UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

DANIELE DA CUNHA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE NÚMEROS COMPLEXOS:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Londrina
2013

DANIELE DA CUNHA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE NÚMEROS COMPLEXOS:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Laerte Natti

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S586m Silva, Daniele da Cunha.
Modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem de números complexos : uma proposta didática / Daniele da Cunha Silva. – Londrina, 2013.
93 f. : il.

Orientador: Paulo Laerte Natti.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Modelagem matemática – Teses. 3. Educação matemática – Teses. 4. Números complexos – Teses. I. Natti, Paulo Laerte. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

DANIELE DA CUNHA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE NÚMEROS COMPLEXOS:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Paulo Laerte Natti

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti-Orientador
Universidade Estadual de Londrina

Doherty Andrade

Prof. Dr. Doherty Andrade
Universidade Estadual de Maringá

Eliandro R Cirilo

Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 12 de abril de 2013.

A Deus, à minha família e aos meus mestres...

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela saúde, força e tudo de bom que tem proporcionado em minha vida, estando presente em cada momento, guiando meus caminhos, guardando todas as viagens e permitindo mais esta conquista;

À minha família, pelo amor, confiança, paciência e apoio incondicionais, principalmente aos meus pais, Joel e Marielce, ao meu irmão, Danilo, e, ao meu esposo, Delcio, pela presença, incentivo e orações, sobretudo nos momentos mais difíceis;

Aos amigos de Mestrado pelo convívio, união e aprendizado, especialmente à Liliam. Estudamos, rimos, choramos, enfim, ajudamo-nos mutuamente;

Aos coordenadores, professores e tutores da turma Profmat – 2011, Polo de Londrina, pela dedicação, amizade e conhecimentos transmitidos ao longo desses anos;

Ao Prof. Dr. Paulo Laerte Natti, pela orientação, apoio e paciência durante a elaboração deste trabalho;

Ao Prof. Dr. Doherty Andrade e ao Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo, pelas valiosas contribuições como membros da banca examinadora;

À Universidade Estadual de Londrina, pela oportunidade de investimento em minha formação profissional;

À CAPES pelo apoio financeiro através da concessão de bolsa de estudo;

Por fim, a todos que contribuíram para que esta conquista fosse possível.

“Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência".

Irene de Albuquerque

SILVA, Daniele da Cunha. **Modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem de números complexos:** uma proposta didática. 93 f. Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Neste trabalho buscamos responder a questão: “**como melhorar o processo de ensino e aprendizagem dos números complexos?”**. Neste contexto elaboramos uma proposta de atividades educacionais para o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo, onde utilizamos como metodologia a Modelagem Matemática. Tal proposta destacou que os conceitos e ideias referentes aos números complexos são úteis para a resolução de situações-problema. Acreditamos que as atividades sugeridas possam contribuir para uma aprendizagem efetiva sobre números complexos.

Palavras-chave: Sequência didática. Ensino Médio. Situação-problema.

SILVA, Daniele da Cunha. **Mathematical modeling in the teaching and learning process of complex numbers:** a didactic proposal. 93 f. Dissertation submitted to the Professional Master in Mathematics in National Network – PROFMAT – State University of Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

In this work we seek to answer the question: "how to improve the teaching and learning process of complex numbers?". In this context we developed a proposal to educational activities for the teaching-learning process of this content, in which we used as methodology the Mathematical Modeling. This proposal emphasized that the concepts and ideas relating to complex numbers are useful for resolving problem situations. We believe that the suggested activities can contribute to effective learning about complex numbers.

Key words: Didactic sequence. High School. Problem-situation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conteúdo matemático de Números Complexos faz parte do currículo da 3ª série do Ensino Médio, entretanto há muitas dificuldades que se apresentam durante o processo de ensino e aprendizagem do mesmo. Na maioria das vezes, o tratamento dado ao conteúdo se resume em cálculos algébricos, que, por sua vez, não têm sentido para os alunos.

Nos livros de Matemática para o Ensino Médio (RIBEIRO, 2010; SOUZA, 2010; DANTE, 2010), a abordagem referente aos números complexos ocorre de maneira padrão: inicia-se com um trecho da História da Matemática, especificamente o que se refere à busca pela solução da equação cúbica $x^3 - 15x + 4 = 0$; retomam-se as equações quadráticas que não possuíam solução no conjunto dos reais, alegando que, para resolver esse tipo de equação, foi estabelecido outro conjunto numérico; e, apresenta-se o conjunto dos Números Complexos juntamente com as definições, representações, operações, módulo, argumentos, etc.; sendo que a cada etapa é proposta uma gama de exercícios, os quais são resolvidos mecanicamente pelos alunos sem a devida compreensão. É comum, ao final do capítulo, encontrarmos uma leitura complementar que visa acrescentar ao aluno conhecimentos relacionados aos números complexos, tais como: “aplicações na geometria”; “aplicação em engenharia elétrica”; “um pouco mais de história”, entre outras. Os professores, posteriormente, em uma prova, cobram exercícios que são variações dos que já foram trabalhados em sala de aula, com diferentes níveis de dificuldade. Pronto, os alunos já aprenderam o essencial sobre os números complexos!

Dessa forma, os alunos aprendem que números complexos surgiram para tornar possível a solução de equações de grau dois, que envolvem raízes quadradas negativas; além de dominarem algumas técnicas operacionais com os números complexos.

Uma abordagem alternativa deste conteúdo pode ser observada em (MATEMÁTICA-3, 2008) que relaciona as operações com números complexos às transformações no plano, atribuindo significado a elas. Apesar desse enfoque ser interessante, ele não está presente nos livros.

Tendo em vista a dificuldade existente no tratamento do conteúdo de Números Complexos em sala de aula, propomos o desafio de elaborar uma proposta para o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo.

Recentemente algumas alternativas para o tratamento dos Números Complexos têm sido apresentadas. Oliveira (2010) propôs uma abordagem dos números complexos com ênfase em seus aspectos gráficos, elaborando uma sequência didática com o programa Geogebra. Esta abordagem foi baseada na Engenharia Didática de Michèle Artigue, a qual compara o trabalho didático ao trabalho de um engenheiro que "para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos da área, aceita se submeter a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos depurados da ciência" (Almouloud, 2007 *apud* Oliveira, 2010, p. 39). Já Spinelli (2009) destaca que significativo para os alunos é compreender que os números complexos são operadores de transformações de imagens no plano, para isto também utiliza o programa Geogebra. Cerri e Monteiro (2001) propõem uma abordagem utilizando a História da Matemática, para a construção dos conceitos.

Acreditamos que o conteúdo de números complexos deva ser abordado primeiramente através de uma situação-problema para motivar o estudo; em seguida mais algumas questões intercaladas com recortes da História da Matemática, as quais visam justificar a necessidade dos números complexos; posteriormente as ideias/conceitos/procedimentos relacionados aos números complexos devem ser trabalhados e, finalmente, apresentar a resolução da situação-problema inicial utilizando a nova ferramenta matemática.

Neste contexto, o objetivo do trabalho é propor uma nova abordagem para o conteúdo matemático dos números complexos, visando atribuir significado ao mesmo para que o aluno seja capaz de utilizar os conceitos envolvidos, aplicá-los em diferentes contextos, além de ter nos números complexos uma importante ferramenta que facilite a resolução de situações-problemas. Segundo Ribeiro (2009, p. 70), "na atividade de modelagem, os conhecimentos matemáticos emergem na medida em que são executadas a formulação e a resolução de problemas, o que lhes confere bastante significatividade". Nesse sentido utilizaremos a Modelagem Matemática como metodologia para fundamentar nossa proposta didática. A seguir, descrevemos a estrutura deste trabalho:

- Capítulo 2: apresentamos a problemática que possibilitou iniciar a nossa proposta e a fundamentação teórica para tal;
- Capítulo 3: descrevemos a História da Matemática dos números complexos e em seguida abordamos as formas tradicionais de ensino dos números complexos;
- Capítulo 4: apresentamos de forma organizada as etapas da nossa proposta didática;
- Capítulo 5: finalizamos com as considerações a respeito do trabalho realizado e possíveis desdobramentos.

Em anexo, são apresentadas, de forma resumida, as etapas da proposta didática.

2 PROBLEMÁTICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A problemática inicial que motivou a pesquisa e elaboração deste trabalho foi “**como melhorar o processo de ensino e aprendizagem dos números complexos?”**. Geralmente este conteúdo é trabalhado com ênfase na resolução de cálculos algébricos em detrimento de aspectos geométricos e com pouca contextualização.

A elaboração de uma sequência didática que possa ser vista como uma sugestão para o tratamento de números complexos na 3ª série do Ensino Médio se apresenta como um desafio. Buscaremos criar atividades que atribuam significado aos conceitos e que mostrem a importância do conteúdo dos números complexos.

Desenvolveremos nossa proposta didática segundo os princípios da Modelagem Matemática. Para Sadovsky (2010, p. 30):

> Além de contribuir para se ter uma visão mais integrada da atividade matemática, a ideia de modelagem realça o valor educativo que envolve o ensino dessa disciplina, oferecendo a possibilidade de atuar sobre uma porção da realidade por meio de um aparato teórico. O fato de expressar uma realidade usando uma teoria coloca o estudante numa perspectiva de maior generalidade, o que lhe permite estimar o valor e o potencial do conhecimento. Aqui reside um aspecto fundamental do sentido formativo que não se deve perder de vista. Digamos também que a ideia de modelagem implica a ideia de produção de conhecimento, o que possibilita enfocar o aspecto central visado pelo ensino.

Chaves e Espírito Santo (2011, p. 163) destacam que a modelagem matemática não é empregada somente por professores e matemáticos, mas também por outros profissionais “toda vez que utilizam conhecimentos matemáticos para representar, compreender e obter uma solução aos problemas pelos seus respectivos contextos de trabalho”. E ainda, que:

> [...]o processo da Modelagem Matemática consiste na tradução/organização de situações-problema, provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, segundo a linguagem simbólica da Matemática, fazendo aparecer um conjunto de símbolos ou relações matemáticas – *Modelo*

> *Matemático* – que procura representar ou organizar a situação-problema proposta com vistas a compreendê-la ou solucioná-la (CHAVES; ESPÍRITO SANTO, 2011, p. 163 – 164).

A obtenção de um modelo matemático também é destacada por Bassanezi que define modelagem como:

> [...] um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele (BASSANEZI, 2004 *apud* Ribeiro, 2009, p. 65 – 66).

Entretanto, de acordo com Barbosa (2001), a ideia de que a Modelagem visa à construção de um modelo matemático traz obstáculos para as práticas de Modelagem em sala de aula. Ele destaca que “a principal dificuldade diz respeito aos quadros de referências postos pelo contexto escolar; aqui, os propósitos, a dinâmica do trabalho e a natureza das discussões matemáticas diferem dos modeladores profissionais” (p. 2). Assim temos que:

> A resolução de algumas situações-problema pelo processo de Modelagem pode não resultar na construção de um Modelo Matemático. Nesse caso, a ênfase é dada na utilização das teorias matemáticas para organizar ou oferecer uma solução à situação-problema proposta, e a validação se dá por meio de uma análise crítica das respostas obtidas, no sentido de verificar o quanto estas são pertinentes ou não. Aqui se busca validar, ou não, um processo de resolução de uma situação-problema oriunda do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, e não de um Modelo Matemático que a represente. (CHAVES, ESPÍRITO SANTO, 2011, p. 164-165).

Vale destacar que a utilização da Modelagem Matemática como prática pedagógica indica a “necessidade de articulação entre definição, investigação e resolução”. (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p. 27). Para Barbosa (2001, p. 6), “modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade". Ele classifica a Modelagem Matemática em três casos:

1º) O professor apresenta a situação-problema e os alunos são responsáveis pela resolução. Não há a necessidade de procurar dados fora da sala de aula.

2º) O professor apresenta "um problema de outra área da realidade". Os alunos devem buscar dados para a sua resolução.

3º) Partindo de "temas não matemáticos" compete aos alunos a formulação e resolução do problema. Os alunos devem buscar dados para a resolução do problema.

Independente dos casos, o professor é "co-partícipe" dos alunos no processo de investigação. Assim, o professor deve realizar o trabalho da maneira que se sinta mais seguro, pois de acordo com CHAVES e ESPÍRITO SANTO (2011, p. 176):

> As tarefas do professor, utilizando Modelagem para o ensino da Matemática, resumem-se, portanto, em planejamento e mediação, ambas embasadas por conhecimentos de natureza conceituais, procedimentais e atitudinais. Os conceitos englobam os conhecimentos acerca da Matemática, seu ensino e sua aprendizagem, e os conhecimentos que dizem respeito à Modelagem no ensino, sua adoção e seu planejamento; os procedimentais, compreensões acerca do fazer Modelagem e do fazer Modelagem para a sala de aula; e os atitudinais, os papéis que o professor precisa assumir na mediação do processo em sala de aula.

Sendo assim, no trabalho com Modelagem o professor instiga os alunos a resolver um problema real "por meio de conceitos e procedimentos que já lhes são conhecidos, no sentido de construir outros, o que contribui para o estabelecimento de relações entre aquilo que o aluno já sabe e aquilo que precisa aprender". (CHAVES, ESPÍRITO SANTO, 2011, p. 170).

A construção de novos conceitos e procedimentos pode ser justificada quando "os alunos deparam-se com um obstáculo para o qual não possuem, provisoriamente, conhecimentos suficientes para superá-lo, emergindo assim a necessidade de construir tal conhecimento por meio dessa atividade" (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p. 26). Outra justificativa para a construção de conceitos novos é que eles podem facilitar a resolução de uma situação-problema, o que é comprovado mediante análises das diferentes resoluções possíveis. Ainda segundo ALMEIDA e VERTUAN (2011, p. 22),

> Considerando que a introdução de situações problemáticas nas aulas de matemática vem revestida de intenções e interesses de professores e alunos, entendemos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática. Por ser assim entendida, a modelagem tem como aporte maior a realização de investigações em sala de aula que tem o problema como ponto de partida, a intencionalidade na busca, as hipóteses como fatores que se colocam no caminho para indicar direções e em que diferentes resoluções matemáticas são empreendidas com vistas a resolver um problema.

Segundo Bueno (2011) há alguns elementos para que a Modelagem Matemática possibilite a aprendizagem dos alunos: valorizar as “raízes filosóficas” e a evolução da Modelagem Matemática; levar em consideração a realidade do professor e dos alunos; e, reconhecer que existem diversas maneiras de se fazer modelagem:

> Acreditamos que ao propor atividades de Modelagem Matemática para a sala de aula, é importante ter clareza das intenções que se tem ao trabalhar tais atividades. Se o objetivo é ensinar conteúdos matemáticos programáticos, por exemplo, cabe a escolha de uma maneira de trabalho, se o objetivo é refletir sobre questões sociopolíticas e a partir delas buscar ferramentas matemáticas para resolvê-las, talvez caiba a escolha de outra maneira de trabalho (BUENO, 2011).

Devido à pluralidade de caminhos que uma atividade de Modelagem Matemática pode percorrer, não há limite de tempo para tal, “a caracterização da atividade reside muito mais nas iniciativas, ações e procedimentos realizados pelo professor e pelos alunos do que em delimitações de tempo e de espaço de realização da atividade” (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p. 26).

Ainda segundo Almeida e Vertuan (2011, p. 27), “as práticas de sala de aula baseadas na realização de atividades investigativas, como é o caso das atividades de Modelagem Matemática”, demandam uma nova postura tanto dos alunos quanto do professor:

> O professor constrói-se com a Modelagem, modificando e aprimorando sua prática. Assim, o professor não deve se sentir atraído pela Modelagem simplesmente porque vai ao encontro de suas expectativas profissionais de um ensino para uma melhor aprendizagem, mas também porque contribui para o seu desenvolvimento profissional e, dessa forma, alimentando aquele que ensina com novas teorias, melhor pode ser a qualidade da aprendizagem. (CHAVES, ESPÍRITO SANTO, 2011, p. 177).
>
> [...] de modo geral, os alunos não estão acostumados a um processo de ensino-aprendizagem em que são os principais agentes do processo. Num ensino tradicional de Matemática, eles são meros receptores e reprodutores de conhecimentos, quase sempre prontos e inquestionáveis. Diferentemente, num projeto de modelagem matemática, os alunos veem-se obrigados a produzir novos conhecimentos à medida que levantam hipóteses, fazem questionamentos, resolvem problemas e avaliam soluções. Essa nova configuração da atividade de ensino requer uma mudança de postura por parte dos alunos, rompendo com antigas estruturas de ensino sobre as quais repousavam suas ideias acerca do significado de ensinar e aprender. (RIBEIRO, 2009, p. 71)

Neste contexto, a situação-problema escolhida como ponto de partida para a nossa proposta é apresentada abaixo.

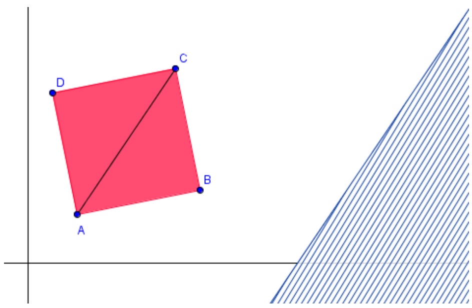
Um arquiteto está projetando um hotel em frente à praia. De acordo com seu projeto, o hotel deve ter a base quadrada, de tal forma que uma das diagonais de sua base seja paralela à orla. Empregando um sistema de coordenadas, ele determinou que os vértices da base que determina a diagonal paralela à orla deverão ser $A = (1,1)$ *e* $C = (3,4)$. *Responda:*

a) Qual o objetivo do arquiteto ao projetar o hotel desta forma (diagonal paralela à orla)?

b) Se esta condição (diagonal paralela à orla) não for cumprida, faz alguma diferença? Justifique.

c) Visando otimizar os lucros, quais devem ser as coordenadas dos outros vértices?

Figura 1- Representação geométrica do problema hotel-praia



Fonte: Autores.

A escolha por esta situação-problema se justifica por ilustrar a busca pelo lucro máximo, meta comum na sociedade atual; e, por possibilitar a resolução utilizando conceitos referentes aos números complexos. Além disso, permite a retomada de outros conteúdos matemáticos com a possibilidade de acrescentar outras questões complementares para aprofundamento dos conteúdos, como por exemplo: Qual o valor da diária de um quarto em um apartamento de vista para o mar?; Quanto custa, aproximadamente, para se construir um hotel como esse (deve se estipular a quantidade de andar)?; entre outras. De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (SÃO PAULO, 2012, p. 47):

> Procurar, em cada problema, não apenas uma solução, mas sim a melhor solução, para minimizar os custos ou maximizar os retornos, por exemplo, pode constituir um atrativo a mais na busca de contextualização dos conteúdos estudados.

Ressaltamos que iniciar um conteúdo por meio de uma situação-problema constitui um desafio para os alunos, o que contribui para a motivação, visto que,

> Desafiar um aluno significa propor situações que ele considere complexas, mas não impossíveis. Trata-se de gerar nele uma certa tensão, que o anime a ousar, que o convide a pensar, a explorar, a usar conhecimentos adquiridos e a testar sua capacidade para a tarefa que tem em mãos. Trata-se, ainda, de motivá-lo a interagir com seus colegas, a fazer perguntas que lhe permita avançar... Ao lançar o desafio, é necessário, sem dúvida, acreditar no potencial dos alunos, mas essa crença não pode ser inventada. Tem de estar respaldada em conhecimentos que possibilitem refletir sobre qual será o ponto de partida para a atuação. (SADOVSKY, 2010, p. 14 – 15)

Em tempo, gostaríamos de destacar que a inspiração para este problema inicial foram os dois problemas citados a seguir.

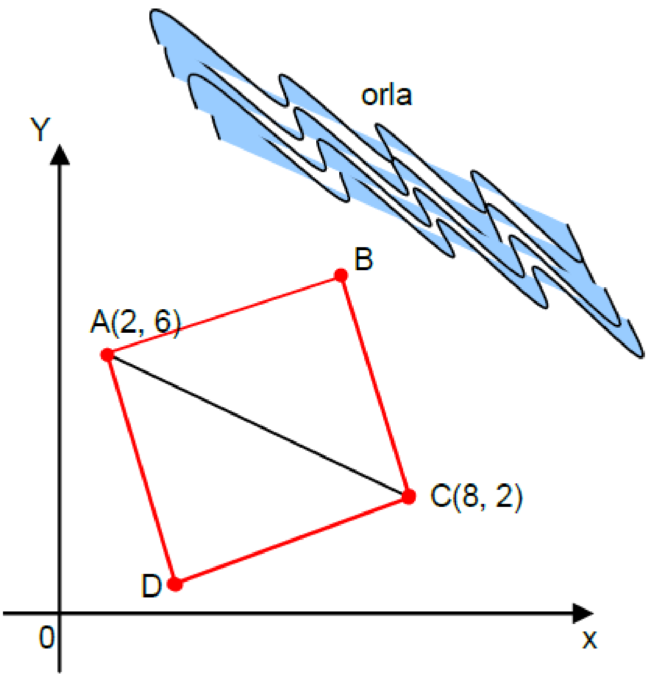
- *Problema 1 - (GUIMARÃES, 2013) Considere o quadrado ABCD, de diagonal AC definida pelos pontos* $(1,1)$ *e* $(3,4)$*. Determine as coordenadas dos demais vértices do quadrado.*

Fonte: http://www.rumoaoita.com/materiais/materiais_caio/complexos_cap2.pdf

- *Problema 2 - (ELIAS, 2013) Um arquiteto gostaria de construir um edifício de base quadrada em frente à praia, de tal forma que uma das diagonais de sua base fosse paralela à orla, conforme a ilustração abaixo. Utilizando um sistema de coordenadas cartesiano, ele determinou que os vértices da base que determinam a diagonal paralela à orla deverão ser $A(2{,}6)$ e $C(8{,}2)$. Determine as coordenadas dos outros dois vértices, de modo que o quadrilátero ABCD seja, de fato, um quadrado.*

Fonte: http://www.ambrosioelias.com.br/wp-content/uploads/2011/04/Professor-Ambr%C3%B3sio-Elias-Material-Geometria-Anal%C3%Adtica.pdf.

Figura 2- Representação geométrica do problema hotel-praia no vestibular da Universidade Estadual do Pará.



Fonte: Elias (2013)

No próximo capítulo, vamos abordar como o conteúdo de números complexos é apresentado tradicionalmente.

3 ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo, recorremos à História da Matemática para resgatar as origens dos números complexos. Deparamo-nos com as situações que propiciaram o surgimento de tais números, apontados como necessários para encontrar as soluções reais dos problemas. Na sequência, descrevemos como os livros – algumas vezes tidos como único recurso do professor em sala de aula – abordam o conteúdo de números complexos.

3.1 HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Ao longo da história da matemática vemos que a resolução de equações sempre fascinou os matemáticos. Como tais equações estavam relacionadas com um problema concreto, caso durante o processo de resolução surgissem raízes quadradas de números negativos, então se concluía que o problema não tinha solução.

Segundo Dante (2010), exemplos desta situação podem ser encontrados em obras de autores da Antiguidade, como na de Heron de Alexandria (século I), na qual aparece a expressão $\sqrt{81-144}$; e em Diofanto (século III) que tentou resolver a equação $24x^2 - 172x + 336 = 0$. De acordo com Milies (2008) a equação de Diofanto é fruto do problema: "Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados". Este problema é traduzido pela equação $24x^2 - 172x + 336 = 0$, ou ainda, $6x^2 - 43x + 84 = 0$, resultando na raiz $\sqrt{1849-2016}$.

Todavia, foi somente no século XVI, com os matemáticos italianos, que tais raízes começaram a aparecer sistematicamente. Gerolamo Cardano (1501-1576) tentou descobrir dois números cuja soma é 10 e cujo produto é 40 (JANOS, 2009). O problema de Cardano satisfaz as equações

$$x + y = 10 \text{ e} \tag{1}$$

$$xy = 40. \tag{2}$$

As soluções das equações (1 - 2) são dadas por $x = 5 + \sqrt{-15}$ e $y = 5 - \sqrt{-15}$.

Inicialmente Cardano não soube o que fazer com estas "soluções", pois não sabia o que estes valores significavam. Mas notou que elas satisfaziam as condições do problema, visto que:

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right) + (5 - \sqrt{-15}) = 10, \text{ e,}$$

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right)\left(5 - \sqrt{-15}\right) = 25 + 15 = 40.$$

Portanto, ele foi o primeiro a operar com raízes negativas.

As raízes de números negativos apareceram com frequência quando os matemáticos italianos buscaram as soluções de equações cúbicas. De acordo com Cerri e Monteiro (2001), por volta de 1510, Scipione del Ferro (1465-1526) encontrou uma forma geral de resolver equações do tipo $x^3 + mx = n$, mas morreu sem publicar sua descoberta. Entretanto, seu discípulo Antonio Maria Fior a conhecia. Segundo Iezzi (2005, p. 100), em meados de 1530, espalhou-se a notícia de que Nicolo Fontana de Brescia (1500-1557), o Tartaglia, sabia resolver equações do tipo $x^3 + px^2 = n$. Na época era muito comum acontecerem desafios entre os sábios. E, tentando ganhar notoriedade, Fior desafiou Tartaglia. A disputa envolvendo cúbicas ocorreu em 1535, quando cada um dos concorrentes escolheu 30 questões para que o seu oponente resolvesse, num prazo determinado de tempo. No dia da decisão, Tartaglia havia resolvido todas as questões propostas por Fior, já Fior não havia resolvido nenhuma das questões propostas por Tartaglia, assim Fior saiu humilhado e a fama de Tartaglia cresceu.

Para Cerri e Monteiro (2001), quando Cardano soube do triunfo de Tartaglia, pediu que este lhe revelasse a solução geral da equação de grau três para que ele publicasse. Tartaglia logicamente se recusou. Entretanto, Cardano tanto insistiu e jurou não divulgar a descoberta, que Tartaglia acabou por revelá-la. Porém, em 1545, quando apareceu em Nuremberg a "Ars Magna" de Cardano, um grande tratado em latim de álgebra, lá estava a solução de Tartaglia para a equação cúbica (EVES, 2004).

Há muitas variações sobre esta trama. O fato é que a fórmula de Cardano-Tartaglia (MATEMÁTICA-3, 2008), que possibilita encontrar as raízes da equação de 3º grau do tipo

$$y^3 + My + N = 0, \tag{3}$$

em notação usual, é dada por

$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}}\ . \tag{4}$$

Em (MATEMÁTICA-3, 2008) temos o seguinte problema: "Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x, outra com a forma de um paralelepípedo com a base retangular, de lados com 3m e 5m, e de altura igual à altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4m³ maior que o do paralelepípedo". Tal problema pode ser traduzido pela equação

$$x^3 = 15x + 4, \tag{5}$$

cuja solução por meio da fórmula de Cardano-Tartaglia é

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \tag{6}$$

Com base em nossa experiência com quadráticas, a conclusão parece ser que não há solução real. Por outro lado, pode-se verificar que $x = 4$ resolve a equação. Na realidade, a equação (6) tem três raízes reais (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 182). Iezzi (2005) destaca que o próprio Cardano não soube transformar a solução (6) no número 4. Conforme Boyer (2010, p.197)

> Sabia-se que o alvo era um número real, mas ele não podia ser atingido sem que se compreendesse alguma coisa sobre os números imaginários. Agora era necessário levar em conta os imaginários, mesmo que se concordasse em só aceitar raízes reais.

O algebrista italiano Rafael Bombelli (1526-1572) foi o responsável por resolver essa situação. Segundo Boyer (2010, p. 197), "Bombelli teve a feliz ideia de que os próprios radicais poderiam ser relacionados, de modo análogo àquele em que os radicandos são relacionados". Assim,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}. \tag{7}$$

Note que se $x = 4$, então: $a + b\,\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} = 4$, de onde segue que $a = 2$. Elevando-se ao cubo as igualdades em (7) obtém-se que $b = 1$.

De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 183),

> O trabalho de Bombelli mostrou que algumas vezes as raízes quadradas de números negativos são necessárias para encontrar soluções reais. Em outras palavras, ele mostrou que a aparência de tais expressões nem sempre é um sinal de que o problema não é solúvel. Esse foi o primeiro sinal de que os números complexos poderiam na realidade serem ferramentas matemáticas úteis.

Ainda, segundo Milies (2008),

> Bombelli percebeu claramente a importância deste achado. Ele diz: Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número. ... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas, mas eu procurei até que achei uma prova.

Carl B. Boyer (2010, p. 197) destaca que o próprio Bombelli chamou seu raciocínio de “ideia louca”, pois “apoiava-se em sofismas”; mas percebeu o papel dos números imaginários conjugados.

Peruzzo (2012) afirma que o trabalho com raízes negativas continuou nesta época, entretanto o que mais intrigava os matemáticos era que a manipulação dessas raízes produzia resultados certos, que algumas vezes não era possível encontrar com outros métodos. Observe que foram as equações de 3º grau que levaram à criação dos números imaginários.

Milies (2008) afirma que foi Albert Girard (1595-1632), em 1629, quem introduziu o símbolo $\sqrt{-1}$ e foi René Descartes (1596-1650), em 1637, quem utilizou pela primeira vez os termos real e imaginário. O suíço Leonhard Euler (1707-1783) utilizou i para representar $\sqrt{-1}$ pela primeira vez em um trabalho escrito em 1777 e publicado em 1794. Essa notação foi utilizada por Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em 1801, e devido a sua autoridade tornou-se padrão. Já “a representação gráfica dos números complexos foi obtida independentemente por Caspar Wessel (1745-1818), em 1799; Jean-Robert Argand (1768-1822), em 1822 e Johann Carl Friederich Gauss, em 1831”.

> Desde os dias de Girard sabia-se que os números reais – positivos, negativos e zero – podem ser representados como correspondendo a pontos de uma reta. Wallis tinha até sugerido que os imaginários puros fossem representados numa perpendicular ao eixo dos reais. Estranhamente porém, ninguém antes de Wessel e Gauss deu o passo óbvio de pensar nas partes real e imaginária de um número complexo a + bi como coordenadas retangulares de partes de um plano. Dar este simples passo fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade quanto aos números imaginários, pois estes agora podiam ser visualizados no sentido que cada ponto do plano corresponde a um número complexo e vice-versa. Ver é crer, e as velhas ideias sobre a existência de números imaginários foram abandonadas (BOYER, 2010, p. 350 – 351).

De acordo com Milies (2008), o responsável por introduzir a expressão número complexo foi Gauss, em 1832. Segundo Peruzzo (2012), em 1833, William Rowan Hamilton (1805-1865), representou os números complexos como um par ordenado de números reais. “Considera-se que este seja o marco de início da moderna formulação dos números complexos. Sendo $z = a + bi$, o número a é a parte real de z, Re(z) = a, e o número b é a parte imaginária, Im(z) = b” (PERUZZO, 2012). O conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, pois quando a parte imaginária é zero, obtemos apenas um número real. Portanto, a criação da unidade imaginária i, deu origem ao conjunto numérico dos complexos.

3.2 ENSINO CLÁSSICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Baseados nos livros didáticos: Matemática: Contexto e Aplicações (Dante, 2010); Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia, volume 3, (Ribeiro, 2010); e, Novo olhar matemática, volume 3, (Souza, 2010); notamos que a apresentação dos conceitos sobre números complexos segue uma abordagem padrão. Vejamos a seguir como estes conceitos são apresentados.

3.2.1 Igualdade e Operações entre Números Complexos

Ao se estruturar um novo conjunto numérico, é preciso definir esse novo tipo de número, analisar a igualdade de números nesse conjunto e as operações que podem ser efetuadas, pois é a partir delas que poderemos deduzir as propriedades que as operações possuem nesse conjunto. Assim, o conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais, em que estão definidas as operações de:

* Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$. (9)

* Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ (10)

* Multiplicação: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ (11)

3.2.2 Representação Algébrica de Números Complexos

Alguns conceitos iniciais:

- $\mathbb{R}$ é subconjunto de $\mathbb{C}$, pois identificamos o número complexo $(a, 0)$ como o número real a.

- O número complexo $(0,1)$ será chamado de unidade imaginária e indicado por i. Note que:

  $i^2 = i \,.\, i = (0,1) \,.\, (0,1) = (0 \,.\, 0 - 1 \,.\, 1, 0 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0) = (-1,0) = -1$, portanto:

  $$i^2 = -1. \qquad (12)$$

- O conjunto $\mathbb{R}$ é ordenado, pois sendo x, $y \in \mathbb{R}$, temos que $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$. Entretanto, não é possível estabelecer uma relação de ordem entre números complexos, pois um número complexo (não real) não é maior nem menor que outro complexo (não real), sendo $z, w \in \mathbb{C}$, temos que $z = w$ ou $z \neq w$.

Um número complexo qualquer $z = (a, b)$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$z = (a, b) = (a + 0, b + 0) = (a, 0) + (0, b). \tag{13}$$

Como

$$\begin{cases} (a, 0) = a\,(1, 0) = a \\ (0, b) = b\,(0, 1) = bi \end{cases} \tag{14}$$

Substituindo (14) em (13), segue que:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1{,}0) + b(0{,}1). \tag{15}$$

Como $a(1{,}0) = a$ e $b(0{,}1) = bi$, temos que:

$$z = (a, 0) + (0, b) = a + bi. \tag{16}$$

Portanto, todo número complexo pode ser escrito de maneira única como:

$$z = a + bi \text{ com } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1, \tag{17}$$

de onde seguem que:

- a : parte real de z; Re (z) = a;
- b : parte imaginária de z; Im (z) = b;
- $a + bi$: é a forma algébrica de z;
- $\bar{z} = a - bi$: é chamado conjugado de z;
- $-z = -a - bi$: é chamado oposto de z;
- se $b = 0$, temos $z = a$ que é um número real;
- se $a = 0$ e $b \neq 0$, temos $z = bi$ que é um número imaginário puro.

3.2.3 Operações na Forma Algébrica

Na forma algébrica, podemos efetuar as operações da mesma maneira que fazíamos no conjunto dos números reais, basta substituir i^2 por -1. Exemplos:

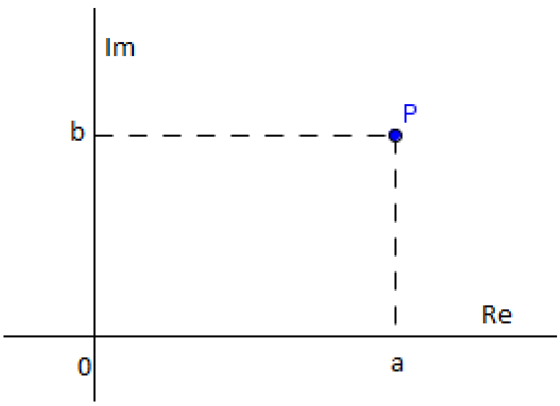
- Adição: $(2+3i)+(3-2i)=(2+3)+(3-2)i=5+i$
- Subtração: $(3+4i)-(2+i)=(3-2)+(4-1)i=1+3i$
- Multiplicação: $(2+3i).(3-4i)=6-8i+9i-12i^2=6+i-12.(-1)=18+i$
- Divisão: $\frac{18+i}{3-4i}=\frac{18+i}{3-4i}.\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{54+72i+3i+4i^2}{9-16i^2}=\frac{54+75i-4}{9+16}=\frac{50}{25}+\frac{75}{25}i=2+3i$

3.2.4 Representação Geométrica de Números Complexos

Cada número complexo $z=a+bi$ está associado ao par de números reais (a,b). Como a cada par de números reais está associado um único ponto do plano, segue que a cada número complexo $z=a+bi$ podemos associar o ponto $P=(a,b)$ chamado de afixo de z. O plano cartesiano em que estão representados os números complexos é o plano complexo ou plano de Argand-Gauss, onde o eixo das abscissas Ox é chamado eixo real, e o eixo das ordenadas Oy é chamado eixo imaginário.

Também podemos associar a cada complexo $z=a+bi$ um único vetor com extremidades na origem do sistema de coordenadas cartesianas e no ponto $P=(a,b)$.

Figura 3- Representação geométrica de um número complexo.



Fonte: Autores.

3.2.5 Potências de i

Observe que $i^0 = 1, i^1 = 1, i^2 = -1, i^3 = i^2.i = (-1).i = -i, i^4 = (i^2)^2 = 1,\ i^5 = i^4 .\ i = i,\ i^6 = i^4 .i^2 = -1, i^7 = i^4 .\ i^3 = 1 .(-i) = -i, i^8 = i^4 .i^4 = 1 .1 = 1$ e assim por diante. Verifica-se que as potências de i se repetem depois de i^4. Logo tem-se que: para $n = 4k \Rightarrow i^{4k} = 1$, para $n = 4k + 1 \Rightarrow i^{4k+1} = i$, para $n = 4k + 2 \Rightarrow n^{4k+2} = -1$ e para $n = 4k + 3 \Rightarrow n^{4k+3} = -i$.

3.2.6 Módulo de Números Complexos

O módulo de um número complexo $z = a + bi$ é a distância da origem O ao afixo de z, $P = (a, b)$. Logo $|z| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}$, isto é,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{18}$$

3.2.7 Argumento de um Número Complexo

O argumento de z é o ângulo θ, em que $0 \leq \theta < 2\pi$, entre o vetor $\overrightarrow{Oz}$ e o eixo x, contado positivamente no sentido anti-horário. Esse ângulo θ também pode ser indicado por arg(z) e satisfaz as seguintes condições

$$a = |z|cos\theta \quad \text{e} \quad b = |z|sen\theta, \ \text{com } |z| \neq 0. \tag{19}$$

3.2.8 Forma Trigonométrica de Números Complexos

Outra forma de escrever um número complexo é destacar seu módulo e seu argumento. Na representação plana dos complexos, substituindo as relações trigonométricas (19) na forma algébrica (17), temos que

$$z = |z|(cos\theta + i\ sen\theta), \tag{20}$$

que é denominada forma trigonométrica ou forma polar de z.

Nos livros didáticos citados anteriormente, a cada etapa da apresentação das operações com os números complexos são propostos exercícios de fixação, visando que os alunos incorporem a técnica dos cálculos com estes números.

No próximo capítulo vamos apresentar a nossa proposta de intervenção pedagógica na escola, que visa uma melhor compreensão e assimilação dos conceitos dos Números Complexos pelos alunos.

4 INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NA ESCOLA

Este capítulo sugere um roteiro de atividades a serem desenvolvidas com alunos da 3ª série do Ensino Médio, visando à compreensão e assimilação dos conceitos do conteúdo matemático de números complexos, pelos mesmos, a saber: representação dos números complexos; operações fundamentais com números complexos; conjugado, módulo e argumento de um número complexo; e, relações entre tais conceitos. Destacamos que as inovações pretendidas referem-se à maneira de abordagem de tal conteúdo. Busca-se evidenciar alguns dos princípios fundamentais do processo de ensino-aprendizagem, tais como: "selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema", uma das cinco competências do Enem – Exame Nacional do Ensino Médio – que são destacadas no Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (SÃO PAULO, 2012, p. 19).

A elaboração desta proposta é baseada na Modelagem Matemática, que possibilita ao aluno ter:

> Uma experiência de produção de conhecimento no âmbito de certo domínio matemático (divisibilidade, geometria métrica, proporcionalidade, funções, álgebra linear etc.), experiência que lhes permita, também, enriquecer a conceitualização teórica nesse mesmo domínio" (SADOVSKY, 2010, p. 39).

Além disso, procuramos destacar os três fatores principais desta metodologia "reconhecer uma problemática, escolher uma teoria para "tratá-la" e produzir conhecimento novo a respeito" (SADOVSKY, 2010, p. 26).

Acreditamos que a nossa proposta pode contribuir para que os alunos desenvolvam algumas das características que "são cada vez mais valorizadas, como as capacidades de resolver problemas, trabalhar em grupo, continuar aprendendo e agir de modo cooperativo; pertinentes em situações complexas" (SÃO PAULO, 2012, p. 8). Assim, na sequência apresentamos uma visão geral das seis etapas da proposta.

A primeira etapa da sequência didática apresenta uma situação-problema. O objetivo desta primeira fase é instigar os alunos na busca pela resposta, retomando conceitos e procedimentos (de geometria analítica) que eles já possuem. Na conclusão desta atividade, será mencionada a existência de outra solução mais breve, porém para que eles possam compreendê-la, necessitam de conceitos novos.

A segunda etapa da sequência didática propõe algumas questões em paralelo com recortes da história da matemática, visando mostrar a necessidade dos números complexos, e, além disso, demonstra que os matemáticos da época também tinham dúvidas durante a construção/surgimento deste conceito.

A terceira etapa propõe a apresentação aos alunos do conteúdo de números complexos, por meio de uma sequência de atividades, cuja abordagem mescla a representação geométrica e algébrica. Compete ao professor abordar as ideias principais e, caso opte, selecionar exercícios extras para que os alunos adquiram domínio das técnicas do conteúdo.

Já a quarta etapa apresenta a resolução do problema inicial utilizando o conteúdo dos números complexos. Voltamos ao ponto de partida para fechar o processo de Modelagem Matemática, e demonstramos, assim, que o novo conteúdo facilita a resolução deste problema.

Na quinta etapa são fornecidos mais alguns problemas para que o professor, ao trabalhar com os alunos, explore mais essa ferramenta matemática que o conteúdo dos números complexos propicia.

Por fim, na sexta etapa é proposto um questionário que deverá ser respondido individualmente pelo aluno, visando avaliar a aprendizagem do conteúdo de números complexos.

A seguir, apresentamos detalhadamente as etapas da proposta de intervenção pedagógica.

4.1 APRESENTAÇÃO DA SITUAÇÃO PROBLEMA

Nesta primeira etapa, como já mencionado, partimos de uma situação-problema e procuramos contextualizar a matemática, relacionando teoria e prática. Ressaltamos que

> A caracterização dos conteúdos disciplinares como meio para a formação pessoal coloca em cena a necessidade de sua contextualização, uma vez que uma apresentação escolar sem referências, ou com mínimos elementos de contato com a realidade concreta, dificulta a compreensão dos fins a que se destina.
> É fundamental, no entanto, que a valorização da contextualização seja equilibrada com o desenvolvimento de outra competência igualmente valiosa: a capacidade de abstrair o contexto, de aprender relações que são válidas em múltiplos contextos e, sobretudo, a capacidade de imaginar situações fictícias, que não existem concretamente, ainda que possam vir a ser realizadas (SÃO PAULO, 2012, p.30).

Acrescentamos que

> A relação entre teoria e prática não envolve necessariamente algo observável ou manipulável, como um experimento de laboratório ou a construção de um objeto. Tal relação pode acontecer ao se compreender como a teoria se aplica em contextos reais ou simulados (SÃO PAULO, 2012, p.21).

Neste contexto apresentamos abaixo a situação-problema inicial.

Etapa 1: Problematização.
Objetivo: Instigar os alunos na busca pela solução de uma situação-problema.
Ação: Resolução da situação-problema proposta.
Orientações: Organize a sala em grupos de quatro alunos; explique que será proposta uma situação-problema para que eles resolvam num determinado tempo; e combine que a resolução do grupo deverá ser entregue em uma folha ao final do tempo previsto. Durante a resolução, acompanhe os grupos, oriente e instigue os alunos na busca pela resposta.

Recursos: Folha de atividade 1, lápis, borracha, e, caso os alunos julguem necessário, outros instrumentos como calculadoras, régua e malha quadriculada.

Tempo estimado: 2 horas/aulas.

Atividade 1.1 – *Um arquiteto está projetando um hotel em frente à praia. De acordo com seu projeto o hotel deve ter a base quadrada, de tal forma que uma das diagonais de sua base seja paralela à orla. Empregando um sistema de coordenadas, ele determinou que os vértices da base que determina a diagonal paralela à orla deverão ser* $A = (1,1)$ *e* $C = (3,4)$. *Veja a representação geométrica do problema na Figura 1. Responda:*

a) Qual o objetivo do arquiteto ao projetar o hotel desta forma (diagonal paralela à orla)?

Espera-se que os alunos percebam que a construção do hotel desta forma permite que mais quartos tenham janelas com vista para o mar.

b) Se esta condição (diagonal paralela à orla) não for cumprida, faz alguma diferença? Justifique.

Quanto aos custos da construção, não. Mas quanto aos lucros futuros, sim, pois os quartos que possuem janela com vista para o mar possuem valor da diária mais alto em comparação aos quartos que não possuem tal vista. Portanto, se a condição não for cumprida, os lucros serão menores.

c) Visando otimizar os lucros, quais devem ser as coordenadas dos outros vértices?

Aqui se espera que os alunos organizem suas resoluções no tempo estipulado e seguindo as condições do problema.

Destacamos que

> Pensar a sala de aula como um contexto no qual se desenvolve a atividade matemática requer também pensar em condições para que os alunos sejam levados a formar conjeturas, procurar formas de validá-las, produzir argumentos dedutivos, arriscar respostas para as questões que se formulam, criar formas de representação que contribuam para chegar às soluções que se buscam, reformular e reorganizar os velhos conhecimentos à luz dos novos conhecimentos produzidos, generalizar as ferramentas que vão surgindo e também definir os seus limites (SADOVSKY, 2010, p. 55)

Assim, os alunos podem apresentar a solução do problema por meio de vários argumentos. A seguir, citamos alguns:

- Solução Geométrica utilizando régua e compasso, entre outros instrumentos de desenho. Uma possível resposta pode ser obtida através dos seguintes procedimentos:

1º) Marcar os pontos $A = (1,1)$ e $C = (3,4)$ num papel quadriculado.

2º) Traçar a diagonal AC.

3º) Encontrar o ponto médio M de AC.

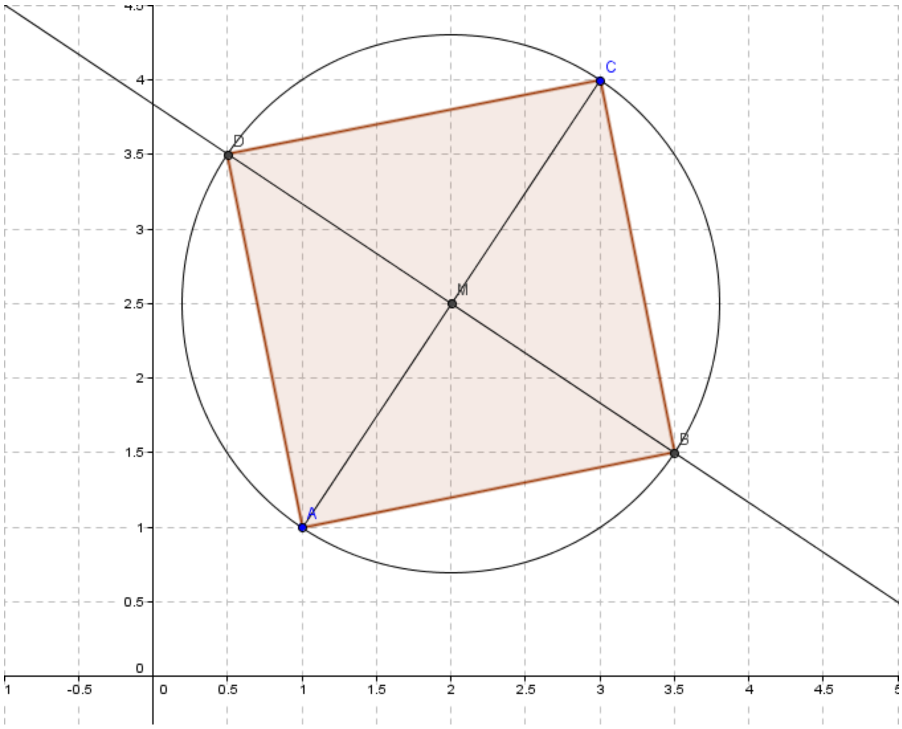
4º) Traçar uma reta perpendicular a AC passando por M .

5º) Traçar a circunferência C de centro M e diâmetro AC.

6º) A intersecção da circunferência C com a reta t possibilita encontrar os pontos B e D.

7º) Encontrar as coordenadas dos pontos $B = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e $D = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Figura 4- Solução geométrica da situação-problema hotel-praia.



Fonte: Autores.

Vale ressaltar que, neste caso, as coordenadas dos pontos são fáceis de visualizar no plano cartesiano, entretanto, em outras situações, poderíamos encontrar valores não exatos, o que dificultaria a obtenção das coordenadas corretas desses pontos. Logo, nem sempre essa estratégia geométrica é uma boa opção para se buscar a resposta, porém é sempre válida por possibilitar uma melhor compreensão do problema. Enfim, o professor deve ressaltar que a precisão dos desenhos tem influência nos resultados obtidos.

- Solução Algébrica utilizando e aplicando conceitos como distância entre dois pontos; ponto médio; equação da circunferência; equação da reta; sistemas lineares de equações; resolução de equação do 2º grau; entre outros. Uma possível resposta para o problema, utilizando esses conceitos, pode ser obtida através dos seguintes procedimentos:

1º) Como os vértices $A = (1,1)$ e $C = (3,4)$ constituem a diagonal AC do quadrado $ABCD$, por distância entre dois pontos, temos que:

$$d(A, C) = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}$$

2º) Seja M o ponto médio de AC, logo $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$. Note que M pode ser considerado o centro de uma circunferência C e raio $\frac{\sqrt{13}}{2}$, que contém os vértices A e C.

3º) Como a base do hotel é quadrada (as diagonais são iguais e se cruzam no ponto médio), então a circunferência também passará pelos vértices B e D. A equação desta circunferência pode ser descrita como:

$$C = (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}.$$

4º) Por outro lado, seja r a reta que passa pelos vértices A e C, então, pela forma da equação da reta, temos $\begin{cases} 3a + b = 4 \\ a + b = 1 \end{cases}$, de onde segue que $a = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$ e $r: y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$.

5º) Seja s a reta que passa pelo ponto M e é perpendicular a r. Note que esta reta contém os vértices B e D. Como são perpendiculares, segue que o coeficiente angular de s é $-\frac{2}{3}$. Logo, $s: y = -\frac{2}{3}x + b$ e como passa por $M = \left(2, \frac{5}{2}\right)$, temos que $b = \frac{23}{6}$, logo $s: y = -\frac{2}{3}x + \frac{23}{6}$.

6º) Como os vértices B e D pertencem tanto à circunferência C quando a reta s, devemos analisar então $C \cap s$, assim:

$$\begin{cases} (\mathrm{x} - 2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \\ \mathrm{y} = -\frac{2}{3}\mathrm{x} + \frac{23}{6} \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + \left(-\frac{2}{3}\mathrm{x} + \frac{23}{6} - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \Rightarrow 4x^2 - 16x + 7 = 0$$

7º) Resolvendo a equação de 2º grau, encontramos $x_1 = \frac{7}{2}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. Então, calculando y correspondente:

$$y_1 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{7}{2}\right) + \frac{23}{6} \Longrightarrow y_1 = \frac{3}{2};$$

$$y_2 = -\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{23}{6} \Longrightarrow y_2 = \frac{7}{2}\,.$$

Portanto, podemos concluir que $B = \left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$ e $D = \left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

- Solução Inesperada utilizando corretamente conceitos e procedimentos válidos. O professor deve estar ciente que essa situação pode acontecer e estar preparado para tal.

- Solução Não satisfatória: os alunos apesar das consultas e discussões não conseguem definir corretamente os outros vértices solicitados. Esta situação pode ocorrer devido à falta de pré-requisitos, a erros durante a elaboração do raciocínio, a conclusões precipitadas, entre outras.

Após o tempo estimado para a resolução do problema por todos os grupos é válido que se faça a socialização da atividade destacando: as estratégias utilizadas, as dificuldades encontradas e a discussão dos resultados. Sadovsky (2010) destaca algumas “questões que fazem parte” da interação entre docente e alunos: “exigir mais precisão nas formulações dos alunos, reperguntar, discutir e interpelar” (p.55).

Finalmente, o professor encerra essa primeira atividade comentando que há uma solução mais breve, mas que para que consigam compreendê-la, necessitam de novos conceitos. Caso nenhum dos grupos apresente uma solução, o professor deve encerrar a atividade da mesma forma, isto é, comentando que a solução necessita de novos conceitos. Sadovsky (2010, p. 55) destaca que

> Para aprender, os estudantes, por sua vez precisam assumir a tarefa de reconstrução matemática como um projeto pessoal. Isso implica que considerem suas resoluções como objeto de reflexão e que possam produzir teoria com base nelas (por exemplo, que estejam em condições de sintetizar o que sabem até um certo momento, com relação a um determinado tema); que possam *voltar atrás*, e revisar e modificar ideias já elaboradas; que admitam a possibilidade de *deixar pendentes*, em dado momento, questões ainda não compreendidas por inteiro, mas que possam ser recuperadas depois; que tomem consciência de seus aprendizados e

> reconheçam, no presente, sua capacidade de resolver algo que antes não sabiam; e que enfoquem a resolução de um problema com ideias que contribuam para sua abordagem.

Sendo assim, a retomada desta questão em outro momento é de extrema importância e se constitui no fechamento da nossa proposta de Modelagem Matemática. Na sequência, visando à compreensão, por parte dos alunos, da necessidade dos números complexos, recorremos à História da Matemática.

4.2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E A NECESSIDADE DE NOVOS CONCEITOS

Nesta segunda etapa, partimos da ideia de que

> [...] o trabalho com o bloco de conteúdos denominado **Números** tem por objetivo principal um enriquecimento do escopo da linguagem numérica, inicialmente restrita a situações e problemas envolvendo a contagem e a medida. As sucessivas ampliações dos campos numéricos por meio de situações significativas que problematizem essa necessidade constituem o caminho natural para tal enriquecimento. Tais situações podem ser apoiadas na história [...] (SÃO PAULO, 2012, p.40).

Aqui, apresentaremos alguns problemas com números complexos, inspirados naqueles já encontrados durante a história da matemática, intercalados com recorte da História da Matemática, com o objetivo que os alunos notem a necessidade da construção de novos conceitos, visto que

> Uma possibilidade de transposição didática é reproduzir a indagação de origem, a questão ou necessidade que levou à construção de um conhecimento – que já está dado e precisa ser apropriado e aplicado, não obrigatoriamente ser “descoberto” de novo (SÃO PAULO, 2012, p.21).

Esses problemas permitirão aos alunos perceber e reconhecer que até mesmos os grandes matemáticos tinham dúvidas, e que a busca pelo esclarecimento dessas dúvidas possibilitaram o surgimento de novos conceitos matemáticos; mostrando, assim, que a matemática é uma ciência em construção.

Etapa 2: História da Matemática e algumas questões.
Objetivos: Resolver questões e compreender a necessidade da criação de novos conceitos matemáticos.
Ação: Resolução das questões que reproduzem as indagações de origem.
Orientações: Mantendo a formação em grupos; propor as questões que devem ser resolvidas pelos alunos com o auxílio do professor.
Recursos: folha de atividade 2, lápis, borracha.
Tempo estimado: 4 horas/aulas.

Atividade 2.1 – *Encontre dois números cuja soma é 17 e cujo produto é 52. Registre o seu raciocínio e confira a resposta.*

Uma possível solução para o problema pode ser obtida da seguinte forma, ou seja, sejam x e y os números desejados, logo temos:

$$\begin{cases} x + y = 17 & (21) \\ x \,.\, y = 52 & (22) \end{cases}$$

de (21) temos que $x = 17 - y$, e por substituição em (22) segue que $(17 - y).\,y = 52 \Rightarrow y^2 - 17y + 52 = 0 \Rightarrow y = 4$ e $y = 13$. Voltando em (21), segue $x = 13$ e $y = 4$, respectivamente. Portanto, os números procurados são 4 e 13.

Atividade 2.2 – *Descubra dois números cuja soma é 10 e cujo produto é 40. Registre o seu raciocínio e confira a resposta.*

Uma possível solução para o problema pode ser obtida da seguinte forma, ou seja, sejam x e y os números desejados, logo temos:

$$\begin{cases} x + y = 10 & (23) \\ x \, . \, y = 40 & (24) \end{cases}$$

De (23) temos que $y = 10 - x$. Substituindo em (24) segue que $x\,.(10 - x) = 40 \Rightarrow x^2 - 10x + 40 = 0 \Rightarrow x = 5 + \sqrt{-15}$ ou $x = 5 - \sqrt{-15}$.

Comente com os alunos que Cardano tentou resolver esta questão e não soube o que fazer com estas soluções, pois não sabia o que estes valores significavam. Mas, ele notou que tais números satisfaziam as condições do problema, pois:

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right) + \left(5 - \sqrt{-15}\right) = 10 \text{ e}$$

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right)\left(5 - \sqrt{-15}\right) = 25 + 15 = 40,$$

Atividade 2.3 – *Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x, outra com a forma de um paralelepípedo com a base retangular, de lados com 3m e 5m, e de altura igual à altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4m³ maior que o do paralelepípedo.*

a) Escreva a equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de x.

O problema relaciona o volume do cubo V_c de dimensões x com o volume do paralelepípedo V_p de dimensões $3, 5$ e x. Os volumes são dados por

$$V_c = x.x.x = x^3 \text{ e}$$

$$V_p = 3\,.\,5\,.\,x = 15x\ .$$

Como o volume do cubo deve ser 4m³ maior que o do paralelepípedo, temos que: $V_c = V_p + 4$, de onde segue que, $x^3 = 15x + 4$, ou ainda,

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \quad (25)$$

Portanto, a equação que traduz a exigência é $x^3 - 15x - 4 = 0$.

b) Por tentativa e erro, busque um valor para x que satisfaça a equação do item anterior.

Espera-se que os alunos atribuam valores para x e realizem as operações necessárias observando se a igualdade se mantém. Estipule um tempo para que os alunos respondam e lembre que os termos “solução da equação” e “raiz da equação” possuem o mesmo significado.

c) A equação que traduz a situação proposta é uma equação do terceiro grau do tipo $y^3 + My + N = 0$, isto é, não apresenta o termo em y^2. Na história da matemática, encontramos uma longa narrativa que ilustra a busca pela solução de tais equações.

Diz a lenda que, por volta de 1510, Scipione del Ferro foi o primeiro a encontrar uma forma geral para resolver essas equações, mas morreu sem publicar sua descoberta. Porém, seu aluno Antonio Maria Fior a conhecia. Em meados de 1530 espalhou-se a notícia de que Tartaglia também sabia resolver essas equações e, tentando ganhar notoriedade, Fior o desafiou. Cada um propôs ao outro 30 questões envolvendo equações cúbicas para serem resolvidas dentro de um prazo, entretanto Tartaglia resolveu todas as questões propostas por Fior, o qual não resolveu nenhuma das questões propostas por Tartaglia. Logo, Fior saiu humilhado e a fama de Tartaglia cresceu grandemente. Quando Cardano soube do triunfo de Tartaglia, pediu que este lhe revelasse a solução geral da equação de grau 3 para que ele publicasse. Tartaglia logicamente se recusou. Entretanto, Cardano tanto insistiu e jurou não divulgar a descoberta, que Tartaglia acabou por revelá-la e Cardano publicou tal fórmula no livro que lançou em 1545, Ars Magna. A fórmula acabou ficando conhecida como fórmula de Cardano:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}}$$

Aplique a fórmula de Cardano para resolver a equação do item a). O que você obtém?

Como a fórmula serve para equações do tipo: $y^3 + My + N = 0$ e a equação do item (a) é $x^3 - 15x - 4 = 0$, por comparação temos que $M = -15$ e $N = -4$, assim substituindo os valores na fórmula de Cardano, temos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad . \tag{26}$$

Espera-se que os alunos se deparem com a raiz quadrada de um número negativo, a saber, $\sqrt{-121}$. Possivelmente dirão que não é possível continuar, pois há uma raiz quadrada de um número negativo. Caso não tenham encontrado nenhum valor no item b), proponha o item d). Se já encontraram, vá para o item e).

d) Verifique que 4 é uma raiz da equação do item a).

Basta substituir x por 4, de modo que $x^3 - 15x - 4 = 0 \Longrightarrow 4^3 - 15\,.\,4 - 4 = 0 \Longrightarrow 64 - 60 - 4 = 0 \Longrightarrow 0 = 0$, logo o número 4 é uma raiz da equação.

e) Se $x = 4$ é uma solução, como relacionar isso com o item c)?

Professor, após as hipóteses dos alunos, comente que essa também era uma dúvida dos matemáticos da época, entre eles Cardano e Bombelli, e que essa situação torna clara a necessidade de se resolver a raiz quadrada negativa para encontrar o valor real, $x = 4$. Conte que foi Bombelli que resolveu a situação e explique o raciocínio dele, isto é, sejam

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}.$$

Então, se $x = 4$ temos $a + b\,\sqrt{-1} + a - b\,\sqrt{-1} = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$. Portanto,

$$2 + b\,\sqrt{-1} + 2 - b\,\sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\,,$$

por comparação,

$$2+b\sqrt{-1}=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} \quad \text{e} \quad 2-b\sqrt{-1}=\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Note que:

$$2+b\sqrt{-1}=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} \Rightarrow$$

$$\left(2+b\sqrt{-1}\right)^3=2+\sqrt{-121} \Rightarrow$$

$$8+12b\sqrt{-1}-6b^2-b\sqrt[3]{-1}=2+\sqrt{(-1).121} \Rightarrow$$

$(8-6b^2)+(12b-b^3)\left(\sqrt{-1}\right)=2+11\sqrt{-1}$, e novamente por comparação, temos:

$$\begin{cases} 8-6b^2=2 & (27) \\ b(12-b^2)=11 & (28) \end{cases}$$

de onde segue que $b^2=1 \Rightarrow b=1$ ou $b=-1$. Note que em (28)

* para $b=1$, temos: $12\,.\,1-1^3 = 11$

* para $b=-1$, temos $12\,.\,(-1)-(-1)^3 = -12+1 = -11$

Assim, somente o valor positivo satisfaz as duas equações do sistema e $b=1$. Portanto, $x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$.

Vale destacar que este problema que inicialmente recaia em uma raiz quadrada de número negativo, mostra a necessidade de relacionar esses resultados com as soluções reais. A busca para superar essa dificuldade na época proporcionou o desenvolvimento de novos conceitos, a saber, números complexos.

A seguir, propomos a apresentação desses conceitos aos alunos utilizando uma abordagem que difere da abordagem tradicional.

4.3 PRINCIPAIS CONCEITOS SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS

Esta etapa visa à formalização dos conceitos e procedimentos referentes aos números complexos. Em um primeiro momento é apresentada uma visão geral dos conjuntos numéricos até o conjunto dos números complexos, e, na segunda parte, é proposta uma sequência de atividades para aquisição das ideias principais.

Etapa 3: Formalização dos conceitos sobre números complexos

Objetivos: Compreender a necessidade da expansão dos conjuntos numéricos; possibilitar aos alunos a aquisição de conceitos e procedimentos referentes ao conteúdo dos números complexos, dentre os quais destacamos: as representações, as operações, o módulo, o argumento e o conjugado.

Ação: Breve relato, por parte do professor, sobre os conjuntos numéricos e resolução das atividades propostas, por parte dos alunos.

Orientações: Organize a sala em grupos de quatro alunos; faça um relato sobre os conjuntos numéricos, dialogando com os alunos; explique que as questões seguintes mesclam a representação geométrica e a algébrica e acompanhe os grupos durante o trabalho.

Recursos: folha de atividade 3, lápis, borracha, régua, malha quadriculada, tabela de razões trigonométricas e, se possível, um software como o Geogebra. Caso opte pela utilização do software, é necessário apresentá-lo aos alunos em um momento anterior, para que eles adquiram domínio das principais funções, e, depois, aplicar essa atividade.

Tempo estimado: 5 horas/aulas.

Atividade 3.1 – *Os conjuntos numéricos.*

Inicialmente, tínhamos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3, 4, ..., n}. Entretanto, algumas subtrações não são possíveis neste conjunto, por exemplo, na expressão $7 - 10$ o resultado não é um número natural. Dessa forma esse conjunto foi estendido e obtivemos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}. Porém, existem divisões cujo resultado não é um número inteiro, por exemplo, na expressão $\frac{3}{4}$. Logo, foi necessário estender esse conjunto, obtendo assim o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{x = \frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e

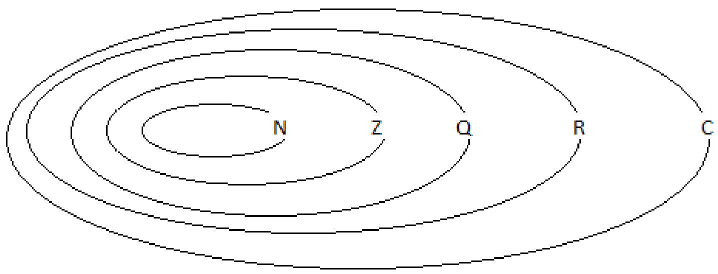
$b \neq 0\}$. Mas, por exemplo, a equação $x^2 = 2$ não possui resultado racional, $\sqrt{2}$ e – $\sqrt{2}$ são exemplos dos números chamados irracionais $\mathbb{I}$. Enfim, a união dos números racionais com os números irracionais forma o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Portanto, até então temos que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Todavia, a equação $x^2 + 1 = 0$ não possui solução real, pois não existe um número real x que, elevado ao quadrado, resulte em -1. Por isso, foi necessário ampliar o conjunto dos números reais para um novo conjunto chamado de conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

Observe o diagrama:

Figura 5 - Diagrama (conjuntos numéricos).



Fonte: Autores.

Neste conjunto, cada número complexo $z = (a, b)$ pode ser escrito de maneira única como $z = a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Dizemos que a é a parte real de z e b é a parte imaginária de z.

Na sequência, as atividades possibilitarão uma melhor compreensão deste conjunto, como já mencionado, elas mesclam a representação geométrica com a algébrica, visto que

> É importante que se atente para a necessidade de incorporar a Geometria ao trabalho em todas as séries/anos da grade escolar, cabendo ao professor a busca de um equilíbrio no tratamento dos conteúdos fundamentais nos diversos bimestres (SÃO PAULO, 2012, p.41).

> Certamente os numerosos recursos tecnológicos disponíveis para utilização em atividades de ensino encontram um ambiente propício para o acolhimento no terreno da Matemática: máquinas de calcular, computadores, *softwares* para a construção de gráficos, para as construções em Geometria [...] (SÃO PAULO, 2012, p.33-34).

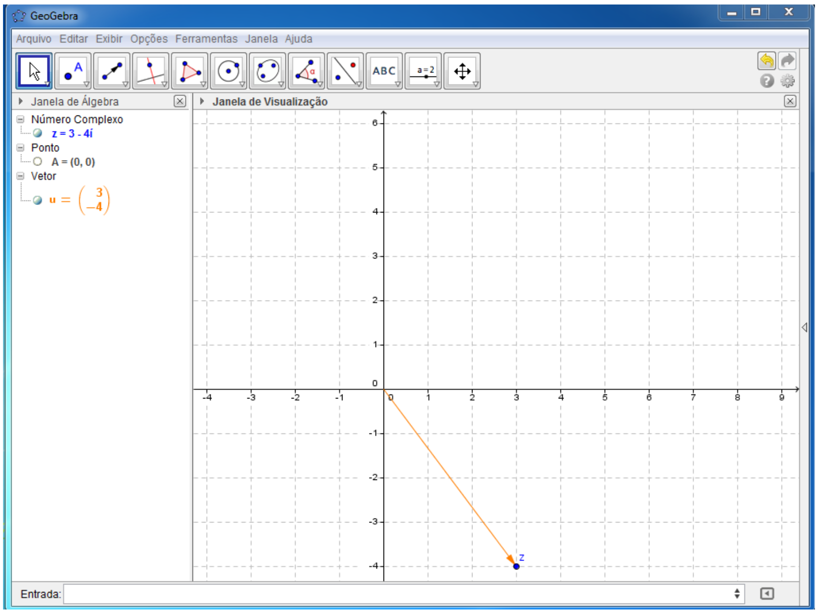
Atividade 3.2 – *Representações de um número complexo.*

Objetivo específico: Relacionar as diferentes representações de um número complexo: par ordenado, forma algébrica, pontos no plano complexo e vetor.

A cada número complexo corresponde um par ordenado $z = (x, y)$*, que pode ser escrito na forma algébrica* $z = x + yi$*, e, que está associado a um único ponto no plano complexo. Além disso, podemos pensar em cada ponto do plano complexo como uma extremidade de um vetor, cuja origem é o* $(0{,}0)$*. Sendo assim, represente, na forma algébrica, geométrica e vetorial, os seguintes números complexos:*

a) $(3, -4) = 3 - 4i$

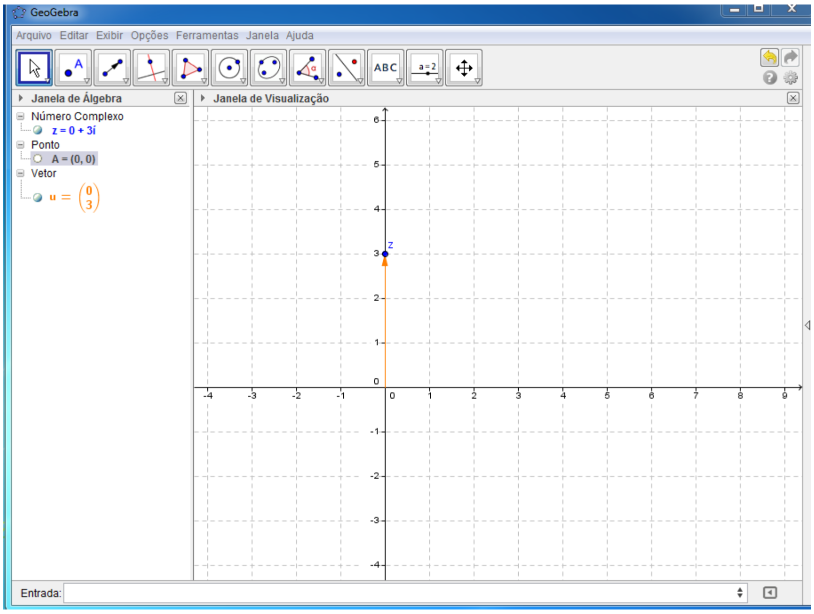
Figura 6 - Representação geométrica de $z = 3 - 4i$ no Geogebra.



Fonte: Autores

b) $(0,3) = 3i$

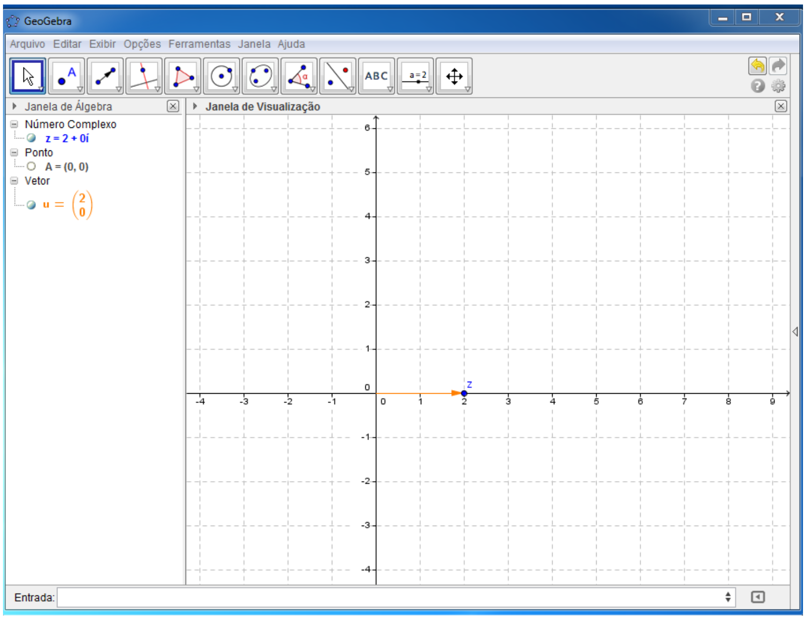
Figura 7 - Representação geométrica de $z = 3i$ no Geogebra.



Fonte: Autores.

c) $(2,0) = 2 + 0i = 2$

Figura 8 - Representação geométrica de $z = 2$ no Geogebra.



Fonte: Autores.

Comentário: Cuidado com a igualdade $(3,4) = 3 + 4i$. A igualdade significa que é possível representar números complexos ou como pontos do plano (complexo) ou como vetores, estas são possíveis formas de representar os números complexos, sempre tendo em mente que números complexos não são vetores ou pontos do plano. Números complexos podem ser representados de diferentes formas e daí o significado do sinal de igual.

***Atividade 3.3 –** Módulo e argumento de um número complexo.*

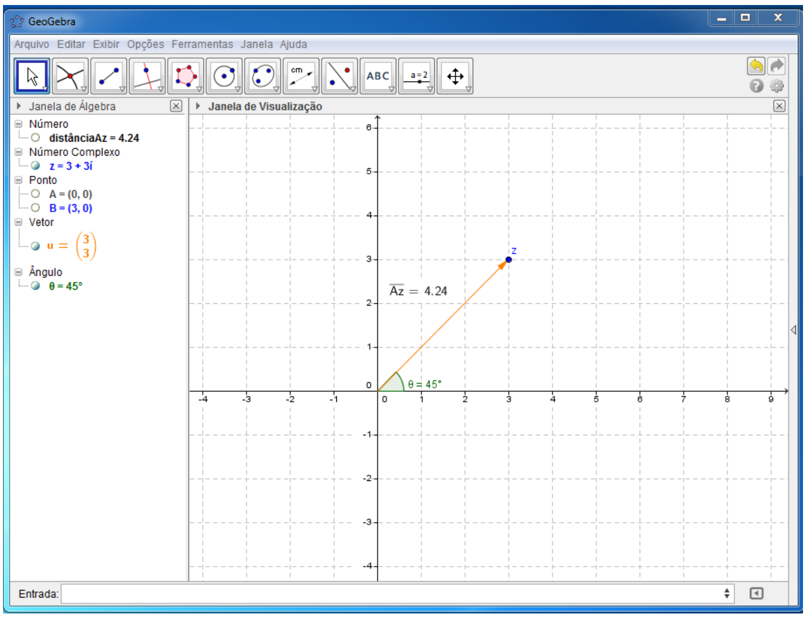
Objetivos específicos: Reconhecer o comprimento de um vetor como módulo de um número complexo e o ângulo formado entre o vetor e o eixo x como o argumento de um número complexo, bem como calcular tal módulo e argumento.

A representação no plano complexo dos números complexos leva a uma visualização útil dos números complexos. É possível especificar um número complexo pelo comprimento do vetor e pelo ângulo que ele faz com o eixo x positivo.

a) Calcule os comprimentos e os ângulos dos números complexos dados.

$z = 3 + 3i$

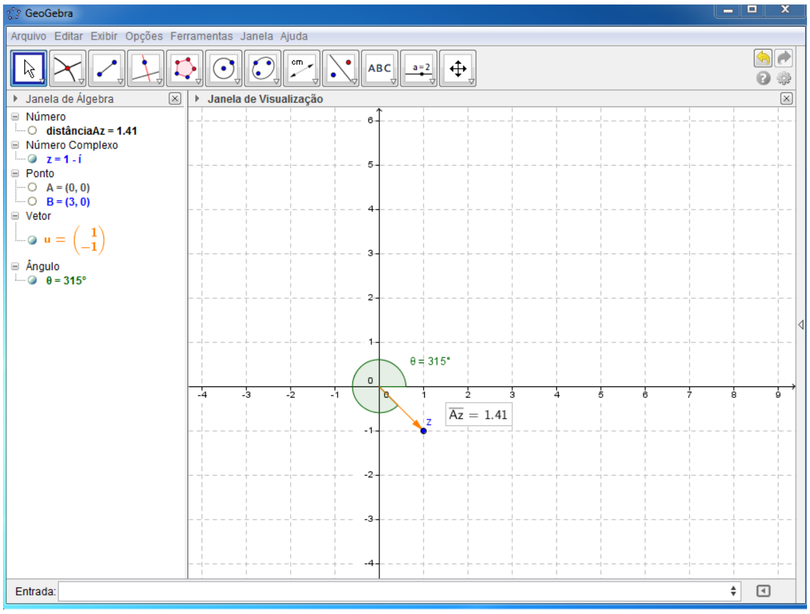
Figura 9 - Caracterização vetorial de $z = 3 + 3i$ no Geogebra.



Fonte: Autores.

$z = 1 - i$

Figura 10 - Caracterização vetorial de $z = 1 - i$ no Geogebra.



Fonte: Autores.

b) O comprimento desse vetor é denotado por $|z|$ (lê-se "módulo de z") e o ângulo formado é denominado como argumento de z – geralmente utiliza-se o símbolo θ – sendo assim, descreva como proceder para encontrar o $|z|$ e o valor de θ para qualquer número complexo $a + bi$.

Espera-se que os alunos percebam que o comprimento do vetor, $|z|$, é resultado da distância entre os pontos $(0,0)$ e (a, b), logo temos que

$$|z| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{29}$$

Já o argumento θ pode ser obtido por meio dos valores da tangente dos triângulos retângulos formados na representação geométrica, ou seja,

$$\theta = \text{arc tan}\,(b/a). \tag{30}$$

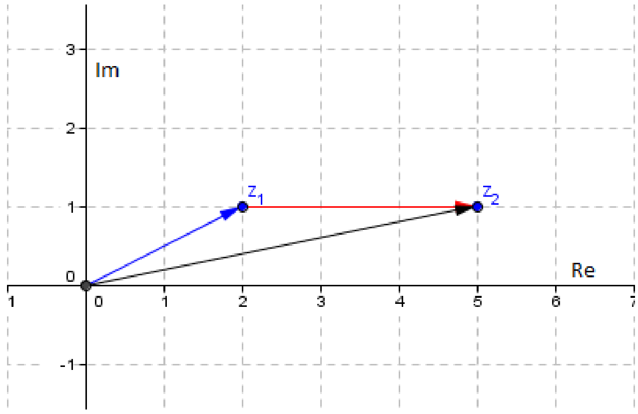
***Atividade 3.4 –** Adição e Subtração com números complexos.*

Objetivos específicos: observar as transformações no plano (deslocamentos) decorrentes da adição e subtração de vetores e saber realizá-las algebricamente.

Dado $z_1 = 2 + i$, efetue as operações indicadas, trabalhando a parte real com a parte real, e a parte imaginária com a parte imaginária. Represente geometricamente as situações e registre suas observações:

a) $z_2 = z_1 + 3 = 5 + i$

Figura 11 - Soma $z_2 = z_1 + 3$ por deslocamento, em que $z_1 = 2 + i$.

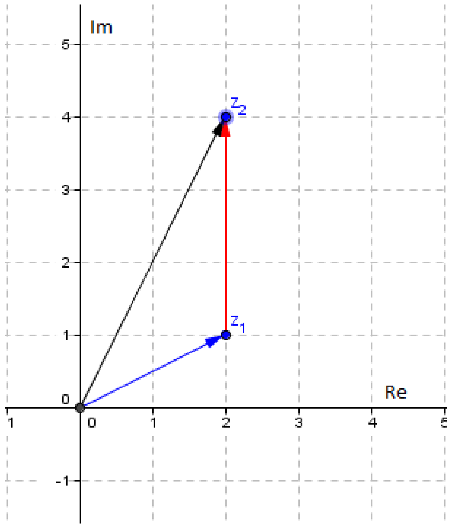


Fonte: Autores.

Espera-se que os alunos percebam que ocorre um deslocamento horizontal de 3 unidades para a direita, paralelamente ao eixo real, resultado da soma de z_1 com um número real.

b) $z_2 = z_1 + 3i = 2 + 4i$

Figura 12 - Soma $z_2 = z_1 + 3i$ por deslocamento, em que $z_1 = 2 + i$.

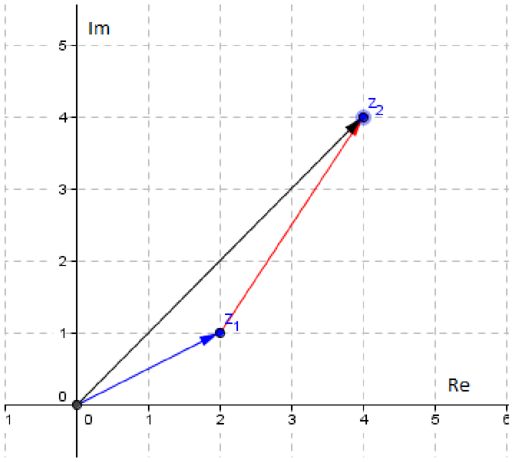


Fonte: Autores.

Espera-se que os alunos percebam que ocorre um deslocamento vertical de 3 unidades para cima, paralelamente ao eixo imaginário, resultado da soma de z_1 com um número imaginário puro.

c) $z_2 = z_1 + (2 + 3i) = 4 + 4i$

Figura 13 - Soma $z_2 = z_1 + (2 + 3i)$ por deslocamento, em que $z_1 = 2 + i$.

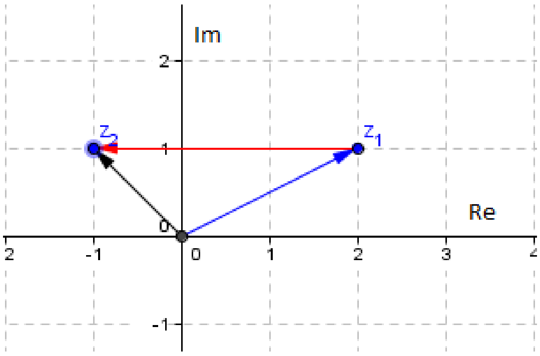


Fonte: Autores.

Espera-se que os alunos percebam que ocorrem dois deslocamentos, um deslocamento horizontal de 2 unidades para a direita e um deslocamento vertical de 3 unidades para cima.

d) $z_2 = z_1 - 3 = -1 + i$

Figura 14 - Subtração $z_2 = z_1 - 3$ por deslocamento, em que $z_1 = 2 + i$.

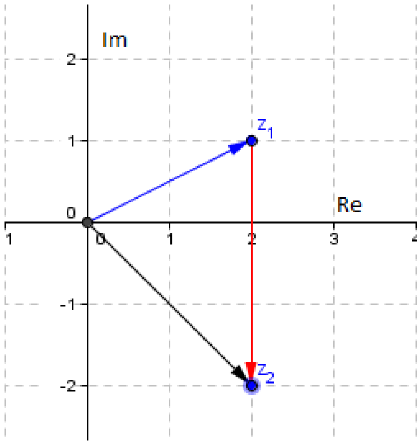


Fonte: Autores.

Espera-se que os alunos percebam que ocorre um deslocamento horizontal de 3 unidades para a esquerda, paralelamente ao eixo real, resultado da subtração de z_1 de um número real.

e) $z_2 = z_1 - 3i = 2 - 2i$

Figura 15- Subtração $z_2 = z_1 - 3i$ por deslocamento, em que $z_1 = 2 + i$.

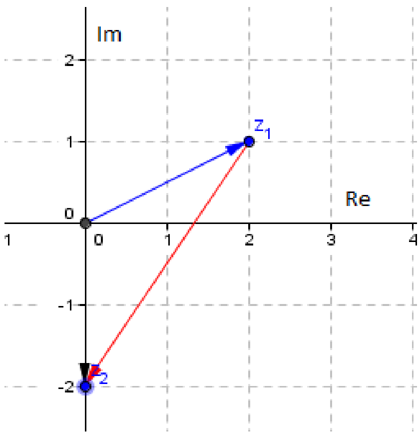


Fonte: Autores.

Espera-se que os alunos percebam que ocorre um deslocamento vertical de 3 unidades para baixo, paralelamente ao eixo imaginário, resultado da subtração de z_1 de um número imaginário puro.

f) $z_2 = z_1 - (2 + 3i) = -2i$

Figura 16 - Subtração $\mathrm{z}_2 = \mathrm{z}_1 - (2 + 3\mathrm{i})$ por deslocamento, em que $\mathrm{z}_1 = 2 + \mathrm{i}$.



Fonte: Autores.

Espera-se que os alunos percebam que ocorrem dois deslocamentos: um deslocamento horizontal de 2 unidades para a esquerda, resultado da subtração de $z_1$de um número real e um deslocamento vertical de 3 unidades para baixo, resultado da subtração de z_1 de um número complexo.

g) Generalize as observações acima.

Mostrar que, ao adicionar ou subtrair números complexos, ocorrem deslocamentos no plano complexo.

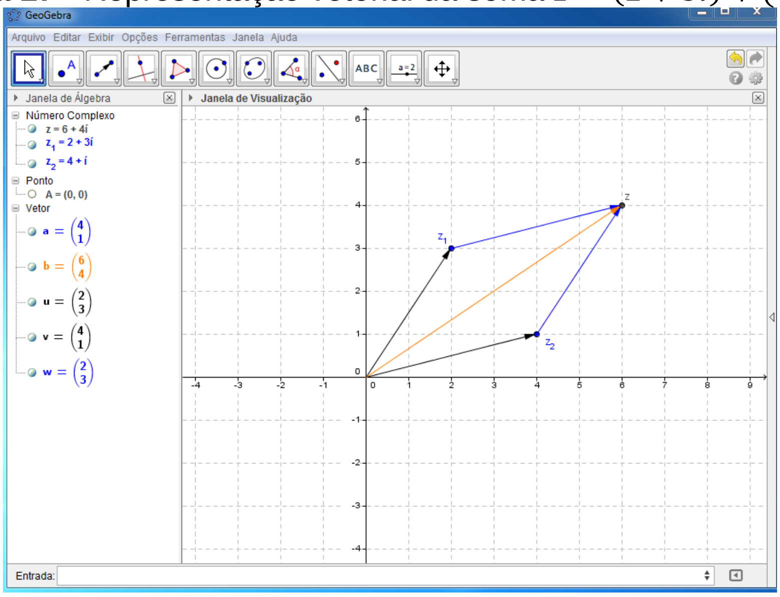
Atividade 3.5 – *Adição e subtração com números complexos como vetores.*

Objetivos específicos: associar a adição entre complexos com a diagonal principal do paralelogramo e a subtração como a diagonal secundária do paralelogramo, e saber realizá-las algebricamente.

Os vetores também podem ser utilizados para representar a soma de dois números complexos por meio da regra da "soma do paralelogramo" para a adição de vetores. Efetue a soma algébrica e represente geometricamente as operações:

a) $z = (2 + 3i) + (4 + i) = 6 + 4i$

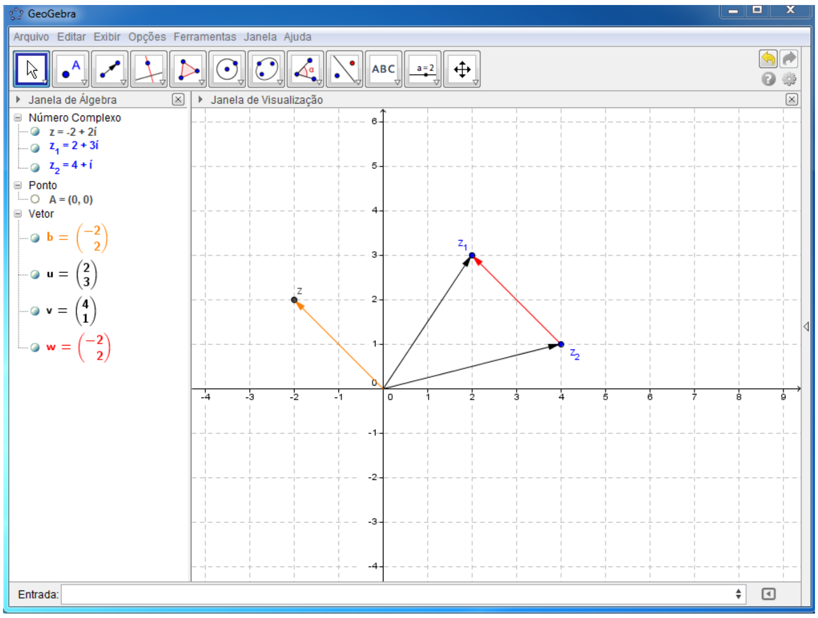
Figura 17 - Representação vetorial da soma $z = (2 + 3i) + (4 + i)$.



Fonte: Autores.

b) $z = (2 + 3i) - (4 + i) = -2 + 2i$

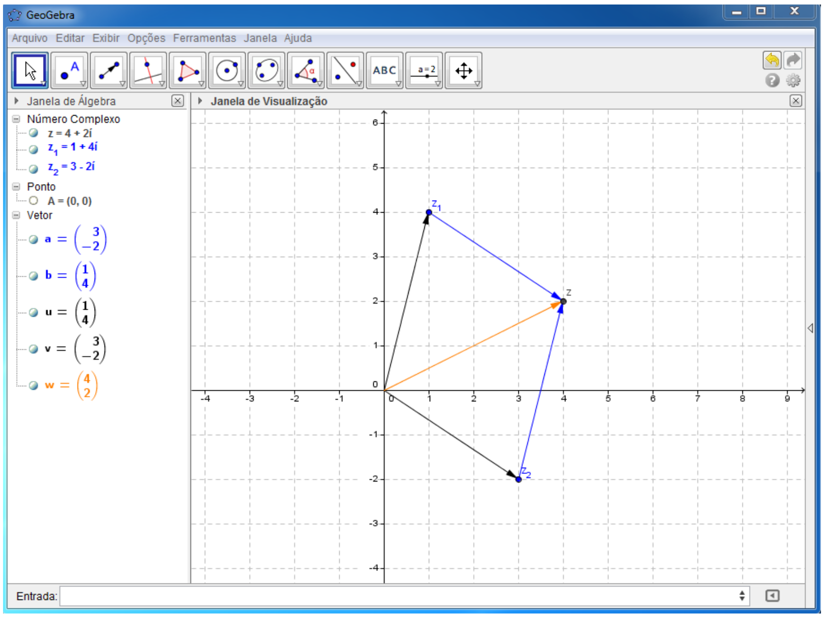
Figura 18 - Representação vetorial da subtração $z = (2 + 3i) - (4 + i)$.



Fonte: Autores.

c) $z = (1 + 4i) + (3 - 2i) = 4 + 2i$

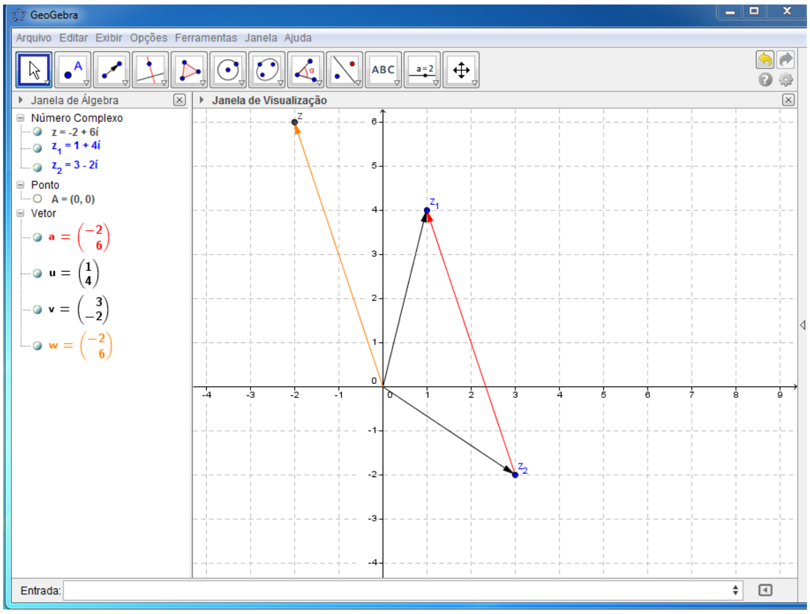
Figura 19 - Representação vetorial da soma $z = (1 + 4i) + (3 - 2i)$.



Fonte: Autores.

d) $z = (1 + 4i) - (3 - 2i) = -2 + 6i$

Figura 20 - Representação vetorial da subtração $z = (1 + 4i) - (3 - 2i)$.



Fonte: Autores.

e) Imaginando o paralelogramo em cada situação acima, o que podemos concluir quando efetuamos uma soma? E quando efetuamos uma subtração?

Espera-se que os alunos percebam que, geometricamente, a soma de dois números complexos é representada pela diagonal principal do paralelogramo, formado pelos vetores dos números complexos. Entretanto, a subtração é representada pela diagonal secundária dos vetores dados.

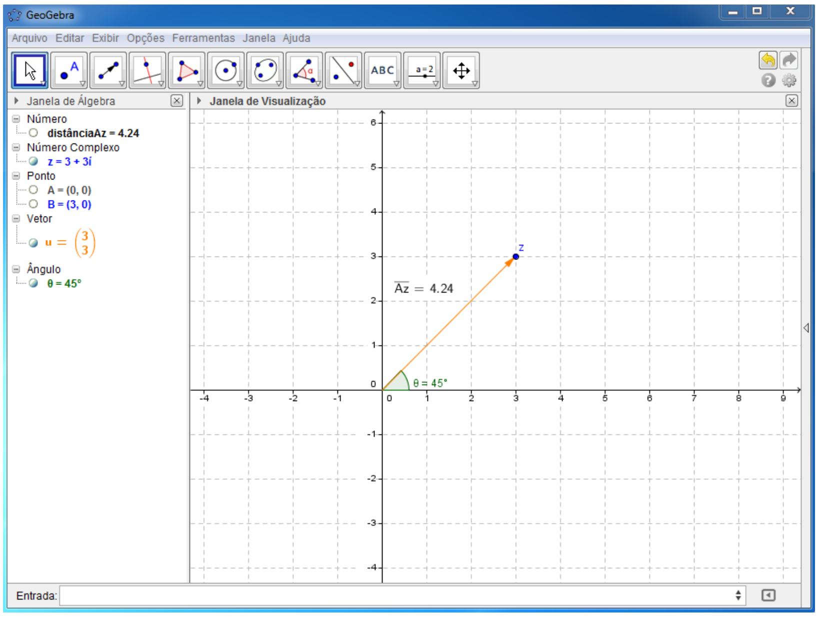
Atividade 3.6 – *Multiplicação e divisão de um número complexo por um número real.*

Objetivos específicos: Observar que ao multiplicarmos ou dividirmos um número complexo por um número real o seu módulo se altera, mas o seu argumento não. Saber como realizar tais operações algebricamente.

Considere o número complexo $z = 3 + 3i$.

a) Represente-o geometricamente, encontre seu módulo e seu argumento.

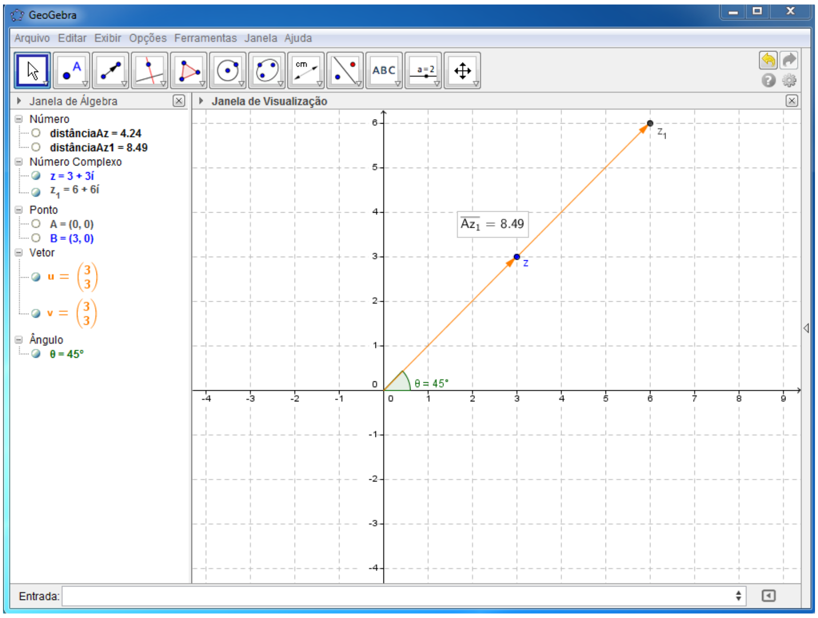
Figura 21 - Propriedades vetoriais de $z = 3 + 3i$.



Fonte: Autores.

b) Multiplique z por 2, isto é, calcule $2z$. O que você observa quanto ao módulo e ao argumento?

Figura 22 - Propriedades vetoriais de $z_1 = 2(3 + 3i)$.

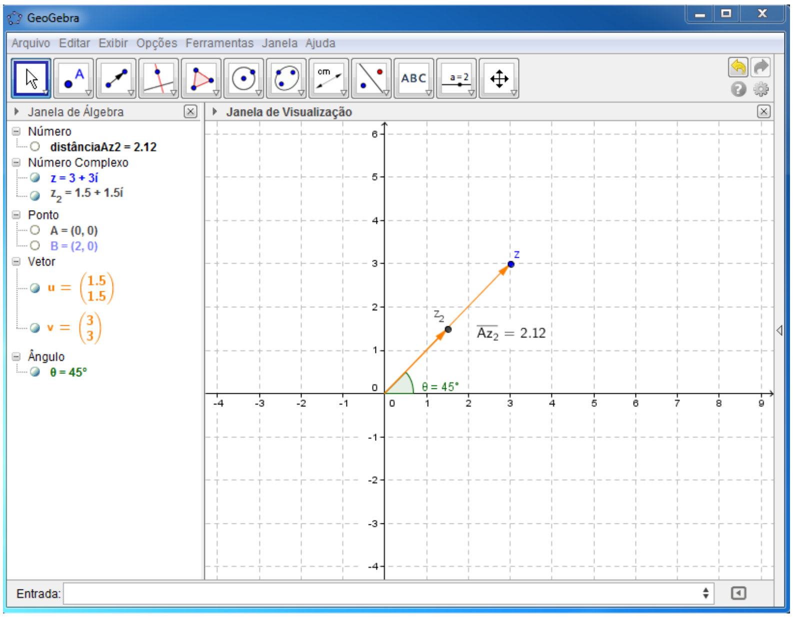


Fonte: Autores.

Temos que $2z = 6 + 6i$. Espera-se que os alunos percebam que, geometricamente, duas vezes um número complexo corresponde a dobrar o seu módulo, conservando o seu argumento.

c) Divida z por 2, isto é, calcule $\frac{z}{2}$. O que você observa quanto ao módulo e ao argumento?

Figura 23 - Propriedades vetoriais de $z_2 = (3 + 3i)/2$.



Fonte: Autores.

Temos que $\frac{z}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$. Podemos observar que o módulo fica reduzido à metade e o argumento permanece invariante.

d) O que podemos concluir quando multiplicamos ou dividimos um número complexo por um número real?

Podemos concluir que o módulo se altera, mas o argumento permanece o mesmo.

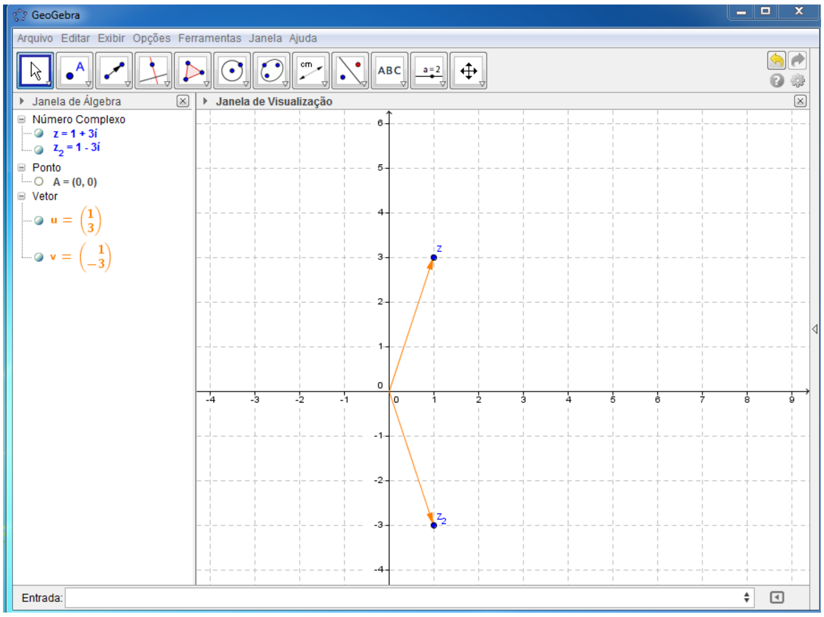
***Atividade 3.7 –** Conjugado de um número complexo.*

Objetivos específicos: Adquirir o conceito de conjugado de um número complexo e perceber as relações geométricas entre um número complexo e seu conjugado.

O conjugado do número complexo $z = a + bi$ é denotado e dado por $\bar{z} = a - bi$. Represente geometricamente os números complexos z dados e seus conjugados $\bar{z}$.

a) $z = 1 + 3i$ *e* $\bar{z} = 1 - 3i$

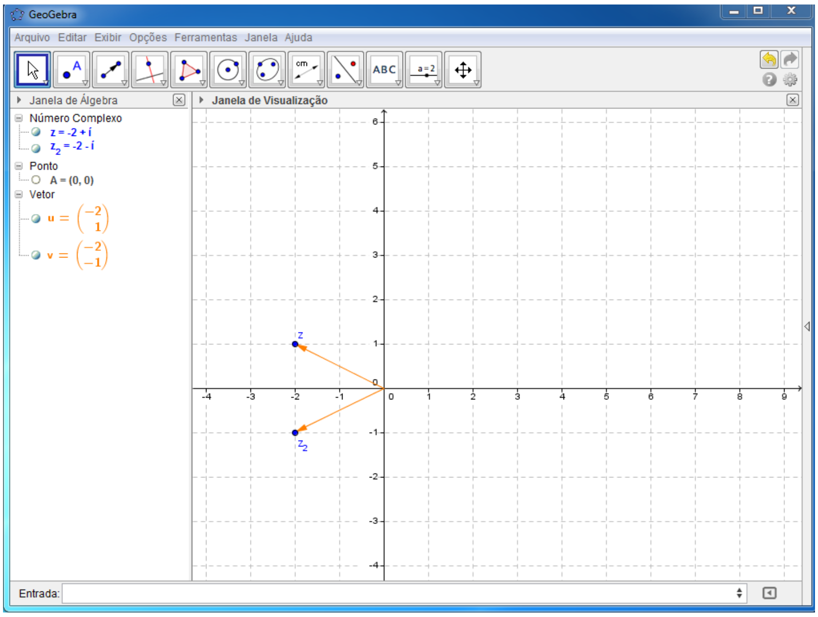
Figura 24 - Representação geométrica do conjugado de $z = 1 + 3i$.



Fonte: Autores.

b) $z = -2 + i$ *e* $\bar{z} = -2 - i$

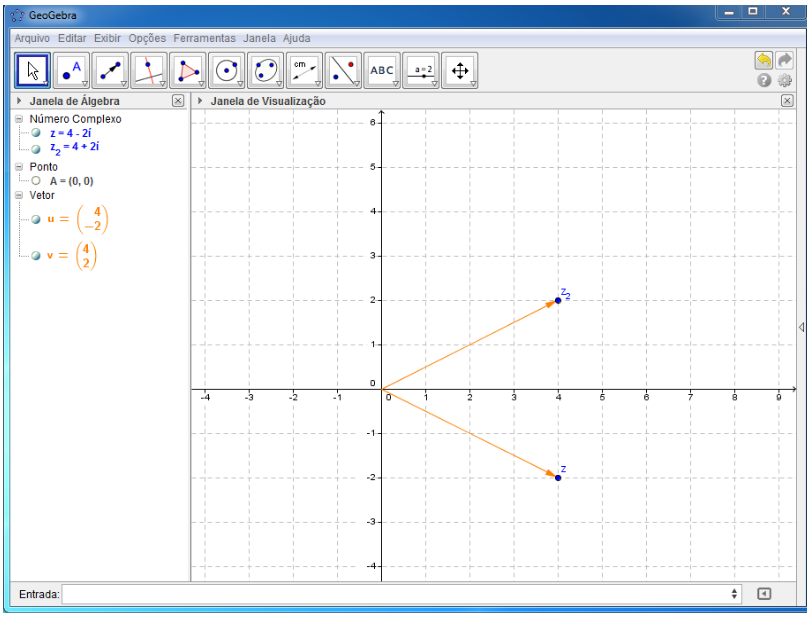
Figura 25 - Representação geométrica do conjugado de $z = -2 + i$.



Fonte: Autores.

c) $z = 4 - 2i$ *e* $\bar{z} = 4 + 2i$

Figura 26 - Representação geométrica do conjugado de $z = 4 - 2i$.



Fonte: Autores.

d) Qual a relação geométrica entre um número complexo e seu conjugado?

Espera-se que os alunos percebam que o número complexo e seu conjugado são simétricos em relação ao eixo real, operação resultante da inversão do sinal da parte imaginária.

***Atividade 3.8** – Multiplicação de um número complexo pelo seu conjugado.*

Objetivos específicos: Compreender que a multiplicação de um número complexo pelo seu conjugado resulta em um número real não negativo, bem como saber realizá-las algebricamente.

Efetue as multiplicações dadas, obedecendo às regras da álgebra dos números complexos e substituindo i^2 por -1.

a) $(13+i)\,.\,(13-i) = 169 - 13i + 13i - i^2 = 170$

b) $(-2+3i)\,.\,(-2-3i) = 4 + 6i - 6i - 9i^2 = 13$

c) $(1-2i)\,.\,(1+2i) = 1 + 2i - 2i - 4i^2 = 5$

d) O que acontece quando multiplicamos um número complexo pelo seu conjugado?

Espera-se que os alunos percebam que, ao efetuarmos as multiplicações de um número complexo pelo seu conjugado, obtemos um número real e não negativo.

Atividade 3.9 – *Divisão com números complexos.*

Objetivos específicos: Compreender a necessidade, na divisão com números complexos, da utilização do conjugado.

a) Você já sabe efetuar a divisão de números complexos por números reais. Como podemos efetuar a divisão de números complexos por números complexos?

Espera-se que os alunos respondam que basta deixar o divisor real, e, para isto, é necessário multiplicá-lo pelo seu conjugado. Dessa forma, para não alterar a fração, é preciso multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador.

b) Calcule $\frac{1+7i}{1-3i} =$

$$\frac{1+7i}{1-3i}\,.\,\frac{1+3i}{1+3i} = \frac{1+3i+7i+21i^2}{1+\,3i-3i-91^2} = \frac{-\,20+10i}{10} = -2+i.$$

c) Calcule $\frac{3+9i}{2+i} =$

$$\frac{3+9i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{6-3i+18i-9i^2}{4-2i+2i-i^2} = \frac{15+15i}{5} = 3+3i.$$

Atividade 3.10 – *Lugar geométrico dos números: real e complexo.*

Objetivos específicos: Observar que os números reais fazem parte do eixo real, e que os números imaginários puros fazem parte do eixo imaginário. Relacionar estes conceitos ao argumento de números complexos.

a) Para que um número seja imaginário puro (isto é, que a parte real seja zero), qual deve ser o seu argumento?

Espera-se que os alunos respondam que o argumento deve ser 90º ou 270º, visto que, no plano complexo, os números imaginários puros estão no eixo imaginário (vertical).

b) Para que um número seja real (isto é, que a parte imaginária seja zero), qual deve ser o seu argumento?

Espera-se que os alunos respondam que o argumento deve ser 0º ou 180º, visto que, no plano complexo, os números reais estão no eixo real (horizontal).

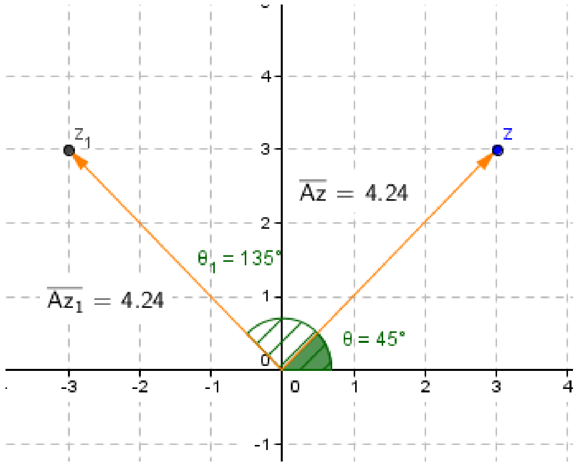
Atividade 3.11 – *Multiplicação por i.*

Objetivo específico: Observar que a multiplicação de um complexo pelo número imaginário puro i realiza uma rotação de 90º, no sentido anti-horário, no plano complexo.

Efetue a operação abaixo representando-a geometricamente e registre suas conclusões.

$(3 + 3i) \,.\, i = \; -3 + 3i$

Figura 27 - Representação geométrica da multiplicação de $z = (3 + 3i)$ por i.



Fonte: Autores.

Espera-se que os alunos notem que o módulo permanece o mesmo, mas acontece uma rotação de 90º, no sentido anti-horário.

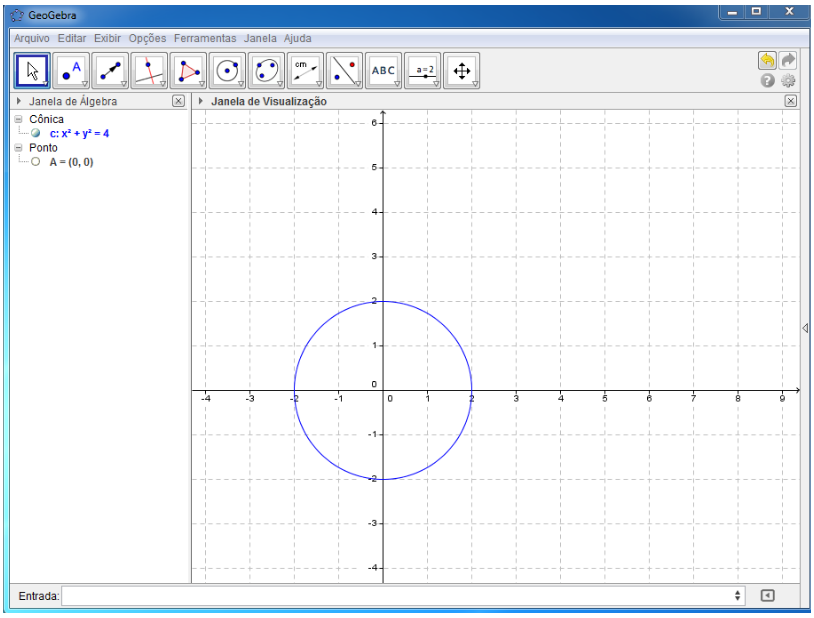
Atividade 3.12 – *Outras ideias importantes.*

Objetivo específico: observar outras representações referentes a números complexos que são importantes.

Extrapolando as ideias referentes a números complexos, responda:

a) Quantos números complexos de módulo 2 existem, isto é, $\{z \in \mathbb{C} / |z| = 2\}$*? Você é capaz de representá-los geometricamente?*

Figura 28 - Representação geométrica do conjunto $\{z \in \mathbb{C} / |z| \ = 2\}$.

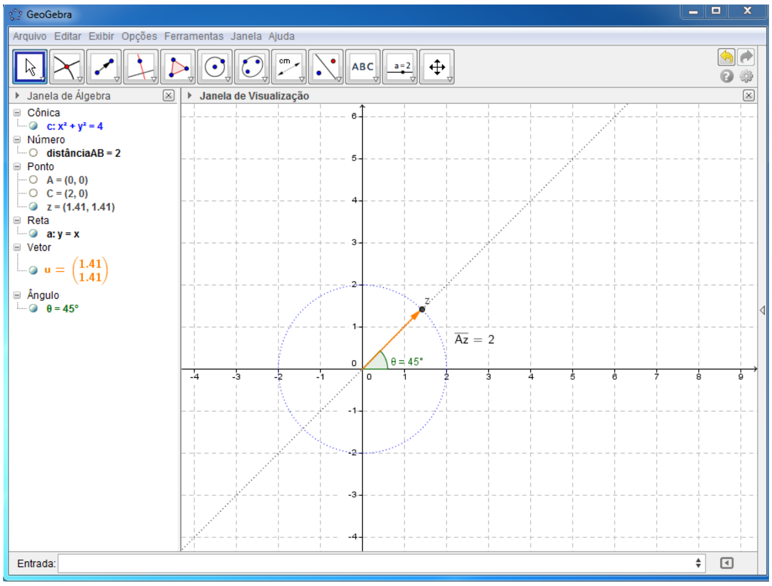


Fonte: Autores.

Espera-se que os alunos percebam que há infinitos números complexos de módulo 2 e que o conjunto desses números (pontos) no plano complexo formam uma circunferência de centro na origem e raio 2.

b) Quantos números complexos de módulo 2 existem cujo argumento é 45º? Você é capaz de representá-los geometricamente?

Figura 29 - Representação geométrica do conjunto $\{z \in \mathbb{C} / |z| = 2, \theta = \ 45°\}$.

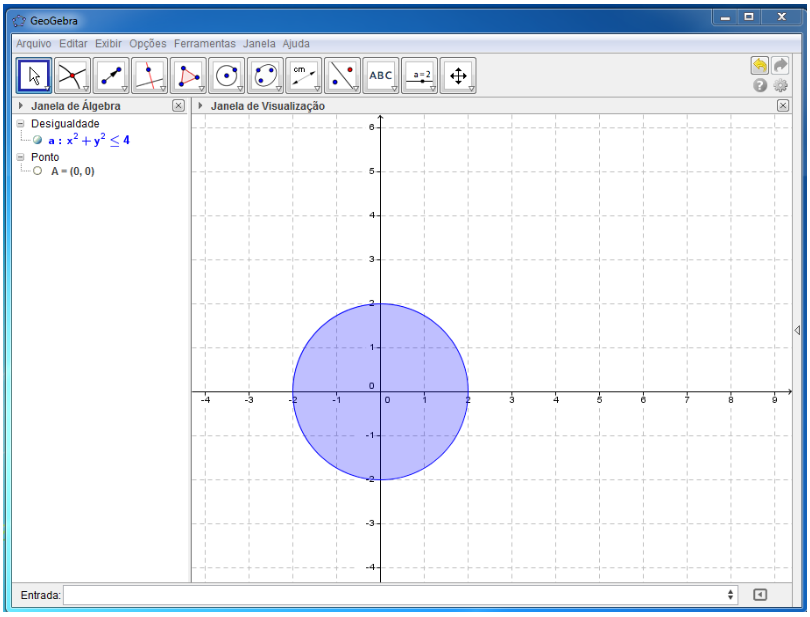


Fonte: Autores.

Espera-se que os alunos percebam que há apenas um número complexo de módulo 2 e argumento 45º. Geometricamente ele é a intersecção da circunferência do exercício anterior com a bissetriz do 1º e 4º quadrantes.

c) Quantos números complexos de módulo menor que ou igual a 2 existem, isto é, $\{z \in \mathbb{C}/\ |z| \leq 2\}$*? Você é capaz de representá-los geometricamente?*

Figura 30 - Representação geométrica do conjunto $\{z \in \mathbb{C}/\ |z|\ \leq 2\}$.



Fonte: Autores.

Espera-se que os alunos percebam que há infinitos números complexos de módulo menor que, ou igual a 2, e que o conjunto desses números (pontos) no plano complexo forma um círculo de centro na origem e raio 2.

Ao término desta etapa, se o professor julgar necessário, poderá recorrer a livros didáticos – entre outros recursos – para selecionar exercícios sobre o conteúdo, visando possibilitar aos alunos a destreza e fixação das estratégias que o conteúdo engloba.

4.4 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL UTILIZANDO NÚMEROS COMPLEXOS

Esta etapa da proposta didática visa apresentar aos alunos a resolução do problema inicial utilizando o conteúdo de números complexos, de maneira tal que eles percebam que esta resolução exige menos conceitos e procedimentos em comparação com as soluções apresentadas no início da proposta, além de se constituir uma aplicação para o conteúdo em questão, encerrando, assim, nossa modelagem.

Sobre nossa proposta,

> De modo geral, as etapas mencionadas pelos autores contemplam: a seleção do tema e a definição da situação de investigação sobre o tema, a formulação e a resolução de problemas ancorada no processo de construção de conhecimentos matemáticos, a solução da situação com a elaboração de um modelo e, finalmente, a apresentação e a validação do modelo produzido, num movimento de retrospecto (RIBEIRO, 2009, p. 72)

Etapa 4: Resolução do problema inicial utilizando números complexos

Objetivo: Compreender a resolução do problema inicial, utilizando os números complexos.

Ação: Resolução da situação-problema inicial.

Orientações: O professor apresenta a solução da situação-problema inicial, interagindo com os alunos.

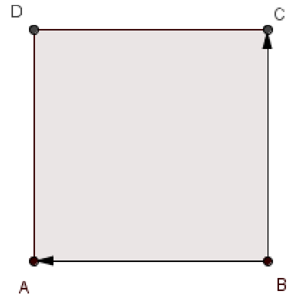
Recursos: Lápis, borracha, e, caso os alunos julguem necessário outros instrumentos como calculadora, régua, malha quadriculada, entre outros.

Tempo estimado: 1 hora/aula.

Atividade 4.1 – *Resolução da situação problema inicial utilizando os conceitos de números complexos.*

Dados $A = (1,1)$ e $C = (3,4)$, vértices do quadrado $ABCD$.

Figura 31 - Representação geométrica do quadrado $ABCD$ da situação-problema inicial.



Fonte: Autores.

Note que o vetor BA é dado pela rotação do vetor BC de 90º no sentido anti-horário, ou seja, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}\,.\,i$. Assim, temos que

$$A - B = (C - B).\,i$$

$$\Rightarrow (1 + i) - B = (3 + 4i - B).\,i$$

$$\Rightarrow 1 + i - B = 3i + 4i^2 - Bi$$

$$\Rightarrow Bi - B = 3i - 4 - 1 - i$$

$$\Rightarrow B\,.(i - 1) = 2i - 5$$

$$\Rightarrow\ B = \frac{2i - 5}{-1 + i}$$

$$\Rightarrow B = \frac{2i - 5}{-1 + i}\,.\frac{-1 - i}{-1 - i} = \frac{7 + 3i}{2}$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

De modo análogo, temos que o vetor AD é dado pela rotação do vetor AB de 90º no sentido anti-horário, ou seja, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\,.\,i$, de onde segue que $D = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

4.5 OUTROS PROBLEMAS RESOLVIDOS POR NÚMEROS COMPLEXOS

Nesta etapa, são apresentados dois problemas que, se resolvidos por meio de conceitos de números complexos, tornam-se mais simples. A ideia é que os alunos sejam capazes de aplicar os conceitos e procedimentos, que acabaram de ser trabalhados nas aulas, nos exercícios propostos.

Etapa 5: Mais alguns problemas nos complexos.

Objetivo: Resolver situações-problemas utilizando os conceitos e procedimentos dos números complexos.

Ação: Resolução das situações-problemas propostas.

Orientações: Propor as soluções-problemas e orientar os alunos para que apliquem os conhecimentos adquiridos sobre números complexos. Essa atividade pode ser realizada em grupos ou individualmente.

Recursos: Folha de atividade 5, lápis, borracha, e, caso os alunos julguem necessário, outros instrumentos como calculadora, régua, malha quadriculada, entre outros.

Tempo estimado: 2 horas/aulas.

Problema 1 - (CARNEIRO, 2001, p. 3 - 4) Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo ângulo de 90°, à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90º, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio, entre as duas marcas.

Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais. Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: "Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui." Repete então os mesmos procedimentos de *quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.*

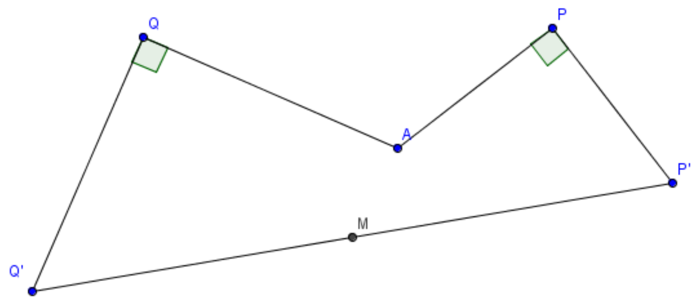
A pergunta é: esse pirata era sortudo ou matemático?

Resolução: A resolução deste problema utiliza duas ideias fundamentais:

a) vetor, como a diferença entre dois números complexos;
b) multiplicar um número complexo por i corresponde a rotacioná-lo 90º.

Sejam o ponto A a localização da árvore, P e Q as localizações das pedras, enquanto o tesouro está no ponto médio M dos pontos P' e Q'. A representação geométrica do problema é apresentada na figura 32.

Figura 32 - Representação geométrica do problema da ilha do tesouro.



Fonte: Autores.

Note que temos as seguintes relações:

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\,.\,i = \overrightarrow{\mathrm{PP'}} \Rightarrow (A-P)\,.\,i = P' - P \;\Rightarrow Ai - Pi + P = P'.$$

Por outro lado, analogamente temos que:

$\overrightarrow{\mathrm{QA}} \,.\, (-i) = \overrightarrow{\mathrm{QQ'}} \Rightarrow (\mathrm{A} - \mathrm{Q}) \,.\, (i) = Q' - Q \Rightarrow Ai + Qi + Q = Q'.$

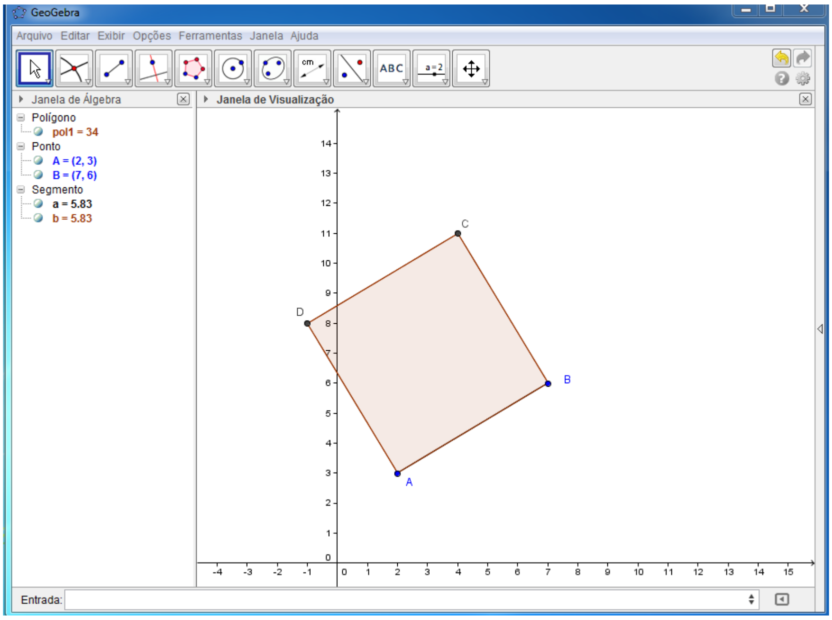
Como M é ponto médio de P' e Q', segue que:

$$M = \frac{P' + Q\prime}{2} = \frac{Ai - Pi + P + (-Ai + Qi + Q)}{2} = \frac{-Pi + P + Qi + Q}{2} = \frac{P + Q}{2} = \frac{(Q - P)i}{2}.$$

Sendo assim, podemos concluir que a localização do tesouro não depende da posição da árvore, portanto o pirata era um matemático.

Problema 2 - (RIBEIRO, 2010, p. 306) - Considere o quadrado representado na figura abaixo. Determine as coordenadas dos pontos C e D, dados $A(2,3)$ e $B(7,6)$.

Figura 33 - Representação geométrica do problema dos vértices do quadrado.



Fonte: Autores.

Note que temos as seguintes relações:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \,.\, i \Rightarrow D - A = (B - A) \,.\, i \;\Rightarrow D - (2 + 3i) = [(7 + 6i) - (2 + 3i)] \,.\, i$

$D - 2 - 3i = (5 + 3i).\,i \ \Rightarrow \mathrm{D} - 2 - 3\mathrm{i} = 5\mathrm{i} + 3\mathrm{i}^2 \Rightarrow \mathrm{D} = 5\mathrm{i} + 3(-1) + 2 + 3i$

$D = -1 + 8i \Rightarrow \mathrm{D} = (-1{,}8).$

Da mesma forma temos que

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA}\,.\,i \Rightarrow \mathrm{C} - \mathrm{D} = (\mathrm{A} - \mathrm{D}).\,i \ \Rightarrow \mathrm{C} - (-1 + 8\mathrm{i}) = [(2 + 3\mathrm{i}) - (-1 + 8\mathrm{i})].\,i$

$C + 1 - 8i = (3 - 5i).\,i \ \Rightarrow \mathrm{C} + 1 - 8\mathrm{i} = 3\mathrm{i} - 5\mathrm{i}^2 \Rightarrow \mathrm{C} = 3\mathrm{i} - 5\,.\,(-1) - 1 + 8i$

$C = 4 + 11i \Rightarrow \mathrm{C} = (4{,}11).$

Portanto, as coordenadas dos pontos são $C(4{,}11)$ e $D(-1{,}8)$.

4.6 QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS

Nesta última etapa, elaboramos um questionário seguindo a metodologia abordada ao longo desta proposta, possibilitando, assim, a verificação do nível de aprendizagem do conteúdo matemático de números complexos que os alunos adquiriram. Além das questões, descrevemos as respostas esperadas.

Etapa 6: Verificação da aprendizagem.

Objetivos: Verificar o domínio dos alunos sobre conceitos e procedimentos dos números complexos abordados na sequência didática proposta.

Ação: Resolução das questões propostas.

Orientações: Antes do início da atividade, converse com os alunos a respeito da importância dessa atividade, visto que se constitui em um registro dos resultados de suas aprendizagens. A atividade deverá ser individual.

Recursos: Folha de atividade 6, lápis, borracha, régua, caneta e malha quadriculada.

Tempo estimado: 2 horas/aulas.

Atividade 6.1 – *Questionário avaliativo*

1 – O que você entende por conjunto dos números complexos? Por que ele foi criado?

Resposta esperada. O conjunto dos números complexos é uma extensão do conjunto dos números reais, logo, engloba todos os demais conjuntos. Teve origem devido à necessidade de extrair a raiz quadrada de um número negativo.

2 – Quais as possíveis representações para um número complexo?

Resposta esperada. Par ordenado, ponto do plano complexo, forma algébrica e forma vetorial.

3 – No plano complexo, qual o lugar geométrico dos números reais?

Resposta esperada. O eixo real.

4 – No plano complexo, qual o lugar geométrico dos imaginários puros?

Resposta esperada. O eixo imaginário.

5 – O que diferencia um número complexo z de seu conjugado $\bar{z}$?

Resposta esperada. Apenas o sinal da parte imaginária, o sinal da parte real não se altera.

6 – Dê o conjugado de:

a) $z = -8 + 5i$

Resposta esperada. $\bar{z} = -8 - 5i$

b) $z = 3 - i$

Resposta esperada. $\bar{z} = 3 + i$

c) $z = 4i$

Resposta esperada. $\bar{z} = -4i$

d) $z = 7$

Resposta esperada. $\bar{z} = 7$

7 – Qual é, graficamente, a relação que existe entre z e $\bar{z}$?

Resposta esperada. Eles são simétricos em relação ao eixo real.

8 – Quantos números complexos de módulo 3 existem?

Resposta esperada. Infinitos, ou seja, todos os pontos de uma circunferência de centro na origem e raio 3.

9 – Quais as transformações no plano (rotação, translação, ampliação, redução) que podem ocorrer quando:

a) Realizamos uma adição com números complexos?

Resposta esperada. Translação.

b) Realizamos uma subtração com números complexos?

Resposta esperada. Translação.

c) Multiplicamos um número complexo por um número real?

Resposta esperada. Ampliação ou redução.

d) Realizamos uma multiplicação ou divisão entre complexos?

Resposta esperada. Ampliação, redução e/ou rotação.

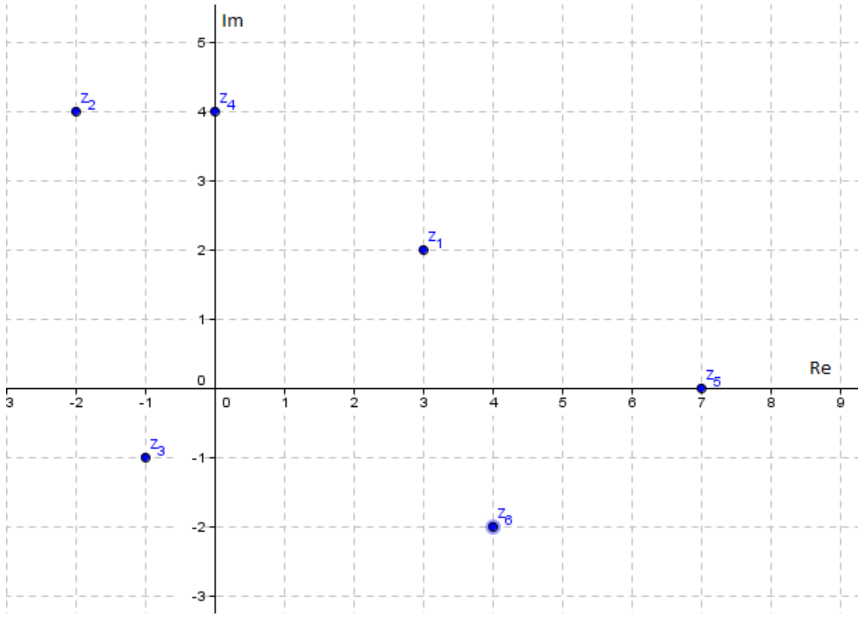
10 – Represente, em um mesmo plano complexo, os seguintes números complexos:

a) $z_1 = 3 + 2i$ *b)* $z_2 = -2 + 4i$ *c)* $z_3 = -1 - i$

d) $z_4 = 4i$ *e)*$z_5 = 7$ *f)* $z_6 = 4 - 2i$

Resposta esperada.

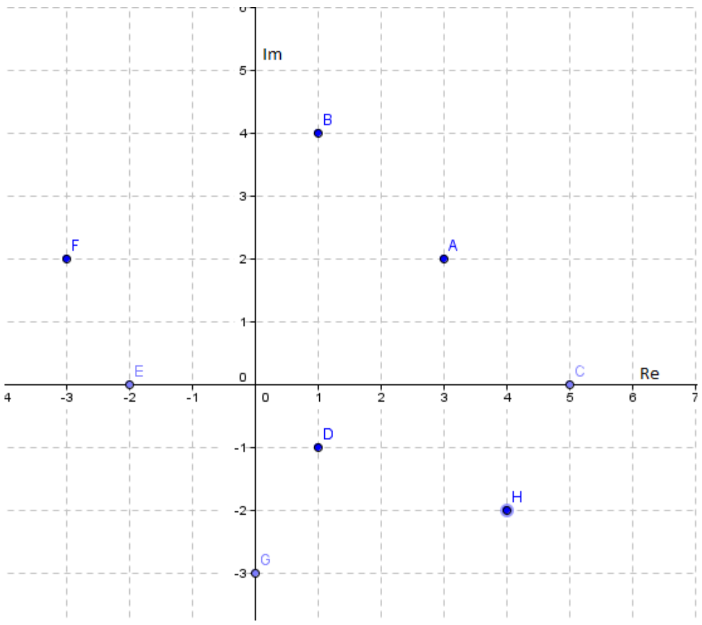
Figura 34 - Representação no plano complexo dos pontos da questão 10 do questionário avaliativo.



Fonte: Autores.

11 – Dados os números no plano complexo, escreva a representação algébrica.

Figura 35 - Representação no plano complexo dos pontos da questão 11 do questionário avaliativo.



Fonte: Autores.

Resposta esperada.

$A = 3 + 2i; B = 1 + 4i; C = 5; D = 1 - i; E = -2; F = -3 + 2i; G = -3i; H = 4 - 2i.$

12 – Efetue as operações entre complexos.

a) $(7 + 4i) + (3 - 9i)$. Resposta esperada. $10 - 5i$

b) $(2 - 5i) - (1 + 9i)$. Resposta esperada. $1 - 14i$

c) $(2 + 4i) . (1 + 3i)$. Resposta esperada. $-10 + 10i$

d) $(3 + 7i)^2$. Resposta esperada. $-40 + 42i$

e) $(-7 + 3i) . (5 - 9i)$. Resposta esperada. $-8 + 78i$

f) $\frac{1+7i}{1-3i}$. Resposta esperada. $-2+i$

g) $\frac{25}{3-4i}$. Resposta esperada. $3+4i$

h) i^{13}. Resposta esperada. i

i) $i^3+i^5+i^7$. Resposta esperada. $-i$

13 – Calcule o módulo dos números complexos.

a) $z=5-12i$. Resposta esperada. 13

b) $z=4+3i$. Resposta esperada. 5

c) $z=3i$. Resposta esperada. 3

d) $z=4+i$. Resposta esperada. $\sqrt{17}$

14 – Calcule o argumento dos seguintes números complexos.

a) $z=-3+3i$. Resposta esperada. $45°$

b) $z=-5+0i$. Resposta esperada. $180°$

c) $z=2+0i$. Resposta esperada. $0°$

d) $z = -7i$. Resposta esperada. $270°$

15 – Qual é o conjugado do número complexo $z = \frac{2}{1+i}$*?*

Resposta esperada. $1 + i$

16 – O que acontece geometricamente quando multiplicamos um número complexo z *pela unidade imaginária* i*?*

Resposta esperada. Uma rotação de 90º no sentido anti-horário.

17 – Qual aplicação dos números complexos as atividades realizadas em sala destacaram?

Resposta esperada. Uma ferramenta para a solução de problemas.

No próximo capítulo, apresentamos nossas considerações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que o produto final do nosso trabalho, a sequência didática, contribuirá para que o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo matemático, números complexos, ocorra de forma mais interessante, de modo que os alunos compreendam o conteúdo, saibam aplicá-lo, apropriem-se de seu significado e, principalmente, possam resolver problemas utilizando-o. Além disso, possam ter nos números complexos uma importante ferramenta que facilite a resolução de várias situações-problemas reais.

Vale destacar que toda esta sequência didática é uma proposta, e como tal, permite aos professores – que optarem por sua utilização em sala de aula – alterações na questão de ordem da sequência didática, bem como a possibilidade de acrescentar novas atividades que julgarem necessárias. No futuro, pretendemos aplicar essa sequência didática, analisar os resultados, e, se possível, escrever um artigo que revele as vantagens e desvantagens do seu desenvolvimento.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Discussões sobre "como fazer" Modelagem Matemática na sala de aula**. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ARAÚJO, Jussara de Loiola; BISOGNIN, Eleni**. Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática: Relatos de Experiências e Propostas Pedagógicas**. Londrina: Eduel, 2011. p. 19 – 43.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem na Educação Matemática:** Contribuições para o Debate Teórico. 2001. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Barbosa.pdf. Acessado em 07 mar. 2013.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos:** Um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BUENO, Vilma C. **Modelagem Matemática:** Quatro maneiras de compreendê-la. 2011. Disponível em http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Produto_Vilma_Bueno.pdf. Acessado em 07 mar. 2013.

CARNEIRO, José P. Q. A ilha do tesouro: dois problemas e duas soluções. **Revista do Professor de Matemática**, n. 47, p. 1 – 4, 3º quadrimestre de 2001.

CERRI, Cristina; MONTEIRO, Martha S. **História dos números complexos**. 2001. Disponível em http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acessado em 07 mar. 2013.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque; ESPÍRITO SANTO, Adilson Oliveira do. **Possibilidades para Modelagem Matemática na sala de aula**. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ARAÚJO, Jussara de Loiola; BISOGNIN, Eleni**. Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática: Relatos de Experiências e Propostas Pedagógicas**. Londrina: Eduel, 2011. p. 161 – 180.

DANTE, Luiz R. **Matemática:** Contexto e Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

ELIAS, Ambrósio. **Geometria analítica:** Questões contextualizadas. Disponível em http://www.ambrosioelias.com.br/wp-content/uploads/2011/04/Professor-Ambr%C3%B3sio-Elias-Material-Geometria-Anal%C3%ADtica.pdf. Acessado em 07 fev. 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GUIMARÃES, Caio. **Aplicações Diferentes Para Números Complexos:** Capítulo II. Disponível em http://www.rumoaoita.com/materiais/materiais_caio/ *complexos_cap2.pdf.* Acessado em 07 fev. 2013.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar, 6:** complexos, polinômios, equações. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

JANOS, Michel. **Matemática e Natureza**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MATEMÁTICA-3. **Caderno do Aluno: matemática, ensino médio, 3ª série, 2º bimestre**. Coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado/SEE, 2008.

MILIES, Francisco C. P. **A introdução dos números complexos**. 2008. Disponível em http://www.matematica.br/historia/complexos.html. Acessado em 07 mar. 2013.

OLIVEIRA, Carlos N. C. **Números complexos:** um estudo dos registros de representação e aspectos gráficos. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/carlos_nely_oliveira.pdf. Acessado em 07 fev. 2013.

PERUZZO, Jucimar. **Origem dos números imaginários ou complexos**. 2012. Disponível em http://www.educairani.com/site_2012/artigos_e_monografias/numeros_imaginarios_jucimar_peruzzo.pdf . Acessado em 07 mar. 2013.

RIBEIRO, Flávia Dias. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. São Paulo: Saraiva, 2009.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia, v.3. São Paulo: Scipione, 2010.

SADOVSKY, Patricia. **O ensino de matemática hoje:** enfoques, sentidos e desafios. São Paulo: Ática, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação.** Coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. 1. ed. atual. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado/SEE, 2012.

SOUZA, Joamir R. **Novo olhar matemática**: v.3. São Paulo: FTD, 2010.

SPINELLI, Walter. **Nem tudo é abstrato no reino dos complexos**. 2009. Disponível em http://www.nilsonmachado.net/sema20091027.pdf. Acessado em 07 mar. 2013.

ANEXOS

ANEXO A – ATIVIDADE 1

Atividade 1.1 – *Um arquiteto está projetando um hotel em frente à praia. De acordo com seu projeto o hotel deve ter a base quadrada, de tal forma que uma das diagonais de sua base seja paralela à orla. Empregando um sistema de coordenadas, ele determinou que os vértices da base que determina a diagonal paralela à orla deverão ser A = (1, 1) e C = (3, 4). A representação geométrica do problema é descrita na figura 1. Sendo assim, responda:*

a) Qual o objetivo do arquiteto ao projetar o hotel desta forma (diagonal paralela à orla)?

b) Se esta condição (diagonal paralela à orla) não for cumprida, faz alguma diferença? Justifique.

c) Visando otimizar os lucros, quais devem ser as coordenadas dos outros vértices?

ANEXO B – ATIVIDADE 2

Atividade 2.1 – *Encontre dois números cuja soma é 17 e cujo produto é 52. Registre o seu raciocínio e confira a resposta.*

Atividade 2.2 – *Descubra dois números cuja soma é 10 e cujo produto é 40. Registre o seu raciocínio e confira a resposta.*

Atividade 2.3 – *Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x, outra com a forma de um paralelepípedo com a base retangular, de lados com 3m e 5m, e de altura igual à altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4m³ maior que o do paralelepípedo.*

a) Escreva a equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de x.

b) Por tentativa e erro busque um valor para x que satisfaça a equação do item anterior.

c) A equação que traduz a situação proposta é uma equação do terceiro grau do tipo $y^3 + My + N = 0$*, isto é, não apresenta o termo em* y^2. *Na história da matemática encontramos uma longa narrativa que ilustra a busca pela solução de tais equações.*

Diz a lenda que, por volta de 1510, Scipione del Ferro foi o primeiro a encontrar uma forma geral para resolver essas equações, mas morreu sem publicar sua descoberta. Porém, seu aluno Antonio Maria Fior a conhecia. Em meados de 1530 espalhou-se a notícia de que Tartaglia também sabia resolver essas equações e, tentando ganhar notoriedade, Fior o desafiou. Cada um propôs ao outro 30 questões envolvendo equações cúbicas para serem resolvidas dentro de um prazo, entretanto Tartaglia resolveu todas as questões propostas por Fior, o qual *não resolveu nenhuma das questões propostas por Tartaglia. Logo, Fior saiu humilhado e a fama de Tartaglia cresceu grandemente. Quando Cardano soube do triunfo de Tartaglia, pediu que este lhe revelasse a solução geral da equação de grau 3 para que ele publicasse. Tartaglia logicamente se recusou. Entretanto, Cardano tanto insistiu e jurou não divulgar a descoberta, que Tartaglia acabou por revelá-la e Cardano publicou tal fórmula no livro que lançou em 1545, Ars Magna. A fórmula acabou ficando conhecida como fórmula de Cardano:*

$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}}$$

Aplique a fórmula de Cardano para resolver a equação do item a). O que você obtêm?

d) Verifique que 4 é uma raiz da equação do item a).

e) Se x = 4 é uma solução, como relacionar isso com o item c)?

ANEXO C – ATIVIDADE 3

Atividade 3.1 – *Os conjuntos numéricos. Faça uma síntese das ideias principais sobre o conjunto dos números complexos.*

Atividade 3.2 – *Representações de um número complexo. A cada número complexo corresponde um par ordenado* $z = (x, y)$*, que pode ser escrito na forma algébrica* $z = x + yi$*, e, que está associado a um único ponto no plano complexo. Além disso, podemos pensar em cada ponto do plano complexo como uma extremidade de um vetor, cuja origem é o* $(0{,}0)$*. Sendo assim, represente, na forma algébrica, geométrica e vetorial, os seguintes números complexos:*

a) (3, - 4) = *b) (0, 3) =* *c) (2,0) =*

Atividade 3.3 – *Módulo e argumento de um número complexo. A representação no plano complexo dos números complexos leva a uma visualização útil dos números complexos. É possível especificar um número complexo pelo comprimento do vetor e pelo ângulo que ele faz com o eixo x positivo.*

a) Calcule os comprimentos dos vetores e os ângulos para z = 3 + 3i e z = 1 – i.

b) O comprimento desse vetor é denominado |*z*| *(lê-se "módulo de z") e o ângulo formado é denominado de argumento de z – geralmente utiliza-se o símbolo* θ *– sendo assim, descreva como proceder para encontrar o* |*z*| *e o valor de* θ *para qualquer número complexo a + bi.*

Atividade 3.4 – *Adição e Subtração com números complexos. Dado* $z_1 = 2 + i$ *efetue as operações indicadas, trabalhando a parte real com a parte real, e, a parte imaginária com a parte imaginária. Represente geometricamente as situações e registre suas observações:*

a) $z_1 + 3$ *b)* $z_1 + 3i$ *c)* $z_1 + (2 + 3i)$ *d)* $z_1 – 3$ *e)* $z_1 - 3i$ *f)* $z_1 – (2 + 3i)$

g) Generalize as observações acima.

Atividade 3.5 – *Adição e subtração com números complexos como vetores. Os vetores também podem ser utilizados para representar a soma de dois números complexos como a "soma do paralelogramo" da adição de vetores. Assim, efetue a soma algébrica e represente geometricamente as operações:*

a) (2 + 3i) + (4 + i) *b) (2 + 3i) - (4 + i)* *c) (1 + 4i) + (3 -2i)* *d) (1 + 4i) – (3 – 2i)* *e) Imaginando o paralelogramo em cada situação acima, o que podemos concluir quando efetuamos uma soma? E quando efetuamos uma subtração?*

Atividade 3.6 – *Multiplicação e divisão de um número complexo por um número real. Dado o número complexo z = 3 + 3i*

a) Represente, geometricamente, encontre seu módulo e seu argumento.

b) Multiplique z por 2, isto é, calcule 2z . O que você observa quanto ao módulo e ao argumento?

c) Divida z por 2, isto é, efetue $\frac{z}{2}$ *. O que você observa quanto ao módulo e ao argumento?*

d) O que podemos concluir quando multiplicamos ou dividimos um número complexo por um número real?

Atividade 3.7 – *Conjugado de um número complexo. O conjugado de um número complexo é da forma* $\bar{z}$ *= a – bi, sendo assim represente geometricamente o número complexo e seu conjugado*

a) z = 1 + 3i *b) z = -2 + i* *c) z = 4 - 2i*

d) Qual a relação geométrica entre um número complexo e seu conjugado?

Atividade 3.8 – *Multiplicação de um número complexo pelo seu conjugado. Efetue as multiplicações (seguindo as regras da álgebra e substituindo* i^2 *por -1)*

a) (13 + i).(13 – i) *b) (-2 + 3i).(-2 – 3i)* *c) (1 – 2i).(1 + 2i)*

d) O que acontece quando multiplicamos um número complexo pelo seu conjugado?

Atividade 3.9 – *Divisão com números complexos. Responda e efetue:*

a) Você já sabe efetuar a divisão de números complexos por números reais. Como podemos efetuar a divisão de números complexos por números complexos?

b) $\frac{1+7i}{1-3i} =$

c) $\frac{3+9i}{2+i} =$

Atividade 3.10 – *Lugar geométrico dos números: real e complexo. Pense geometricamente:*

a) Para que um número seja imaginário puro (isto é, que a parte real seja zero), qual deve ser o seu argumento?

b) Para que um número seja real (isto é, que a parte imaginária seja zero), qual deve ser o seu argumento?

Atividade 3. 11 – *Multiplicação por i. Efetue a operação abaixo representando a geometricamente e registre suas conclusões.*

(3 + 3i) . i

Atividade 3. 12 – *Outras ideias importantes. Extrapolando as ideias referentes a números complexos, responda.*

a) Quantos números complexos de módulo 2 existem, isto é, $\{z \in \mathbb{C} / |z| = 2\}$*? Você é capaz de representá-los geometricamente?*

b) Quantos números complexos de módulo 2 existem cujo argumento é 45º? Você é capaz de representá-los geometricamente?

c) Quantos números complexos de módulo menor que ou igual a 2 existem, isto é, $\{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 2\}$*? Você é capaz de representá-los geometricamente?*

ANEXO D – ATIVIDADE 5

Problema 1 - Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo ângulo de 90°, à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90º, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio, entre as duas marcas.

Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais. Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: "Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui." Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.

A pergunta é: esse pirata era sortudo ou matemático?

Problema 2 - Considere um quadrado. Determine as coordenadas dos pontos C e D, dados A(2,3) e B(7,6).

ANEXO E – ATIVIDADE 6

Atividade 6 – *Questionário avaliativo*

1 – O que você entende por conjunto dos números complexos? Por que ele foi criado?

2 – Quais as possíveis representações para um número complexo?

3 – No plano complexo, qual o lugar geométrico dos números reais?

4 – No plano complexo, qual o lugar geométrico dos imaginários puros?

5 – O que diferencia um número complexo z de seu conjugado $\bar{z}$*?*

6 – Dê o conjugado de:
a) z = -8 + 5i   b) z = 3 – i   c) z = 4i   d) z = 7

7 – Qual é, graficamente, a relação que existe entre z e $\bar{z}$ *?*

8 – Quantos números complexos de módulo 3 existem?

9 – Quais as transformações no plano (rotação, translação, ampliação, redução) que podem ocorrer quando:
a) Realizamos uma adição com números complexos?
b) Realizamos uma subtração com números complexos?
c) Multiplicamos um número complexo por um número real?
d) Realizamos uma multiplicação ou divisão entre complexos?

10 – Represente em um mesmo plano complexo os seguintes números complexos:
a) 3 + 2i   b) – 2 + 4i   c) -1 – i   d) 4i   e) 7   f) 4 – 2i

11 – Dados os números no plano complexo, escreva a representação algébrica. Utilize pontos conforme representado na figura 35.

12 – Efetue as operações entre complexos:

a) (7 + 4i) + (3 – 9i) b) *(2 – 5i) – (1 + 9i)* c) (2 + 4i) . (1 + 3i) *d)(3 + 7i)²*

e) (-7 + 3i) . (5 – 9i) *f)* $\frac{1+7i}{1-3i}$ *g)* $\frac{25}{3-4i}$ *h)* i^{13} *i)* $i^3 + i^5 + i^7$

13 – Calcule o módulo dos números complexos.

a) z = 5 – 12i *b) z = 4 + 3i* *c) z = 3i* *d) z = 4 + i*

14 – Calcule o argumento dos seguintes números complexos.

a) z = – 3 + 3i *b) z = -5 + 0i* *c) z = 2 + 0i* *d) z = -7i*

15 – Qual é o conjugado do número complexo z = $\frac{2}{1+i}$*?*

16 – O que acontece geometricamente quando multiplicamos um número complexo z pela unidade imaginária i?

17 – Qual aplicação dos números complexos as atividades realizadas em sala destacaram?