 1007, em suas obras sobre álgebra, "O al Fakhri" e "O al Badi", utilizou o Triângulo Aritmético para auferir o desenvolvimento de potências quadradas, cúbicas e quadráticas de binômios[1]. Ele também demonstrou por indução matemática a validade do Binômio de Newton e desenvolveu o Triângulo Aritmético até a décima segunda linha como apresenta na figura 2.

Figura 2: Triângulo Aritmético no universo islâmico, século XII.
(Fonte: AFFONSO, Alexandre. **O triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.** UFF. Niterói, 2014)

---

[1] O produto notável diz que um binômio elevado ao quadrado é igual ao quadrado do primeiro monômio mais ou menos duas vezes o primeiro, vezes o segundo monômio mais o quadrado do segundo monômio. Confira a fórmula: $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ **ou** $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$**.** Essa fórmula só é válida se o binômio for elevado ao quadrado (potência 2), se ele estiver elevado à potência 3, nesse caso deve-se fazer o seguinte:$(a + b)^3$ é o mesmo que $(a + b)^2 . (a + b)$, como sabemos que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, no caso basta substituirmos e então $(a + b)^3 =(a + b)^2 . (a + b) =(a^2 + 2ab + b^2) . (a + b) =a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Se for elevado à quarta, à quinta, à sexta potência, você deve utilizar sempre o binômio elevado à potência imediatamente anterior para chegar a uma solução. O binômio de Newton nasceu para auxiliar neste tipo de cálculo, pois usando esse método você pode calcular a enésima potência de um binômio qualquer.

No século XIII, o matemático chinês mais famoso em estudar este Triângulo Aritmético foi Yang Hui (1238-1298) que elaborou dois livros que buscavam compreender o Triângulo Aritmético, sendo responsável pela configuração do triângulo conforme apresentado na figura 3. Segundo BOYER (1996), a obra de Yang Hui também engloba estudos que relacionam a soma de séries com o Triângulo Aritmético. Estes estudos foram publicados pelo matemático Zhu Shijie (1260-1330) em seu livro “Precioso espelho dos quatro elementos”, obra que marca o fim da época áurea da matemática chinesa e que também contém a figura do Triângulo tal qual ilustrada na figura 3. Ainda segundo Boyer, essa figura reproduz o que hoje chamamos de Triângulo de Pascal e apareceu em 1303 no frontispício do *Ssu Yii Chien*de Chu Shih-Chiehz (ou Zhu Shijie).

Pouco se conhece sobre sua vida, mas dois de seus trabalhos matemáticos são famosos, a *Introdução ao Estudo da Matemática* (算學啟蒙 / Suanxueqimeng), publicado em 1299, que é um livro sobre a matemática elementar com quatro problemas ilustrativos para explicar as operações de aritmética e álgebra e 284 problemas como exercícios, sendo utilizado como livro didático no Japão e na Coreia desempenhando importante atuação sobre o desenvolvimento da matemática, especialmente no Japão. A obra original em chinês ficou perdida, mas foi reconstruída em 1839 através de uma edição coreana de 1660. E o segundo, como já citado acima foi o *O Precioso Espelho dos Quatro Elementos* (四元玉鑒 / Siyuanyujian), escrito em 1303 e considerado a sua obra mais importante, exibe entre outros, um método de resolução de equações por aproximações sucessivas, cálculos de raízes quadradas e traz figuras de triângulos, conhecidos hoje por Triângulos de Pascal.

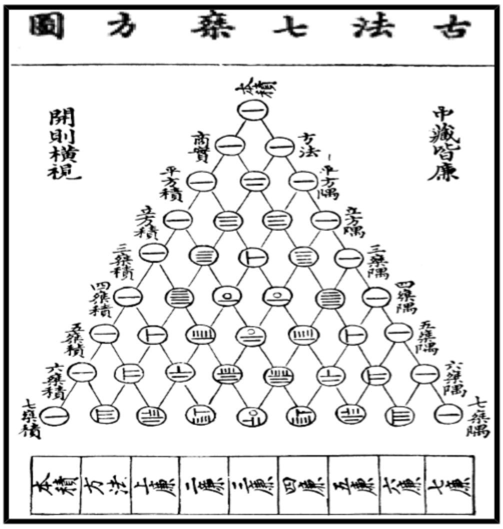


Figura 3: Configuração do Triângulo Aritmético, no século XIII.
(Fonte: AFFONSO, Alexandre. **O triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.** UFF. Niterói, 2014).

Já na Europa, e mais próximo da era Pascal, o matemático alemão Apianus (1495-1551) redigiu em 1527 o livro denominado "Kauffmanns Rechnung", que tratava de uma obra específica em aritmética comercial, nele o Triângulo aparece no canto inferior esquerdo de uma das páginas. Seria a primeira impressão do Triângulo Aritmético na Europa (AFFONSO, 2014). BOYER (1996) narra que a figura exposta na figura 4 é o Triangulo de Pascal em sua primeira tiragem europeia, no ano de 1527.

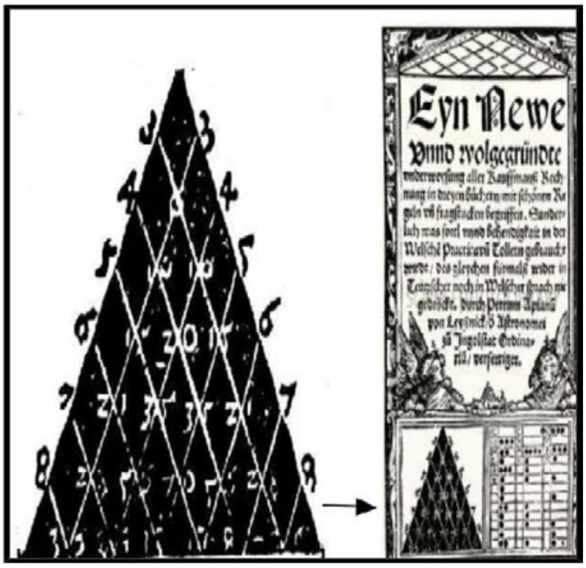
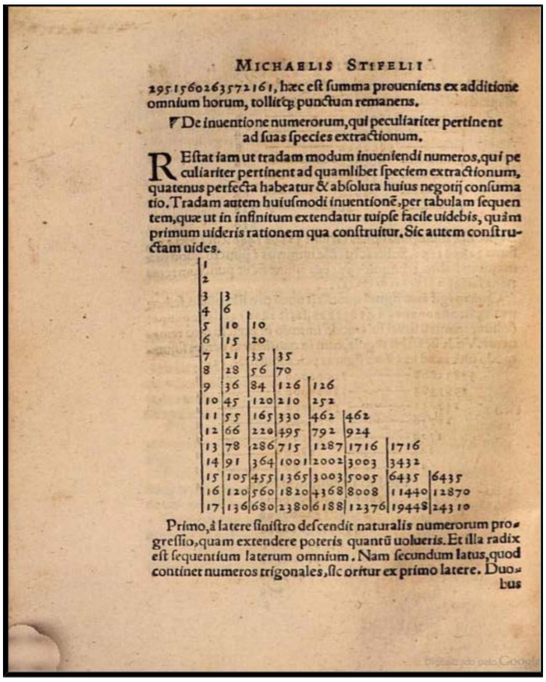


Figura 4: O Triângulo Aritmético em sua primeira tiragem na Europa, 1527.
(Fonte: AFFONSO, Alexandre. **O triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.** UFF. Niterói, 2014).

Mas o proclamador do Triângulo Aritmético na Europa foi o matemático Michel Stifel (1487-1567), que explorou algumas propriedades deste triângulo e as pleiteou em sua obra "Arithmetica Integra", de 1544 (AFFONSO, 2014).



MICHAELIS STIFELII

295156026357216I, hæc eſt ſumma prouenίens ex additione omnium horum, tollitq; punctum remanens.

De inuentione numerorum, qui peculiariter pertinent ad ſuas ſpecies extractionum.

REſtat iam ut tradam modum inueniendi numeros, qui peculiariter pertinent ad quamlibet ſpeciem extractionum, quatenus perfecta habeatur & abſoluta huius negotij conſummatio. Tradam autem huiuſmodi inuentionẽ, per tabulam ſequentem, quæ ut in infinitum extendatur tuipſe facile uidebis, quâm primum uideris rationem qua conſtruitur. Sic autem conſtructam uides.

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Primo, à latere ſiniſtro deſcendit naturalis numerorum progreſſio, quam extendere poteris quantũ uolueris. Et illa radix eſt ſequentium laterum omnium. Nam ſecundum latus, quod continet numeros trigonales, ſic oritur ex primo latere. Duobus

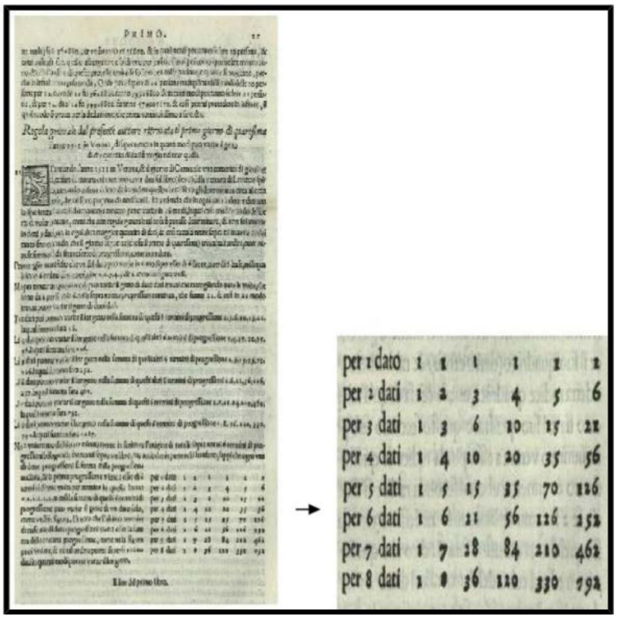
Figura 5: "Arithmetica Integra", de Michel Stifel.
(Fonte: AFFONSO, Alexandre. **O triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.** UFF. Niterói, 2014)

Tartaglia, utilizando o pseudônimo de Niccolò Fontana, foi um matemático italiano, cujo nome está interligado ao triângulo de Tartaglia e à solução da equação do terceiro grau.

> “Um dos primeiros matemáticos ocidentais a confeccionar uma tabela contendo o número de combinações possíveis num lançamento de um dado foi o matemático italiano Nicola Fontana Tartaglia (1499-1559), sendo assim, Tartaglia reivindicou a criação do Triângulo Aritmético para ele, o que explica, o fato de que alguns países, até os dias de hoje, o Triângulo Aritmético é conhecido como *Triangulo de Tartaglia.* ” (SILVA, p. 4, 2013)

Em 1546, lançou “*Quesiti et inventioni diverse*”, que possui a forma dialogada e diversas notas autobiográficas de caráter geral. Em sua maioria eram questões de engenharia e arte militar, mas falavam também de questões matemáticas. Uma dessas questões conduzia a uma equação do 4º grau, que viria a ser mais tarde desatada por Ferrari[2]. Outra contribuição historicamente significativa de Tartaglia diz respeito à resolução da equação cúbica. Por fim, figura em sua obra, a disputa com Fior e o encontro com Cardano[3], no qual Tartaglia entregou-lhe os “Tercetos” com a solução das cúbicas.

AFFONSO (2014) finaliza descrevendo que Tartaglia exibiu suas descobertas em uma obra denominada "General Trattato di numeri et misure", conforme a figura 6, de 1556, que descreve nos dois primeiros volumes referências à aritmética teórica e prática. O livro apresentava diversos problemas e regras para cálculos combinatórios, porém não apresentava nenhuma demonstração. A última parte do tratado relaciona-se à álgebra, mas infelizmente finaliza com as equações quadráticas sem entrar nas cúbicas, mas de um modo geral, ele abordava regras de aritmética, álgebra, geometria e física.



per 1 dato	1	1	1	1	1	1
per 2 dati	1	2	3	4	5	6
per 3 dati	1	3	6	10	15	21
per 4 dati	1	4	10	20	35	56
per 5 dati	1	5	15	35	70	126
per 6 dati	1	6	21	56	126	252
per 7 dati	1	7	28	84	210	462
per 8 dati	1	8	36	120	330	792

Figura 6: Obra de Tartaglia.
(Fonte: AFFONSO, Alexandre. **O triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.** UFF. Niterói, 2014).

[2]Lodovico Ferrari foi um matemático italiano, nascido em Milão, Itália, neto de Bartholomaeus Ferrari. Morou em Bolonha, Itália e iniciou sua carreira como auxiliar de Girolamo Cardano. Dada sua notável facilidade no aprendizado, Cardano começou por ensinar-lhe matemática. Ferrari ajudou Cardano na descoberta das soluções para as equações quadrática e cúbica e foi ainda imensamente responsável pela solução da equação quártica que Cardano publicou.

[3]Girolamo Cardano foi um polimata italiano. Escreveu mais de 200 trabalhos sobre medicina, matemática, física, filosofia, religião e música. Na matemática foi o primeiro a introduzir as ideias gerais da teoria das equações algébricas. Seu hábito de jogar também o levou a formular as primeiras regras da teoria da probabilidade.

Destaca-se que, no transcorrer da história, o Triângulo Aritmético ficou conhecido por vários designativos distintos. Na China, cita Affonso, o denominavam de Yang Hui[4], na Itália recebia o título de triângulo de Tartaglia, em outras regiões de Tartaglia-Pascal e de Triângulo Combinatório. Porém, a titulação mais famosa pela qual o Triângulo Aritmético ficou reputado foi concedida pelos franceses. Eles o denominavam de Triângulo de Pascal, uma homenagem justa, ao homem que aplicou tempo e dedicação para conhecer e apresentar as propriedades desse triângulo.

SILVA (2015) relata que o Triângulo de Pascal adquiriu esse nome graças ao matemático, físico, filósofo e escritor francês Blaise Pascal (1623-1662), que apresentou significativas aplicações matemáticas ao Triângulo Aritmético.

Segundo RUIZ et al (2010), Pascal agregou-se aos sábios do círculo de Mersenne aos 13 anos de idade. Desde então, juntou informações para elaborar mais rapidamente seus trabalhos. Aos 17 anos, descobriu e lançou uma série de teoremas em geometria projetiva, essenciais ao progresso tecnológico futuro, no campo da aviação.

Mais tarde, ainda segundo RUIZ et al (2010), para auxiliar o pai, atarefado com os numerais, empenhou-se a criar uma máquina de calcular. Esta máquina foi elaborada por uma série de engrenagens, a cada uma das quais representavam os números de 0 a 9. As rodas foram feitas de tal forma que a cada dez voltas da primeira equiparava-se uma volta da segunda, a dez voltas da segunda equiparava-se a uma da terceira e assim por diante. Pascal com isso, deu nome a uma significativa e famosa linguagem de programação de base para computadores, utilizada em todo mundo. Ele também contribuiu com notáveis estudos que tiveram como estímulo as evidenciações do italiano Torricelli sobre a pressão atmosférica.

A partir de 1647, Pascal passou a empenhar seus dias à aritmética. Apurou cálculos de probabilidade, a fórmula de geometria do acaso, o conhecido Triângulo de Pascal e o tratado sobre as potências numéricas. Mas, devido ao trabalho intenso, sua saúde se tornou frágil, originando grave enfermidade. Em

[4]Título dado relativo ao matemático Chinês que trabalhou com quadrados mágicos e com o teorema binominal. Descobriu o triângulo, dando a ele seu próprio nome: Triângulo de Yang Hui.

1648 visitou, com sua irmã Jacqueline, os seguidores de Saint-Cyran[5], que o transportaram ao misticismo de Port-Royal (RUIZ et al, 2010). Depois do falecimento do seu pai, em 1651, surgiu o denominado período mundano de Pascal, relacionado, em parte, ao fato da proibição médica de doar-se aos trabalhos intelectuais, que se tornaram maléficos à sua saúde e também por passar a efetuar exercícios de penitência. É nesse período que Pascal se mantém longe de seus “vícios”.

Após escapar da morte em um acidente de carruagem numa das pontes de Paris, em 1654, Pascal se converteu à militância religiosa:

> Logo depois, em um êxtase espiritual, decidiu dedicar-se com fervor à militância religiosa e depois à contemplação e à oração. Após a conversão, documentada de forma comovente em Memorial, Pascal faz grandes progressos na vida espiritual como se pode ver também pela Oração para pedir a Deus a graça de fazer bom uso das enfermidades, escrito edificante e perene (RUIZ, p. 34, 2010).

Logo, ele se dedicou a reflexões filosóficas e teológicas. Suas autorias nessa área (Pensamentos e as Provinciais) são conteúdos de discussões em academias e congregações religiosas até os dias atuais. “Pascal em sua filosofia não quis opor a razão ao coração, e sim integrar ambos. E acreditava também ser a religião a única a dar respostas às questões colocadas pela condição humana.” (SILVA, 2013, p. 38).

> O triângulo aritmético ficou conhecido como “Triângulo de Pascal” devido à monografia de cerca de sessenta páginas sobre este triângulo escrita por Blaise Pascal: “Trait´edu triangle arithmétique”, a qual foi publicada só postumamente, em 1665. Nesta monografia, Pascal introduziu o triângulo de um modo bem complicado e usando uma notação estritamente geométrica. (SILVA, 2010, p. 10)

Segundo AFFONSO (2014) o sacrifício de Pascal se manifestou na obra denominada "Traité di Triangle Arithmétique” (figura 7) reproduzida após sua morte, em 1665. Como se viu, Pascal ficou conhecido não apenas pelas análises do Triângulo Aritmético, mas por distintas contribuições na própria Matemática como estudos sobre as cônicas, o ciclóide e por ser desbravador nos estudos de probabilidade.

[5]Jean-Ambroise Duvergier de Hauranne, mais conhecido por abade de Saint-Cyran, foi um religioso e teólogo francês que introduziu o jansenismo na França. O Jansenismo foi uma teologia cristã que surgiu na França e Bélgica, no século XVII e se desenvolveu no século XVIII. Possui esse título por ter origem nas idéias do bispo de Yprès, Cornelius Jansen. O Jansenismo era uma versão modificada do calvinismo, que por sua vez se baseia na teologia de Agostinho de Hipona.

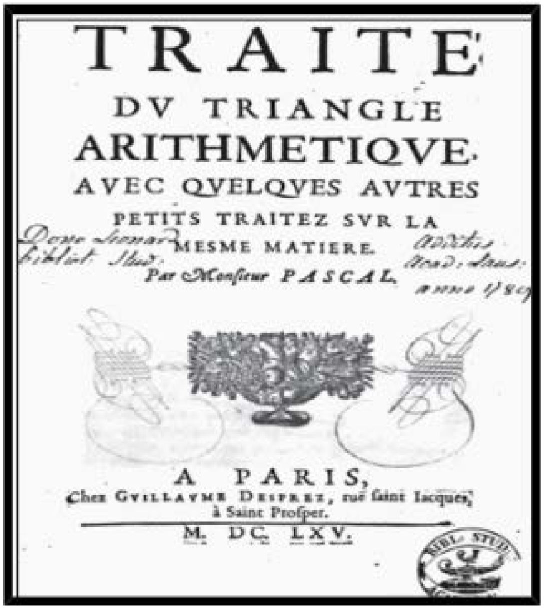

TRAITE
DV TRIANGLE
ARITHMETIQVE.
AVEC QVELQVES AVTRES
PETITS TRAITEZ SVR LA
MESME MATIERE.
Par Monsieur PASCAL.
A PARIS,
Chez GVILLAVME DESPREZ, rue saint Iacques,
à Saint Prosper.
M. DC. LXV.

Figura 7: Traité di Triangle Arithmétique, obra de Pascal.
(Fonte: http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/02/historia-do-triangulo-aritmeticoparte.html).

Na obra citada acima, Pascal averiguou intensamente várias propriedades do Triângulo Aritmético e descreveu sua construção:

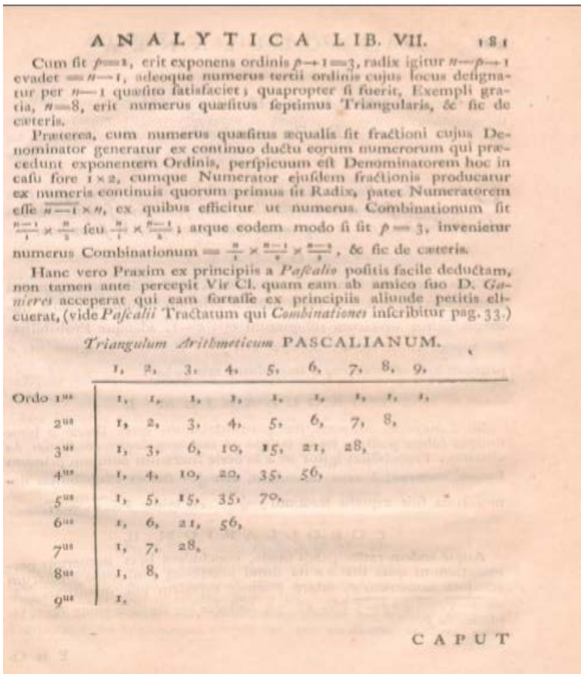
> A construção do triângulo é feita colocando cada número em uma célula que obedece a uma regra geral, necessitando-se apenas a escolha do primeiro número ou número gerador que no caso do Triângulo Aritmético é o número 1. (AFFONSO, 2014, p. 22).

> O número de cada célula é igual ao número da célula que a precede na sua posição perpendicular, mais a célula que a precede na sua posição paralela. Portanto, a célula F é obtido pela soma da célula C mais a célula E, e assim sucessivamente (AFFONSO, 2014 apud PULSKAMP, 2009, p. 3).

Figura 8: Construção do Triângulo, segundo Pascal.
(Fonte: http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/02/historia-do-triangulo-aritmeticoparte.html).

AFFONSO (2014) finaliza descrevendo que após inúmeras observações e demonstrações, Pascal publica os seguintes títulos "Às ordens numéricas", "As combinações", "Para determinar as partes que cada jogador deve receber quando dois jogadores fazem várias partidas" e "Para achar as potências de binômios e de apótomos" (diferença entre duas razões incomensuráveis).

A validação da titulação "Triângulo de Pascal" realiza-se em 1730, ano em que Abrahan de Moivre (1667-1754) em sua marcante e influente obra "Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis (1730)" usou a titulação "Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM" para dar referência ao Triângulo Aritmético. A datar-se dessa obra, o Triângulo Aritmético fica famoso com a denominação "Triângulo de Pascal”.



ANALYTICA LIB. VII. 181

Cum fit $p=2$, erit exponens ordinis $p+1=3$, radix igitur $n-p+1$ evadet $=n-1$, adeoque numerus tertii ordinis cujus locus defignatur per $n-1$ quæfito fatisfaciet; quapropter fi fuerit, Exempli gratia, $n=8$, erit numerus quæfitus feptimus Triangularis, & fic de cæteris.

Præterea, cum numerus quæfitus æqualis fit fractioni cujus Denominator generatur ex continuo ductu eorum numerorum qui præcedunt exponentem Ordinis, perfpicuum eft Denominatorem hoc in cafu fore 1×2, cumque Numerator ejufdem fractionis producatur ex numeris continuis quorum primus fit Radix, patet Numeratorem effe $\overline{n-1}\times n$, ex quibus efficitur ut numerus Combinationum fit $\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}$ feu $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$; atque eodem modo fi fit $p=3$, invenietur numerus Combinationum $=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$, & fic de cæteris.

Hanc vero Praxim ex principiis a *Pafcalio* pofitis facile deductam, non tamen ante percepit Vir Cl. quam eam ab amico fuo D. *Ganieres* acceperat qui eam fortaffe ex principiis aliunde petitis elicuerat, (vide *Pafcalii* Tractatum qui *Combinationes* infcribitur pag. 33.)

Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Ordo 1^{us}	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
2^{us}	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	
3^{us}	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,		
4^{us}	1,	4,	10,	20,	35,	56,			
5^{us}	1,	5,	15,	35,	70,				
6^{us}	1,	6,	21,	56,					
7^{us}	1,	7,	28,						
8^{us}	1,	8,							
9^{us}	1,								

CAPUT

Figura 9: O Triângulo de Pascal.
(Fonte: AFFONSO, Alexandre. **O triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.** UFF. Niterói, 2014).

Pascal, que sempre teve uma saúde frágil, adoeceu gravemente em 1659 e seu falecimento ocorreu em 19 de agosto de 1662, dois meses após completar 39 anos. Seu sepultamento ocorreu na Igreja de Saint-Étienne-du-Mont, Ilha de França, Paris. Estudos apontam como causa de sua morte a tuberculose, mas após ser realizado uma necropsia foram detectados graves problemas de estômago e em parte do abdômen e também foi examinado que seu cérebro encontrava-se bastante danificado, o que se sugere um câncer de estômago com metástase, atingindo o cérebro. Em vida, Pascal padecia com fortes dores de cabeça e a valer teve os sintomas de tuberculose antes do seu falecimento, descreve URPIA, 2010.

O grande Blaise Pascal exibe uma obra científica desmembrada e infelizmente incompleta, mostrando exuberantemente seu genialismo. Seus substitutos, se tal termo pode ser usado, como por exemplo Leibniz, exploravam essas obras fascinados. Pascal foi, sem hesitar, o grandioso da história matemática e um dos vínculos valorosos no progresso da matemática, descreve RUIZ, 2010.

3
A Matemática do Triângulo de Pascal

Apresentaremos nesta seção alguns conceitos matemáticos importantes para o entendimento do Triângulo de Pascal.

3.1
Fatorial

Chama-se fatorial de um número natural, o número obtido pelo produto desse número por todos os seus antecessores até chegar à unidade. É representado por n!. Define-se então que $n! = \begin{cases} 1, se\ n = 0\ ou\ n = 1 \\ n.(n-1).(n-2).(n-3)\ \ldots\ldots 3.2.1, se\ n > 1 \end{cases}$

Sua notação fatorial foi criada e aplicada pela primeira vez por Christian Kramp (1760-1826) em seu livro "Élements d'arithmétique universelle" de 1808.

3.2
Número Binomial

O número binomial, que compõe o desenvolvimento do Binômio de Newton, é definido pela fórmula a seguir, a mesma que define o que chamamos de combinação simples:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

Onde n e p são números naturais. Quando n ≥ p, tem-se que $\binom{n}{p}$ é um número inteiro.

3.3
Binômio de Newton

O estudo do binômio de Newton, surgiu de forma a complementar os estudos dos produtos notáveis.

Sabe-se que alguns produtos notáveis, são da seguinte forma:

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$

Com a necessidade de se estudar mais potências do binômio, se fez necessária a observação entre os coeficientes dos termos algébricos e os produtos notáveis.

> Em matemática, binómio de Newton ou binômio de Newton permite escrever na forma canônica o polinómio correspondente à potência de um binómio. O nome é dado em homenagem ao físico e matemático Isaac Newton. Entretanto deve-se salientar que o Binômio de Newton não foi o objeto de estudos de Isaac Newton. Na verdade, o que Newton estudou foram regras que valem para $(a + b)^n$ quando o expoente **n** é fracionário ou inteiro negativo, o que leva ao estudo de séries infinitas. (OLIVEIRA, 2014, p. 3).

O desenvolvimento do Binômio de Newton:

Dados os números inteiros a e b e o número natural n, tem-se:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} . b^p$$

Podemos observar a disposição dos coeficientes binomiais no desenvolvimento dos binômios do tipo $(a+b)^n$:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^{3-0} b^0 + \binom{3}{1} a^{3-1} b^1 + \binom{3}{2} a^{3-2} b^2 + \binom{3}{3} a^{3-3} b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Observe que cada termo do desenvolvimento pode ser representado por $t_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$ e os coeficientes $\binom{n}{p}$ se organizam de tal forma que é possível escrevê-los do modo que componham um triângulo chamado de Triângulo Aritmético, usualmente organizado como as figuras abaixo:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$
$$\vdots$$
$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\binom{n}{5}\binom{n}{6}\cdots\binom{n}{n}$$

Figura 10: Triângulo Aritmético expresso pelos números binomiais.
(Fonte: Figura criada pelo autor).

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Figura 11: Primeiras linhas dos valores que compõe o Triângulo Aritmético.
(Fonte: Figura criada pelo autor).

O Triângulo Aritmético possui inúmeras propriedades que levaram matemáticos de várias épocas a estudarem suas aplicações. A seguir, serão demonstradas algumas dessas propriedades mais relevantes para esse trabalho.

Propriedades Binomiais

a) Binomiais complementares:

São aqueles que possuem mesmo numerador e a soma de suas classes (denominador) são iguais a esse numerador. Os binomiais complementares possuem o mesmo valor e são equidistantes nas linhas do Triângulo Aritmético.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Demonstração:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \; e \; \binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,\big(n-(n-p)\big)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Esquema demonstrativo:

L/C	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Figura 12: Binomiais Complementares. (FONTE: figura criada pelo autor).

b) Relação de Stifel:

A relação de Stifel mostra que a soma de dois números binomiais consecutivos do triângulo de Pascal é igual ao elemento abaixo ao segundo termo. Essa relação posicional vale quando o triângulo é apresentado como um triângulo retângulo (vide figura 13).

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Demonstração:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(n-p)!\,(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!\,p!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,p}{(n-p)!\,(p-1)!\,p} + \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)(n-p-1)p!} = \frac{\big(p+(n-p)\big)(n-1)!}{(n-p)!\,p!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p} \blacksquare$$

Esquema demonstrativo:

L/C	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Figura 13: Relação de Stifel.

(Fonte: Figura criada pelo autor).

c) Relação de Fermat:

Permite o cálculo dos coeficientes do desenvolvimento do tipo $(x+a)^n$ onde cada coeficiente tem uma relação direta com o coeficiente anterior.

$$\binom{n}{p}.\frac{n-p}{p+1}=\binom{n}{p+1}$$

Demonstração:

Sejam $n \in IN\ e\ p \in IN$, com $p \leq n$. Então:

$$\binom{n}{p}.\frac{(n-p)}{(p+1)}=\frac{n!}{p!.(n-p)!}\times\frac{(n-p)}{(p+1)}=\frac{n!.(n-p)!}{(p+1).p!.(n-p).(n-p-1)!}$$
$$=\binom{n}{p+1}$$

d) Teorema das linhas:

Trata-se do valor obtido quando se soma todos os elementos de uma linha qualquer do Triângulo. Demonstra-se, que para qualquer linha, essa soma é sempre uma potência de 2. É assim enunciado: para todo $n \in IN$.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

Demonstração:

Utilizando o Princípio da Indução Matemática, temos:

A igualdade é válida para n = 0, pois:

$$\binom{0}{0}=1=2^0$$

Supondo agora o resultado para n = k, temos:

$$\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+\binom{k}{k}=2^k$$

Vamos mostrar pela Hipótese de Indução que é válida para n = k+1, Ou seja:

$$\binom{k+1}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+1}{2}+\binom{k+1}{3}+\cdots+\binom{k+1}{k+1}=2^{k+1}$$

Pela Hipótese de Indução, temos:

$$\binom{k}{0}+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]+\left[\binom{k}{2}+\binom{k}{3}\right]+\cdots+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]+\binom{k}{k}=$$
$$=\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{k-1}\right]+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{k-1}\right]=$$
$$=2^k+2^k=2^{k+1}\ (1)$$

Pela Relação de Stifel (Propriedade b), segue que:

$$\binom{k}{0}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{1}$$
$$\binom{k}{1}+\binom{k}{2}=\binom{k+1}{2},\ldots,$$
$$\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k}.$$

Substituindo em (1), obtemos:

$$\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+1}{2}+\cdots+\binom{k+1}{k}+\binom{k}{k}=2^{k+1}\ (2)$$

Como

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}\ e\ \binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+!},$$

Podemos escrever (2) da seguinte forma:

$$\binom{k+1}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+1}{2}+\binom{k+1}{3}+\cdots+\binom{k+1}{k+1}=2^{k+1}.$$

Pelo Princípio da Indução Matemática, o resultado é válido para todo $n \in IN$. ■

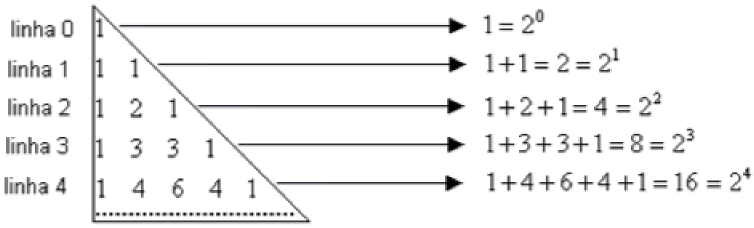


Figura 14: Teorema das Linhas.
(Fonte: OLIVEIRA, Louraine de Paula. **Teorema do Binômio de Newton.** Unicamp, 2014).

e) Teorema das colunas:

Mostra que a soma dos elementos de qualquer coluna, a partir do 1º elemento até um qualquer é igual ao elemento situado na coluna à direita da considerada e na linha imediatamente abaixo.

É assim enunciado:

Para quaisquer $n \in IN$ e $p \in IN$, é possível afirmar que:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \cdots + \binom{n+P}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

Demonstração:

Utilizaremos o Princípio da Indução Matemática sobre p, fixando $n \in IN$.

A igualdade é válida para p = 0, pois:

$$\binom{n}{n} = \binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+0+1}{n+1} = \binom{n+1}{n+1}$$

Suponhamos agora o resultado válido para p = k, ou seja, suponhamos válida a igualdade:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

Por Hipótese de Indução, agora mostraremos que é válido para p = k+1:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}+\binom{n+k+1}{n}=\binom{n+k+2}{n+1}$$

Assim,

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}+\binom{n+k+1}{n}=$$

$$\left[\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}\right]+\binom{n+k+1}{n}=$$

$$\binom{n+k+1}{n+1}+\binom{n+k+1}{n}\, pela\ Hipótese\ de\ Indução$$

Assim, pela Relação de Stifel, temos $\binom{n+k+1}{n+1}+\binom{n+k+1}{n}=\binom{n+k+2}{n+1}$ ■

Observação: Essa soma deve sempre começar pelo primeiro elemento da coluna do Triângulo dos coeficientes binomiais.

Esquema demonstrativo:

L/C	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Figura 15: Teorema das colunas.
(Fonte: Figura criada pelo autor).

f) Teorema das diagonais

Descreve OLIVEIRA (2014), que a soma dos elementos localizados na mesma diagonal desde o elemento da 1ª coluna até o de uma qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo deste último.

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}$$

Demonstração:

Pela propriedade dos binomiais complementares temos que:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n};\binom{n+1}{1}=\binom{n+1}{n};\binom{n+2}{2}=\binom{n+2}{n};\ldots;\binom{n+p}{p}=\binom{n+p}{n}$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p}{p}=$$

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+p}{n}.$$

Pelo teorema das colunas, sabemos que

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}+\cdots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

E, pelo teorema dos binomiais complementares, temos:

$$\binom{n+p+1}{n+1}=\binom{n+p+1}{p}$$

Assim, concluimos que

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{n+1}=\binom{n+p+1}{p}\ \blacksquare$$

Essa demonstração leva em conta Binomiais complementares e o Teorema das colunas, ambos demonstrados acima.

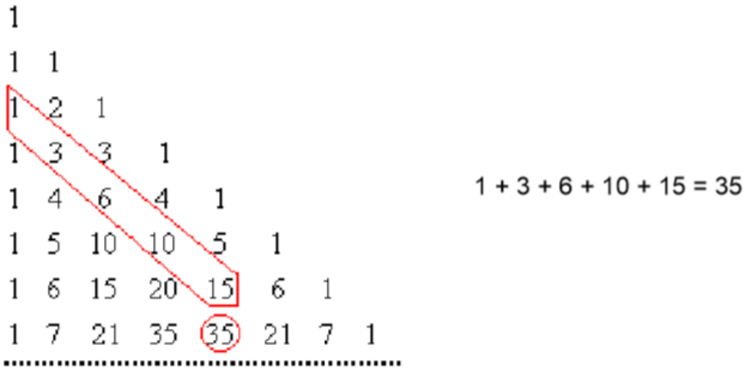


Figura 16: Teorema das Diagonais.
(Fonte: OLIVEIRA, Louraine de Paula. **Teorema do Binômio de Newton.** Unicamp, 2014).

g) Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci, é uma sequência de números inteiros que começa no número 1, onde cada termo subsequente equivale à soma dos dois termos anteriores. Tal sequência pode ser escrita de forma recursiva:

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ que gera a sequência$F(n) = (1,1,2,3,5,8,13, \dots)$

Segundo MORGADO et al (2006), o número de Fibonacci F_n também aparece no Triângulo de Pascal. Ele é visto quando se somam os elementos da n-ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Pascal.

Demonstração:

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots =$$

$$= \binom{n+1}{0} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right) + \left(\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right) + \cdots =$$

$$= \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \cdots = F_{n+2}$$

Esquema ilustrativo:

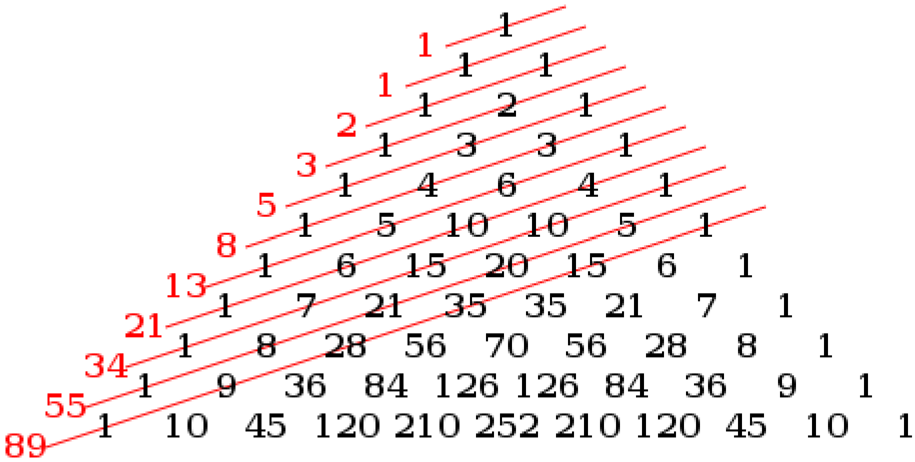


Figura 17: Sequência de Fibonacci no Triângulo Aritmético.
(Fonte: http://blog.wesleycota.com/fibonacci-parte-1-sequencia-de-fibonacci-e-os-coelhos/).

4
Uma Coletânea de Aplicações para a Sala de Aula

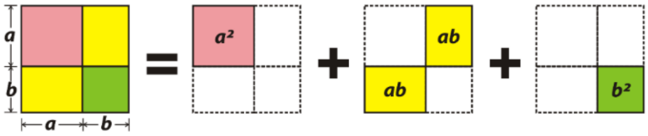
A ideia de se apresentar algumas aplicações e curiosidades do Triângulo de Pascal, surgiu da constatação do quanto esse assunto é pouco explorado no Ensino Básico deixando-o invisível no mundo da educação. Pretendemos assim, incentivar o professor deste segmento a dar mais importância ao tema, trazendo com isso, novas metodologias de ensino e promovendo no aprendiz a aquisição de conhecimentos de forma motivacional e significativa.

A seguir apresentamos uma coletânea de propostas que utilizam o Triângulo de Pascal em conteúdos diversos da Matemática da educação básica. Pensamos que dessa forma, cada professor pode selecionar e adaptar à sua realidade as atividades que julgar pertinentes ao seu grupo de alunos.

4.1
Produtos Notáveis do tipo $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$

O intuito dessa secção, é estimular o interesse no estudo dos produtos notáveis (tema abordado ainda no Ensino Fundamental). A partir da observação do Triângulo é possível perceber a relação direta entre os coeficientes do Triângulo de Pascal nos desenvolvimentos do tipo $(x + y)^n$.

Como visto, o desenvolvimento de binômios do tipo $(x + y)^n$ (chamado de Binômio de Newton) coincide com o estudo dos chamados produtos notáveis e foram utilizados, desde a antiguidade, por egípcios, gregos e outros povos. Euclides de Alexandria, fazia o desenvolvimento de $(a + b)^2$ na forma geométrica, como mostrado a seguir:



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 18: Quadrado da soma de dois termos.
(Fonte: http://www.estudopratico.com.br/produtos-notaveis-definicao-tipos-de-produtos-e-exemplos/).

Observe que os coeficientes desse desenvolvimento coincidem exatamente com os elementos da 3ª linha do Triângulo.

O produto notável, aparece a primeira vez na vida do estudante, no oitavo ano do Ensino Fundamental. Porém, como dito anteriormente, os casos apresentados são pouco explorados e assim, mostraremos como o produto notável poderia ser melhor abordado neste seguimento, uma vez que a construção das linhas iniciais do Triângulo Aritmético não demanda muito tempo e requer recursos básicos.

Caso $(a + b)^n$:

Sabemos que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pode ser justificado tanto por uma relação algébrica onde, $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ e utilizando a propriedade distributiva, temos $a^2 + 2ab + b^2$, quanto pela relação geométrica mostrada na figura acima.

A proposta a seguir diz que no produto notável na forma $(a + b)^n$, o primeiro termo **a** começa com a maior potência n e vai diminuindo até zero, à medida que o segundo termo **b** começa com a potência mínima zero e aumenta até o máximo n. Os coeficientes que são multiplicados aos termos, são os números do triângulo de Pascal.

Assim, faz-se uma relação direta:

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = 1a + 1b$

$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

$(a + b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$

$(a + b)^7 = 1a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + 1b^7$

$(a + b)^8 = 1a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + 1b^8$

Caso $(a – b)^n$:

A diferença entre $(a + b)^n$ e $(a – b)^n$ em termos de desenvolvimento é que, à medida que em $(a + b)^n$ o desenvolvimento tem todos os termos positivos, o caso $(a – b)^n$ intercala entre valores positivos e negativos, começando por positivo.

A representação geométrica para $(a + b)^2$ é:

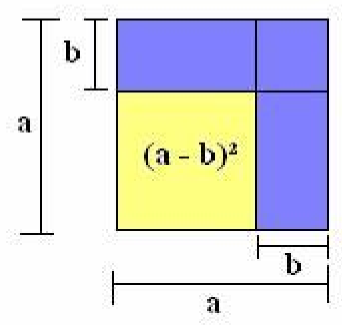


Figura 19: Quadrado da Diferença de dois termos.
(Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12574).

Temos com isso, o desenvolvimento idêntico ao primeiro, porém com a alternância de sinais, tal como dito acima, para o desenvolvimento de $(a - b)^n$.

$(a- b)^0 = 1$

$(a- b)^1 = 1a - 1b$

$(a- b)^2 = 1a^2 - 2ab + 1b^2$

$(a- b)^3 = 1a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 1b^3$

$(a- b)^4 = 1a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + 1b^4$

$(a- b)^5 = 1a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - 1b^5$

$(a- b)^6 = 1a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + 1b^6$

$(a- b)^7 = 1a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - 1b^7$

$(a- b)^8 = 1a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + 1b^8$

Assim, os dois casos mais simples dos produtos notáveis que normalmente são vistos para casos $(a \pm b)^2$ e $(a \pm b)^3$, poderão ser estudados um pouco mais, não sendo novidade alguma quando for estudado Binômio de Newton no Ensino Médio.

4.2
As potências de 11

No estudo de potências, alguns números apresentam propriedades específicas. As potências de 10 por exemplo, são as mais conhecidas pela relação direta que existe entre o número de zeros e o número da potência.

No nosso estudo, apresentaremos uma particularidade que está intimamente ligada ao Triângulo de Pascal.

É possível ver as potências de 11 no Triângulo Aritmético. Tais potências são um caso particular do produto notável $(a+b)^n \, para \, a = 10 \, e \, b = 1$, ou seja, $(10+1)^n$.

Mostraremos aqui que as potências de onze aparecem no triângulo de Pascal de forma explícita até a quinta linha e de forma implícita nas demais linhas.

Vejamos então**,** as 5 primeiras potências de 11. Observe que elas estão diretamente associadas às 5 primeiras linhas do triângulo de Pascal, bastando concatenar os algarismos de cada uma dessas linhas:

$11^0 =$	1				
$11^1 =$	1	1			
$11^2 =$	1	2	1		
$11^3 =$	1	3	3	1	
$11^4 =$	1	4	6	4	1

Figura 20: Primeiras Potências de 11 no Triângulo Aritmético.
(Fonte: Figura criada pelo autor).

A partir da quinta linha, aparecem números com mais de um algarismo no triângulo de Pascal, mesmo assim, conseguimos identificar as potências de 11 implicitamente.

Vejamos que:

A potência 11^5 que equivaleria à sexta linha do triângulo de Pascal é diferente de 1 5 10 10 5 1

Cada um dos elementos da sexta linha do triângulo de Pascal é referente ao coeficiente da potência de 10 na representação no sistema decimal de $11^5 = (10+1)^5$, ou seja,

$11^5 = \mathbf{1}x10^5 + \mathbf{5}x10^4 + \mathbf{10}x10^3 + \mathbf{10}x10^2 + \mathbf{5}x10^1 + \mathbf{1}x10^0$

$11^5 = 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 50 + 1$

$11^5 = 161051$

É possível chegar a esse valor utilizando os elementos da sexta linha do triângulo da seguinte forma: para cada um dos números dessa linha, lidos da direita para esquerda, deve-se, a cada etapa, proceder como numa soma usual conforme ilustra a figura a seguir.

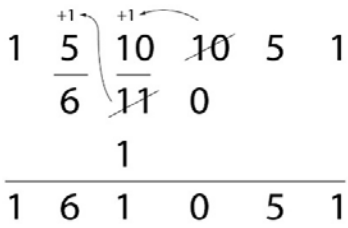


Figura 21: Transformação da representação decimal de 11^5 para seu valor numérico. (Fonte: Figura criada pelo autor).

O mesmo acontece com as demais linhas do triângulo de Pascal. Vejamos para 11^6 que é equivalente à sétima linha do triângulo de Pascal:

16 15 20 15 6 1

Temos:

11^6 = **1**x10^6+ **6**x10^5 + **15**x10^4 + **20**x10^3 + **15**x10^2 + **6**x10^1 + **1**x10^0

11^6 = 1000000 + 600000 + 150000 + 20000 + 1500 + 60 + 1

11^6 = 1771561

Ou ainda,

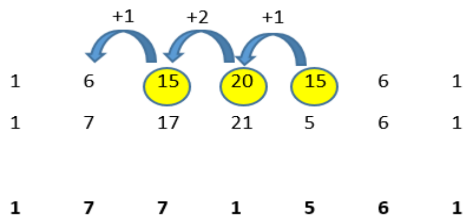


Figura 22: Transformação da representação decimal de 11^6 para seu valor numérico. (Fonte: Figura criada pelo autor).

Assim, temos que as potências de 11 podem ser trabalhadas como uma proposta auxiliar no desenvolvimento dos produtos notáveis, utilizando o desenvolvimento de $(10 + 1)^n$, com n variando de 1 a 3 nas séries iniciais e para n ≥ 3 após o conhecimento do desenvolvimento binomial.

4.3
Quadrados perfeitos

Nessa seção, falaremos sobre os quadrados perfeitos que são todos os números naturais elevados à potência 2.

Dado o triângulo de Pascal abaixo, nossa análise será baseada na terceira coluna do triângulo:

1											
1	1										
1	2	**1**									
1	3	**3**	1								
1	4	**6**	4	1							
1	5	**10**	10	5	1						
1	6	**15**	20	15	6	1					
1	7	**21**	35	35	21	7	1				
1	8	**28**	56	70	56	28	8	1			
1	9	**36**	84	126	126	84	36	9	1		
1	10	**45**	120	210	252	210	120	45	10	1	
1	11	**55**	165	330	462	462	330	165	55	11	1

É possível verificar que $1+3 = 4 = 2^2$, $3+6 = 9 = 3^2$, $6 + 10 = 16 = 4^2$, $10 + 15 = 25 = 5^2$, $15 + 21 = 36 = 6^2$ onde a soma de dois números consecutivos da terceira coluna do triângulo, é um quadrado perfeito.

Os números 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... são números chamados triangulares e assim, quando juntamos dois números triangulares consecutivos, formamos um quadrado. Propriedades essas já conhecida por vários matemáticos que utilizavam figuras geométricas para associar ao estudo do Teorema de Pitágoras.

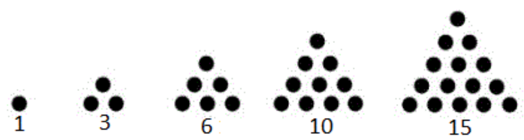
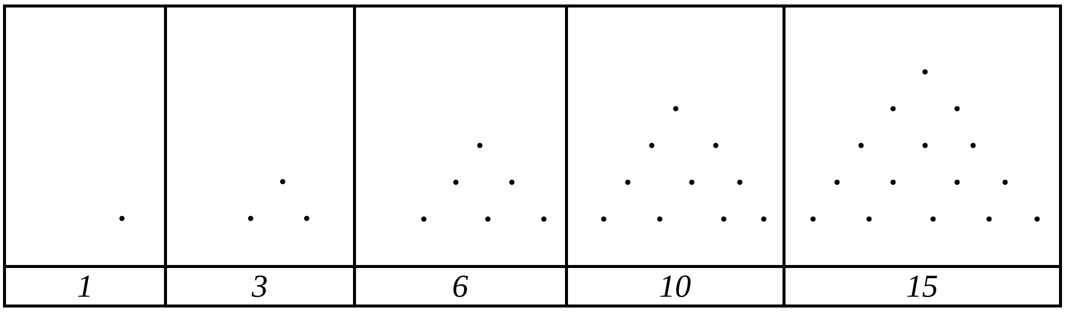


Figura 23: Números triangulares – Terceira coluna do Triângulo Aritmético.
(Fonte: http://vemqueteexplico.blogspot.com.br/2012/01/numeros.html).

Tabela 1: Tabela dos números triangulares.



(Fonte: http://www.mat.ufmg.br/).

Podemos observar que se juntarmos dois números triangulares consecutivos podemos realmente formar um quadrado.

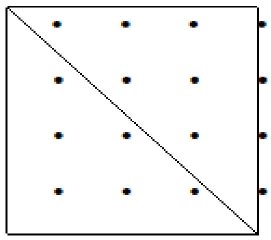


Figura 24: Quadrado formado por dois números triangulares.
(Fonte: http://www.mat.ufmg.br/).

De forma análoga, podemos dizer que cada quadrado pode ser obtido pelo quadrado anterior adicionando uma borda com formato L invertido. Cada L invertido acrescentado é um ímpar sucessivo. Assim, temos:

1, 1+3 = 4, 1+3+5 = 9, 1+3+5+7 = 16, 1+3+5+7+9=25 e assim sucessivamente, ou ainda:

$$1+3+5+7|+9+...+(2n-1) = n^2.$$

4.4
Número de subconjuntos de um conjunto finito

Essa seção tem como objetivo, mostrar que o número de subconjuntos de um conjunto finito é dado por 2^n, onde n é a quantidade de elementos desse conjunto e relacionar esta afirmação com o Triângulo de Pascal.

Primeiramente, temos que entender que um conjunto B é subconjunto de um conjunto A se os elementos de B são também elementos de A. Neste caso podemos dizer que B está contido em A e denotamos por B C A. Assim se A = {a,b,c}, então seus subconjuntos são: Ø, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}.

Ao tentarmos então construir todos os subconjuntos de A podemos pensar numa relação binária de pertencimento, ou seja, um dado elemento de A pode ou não pertencer a um dos seus subconjuntos B. Essa relação binária acontece em vários campos da Matemática, como por exemplo na definição de par ou ímpar, num problema de verdadeiro ou falso ou no caso em questão de pertencer ou não a um conjunto. De forma bem intuitiva, é como se explicitássemos todas as possibilidades de respostas SIM ou NÃO por parte de cada elemento de conjunto A à pergunta: "*Este elemento pertence ao subconjunto?* ". Com essa construção, o conjunto vazio representa o subconjunto de A em que todos os elementos "responderam" NÃO, e o próprio conjunto representa todos "respondendo" SIM. Assim, podemos concluir que na teoria dos subconjuntos, o menor subconjunto de qualquer conjunto finito é o Conjunto Vazio e o maior é ele mesmo.

Uma árvore que resume essa construção para um conjunto de 3 elementos está explicitada na figura 25.

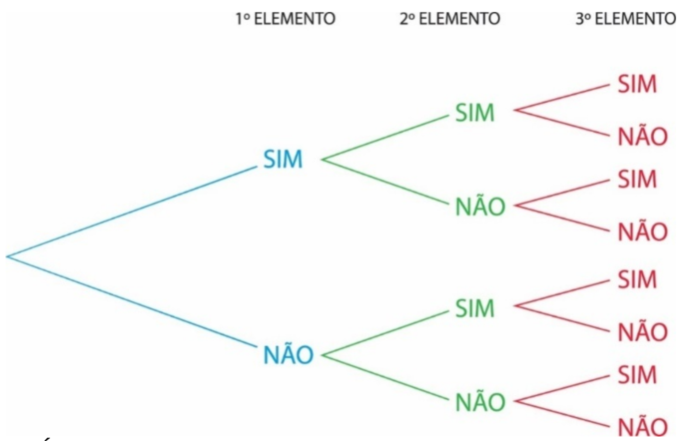


Figura 25: Árvore da Relação binária de pertencimento para um conjunto com três elementos.
(Fonte: Figura criada pelo mestrando).

Considerando ainda A = {a,b,c}, a árvore acima nos fornece que os subconjuntos de A são:

- Subconjuntos sem elementos - Ø – sua quantidade é representada pela combinação de 3 escolhidos zero a zero – $\binom{3}{0} = 1$

- Subconjuntos com exatamente 1 elemento: {a}, {b} e {c} – sua quantidade é representada pela combinação de 3, escolhidos um a um – $\binom{3}{1} = 3$
- Subconjuntos com exatamente 2 elementos: {a,b}, {a,c}, {b,c} – sua quantidade é representada pela combinação de 3, escolhidos dois a dois – $\binom{3}{2} = 3$
- Subconjuntos com exatamente 3 elementos: {a,b,c} – sua quantidade é representada pela combinação de 3, escolhidos três a três – $\binom{3}{3} = 1$.

Assim, o número total de subconjuntos de A é 1+3+3+1 = 8. Observe que este número representa exatamente a soma dos elementos da quarta linha do triângulo de Pascal, que pelo Teorema das Linhas, vale $2^3 = 8$.

Generalizando o exposto acima, temos que para um conjunto finito A com n elementos, seus subconjuntos variam de zero elementos até n elementos e a (n+1)-ésima linha do Triângulo de Pascal encerra o total de subconjuntos distintos com exatamente cada um desses quantitativos de elementos. Assim, o número de subconjuntos de um conjunto finito com n elementos, encontra-se na soma de todos os elementos da linha (n+1) do triangulo de Pascal que vale 2^n.

4.5 Número de diagonais de um polígono convexo

No estudo da geometria plana, é bastante comum falar sobre a soma dos ângulos internos, ângulos externos e ângulo central de um polígono. Após o estudo da natureza dos polígonos, normalmente se faz a análise da quantidade de diagonais de cada um dos polígonos que varia de acordo com o número de lados. O polígono de menor número de lados, triângulo, não apresenta diagonais e o de maior número de lados, o círculo (segundo afirma o matemático Leibniz), possui uma quantidade infinita de diagonais, onde qualquer uma de suas cordas representa uma de suas diagonais. Assim, apresentaremos uma forma de relacionar o número de diagonais de um polígono com uma das colunas do Triângulo de Aritmético, uma vez que sua fórmula pode ser demonstrada a partir da combinação dos vértices do polígono.

Pela definição de diagonal, tem-se que de um vértice qualquer considerado, não é possível traçar diagonais unindo-o aos seus 2 vértices adjacentes nem a ele próprio, logo, podemos dizer que de cada vértice é possível traçar exatamente **n–3** diagonais (vide figura 16). Assim, tende-se a pensar que o número de diagonais de um polígono de n vértices seria n(n – 3). Ocorre que, desta forma estamos contando duas vezes cada aresta (observe na figura 16 que a diagonal AD é igual à DA), logo $d = \frac{n(n-3)}{2}$ ou $d = \frac{n^2-3n}{2}$

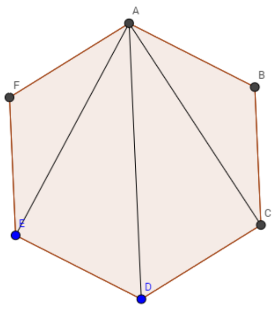


Figura 26: Hexágono com diagonais traçadas do vértice A.
(Fonte: Figura criada pelo mestrando).

Usando os conceitos da análise combinatória podemos chegar à mesma conclusão. Cada dupla de vértices distintos do polígono define um segmento de reta que pode ser diagonal ou lado, assim a combinação n, tomados dois a dois fornece o número total desses segmentos. Desse número, precisamos retirar os que são lados, ou seja, precisamos retirar n. Assim:

$$d = C_{n,2} - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n^2-3n}{2}$$

Mas, onde está a ligação desse número com o Triângulo de Pascal? Construindo-se uma tabela com o número de lados e o número de diagonais de um polígono de n lados, fica fácil encontrar essa relação.

Tabela 2: Primeiras linhas do número de diagonais de um polígono.

n	**d**
3	**0**
4	**2**
5	**5**
6	**9**
7	**14**
8	**20**
9	**27**
10	**35**
11	**44**
12	**54**

(Fonte: Figura criada pelo mestrando).

1	1										
1	2	**1**									
1	3	**3**	1								
1	4	**6**	4	1							
1	5	**10**	10	5	1						
1	6	**15**	20	15	6	1					
1	7	**21**	35	35	21	7	1				
1	8	**28**	56	70	56	28	8	1			
1	9	**36**	84	126	126	84	36	9	1		
1	10	**45**	120	210	252	210	120	45	10	1	
1	11	**55**	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Assim, o número de diagonais de um polígono de n lados, pode ser obtido subtraindo uma unidade do número que está na terceira coluna da linha n do triângulo de Pascal. Este número é representado por $\binom{n-1}{2} - 1 = \frac{n(n-3)}{2}$.

4.6
Relações de Girard

O estudo das equações polinomiais, começam a ter uma maior complexidade no nono ano do Ensino Fundamental, com o estudo das equações polinomiais de segundo grau. Tais equações tem suas raízes calculadas segunda a fórmula de Bháskara[6]. Tal fórmula pode ser utilizada para deduzir a soma e o produto das raízes dessa equação.

Aqui, mostraremos uma relação direta entre as raízes de um polinômio de qualquer grau e o Triângulo de Pascal, uma vez que suas raízes são combinadas de forma a se obter a soma e o produto das raízes combinadas de várias formas obtendo assim o que chamamos de Relações de Girard, que é uma forma de estabelecer relações entre as raízes de uma equação polinomial e os coeficientes do polinômio dentro do Universo Complexo.

Na busca de encontrar uma fórmula que resolvessem equações polinomiais, o matemático francês Albert Girard, publicou em 1629 em sua obra *Invention nouvelle en I´algébre* o que hoje conhecemos como Relações de Girard. Tal Teorema permite que sejam relacionados os coeficientes de uma equação polinomial à soma de suas raízes tomadas uma a uma,$\binom{n}{1}$, à soma dos produtos de suas raízes tomadas 2 a 2, $\binom{n}{2}$, à soma dos produtos de suas raízes tomadas 3 a 3, $\binom{n}{3}$ e assim sucessivamente, até que por fim, ao produto de suas raízes$\binom{n}{n}$. Assim, conseguimos traçar uma relação direta entre a Relação de Girard e o Triângulo de Pascal.

[6]A denominação **Fórmula de Bhaskara** foi dada em homenagem ao matemático **Bhaskara Akaria**, considerado o mais importante matemático indiano do século XII.A fórmula de Bhaskara é principalmente usada para resolver equações quadráticas de fórmula geral $ax^2+bx+c=0$, com coeficientes reais, com $a \neq 0$ e é dada por: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Denominamos de discriminante: $\Delta = b^2-4ac$. Através de tal fórmula podemos deduzir uma expressão para a soma (S) e o produto (P) das raízes da equação do 2º grau.

4.6.1
Relações de Girard numa equação polinomial do 2° grau

Consideremos o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c contidos no Universo Complexo, $a \neq 0$ e r_1 e r_2 suas raízes. Pelo teorema da decomposição de raízes, temos:

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - r_1)(x - r_2)$$

Dividindo-se por a os membros dessa igualdade, temos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \equiv (x - r_1)(x - r_2)$$

O que equivale a:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2$$

Pela identidade acima descrita, temos:

$$\begin{cases} -(r_1 + r_2) = \dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Assim, temos que $r_1 + r_2$ é a combinação de duas raízes tomadas 1 a 1 cujo valor é explícito pelo número binomial $\binom{2}{1}$ e $r_1.r_2$ é a combinação de duas raízes tomadas duas a duas que da mesma forma que o caso 1 a 1, pode ser representada pelo número $\binom{2}{2}$.

4.6.2
Relações de Girard numa equação polinomial do 3° grau

Considerando agora o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde a, b, c e d contidos no Universo Complexo e $a \neq 0$ e r_1, r_2 e r_3 as suas raízes. Pelo teorema da decomposição de raízes, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

Dividindo-se os membros por a, obtermos a identidade abaixo:

$$x^3 + \frac{bx}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} \equiv (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

O que equivale a:

$$x^3 + \frac{bx}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3$$

Pela identidade acima descrita, temos

$$\begin{cases} -(r_1 + r_2 + r_3) = \dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \dfrac{c}{a} \\ -r_1r_2r_3 = \dfrac{d}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (r_1 + r_2 + r_3) = \dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \dfrac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Assim, temos que $r_1 + r_2 + r_3$ se organizam por uma combinação das três raízes tomadas 1 a 1 $\binom{3}{1}$, $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$ se organizam segundo a combinação das três raízes tomadas duas a duas $\binom{3}{2}$ e $r_1r_2r_3$ combinação das três raízes, tomadas três a três $\binom{3}{3}$.

4.6.3
Relações de Girard numa equação polinomial de grau *n*

Agora, vamos verificar que as relações de Girard poderão ser aplicadas num polinômio de grau n qualquer. Assim, as combinações das raízes começarão tomadas uma a uma $\binom{n}{1}$ e terminarão tomadas n a n $\binom{n}{n}$.

Para toda equação polinomial de grau n da forma:

$a_n x^n + \; a_{n-1} x^{n-1} + \; a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + \; a_0 = 0$

A soma das raízes é igual a $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, ou seja:

$$r_1 \; + \; r_2 + r_3 + \cdots + r_n = \; \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

A soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas é igual a $\frac{a_{n-2}}{a_n}$, ou seja:

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + \cdots + \; r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

A soma dos produtos das raízes tomadas três a três é igual a $-\frac{a_{n-3}}{a_n}$, ou seja:

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_2 r_5 + \cdots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

E assim por diante, tomando o produto das raízes, quatro a quatro, cinco a cinco, (n – 1) a (n – 1).

Já o produto de todas as raízes é igual a $\frac{(-1)^n a_0}{a_n}$, ou seja:

$$r_1 r_2 r_3 . (\ldots) . r_{n-1} r_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

A organização das raízes quanto às relações de Girard se dão da seguinte forma:

$$\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$

Onde $\binom{2}{1}$ representa a soma das raízes das duas raízes e $\binom{2}{2}$ representa o produto das duas raízes.

$$\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

Onde $\binom{3}{1}$ representa a soma das três raízes (de forma individual), $\binom{3}{2}$ representa a soma das raízes tomadas duas a duas e $\binom{3}{3}$ representa o produto das raízes.

Assim, as Relações de Girard, apresentam parte do Triângulo Aritmético na organização de suas raízes de forma que podemos representar as primeiras linhas como descrito abaixo:

$\binom{2}{1}\binom{2}{2}$ para um polinômio do segundo grau

$\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$ para um polinômio do terceiro grau

$\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$ para um polinômio do quarto grau

$\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$ para um polinômio do quinto grau

4.7
Progressões Aritméticas de ordens diversas

No Ensino Médio, o assunto sequências e progressão é bastante explorado e trabalhado de forma a mostrar uma sequência de números que obedecem um padrão. Temos na proposta desse trabalho, um Triângulo que também obedece a padrões e em seu corpo é possível identificar várias progressões aritméticas de primeira ordem e progressões aritméticas de ordem superior. Nesta seção, abordaremos uma forma do professor mostrar no Triângulo Aritmético, exemplos claros de progressões aritméticas de várias ordens, indicando a dependência da sequência de uma coluna pela sequência de uma coluna anterior.

Segundo PAIVA (2014), Progressão aritmética é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante r.

O número r é chamado de razão da progressão aritmética.

A Progressão aritmética pode ser classificada de três modos distintos: crescente, quando a razão é positiva, decrescente, quando a razão é negativa e constante quando a razão é nula.

É possível ver duas dessas classificações exemplificadas no triângulo de aritmético.

Na primeira coluna temos a PA (1,1,1,1,1,...) que é uma sequência infinita de razão r=0.

Na segunda coluna encontra-se a PA (1,2,3,4,5,...) que é uma sequência infinita de razão r = 1.

Tabela 3: Tabela do Triângulo Aritmético indicando duas PA’s de razão zero e um.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
	↓ PA De R A Z Ã O ZERO	↓ PA De R A Z Ã O UM									

(Fonte: Figura criada pelo mestrando).

No ensino das sequências e progressões no Ensino Médio, pouco se fala sobre progressões de ordem superior. Definiremos essas sequências e exemplificaremos cada tipo a partir do Triângulo Aritmético.

A progressão aritmética de segunda ordem, é uma sequência de números em que as diferença diferenças entre os termos consecutivos formam uma progressão aritmética.

> Define-se para sequências o operador Δ, chamado operador diferença, por $\Delta a_n = (a_{n+1} - a_n)$. Uma sequência a_n é uma progressão aritmética se, e somente se, $\Delta a_n = (a_{n+1} - a_n)$ é constante.
>
> Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência (a_n) na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não-estacionária (LIMA, E. L. et al, 2006, p 8**)**.

A terceira coluna do triângulo aritmético é um bom exemplo disso, pois a sua sequência (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...) é uma progressão aritmética de segunda ordem onde a diferença entre os termos consecutivos $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (2, 3, 4, 5, 6, \dots)$ é uma progressão aritmética onde o primeiro termo $(\Delta a_1) = 2$ e razão r =2.

Tabela 4: Tabela do Triângulo Aritmético indicando uma PA de segunda ordem.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**1**										
1	**1**	**1**									
2	**1**	**2**	**1**								
3	**1**	**3**	**3**	**1**							
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**						
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**					
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**				
7	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**			
8	**1**	**8**	**28**	**56**	**70**	**56**	**28**	**8**	**1**		
9	**1**	**9**	**36**	**84**	**126**	**126**	**84**	**36**	**9**	**1**	
10	**1**	**10**	**45**	**120**	**210**	**252**	**210**	**120**	**45**	**10**	**1**
			↓								
P.A. de segunda ordem											

(Fonte: Figura criada pelo mestrando).

Apenas a título de curiosidade, a sequência acima, foi tema de uma das questões discursivas do vestibular da UERJ (Universidade do Estado do Rio de Janeiro). Veja a questão e sua aplicação:

(UERJ 2013 Exame discursivo – Questão 4)

Na figura, está representada uma torre de quatro andares construída com cubos congruentes empilhados, sendo sua base formada por dez cubos.

Figura 27: Cubos empilhados de acordo com uma PA de segunda ordem.
(Fonte: REVISTA DO VESTIBULAR UERJ.
Disponível em:http://www.revista.vestibular.uerj.br/questao/questão-discursiva.php?seq_questao=1249. Acesso em maio, 2016).

Calcule o número de cubos que formam a base de outra torre, com 100 andares, construída com cubos iguais e procedimento idêntico.

Comentário da questão:

Observando a torre de 4 andares, e lembrando que cada cubo se apoia exatamente em um cubo da camada de baixo, conclui-se que sua base é formada por 1 + 2 + 3 + 4 = 10 cubos.

De acordo com a figura, temos:

1

3 = 1+2

6 = 1 + 2 + 3

10 = 1 + 2 + 3 + 4

Cujos termos descrevem uma PA de segunda ordem. Analogamente, uma torre de 100 andares terá sua base composta por (1 + 2 + 3 + ...+ 100) cubos. Trata-se, portanto, da soma de uma P. A. de 100 termos cujo primeiro termo é 1, e cuja razão é 1, já que a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é igual a 1. Calculando-se essa soma S:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}).100}{2} = \frac{(1 + 100).100}{2} = 101.50 = 5050.$$

Assim, novamente segundo LIMA et al. (2006) podemos dizer que uma progressão aritmética de ordem $k \geq 2$, se define por uma sequência de termos onde as diferenças dos termos consecutivos formam uma progressão aritmética de ordem $k - 1$.

Tabela 5: Tabela do Triângulo Aritmético indicando PA's de ordem superior.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	**1**						
3	1	3	**3**	1					
4	1	4	**6**	4	**1**				
5	1	5	**10**	10	**5**	1			
6	1	6	**15**	20	**15**	6	**1**		
7	1	7	**21**	35	**35**	21	**7**	1	
8	1	8	**28**	56	**70**	56	**28**	8	1
		1ª ordem	**2ª *ordem***	3ª ordem	**4ª ordem**	5ª ordem	**6ª ordem**		

(Fonte: Figura criada pelo mestrando).

Ou seja, cada ordem de uma PA de ordem superior de ordem k, possui uma dependência da PA de ordem k – 1e a coluna k do triângulo representa uma PA de ordem k.

5
Propostas interessantes e interdisciplinares decorrentes do estudo do Triângulo Aritmético

Nesse capitulo, abordaremos uma matemática mais avançada no estudo do Triângulo Aritmético e suas aplicações.

5.1
Juros Compostos

Os juros compostos são uma boa aplicação de Progressão Geométrica. Sua fórmula é composta por uma equação exponencial que leva em consideração o capital inicial (C), a taxa percentual de juros (i) e o período ao qual o juro será exposto (t). Assim, o valor futuro, também conhecido como Montante, pode ser calculado segundo a fórmula: M = C. $(1 + i)^t$.

Uma questão que consegue avaliar bem a relação do teorema binomial para com o Juros compostos é o problema da UFRJ 2010 onde ele propõe a análise do rendimento ao final de um período. Vejamos:

(UFRJ 2010/PROVA 1) "*O binômio de Newton é tão belo como a Vênus de Milo. O que há é pouca gente para dar por isso. óóóó—óóóóóóóóó—óóóóóóóóóóóóóó (O vento lá fora)" (Álvaro de Campos).*
Um capital é aplicado por doze anos e seis meses a juros compostos de meio por cento ao mês. Ao final desse período, o rendimento acumulado será igual, inferior ou superior a 100%? Justifique sua resposta.

[7]No primeiro momento, devemos verificar que doze anos e seis meses é equivalente a 150 meses. Ao aplicarmos à taxa de 0,5 % ao mês, implica em multiplicarmos por 1,005. Vale lembrar que o aumento de 100% é o mesmo que multiplicarmos por 2.

Assim, no regime de Juros Compostos, temos:

M = C.$(1{,}005)^{150}$, onde C é o capital inicial.

O que devemos verificar é se $(1{,}005)^{150}$> 2 ou não.

[7] *Álvaro de Campos é um heterônimo de Fernando Pessoa.*

Utilizando o Binômio de Newton, temos:

$(1{,}005)^{150} = (1 + 0{,}005)^{150} = (1 + \frac{1}{200})^{150} =$

$$\binom{150}{0}.(\frac{1}{200})^0 + \binom{150}{1}.(\frac{1}{200})^1 + \binom{150}{2}.(\frac{1}{200})^2 + \binom{150}{3}.(\frac{1}{200})^3 + \cdots$$
$$+ \binom{150}{150}.(\frac{1}{200})^{150}$$

Claro que seria inviável verificarmos o resultado dos 201 termos desse desenvolvimento, porém, ao verificarmos os valores dos 4 primeiros termos desse desenvolvimento, temos:

$1 + 0{,}75 + \frac{11175}{40000} + \frac{551300}{8000000} + \cdots =$

1 + 0,75 + 0,279375 + 0,0689125 + ... = 2,0982875 + ... > 2

Como os 4 primeiros termos já dão um valor maior que 2, podemos concluir que ao final de 150 meses, o rendimento será superior a 100%.

Esse teorema binomial funciona muito bem para fazermos aproximações. Uma forma simplificada desse teorema, podemos:

$$(1 + x)^n = 1 + n.x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Observe que na forma simplificada:

Se n for um número inteiro e positivo, esta série (soma) tem n+1 termos (parcelas).

Se n for um número real, mas não inteiro positivo, o número de termos da série é infinito (série binomial)

A série converge (se aproxima) para qualquer n se x^2 for menor que 1. Também converge para $x^2 = 1$ se n for positivo.

A série é especialmente útil se o valor absoluto de x for muito menor que 1. Neste caso, cada termo é muito menor que o termo anterior e podemos desprezar todos os termos exceto os dois ou os três primeiros do segundo membro. Assim, se |x| for muito menor que 1, então (1+x)n = 1 + nx aproximadamente.

Logo, usando o exemplo da raiz quadrada de 101, temos:

$\sqrt{101}$ = (101)½ = (100 + 1)½ = (100)½ .(1 + 0,01)½ = 10(1 + 0,01)½

Como, (1 + 0,01)½ = 1 + ½(0,01) = 1 + 0,005 = 1,005

Então, a raiz quadrada de 101 = 10(1,005) = 10,05.

OBS: Usando calculadora, a raiz quadrada de 101 = (101)½ = 10,04987562.

5.2
Números Complexos

Um dos assuntos trabalhados nos anos finais do Ensino Médio são os números complexos. Até boa parte da sua formação básica, o aluno acredita que o conjunto mais abrangente é o conjunto dos números reais, que conteria todos os outros conjuntos, fazendo deles seus subconjuntos. Mas, após o estudo das equações do segundo grau, na fórmula de Bháskara, quando o discriminante é negativo, pode-se fazer um estudo um pouco mais profundo no universo dos números complexos.

A seguir, mostraremos uma forma de abordar o estudo dos números complexos, mais precisamente a forma exponencial do número complexo na forma trigonométrica utilizando a fórmula De Moivre[8].

A chamada forma trigonométrica do número complexo ou forma polar do complexo $z = |z|(cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ quando elevada à uma potência n, possui uma fórmula deduzida por Abraham De Moivre (1667-1754) conhecida como Fórmula De Moivre dada por $z^n = |z|^n(\cos(n.\theta) + i\,\text{sen}(n.\theta))$. Nossa abordagem para esta fórmula será baseada no desenvolvimento binomial $(a + b)^n$.

A expansão binomial

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\ sen(n\theta))^n = |z|^n.\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(\cos\theta)^{n-p}.\,i^p.\,(\text{sen}\,\theta)^p$$

Provando a Fórmula De Moivre:

Para n = 0 ou n = 1, a fórmula é óbvia. Assim, para um valor de *n* maior que 1, a fórmula será uma aplicação da fórmula de multiplicação de complexos.

Assim, provaremos a fórmula de para um n inteiro negativo.

Seja *n* = - *m*, com *m* inteiro e positivo. Temos:

---

[8] Abraham de Moivre foi um matemático francês que ganhou fama pela *Fórmula de De Moivre*, que relaciona os números complexos com a trigonometria, e por seus trabalhos na distribuição normal e na teoria das probabilidades. De Moivre foi o primeiro a usar princípios atuariais e bases científicas para o cálculo de seguros de vida, no ano de 1725. Era huguenote e migrou para a Inglaterra em 1685, com a revogação do Édito de Nantes. Em 1697, foi eleito membro da Royal Society. Foi amigo de Isaac Newton e Edmond Halley. Dentre seus alunos mais notáveis, destaca-se James Dodson.

$$(|z|.[cos\theta + isen\theta])^n = (|z|.[cos\theta + isen\theta])^{-m}$$
$$= \frac{1}{(|z|.[cos\theta + isen\theta])^m}$$
$$= \frac{1.coso + isen0}{(|z|^m.[\cos(m\theta) + isen(m\theta)])}$$
$$= \frac{1}{|z|^m} \times \cos(0 - m\theta) + isen(0 - m\theta)$$
$$= |z|^{-m}.[\cos(-m\theta) + isen(-m\theta)]$$
$$= |\mathrm{z}|^{\mathrm{n}}.[\cos(\mathrm{n}\theta) + \mathrm{isen}(\mathrm{n}\theta)] \blacksquare$$

De acordo com o artigo escrito por TEIXEIRA (2013), os termos de z^n que compõe sua parte real são aqueles onde i^pé real, ou seja, para$i^0 = 1, i^2 = -1, i^4 = 1, i^6 = -1, etc.$ Logo, neste caso, p, que também é a potência do seno, é par. Já temos como calcular $\cos(n\theta)$. Vejamos um exemplo para n = 3:

$$\cos(3\theta) = \binom{3}{0}.cos^3\theta.sen^0\theta - \binom{3}{2}cos^1\theta sen^2\theta$$

$$\cos(3\theta) = cos^3\theta - 3.cos\theta sen^2\theta$$

Podemos reparar que as potências do seno são pares e os sinais dos termos alternam-se devido a potência de i na forma $i^{2k} = \pm 1, com\ k \in IN.$

Os termos de z^n que compões a parte imaginária, são todos onde i^pé um imaginário puro, ou seja, suas potências são ímpares. Logo, nesse caso, como p também é potência de seno, será ímpar. Vejamos agora como calcular $sen(n\theta)$, para n novamente igual a 3.

$$\mathrm{sen}(3\theta) = \binom{3}{1}.cos^2\theta.sen^1\theta - \binom{3}{3}cos^0\theta sen^3\theta$$
$$\mathrm{sen}(3\theta) = 3.cos^2\theta.sen\theta - sen^3\theta$$

Sendo assim, tomado $z = cos\theta\ i\ sen\theta$, temos

$$z^3 = cos3\theta + isen3\theta\ de\ acordo\ com\ a\ fórmula\ De\ Moivre$$
$$z^3 = (cos\theta + isen\theta)^3$$
$$z^3 = \binom{3}{0}.cos^3\theta.sen^0\theta + \binom{3}{1}.cos^2\theta.sen\theta.i + \binom{3}{2}.cos\theta sen^2\theta + \binom{3}{3}cos^0\theta.sen^3\theta.i$$
$$z^3 = cos^3\theta + 3.cos^2\theta.sen\theta.i - 3cos\theta sen^2\theta - sen^3\theta$$
$$z^3 = cos3\theta + isen3\theta \blacksquare$$

A equação polar de uma rosácea de 16 pétalas onde $|z| = sen(8\theta)$ é um exemplo de trabalho com as expressões do tipo $sen(n\theta)$ e $\cos(n\theta)$. O que seria a equação dessa curva em coordenadas retangulares?

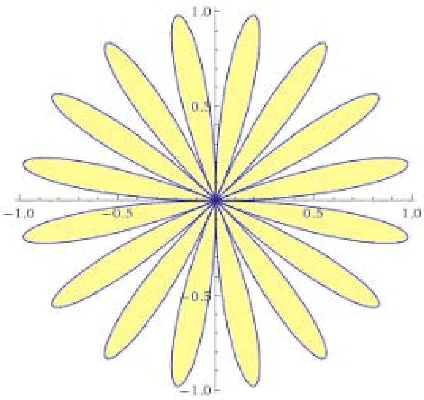


Figura 28: Rosácea de 16 pétalas.
(Fonte: http://elementosdeteixeira.blogspot.com.br/2013/03/109-seno-e-cosseno-de-angulo-multiplo.html).

Para a transformação de uma coordenada polar em retangular, precisamos substituir$|z|^2 = x^2 + y^2$, $sen\theta = \frac{y}{|z|}$ e $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$. Desenvolvendo $|z| = sen(8\theta)$, temos:

$$sen8\theta = 8cos^7\theta sen\theta - 56cos^5\theta sen^3\theta + 56cos^3\theta sen^5\theta - 8cos\theta sen^7\theta$$

Usando as substituições acima,

$$(x^2 + y^2)^9 = \left(8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^{3y^5} - 8xy^7\right)^2$$

Que corresponde à equação para coordenadas retangulares da rosácea de 16 pétalas.

5.3
Trabalhando o Triângulo Aritmético de forma Interdisciplinar

Em biologia, o estudo de genética nos permite avaliar a forma como cada conjunto de genes dos indivíduos é responsável pela determinação de suas características, segundo SOUZA (2016).

Para cada gene é um trecho do DNA que é responsável descreve SNUSTAD e SIMMONS (2008), em última instância, pela produção de proteínas específicas. Chama-se genótipo a constituição genética de cada indivíduo, representada pelos cromossomos herdados por seus genitores. O resultado da expressão gênica é denominado fenótipo. Indivíduos normais recebem um cromossomo de cada tipo de cada um dos pais. Quando os genes do indivíduo são iguais, ele é chamado de homozigoto. E é chamado de heterozigoto quando são diferentes.

Neste caso, há genes classificados como dominantes, onde apenas uma cópia é suficiente para que a característica se apresente na forma fenotípica determinada por este gene. São, convencionalmente, representados por letras maiúsculas. Genes recessivos só são capazes de determinar o seu fenótipo quando em dose dupla.

Como exemplo, podemos utilizar a determinação das cores de ervilhas, como estudada pelo botânico, meteorologista e monge austríaco Gregor Mendel. Analisando ervilhas, nota-se que a cor da casca das sementes pode ser amarela ou verde. Nesta situação, a característica analisada é a cor da casca da semente de ervilha e os fenótipos apresentados são as cores amarela e verde.

Como convencionado, o gene dominante A é responsável pela determinação do fenótipo amarelo e o gene recessivo a, pelo fenótipo verde. Os genótipos possíveis para cada indivíduo seriam AA, Aa e AA, já que, como explicitado acima, cada indivíduo recebe um cromossomo de cada um dos pais e cada gene se localiza em cada um destes cromossomos. Como o gene A é dominante, os indivíduos cujo genótipo são AA (homozigoto dominante) ou Aa (heterozigoto) apresentam o fenótipo determinado pelo gene dominante A, ou seja, apresentam sementes de cor amarela. Já os indivíduos de genótipo aa (homozigoto recessivo) apresentam como fenótipo ementes de cor verde.

Algumas características são determinadas por mais de um par de genes. Quando os genes se localizam em cromossomos distintos, diz-se que são de segregação independente. Isto ocorre, pois, durante o processo de meiose, que permite a formação dos gametas, a separação dos cromossomos de mesmo tipo é completamente aleatória. Com isso, a possibilidade de um indivíduo receber os cromossomos 1 e 2 do pai é a mesma de receber os cromossomos 1 e 2 da mãe, sendo também a mesma de receber o 1 do pai e o 2 da mãe, bem como o 1 da mãe e o 2 do pai.

Na herança quantitativa, dois ou mais pares de genes são responsáveis pela determinação de um fenótipo. Entretanto, neste caso, não importam os tipos de genes que os indivíduos possuam, e sim, a quantidade de genes dominantes de cada indivíduo.

Por exemplo, em uma característica determinada por 4 pares de genes com herança quantitativa, temos 8 genes responsáveis pela determinação do fenótipo. Como cada gene dominante contribui da mesma forma e com efeito aditivo, um indivíduo com genótipo AABBccdd apresentaria o mesmo fenótipo de um indivíduo aaBbCcDD, uma vez que ambos possuem 4 genes dominantes.

Supondo que, no caso acima, cada gene dominante seja responsável por um acréscimo de 25cm na altura de uma planta, os dois indivíduos (AABBccdd e aaBbCcDD) apresentariam a mesma altura, com um acréscimo de 100cm em sua altura (4 x 25cm de cada gene dominante possuído por elas). Ambos seriam mais altos do que uma planta cujo genótipo fosse, por exemplo, AaBbccdd (que só apresentaria um acréscimo de 50cm em sua altura), mas seriam mais baixas do que uma planta de genótipo AABBCCDd, cujo acréscimo na altura seria de 175cm.

Na herança quantitativa, o total de fenótipos para uma característica é igual ao total de genes envolvidos mais 1, com fenótipos variando dos indivíduos homozigotos dominantes para todos os pares de genes (cujo acréscimo no fenótipo é máximo) até os indivíduos recessivos para todos os pares de genes (que não possuem acréscimo no fenótipo).

No exemplo citado, como são participantes 4 pares de genes, somam-se um total de 8 genes e, portanto, 9 fenótipos: um fenótipo para os indivíduos aabbccdd, um para os que apresentam qualquer combinação com apenas 1 gene dominante, um para os que apresentam qualquer combinação para 2 genes dominantes e assim sucessivamente até o fenótipo dos indivíduos AABBCCDD, que possuem todos os genes dominantes.

O cruzamento entre dois indivíduos heterozigotos para todos os pares de genes envolvidos permite a obtenção de descendentes com todas as combinações possíveis de genótipos. Neste caso, a proporção fenotípica esperada é obtida com o triângulo de Pascal, sendo representada pela linha correspondente ao total de fenótipos envolvidos na situação. A probabilidade de cada fenótipo específico ser obtido neste cruzamento também é obtida no triângulo, estando os valores proporcionais dispostos em ordem de número de genes dominantes (de 0 genes dominantes até o número máximo de genes do caso em questão).

Tomando por base o exemplo citado acima, a proporção fenotípica esperada no cruzamento entre heterozigotos seria encontrada na nona linha do triângulo de Pascal, uma vez que são 4 pares de genes determinando o fenótipo:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 2 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Fenótipos: 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Figura 29: Fenótipos no Triângulo de Pascal.
(Fonte: Figura criada pelo mestrando).

Os fenótipos de 0 a 8 representam, respectivamente, o número de genes dominantes em cada valor proporcional.

O número total de combinações possíveis de genótipos neste mesmo cruzamento é igual ao somatório dos valores da proporção fenotípica, o que sempre será igual a 2 elevado ao total de genes. No exemplo mencionado, o total de combinações de genótipos é igual a 256 (ou seja, 28).

Desta forma, se for perguntado, por exemplo, qual a probabilidade deste cruzamento gerar um indivíduo que possua 5 genes dominantes, a resposta seria 56⁄256 (valor proporcional referente aos 5 genes dominantes dividido pelo total de combinações), ou, simplificando, 7⁄32.

5.4
A sequência de Fibonacci apresentada de forma interdisciplinar

No capítulo 3, no último item de Propriedades Binomiais (item g), foi demonstrado que a sequência de Fibonacci aparece no Triângulo de Pascal.

A seguir, apresentaremos um problema enunciado pelo próprio Fibonacci, titulado como ``O PROBLEMA DOS COELHOS``, onde pode ser usado como curiosidade, explicando que na biologia de reprodução dos coelhos, nota-se a sequência no resultado dos cruzamentos.

``Certo homem pôs um casal de coelhos em um lugar totalmente cercado. Quantos casais de coelhos podem ser gerados por esse casal em um ano se supusermos que a cada mês cada casal gera um novo casal, o qual começa a se reproduzir a partir do segundo mês de ida?``

Resolução:

Tabela 6: Primeiro mês cruzamento do casal de coelhos maduros.

Mês	CASAIS MADUROS	CASAIS NOVOS
1	1	0

(Fonte: http://www.uff.br/sintoniamatematica/matematicaenatureza/matematicaenatureza-html/audio-flores-br.html).

Podemos observar na tabela acima que no primeiro mês, apresenta apenas um casal maduro. Já no mês, como mostra a tabela abaixo, temos além deste casal, um novo casal, descendente do primeiro par:

Tabela 7: Segundo mês cruzamento do casal de coelhos maduros.

Mês	CASAIS MADUROS	CASAIS NOVOS
1	1	0
2	1	1

(Fonte: http://www.uff.br/sintoniamatematica/matematicaenatureza/matematicaenatureza-html/audio-flores-br.html).

Partindo para o terceiro mês esses dois casais já se encontram na fase reprodutiva e há ainda um novo casal, nascido do primeiro par:

Tabela 8: terceiro mês cruzamento do casal de coelhos maduros.

Mês	CASAIS MADUROS	CASAIS NOVOS
1	1	0
2	1	1
3	2	1

(Fonte: http://www.uff.br/sintoniamatematica/matematicaenatureza/matematicaenatureza-html/audio-flores-br.html).

Nota-se que para seguir preenchendo a tabela devemos, para cada mês, seguir os seguintes passos:

- Calculamos o número de casais maduros adicionando os casais que já eram maduros anteriormente com aqueles que eram casais novos no mês anterior;
- O número de novos casais a cada mês é exatamente igual ao número de casais maduros no mês anterior.

A tabela a seguir, mostra a sequência reprodutiva após um ano:

Tabela 9: Após um ano de cruzamento do casal de coelhos maduros.

Mês	CASAIS MADUROS	CASAIS NOVOS
1	1	0
2	1	1
3	2	1
4	3	2
5	5	3
6	8	5
7	13	8
8	21	13
9	34	21
10	55	34
11	89	55
12	144	89

(Fonte: http://www.uff.br/sintoniamatematica/matematicaenatureza/matematicaenatureza-html/audio-flores-br.html).

Portanto, em um ano haverá 233 casais de coelhos, sendo que 144 já estarão maduros e 89 serão casais novos. A conclusão para a pergunta de Fibonacci é que o primeiro casal dará origem a outros 232 casais.

Se for observado, a coluna do meio, será encontrada a sequência de Fibonacci.

Um pouco além da sequência de Fibonacci: o número áureo

O que ocorre se dividirmos os números da sequência de Fibonacci por seus antecessores?

1/1 = 1
2/1 = 2
3/2 = 1,5
5/3 = 1,66666666666666...
8/5 = 1,6
13/8 = 1,625
21/13 = 1,615384615384615384...
34/21 = 1,619047619047619047...
55/34 = 1,617647058823529411...
89/55 = 1,618181818181818181...
144/89 = 1,617977528089887640...
233/144 = 1,618055555555555555...
377/233 = 1,618025751072961373...
610/377 = 1,618037135278514588...
987/610 = 1,618032786885245901...
1597/987 = 1,618034447821681864...
2584/1597 = 1,618033813400125234...
4181/2584 = 1,618034055727554179...

Observe que nas últimas divisões os 6 primeiros dígitos permanecem os mesmos: 1,61803. Se você continuar dividindo o resultado vai se aproximar cada vez mais de um número irracional chamado de razão áurea (ou número de ouro) e denotado pela letra grega phi:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749894848\ldots$$

Figura 30: O número de ouro.
(Fonte: http://www.uff.br/sintoniamatematica/matematicaenatureza/matematicaenatureza-html/audio-flores-br.html).

6
Conclusão

O conteúdo apresentado teve como objetivo trazer o Triângulo Aritmético como uma ferramenta didática aos alunos do ensino básico. Ainda que pouco usado em sala de aula, o mesmo apresenta uma infinidade de aplicações como pôde ser visto neste trabalho.

Ainda hoje, temos no currículo da educação básica uma deficiência em trabalhar com metodologias diferentes das convencionais e trabalhos interdisciplinares. Contudo, o trabalho se apresentou como uma proposta de reinventar conceitos antigos para tonar as aulas mais interessantes e didáticas.

O professor ao trazer, sempre que possível, o contexto histórico do assunto para sala de aula, acrescenta conhecimento e qualidade na instrução dos seus aprendizes.

Assim, acredito que esse trabalho possibilite ao professor ter um novo olhar sobre os assuntos abordados e adote essas novas metodologias sempre que tiver oportunidade para tornar assim, suas aulas mais atraentes despertando com isso, o interesse nos seus alunos a buscar um novo horizonte de informações.

Finalizo com a seguinte frase do matemático Blaise Pascal:

“O homem é feito visivelmente para pensar; é toda a sua dignidade e todo o seu mérito; e todo o seu dever é pensar bem”.

Referências bibliográficas

AFFONSO, Alexandre. **O Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.** PROFMAT. UFF, Niterói, 2014; 49p.

BRASIL ESCOLA. **Binômio de Newton.** Disponível em: http://brasilescola.uol.com.br/matematica/binomio-de-newton.htm Acesso em: 01 de julho, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12574). Acesso em abril, 2016.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Ed. Edgard Blucher LTDA; 2ª Ed, 1996. 495p.

COTA, Wesley. **Fibonacci, Parte 1: A sequência de Fibonacci e os coelhos.** Blog Wesley Cota desenvolvimento, programação e tecnologia, 2012. Disponível em: http://blog.wesleycota.com/fibonacci-parte-1-sequencia-de-fibonacci-e-os-coelhos/. Acesso em: 06 de julho, 2016.

DUARTE, Amanda. **Binômio de Newton.** Estudo Prático, 2014. Disponível em: http://www.estudopratico.com.br/binomio-de-newton/. Acesso em: 30 de junho. 2016.

INSTITUTO BLAISE PASCAL: Tecnologia e Educação. **Blaise Pascal.** Disponível em: http://www.institutopascal.org.br/visao/institucional/blaise-pascal.php Acesso em: 06 de julho, 2016.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção Professores de Matemática, Ed. SBM; 6ª Edição; Vol. 2. Rio de Janeiro, 2006.

MATEMÁTICA DIDÁTICA. **Triângulo de Pascal.** Disponível em: http://www.matematicadidatica.com.br/TrianguloDePascal.aspx Acesso em: 02 de julho, 2016.

MATEMÁTICA NA VEIA. A história do Triângulo Aritmético: Parte II. Disponível em: http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/02/historia-do-triangulo-aritmeticoparte.html. Acesso em junho, 2016.

MATEMÁTICA UFMG. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/. Acesso em: maio, 2016.

MELO, Priscila. **Produtos Notáveis.** Estudo Prático: 2014. Disponível em: http://www.estudopratico.com.br/produtos-notaveis-definicao-tipos-de-produtos-e-exemplos/. Acesso em março, 2016.

MORGADO, Augusto César et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Coleção Professores de Matemática, Ed. SBM; 9ª Edição. Rio de Janeiro, 2006.

OLIVEIRA, Louraine de Paula. **Teorema do Binômio de Newton. Triângulo de Pascal.** UNICAMP; IMECC. Abril, 2014.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática Paiva.** Ed. Moderna; Vol. 3, São Paulo, 2014.

REVISTA DO VESTIBULAR UERJ. Disponível em: http://www.revista.vestibular.uerj.br/questao/questão-discursiva.php?seq_questao=1249 Acesso em: maio, 2016.

RUIZ, Rogério Lacaz et al. **Blaise Pascal: O homem e a ciência.** Ver Ética e Filosofia Política; nº 12, Vol. 1, 2010. 43p.

SILVA, Mariluce Oliveira de. **Do Triângulo à Pirâmide de Pascal.** PROFMAT. UESC, Bahia, 2015. 53p.

SILVA, Salatiel Dias da. **Estudo do Binômio de Newton.** PROFMAT. UFPB. João Pessoa – PB, 2013. 70p.

SOUZA, Anderson Marques de. **Fundamentos da Genética.** Disponível em: file:///C:/Users/lidiane/Downloads/fundamentos_genetica_3ano.pdf. Acesso em: 28 de agosto, 2016.

SNUSTAD, D. Peter; SIMMONS, Michael J. **Fundamentos da Genética.** 6ª ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2008.

TEXEIRA, Aloisio. **Seno e Cosseno de Ângulo Múltiplo.** Disponível em:http://elementosdeteixeira.blogspot.com.br/2013/03/109-seno-e-cosseno-de-angulo-multiplo.html Acesso em: 01 de julho, 2016.

SODRE, Ulysses; TOFFOLI, Sonia F.L. **A Sequência de Fibonacci.** Disponível em: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm Acesso em: 28 de junho, 2016.

UFF. Matemática: Número e operações. **Flores e a sequência de Fibonacci.** Disponível em: http://www.uff.br/sintoniamatematica/matematicaenatureza/matematicaenatureza-html/audio-flores-br.html. Acesso em: 10 de agosto. 2016.

URPIA, Luciano. **Morte de Blaise Pascal.** Morte na história, 2010. Disponível em http://mortenahistoria.blogspot.com.br/2011/07/morte-de-blaise-pascal.html Acesso em: 06 de julho. 2016.

VEM QUE TE EXPLICO. **Números.** Disponível em: http://vemqueteexplico.blogspot.com.br/2012/01/numeros.html. Acesso em: abril, 2016.