

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**GEODÉSICAS: SUAS EQUAÇÕES E ALGUMAS
APLICAÇÕES**

Ariana Cordeiro de Amorim Matos

Feira de Santana
agosto de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GEODÉSICAS: SUAS EQUAÇÕES E ALGUMAS
APLICAÇÕES

Ariana Cordeiro de Amorim Matos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Msc. Cristiano Henrique Mascarenhas

Feira de Santana
19 de agosto de 2016

Ficha catalográfica: Biblioteca Central Julieta Carteado

Matos, Ariana Cordeiro de Amorim
A543g Geodésicas: suas equações e algumas aplicações./ Ariana Cordeiro de Amorim
Matos. Feira de Santana, 2016.
61f.: il.

Orientador: Cristiano Henrique Oliveira Mascarenhas
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Feira de
Santana. Departamento de Ciências Exatas, 2016.
1. Geometria diferencial. 2. Curvas. 3. Curvatura geodésica.
I. Mascarenhas, Cristiano H. Oliveira. II. Universidade Estadual de Feira de Santana.
III. Título.

CDU : 514.752.6



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DA DISCENTE ARIANA CORDEIRO DE AMORIM MATOS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos dezenove dias do mês de agosto de dois mil e dezesseis às 14:00 horas no LEMA - Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título “**Geodésicas: suas equações e algumas aplicações.**”, da discente **Ariana Cordeiro de Amorim Matos**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (Orientador, UEFS), Kátia Silene Ferreira Lima Rocha (UFRB) e Claudiano Goulart (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 19 de agosto de 2016.

Prof. Me. Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (UEFS)
Orientador

Profa. Dra. Kátia Silene Ferreira Lima Rocha (UFRB)

Prof. Dr. Claudiano Goulart (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Aos meus amigos irmãos, Amarildo Lima e José William (Zé Peu), pelo incentivo, carinho, amizade, por acreditarem comigo que seria possível, e me mostrarem que esse título tão desejado não foi a melhor coisa que o PROFMAT me deu.

Agradecimentos

A Deus, por estar sempre me guiando, abençoando, de onde nunca me falta forças necessárias para vencer as dificuldades da vida, pois me dá a sabedoria para escolher trilhar os melhores caminhos.

Ao meu esposo Luciano e minha filha Glenda pelo carinho, amor, compreensão, por me darem forças e ser motivação para prosseguir em todas as minhas lutas, e conseguir vencê-las.

Aos meus pais Ramos e Mery por fazerem de todas as minhas lutas, suas lutas. Por estarem sempre ao meu lado, por serem responsáveis por tudo o que sou. É a minha irmã Adriana por estar sempre pronta a ajudar, no que preciso.

Aos meus professores do PROFMAT pela colaboração, incentivo, e principalmente pelos ensinamentos tão importantes para minha formação.

Aos meus colegas do curso (PROFMAT), alguns em especial pois se tornaram mais que colegas, Joilma, Rosipléia, Anatólia, Rosivaldo, Tênivam, e todos os outros pelo carinho de sempre, obrigado por vibrarem comigo a cada vitória, porque sabem como ninguém a importância de cada passo dado nessa jornada.

Ao meu colega de graduação, amigo, cumpadre, irmão Dilcesar Dantas pelo apoio, incentivo e ajuda para concretização desde trabalho.

À capes, pelo apoio financeiro (bolsa de estudos).

Em especial ao meu professor orientador Cristiano Mascarenhas pelo apoio, ensinamentos, paciência, disponibilidade, sempre buscando o melhor para construção desse trabalho. Serei eternamente grata, a você todo o meu respeito e admiração. Deus o abençoe.

Resumo

A finalidade deste trabalho foi estudar de modo detalhado o conceito de geodésica sobre superfícies regulares $S \subset \mathbb{R}^3$, analisando suas principais características analíticas. Vimos que as geodésicas são intrínsecas, isto é, dependem apenas da 1ª Forma Fundamental, ou de forma equivalente são preservadas por isometria. Outra propriedade destacável das geodésicas é que elas são curvas que minimizam localmente distâncias entre dois pontos de uma superfície.

Palavras-chave: Curvas, superfícies, curvatura, curvatura geodésica, menor caminho.

Abstract

The aim of this work was study in great details the concept of geodesics on surfaces $S \subset \mathbb{R}^3$, analyzing its mainly analytical characteristics. We saw that geodesics are intrinsics, that's, depends only on the coefficients of first fundamental form, or the same way, are preserved by isometry. Another outstanding property of geodesics is that its are curves which minimize locally distances between two points on a surface.

Keywords: Curves, surfaces, curvatures, curvature geodésic, shortest path.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Agradecimentos | i |
| Resumo | iii |
| Abstract | v |
| Sumário | 1 |
| Introdução | 3 |
| 1 Curvas no Espaço | 5 |
| 1.1 Curvas parametrizadas regulares | 5 |
| 1.2 Curvatura e Fórmulas de Frenet-Serret | 12 |
| 2 Superfícies regulares | 17 |
| 2.1 Parametrização, curvas coordenadas e vetor tangente | 17 |
| 2.1.1 Curvas Coordenadas | 22 |
| 2.1.2 Plano Tangente | 24 |
| 2.2 Primeira forma fundamental | 26 |
| 2.3 Segunda forma fundamental | 33 |
| 2.4 Curvaturas na superfície | 36 |
| 2.4.1 Curvatura normal | 36 |
| 3 Geodésicas | 39 |
| 3.1 Equações Geodésicas | 44 |
| 3.2 Preservação da Geodésica por Isometria | 50 |
| 3.3 Geodésicas e as equações de Euler-Lagrange | 51 |
| 3.4 O menor caminho | 52 |
| 3.4.1 Exercícios propostos | 54 |
| 3.4.2 Aplicações | 58 |
| 4 Considerações Finais | 61 |
| Referências Bibliográficas | 63 |

Introdução

Matematicamente, a noção de geodésica modela em um certo sentido a resposta a uma pergunta natural: qual é a curva que liga dois pontos em um espaço por arcos cujo comprimento é o menor possível? Essa pergunta já era formulada pelos gregos antigos que deduziram a partir de observações astronômicas que a terra devia ser redonda. A geometria clássica, no plano, estuda com grandes detalhes relações entre pontos, retas e círculos. Consequentemente, a noção de "retidão" (uma noção global) e o conceito de círculo (uma curva definida por uma propriedade global) não faz sentido na teoria local das superfícies.

Euclides definiu uma reta como um objeto sem largura alguma e uma linha reta como "uma linha a qual encontrava-se uniformemente com os pontos sobre si mesma".

Estas definições não nos ajudam a generalizar o conceito de uma linha reta para uma superfície geral. Contudo, é sabido que dados dois pontos P e Q em \mathbb{R}^n , um segmento de reta conectando P a Q fornece o caminho de menor distância entre estes dois pontos.

Sob uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^n$ que não é plana, mesmo a noção de distância em S entre dois pontos P e Q possui uma dificuldade, desde que não podemos assumir que uma linha reta conectando P a Q estará contida em S . No entanto, como dispomos do conceito de comprimento de arco é possível falarmos de comprimento de curvas; podemos definir a distância sobre S entre P e Q como:

$$\inf \{ \text{comprimento de } \alpha : \alpha \text{ é uma curva sobre } S \text{ conectando } P \text{ e } Q \}.$$

Assim podemos tomar uma primeira formulação intuitiva do conceito de "retidão" sobre uma superfície regular S a seguinte: Uma curva α sobre S é "reta" se para todos os pares de pontos sobre α , o comprimento de arco entre dois pontos P e Q é igual a distância \widehat{PQ} entre eles.

Neste trabalho desenvolvemos um estudo detalhado sobre geodésicas, que são curvas especiais sobre as superfícies, e que generalizam no ambiente \mathbb{R}^3 o conceito de retidão, além de também estar diretamente relacionada àquelas curvas que minimizam (em um certo sentido) distâncias entre pontos de uma superfície entre quaisquer outras curvas situadas na superfície em estudo.

Capítulo 1

Curvas no Espaço

Iniciaremos o capítulo com um pensamento primário do que seja uma curva nos diferentes ramos da geometria, para que a partir desse possamos entender melhor a definição que se encaixa no que pretendemos trabalhar. No entanto, a medida que o texto se desenvolve o leitor poderá notar a predileção pela geometria diferencial com a utilização da base do cálculo diferencial e integral que é o foco para o desenvolvimento do trabalho. Para tanto, estudaremos as curvas parametrizadas regulares no espaço euclidiano, conceituando elementos como vetor tangente, curvatura e triedro de Frenet-Serret. Caso o leitor queira aprofundar-se nas definições utilizadas neste capítulo, poderá consultar as referências [1], [3], [5], [7], [10] e [11].

1.1 Curvas parametrizadas regulares

Intuitivamente, pensar numa curva como um subconjunto de dimensão 1 é o que gostaríamos de fazer, como por exemplo, desenhar figuras com um único traço, sem tirar o lápis do papel (Figura: 1.1).



Figura 1.1: Curva a mão. Fonte: Google imagens

Podemos dizer de forma mais axiomática que curva é uma deformação contínua de um intervalo, ou até mesmo, a trajetória descrita por uma partícula no plano.



Figura 1.2: Exemplos de curvas. Fonte: Google imagens

A geometria analítica, traduz em equações o lugar geométrico dos pontos que verificam certas condições, ou seja, o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, que satisfazem uma equação do tipo $F(x, y, z) = 0$. Daremos então uma definição de curva, que não despreze a representação por funções, mas também, que a considere um subconjunto do \mathbb{R}^3 (que nos interessa no momento). No entanto, algumas restrições serão feitas, em relação ao conceito de curvas, quanto à classe de diferenciabilidade e a não nulidade da derivada primeira por serem importantes para a definição de objetos da geometria diferencial.

Definição 1.1.1. *Um subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ é uma curva se existir uma aplicação $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $\alpha(I) = \mathcal{C}$.*

A definição permite pensar numa curva \mathcal{C} como sendo um pedaço de reta deformado por uma aplicação α , conhecida como uma aplicação ou uma parametrização para \mathcal{C} .

Definição 1.1.2. *Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação α , de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva e o subconjunto de \mathbb{R}^3 dos pontos $\alpha(t), t \in I$, é chamado **traço da curva** (Figura: 1.3).

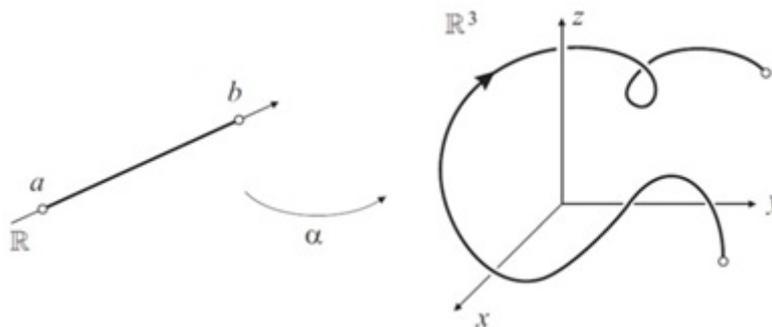


Figura 1.3: Parametrização de uma curva no espaço. Fonte: [10]

Devem observar, pela definição, que uma curva parametrizada no espaço é uma aplicação $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$, onde as funções x, y, z são de classe C^∞ .

Exemplo 1.1.3. A aplicação

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), t \in \mathbb{R}, \text{ com } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço é uma linha reta passando pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e paralela ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ (Figura: 1.4).

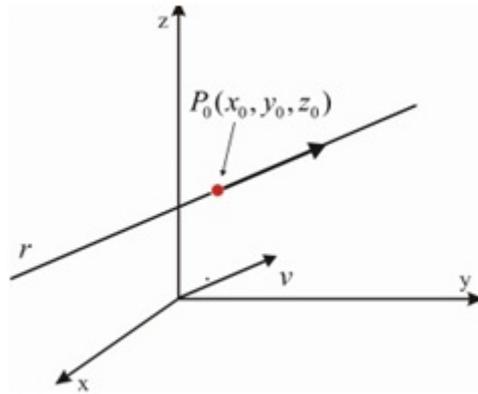


Figura 1.4: reta. Fonte: Google imagens

Exemplo 1.1.4. Seja $a > 0$ uma constante real, a curva cuja equação vetorial é representada por

$$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, at) \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

é uma curva parametrizada diferenciável, cujas formas coordenadas são $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ e $z = at$. Segue claramente que α é uma curva parametrizada diferenciável. Além disso, tem-se que $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$, logo o traço da curva está contido no cilindro circular $x^2 + y^2 = r^2$. Como $z = at$ com $a > 0$, a curva faz uma espiral para cima ao redor do cilindro a medida que t aumenta. Essa curva é chamada de hélice circular (Figura: 1.5).

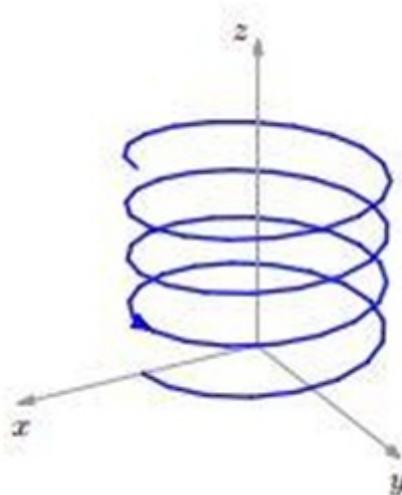


Figura 1.5: hélice circular. Fonte: Google imagens

Exemplo 1.1.5. A curva de Viviani formada pela intersecção do cilindro $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e que se pode parametrizar por

$$\alpha(t) = a(1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(\frac{t}{2}))$$

Também é um exemplo de curva parametrizada diferenciável (Figura: 1.6)

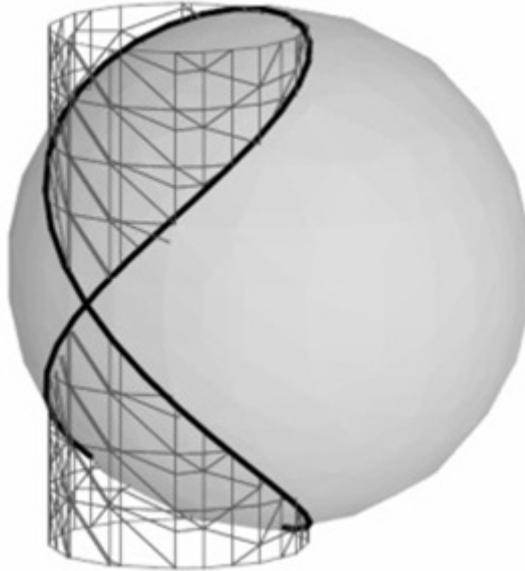


Figura 1.6: Curva de Viviani. Fonte: Google imagens

Definição 1.1.6. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável que, a cada $t \in I$, associa $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ é chamado **vetor tangente** a α em t .

Esta definição nos trás uma noção intuitiva de um vetor tangente a uma curva que ocupa a posição limite quando $p \rightarrow p_0$ da reta por eles determinada.

Assim se α é uma curva parametrizada, tomando $\alpha(t) = p_0$ e $\alpha(t+h) = p$ para $t \in I$ fixado, tal que $t+h \in I$, temos que $\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$ é o vetor diferença $\Delta\alpha$ multiplicado pelo escalar $\frac{1}{h}$, assim chegamos exatamente a definição da derivada da função α em t .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}$$

Quando se pensa numa parametrização como a descrição da trajetória C , podemos considerar a velocidade média entre os pontos $\alpha(t_0)$ e $\alpha(\Delta t + t_0)$ como sendo o

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t_0 + \Delta t) - \alpha(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t_0).$$

Assim quando o tempo tende a zero, pode-se pensar na velocidade no instante t_0 , dado pelo limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+t_0) - \alpha(t_0)}{t} = \alpha'(t_0) = v(t_0)$$

Ou seja, $\alpha'(t_0)$ é a velocidade do movimento descrito por α no instante t_0 . Neste caso, designaremos $|\alpha'(t_0)|$ como a velocidade escalar no instante t_0 ; fisicamente podemos pensar em α'' como a aceleração do movimento de uma partícula descrevendo $\alpha(t)$, pois mede a variação de α' .

Definição 1.1.7. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita **regular** se para todo $t \in I$, tem-se $\alpha'(t) \neq 0$

Podemos obter várias curvas regulares que tem o mesmo traço que uma dada curva α . Matematicamente isto é feito usando o conceito de uma função de reparametrização h .

Sejam I e J intervalos abertos de \mathbb{R} , $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável $C^\infty(I)$, cuja derivada de primeira ordem é não nula em todos os pontos tal que $h(J) = I$. Então a função composta

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é uma curva regular, que tem o mesmo traço que α . De fato,

$$\beta(t) = \alpha(h(t)), \text{ logo}$$

$$\beta'(t) = \alpha'(h(t))(h'(t)) \neq 0, \forall t \in J$$

e

$$\beta(J) = \alpha(h(J)) = \alpha(I)$$

A aplicação β é chamada *reparametrização* de α por h . A função h é a *mudança de parâmetro*.

Exemplo 1.1.8. A curva

$$\alpha(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right), s \in \mathbb{R},$$

é a reparametrização da hélice

$$\beta(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

pela mudança de parâmetro

$$h(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}, s \in \mathbb{R}$$

Dada uma curva $\alpha(t)$, saber determinar o comprimento de arco entre os pontos $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ é de extrema importância para nossos futuros cálculos. Seguindo o pensamento de que α descreve um movimento, temos que o vetor velocidade é dado por $\alpha'(t)$. Logo, se $|\alpha'(t)| = 1$, a questão do comprimento é facilmente resolvida, pois, como o módulo do vetor velocidade (velocidade instantânea) é unitário, quer dizer que em cada unidade de tempo percorremos uma unidade de comprimento, sendo assim, o comprimento da trajetória entre os instantes t_0 e t será $|t - t_0|$.

Então o que temos a fazer é encontrar uma reparametrização de α onde $|\alpha'(t)| = 1$.

Definição 1.1.9. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, é dita parametrizada pelo comprimento de arco se, para todo $t_0, t \in I, t_0 \leq t$, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t é igual a $t - t_0$.

Pela definição podemos dizer que

$$\frac{ds}{dt} = v = |\alpha'(t)| \Rightarrow ds = |\alpha'(t)| dt$$

Por integração se obtém:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0$$

Proposição 1.1.10. Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, esta parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se, para todo $t \in I$, tem-se $|\alpha'(t)| = 1$.

Demonstração. Suponhamos α parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos $t_0 \in I$. Consideremos a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada $t \in I$, associa

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

Se $t_0 \leq t$, então, por hipótese,

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0$$

logo, $\frac{ds}{dt} = 1$.

do mesmo modo, se $t \leq t_0$, então

$$\int_t^{t_0} |\alpha'(t)| dt = t_0 - t = -(t - t_0) = -s(t)$$

sendo assim,

$$\begin{aligned} -s(t) &= t_0 - t \text{ (derivando)} \\ -\frac{ds}{dt} &= -1 \end{aligned}$$

então $\frac{ds}{dt} = 1$.

Portanto, para todo $t \in I$, $s(t) = t - t_0$, e $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = |\alpha'(t)|$, concluímos que $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in I$.

Reciprocamente, se $|\alpha'(t)| = 1$, então $\forall t \in I$ com $t_0 < t$ temos:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

logo, pela definição: 1.1.9, α esta parametrizada pelo comprimento de arco. □

Exemplo 1.1.11. A aplicação

$$\alpha(t) = \left(\sqrt{5} \cos \frac{t}{\sqrt{5}}, \sqrt{5} \sin \frac{t}{\sqrt{5}}, \sqrt{5} \right), t \in \mathbb{R}$$

é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, já que $|\alpha'(t)| = 1$

Veremos agora que toda curva regular α admite uma reparametrização β pelo comprimento de arco.

Proposição 1.1.12. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. α é uma curva regular, portanto

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$$

isto é, s é uma função estritamente crescente, tendo em vista que toda função com derivada estritamente positiva em um certo intervalo I , é estritamente crescente. Logo, existe a função inversa de s , $h : J \rightarrow I$. Como para todo $t \in I$, $h(s(t)) = t$, temos que $\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1$, portanto,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Concluimos que, $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, $s \in J$, é uma reparametrização de α e

$$\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds} \right| = \left| \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \right| = 1.$$

Portanto, pela proposição: 1.1.10, β está parametrizada pelo comprimento de arco. \square

Exemplo 1.1.13. *Seja $\alpha(t) = (a \cos \pi t, a \sin \pi t)$. Parametrize α pelo comprimento de arco.*

Solução:

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt \tag{1.1.1}$$

Derivando $\alpha(t)$ temos:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-\pi a \sin \pi t, \pi a \cos \pi t), \text{ logo} \\ \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle &= \pi^2 a^2 \sin^2(\pi t) + \pi^2 a^2 \cos^2(\pi t) = \pi^2 a^2. \end{aligned}$$

Substituindo em (1.1.1), temos:

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\pi^2 a^2} dt = \pi a(t - t_0)$$

Fazendo $t_0 = 0$, sem perda de generalidade, temos que $s = \pi a t$ então $t = \frac{s}{\pi a}$

Tomando

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \alpha(t(s)) = \left(a \cos \pi \left(\frac{s}{\pi a} \right), a \sin \pi \left(\frac{s}{\pi a} \right) \right), \text{ logo} \\ \beta(s) &= \left(a \cos \left(\frac{s}{a} \right), a \sin \left(\frac{s}{a} \right) \right). \end{aligned}$$

Como toda parametrização pelo comprimento de arco é tangente unitária, temos que:

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \left(a \left(\frac{1}{a} \right) - \sin \frac{s}{a}, a \left(\frac{1}{a} \right) \cos \frac{s}{a} \right) \\ \beta'(s) &= \left(-\sin \left(\frac{s}{a} \right), \cos \left(\frac{s}{a} \right) \right), \text{ ou seja } |\beta'(s)| = 1. \end{aligned}$$

1.2 Curvatura e Fórmulas de Frenet-Serret

Nesta seção vamos considerar curvas $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizadas pelo comprimento de arco. Logo, para cada $s \in I$, $\alpha'(s)$ é um vetor unitário, ou seja, a velocidade não varia em valor absoluto, variando apenas na direção. Como a aceleração $\alpha''(s)$ indica a variação da velocidade, que no caso não varia, então $\alpha''(s)$ não tem nenhuma componente paralela a $\alpha'(s)$, o que é verdade pois, se $|\alpha'(s)| = 1$, temos

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = |\alpha'(s)| = 1$$

Daí

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle' = 0$$

usando a regra da derivação do produto escalar temos

$$2 \langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0.$$

Isto é, $\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$ mostrando com isso, que α' e α'' são perpendiculares.

Assim para todo $s \in I$, tal que $\alpha''(s) \neq 0$, é possível definir um vetor unitário na direção de $\alpha''(s)$.

Definição 1.2.1. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Denotando o vetor tangente unitário à curva no ponto $\alpha(s)$ por*

$$t(s) = \alpha'(s),$$

*definimos **curvatura** de α no ponto $\alpha(s)$ por*

$$k(s) = |t'(s)|.$$

Em outras palavras,

$$k(s) = |\alpha''(s)|$$

Definição 1.2.2. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura positiva, dizemos que o vetor*

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$$

*é denominado **vetor normal** a α em s .*

Denotando por $t(s)$ o vetor unitário $\alpha'(s)$ segue que:

$$t'(s) = k(s)n(s)$$

A curvatura de uma curva em um ponto mede a taxa de variação da direção da tangente à curva no ponto; é uma medida de quanto a curva se curva, isto é, o quanto ela difere de uma reta. Para medir a taxa de variação na direção tangente através do vetor tangente à curva, é necessário que o comprimento do vetor tangente seja sempre o mesmo (ou estaríamos medindo também a variação do comprimento do vetor), isto é, a curvatura mede a aceleração de uma partícula que percorre a trajetória da curva com velocidade unitária. (Figura: 1.7)

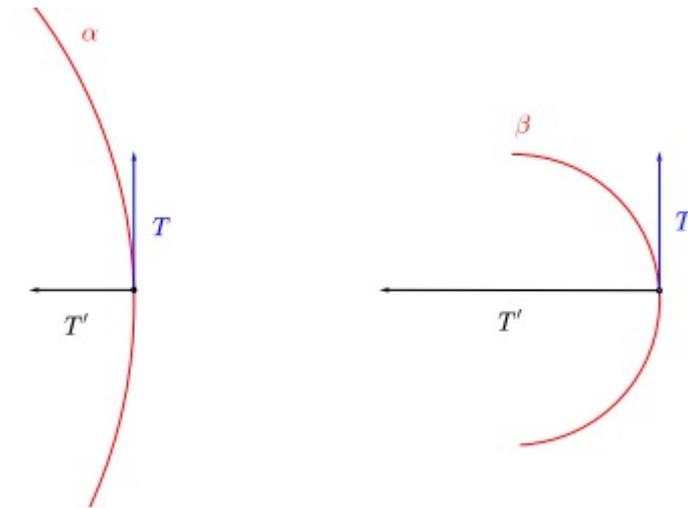


Figura 1.7: β curva-se mais que α . Fonte: [7]

Definição 1.2.3. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. O vetor $b(s) = t(s) \times n(s)$ é chamado **vetor binormal** a α em s .

Sendo assim $t(s), n(s), b(s)$ é uma base ortonormal para o \mathbb{R}^3 . A esse referencial ortonormal chamamos de *triedro de Frenet-Serret*.

Cada par do *triedro de Frenet* determina um plano. O plano de \mathbb{R}^3 que contém $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $t(s)$ é o *plano normal* à curva α em s . O plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $b(s)$ é o *plano osculador*, e o plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $n(s)$ é o *plano retificante* da curva α em s , (Figura: 1.8)

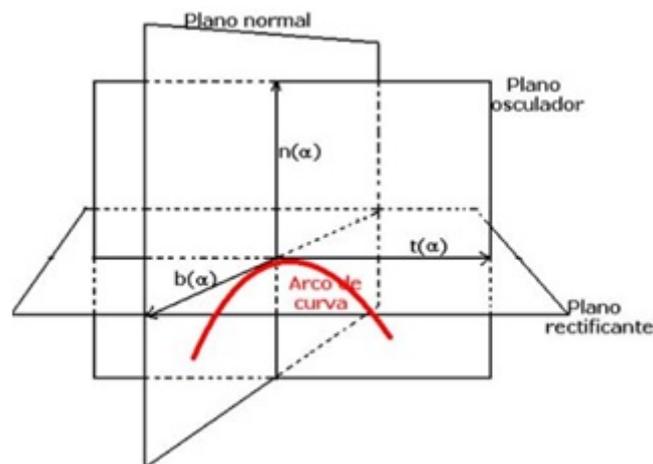


Figura 1.8: planos:osculador, normal e retificante. Fonte: Google imagens

Analisando a figura podemos observar que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$. De fato, se derivamos $b(s) = t(s) \times n(s)$, vamos chegar a seguinte relação

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) = t(s) \times n'(s),$$

uma vez que $t(s)$ é paralelo a $n(s)$ Sendo assim, $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$. Como $|b'(s)| = 1$, temos que $b'(s)$ é ortogonal a $b(s)$. Concluindo que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$, isto é, $b'(s)$

é igual a $n(s)$ multiplicado por um numero real $\tau(s)$, denominado **torção da curva** em s , definido por

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

como $n = b \times t$, temos que:

$$\begin{aligned} n'(s) &= b' \times t + b \times t' \\ &= \tau n \times t + b \times kn \\ &= -\tau b - kt \end{aligned}$$

Assim podemos chegar a conclusão que o Triedro de Frenet-Serret e uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e com curvatura positiva são os vetores $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ que satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{pmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} t'(s) &= 0t(s) + k(s)n(s) + 0b(s) \\ n'(s) &= -k(s)t(s) + 0n(s) - \tau(s)b(s) \\ b'(s) &= 0t(s) + \tau(s)n(s) + 0b(s) \end{aligned}$$

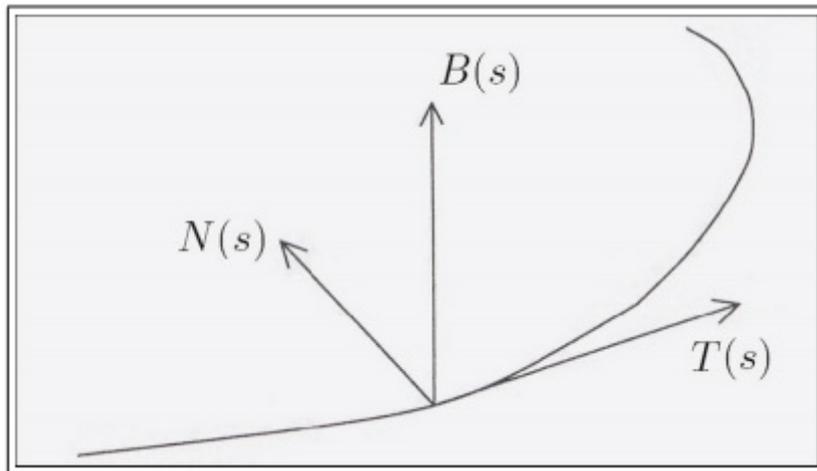


Figura 1.9: Triedro de Frenet-Serret. Fonte: Google imagens

Exemplo 1.2.4. *Obter o triedro de Frenet-Serret, a curvatura e a torção da hélice parametrizada pelo comprimento de arco*

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), s \in \mathbb{R},$$

onde , $a > 0$ é uma constante.

$$\alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right)$$

$$\alpha''(s) = \frac{-a}{a^2 + b^2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

$$k(s) = |\alpha''(s)| = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Portanto,

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right),$$

$$b(s) = t(s) \times n(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -b \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \right),$$

$$b'(s) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right),$$

$$\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Capítulo 2

Superfícies regulares

Seguiremos o mesmo pensamento adotado, quando falamos de curva, para falar de superfícies. Neste capítulo, vamos explorar as propriedades geométricas locais de superfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Conceitos como parametrização, plano tangente, formas fundamentais e isometrias serão tratados, restringindo ao estudo de superfícies que em cada ponto admitem um plano tangente, para isso as referências [1], [3], [5], [8], [10] e [12] dará ao leitor um maior aprofundamento. Assumiremos um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z em \mathbb{R}^3 e vamos considerar a aplicação

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

de duas variáveis u, v que variam em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, onde cada par $(u, v) \in U$, $X(u, v)$ determina um ponto de \mathbb{R}^3 .

2.1 Parametrização, curvas coordenadas e vetor tangente

De forma intuitiva como no caso das curvas, é possível a partir de um segmento de reta obtermos uma curva não reta, isto é, deformando-a. No caso de subconjuntos do \mathbb{R}^3 , podemos imaginar algumas delas como deformações do plano, por exemplo um cilindro, a faixa de Möbius, entre outros, nos darão a noção intuitiva do que chamaremos superfícies.

Definição 2.1.1. *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular, se para cada $p \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ definida num aberto U de \mathbb{R}^2 , tal que:*

i) X é diferenciável. Isto significa que se escrevermos $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U$ as funções de $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens;

ii) X é um homomorfismo. Como X é contínua (por i), isto significa que tem inversa $X^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que também é contínua;

iii) (Condição de regularidade) Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Considerando-se a aplicação $X(u, v)$ definida acima, às variáveis u, v são os parâmetros da superfície. O traço da superfície é o subconjunto S de \mathbb{R}^3 obtido pela imagem da aplicação X . A essa aplicação X , damos o nome de *parametrização local ou sistema*

de coordenadas locais em p (Figura: 2.1). A vizinhança $V \cap S$ é chamada de *vizinhança coordenada de S em p* .

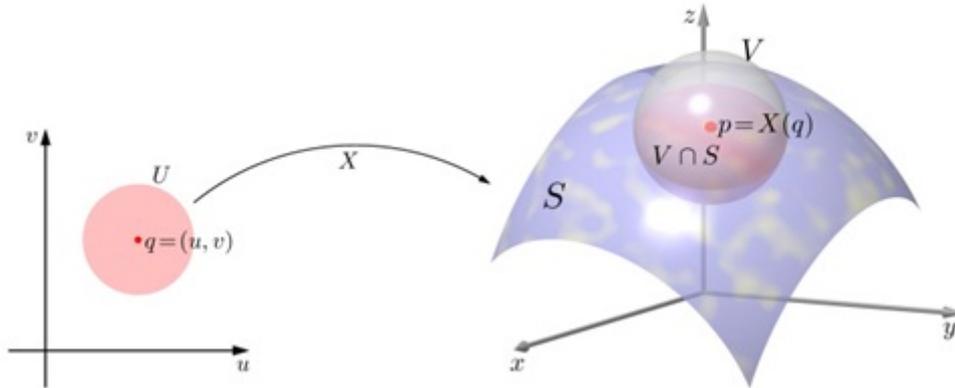


Figura 2.1: Superfície. Fonte: [5]

Observações:

1. A condição **i)** nos permite definir o conceito de plano tangente
2. A continuidade da inversa na condição **ii)** serve para provar que certos conceitos dependem apenas do ponto $P \in S$, isto é, independem da parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ com $P \in V \cap S$.
3. A condição **iii)** garante a existência do plano tangente em todos os pontos de S .

Em **iii)**, temos que $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ são derivadas parciais das componentes de X calculadas no ponto $q = (u_0, v_0)$, que correspondem às colunas da matriz Jacobiana $JX(u, v)$, ou seja, a matriz de aplicação linear nas bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

$$JX(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Por comodidade vamos denotar $\frac{\partial X}{\partial u}$ por X_u e $\frac{\partial X}{\partial v}$ por X_v .

Sendo assim a condição **iii)** (definição: 2.1.1) se equivale às seguintes afirmações:

1. Os vetores da coluna, X_u e X_v , da matriz Jacobiana são linearmente independentes;
2. $X_u \times X_v \neq 0$;
3. A matriz $JX(u, v)$ tem posto 2, ou seja um dos menores determinantes Jacobianos de ordem 2

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

deve ser diferente de zero em $q = (u_0, v_0)$.

Então a condição *iii)* exclui a possibilidade de existir "bicos" em uma superfície regular e assim garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de S . (Figura: 2.2)

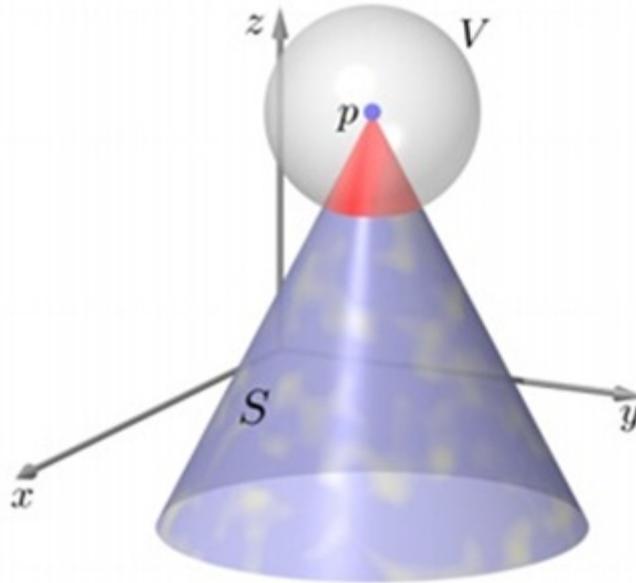


Figura 2.2: O cone S não possui parametrização diferenciável numa vizinhança do vértice p . Fonte: [5]

Exemplo 2.1.2. A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular.

Mostraremos que $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $X_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$, com $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ é uma parametrização de S^2 . Podemos observar que a imagem da parametrização X_1 é a parte aberta de S^2 acima do plano xy . As funções componentes de X_1 são diferenciáveis, já que temos que $u^2 + v^2 < 1$, logo a condição (i) da definição de superfície regular é verificada.

Seja um ponto qualquer $(x, y, z) \in X_1(U) \subset S^2$, com $X_1(U) \subset S^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z > 0\}$ e fizermos $X_1^{-1}(x, y, z) \mapsto (x, y)$ temos u e v bem definidos de maneira única por $u = x$ e $v = y$, logo X_1 é bijetiva. E X_1^{-1} é a projeção de $X_1(U) \subseteq S^2$ em U , que é contínua e verifica a condição ii) da definição de superfície regular.

Para verificar a condição *iii)* basta observar que a matriz Jacobiana

$$JX_1(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -u & -v \\ \sqrt{1 - (u^2 + v^2)} & \sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \end{pmatrix},$$

tem posto 2.

Para cobrir toda esfera devemos utilizar as possíveis parametrizações similares a X_1 e todas essas devem verificar as condições acima, por exemplo $X_2(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$ variando as imagens. (Figura: 2.3)

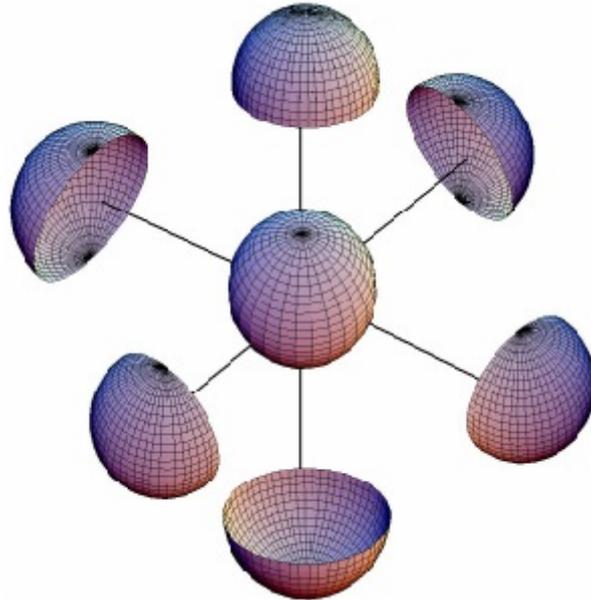


Figura 2.3: Parametrizações locais da Esfera. Fonte: [7]

Assim verificamos que a esfera é uma superfície regular.

Proposição 2.1.3. Se $f(u, v)$ é uma função real diferenciável, onde $(u, v) \in U$, aberto de \mathbb{R}^2 , então o gráfico da aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície regular.

Demonstração. A diferenciabilidade de X decorre do fato de que as funções coordenadas de X são diferenciáveis. A matriz Jacobiana de X é igual a

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}.$$

□

Exemplo 2.1.4. Sejam $P_0 \in \mathbb{R}^3$ e $a, b \in \mathbb{R}^3$ vetores LI. Então o plano

$$\pi = \{p_0 + \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

que passa pelo ponto p_0 e é paralelo aos vetores a e b , é uma superfície regular.

De fato, seja $N = a \times b$ o vetor normal ao plano π . Então

$$\pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - p_0, N \rangle = 0\}$$

Sendo $N = (A, B, C)$, temos que

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz = D\}, \text{ onde } D = \langle p_0, N \rangle$$

Como $N \neq (0, 0, 0)$, temos que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$.

Se $C \neq 0$, por exemplo, π é o gráfico da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$Z = f(x, y) = \frac{D - Ax - By}{C}.$$

Sendo assim, π é uma superfície regular. (Figura: 2.4)

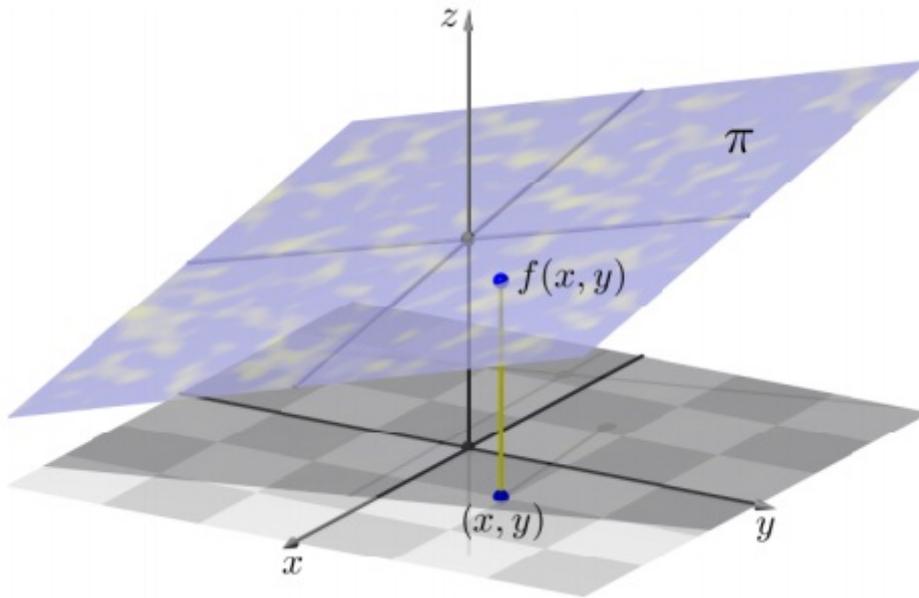


Figura 2.4: O plano π visto como gráfico de $f(x, y)$. Fonte: [5]

Exemplo 2.1.5. *O Parabolóide elíptico*

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\},$$

onde a e b são constantes positivas, é uma superfície regular. (Figura: 2.5)

De fato, $P = \text{Graf}(f)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a função diferenciável dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

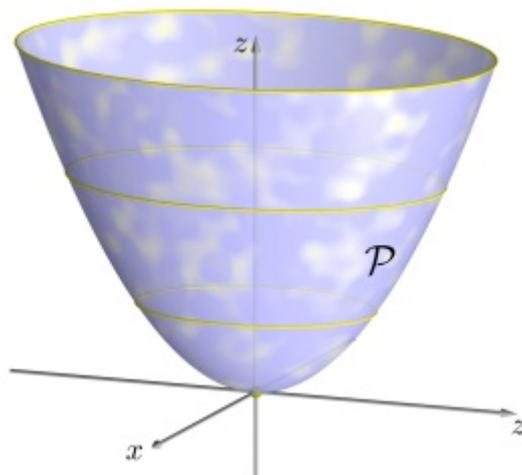


Figura 2.5: Parabolóide Elíptico P gráfico de $f(x, y)$. Fonte: [5]

Exemplo 2.1.6. *O Parabolóide Hiperbólico*

$$H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right\},$$

onde a e b são constantes positivas, também é uma superfície regular. (Figura: 2.6)

Com efeito, H é o gráfico da função diferenciável $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

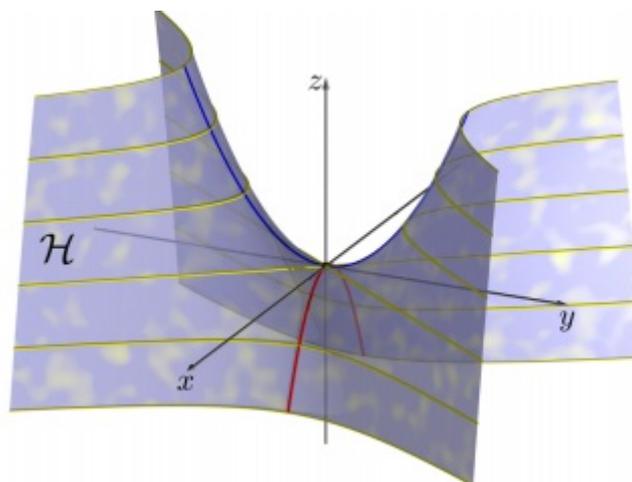


Figura 2.6: Parabolóide Hiperbólico P gráfico de $f(x, y)$. Fonte: [5]

2.1.1 Curvas Coordenadas

As curvas na superfície que se obtém fazendo um dos parâmetros u ou v constante, são chamadas de *Curvas Coordenadas* em uma superfície $X(u, v)$.

Se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização local da superfície, então fixando um ponto $(u_0, v_0) \in U$, as curvas

$$\begin{aligned} u &\longrightarrow X(u, v_0) \\ v &\longrightarrow X(u_0, v) \end{aligned}$$

são as curvas coordenadas de X em (u_0, v_0) . Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são os vetores tangentes às curvas coordenadas (Fig.2.7).

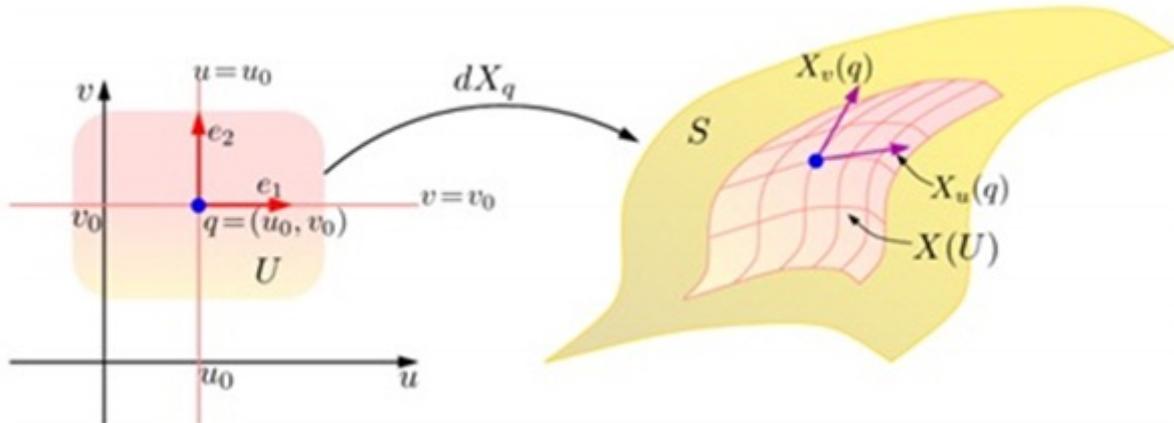


Figura 2.7: Vetores tangentes as curvas coordenadas. Fonte: [5]

Exemplo 2.1.7. Na esfera S^2 as curvas coordenadas com uma certa parametrização $X(u, v)$ são dadas pelos paralelos e pelos meridianos da esfera. (Figura: 2.8)

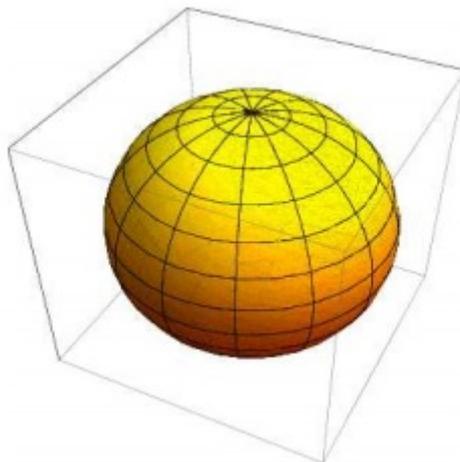


Figura 2.8: curvas coordenadas na esfera. Fonte: [?]

Exemplo 2.1.8. No caso de um cilindro circular reto as curvas coordenadas seguindo uma certa parametrização, são segmentos de retas paralelas ao eixo dos z e círculos paralelos ao plano xy . (Figura: 2.9)

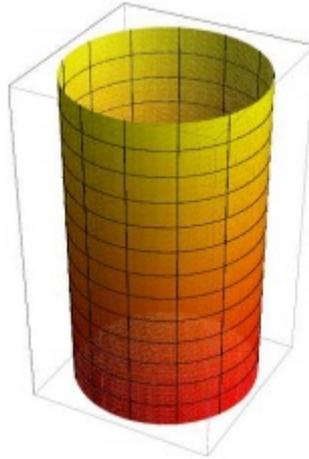


Figura 2.9: curvas coordenadas no cilindro. Fonte: [?]

Exemplo 2.1.9. *No caso da superfície ser o gráfico de uma função f , as curvas coordenadas são obtidas pela interseção dos planos paralelos aos planos coordenados yz e xz com $G(f)$; observe que essas curvas não são necessariamente ortogonais;(Figura: 2.11)*

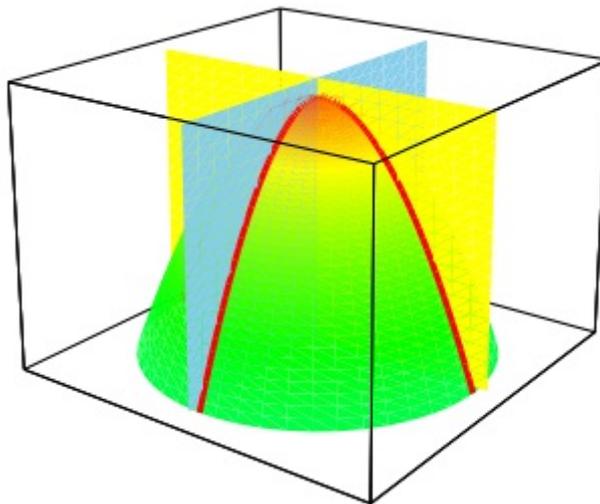


Figura 2.10: superfície sendo o gráfico da função. Fonte: [?]

2.1.2 Plano Tangente

Como já havia mencionado anteriormente a condição *iii*) da definição de superfície regular nos garante a existência de um plano tangente a S em p . Para cada ponto $p \in S$, o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S que passam por p , constituem um plano, que denotaremos por $T_p S$.

Definição 2.1.10. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Dizemos que um vetor v de \mathbb{R}^3 é um **vetor tangente** a S em p se $v = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ é uma curva parametrizada diferenciável de S em 0 e $\alpha(0) = p$.*

Entendemos pela definição que um vetor tangente a S em um ponto $p \in S$ como sendo o vetor $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$.

Sejam:

1. $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, uma parametrização de S ;
2. $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, curva em U ;
3. $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, curva em S passando por p , onde $\alpha = X \circ \beta$.

Se X é uma parametrização de S e β é uma curva de U tal que $\alpha = X \circ \beta$, então esse vetor $\alpha'(0)$ é dado por:

$$\alpha(0) = X \circ \beta(0)$$

$$\alpha'(0) = dX_{\alpha(0)}\alpha'(0) = \frac{d}{dt}(X \circ \beta(0)).$$

Portanto, a derivada dXq mapeia os vetores velocidade de curvas passando por $\beta(0) = q$ em vetores velocidade das suas respectivas imagens em $p = X(q)$. (Figura: 2.11)

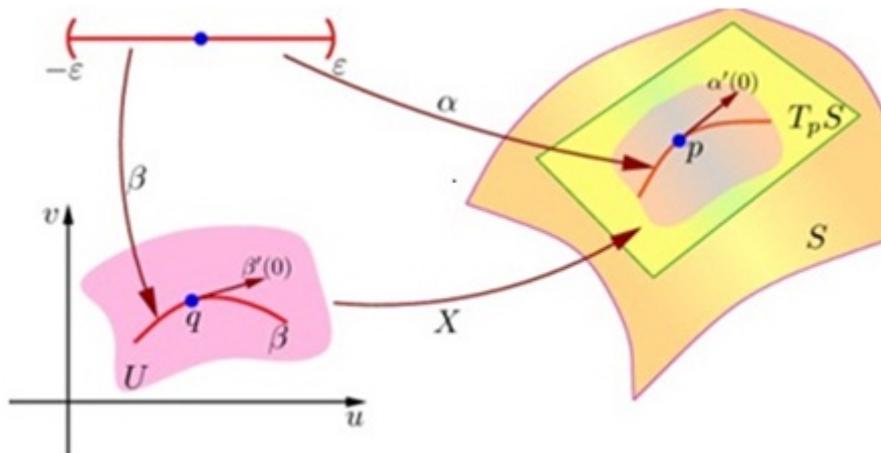


Figura 2.11: Representação da curva diferenciável $\alpha = X \circ \beta$. Fonte: [5]

Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são vetores tangentes a X em (u_0, v_0) , já que são tangentes às curvas coordenadas de X .

Definição 2.1.11. O **plano tangente** a uma superfície regular S em p é o conjunto de vetores tangente das curvas em S passando por p , com $p \in S$, denotado por T_pS .

Proposição 2.1.12. Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma superfície S , contendo um ponto p , e seja (u, v) coordenadas de U . O espaço tangente a S em p é o espaço vetorial de \mathbb{R}^3 gerados pelos vetores X_u e X_v tal que $X(u_0, v_0) = p$.

Demonstração. Seja α uma curva suave em S com

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)).$$

Derivando α , pela regra da cadeia, temos:

$$\alpha'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t)$$

Assim, $\alpha'(t)$ é uma combinação linear dos vetores X_u e X_v .

Por outro lado, qualquer vetor do \mathbb{R}^3 gerado por X_u e X_v é da forma $aX_u + bX_v$ para alguns escalares a e b . Especificando uma curva α por:

$$\alpha(t) = X(u_0 + at, v_0 + bt)$$

temos que α é uma curva suave em $p \in S$, sendo assim,

$$\alpha'(t) = aX_u + bX_v$$

Isso mostra que cada vetor no espaço de S gerado por X_u e X_v é o vetor tangente em p de uma curva de S .

Pela definição de superfície regular, X_u e X_v são vetores linearmente independentes. Portanto, segue-se da proposição anterior que T_pS é um plano de \mathbb{R}^3 , gerado por X_u e X_v .(Figura: 2.12) \square

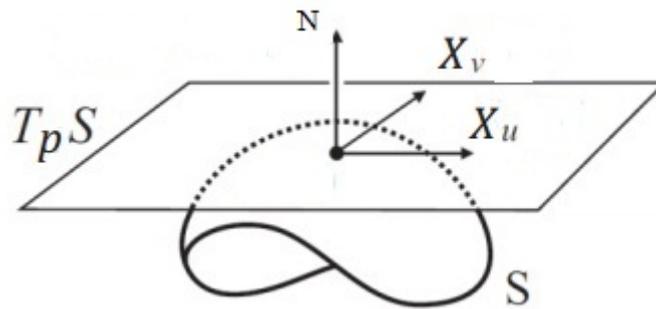


Figura 2.12: O plano tangente T_pS .Fonte: [10]

Definição 2.1.13. Dada uma superfície $X(u, v)$ em um ponto $p \in U \subset \mathbb{R}^3$, dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é **normal** a $X(u, v)$ em p se ele é ortogonal ao plano tangente em p , ou seja, se é ortogonal a todos os vetores tangentes a $X(u, v)$ no ponto p , podemos definir o **vetor normal unitário** N no ponto p por:

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

2.2 Primeira forma fundamental

Medir a distância entre dois pontos de uma superfície, é uma curiosidade geométrica que qualquer habitante dessa superfície desejaria saber. Evidentemente essa distância não será a mesma da medida por um habitante do espaço tridimensional, pois o segmento de reta que dá o caminho mais curto entre dois pontos, geralmente não está contido na superfície.(Figura: 2.13)

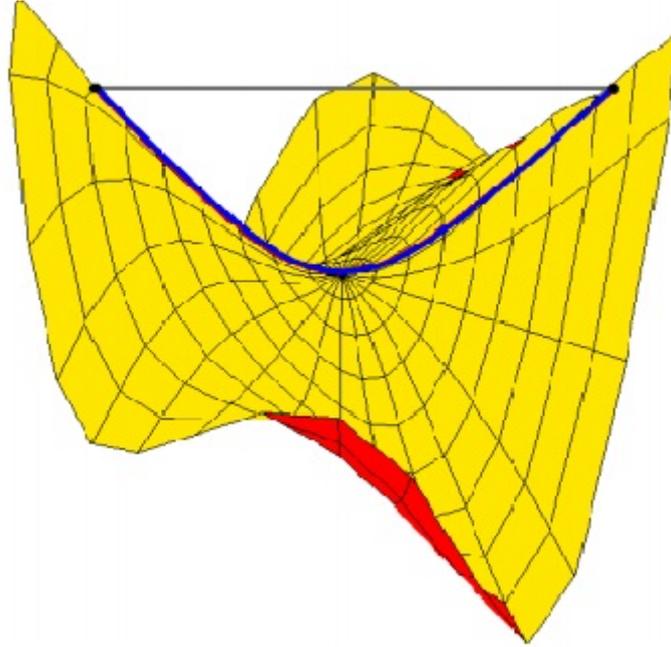


Figura 2.13: distância entre dois pontos na superfície. Fonte: Google imagens

Logo iremos apresentar a primeira forma fundamental, que vai permitir efetuar alguns cálculos geométricos, tais como o comprimento de arcos, ângulos entre curvas e áreas de regiões, sem fazer menção ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 onde a superfície está.

Definição 2.2.1. *Seja S uma superfície regular e $T_p S$ o plano tangente a S no ponto p . A forma quadrática I_p definida por:*

$$I_p : T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0,$$

é chamada de primeira forma fundamental.

Seja $X(u, v)$ uma parametrização local de S em P . Assim podemos construir uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com, $p = \alpha(0)$ e $w = \alpha'(0)$. Aplicando a definição temos,

$$I_p(w) = I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle,$$

como $\alpha'(t) = X(u(t), v(t))$, temos $\alpha'(t) = w = u'X_u + v'X_v$.

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle u'X_u + v'X_v, u'X_u + v'X_v \rangle \\ &= \langle X_u, X_u \rangle (u')^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle u'v' + \langle X_v, X_v \rangle (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

onde $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle$ são denominados coeficientes da primeira forma fundamental na base X_u, X_v de $T_p S$.

Observação 2.2.2. *As funções $E, F, G : U \longrightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^∞ , onde $E(u, v) > 0$, $G(u, v) > 0$ e $(EG - F^2)(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in U$, pois*

$$0 < \|X_u \times X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2,$$

já que X_u e X_v são LI.

Exemplo 2.2.3. O plano π que passa por um dado ponto p e tem a direção dos vetores $w_1 = (a, b, c)$ e $w_2 = (d, e, f)$ unitários e ortogonais é parametrizado por $X(u, v) = p + uw_1 + vw_2$. Logo, $X_u = w_1$ e $X_v = w_2$. Assim

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = 1 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1 \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.4. Seja um cilindro vertical, parametrizado por $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, com $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$

Logo, $X_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ e $X_v = (0, 0, 1)$. Assim

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.5. A esfera S parametrizada em coordenadas esféricas é dada por

$$X(\theta, \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta),$$

com $0 < \theta < \pi$ e $0 < \varphi < 2\pi$.

Logo, $X_\theta = (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ e $X_\varphi = (-r \cos \theta \sin \varphi, r \cos \theta \cos \varphi, 0)$. Assim,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = r^2 \\ F &= \langle X_\theta, X_\varphi \rangle = 0 \\ G &= \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = r^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

A importância da primeira forma fundamental, vem do fato de que conhecendo seus coeficientes, podemos resolver problemas métricos de uma superfície regular sem fazer referência ao ambiente no qual S está mergulhada, como já foi mencionada anteriormente. Conhecendo os coeficientes da primeira forma fundamental de uma curva parametrizada, podemos resolver questões métricas sobre a superfície na vizinhança de um ponto p em S .

Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável da superfície, então, para todo $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento da curva α de t_0 a t_1 é dado por

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_p(\alpha'(t))} dt,$$

logo, se a curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ está contida em alguma vizinhança coordenada de S determinada pela parametrização local X de S em p , então o comprimento dessa curva de t_0 a t_1 é dado por:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(u')^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G} dt.$$

Utilizando a primeira forma fundamental podemos ainda calcular o ângulo θ entre duas curvas parametrizadas regulares $\alpha, \beta : I \rightarrow S$, que se intersectam em $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, que será dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|} = \frac{I_p(\alpha'(t_0) + \beta'(t_0)) - I_p(\alpha'(t_0)) - I_p(\beta'(t_0))}{2\sqrt{I_p(\alpha'(t_0))}\sqrt{I_p(\beta'(t_0))}}.$$

Em particular, se α e β são curvas coordenadas

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u| |X_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

visto que $\sqrt{E} = |X_u|$ e $\sqrt{G} = |X_v|$.

Exemplo 2.2.6. Seja S a esfera de raio r dada no exemplo 2.2.5. Temos os seguintes coeficientes da primeira forma fundamental $E = r^2$, $F = 0$ e $G = r^2 \cos^2 \theta$. Então o comprimento de arco de uma curva contida na esfera é: (Figura: 2.14)

$$\begin{aligned} L(\alpha(t)) &= \int_{t_0}^t \sqrt{E(\theta'(t))^2 + 2F\theta'(t)\varphi'(t) + G(\varphi'(t))^2} dt \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{r^2(\theta'(t))^2 + r^2 \sin^2 \theta (\varphi'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Fixando $\theta = \pi$ e variando $\varphi = t$, com $t \in (0, 2\pi)$, então $\theta'(t) = 0$ e $\varphi'(t) = 1$.

Logo,

$$L(\alpha(t)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cos^2 \pi} dt = r \int_0^{2\pi} dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

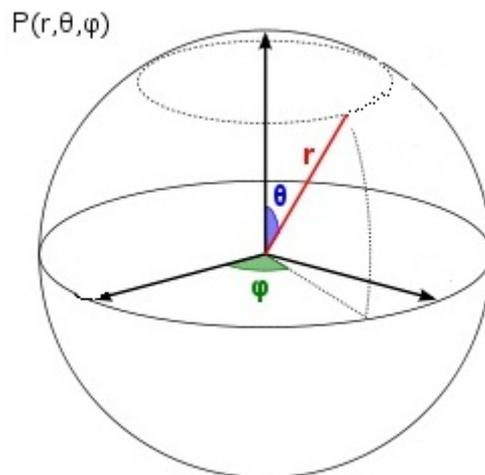


Figura 2.14: Comprimento equador de S . Fonte: [5]

Exemplo 2.2.7. Seja o cilindro vertical, parametrizado por $X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$ que vimos no exemplo 2.2.4. Temos os seguintes coeficientes da primeira forma fundamental: $E = r^2$, $F = 0$ e $G = 1$.

Vamos considerar a curva $\gamma(t)$ contida no cilindro, com $u(t) = t$, $0 < t < 2\pi$ e $v(t) = v_0$ fixo, dessa forma teremos uma circunferência contida no cilindro. (Figura: 2.15)

Seja $v_0 = 0$, então o comprimento de arco é

$$L(\gamma(t)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(u'(t))^2 E + 2u'(t)v'(t)F + (v'(t))^2 G} dt$$

como $u'(t) = 1$ e $v'(t) = 0$ então

$$L(\gamma(t)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

No entanto podemos tomar $u(t) = u_0$ fixo e $v(t) = t$, com $a < t < b$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Assim, $u'(t) = 0$ e $v'(t) = 1$, então

$$L(\gamma(t)) = \int_a^b \sqrt{G} dt = \int_a^b dt = t \Big|_a^b = (b - a)$$

que é o comprimento de um segmento vertical contido no cilindro.

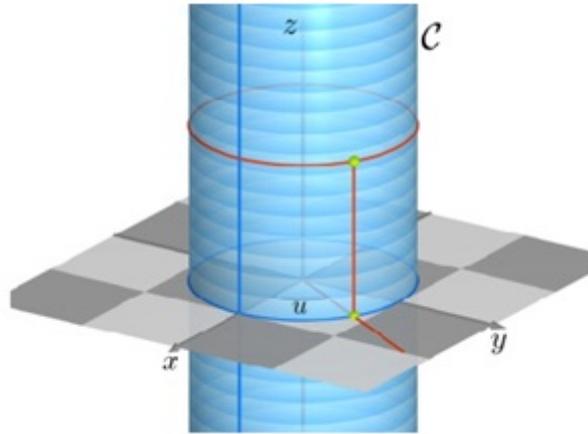


Figura 2.15: cilindro. Fonte: [5]

Nos exemplos 2.2.3 e 2.2.4, podemos perceber que os coeficientes da primeira fórmula fundamental são os mesmos no plano e no cilindro de raio unitário. Isso não é mera coincidência, por enquanto vamos dar apenas uma justificativa geométrica para isso.

Seja uma folha de papel plana, por exemplo, se enrolarmos a folha, obviamente teremos um cilindro, sem deformações. Se traçarmos uma curva na folha plana, depois de enrolada, torna-se uma curva no cilindro e como não houve deformações, o comprimento de ambas as curvas são iguais. (Figura: 2.16)

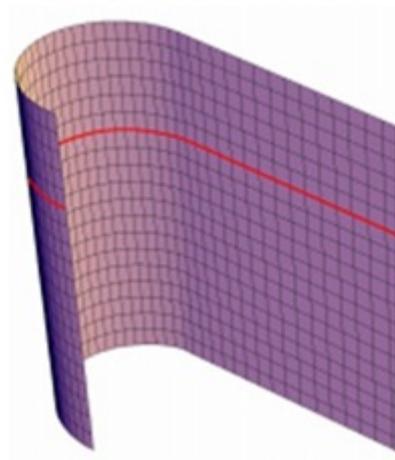


Figura 2.16: Curva no plano transformada numa curva no cilindro. Fonte: [7]

Neste caso a folha foi simplesmente arqueada, tendo modificado apenas sua relação como ambiente em que está inserido, o \mathbb{R}^3 , ou seja, sua característica intrínseca é preservada. Funções que têm a propriedade de conservar elementos geométricos de superfícies

são chamadas de isometrias. No exemplo inicial, dizemos que o plano e o cilindro são isométricos. Passamos agora a definir matematicamente o que sejam as isometrias e algumas de suas propriedades que serão importantes para compararmos duas superfícies. Generalizando o argumento dado acima obtemos um critério para isometrias locais em termos de coordenadas locais.

Definição 2.2.8. Uma aplicação $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ é uma **isometria** se φ é um difeomorfismo e para todo $p \in S$ e todos os pares $w_1, w_2 \in T_p S$ temos $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$. Diz-se que as superfícies S_1 e S_2 são isométricas.

Em outras palavras, φ é uma isometria se a diferencial $d\varphi$ preserva o produto interno:

$$I_p(w) = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \forall w \in T_p S.$$

Definição 2.2.9. Uma aplicação $\varphi : V_1 \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ definida em uma vizinhança V_1 de p , com $p \in S_1$, é uma **isometria local** em p se existe V_2 vizinhança de $\varphi(p) \in S_2$ tal que $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ seja uma isometria.

Proposição 2.2.10. Se existirem parametrizações $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\bar{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{S}$ tais que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ e $G = \bar{G}$ em U então a aplicação $\phi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{X}$ é uma **isometria local**.

Demonstração. Seja $p \in X(U)$ e $v, w \in T_p S$, logo

$$\begin{aligned} v &= v_1 X_u + v_2 X_v \\ w &= w_1 X_u + w_2 X_v \end{aligned}$$

□

Temos que $d\phi_p = d\bar{X}_{X^{-1}(p)} dX_p^{-1}$, logo

$$\begin{aligned} d\phi(p)(v) &= d\bar{X}(X^{-1}(p))(v_1, v_2) = v_1 \bar{X}_u + v_2 \bar{X}_v \\ d\phi(p)(w) &= d\bar{X}(X^{-1}(w))(w_1, w_2) = w_1 \bar{X}_u + w_2 \bar{X}_v \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} I_p(v, w) &= \langle v_1 X_u + v_2 X_v, w_1 X_u + w_2 X_v \rangle \\ &= v_1 w_1 \langle X_u, X_u \rangle + v_1 w_2 \langle X_u, X_v \rangle + v_2 w_1 \langle X_v, X_u \rangle + v_2 w_2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= v_1 w_1 E + (v_1 w_2 + v_2 w_1) F + v_2 w_2 G \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_{\phi(p)}(d\phi(p)(v), d\phi(p)(w)) &= \langle v_1 \bar{X}_u + v_2 \bar{X}_v, w_1 \bar{X}_u + w_2 \bar{X}_v \rangle \\ &= v_1 w_1 \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle + v_1 w_2 \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle + v_2 w_1 \langle \bar{X}_v, \bar{X}_u \rangle + v_2 w_2 \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle \\ &= v_1 w_1 \bar{E} + (v_1 w_2 + v_2 w_1) \bar{F} + v_2 w_2 \bar{G}. \end{aligned}$$

Como $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ e $G = \bar{G}$, então $I_p(v, w) = I_{\phi(p)}(d\phi(p)(v), d\phi(p)(w))$. Logo é isometria local.

Exemplo 2.2.11. Consideremos as seguintes parametrizações locais do catenóide e do helicóide dados, respectivamente por

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av),$$

com $U = (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$ e

$$\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, a\bar{u})$$

com $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \bar{u} < 2\pi, -\infty < \bar{v} < \infty$, respectivamente.

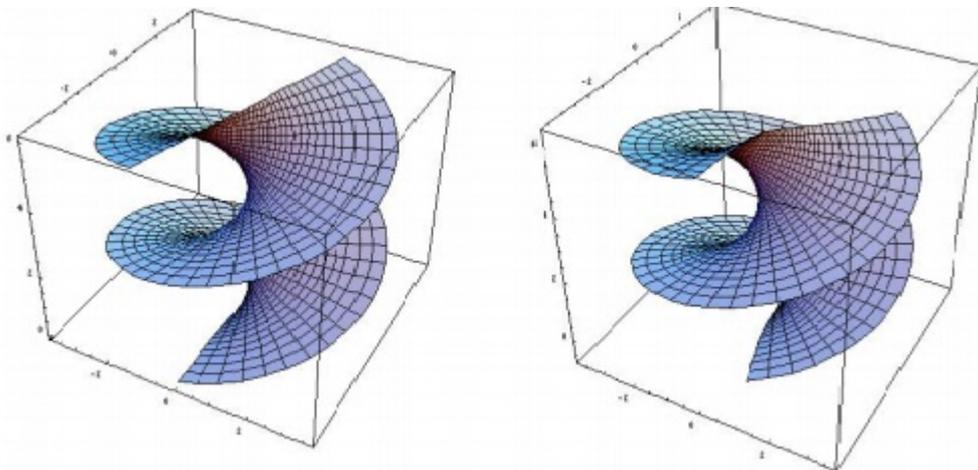
Vamos fazer a seguinte mudança de parâmetros, $\bar{u} = u, \bar{v} = a \sinh v$ com $0 < u < 2\pi$ e $-\infty < v < \infty$. Que é possível, visto que \bar{X} é bijetiva e o Jacobiano é

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh v \end{bmatrix} = a \cosh v,$$

que nunca se anula. Logo, uma nova parametrização do helicóide é $\bar{Y}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au)$. Temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0) \\ X_v &= (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a) \\ \bar{Y}_u &= (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, a) \\ \bar{Y}_v &= (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0). \end{aligned}$$

Então os coeficientes da primeira forma fundamental do catenóide com as respeito à base X_u, X_v e do helicóide com respeito à base \bar{Y}_u, \bar{Y}_v são $E = a^2 \cosh^2 v = \bar{E}$, $F = 0 = \bar{F}$ e $G = a^2 \cosh^2 v = \bar{G}$, logo pela proposição 2.2.10 temos que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos. (Figura: 2.17)



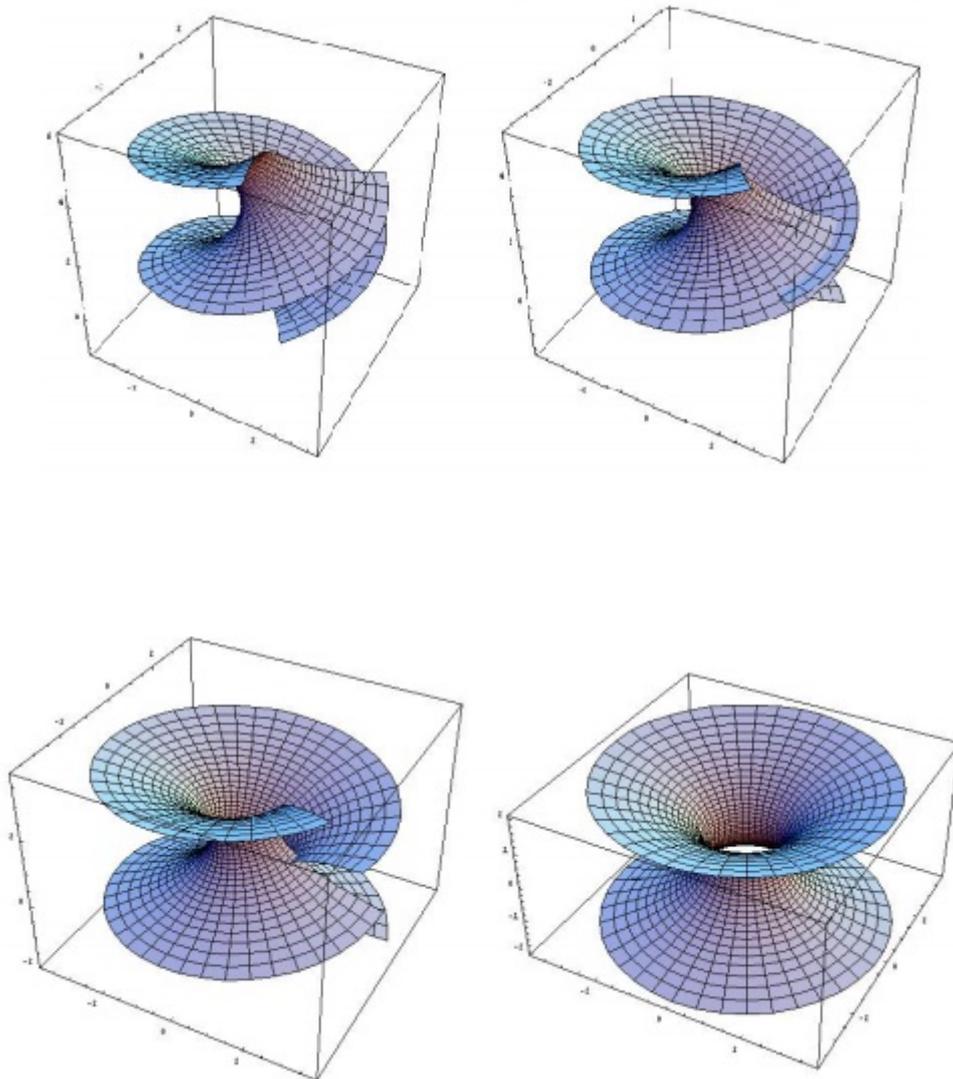


Figura 2.17: Transformação do helicóide no catenóide. Fonte: [7]

2.3 Segunda forma fundamental

Nesta seção definiremos algebricamente a segunda forma fundamental. Como já foi dito anteriormente, as propriedades geométricas locais de uma superfície regular depende de duas formas quadráticas, das quais a primeira já foi definida na seção anterior. A segunda está relacionada ao estudo das curvaturas de curvas da superfície, esta sim, será a sua representação geométrica, que veremos no próximo capítulo.

Definição 2.3.1. *Seja S uma superfície parametrizada regular em \mathbb{R}^3 e $p \in S$, a **segunda forma quadrática** de S em p é uma aplicação $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$II_p(w) = - \langle dN_p(w), w \rangle$$

Vamos calcular a segunda forma fundamental em um vetor $\alpha'(t) \in T_p S$ em uma parametrização local de S em p .

Sejam $X(u, v)$ uma parametrização de S em $p \in S$ e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$. Com visto à simplificação das notações, vamos convencionar que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto p como $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, então $\alpha'(t) = u'X_u + v'X_v$ e

$$(N \circ \alpha)(t) = N(\alpha(t)) = N(u(t), v(t)), \text{ logo}$$

$$dN(\alpha') = N'(u'(t), v'(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como $|N| = 1$, então $N_u \perp N$ e $N_v \perp N$. Portanto, $N_u, N_v \in T_p S$. Desta forma,

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Portanto

$$dN(\alpha') = (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u' + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v'$$

$$= X_u(a_{11}u' + a_{12}v') + X_v(a_{21}u' + a_{22}v')$$

isto é,

$$dN = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

Com isso, podemos perceber que, na base $\{X_u, X_v\}$, dN é dada pela matriz (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$, chamada de *matriz de Weingarten*. Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$II_p(\alpha') = - \langle dN_p(\alpha'), \alpha' \rangle$$

$$= - \langle N_u u' + N_v v', u'X_u + v'X_v \rangle$$

$$= -(u'^2 \langle N_u, X_u \rangle + u'v' \langle N_u, X_v \rangle + v'u' \langle N_v, X_u \rangle + v'^2 \langle N_v, X_v \rangle).$$

Como $\langle N_u, N_v \rangle = \langle N_v, N_u \rangle$ então

$$II_p(\alpha') = -(u'^2 \langle N_u, X_u \rangle + 2u'v' \langle N_u, X_v \rangle + v'^2 \langle N_v, X_v \rangle).$$

Denotando

$$-e = \langle N_u, X_u \rangle,$$

$$-f = \langle N_u, X_v \rangle,$$

$$-f = \langle N_v, X_u \rangle,$$

$$-g = \langle N_v, X_v \rangle,$$

aos quais chamaremos de coeficientes da segunda forma fundamental.

Assim chegamos a seguinte expressão:

$$II_p(\alpha') = eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2$$

Agora vamos encontrar os coeficientes e, f, g (omitindo-se o ponto por simplicidade):

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle \end{aligned}$$

com $N = \frac{|X_u \times X_v|}{\|X_u \times X_v\|}$
 Como visto anteriormente,

$$|X_u \times X_v|^2 = EG - F^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} e &= \frac{\langle X_u \times X_v, X_{uu} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}, \text{ ou seja, } e = \frac{[X_u, X_v, X_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ f &= \frac{\langle X_u \times X_v, X_{uv} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}, \text{ ou seja, } f = \frac{[X_u, X_v, X_{uv}]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ g &= \frac{\langle X_u \times X_v, X_{vv} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}, \text{ ou seja, } g = \frac{[X_u, X_v, X_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned}$$

onde $[\cdot, \cdot, \cdot]$ representa o produto misto de vetores, que podem ser obtidos pelos determinantes das matrizes formadas pelos componentes dos vetores $X_u, X_v, X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}$ na base canônica do \mathbb{R}^3 .

Exemplo 2.3.2. *Seja um cilindro C dado por $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, com $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$. Vamos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental.*

Primeiramente temos que $X_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ e $X_v = (0, 0, 1)$, então

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-\cos u, -\sin u, 0) \\ X_{uv} &= (0, 0, 0) \\ X_{vv} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det(X_u, X_v, X_{uu}) &= \begin{vmatrix} -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\cos u & -\sin u & 0 \end{vmatrix} = -\cos^2 u - \sin^2 u = -1 \\ \det(X_u, X_v, X_{uv}) &= 0 \\ \det(X_u, X_v, X_{vv}) &= 0 \end{aligned}$$

Se os coeficientes da primeira forma fundamental são $E = 1$, $F = 0$ e $G = 1$ então

$$\sqrt{EG - F^2} = 1$$

Portanto os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned} e &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-1}{1} = -1 \\ f &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned}$$

2.4 Curvaturas na superfície

Para definirmos curvatura para superfícies, vamos utilizar definições já vistas anteriormente de curvatura de uma curva. Conceitos como o de curva regular, parametrização por comprimento de arco e curvatura de uma curva serão utilizados nas próximas definições. Para referenciar esse capítulo foi baseado em [1], [2], [3], [5], [7], [9], [10] e [12].

2.4.1 Curvatura normal

Considerando uma curva α parametrizada pelo comprimento de arco e contida em uma superfície regular S , tal que $\alpha(s) = p$, $\alpha'(s)$ o vetor tangente a α em p e $k(s) = |\alpha''(s)|$ a curvatura de α em s . Seja θ o ângulo entre o vetor normal N a S em p , e $\alpha''(s)$.

Definição 2.4.1. A *curvatura normal* definida por α em $p \in S$ é dada por:

$$k_n = k \cos \theta = k \langle n, N \rangle = \langle \alpha''(s), N \rangle \text{ (Figura: 2.18)}$$

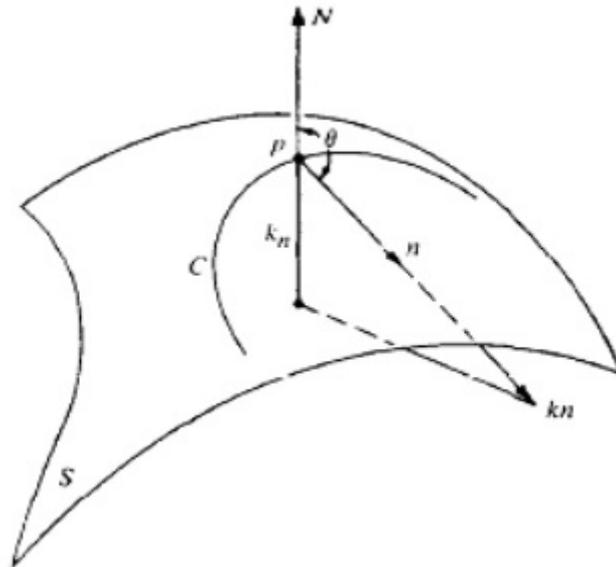


Figura 2.18: Curvatura normal. Fonte: [10]

Observamos assim, que k_n é o comprimento da projeção do vetor $\alpha''(s)$ sobre o vetor normal unitário N à superfície em p . Como k_n dá a componente do vetor curvatura $\alpha''(s)$ de α de acordo com a normal à superfície, para esses vetores colineares, ou seja, se a normal principal à curva α no instante s tiver a direção normal à superfície em $\alpha(s)$, então o valor absoluto de k_n é igual a curvatura de α nesse ponto.

Proposição 2.4.2. (*significado geométrico da segunda forma fundamental*). Seja $w \in T_p S$ com $|w| = 1$. Então $II_p(w)$ é igual a curvatura normal de uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco passando em p e tangente a w .

Prova: Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva regular em S parametrizada pelo comprimento de arco satisfazendo $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Denotando $N(s) = N(\alpha(s))$ a restrição do campo normal unitário à superfície S ao longo da curva α , temos

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0,$$

para todo s ; derivando em relação a s e usando as relações de Frenet-Serret,

$$\begin{aligned} \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle &= - \langle N(s), \alpha''(s) \rangle \\ &= - \langle N(s), k(s)n(s) \rangle \\ &= -k(s) \langle N(s), n(s) \rangle, \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} II_p(w) &= - \langle dN_p(w), w \rangle \\ &= - \langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= k(0) \langle N(0), n(0) \rangle \\ &= k_n(p) \end{aligned}$$

Por este resultado geométrico é que utilizamos o sinal negativo na definição da segunda forma fundamental.

Corolário 2.4.3. *Todas as curvas em uma superfície S passando por um ponto $p \in S$, que possuem a mesma reta tangente em p , tem a mesma curvatura normal em p .*

Dizendo a mesma coisa, podemos citar o seguinte teorema de Meusnier:

Teorema 2.4.4. *Todas as curvas que possuem o mesmo vetor velocidade em $p \in S$, possuem a mesma curvatura normal em p .*

Demonstração. Já foi feita na aplicação acima. Note que a curvatura normal k_n em $p \in S$ só depende da direção tangente a curva passando por p . \square

Este resultado permite falar em curvatura normal ao longo de uma dada direção em p . Para tanto precisamos encontrar curvas que satisfazem as definições acima. Vejamos a seguinte definição:

Definição 2.4.5. *Uma seção normal C_v a uma superfície S determinada por $v \in T_p S$ é a curva de interseção de S com o plano P_v gerado por v e $N(p)$. (Figura: 2.19)*

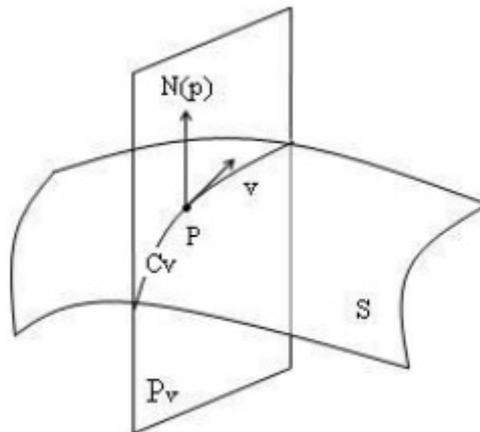


Figura 2.19: Seção normal C_v a uma superfície S . Fonte: [7]

Em uma vizinhança de p , uma seção normal de S em p é uma curva regular plana, e seu vetor normal em p é $\pm N(p)$ ou zero, sendo assim, sua curvatura é igual ao valor absoluto da curvatura normal de v em p . O sinal de k_n muda conforme a concavidade da superfície no ponto, ou seja, se a concavidade aponta no sentido de $N(p)$ então é positiva, se aponta no sentido oposto é negativa. Sendo assim o teorema de Meusnier afirma que o valor absoluto da curvatura normal em p de uma curva $\alpha(s)$ é igual a curvatura da seção normal de S em p , segundo $\alpha'(0)$. Portanto, basta analisar as curvaturas das seções normais para estudar as curvaturas normais em $p \in S$.

Exemplo 2.4.6. Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular que descreve um plano Π de \mathbb{R}^3 , temos que $dN_p = 0$ para qualquer curva passando por p em Π , então a curvatura normal e a segunda forma quadrática são identicamente nulas. De fato, todas as seções normais são retas que têm curvatura nula. (Figura: 2.20)

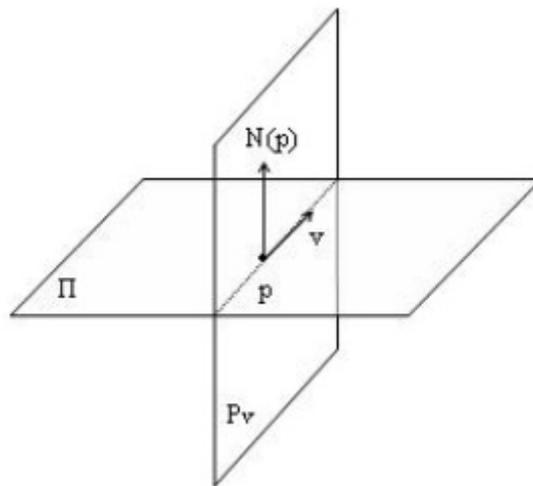


Figura 2.20: Seções normais no plano Π . Fonte: [7]

Exemplo 2.4.7. No cilindro reto, dado por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, as seções normais em um ponto p variam de uma reta paralela ao eixo do cilindro, de uma família de elipses até a um círculo perpendicular ao eixo do cilindro. Assim as curvaturas normais variam de 0, na reta, a 1, no círculo. (Figura: 2.21)

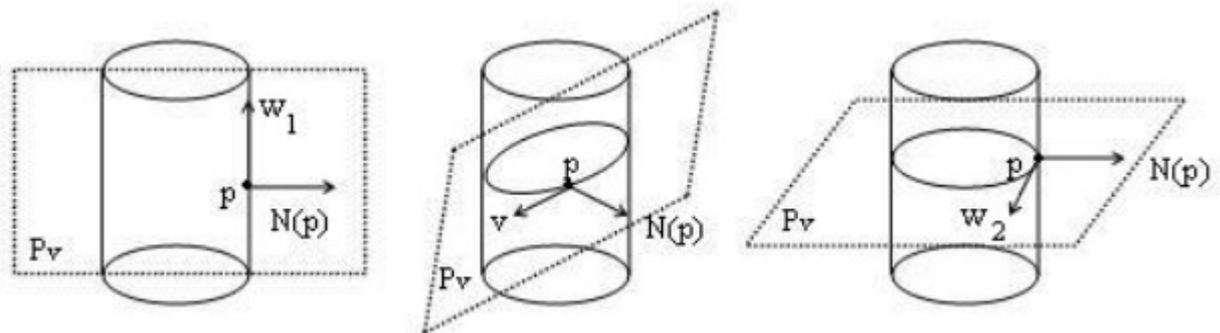


Figura 2.21: Seções normais no cilindro. Fonte: [7]

Capítulo 3

Geodésicas

O termo geodésicas vem de "ciência geodésica", que se preocupa com as medições da superfície da terra. Friedrich W. Bessel (1784-1846), determinou que a forma da terra era um elipsóide de rotação, já Carl Gustav Jacobi (1804-1851) estudou as curvas mais curtas de um elipsóide de rotação e se referiu a elas como **curvas geodésicas**, mas esse termo curvas mais curtas já teria sido mencionado anteriormente por Johannes Bernoulli (1667-1784) e por Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Para este capítulo foram utilizadas as referências [2], [4], [6], [7], [8], [12]. Nos capítulos anteriores, nós desenvolvemos algumas das propriedades analíticas e geométricas de curvas e superfícies no \mathbb{R}^3 que são consequências das Primeira e Segunda Formas fundamentais.

As propriedades geométricas mais importantes são intrínsecas, isto é, são preservadas por isometria na superfície.

Uma reta sobre uma superfície teria algumas propriedades das retas no plano, por exemplo, as retas são:

1. as curvas de menor comprimento ligando dois pontos (Arquimedes);
2. as curvas planas de curvatura identicamente nula;
3. as curvas cujas tangentes e sua derivada são linearmente dependentes.

Definição 3.0.1. *Sejam w um campo diferenciável de vetores em um aberto U contido na superfície e um ponto p dese aberto. Seja $v \in T_p S$. Considere a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$ e seja $w(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a restrição do campo de vetores à curva α . O vetor obtido pela projeção de $\frac{dw}{dt}(0)$ no plano tangente é chamado **derivada covariante em p do campo de vetores w em relação ao vetor v** . Ela será denotada por $\frac{Dw}{dt}(0)$ (3.1*

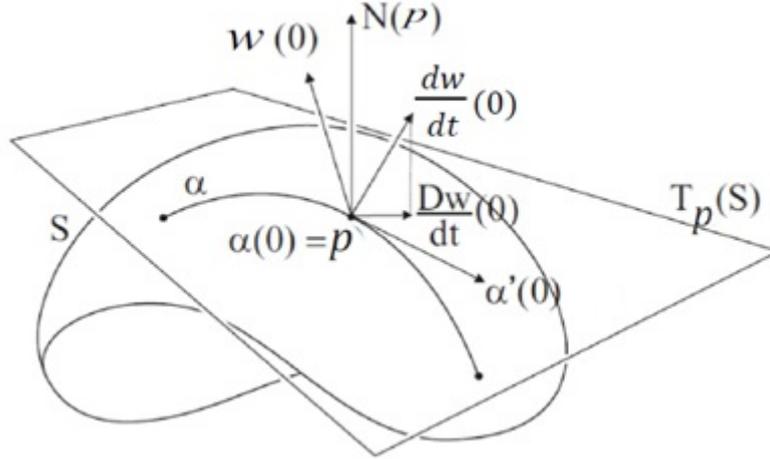


Figura 3.1: Representação geométrica da derivada covariante. Fonte: [10]

Definição 3.0.2. Um campo de vetores w ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ é chamado **paralelo** se $\frac{Dw}{dt}(t) = 0$, para todo $t \in I$

Definição 3.0.3. Uma curva regular, não constante, $\alpha : I \rightarrow S$ é chamada **geodésica** em $t \in I$ se seu campo de vetores tangentes $\alpha'(t)$ é paralelo ao longo de α em t , isto é, $\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0$, ou seja, se a componente tangencial da aceleração da curva é nula ao longo da curva. Dizemos que α é uma **geodésica parametrizada** se é geodésica para todo $t \in I$.

Assim, quando vista do ponto de vista da superfície, sem se referir ao espaço ambiente, uma partícula percorrendo uma trajetória geodésica não sofre efeitos de aceleração (não tem aceleração na superfície). Segundo a definição, o vetor aceleração $\alpha''(t)$ é paralelo ao vetor normal à superfície em p . De fato, se $\alpha''(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, sendo $n(t) = \frac{\alpha''(t)}{|\alpha''(t)|}$ o vetor normal à curva em t , se α é uma geodésica, então $n(t)$ é paralelo a $N(u(t), v(t))$.

Exemplo 3.0.4. Uma reta $\alpha(t) = at + b$ é uma geodésica pois $\alpha''(t) = 0$. No entanto, a reparametrização da reta definida por

$$\beta(u) = a \tan u + b, \text{ com } u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

só será geodésica se $u = 0$, já que

$$\beta''(u) = -\left(\frac{2 \sin u}{\cos^3 u}\right)a$$

O fato é que toda curva pode ser parametrizada de modo a ser uma geodésica. Podemos concluir que se em uma superfície S existe uma reta, esta será geodésica sobre S .

Evidentemente uma geodésica é o que mais se aproxima de uma "reta" sobre uma superfície. Imagine uma esfera na qual traçamos um grande círculo e façamos com que ela role sobre um plano sem escorregar, estaríamos descrevendo essa curva no plano. Perceberemos facilmente que essa curva é uma reta, isso é uma idéia intuitiva de geodésica

sobre uma superfície. Supondo uma partícula em movimento numa superfície, sob a ação de uma força perpendicular à superfície apenas para manter o contato, sua trajetória seria uma geodésica, pois a segunda lei de Newton afirma que a aceleração da partícula é sempre paralela à força, neste caso, perpendicular à superfície, sendo assim com velocidade constante. Essa é uma interpretação interessante de geodésicas na mecânica.

Proposição 3.0.5. *Seja S uma superfície regular localmente parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se α é uma geodésica da superfície S , então $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$. Em particular, $|\alpha'(t)|$ é constante.*

Demonstração. Seja N o vetor normal a S em $\alpha(t)$. Como α é uma geodésica, então α'' é paralelo a N . Segue que α'' é ortogonal ao vetor tangente α' . Consequentemente, temos

$$\frac{d}{dt} |\alpha'|^2 = \frac{d}{dt} \langle \alpha', \alpha' \rangle = 2 \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$$

sendo assim $|\alpha'(t)|$ é constante. □

Proposição 3.0.6. *A reparametrização de uma geodésica $\alpha(t)$, pelo comprimento de arco $s = s(t)$, continua sendo geodésica.*

Demonstração. Seja $s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t v dt$ a função comprimento de arco. Como v é constante real positiva, $s(t) = vt$.

Seja $\alpha(t) = \beta(s(t))$. Derivando duas vezes,

$$\alpha'(t) = \beta'(s) \frac{ds}{dt} \Rightarrow \alpha''(t) = \beta''(s) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \beta''(s) v^2 \Rightarrow \beta''(s) = \frac{1}{v^2} \alpha''(t).$$

Assim, o vetor aceleração de $\beta(s)$ após a reparametrização da geodésica $\alpha(t)$, é um múltiplo escalar de $\alpha''(t)$. Como $\alpha''(t)$ é paralelo a N então $\beta''(s)$ também é paralelo a N , isto é $\beta(s)$ é uma geodésica. □

Exemplo 3.0.7. *Verificar que a reta com parametrização $\alpha(t) = (t^2, 5t^2, 0)$ não é uma geodésica no plano xy . Podemos constatar isso de duas maneiras. Na primeira, $\alpha'(t) = (2t, 10t, 0)$. Daí $v = |\alpha'(t)| = 2t\sqrt{26}$ não é constante, e pela proposição (3.0.5), $\alpha(t)$ não é uma geodésica. A outra maneira é que $\alpha''(t) = (2, 10, 0)$ pertence ao plano xy . Isto é, $\alpha''(t)$ é ortogonal a N e $\alpha''(t) \neq (0, 0, 0)$, sendo assim $\alpha''(t)$ não é paralelo a N , portanto $\alpha(t)$ não é uma geodésica. Porém, se reparametrizarmos $\alpha(t)$ com $t = \sqrt{s}$ vemos que $\beta(s(t))$ é uma geodésica, pois $\beta(s) = (s, 5s, 0)$. Logo $\beta'(s) = (1, 5, 0)$ e $\beta''(s) = 0$. Pela definição, $\beta(s)$ é uma geodésica.*

Se $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ define uma curva parametrizada por comprimento de arco num mapa de uma superfície S então $\gamma'(s)$ é um vetor unitário em $T_{\gamma(s)}S$ e daí $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$. Assim $\gamma'(s)$ é perpendicular a $N(\gamma(s))$ e então $\gamma'(s), N(\gamma(s))$ e $N(\gamma(s)) \times \gamma'(s)$ formam uma base ortonormal em \mathbb{R}^3 . Como γ esta parametrizada pelo comprimento de arco s , $\gamma''(s)$ é perpendicular a $\gamma'(s)$, portanto pertence ao plano gerado por $N(\gamma(s))$ e $N(\gamma(s)) \times \gamma'(s)$ sendo assim, podemos escrever:

$$\gamma''(s) = \alpha(s)N(\gamma(s)) + \beta(s)(N(\gamma(s)) \times \gamma'(s)).$$

Os escalares $k_n = -\alpha(s)$ e $k_g = \beta(s)$ são chamados respectivamente **curvatura normal** e **curvatura geodésica** de γ em s . (Figura: 3.2)

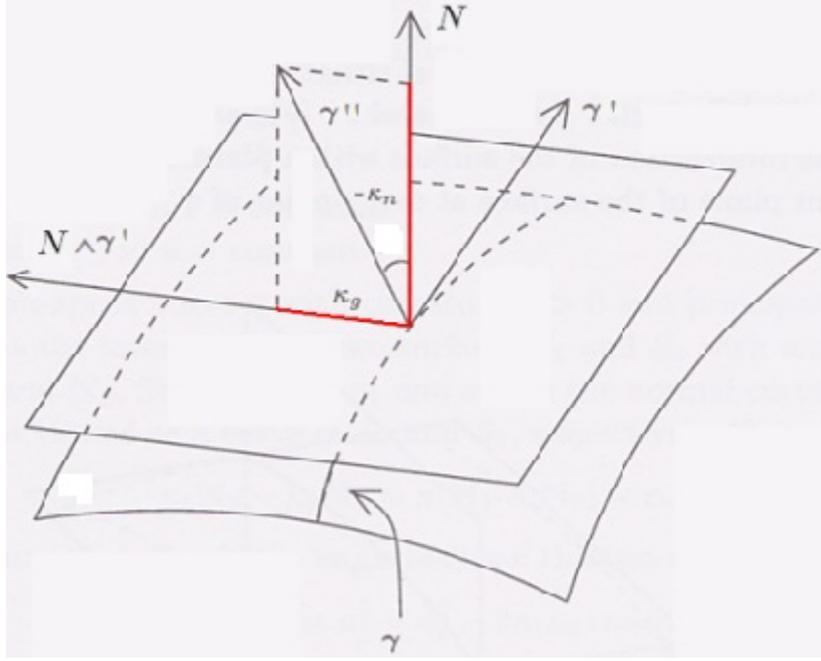


Figura 3.2: curvaturas normal e geodésica em β . Fonte: [6]

Proposição 3.0.8. Se k é a curvatura da curva γ sobre S então $k^2 = k_g^2 + k_n^2$.

Demonstração. Pela relação

$$\begin{aligned} \gamma''(s) &= k_n N + k_g(N \times \gamma'), \text{ fazendo a substituição do } \gamma''(s), \text{ temos} \\ \|k\vec{n}\|^2 &= \|k_n N + k_g(N \times \gamma')\|^2 \text{ aplicando a definição de produto interno,} \\ \langle k_n, k_n \rangle &= \langle k_n N + k_g(N \times \gamma'), k_n N + k_g(N \times \gamma') \rangle \text{ resolvendo os produtos} \\ k^2 \langle n, n \rangle &= \langle k_n N, k_n N \rangle + \langle k_g(N \times \gamma'), k_g(N \times \gamma') \rangle \\ k^2 &= k_n^2 \langle N, N \rangle + k_g^2 \langle N \times \gamma', N \times \gamma' \rangle \end{aligned}$$

e finalmente

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2$$

□

Proposição 3.0.9. Uma curva regular tangente unitária $\gamma : I \rightarrow S$ é uma geodésica se e somente se, sua curvatura geodésica $k_g = 0$, para todo $t \in I$.

Demonstração. Se a curva γ é uma geodésica e N um vetor normal à S . A curvatura geodésica é

$$k_g = \langle \gamma'', N \times \gamma' \rangle.$$

Se γ'' é zero, então $k_g = 0$. Por outro lado, se $\gamma'' \neq 0$ por definição γ'' é paralelo a N , portanto é perpendicular a $(N \times \gamma')$, assim $k_g = 0$.

Reciprocamente, se $k_g = 0$, então $\gamma'' \perp N \times \gamma'$ com $\gamma'' \neq 0$. Enquanto isso, a partir de $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$ temos que $\gamma'' \perp \gamma'$. Portanto, γ'' é paralelo a N . □

Teorema 3.0.10. A curvatura geodésica é um valor(isometricamente)intrínseco, isto é, depende apenas dos coeficientes da primeira forma quadrática.

Demonstração. Temos que $\gamma' = X_u u' + X_v v'$ (omitindo s na notação, por simplificação), e

$$\begin{aligned}\gamma'' &= \frac{d}{ds} [x_u u' + X_v v'] \\ &= \frac{dX_u}{ds} u' + \frac{dX_v}{ds} v' + X_u \frac{du'}{ds} + X_v \frac{dv'}{ds} \\ &= \langle X_{uu} u' + X_{uv} v' \rangle u' + \langle X_{vu} u' + X_{vv} v' \rangle v' + X_u u'' + X_v v'' \\ &= X_{uu} u'^2 + X_{uv} u' v' + X_{vu} u' v' + X_{vv} v'^2 + X_u u'' + X_v v''\end{aligned}$$

Como X é de classe C^2 , então

$$\gamma'' = X_{uu} u'^2 + X_{vv} v'^2 + 2u' v' X_{uv} + X_u u'' + X_v v''$$

Temos que:

$$k_g = \langle \alpha'', N \times \alpha' \rangle, \text{ então}$$

$$k_g = \langle X_{uu} u'^2 + X_{vv} v'^2 + 2u' v' X_{uv} + X_u u'' + X_v v'', N \times \alpha' \rangle \quad (3.0.1)$$

Fazendo:
$$\begin{cases} X_{uu} = \alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v + \alpha_3 N \\ X_{vv} = \beta_1 X_u + \beta_2 X_v + \beta_3 N \\ X_{uv} = \gamma_1 X_u + \gamma_2 X_v + \gamma_3 N \end{cases} \text{ onde, } \alpha_j, \beta_j, \gamma_j \text{ são os símbolos de Christoffel [1]$$

Substituindo em (3.0.1) temos:

$$\begin{aligned}k_g &= \langle (\alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v + \alpha_3 N) u'^2 + (\beta_1 X_u + \beta_2 X_v + \beta_3 N) v'^2 + 2u' v' (\gamma_1 X_u + \gamma_2 X_v + \gamma_3 N) + X_u u'' + X_v v'', N \times \alpha' \rangle. \\ k_g &= \langle (\alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v) u'^2 + (\beta_1 X_u + \beta_2 X_v) v'^2 + 2u' v' (\gamma_1 X_u + \gamma_2 X_v) + X_u u'' + X_v v'', N \times \alpha' \rangle, \\ \text{já que } N &\perp N \times \alpha'. \text{ daí,}\end{aligned}$$

$$(\alpha_1 u'^2 + \beta_1 v'^2 + 2\gamma_1 u' v' + u'') X_u + (\alpha_2 u'^2 + \beta_2 v'^2 + 2\gamma_2 u' v' + v'') X_v, N \times \alpha'$$

Tomando $A = (\alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v + u'')$ e $B = (\alpha_2 u'^2 + \beta_2 v'^2 + 2\gamma_2 u' v' + v'')$, temos que,

$$\begin{aligned}k_g &= \langle AX_u + BX_v, N \times \alpha' \rangle \\ &= \langle AX_u, N \times \alpha' \rangle + \langle BX_v, N \times \alpha' \rangle \\ &= A \langle X_u, N \times \alpha' \rangle + B \langle X_v, N \times \alpha' \rangle\end{aligned}$$

aplicando propriedades do produto misto,

$$\begin{aligned}k_g &= A \langle \alpha' \times X_u, N \rangle + B \langle \alpha' \times X_v, N \rangle \\ &= A \langle (u' X_u + v' X_v) \times X_u, N \rangle + B \langle (u' X_u + v' X_v) \times X_v, N \rangle \\ &= A \langle u' X_u \times X_u + v' X_v \times X_u, N \rangle + B \langle u' X_u \times X_v + v' X_v \times X_v, N \rangle \\ &= A \langle v' X_v \times X_u, N \rangle + B \langle u' X_u \times X_v, N \rangle \\ &= \langle (-Av' + Bu')(X_u \times X_v), N \rangle\end{aligned}$$

como vimos anteriormente,

$$\begin{aligned}N &= \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \Rightarrow X_u \times X_v = \|X_u \times X_v\| N \\ &\text{e que } \|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2}.\end{aligned}$$

sendo assim, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
K_g &= \langle (Bu' - Av')\sqrt{EG - F^2}N, N \rangle \\
&= (Bu' - Av')\sqrt{EG - F^2}.
\end{aligned} \tag{3.0.2}$$

A igualdade (3.0.2), com A e B definidas acima, é conhecida por *fórmula de Beltrami* (2^{a} fórmula de cálculo da curvatura geodésica). A fórmula nos mostra que a curvatura geodésica k_g depende essencialmente da 1^{a} forma fundamental, logo é um valor intrínseco à superfície. \square

3.1 Equações Geodésicas

As proposições anteriores não são suficientes para determinarmos todas as geodésicas sobre uma superfície. Um teorema mais geral que nos possibilita pelo menos teoricamente calcularmos as geodésicas é:

Teorema 3.1.1. *Uma curva γ de uma superfície S é uma geodésica se e somente se, para qualquer parte $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$, as duas equações seguintes são satisfeitas:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}(Eu'u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2) \\ \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

onde $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ é a primeira forma fundamental de X .

Demonstração. Como já foi dito anteriormente, sabemos que o plano tangente a S é gerado por X_u e X_v .

Pela definição, se a curva γ é uma geodésica, então $\langle \gamma'', X_u \rangle = \langle \gamma'', X_v \rangle = 0$.

Desenvolvendo $\langle \gamma'', X_u \rangle = 0$, com $\gamma = X(u(t), v(t))$ então $\gamma' = X_u u' + X_v v'$ e

$$\begin{aligned}
\gamma'' &= X_{uu}u'^2 + X_{uv}v'u' + u''X_u + X_{uv}u'v' + X_{vv}v'^2 + X_v v'' \\
&= u'^2 X_{uu} + 2u'v' X_{uv} + v'^2 X_{vv} + u'' X_u + v'' X_v,
\end{aligned}$$

substituindo e resolvendo o produto interno, temos:

$$\begin{aligned}
\langle \gamma'', X_u \rangle &= \langle u'^2 X_{uu} + 2u'v' X_{uv} + v'^2 X_{vv} + u'' X_u + v'' X_v, X_u \rangle \\
&= \langle X_{uu}, X_u \rangle u'^2 + 2u'v' \langle X_{uv}, X_u \rangle + v'^2 \langle X_{vv}, X_u \rangle + \langle X_u, X_u \rangle u'' + \langle X_u, X_v \rangle v'' = 0.
\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \langle X_u, X_u \rangle u'' + \langle X_u, X_v \rangle v'' = -[\langle X_{uu}, X_u \rangle u'^2 + 2u'v' \langle X_{uv}, X_u \rangle + v'^2 \langle X_{vv}, X_u \rangle].$$

Podemos observar na última igualdade que aparecem os coeficientes da primeira forma fundamental, podemos reescrever a igualdade na seguinte forma:

$$Eu'' + Fv'' = -[\langle X_{uu}, X_u \rangle u'^2 + 2u'v' \langle X_{uv}, X_u \rangle + v'^2 \langle X_{vv}, X_u \rangle] \tag{3.1.2}$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{dE}{dt}u' + Eu'' + \frac{dF}{dt}v' + Fv''.$$

Assim,

$$Eu'' + Fv'' = \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \frac{dE}{dt}u' - \frac{dF}{dt}v' \tag{3.1.3}$$

Igualando as equações (3.1.2) e (3.1.3) temos que:

$$\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{dE}{dt}u' + \frac{dF}{dt}v' - [\langle X_{uu}, X_u \rangle u'^2 + 2u'v' \langle X_{uv}, X_u \rangle + v'^2 \langle X_{vv}, X_u \rangle] \quad (3.1.4)$$

Resolvendo as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u \rangle &= \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{uu} \rangle \\ &\text{ou seja, } \frac{\partial E}{\partial u} = 2\langle X_{uu}, X_u \rangle \text{ então,} \\ \langle X_{uu}, X_u \rangle &= \frac{1}{2}E_u \\ \langle X_{uv}, X_u \rangle &= \frac{\partial}{\partial v} \langle X_u, X_u \rangle = 2\langle X_{uv}, X_u \rangle \text{ então,} \\ \langle X_{uv}, X_u \rangle &= \frac{1}{2}E_v \\ \langle X_{vv}, X_u \rangle &= \frac{\partial}{\partial v} \langle X_v, X_u \rangle = \langle X_{vv}, X_u \rangle + \langle X_v, X_{uv} \rangle \\ &\text{assim, } \frac{\partial F}{\partial u} = \langle X_{vv}, X_u \rangle + \langle X_v, X_{uv} \rangle \text{ então,} \\ F_v &= \langle X_{vv}, X_u \rangle + \langle X_v, X_{uv} \rangle, \text{ mas} \\ \langle X_v, X_{uv} \rangle &= \frac{\partial}{\partial u} \langle X_v, X_v \rangle = \langle X_{vu}, X_v \rangle + \langle X_v, X_{vu} \rangle \\ G_u &= 2\langle X_{vu}, X_v \rangle \\ \text{enfim, } \langle X_{vv}, X_u \rangle &= F_v - \frac{1}{2}G_u. \end{aligned}$$

E agora as derivadas dos coeficientes:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}u' &= (E_u u' + E_v v')u' = E_u u'^2 + E_v u'v' \text{ e} \\ \frac{dF}{dt}v' &= (F_u u' + F_v v')v' = F_u u'v' + F_v v'^2 \end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados na equação (3.1.4) temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') &= E_u u'^2 + E_v u'v' + F_u u'v' + F_v v'^2 - \frac{1}{2}E_u u'^2 - E_v u'v' - F_v v'^2 + \frac{1}{2}G_u v'^2 \\ &= \frac{1}{2}E_u u'^2 + F_u u'v' + \frac{1}{2}G_u v'^2 \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2)$$

A outra equação é obtida de forma análoga. □

As duas equações do teorema (3.1.1) são chamadas de **equações geodésicas**. As equações geodésicas são não lineares e são usualmente difíceis ou mesmo impossíveis de se resolver explicitamente. Mas em alguns casos obtemos êxito nas suas soluções. Vejamos alguns destes casos:

Exemplo 3.1.2. *Como caso mais simples nós temos aquele de encontrar todas as geodésicas no plano. Para isto tomemos uma parametrização para o plano $X(u, v)$, da seguinte forma:*

Sejam p e $q \in \mathbb{R}^3$, vetores unitários e ortogonais, assim:

$$X(u, v) = X(u_0, v_0) + up + vq,$$

Assim, calculando sua 1ª Forma Fundamental temos:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = (p, p) = \|p\|^2 = 1 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = (q, q) = \|q\|^2 = 1 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = (p, q) = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ \Rightarrow I &= du^2 + dv^2 \end{aligned}$$

Substituindo-se em uma das equações:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') &= \frac{1}{2}(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2) \\ \frac{d}{dt}(u' + v') &= 0, \text{ logo} \\ u + v &= c(\text{constante}) \end{aligned}$$

nossa curva tem equação $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$, então $\gamma(t) = X(u(t), c-u(t))$, substituindo-se na equação do plano, temos:

$$\begin{aligned} X(u(t), c-u(t)) &= X_0 + u(t)p + (c-u(t))q \\ &= X_0 + cq + u(t)(p-q) \\ X(u(t), c-u(t)) &= Y_0 + u(t)t \\ \gamma(t) &= Y_0 + u(t)t, \end{aligned}$$

mas $u(t) = u$, então

$$\gamma(t) = Y_0 + ut, \text{ que é uma reta.}$$

Isto significa que toda reta no plano é uma geodésica.

Exemplo 3.1.3. Calculemos as geodésicas no cilindro circular reto. Como sabemos uma parametrização do cilindro é dada por:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (a \cos v, a \sin v, u), \text{ então:} \\ X_v &= (-\sin v, \cos v, 0) \text{ e } X_u = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \text{ ou seja,} \\ I &= du^2 + dv^2 \end{aligned}$$

Análogo ao exemplo anterior, tem:

$$v(t) = c - u(t)$$

Substituindo na equação do cilindro, temos:

$$\gamma(t) = (\cos(c - u(t)), \sin(c - u(t)), u(t)).$$

Se $u(t) = t - c \in \mathbb{R}$ então $\gamma(t) = (\cos(-t), \sin(-t), t - c)$ sendo assim,

$$\gamma(t) = (\cos t, -\sin t, t - c), \text{ que é uma hélice.}$$

Se $c - u(t) = t_0$, então

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos t_0, \sin t_0, t_0 + c), \text{ um vetor constante.} \\ &= (a, b, c - t_0), \text{ uma reta. (Figura 3.3)} \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos(c - u(t)), \sin(c - u(t)), u(t)). \text{ Se } c - u(t) = K, \text{ então:} \\ \gamma(t) &= (\cos k, \sin k, c + k), \text{ são retas.} \end{aligned}$$

E para $c - u(t) = \lambda(t)$, então:

$$\gamma(t) = (\cos \lambda(t), \sin \lambda(t), \lambda(t) - c) \text{ temos a hélice.}$$

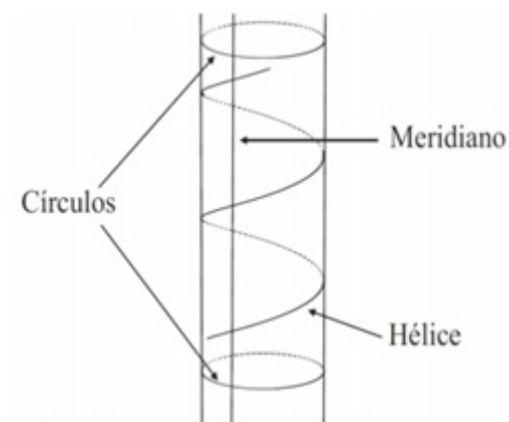


Figura 3.3: geodésicas do cilindro. Fonte: [10]

Exemplo 3.1.4. Determinemos as geodésicas sobre a esfera S^2 . Tomemos uma parametrização nas coordenadas latitude θ e longitude φ , sendo

$$X(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta),$$

já foram calculadas anteriormente as derivadas X_θ, X_φ , assim

$$E = (X_\theta, X_\theta) = 1 ; F = (X_\theta, X_\varphi) = 0 ; G = (X_\varphi, X_\varphi) = \cos^2 \theta.$$

Buscamos uma curva $\gamma(t) = X(\theta(t), \varphi(t))$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') &= \frac{1}{2}(E_\theta u'^2 + 2F_\theta u'v' + G_\theta v'^2) \\ \frac{d}{dt}(u') &= \frac{1}{2}(0 + 0 + 2 \cos \theta \sin \theta v'^2), \text{ não ajudou, partiremos para a segunda equação} \\ \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') &= \frac{1}{2}(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2) \\ \frac{d}{dt}(\cos^2 \theta v') &= \frac{1}{2}(0 + 0 + 0) = 0, v = \varphi \\ \frac{d}{dt}(\varphi \cos^2 \theta) &= 0, \text{ ou seja, } \varphi' \cos^2 \theta = A. \end{aligned}$$

Supondo que nossa curva seja unitária, isto é, se $\gamma(t) = X(\theta(t), \varphi(t))$, então

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= X_\theta \theta'(t) + X_\varphi \varphi'(t), e \\ \|\gamma'(t)\| &= (\theta'(t))^2 + (\cos \theta \varphi'(t))^2 = 1, \text{ ou seja,} \\ &\Rightarrow \theta'(t)^2 + \cos^2 \theta \varphi'^2(t) = 1. \end{aligned}$$

1º) Se $A = 0$ então $\varphi \cos^2 \theta = 0$ daí $\varphi' = 0$ concluímos que $\varphi = \text{constante}$, logo, γ é a parte de um meridiano.

2º) Assumindo $A \neq 0$. Da condição de γ ser Tangente Unitária vem:

$$\theta'^2 = 1 - \varphi'^2 \cos^2 \theta \text{ então, } \varphi' \cos^2 \theta = A, \text{ daí } \varphi' = \frac{A}{\cos^2 \theta}.$$

$$\theta'^2(t) = 1 - \left(\frac{A}{\cos^2 \theta}\right)^2 \cos^2 \theta = 1 - \frac{A^2}{\cos^2 \theta}.$$

ao longo de uma geodésica teremos:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 = \frac{\varphi'^2}{\theta'^2} = \frac{\frac{A^2}{\cos^4 \theta}}{1 - \frac{A^2}{\cos^2 \theta}} = \frac{\frac{A^2}{\cos^4 \theta}}{\frac{\cos^2 \theta - A^2}{\cos^2 \theta}} = \frac{A^2}{\cos^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \theta - A^2}{A^2}\right)} = \frac{A^2}{\cos^2 \theta (A^{-2} \cos^2 \theta - 1)}.$$

Tomando $A^{-2} = A_0$, temos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 \theta (A_0 \cos^2 \theta - 1)} \\ \Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta (A_0 \cos^2 \theta - 1)}} \\ \Rightarrow \pm d\varphi &= \frac{1}{\cos \theta \sqrt{A_0 \cos^2 \theta - 1}} d\theta, \text{ integrando temos:} \\ \pm(\varphi - \varphi_0) &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\cos \theta \sqrt{A_0 \cos^2 \theta - 1}} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sec \theta d\theta}{\sqrt{A_0 \cos^2 \theta - 1}}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável: $u = \tan \theta \Rightarrow du = \sec^2 \theta d\theta$ assim,

$$d\theta = \frac{1}{\sec^2 \theta} du = \frac{du}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{du}{1 + u^2} \text{ e } \sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + u^2}.$$

Simplificando o denominador $\sqrt{A_0 \cos^2 \theta - 1} = \sqrt{A_0 \left(\frac{1}{1 + u^2}\right) - 1} = \sqrt{\frac{A_0 - (1 + u^2)}{1 + u^2}} =$

$$\frac{\sqrt{(A_0 - 1) - u^2}}{\sqrt{1 + u^2}}. \text{ Logo,}$$

$$\pm(\varphi - \varphi_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{1+u^2} \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{(A_0-1)-u^2}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{1+u^2} \frac{1+u^2}{\sqrt{(A_0-1)-u^2}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{\sqrt{(A_0-1)-u^2}}.$$

Tomando $A_0 - 1 = B^2$, temos:

$$\pm(\varphi - \varphi_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{du}{\sqrt{B^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{B}\right) = \arcsin\left(\frac{\tan \theta}{B}\right), \text{ usando a função inversada}$$

seno em ambos os lados:

$$\pm \sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{\tan \theta}{B} \therefore \tan \theta = \pm B \sin(\varphi - \varphi_0),$$

Aplicando a fórmula do seno da diferença:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \pm B(\sin \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi) \\ \sin \theta &= \pm B(\sin \varphi \cos \theta \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \theta \cos \varphi) \\ \sin \theta &= \alpha_1 \sin \varphi \cos \theta + \alpha_2 \cos \theta \cos \varphi \end{aligned}$$

Considerando as coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} z &= \sin \theta \\ x &= \cos \theta \cos \varphi \\ y &= \sin \varphi \cos \theta \end{aligned}$$

chegamos à expressão:

$$z = \alpha_1 y + \alpha_2 x.$$

Como sabemos, esta é a equação de um plano que passa pela origem, assim nossa curva é a interseção do plano passando pela origem com S^2 , que representa um grande círculo, isto é, os meridianos da esfera.

Vemos desta forma, caso $A = 0$ e $A \neq 0$, que as únicas geodésicas na esfera são os meridianos ou círculos máximos.

Proposição 3.1.5. *Seja S uma superfície regular orientada. dado um ponto $p \in S$ e um vetor $w \in T_p S$ não nulo, existe $\varepsilon > 0$ e uma única geodésica parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.*

Demonstração. Se $p = (u_0, v_0)$, consideremos $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$. Pelo teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais [2], existem $\varepsilon > 0$ e funções u_t, v_t definidas em $(-\varepsilon, \varepsilon)$ satisfazendo as equações (3.1.1), com as condições iniciais fixadas $u(0) = u_0, v(0) = v_0, u'(0) = a$ e $v'(0) = b$. Além disso, tais funções são únicas. Segue-se da proposição anterior que a curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma geodésica de X tal que $(u(0), v(0)) = p$ e $\alpha'(0) = w$.

□

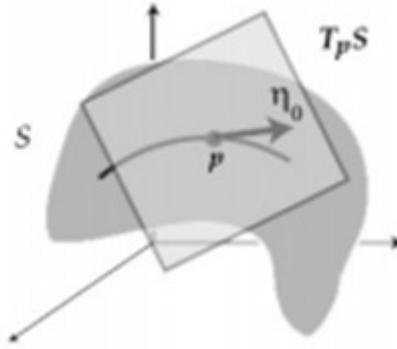


Figura 3.4: Existência da geodésica. Fonte: [10]

3.2 Preservação da Geodésica por Isometria

Vimos anteriormente que diferentes superfícies podem ter a mesma primeira forma fundamental. Um exemplo para isso é o fato de que podemos enrolar uma folha de papel plana num cilindro, de modo óbvio, sem deformação, se traçarmos uma curva na folha plana, depois de enrolada torna-se uma curva no cilindro, e como não houve deformação, o comprimento de ambas as curvas coincidem. O que não aconteceria com a esfera e o plano. Este tipo de questão geométrica pode ser abordada com o auxílio do cálculo diferencial sobre uma superfície. Com efeito, a transformação geométrica do plano no cilindro que referimos acima é um **difeomorfismo** especial, como veremos a seguir.

Definição 3.2.1. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria se, para cada curva γ em S_1 , a curva $f \circ \gamma$ em S_2 tem comprimento igual ao de γ . Se existir uma isometria $f : S_1 \rightarrow S_2$, dizemos que S_1 e S_2 são superfícies isométricas.

Teorema 3.2.2. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria se e só se, para cada $\gamma \in S_1$, as primeiras formas fundamentais de γ e $f \circ \gamma$ são idênticas.

Demonstração. Sejam $X_1 : U \rightarrow S_1$ uma parametrização de S_1 , $X_2 = f \circ X_1 : U \rightarrow S_2$ a correspondente parametrização de S_2 e E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 as primeiras formas fundamentais de X_1 e X_2 , respectivamente.

Inicialmente suponhamos que se $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ e $G_1 = G_2$ e que $\gamma(t) = X_1(u(t), v(t))$ define uma curva arbitrária em S_1 , o comprimento de γ de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t)$, é dado pela integral

$$\int_{t_0}^t (E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

é evidentemente igual ao comprimento da curva $X_2(u(t), v(t)) = f \circ X_1(u(t), v(t)) = f \circ \gamma(t)$, de $f(\gamma(t_0))$ a $f(\gamma(t))$.

Reciprocamente, se f é uma isometria então qualquer que seja a curva $\gamma(t) = X_1(u(t), v(t))$ em S_1 de domínio $I = (\alpha, \beta)$, e a curva $f \circ X_1(t) = X_2(u(t), v(t))$ tem o mesmo comprimento. Portanto, para quaisquer $t_0, t \in I$,

$$\int_{t_0}^t (E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt = \int_{t_0}^t (E_2 u'(t)^2 + 2F_2 u'(t)v'(t) + G_2 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

Isto implica que,

$$(E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2) = (E_2 u'(t)^2 + 2F_2 u'(t)v'(t) + G_2 v'(t)^2) \quad (3.2.1)$$

para qualquer $t \in I$. Fixemos $t_0 \in I$ e sejam $u_0 = u(t_0)$ e $v_0 = v(t_0)$. Então:

Evidentemente existe um sub-intervalo J de I contendo t_0 tal que, para cada $t \in J$, $(u_0 + t - t_0, v_0) \in U$. Logo $\gamma_1(t) = X_1(u_0 + t - t_0, v_0)$ define uma curva $\gamma_1 : J \rightarrow S_1$. Para esta curva particular, a igualdade (3.2.1) diz-nos que $E_1 = E_2$, pois neste caso $u'(t) = 1$ e $v'(t) = 0$.

Analogamente, podemos considerar a curva γ_2 definida por $\gamma_2(t) = X_1(u_0, v_0 + t - t_0)$. Neste caso $u'(t) = 0$ e $v'(t) = 1$ pelo que, por (3.2.1), $G_1 = G_2$.

Finalmente, considerando γ_3 dada por $\gamma_3(t) = X_1(u_0 + t - t_0, v_0 + t - t_0)$, podemos concluir que $E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2$, donde $F_1 = F_2$ \square

Corolário 3.2.3. *Uma isometria entre duas superfícies S_1 e S_2 leva as geodésicas de S_1 em geodésicas de S_2*

Demonstração. Sendo $\alpha_1 \in S_1$ uma geodésica e f uma isometria, queremos mostrar que $\alpha_2 = f \circ \alpha_1$ é também uma geodésica. Se $\alpha_1(t) = X(u(t), v(t))$ é uma geodésica, então $u(t)$ e $v(t)$ satisfazem as equações geodésicas, ou seja, os coeficientes da 1ª Forma Fundamental (E, F, G) satisfazem o sistema de equações geodésicas. Como $\alpha_2 = f(X(u(t), v(t)))$ é uma isometria, preserva os componentes da 1ª Forma Fundamental, ou seja, E_2, F_2, G_2 de α_2 são iguais aos E, F, G de α_1 respectivamente. Logo, E_2, F_2, G_2 também satisfazem as equações geodésicas, sendo assim $\alpha_2 = f \circ X(u(t), v(t))$ é geodésica de S_2 \square

3.3 Geodésicas e as equações de Euler-Lagrange

Teorema 3.3.1. *Uma curva regular γ é uma geodésica em uma superfície regular S se, e somente se, verifica o sistema de equações diferenciais de segunda ordem*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial |\gamma'(t)|^2}{\partial u'} \right) - \frac{\partial |\gamma'(t)|^2}{\partial u} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial |\gamma'(t)|^2}{\partial v'} \right) - \frac{\partial |\gamma'(t)|^2}{\partial v} = 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Demonstração. Seja $\gamma(t) \in X(U)$, onde X é uma parametrização de S . Então $\gamma' = X_u u' + X_v v'$. Logo,

$$\frac{\partial \gamma'}{\partial u'} = X_u, \quad \frac{\partial \gamma'}{\partial v'} = X_v.$$

Recordemos que, se F é um campo de vetores diferenciável, depende de t e x , então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(F, \frac{\partial F}{\partial x} \right) &= \left(F', \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \left(F, \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \\ &= \left(F', \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \left(F, \frac{\partial F'}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, F' \right) + \left(F, \frac{\partial F'}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(F, \frac{dF}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d|F|^2}{dt} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial |F|^2}{\partial x} \right) \right], \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\left(F, \frac{dF}{dt}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)(d/dt)(|F|^2)$. Portanto fazendo $F = \gamma'$, $x = u'$,

$$\frac{d}{dt}(\gamma', X_u) = \frac{d}{dt}\left(\gamma', \frac{\partial \gamma'}{\partial u'}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial |\gamma'|^2}{\partial u'} \right) \right]. \quad (3.3.2)$$

Analogamente

$$\frac{d}{dt}(\gamma', X_v) = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial |\gamma'|^2}{\partial v'} \right) \right].$$

Por outro lado, podemos escrever:

$$\left(\frac{d\gamma'}{dt}, X_u\right) = \frac{d}{dt}(\gamma', X_u) - \left(\gamma', \frac{d}{dt}X_u\right). \quad (3.3.3)$$

Como

$$\left(\gamma', \frac{d}{dt}X_u\right) = \left(\gamma', \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{dX}{dt}\right)\right) = \left(\gamma', \frac{\partial \gamma'}{\partial u}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial |\gamma'|^2}{\partial u},$$

visto que $\gamma'(t) = \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t)))$, tendo em conta (3.3.2) e esta última igualdade, concluímos que (3.3.3) se escreve

$$\left(\frac{\gamma'}{dt}, X_u\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial |\gamma'|^2}{\partial u'} \right) - \frac{\partial |\gamma'|^2}{\partial u} \right].$$

Da mesma maneira chegamos a,

$$\left(\frac{\gamma'}{dt}, X_v\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial |\gamma'|^2}{\partial v'} \right) - \frac{\partial |\gamma'|^2}{\partial v} \right].$$

Consequentemente: γ é uma geodésica se, e somente se, γ'' é ortogonal ao plano tangente em todo ponto de γ , o que é equivalente a,

$$\left(\frac{\gamma'}{dt}, X_u\right) = 0 \quad \left(\frac{\gamma'}{dt}, X_v\right) = 0.$$

Logo, γ é uma geodésica se, e somente se, verifica o sistema de equações diferenciais de segunda ordem (3.3.1). □

3.4 O menor caminho

Nesta seção mostraremos que se uma curva regular, que liga dois pontos em uma superfície for a de menor comprimento, então ela é uma geodésica e está referenciada em [2], [4] e [9].

Teorema 3.4.1. *Seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ uma curva tangente unitária e $a, b \in (-\epsilon, \epsilon)$ onde $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$, se γ é a curva de menor distância entre p e q em S , então γ é uma geodésica de S .*

Demonstração. O objetivo é mostrar que $k_g(s) = 0, \forall s \in (a, b)$.

Supondo que $k_g(s) \neq 0$ para algum $s = s_0 \in (a, b)$. Pela continuidade existem valores $j, k \in (a, b)$ com $a < j < s_0 < k < b$, com $k_g(s) \neq 0$ sobre $[j, k]$, e $\gamma([j, k]) \subset X(U)$ para alguma parametrização $X(U)$. Seja $\lambda : [j, k] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave satisfazendo

$$(1) \lambda(j) = \lambda(k) = 0 \text{ e}$$

$$(2) \lambda(s)k_g(s) > 0 \text{ para algum } s \in (j, k).$$

Seja $n_\gamma(s) = N \times \gamma''(s)$ a normal a γ . Definamos ainda $\bar{u}, \bar{v} : [j, k] \rightarrow \mathbb{R}$ por $\lambda(s)n_\gamma(s) = \bar{u}(s)X_u + \bar{v}(s)X_v$. Extendemos \bar{u} e \bar{v} para $[a, b]$ por $\bar{u}(s) = 0 = \bar{v}(s)$ para $a \leq s \leq j$ e $k \leq s \leq b$. Escreva $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ e defina $C(r, s) = X(u(s) + r\bar{u}(s), v(s) + r\bar{v}(s))$ com $|r|$ suficientemente pequeno para esta expressão fazer sentido. Pelas propriedades exigidas por λ , segue que $C(r, a) = p$, $C(r, b) = q$ e $C(0, s) = \gamma(s)$; r parametriza uma família de curvas entre p e q . Para um valor fixo de r , calculemos o comprimento de um elemento da

família $\gamma_r(s)$ quando ele varia nesta família, isto é, $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\gamma_r}{ds}, \frac{d\gamma_r}{ds}\right)} ds$. Supondo que $L(\gamma)$ tenha um mínimo em $r = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}L(\gamma) &= \frac{d}{dr} \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\gamma_r}{ds}, \frac{d\gamma_r}{ds}\right)} ds = \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{\left(\frac{d\gamma_r}{ds}, \frac{d\gamma_r}{ds}\right)} ds. \\ &= \int_a^b \frac{\left(\frac{\partial^2 C}{\partial s \partial r}, \frac{\partial C}{\partial s}\right)}{\sqrt{\frac{\partial C}{\partial s}, \frac{\partial C}{\partial s}}} ds; \text{ para } r = 0, C(0, s) = \gamma(u(s), v(s)), \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial C(0, s)}{\partial s}, \frac{\partial C(0, s)}{\partial s}\right) &= 1, \text{ pois } \gamma \text{ é Tangente Unitária; aplicando integração por} \end{aligned}$$

partes obtemos

$$\begin{aligned} 0 = L'(0) &= \int_a^b \left(\frac{\partial^2 C}{\partial s \partial r}, \frac{\partial C}{\partial s}\right) \Big|_{r=0} ds \\ &= \int_a^b \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial C}{\partial r}, \frac{\partial C}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial C}{\partial r}, \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}\right) \right] \Big|_{r=0} ds \\ &= \left[\left(\frac{\partial C}{\partial r}, \frac{\partial C}{\partial s}\right) \Big|_{r=0} \right] \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{\partial C}{\partial r}, \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}\right) \Big|_{r=0} ds. \end{aligned}$$

Pela definição de $C(r, s)$ nós temos, sobre $[j, k]$ que:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \bar{u}(s)X_u + \bar{v}(s)X_v = \lambda(s)n_\gamma(s).$$

Como $n_\gamma(s)$ é perpendicular a $\frac{\partial C(0, s)}{\partial s} = \gamma'(s)$ nós temos que $\left(\frac{\partial C}{\partial r}, \frac{\partial C}{\partial s}\right) \Big|_{r=0} = 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = L'(0) &= - \int_a^b \left(\frac{\partial C}{\partial r}, \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}\right) \Big|_{r=0} ds = - \int_j^k (\lambda(s)n_\gamma(s), \gamma''(s)) ds = \\ &= - \int_j^k (\lambda(s)k_g(s)) ds < 0, \end{aligned}$$

isto é uma contradição, pois $L'(0) = 0$. Isto aconteceu pois supomos inicialmente $k_g(s_0) \neq 0$.

Desta forma $k_g(s) = 0$, para todo $s \in (a, b)$. Ou seja, $\gamma(s)$ é uma geodésica. \square



Figura 3.5: famílias de curvas $C(r, s)$. Fonte: [9]

3.4.1 Exercícios propostos

1. Encontre as equações diferenciais que determinam as geodésicas sobre o gráfico da função $Z = f(x, y)$.

Solução: Seja $Z = f(x, y)$ uma função diferenciável. Assim uma parametrização da superfície regular é:

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)) \text{ com } (u, v) \in Df.$$

Calculando a primeira forma fundamental: $X_u = (1, 0, f_u)$; $X_v = (0, 1, f_v)$
 Com $E = \langle X_u, X_u \rangle = (1 + f_u^2)$, $F = \langle X_u, X_v \rangle = (f_u f_v)$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle = (1 + f_v^2)$

Usando as equações geodésicas (3.1.1) temos que:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2) \\ \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2) \end{cases} \quad (3.4.1)$$

aplicando os valores na fórmula

$$\frac{d}{dt}((1 + f_u^2)u' + (f_u f_v)v') = \frac{1}{2}(2f_u f_{uu}u'^2 + 2(f_{uu}f_v + f_u f_{uv})u'v' + 2f_v f_{vu}v'^2) \text{ logo,}$$

$$\frac{d}{dt}((1 + f_u^2)u' + (f_u f_v)v') = (f_u f_{uu}u'^2 + (f_{uu}f_v + f_u f_{uv})u'v' + f_v f_{vu}v'^2).$$

A segunda é obtida de modo completamente análogo.

2. Se $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização de uma superfície regular S , tal que, $E(u, v) = E(u)$, $F(u, v) = 0$ e $G(u, v) = G(u)$, mostre que:

a) As curvas paramétricas, isto é, $v = v_0$ (constante) são geodésicas;

Solução: Utilizando uma das equações temos: $\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2)$

neste caso como $v = \text{constante}$ então $v' = 0$, assim $f(u, v) = 0$ implica $f_u, f_v = 0$

resolvendo a equação: $\frac{d}{dt}(Eu') = \frac{1}{2}(E_u u'^2)$

Analizando a outra equação: $\frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2)$

$\frac{d}{dt}(0u' + 0v') = \frac{1}{2}(0u'^2 + 20u'v' + 0v'^2)$, logo é satisfeita.

Assim nos resta a equação $\frac{d}{dt}(Eu') = \frac{1}{2}(E_u u'^2)$.

Suponha sem perda de generalidade que $t = s$ e que nossa geodésica seja tangente unitária, isto é, $\gamma = \gamma(s)$, $|\gamma'(s)| = 1$, então $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$,

sendo $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ logo, $\gamma'(s) = X_u u'(s) + X_v v'(s)$

Assim, $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle u'(s)X_u + v'(s)X_v, u'(s)X_u + v'(s)X_v \rangle$

Como $v' = 0$ e $F = \langle X_u, X_u \rangle = 0$, resta apenas dizer que:

$$\text{como } \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1, \text{ então } u'(s)(X_u, X_u) = u'(s)E = 1.$$

Assim:

$$\frac{d}{ds}(Eu') = \frac{1}{2}E_u u'^2(s) \quad (3.4.2)$$

então, $\frac{dE}{ds}u'(s) + E\frac{du'}{ds} = \frac{E_u}{2}u'^2(s)$

mas, $\frac{dE}{ds} = E_u u' + E_v v' = E_u u'$, pois $E = E(u)$.

Substituindo o resultado acima na equação (3.4.2) temos:

$$E_u u'^2(s) + E\frac{du'}{ds} = \frac{E_u}{2}u'^2(s).$$

Mas, $u'^2(s)E = 1$ derivando em s , obtemos:

$2u'(s)u''(s)E + u'^2(s)\frac{dE}{ds} = 0$, $\div u'(s)$ temos:

$$2u''(s)E + u'(s)\frac{dE}{ds} = 0.$$

Então, voltando as equações:

$$E_u u'^2(s) + E\frac{du'}{ds} = \frac{E_u}{2}u'^2(s).$$

Como $2u''(s) = -\frac{dE}{ds}u'(s)$, então $u''(s) = -\frac{1}{2}\frac{dE}{ds}u'(s)$

logo,

$$E_u u'^2(s) - \frac{1}{2}E_u u' = \frac{1}{2}E_u u'(s) \text{ (identidade)}$$

,ou seja, a solução $u(s), v(s_0)$ sobre $\gamma(s) = X(u(s), v_0)$ satisfaz as equações das geodésicas.

- b) As curvas paramétricas, isto é, $u = u_0$ (constante) são geodésicas se, e somente se $G_u(u_0) = 0$;

Solução: $\gamma(s) = X(u_0, v(s))$, então $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle X_v, X_v \rangle v'^2(s) = 1$

mas, $\langle X_v, X_v \rangle = G(u, v) = G(u_0, v(s)) = G(u_0) = \text{constante}$.

Então: $G(u_0)v'^2(S) = 1$.

Aplicando as equações geodésicas:

$$\frac{d}{ds}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2), \text{temos}$$

$$\frac{d}{ds}(E_{u_0} \cdot 0 + 0 \cdot v') = \frac{1}{2}(E_u \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot u'v' + G_u v'^2), \text{ logo}$$

$$0 = \frac{1}{2}(G_u v'^2). \quad (3.4.3)$$

Usando a outra equação: $\frac{d}{ds}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2)$, temos

$$\frac{d}{ds}(Gv') = \frac{1}{2}(0 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot v' + G_v v'^2), \text{ logo}$$

$G = G(u) = G(u_0) = \text{constante}$, assim $G_v = 0$,

como $\frac{d}{ds}(Gv'(s)) = 0$ então: $Gv'(s) = \text{constante}$,

mas $G(u) = G(u_0)$, logo $v'(s) = \text{constante}$.

Voltando a (3.4.3),

$$\frac{1}{2}G_u v'(s) = 0, \text{ mas } v'^2 = C_0, \text{ então } G_u \cdot C_0 = 0 \text{ logo } G_u = 0$$

É assim as equações geodésicas são compatíveis, ou seja, $\gamma(s) = X(u_0, v(s))$ é geodésica.

- c) A curva $X(u, v(u))$ é uma geodésica se, e somente se $v = \pm \int \frac{C\sqrt{E(u)}}{\sqrt{G(u)}\sqrt{G(u) - C^2}} du$,

$C = \text{constante}$

Solução: Sendo $\gamma(u) = X(u, v(u))$ uma geodésica, então:

$\gamma'(u) = X_u u' + X_v v'(u)$, assim sabendo que γ é tangente unitária então:

$$\langle \gamma'(u), \gamma'(u) \rangle = \langle X_u u' + X_v v'(u), X_u u' + X_v v'(u) \rangle$$

logo, $\langle X_u, X_u \rangle u'^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle u'v' + \langle X_v, X_v \rangle v'^2 = 1$ resolvendo temos que:

$$Eu'^2 + v'^2 G = 1. \quad (3.4.4)$$

Aplicando nas equações geodésicas:

$$\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2)$$

então $\frac{d}{du} E = \frac{1}{2}(E_u + G_u v'^2)$ e também:

$$\frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2)$$

então $\frac{d}{du}(Gv') = 0$ logo, $Gv' = C$

Voltando a equação (3.4.4):

$$Eu'^2 + v'^2G = 1, \text{ temos que } u'^2 = \frac{1 - Gv'^2}{E}.$$

$$\text{Logo, } \frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} \text{ então } \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{\left(\frac{du}{dt}\right)^2} = \frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{\left(\frac{1 - Gv'^2}{E}\right)}.$$

Mas, como $Gv' = C$, então $v' = C/G$ logo:

$$\frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{\frac{1 - Gv'^2}{E}} = \frac{\frac{C^2}{G^2}}{\frac{1 - G.C^2/G^2}{E}} = \frac{EC^2}{G(G - C^2)}, \text{ chegamos a igualdade:}$$

$$\frac{dv}{du} = \pm \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G - C^2}}, \text{ logo}$$

$$dv = \pm \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G - C^2}} du, \text{ integrando obtemos:}$$

$$v = \pm \int \frac{C\sqrt{E(u)} du}{\sqrt{G(u)}\sqrt{G(u) - C^2}}.$$

3. A distância entre dois pontos P e Q sobre o globo terrestre com latitude e longitude ϕ_1, θ_1 e ϕ_2, θ_2 é $\rho\psi$, onde ψ é o ângulo em radianos subtendido entre os dois pontos P e Q , sendo ρ o raio da terra, é dado pela fórmula:

$$\cos \psi = \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2$$

(ver:[4]) Com isso, calcule a menor distância entre Praga (República Checa) de coordenadas $N, 14^\circ 25' E$ e Winnipeg (Canadá) com coordenadas $49^\circ 55' N, 97^\circ 06' W$.

Solução: Como sabemos a curva que dá o menor comprimento sobre uma superfície, é a geodésica, e como aprendemos, na esfera as geodésicas são os grandes círculos; logo tomamos um grande círculo que passa entre as coordenadas esféricas dadas, de Praga e Winnipeg, e aplicamos à fórmula:

$$\cos \psi = \cos(50^\circ 05') \cos(49^\circ 55') \cos(14^\circ 25' - (-97^\circ 06')) + \sin(50^\circ 05') \sin(49^\circ 55') = 0,43528$$

onde ψ é ângulo subtendido na origem, o centro da terra. Porque Winnipeg está a oeste de Greenwich sua longitude é negativa.

Assim, $\psi = 64,196795^\circ = 1,1204954$ radianos. Mas $\psi = \frac{l}{R}$, logo $l = R\psi$.

A distância é obtida multiplicando o raio da terra pelo ângulo em radianos, assim:

$$l \approx 6.337,5 \text{ km} \cdot 1,1204954 \approx 7.145,64 \text{ km}$$

-Uma geodésica é uma curva que une dois pontos tal que, para pequenas variações da forma da curva, o seu comprimento é estacionário. Do ponto de vista prático, na maioria dos casos, a geodésica é a curva de menor comprimento que une dois pontos. Em uma geometria plana (euclidiano), essa curva é um segmento de reta, mas em geometrias curvas (riemana), muito utilizadas por exemplo na Teoria da Relatividade Geral, a curva de menor distância entre dois pontos pode não ser uma reta.

3.4.2 Aplicações

Uma empresa aérea que oferece vôos por todo o mundo em uma de suas estratégias de tornar as viagens mais lúdicas, trazia uma proposta em uma de suas revistas que o passageiro com a utilização de uma régua (anexa à revista) marcasse a rota feita pelo avião, durante a sua viagem. Logo após a página da atividade, teria um mapa comparativo da rota real com a possível traçada pelo passageiro, resultando em algo do tipo exposto na Figura: 3.6, em um vôo de Nova Iorque à Madrid por exemplo.



Figura 3.6: Rota Nova Iorque à Madrid. Fonte: google imagens

A geometria esférica oferece alguns recursos muito utilizados na navegação tanto por pilotos de avião como também por capitães de navios, durante a navegação ao redor do planeta. Sabemos por definições vistas em capítulos anteriores que considerando o globo terrestre uma esfera a menor distância entre dois pontos quaisquer da esfera deve ser o menor arco de circunferência máxima que passa pelos dois pontos, ou seja, podemos dizer que o que acontece o menor caminho entre Nova Iorque e Madrid é aquele formado pelo menor arco pertencente ao grande círculo do globo que tem as duas cidades como extremidades. A linha do equador é o caso perfeito de uma curva que tem como centro o centro da terra. As demais linhas, como trópico de Câncer e Capricórnio terão como centro um ponto acima e abaixo do eixo central de rotação da terra, mas não coincidirão com o centro da terra. Então, conforme mostra a figura abaixo, a distância mais curta entre Nova York e Madrid é a curva que tem como centro de curvatura o centro da terra, ou seja o viajante deve ir na trajetória que passa mais ao norte, veja a Figura: 3.7

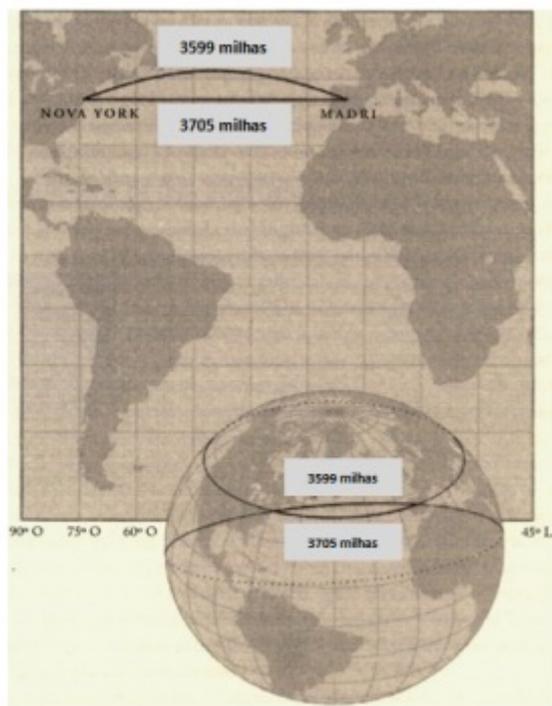


Figura 3.7: Distância Nova Iorque à Madrid. Fonte: google imagens

Como visto anteriormente, a esses grandes arcos chamamos de geodésicas, ou seja, o menor caminho de Nova Iorque a Madrid será o menor arco de extremidades nas duas cidades que pertence à geodésica do globo.

Outra situação parecida é voar de Porto Príncipe, no Haiti para Manila, nas Ilhas Filipinas onde o menor caminho é através do Alasca, pois passa pelo menor arco de circunferência máxima comum às três localidades Figura: 3.8.

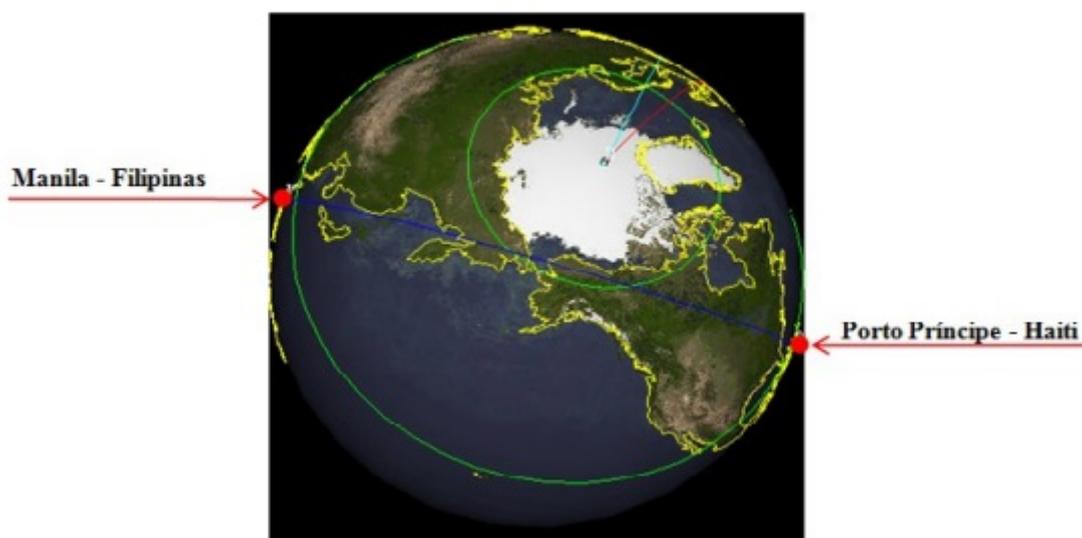


Figura 3.8: Fonte:professores.uff.br

Capítulo 4

Considerações Finais

Conforme podemos comprovar deste estudo sobre as geodésicas, muito ainda teríamos que realizar para uma completa análise de seus resultados.

O que fizemos foi tentar focar nas principais propriedades de geodésicas, tanto no aspecto físico(como as curvas de aceleração tangencial nula) quanto nos aspectos geométricos de representar a qualidade de "retidão" nas superfícies, quando no seu caráter de curvas que minimizam distâncias entre pontos de uma dada superfície regular.

Mostramos que as únicas geodésicas sobre a esfera são seus meridianos, entre outros exemplos. Mostramos também que a geodésica é uma propriedade intrínseca de superfície, isto é, depende exclusivamente dos coeficientes da primeira forma fundamental.

Sempre podemos dar ênfase sob diferentes ângulos de um determinado tópico, mas devido à extensão não tratamos de assuntos importantes relacionados às geodésicas, tais como o teorema de Hopf-Rinow (sobre completude das geodésicas), a aplicação exponencial, entre outros.

Mas espero ter contribuído para uma melhor visão de curvas sobre superfícies, assim como das próprias geodésicas.

Esperamos em trabalhos futuros que tais conexões sejam feitas para buscarmos melhor compreensão de assunto tão interessante e de várias aplicações no mundo moderno que defina novas coordenadas locais a uma superfície.

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, Leonardo Lima de. *O Teorema de Gauus Bonnet e sua aplicação no Ensino Médio*. PROFMAT- UEFS, Bahia, 2014.
- [2] BANCHOFF, Thomas. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Ed.Special Indian,2014).
- [3] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 2ª Ed. Rio de Janeiro: SBM,2012).
- [4] FENN, Roger. *Geometry*. Ed. Springer, New Yorque,2000).
- [5] FRENSEL, Katia.*Disponível em <http://www.professores.uff.br>*.
- [6] MCCLEARY,John. *Geometry From a Differentiable Viewpoint*. Cambridge university, 1994).
- [7] NUNES, Bruna. *Geometria Diferencial de Superfícies e o Teorema de Gauus-Bonnet*. PROFMAT- UESC, Santa Catarina, 2010.
- [8] PRESSLEY, Andrew.*Elementary Differential Geometry*. Ed. Springer,New York,1994).
- [9] RODRIGUES,Paulo R. *Introdução às Curvas e superficies*. Ed.UFF,Rio de Janeiro,2001).
- [10] TENENBLAT, Keti. *Introdução à Geometria Diferencial*. Ed. Blucher,São Paulo,2008).
- [11] VALADARES, Renato José da Costa. *Introdução à Geometria Diferencial*. Ed. UFF, Niteroi-RJ, 1979).
- [12] (<http://www.ime.uerj.br/calculo/LivroIII/cap7.pdf>)