



Carlos André dos Santos Costa Alonso

**Tópicos de Matemática e Música na
Educação Básica**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática (opção Profissional) da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. George Svetlichny

Rio de Janeiro
Setembro de 2016



Carlos André dos Santos Costa Alonso

**Tópicos de Matemática e Música na
Educação Básica**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. George Svetlichny

Orientador

Departamento da Matemática – PUC-Rio

Prof. Carlos Frederico Borges Palmeiras

Departamento da Matemática – PUC-Rio

Prof. Humberto José Bortolossi

Instituto de Matemática e Estatística – UFF

Prof. Sinésio Pesco

Departamento da Matemática – PUC-Rio

Prof. Marcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 15 de Setembro de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Carlos André dos Santos Costa Alonso

Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro em 1999. Especialista em MBA Executivo em Auditoria Fiscal e Tributária pela Universidade Gama Filho, e em Gestão Educacional pelas Faculdades Integradas Maria Thereza. Participou e concluiu o curso de formação continuada dos professores do Estado do Rio de Janeiro, realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Trabalhou na Fundação Centro de Ciências e Educação Superior à Distância do Estado do Rio de Janeiro, como tutor presencial na graduação de Licenciatura em Matemática. Atualmente é professor na rede municipal de Macaé e Coordenador de Área em Matemática no Município de Quissamã, ambos no estado do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Alonso, Carlos André dos Santos Costa

Tópicos de Matemática e Música na Educação Básica / Carlos André dos Santos Costa Alonso ; orientador: George Svetlichny. – 2016.

69f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2016.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Matemática. 3. Música. 4. Pitágoras. 5. Escalas Musicais. 6. Educação Básica. I. Svetlichny, George. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

A Deus, por ter me concedido saúde física e mental para permanecer na caminhada até o momento.

À minha família e amigos pela compreensão de minha ausência, pela paciência com minha variação de humor e pelas palavras de ânimo durante o curso.

Ao meu orientador, George Svetlichny, pela serenidade, paciência, atenção, discernimento e dedicação.

Aos professores da PUC e aos colegas de turma que colaboraram para tornar a caminhada suave e de grande valia.

Resumo

Alonso, Carlos André dos Santos Costa; Svetlichny, George. **Tópicos de Matemática e Música na Educação Básica**. Rio de Janeiro, 2016. 69p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Apresentamos, neste trabalho, algumas relações da matemática com a música, iniciando com a descoberta de Pitágoras, que relacionou os sons produzidos por uma corda, esticada, com o seu comprimento. Mostramos, ainda, algumas escalas musicais e suas relações com a frequência sonora, principalmente a escala mais utilizada hoje, chamada de escala de temperamento igual. Em seguida, exibimos algumas aplicações da matemática na música e algumas relações existentes entre elas, que podem ser desenvolvidos na educação básica.

Palavras-chave

Matemática; Música; Pitágoras; Escalas Musicais; Educação Básica.

Abstract

Alonso, Carlos André dos Santos Costa; Svetlichny, George (Advisor). **Math and Music Topics in Basic Education**. Rio de Janeiro, 2016. 69p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work we present some relations between mathematics and music, starting with Pythagoras's Discovery which related the sounds produced by a stretched string to its length. We also show some musical scales and their relationships with sound frequencies, especially the scale used today, called the equal tempered scale. We then display some applications of mathematics to music and some existing relations between them, which can and should be developed in basic education.

Keywords

Mathematics; Music; Pythagoras; Musical Scales; Basic Education.

Sumário

1. Introdução	12
2. Ondas Sonoras	14
2.1. Funções	14
2.2. Funções Periódicas	14
2.3. Som	17
2.4. Propriedades Fisiológicas do Som	19
3. Música	22
3.1. Consonâncias e Dissonâncias	23
3.2. Notas Musicais de Mesmo Nome	24
4. Escalas Musicais	27
4.1. Intervalos Musicais	28
4.2. Escalas de Temperamento Natural ou Justo	29
4.3. Escala Pitagórica	29
4.4. Escala Justa de Gioseffo Zarlino	33
4.5. Escala de Temperamento Igual	34
4.6. Escala Mesotônica ou Meantone	36
4.7. Aplicações com Exponenciais e Logaritmos	37
4.7.1. Aplicação 1	37
4.7.2. Aplicação 2	38
4.7.3. Aplicação 3	38
4.8. Aplicações com Ângulos	39
4.8.1. Aplicação 4	39
4.8.2. Aplicação 5	40
4.8.3. Aplicação 6	41
5. Algumas Noções de Teoria Musical	42

5.1. Elementos Fundamentais da Música	42
5.2. Notação Musical	42
5.2.1. Figuras de Som	44
5.2.2. Compassos	46
5.3. Aplicação com Menor Múltiplo Comum	50
5.3.1. Aplicação 7	50
5.4. Aplicações com Frações	51
5.4.1. Aplicação 8	51
5.4.2. Aplicação 9	51
5.5. Acordes	51
6. Aritmética Modular	56
6.1. Relação de Equivalência	56
6.2. Congruência Modular	57
6.3. Aplicações com Aritmética Modular	58
6.3.1. Aplicação 12	59
6.3.2. Aplicação 13	59
6.3.3. Aplicação 14	59
6.3.4. Aplicação 15	59
6.3.5. Aplicação 16	60
7. Atividades de Aplicações na Educação Básica	62
7.1. Atividade 1	62
7.1.1. Exercício 1	62
7.1.2. Exercício 2	62
7.1.3. Exercício 3	62
7.1.4. Exercício 4	63
7.2. Atividade 2	63
7.3. Atividade 3	64
7.3.1. Exercício 5	64
7.3.2. Exercício 6	64
7.4. Atividade 4	64
7.5. Atividade 5	66
7.5.1. Exercício 7	66

7.5.2. Exercício 8	66
8. Conclusão	67
9. Referências bibliográficas	68

Lista de Figuras

Figura 1: Senoide simples	15
Figura 2: Seno (x).....	16
Figura 3: Seno (2x).....	16
Figura 4: Seno de $4x$	16
Figura 5: Soma de senoides.....	17
Figura 6: Onda senoidal	18
Figura 7: Ondas de alguns instrumentos.....	21
Figura 8: Espectro sonoro	27
Figura 9: Espiral	33
Figura 10: Disco 1 para atividade.....	39
Figura 11: Pauta introdutória 1	42
Figura 12: Pauta introdutória 2	43
Figura 13: Pauta introdutória 3	43
Figura 14: Teclado	44
Figura 15: Pauta de compassos.....	46
Figura 16: Partitura da música Noite Feliz	47
Figura 17: Pauta de fórmula de compasso $2/4$	49
Figura 18: Pauta de compasso $4/4$	49
Figura 19: Pauta de compasso $6/8$	49
Figura 20: Pauta de compasso $5/4$	50
Figura 21: Pauta de MMC entre 2 e 3	50
Figura 22: SATMA de 3 discos.....	54
Figura 23: Bijeção	58
Figura 24: Pauta de MMC entre 3 e 4	63
Figura 25: Pauta para atividade 3	64
Figura 26: Monocórdio	65

Lista de Tabelas

Tabela 1: Escalas.....	37
Tabela 2: Figuras de som.....	45
Tabela 3: Unidades de tempo	48
Tabela 4: Intervalos.....	53
Tabela 5: Acordes	53

1 Introdução

Ao longo de nossa história, desde a chegada dos portugueses, a educação no Brasil vem sofrendo mudanças. Começando com a educação Jesuítica, passando pela ditadura militar, até os dias de hoje. Mas, infelizmente ou felizmente, mudança nem sempre implica em evolução, nesse sentido, ao longo do tempo tivemos avanços e retrocessos na educação brasileira. O processo de democratização da escola pública ganha força com a promulgação da lei de diretrizes e bases da educação (LDB). Com a democratização da escola pública, o avanço tecnológico, um sistema familiar quase falido, um sistema político corrupto e uma crescente injustiça social, a educação passa enfrentar grandes desafios, sendo um dos maiores a falta de estímulo à aprendizagem.

Por outro lado, a lei 11769 de agosto de 2008 altera o §6º do artigo 26 da LDB, tornando o ensino de música obrigatório, tal obrigatoriedade foi estendida para o ensino de artes visuais, dança, música e teatro com a lei 13278 de 2016, alterando novamente o §6º do artigo 26 da LDB. Nesse sentido, um trabalho que procure estimular os alunos, no que concerne ao processo ensino aprendizagem, envolvendo a música e outras disciplinas obrigatórias, tornando esse processo mais prazeroso e satisfatório, será um avanço na educação básica.

Este trabalho tem como objetivo principal ser o cerne de um projeto que relacione alguns conteúdos da matemática do ensino básico com alguns conteúdos da teoria e prática musical, apresentando pequenos tópicos relevantes para as duas disciplinas supracitadas.

Iniciamos o segundo capítulo tratando de som, ondas sonoras, suas propriedades fisiológicas percebidas pela audição humana. No terceiro capítulo temos algumas ideias das possíveis definições para música, definimos os sons mais agradáveis e os menos agradáveis, as frequências correspondentes à mesma nota musical e a percepção do som pela audição humana.

No quarto capítulo discorreremos sobre intervalos e escalas musicais, sobretudo àquelas que mais influenciaram as composições ao longo da história e a escala utilizada na música ocidental. Em seguida, mostramos algumas aplicações

da matemática utilizando equações exponenciais, equações logarítmicas, ângulos e arcos à teoria musical.

Iniciamos o quinto capítulo com algumas noções de teoria musical e prosseguimos mostrando algumas aplicações da matemática utilizando o mínimo múltiplo comum e frações na teoria musical, que podem ser desenvolvidas com os alunos da educação básica. Finalizando este capítulo apresentamos um sistema de acordes e transportes de tons musicais baseado em sobreposição de discos.

No sexto capítulo apresentamos a aritmética modular, que justifica o sistema de discos apresentado no capítulo cinco e algumas atividades de aplicação. O último capítulo se destina a apresentar atividades que devem ser desenvolvidas com os alunos da educação básica, relacionando os conceitos musicais abordados nesta dissertação e alguns conceitos matemáticos citados.

2 Ondas Sonoras

Este capítulo se destina às ondas sonoras e suas propriedades, para tanto, se inicia discorrendo sobre funções periódicas, uma vez que as ondas sonoras podem ser modeladas matematicamente segundo funções periódicas ou senoides.

2.1. Funções

Sejam X e Y dois conjuntos não vazios, com $x \in X$ e $y \in Y$. Uma função f de X em Y é uma correspondência que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$. O conjunto X é chamado de domínio da função, enquanto que o conjunto Y é chamado de contradomínio da função. O elemento y é dito imagem do elemento x pela função f , donde o conjunto imagem é formado por todos os elementos de Y que são imagens de algum elemento de X .

2.2. Funções Periódicas

Uma função $f: R \rightarrow R$, onde R é o conjunto dos números reais, é dita periódica de período p , se existe um número real p , não nulo, tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo x real, esse número p é dito período da função, notemos que se p é um período da função $f(x)$, então $k.p$ também é um período da função, com k inteiro. De modo geral, se $f(x) = f(x + p)$, para todo x real, então $f(x) = f(x + k.p)$, para todo x real. O menor número positivo p , quando existe, para o qual se tem $f(x) = f(x + p)$ é chamado de período fundamental da função periódica.

Um exemplo clássico de função periódica é a função seno, ou seja, $f(x) = \text{sen}(x)$, podemos perceber facilmente que é uma função periódica de período fundamental $p = 2\pi$, uma vez que $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$, para ser mais genérico, $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + k2\pi)$, para todo k inteiro, desse modo, $2k\pi$ também é período da função seno, mas o período fundamental ocorre quando $k = 1$. Na figura abaixo temos o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$.

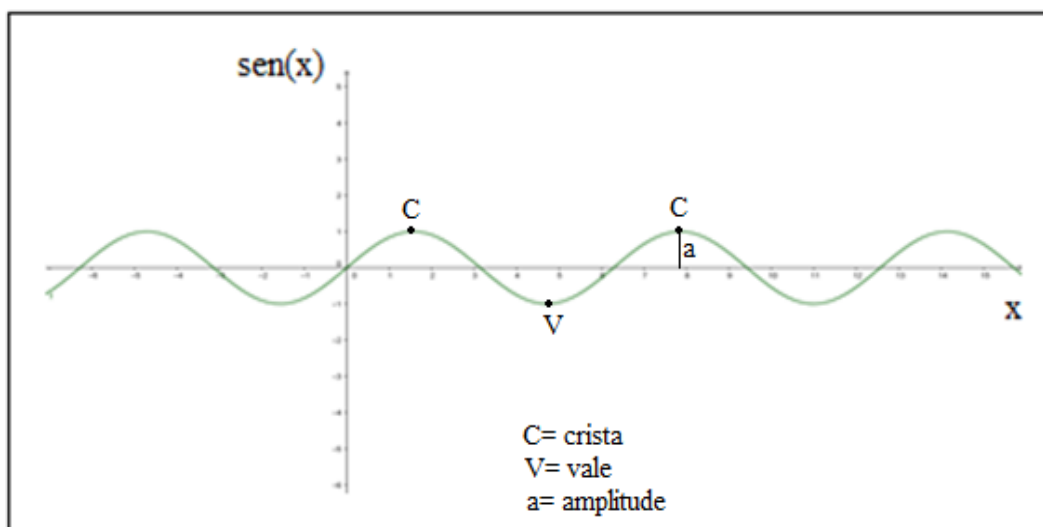


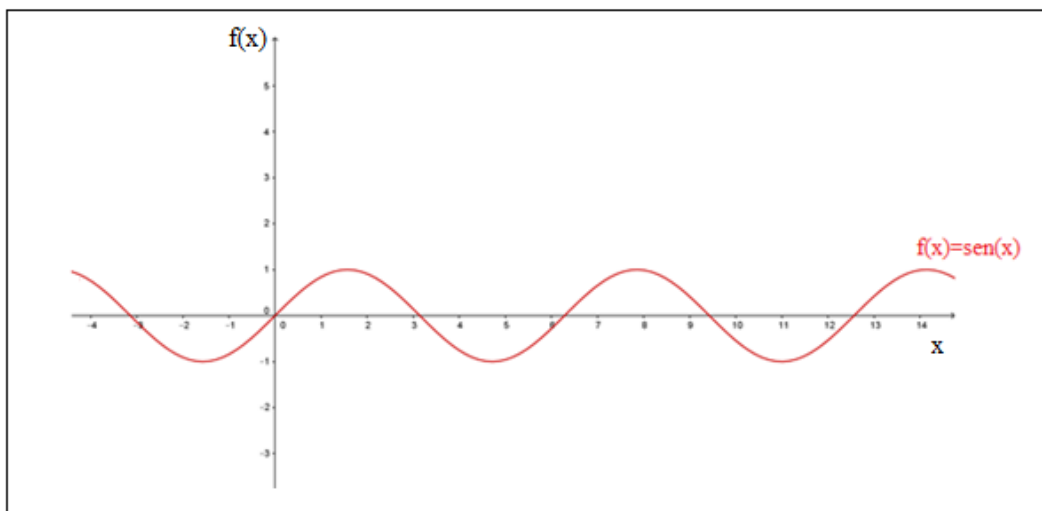
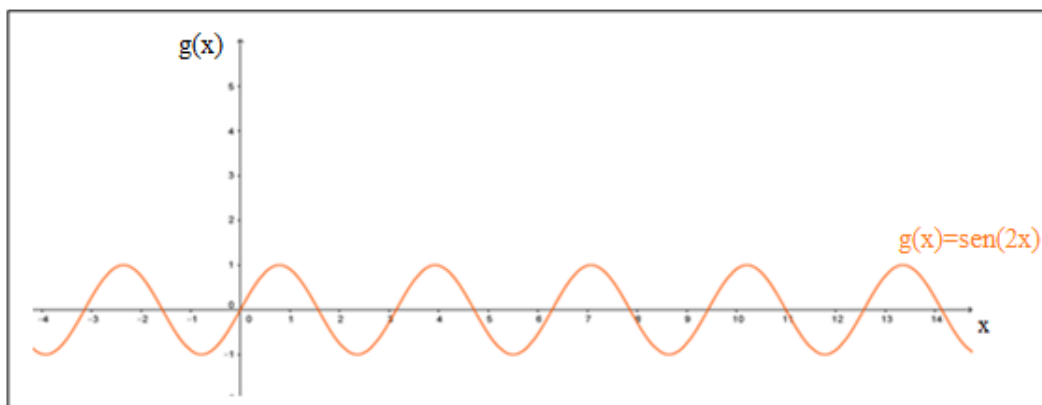
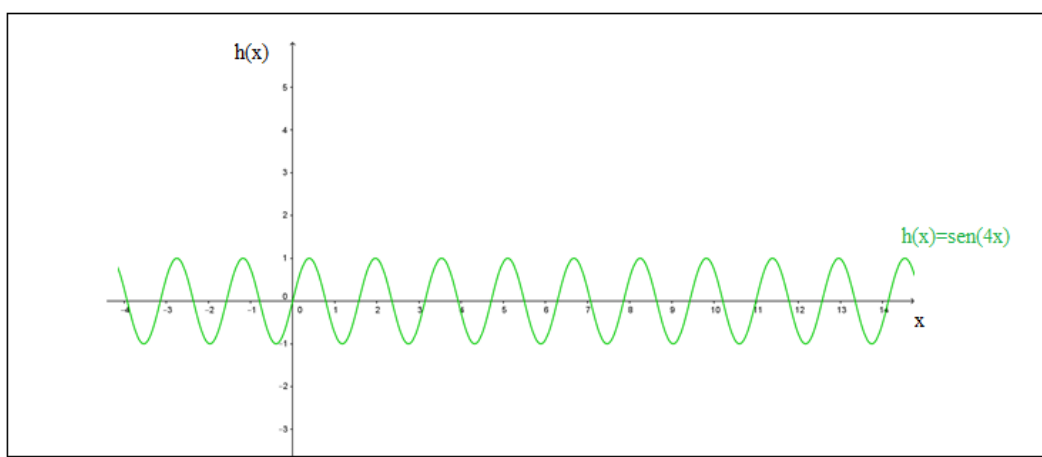
Figura 1: Senoide simples

A crista é o ponto mais alto da senoide, o vale é o ponto mais baixo, a distância entre a crista e o eixo horizontal é chamada de amplitude e por fim a distância entre duas cristas consecutivas é chamada de comprimento de onda.

Sejam f e g duas funções periódicas, ambas de período fundamental p , daí podemos enumerar as seguintes propriedades:

- i) $f(x) = c$ é periódica para todo p real e c constante.
- ii) $a.f(x) + b.g(x)$ é periódica de período fundamental p , para todo a e b reais.
- iii) $f(x).g(x)$ é periódica de período p .
- iv) $f(x + w)$ é periódica de período fundamental p , para todo w real.

Para exemplificar as propriedades acima, consideremos as funções $f(x) = \text{sen}(x)$, $g(x) = \text{sen}(2x)$, $h(x) = \text{sen}(4x)$, os seus períodos são respectivamente 2π , π e $\frac{\pi}{2}$, conforme podemos observar em seus gráficos nas figuras abaixo.

Figura 2: $f(x)=\text{sen}(x)$ Figura 3: $g(x)=\text{sen}(2x)$ Figura 4: $h(x)=\text{seno}(4x)$

Podemos observar que o comprimento de onda da função $f(x) = \text{sen}(x)$ é o dobro do comprimento de onda da função $g(x) = \text{sen}(2x)$, enquanto que o da

função $f(x) = \text{sen}(x)$ é metade do período da função $g(x) = \text{sen}(2x)$ e é a quarta parte do período da função $h(x) = \text{sen}(4x)$. Isso ocorre porque a quantidade de ciclos e o comprimento da onda são grandezas inversamente proporcionais. De modo mais simples, podemos dizer que em um intervalo de 2π a função $f(x) = \text{sen}(x)$ completará um ciclo. Por outro lado, a função $g(x) = \text{sen}(2x)$ completará um ciclo a cada π , logo completará dois ciclos em 2π . Além disso, a função $h(x)$ completará um ciclo a cada $\frac{\pi}{2}$, ou seja, completará 4 ciclos em 2π . No estudo de ondas, a quantidade de ciclos por unidade de tempo é chamada de frequência, geralmente medida em Hertz (Hz), como por exemplo, uma onda com frequência de 80 Hz significa que essa onda realiza 80 ciclos por segundo.

Faremos agora uma soma de funções, isto é, vamos considerar a função $s(x) = f(x) + g(x) + h(x)$, citadas acima, como $s(x)$ é uma soma de funções periódicas de períodos $2\pi, \pi$ e $\pi/2$, segue que $s(x)$ também é periódica e seu período é 2π , o que podemos observar no seu gráfico abaixo.

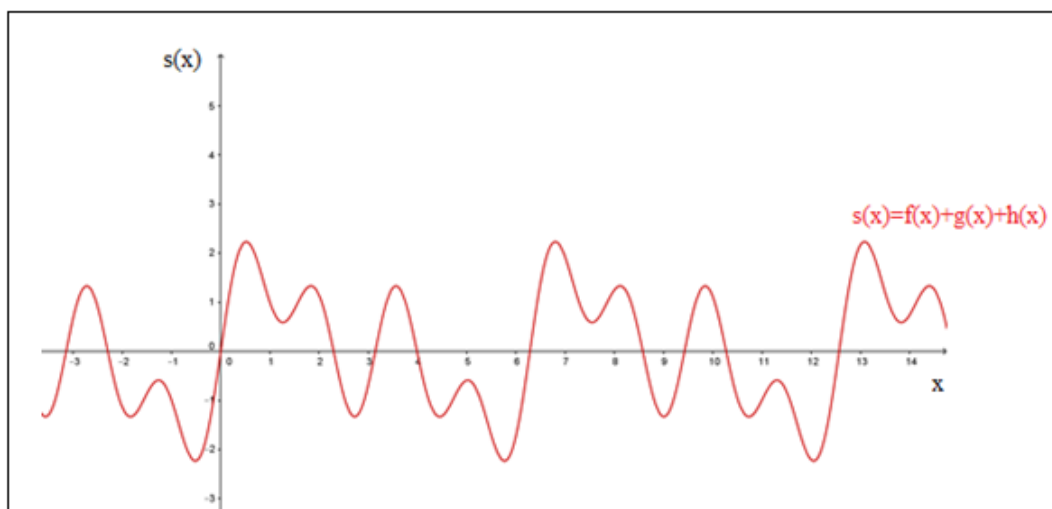


Figura 5: Soma de senoides

2.3. Som

O som, segundo a física, consiste em oscilações (ondas) de pressão que se propagam através de um meio material sólido, líquido ou gasoso, ou seja, o som não se propaga no vácuo. Na fisiologia, o som é a recepção de tais ondas e

sua percepção pelo cérebro, ou seja, as ondas que se propagam através de algum meio material, ao entrar em contato com os ouvidos, são convertidos em estímulos nervosos que, ao alcançar o cérebro nos fornece a sensação auditiva do que chamamos de som.

Quando vibramos uma corda de violão, por exemplo, esta oscila provocando vibrações nas moléculas de ar e gerando ondas, estas ondas podem ser aproximadas por uma soma de senoides. Ondas senoidais com frequências inferiores a 20Hz são chamadas de infrassons e superiores a 20.000Hz são chamadas de ultrassons. Os infrassons e os ultrassons não são perceptíveis à audição humana. De modo mais simples e intuitivo, podemos dizer que som é tudo aquilo que “podemos ouvir”.

Uma representação de uma onda senoidal se encontra na figura abaixo, destacando os elementos: comprimento de onda, crista, vale e amplitude. Quanto maior for o comprimento da onda, mais grave será o som, por outro lado, quanto maior for a amplitude mais intenso será o som. Se trocarmos o eixo horizontal, que na figura abaixo representa distância, por um eixo que represente o tempo, teremos o deslocamento medido em unidade de tempo. Ou seja, teremos o comprimento de onda por medida de tempo, que caracteriza uma frequência sonora. No caso de uma onda com frequência de 110 Hz, por exemplo, temos 110 ciclos ou comprimentos de onda por segundo.

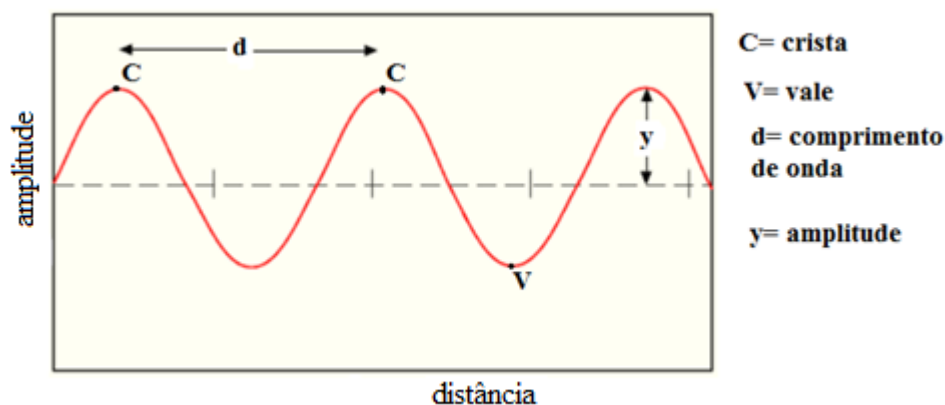


Figura 6: Onda senoidal

2.4. Propriedades Fisiológicas do Som

Quando falamos em propriedades fisiológicas do som, estamos nos referindo à percepção do som pela audição humana, tais como intensidade, duração, altura e timbre. Essas propriedades estão diretamente relacionadas com a energia de vibração nas moléculas, a frequência e o tipo de onda, estas são grandezas físicas.

A intensidade do som é uma característica que se refere à energia de vibração nas moléculas, provocada pela fonte emissora das ondas, ou seja, é caracterizada pela amplitude da onda. Essa característica do som é percebida pela pressão que as ondas exercem sobre o ouvido ou algum instrumento utilizado para medir a intensidade do som. Quanto maior a pressão que as exercem, maior é a amplitude e maior será a intensidade do som, tal intensidade geralmente é medida em decibel, que é a décima parte de um bel, nome utilizado em homenagem ao cientista escocês, naturalizado norte americano, Alexander Graham Bell¹. Mas, é importante ressaltar que o decibel não é uma unidade de medida e sim uma escala que relaciona duas grandezas.

De acordo com a lei de Weber-Fechner², a resposta perceptiva a qualquer estímulo, em relação a uma intensidade de referência, é proporcional ao logaritmo da intensidade do estímulo. Decorre daí, que as medidas de percepção da intensidade sonora pelo ouvido humano são feitas por grandezas logarítmicas. É o caso do decibel (dB), definido como dez vezes o logaritmo decimal da razão de intensidade sonora. Ou seja, $I = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{q_1}{q_2} \right)$, onde I é a intensidade sonora relativa percebida e $\frac{q_1}{q_2}$ é a razão entre as duas intensidades físicas sonoras, que estamos comparando. Suponhamos que num determinado ambiente a intensidade física do som produzido por um aparelho seja quatro vezes maior do que o ruído desse ambiente, dizemos então, que a intensidade sonora percebida em relação ao ambiente é dada por $I = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{q_1}{q_2} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{4}{1} \right) = 10 \cdot \log_{10} 4$ decibéis. Neste caso, estamos comparando o ruído do ambiente com o som produzido pelo aparelho citado, tendo o ruído do ambiente como intensidade de referência. Por

¹ Alexander Graham Bell foi um cientista, inventor e fundador da companhia telefônica Bell.

² Ernst Heinrich Weber foi um médico alemão e Gustav Theodor Fechner foi um filósofo alemão.

outro lado, A duração do som diz respeito ao tempo de emissão das vibrações que se propagam pelo meio material.

A altura é a propriedade que nos permite perceber e diferenciar um som grave de um agudo. Essa percepção audível está diretamente ligada às frequências, sobretudo as mais intensas, que compõem o som. A frequência por sua vez é a quantidade de oscilações num determinado intervalo de tempo, ou seja, é a quantidade de ciclos (sentido usual) por unidade de medida de tempo. Sons com baixas frequências são chamados de grave e sons com altas frequências são chamados de agudo. Em suma, quanto maior a frequência, mais agudo será o som e quanto menor, mais grave ele será.

Geralmente o som é constituído por várias frequências e no caso de sons cujas fontes são instrumentos musicais melódicos, principalmente os de corda, são constituídos pela frequência fundamental, ou seja, pela frequência mais baixa e pelos sobretons (frequências mais altas) de frequências múltiplas da frequência fundamental, neste caso os sobretons são chamados de harmônicos. Quando as frequências não são múltiplas da frequência fundamental, os sobretons são ditos inarmônicos, é o caso, por exemplo, do som produzido por um tambor, cujos sobretons não são harmônicos, ou ainda um martelo batendo num prego.

O timbre é determinado pelo conjunto das frequências que compõem o som, em especial as mais intensas, juntamente com as intensidades de cada uma das frequências. Sejam T_1 e T_2 dois timbres constituídos pelas frequências mais intensas $F_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ e $F_2 = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$, respectivamente. Sejam ainda, $I_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ as intensidades das frequências f_1, f_2, \dots, f_n , nesta ordem e $I_2 = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ as intensidades da frequências g_1, g_2, \dots, g_k respectivamente. Dizemos que os timbres T_1 e T_2 são iguais se e somente se as frequências de T_1 com suas respectivas intensidades forem iguais às frequências de T_2 com suas respectivas intensidades. De modo geral, podemos escrever :

$$T_1 = T_2 \leftrightarrow F_1 = F_2 \text{ e } I_1 = I_2$$

No caso de notas musicais provenientes de instrumentos, como violão, violino, piano, flauta, entre outros, as frequências que determinam o timbre são frequências múltiplas da fundamental, ou seja, são frequências que chamamos de harmônicos.

De modo geral, dada uma frequência f de uma nota musical qualquer, todos os seus harmônicos são da forma $n \cdot f$, com n inteiro maior que um e $n \cdot f$ é a $(n-1)$ -ésima frequência harmônica da nota de frequência f . A nota de frequência f é chamada de nota fundamental. É importante ressaltar que a nota produzida por fontes diferentes possuem conjuntos de frequências diferentes ou intensidades relativas diferentes, é justamente essa característica que faz com que percebamos as diferenças dos timbres de fontes diferentes. De modo mais simples, podemos dizer que o timbre é uma característica sonora, percebida pela audição, que nos permite distinguir as diferentes fontes sonoras, como por exemplo, distinguir o som produzido por um piano de um som produzido por um violão. A figura 2, que mostra as ondas de um diapasão, de uma flauta, da voz humana soando a vogal *a* e de um violino, embora com as mesmas frequências naturais, as ondas possuem formatos diferentes e estes formatos é que determinam o timbre do som.

Com uma análise um pouco mais rigorosa, podemos perceber que cada um dos gráficos que representa o timbre de cada instrumento é na verdade uma soma de funções periódicas, ou seja, a soma da função que representa a frequência fundamental com as funções que representam seus sobretons.

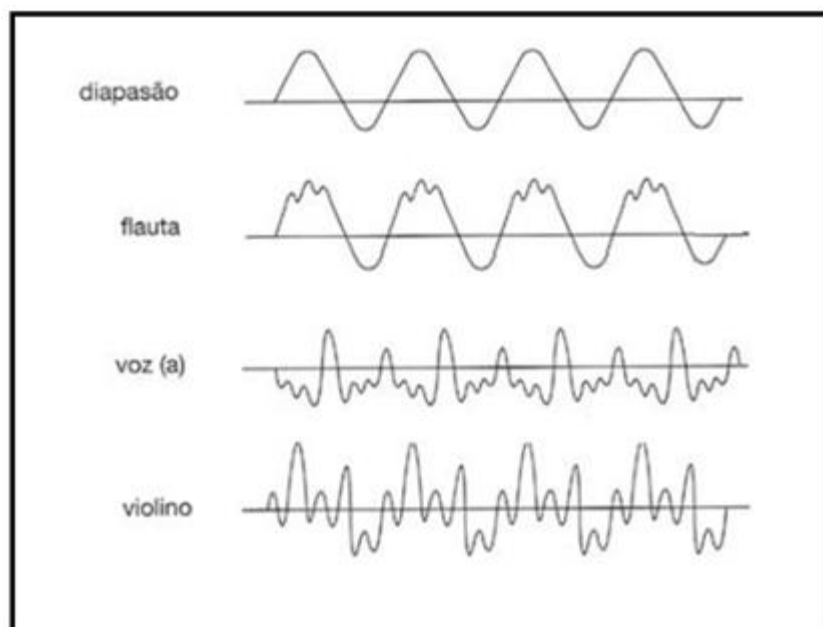


Figura 7: Ondas de alguns instrumentos

3 Música

Este capítulo trata basicamente das ideias intuitivas de música, seus elementos fundamentais e sobre notas musicais.

Segundo Maria Luisa de Mattos Priolli, a música é a arte dos sons, combinados de acordo com as variações da altura, proporcionados segundo a sua duração e ordenados sob as leis da estética.

Segundo Aurélio Buarque de Holanda Ferreira, a música é arte e ciência de combinar os sons de modo agradável ao ouvido.

Segundo Estevão Cruz, em sua obra “Compêndio de Filosofia” em 1954, a música é a arte de exprimir o belo pela harmonia dos sons. Ressalta ainda que a música não tem por fim suscitar em nós as imagens das coisas, mas exprimir a emoção que essas coisas provocam na nossa alma.

No entanto, o que é agradável ao ouvido, assim como o belo³, são conceitos relativos, ou seja, variam de acordo com as pessoas, a cultura e o tempo, o que nos leva a concluir que tais conceitos são extremamente relativos.

A música é composta por pelo menos um dos quatro elementos fundamentais: melodia, contraponto, ritmo e harmonia.

A melodia consiste na sucessão das notas musicais, formando sentido musical, é a concepção horizontal da música.

O contraponto é o conjunto de melodias dispostas em ordem simultânea, é uma concepção simultaneamente horizontal e vertical da música.

O ritmo é o movimento dos sons regulados pela sua maior ou menor duração.

A harmonia consiste na execução de vários sons ouvidos ao mesmo tempo, observadas as leis que regem os agrupamentos dos sons simultâneos constituindo acordes. Possui uma concepção musical vertical.

Para exprimir profundamente qualquer sentimento, ou descrever por meio da música qualquer quadro da natureza, torna-se imprescindível a participação de pelo menos um dos quatro elementos fundamentais.

³ Não é possível dar uma definição absoluta de belo, embora seja possível estudar suas várias acepções no curso da história.

Um tom, de modo geral, pode ser definido como a distância entre duas notas consecutivas de nomes distintos, exceto entre mi e fá e entre si e dó, estas possuem distância de meio tom. Na música ocidental, geralmente, se usa a escala bem temperada, de sete notas com cinco acidentes, sustenido ou bemol, que serão definidos a seguir, perfazendo um total de 12 notas, num intervalo correspondente a uma frequência e o seu dobro. Tal intervalo é chamado de oitava e utilizaremos as letras latinas C, D, E, F, G, A e B, para representar as sete notas musicais dó, ré, mi, fá, sol, lá e si respectivamente, numa oitava. Além disso, para aumentar a nota em meio tom, utilizamos o símbolo # (sustenido) e para baixarmos meio tom, utilizamos o símbolo b (bemol). Desse modo, utilizaremos os seguintes símbolos para representar as notas musicais: C, C#, Db, D, D#, Eb, E, F, F#, Gb, G, G#, Ab, A, A#, Bb e B. Na escala bem temperada vale as seguintes igualdades, que serão melhor explicadas no capítulo referente a escalas: C#=Db, D#=Eb, F#=Gb, G#=Ab e A#=Bb, o que não ocorre em outras escalas.

3.1. Consonâncias e Dissonâncias

Segundo Paul Hindemith⁴, esses dois conceitos nunca foram completamente explicadas, e por séculos as definições têm sofrido variações. A melhor definição é dada pela mútua exclusão, isto é, consonante é aquilo que não é dissonante e dissonante é aquilo que não é consonante, formando assim uma dicotomia estrutural.

De fato, a palavra consonância vem do latim *consonare*, que significa soar junto, ou seja, é uma harmonia. De forma mais específica, podemos definir consonância como sendo aqueles sons de várias frequências, que são agradáveis, logo tal definição é relativa, isto é, varia de pessoa para pessoa, de cultura para cultura e de época para época. Observou-se, de modo empírico, que duas notas musicais, em escalas naturais, isto é, anterior ao temperamento, que possuem intervalos menores entre harmônicos em comum têm tendência a serem mais consonantes do que aquelas que possuem intervalos maiores entre harmônicos em comum. De modo análogo, a dissonância é qualidade que um som tem de parecer

⁴Paul Hindemith foi um compositor, violinista, violista, maestro e professor alemão.

instável, ou seja, são sons que soam não muito agradáveis, em “desarmonia”. Logo, tal definição também é relativa.

Para ilustrar, tome a nota C de 132Hz e uma nota E de 165Hz, note que a quantidade de harmônicos se dá pela equação $132n = 165m$, com n e m inteiros, desse modo, queremos um n e um m natural maiores que zero, tais que $132n = 165m \rightarrow 4n = 5m \rightarrow n = 5k$ e $m = 4k$, com k natural maior que zero. Isso significa que a cada cinco harmônicos da nota C, haverá um harmônico em comum com a nota E e a cada quatro harmônicos da nota E, haverá um harmônico em comum com a nota C. Ou seja, colocando os harmônicos em ordem crescente de frequência, temos os harmônicos de C que ocupam a posição $5k$ com a mesma frequência dos harmônicos de E que ocupam a posição $4k$.

Consideremos agora a nota C de 132Hz e a nota G com 198Hz, de modo análogo ao exposto acima temos $132n = 198m \rightarrow n = 3k$ e $m = 2k$, com k natural maior que zero. Pelo mesmo motivo, a cada três harmônicos de G haverá um harmônico de mesma frequência em C e a cada dois harmônicos em C, haverá um harmônico de G com a mesma frequência.

Desse modo, fica evidente que existe um espaçamento menor de harmônicos comuns entre as notas C e G do que entre as notas C e E, dizemos então que C e G são mais consonantes do que C e E. Por outro lado, a percepção auditiva comprova que realmente C e G são notas que soam em harmonia, de modo mais agradável à maioria dos ouvidos humanos.

Tomemos agora duas notas de frequências múltiplas, digamos 132Hz e 264Hz, podemos constatar rapidamente que o conjunto de todos os harmônicos da nota de 132Hz contém o conjunto de todos os harmônicos da nota de 264Hz, dizemos então que essas notas se encontram em consonância máxima, soando como se fosse a mesma nota e portanto recebem o mesmo nome, neste caso de nota dó.

3.2. Notas Musicais de Mesmo Nome

Sejam H_m o conjunto de todos os harmônicos de uma nota musical M e f_m a frequência, em Hertz (Hz), da nota M , daí definimos $H_m = \{n \cdot f_m, n \in \mathbb{N}^*\}$, onde \mathbb{N}^* é o conjunto dos inteiros positivos. Seja ainda H_w o conjunto de todos os

harmônicos da nota musical W e f_w a frequência, em Hz, da nota W , daí definimos $H_w = \{k \cdot f_w, k \in \mathbb{N}^*\}$. Diremos que M e W são perfeitamente harmônicos quando H_m está contido em H_w ou quando H_m contém H_w , neste caso as notas M e W recebem o mesmo nome, é o caso, por exemplo, das notas de frequências 132Hz e 264Hz, que recebem o nome de nota dó.

Para ilustrar a definição acima, consideremos $C=132\text{Hz}$, $C=264\text{Hz}$ e $C=528\text{Hz}$. Vamos chamar de C_0 a nota dó de 132Hz, de C_1 a nota dó de 264Hz, de C_2 a nota dó de 528Hz, de H_{C_1} o conjunto de todos os harmônicos da nota C_1 , de H_{C_2} o conjunto de todos os harmônicos da nota C_2 e de H_{C_0} o conjunto de todos os harmônicos da nota C_0 , desse modo fica fácil notar que H_{C_2} está contido em H_{C_1} e que H_{C_1} está contido em H_{C_0} . Vamos à prova;

[.] De fato, Sejam $H_{C_2} = \{528 \cdot n, n \in \mathbb{N}^*\}$ e $H_{C_1} = \{264k, k \in \mathbb{N}^*\}$ e seja ainda $f \in H_{C_2}$, daí $f = 528n = 264 \cdot 2n = 264k$, onde $k = 2n$, logo $f \in H_{C_1}$, donde H_{C_2} está contido em H_{C_1} .

De modo análogo, sendo $H_{C_0} = \{132 \cdot r, r \in \mathbb{N}^*\}$ temos que H_{C_1} está contido em H_{C_0} .

Neste caso, se C_0 é o dó fundamental, então C_1 é o dó uma oitava acima e C_2 é o dó duas oitavas acima. De modo geral, dada uma nota musical M de frequência fundamental f_m e uma nota W de frequência fundamental $f_w = 2^n \cdot f_m$, com n natural maior que zero, dizemos que a nota W é igual à nota M , n oitavas acima.

De fato, temos:

$$f_1 = 2f_0$$

$$f_2 = 2f_1$$

$$f_3 = 2f_2$$

.

.

.

$$f_n = 2f_{n-1}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade, temos:

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \dots f_n = 2f_0 \cdot 2f_1 \cdot 2f_2 \dots 2f_{n-1} \Rightarrow f_n = 2^n f_0 \Rightarrow 2^n = \frac{f_n}{f_0} \Rightarrow n = \log_2 \frac{f_n}{f_0}.$$

Segundo a lei de Weber-Fechner, a percepção do som, pelo ouvido humano, é proporcional ao logaritmo do estímulo, decorre daí que ao multiplicarmos uma frequência por uma potência de base 2, digamos 2^k , nossa percepção se dará pelo logaritmo de 2^k , ou seja, por $\log 2^k$, quando a base desse logaritmo for 2, nossa percepção auditiva sofrerá um acréscimo de k unidades, neste caso de k oitavas.

4 Escalas Musicais

Iniciamos este capítulo definindo intervalos musicais e escalas musicais, sobretudo algumas escalas relevantes para o desenvolvimento e aplicação deste trabalho. Prosseguimos mostrando algumas aplicações relacionando alguns conteúdos da matemática escolar básica com alguns conteúdos da teoria musical.

O espectro sonoro, conjunto de todas as frequências que compõem o som, audível pode ser visto como uma função contínua, conforme ilustração abaixo. Nesse sentido, alguns músicos acreditavam que para fazer música seria necessário transformar essa função contínua em discreta, no entanto, esse mito vai por terra quando vemos composições em sintetizadores ou até mesmo em violino, onde o músico passa de uma nota musical para a outra percorrendo todas as frequências do intervalo entre essas notas. Desse modo, a discretização da função é necessária somente para construir escalas musicais, mas não necessariamente para compor músicas.

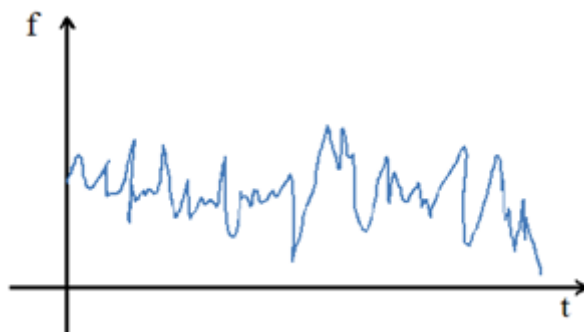


Figura 8: Espectro sonoro

As escalas musicais são, a rigor, a divisão da sequência de notas contidas dentro de uma oitava. Essa divisão pode ser feita de diversas formas, obedecendo principalmente a critérios estéticos. De modo mais simples, podemos dizer que uma escala é uma sucessão de notas musicais diferentes consecutivas, quando essa sucessão é feita da nota mais grave para a menos grave (mais aguda) a escala é chamada de ascendente. De modo análogo, quando a sucessão é feita da mais aguda para a menos aguda (mais grave), dizemos que a escala é descendente.

Um fator histórico muito importante para selecionarmos esse conjunto de sons que determinará a escala é a quantidade de consonâncias possíveis entre os sons que compõem a escala. Muitos intelectuais tentaram definir uma escala que fosse perfeita, isto é, cujas notas estivessem em harmonia máxima. O grande desafio era determinar critérios para a escolha dessa escala, que seria a escala perfeita no que tange à melodia, sem gerar distorções ao mudar a tonalidade da melodia, ou seja, ao mudar uma música de tom, os intervalos entre as notas musicais, com suas respectivas durações, deveriam ser preservados. Dentre os intelectuais que muito contribuíram para o desenvolvimento musical, no que concerne à teoria e conseqüentemente à execução prática, podemos citar Pitágoras, Aristóteles, Erastóstenes, Arquitas de Tarento, Gioseffe Zarlino e Marin Mersene.

4.1. Intervalos Musicais

O ouvido humano é capaz de perceber 30 alturas diferentes num intervalo de um semitom e como uma escala é uma seqüência de alturas selecionadas dentro dessas possibilidades, fica fácil imaginar que existem muitas e muitas escalas musicais espalhadas e desenvolvidas nos continentes, desse modo, torna-se inviável falarmos sobre todas elas, logo falaremos apenas de algumas delas. Vale ressaltar ainda, que a razão entre as frequências de duas notas é chamada de intervalo e alguns intervalos recebem nomes específicos como o uníssono, cuja razão é 1; uma oitava, cuja razão é 2; quinta justa, cuja razão é $\frac{3}{2}$ e quarta justa, cuja razão é $\frac{4}{3}$. Os intervalos C-D, D-E, F-G, A-B são intervalos de um tom, enquanto que os intervalos E-F e B-C são intervalos de meio tom. No entanto, dependendo do sistema de escala utilizado, a soma de dois meios tons não é exatamente um tom, conforme veremos adiante.

Dizemos que dois intervalos i e j são inversões, se e somente se quando somados resultar em uma oitava, lembrando que para somarmos intervalos devemos multiplicar suas razões, como por exemplo, se i é igual a um intervalo de IV (correspondente a dois tons e meio) e j é igual a um intervalo de V (correspondente a três tons e meio), então sua soma $IV+V = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$. De modo

análogo, para subtrairmos dois intervalos, basta dividirmos suas razões, pois multiplicação e divisão são operações inversas.

Por outro lado, considerando que em um intervalo de oitava temos doze semitons, ou seja, seis tons, podemos observar a inversão de intervalos de outra forma, somando os tons e semitons de cada um deles. Desse modo, dizemos que dois intervalos i e j são inversões, se e somente se, a soma de seus intervalos for de seis tons, isto é, de 12 semitons. No exemplo citado acima, i é um intervalo de 5 semitons e j é um intervalo de 7 semitons, somando esses dois intervalos temos 12 semitons ou 6 tons, que é exatamente o intervalo de uma oitava, o que justifica o fato de intervalos de IV e de V serem ditos inversões.

De modo geral, para determinarmos a inversão de uma nota de intervalo i qualquer, com s semitons, basta fazermos a subtração $12 - s$, que nos fornecerá a quantidade de semitons que terá a inversão da nota de intervalo i . Como exemplo, para determinarmos a inversão de um intervalo de 4 semitons, basta fazermos $12 - 4 = 8$, isto é, a inversão de um intervalos de 4 semitons é um intervalo de 8 semitons.

4.2. Escalas de Temperamento Natural ou Justo

Quando falamos em temperamento natural, estamos nos referindo a uma família de sistemas de afinação, nos quais os intervalos resultantes são harmonicamente puros, ou seja, os seus intervalos podem ser representados por razões entre dois números naturais. Tais intervalos podem ser representados por números racionais com numerador e denominador primos entre si. Nesse sistema de afinação são utilizadas razões de frequências racionais, ao invés de irracionais, como acontece no temperamento igual, que veremos adiante, onde a oitava é dividida em doze partes exatamente iguais entre si.

4.3. Escala Pitagórica

É uma escala de afinação natural, pois seus intervalos são representados por números racionais, satisfazendo a definição de escala de temperamento natural. Segundo alguns autores, deve-se a Pitágoras o fato de a música se tornar o quarto ramo da matemática em sua época. Pitágoras (séc. V e VI AC) foi o

primeiro, que se tem registro, a relacionar a música com a matemática de forma científica. Para tanto, ele utilizou o monocórdio, instrumento que provavelmente foi inventado por ele. Seus experimentos tinham como objetivo principal relacionar o comprimento de uma corda vibrante com o tom musical produzido por ela. A partir dos seus experimentos com o monocórdio, Pitágoras constatou que ao dividir uma corda ao meio, esta produzia o mesmo som, porém mais agudo. Observou ainda que o som de quinta justa se dava na corda com comprimento de $\frac{2}{3}$ e som da quarta justa com o comprimento $\frac{3}{4}$. Com o advento do frequencímetro, instrumento utilizado para medir a frequência sonora, pôde ser verificado que a frequência emitida pelas vibrações de uma corda é inversamente proporcional ao seu comprimento, ou seja, se uma corda esticada emite uma frequência f , então, ao vibrarmos a mesma corda, pressionando-a ao meio, esta emitirá uma frequência $2f$. De modo análogo, quando pressionamos essa mesma corda na razão $\frac{2}{3}$, a frequência emitida será $\left(\frac{3}{2}\right) f$.

A escala criada por Pitágoras foi a mais usada na Europa nos séculos XIII e XIV, tal escala foi construída a partir de quintas perfeitas, cuja razão de frequência era $\frac{3}{2}$, além disso, quintas perfeitas geram quartas perfeitas, pois a soma de suas frequências gera uma oitava, donde a frequência de uma quarta perfeita é $\frac{4}{3}$. De fato, $\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right) = 2$, que é um intervalo correspondente a uma oitava. Tal escala ficou conhecida como Escala Pitagórica, tornando-se a base da nossa escala, conhecida como diatônica e influenciando a maioria dos sistemas de escalas que surgiram depois.

A escala diatônica é uma escala de sete notas com cinco intervalos de tons e dois intervalos de meio tom. Uma explicação para a formação dessa escala é o ciclo de quintas justas, partindo da nota F percorrendo a primeira quinta, temos a nota C, repetindo esse processo com a nota C, obtemos a nota G, fazendo esse processo por sete vezes, encontramos a nota que se aproxima da nota F. Com o objetivo de reduzir essa discrepância entre as duas notas F encontradas, o segundo F foi chamado de sustenido e o processo repetido mais cinco vezes, chegando assim a uma frequência que mais se aproximava da nota F. Desse modo, a escala diatônica possui sete notas e cinco variações (sustenidos ou bemóis), totalizando 12 notas.

No entanto, a ideia de Pitágoras não era perfeita, vejamos onde está o grande problema dessa escala. Começando da nota dó e escolhendo uma frequência para ela, digamos 132 Hz, multiplicando a frequência por $\frac{3}{2}$, obtemos a quinta justa, que é a nota G, repetindo o processo com a nota G, encontramos a nota D, repetindo esse procedimento 12 vezes, deveremos encontrar uma nota C sete oitavas acima da nota inicial, uma vez que o intervalo de quinta possuiu sete semitons e o de oitava 12 semitons. Isso implica que deveríamos ter $132 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 132 \cdot 2^7$, ou seja, $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 2^7$, mas $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cong 129,75$ e $2^7 = 128$, essa diferença entre doze quintas justas e sete oitavas é o que se chama de coma pitagórico. Esta diferença torna o dó inicial dissonante do dó sete oitavas acima, encontrado a partir das quintas perfeitas. Essa dissonância recebeu o apelido de quinta do lobo, pois tal dissonância soava como o uivo de um lobo em relação à sua respectiva nota consonante.

Como a sucessão de doze quintas não formam sete oitavas, ao tentar dispor essas notas numa circunferência, mantendo-as sempre numa mesma oitava, forma-se um espiral e não uma circunferência. A distância entre a nota fundamental e a sua respectiva doze quintas acima aumenta a cada oitava de modo exponencial, gerando um espiral que se abre cada vez mais rápido, conforme podemos visualizar na figura 9.

Na escala pitagórica, os intervalos entre duas notas sucessivas de nomes diferentes podem ser $\frac{9}{8}$ ou $\frac{256}{243}$, chamados respectivamente de tom pitagórico e semitom pitagórico. É importante notar que o semitom pitagórico não é metade do tom pitagórico, pois se assim o fosse teríamos $\left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{9}{8}$, o que não é verdade, logo, na escala pitagórica, temos C# diferente do Db.

De fato, tendo como tom pitagórico o intervalo $\frac{9}{8}$, a metade desse tom deveria ser um intervalo x, tal que:

$$x \cdot x = \frac{9}{8} \rightarrow x^2 = \frac{9}{8} \rightarrow x = \sqrt{\frac{9}{8}} \rightarrow x = \frac{3}{2\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cong 1,0606$$

Seja f_C a frequência da nota C, aumentando esta nota em meio tom pitagórico, encontramos a nota C#, ou seja, $\left(\frac{256}{243}\right) \cdot f_C$ será a frequência da nota C#. Por outro lado, sendo f_D a frequência da nota D, diminuindo esta nota em meio

tom pitagórico, encontramos a nota Db, ou seja, $\frac{243}{256} \cdot f_D$ será a frequência da nota Db (f_{Db}). $f_{Db} = \left(\frac{243}{256}\right) f_D = \left(\frac{243}{256}\right) \left(\frac{9}{8}\right) \cdot f_C = \left(\frac{2187}{2048}\right) \cdot f_C$. Como $\frac{256}{243} \neq \frac{2187}{2048}$ segue que a nota C# é diferente da nota Db na escala pitagórica.

Uma forma simples de observar os intervalos pitagóricos é multiplicar a frequência da nota escolhida como fundamental por $\frac{3}{2}$, encontrando a sua quinta, repetindo esse procedimento até percorrer 12 intervalos, tomando o cuidado de manter a nota sempre dentro da mesma oitava, chegamos uma nota que deveria ser uma oitava acima da nota fundamental. Para mantermos a nota sempre dentro da mesma oitava, sempre que o produto de $\frac{3}{2}$ pelo intervalo anterior for maior que 2, temos que dividir a fração resultante por 2.

Sejam $f_C, f_{C\#}, f_D, f_{D\#}, \dots, f_B$, as frequências das notas C, C#, D, D#, ..., B, respectivamente, iniciando pela nota F (fá), aplicando a razão $\frac{3}{2}$ sucessivamente e mantendo as frequências dentro de uma mesma oitava, temos:

$$f_C = \frac{3}{2} \cdot f_F$$

$f_G = \frac{3}{2} \cdot f_C \rightarrow f_G = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot f_F$, como $\left(\frac{9}{4}\right)$ é maior do que 2, dividimos por 2, a fim de trazer a frequência da nota G para a oitava de origem $f_G = \left(\frac{9}{8}\right) \cdot f_F$

$$f_D = \frac{3}{2} \cdot f_G = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot f_F = \left(\frac{27}{8}\right) \cdot f_C, \text{ trazendo para a oitava temos } f_D = \left(\frac{27}{16}\right) \cdot f_F$$

Repetindo este procedimento por doze vezes temos

$$f_F = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot f_F, \text{ trazendo para uma oitava temos } f_F = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot f_F =$$

$\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right) \cdot f_F \cong 1,0136 \cdot f_F$, logo as notas não podem ser iguais, gerando uma pequena distorção que se amplia segundo uma exponencial de base 2, à medida que avançamos nas oitavas. Temos uma representação geométrica de tais distorções no espiral abaixo.

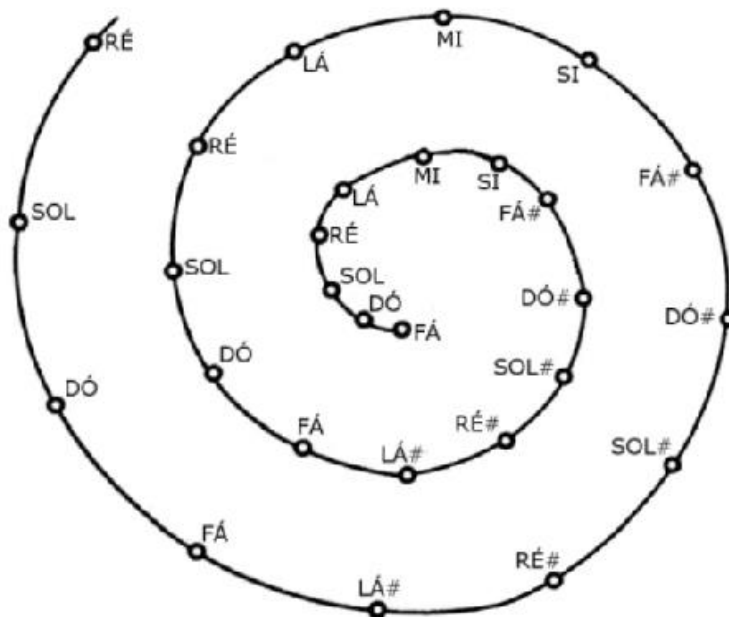


Figura 9: Espiral

4.4.

Escala Justa de Gioseffo Zarlino

Gioseffo Zarlino, italiano, nasceu em 1517 e faleceu em 1590, foi um grande teórico musical italiano e compositor da Renascença, trazendo grandes contribuições para a teoria da afinação de instrumentos musicais e a teoria do contraponto.

Como já foi citada anteriormente a escala pitagórica priorizava as quintas e quartas, uma vez que quintas perfeitas geravam quartas também perfeitas, isso fez com que as terças pitagóricas não possuíssem uma consonância desejada. Com o objetivo de corrigir essa sonoridade das terças pitagóricas, Gioseffo Zarlino, propôs a ampliação das proporções, fazendo com que os intervalos de terça e sexta passassem a ser considerados como consonantes. Tal sistema de afinação se baseia nas notas de uma escala diatônica, ou seja, na escala de sete notas com intervalos de cinco tons e dois semitons entre as notas, esse padrão se repete a cada oitava nota numa sequência tonal específica.

Os intervalos desta escala possuem as seguintes razões: primeiro intervalo $\frac{9}{8}$, segundo intervalo $\frac{5}{4}$, terceiro intervalo $\frac{4}{3}$, quarto intervalo $\frac{3}{2}$, quinto intervalo $\frac{5}{3}$, sexto intervalo $\frac{15}{8}$ e sétimo intervalo 2, todos tendo a mesma nota

como referência. A ideia utilizada na construção dessa escala foi, primordialmente, a de manter os intervalos sendo representados por razões de números naturais positivos, sendo estes os menores possíveis.

4.5. Escala de Temperamento Igual

A escala de temperamento igual, ou bem temperada, foi proposta inicialmente por Andreas Werkmeister, em 1691 e difundido principalmente por Johan Sebastian Bach, no entanto, há registros de que o príncipe chinês Chu Tsai-yu já havia utilizado essa ideia em 1596, quando escreveu um trabalho no qual calculara os comprimentos de cordas para um instrumento, usando uma escala na qual a oitava era dividida em intervalos iguais de mesma proporção.

Ao longo da história várias escalas foram apresentadas, porém a que resolveu os problemas das escalas anteriores de modo mais satisfatório até o momento, foi a escala de temperamento igual, que consiste em dividir uma oitava em 12 intervalos iguais. Por outro lado, sabemos que um intervalo é a razão entre duas notas, quando essas notas são consecutivas, dizemos que o intervalo corresponde a $\frac{1}{12}$ de oitava, uma vez que nessa escala a oitava é dividida em 12 intervalos iguais.

A escala bem temperada trouxe um grande avanço para a música, ao utilizar doze intervalos iguais em cada oitava. As notas musicais ficaram distribuídas de tal forma que se tornou possível e fácil fazer uma alteração de tonalidade sem alteração qualquer nos intervalos das notas que compõem a melodia, ou seja, tornou-se possível transportar uma música de um tom para qualquer outro sem perda de qualidade. Outro fato importante é a existência de um ciclo, onde a partir da décima terceira nota o ciclo repete-se, isto nos remete à ideia de uma congruência módulo doze conforme veremos adiante.

Consideremos as notas de frequências $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{12}$, no sistema de temperamento igual, correspondentes a uma oitava, daí temos que $\frac{n_1}{n_0} = \frac{n_2}{n_1} = \dots = \frac{n_{12}}{n_{11}} = i$, logo $n_1 = n_0 \cdot i$, $n_2 = n_1 \cdot i, \dots$, $n_{12} = n_{11} \cdot i$, que é uma progressão geométrica de razão i , desse modo a nota $n_{12} = n_0 i^{12}$. Como a frequência da nota

n_{12} é o dobro da frequência da nota n_0 , temos que $i^{12} = 2$, donde $i = 2^{\frac{1}{12}}$ é um intervalo de semitom na escala de temperamento igual.

Por volta de 1880 o matemático inglês Alexander J. Ellis introduziu o sistema de cents, com o intuito de medir pequenas diferenças existentes entre intervalos de várias escalas, inclusive aquelas possuem intervalo muito pequeno entre uma nota e sua consecutiva, chamadas de escalas microtonais. Por ser muito eficiente, no que concerne à comparação entre pequenas diferenças de afinação, o sistema de cents é muito utilizado por acústicos e etnomusicólogos⁵. O sistema de cents consiste em dividir o intervalo de uma oitava em 1200 partes, ou seja, cada intervalo de semitom é dividido em cem partes iguais, daí o nome cents, cada uma dessas partes é chamada de um cent. A coma pitagórica, já citada, equivale a aproximadamente $\frac{1}{4}$ de tom, ou seja, 23,46 cents.

Dividindo o intervalo de uma oitava em 1200 intervalos iguais, temos 1200 cents, ou seja, $c^{1200} = 2$, onde c é o intervalo de um cent e 2 é a razão entre a primeira nota de uma oitava e a primeira da oitava seguinte. Outra forma de escrever isso é $i = c^{100}$, ou seja, cada intervalo de semitom na escala bem temperada é dividido em 100 partes iguais, ou seja, em cem cents (100 c), logo podemos escrever $i = c^{100} \rightarrow 2^{\frac{1}{12}} = c^{100} \rightarrow c = 2^{\frac{1}{1200}}$. Desse modo, é possível determinar a quantidade de cents existente num determinado intervalo de notas.

De modo geral, dado um intervalo musical R com n cents é possível determinar o número n , que representa a quantidade de cents do intervalo R , com a expressão: $c = 2^{\frac{1}{1200}} \rightarrow c^n = 2^{\frac{n}{1200}}$. Seja R uma razão intervalar qualquer, com n cents, usando a expressão anterior, temos:

$$R = c^n = 2^{\frac{n}{1200}} \rightarrow R = 2^{\frac{n}{1200}} \rightarrow R^{1200} = 2^n \rightarrow \log R^{1200} = \log 2^n \rightarrow$$

$$1200 \cdot \log R = n \cdot \log 2 \rightarrow n = \frac{1200 \cdot \log R}{\log 2}.$$

A equação $n = \frac{1200 \cdot \log R}{\log 2}$, nos permite calcular a quantidade de cents de qualquer intervalo de nota, se conhecemos o seu intervalo R , em relação a uma nota referencial. Como exemplo vamos calcular a quantidade de cents que possui o intervalo de A na escala pitagórica. Sabemos que o intervalo dessa nota é $\frac{27}{16}$, daí, basta resolvermos a equação $n = \frac{1200 \cdot \log R}{\log 2}$, para $R = \frac{27}{16}$, ou seja, $n =$

⁵Etnomusicologia é a ciência que objetiva o estudo da música em seu contexto cultural.

$\frac{1200 \cdot \log\left(\frac{27}{16}\right)}{\log 2} \rightarrow n \cong 905,9$. Isto significa que a nota A na escala pitagórica possui 905,9 cents aproximadamente, enquanto que na escala bem temperada a nota A possui exatamente 900 cents. Isso nos mostra que a nota A na escala pitagórica é ligeiramente mais alta do que a nota A na escala bem temperada.

4.6. Escala Mesotônica ou Meantone

O problema da dissonância das terças, em favor das quintas e quartas, se agrava gradativamente, à medida que as composições ocidentais utilizam com maior frequência os intervalos de terça. Como objetivo de resolver os problemas causados pelos intervalos de terça, foram propostos vários sistemas de afinações de escalas diferentes, dentre eles o sistema mesotônico ou meantone, que é um temperamento irregular, ou seja, não é um sistema de afinação justo, uma vez que a maioria de seus intervalos são números irracionais.

A escala mesotônica pode ser gerada a partir das quintas pitagóricas, baixando 5,38 cents. Para chegar na terça a partir das quintas, devemos efetuar o procedimento de encontrar a quinta por quatro vezes, desse modo a terça ficará baixada $5,38 \cdot 4 = 21,52$ cents. A terça pitagórica que tem 407,82 cents, na escala mesotônica a terça tem 386,31 cents. Por outro lado, a razão intervalar R é tal que $R^{1200} = 2^n$, onde n é a quantidade de cents desse intervalo R. Logo $R^{1200} = 2^{386,31} \rightarrow R = 2^{\frac{386,31}{1200}} \rightarrow R \cong 1,249997 \cong 1,25 = \frac{5}{4}$. Desse modo, a razão do intervalo de quinta se torna 1,4953 ao passo que a razão da quinta pitagórica é 1,5. Os intervalos C-D e D-E são tais que a nota D fica exatamente no centro entre C e E, o que justifica o nome utilizado.

Para observarmos as diferenças e semelhanças entre algumas escalas, segue abaixo uma tabela com as razões, frequências e cents das escalas: pitagórica, justa de Gioseffo Zarlino, meantone (mesotônica) e a bem temperada (temperamento igual).

Comparação entre algumas escalas musicais

Nota	Escala Pitagórica			Escala Justa ou Natural			Escala Meantone			Escala Bem Temperada		
	Razão intervalar	Frequência	Cents	Razão intervalar	Frequência	Cents	Razão intervalar	Frequência	Cents	Razão intervalar	Frequência	Cents
C	1	132	0	1	132	0	1	132	0	$2^0 = 1$	132	0
D	$\frac{9}{8}$	148,5	203,91	$\frac{9}{8}$	148,5	203,91	1,118	147,576	193,10	$\sqrt[2]{2^{1/2}} \approx 1,122$	148,104	200
E	$\frac{81}{64}$	167,0625	407,82	$\frac{5}{4}$	165	386,31	1,250	165	386,31	$\sqrt[4]{2^{1/2}} \approx 1,260$	166,32	400
F	$\frac{4}{3}$	176	498,04	$\frac{4}{3}$	176	498,04	1,337	176,484	502,80	$\sqrt[5]{2^{1/2}} \approx 1,335$	176,22	500
G	$\frac{3}{2}$	198	701,96	$\frac{3}{2}$	198	701,96	1,496	197,472	697,33	$\sqrt[7]{2^{1/2}} \approx 1,498$	197,736	700
A	$\frac{27}{16}$	222,75	905,86	$\frac{5}{3}$	220	884,36	1,672	220,704	889,89	$\sqrt[9]{2^{1/2}} \approx 1,682$	222,024	900
B	$\frac{243}{128}$	250,5937	1109,77	$\frac{15}{8}$	247,5	1088,27	1,869	246,708	1082,72	$\sqrt[11]{2^{1/2}} \approx 1,888$	249,216	1100
C	2	264	1200	2	264	1200	2	2	1200	$\sqrt[12]{2^{1/2}} = 2$	264	1200

Tabela 1: Escalas

4.7. Aplicações com Exponenciais e Logaritmos

Os pré-requisitos para essas aplicações são as definições da escala temperada, de exponenciais e logaritmos, além das propriedades dos dois últimos.

4.7.1. Aplicação 1

Usando a expressão $n = 1200 \cdot \frac{\log R}{\log 2}$, onde n é a quantidade de cents no intervalo R , calcule a quantidade de cents do intervalo de quinta da escala Pitagórica, sabendo-se que o intervalo de quinta na escala Pitagórica possui razão intervalar $\frac{3}{2}$.

Solução

$$n = 1200 \cdot \frac{\log R}{\log 2}$$

$$n = 1200 \cdot \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 2}$$

$$n \cong 1200 \cdot \frac{0,176091}{0,301030}$$

$$n \cong 701,95 \text{ cents}$$

Logo a quantidade de cents no intervalo R é aproximadamente 701,95.

4.7.2.

Aplicação 2

Considerando a escala de temperamento igual, considerando ainda que a capacidade auditiva do ser humano compreende o intervalo de 20Hz a 20000Hz. Calcule o número de oitavas que se inicia com a nota dó de 33Hz e que o ser humano é capaz de ouvir.

Solução

Queremos encontrar o maior n natural possível, tal que:

$$C_n = C_0 \cdot 2^n \leq 20000$$

$$33 \cdot 2^n \leq 20000$$

$$2^n \leq \frac{20000}{33}$$

$$2^n \leq 606,06$$

$$n \leq 9$$

Logo, nessas condições teremos 9 oitavas audíveis pelo ser humano

4.7.3.

Aplicação 3

Sabe-se que um instrumento musical temperado foi construído com um número x de oitavas. Sabe-se ainda que a primeira nota é um dó com 66Hz de frequência e que a última nota tem frequência 528Hz. Nessas condições calcule o número x de oitavas que possuiu esse instrumento musical.

Solução

Queremos encontrar o maior natural n que satisfaça:

$$C_n = C_0 \cdot 2^n \leq 528$$

$$66 \cdot 2^n \leq 528$$

$$2^n \leq \frac{528}{66}$$

$$2^n \leq 8$$

$$n \leq 3$$

Logo, tal instrumento musical possui 3 oitavas.

4.8. Aplicações com Ângulos

Os pré-requisitos são a definição de ângulos, suas operações, definição e cálculo do comprimento de arcos, conhecimento básico da escala temperada e seus intervalos.

Ao dispormos as 12 notas musicais numa circunferência de modo equidistantes, teremos 12 arcos iguais e adjacentes, o que nos permitirá trabalhar com os alunos do ensino fundamental a definição e construção de circunferências e arcos, bem como as operações com graus e deslocamentos no sentido horário e anti-horário, conforme ilustração abaixo.

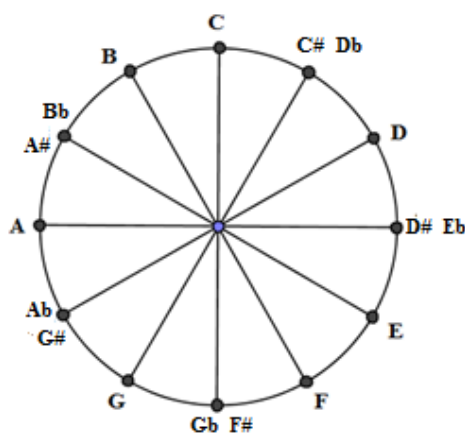


Figura 10: Disco 1 para atividade

Utilizando essa disposição das notas sobre uma circunferência, de modo semelhante a um relógio de ponteiros, podemos propor algumas atividades.

4.8.1. Aplicação 4

Considerando as notas musicais dentro de uma mesma oitava, qual é a medida, em graus (considerando sempre o menor ângulo), do intervalo compreendido entre as notas E e G?

Uma solução se dá utilizando regra de três simples. Tomando x como sendo o ângulo correspondente ao intervalo E-G, podemos escrever:

Intervalo	Ângulo
↑ 12	↑ 360°
↑	↑ X

$$12x = 3.360^\circ$$

$$x = \frac{3.360^\circ}{12}$$

$$x = 90^\circ$$

Outra solução se dá utilizando apenas as operações básicas. Tomando 360° e dividindo em doze partes iguais, encontraremos o ângulo corresponde a um intervalo de semitom, que é 30°. Como de E para G temos 3 intervalos de semitom, basta multiplicarmos 30° por 3, obtendo 90° como solução.

4.8.2. Aplicação 5

Considerando as notas distribuídas sobre uma circunferência, qual é o comprimento de arco equivalente a um intervalo E-G?

Como o intervalo E-G possui três semitons, do exemplo anterior, temos que o ângulo desse intervalo é 90°, logo podemos utilizar a regra de três do seguinte modo:

Ângulo	Comprimento
360°	$2\pi r$
90°	X

$$360^\circ x = 90^\circ \cdot 2\pi r$$

$$x = \frac{180^\circ \pi r}{360}$$

$$x = \frac{\pi r}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \text{ cm}$$

4.8.3. Aplicação 6

Quantos cents possui um intervalo correspondente a um ângulo de 120° ?

Sabemos que cada intervalo de meio tom, possui 100 cents, além disso, cada intervalo de meio tom corresponde a um ângulo de 30° no disco, logo basta multiplicar 100 cents pela quantidade de intervalos de meio tom correspondente a 120° , ou seja, basta multiplicarmos 100 por 4, obtendo 400 cents como solução.

5 Algumas Noções de Teoria Musical

A teoria musical, citada neste trabalho, tem como finalidade fornecer o conhecimento mínimo para a compreensão desse trabalho e para o desenvolvimento de um projeto de música juntamente com os alunos da educação básica, logo toda a teoria musical definida daqui por diante terá como base a escala de temperamento igual. Não há intenção de formar músicos, mas de dar uma formação musico-matemática básica, de modo que o aluno perceba e relacione algumas partes da matemática com algumas partes da música, despertando o desejo de aprender e o prazer em saber o que se aprendeu.

5.1. Elementos Fundamentais da Música

Como já definido neste trabalho, os elementos fundamentais da música são quatro: melodia, contraponto, ritmo e harmonia. No entanto, para efeito de trabalharmos com as crianças, adolescentes e jovens, de modo não aprofundado, daremos ênfase à melodia, a harmonia e ao ritmo.

5.2. Notação Musical

Os sons musicais são representados graficamente por sinais chamados notas, que são sete, e sua escrita recebe o nome de notação musical.

A escrita musical é efetuada numa pauta, que corresponde à reunião de cinco linhas horizontais, paralelas e equidistantes, formando entre si quatro espaços. As notas são escritas sobre as linhas ou nos espaços da pauta, tal pauta é chamada de pentagrama.

As linhas, assim como os espaços da pauta, são contadas de baixo para cima, conforme figura abaixo.



Figura 11: Pauta introdutória 1

No entanto, para que cada símbolo colocado sobre o pentagrama represente uma nota musical é necessário e suficiente a utilização da clave. É a clave que determina qual é a nota musical correspondente a cada linha ou espaço do pentagrama. A clave é um símbolo colocado no início do pentagrama, as mais utilizadas são as claves de sol e a de fá, conforme vemos nas figuras abaixo.

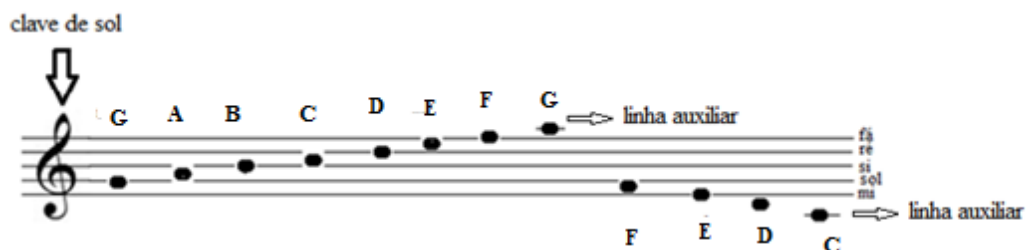


Figura 12: Pauta introdutória 2

Na clave de Sol, figura acima, as linhas são referentes às notas mi, sol, si, ré e fá, contadas de baixo para cima. Enquanto que os espaços, contados também de baixo para cima, são referentes às notas fá, lá, dó mi. Logo, as notas de baixo para cima, começando com a primeira linha e terminando com a quinta linha são: mi, fá, sol, lá, si, dó, ré, mi e fá.

Por outro lado, na clave de Fá, figura abaixo, as linhas são referentes às notas sol, si, ré, fá e lá, contadas de baixo para cima. Do mesmo modo, os intervalos são referentes às notas lá, dó, mi e sol. Donde, as notas de baixo para cima, começando com a primeira linha e terminando na quinta linha são: sol, lá, si, dó, ré, mi, fá, sol, lá.

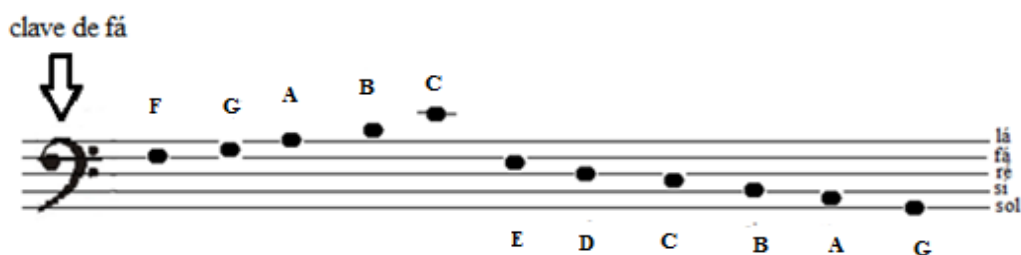


Figura 13: Pauta introdutória 3

Reforçando a utilização da notação latina, citada anteriormente, temos que A# é a nota A acrescida de meio tom e a nota Bb é a nota Si reduzida de meio tom, como estaremos trabalhando com a escala bem temperada, segue que o som da nota A# é o mesmo som da nota Bb. O mesmo ocorre para as demais notas, conforme pode ser ilustrado no teclado da figura abaixo. As notas de mesmo som com nomes diferentes são chamadas de enarmônicas e podemos observar melhor essa definição nas teclas pretas da figura abaixo.

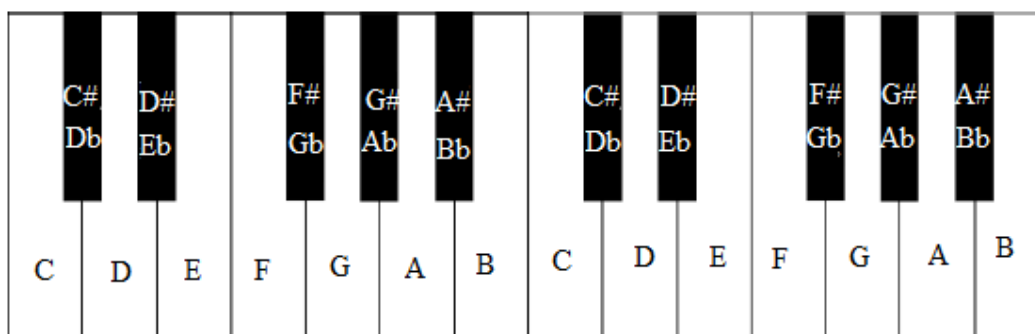


Figura 14: Teclado

5.2.1. Figuras de Som

Cada nota tem um tempo de duração, para representar as várias durações dos sons representados por notas musicais, são utilizados os símbolos chamados de figuras ou valores de som. A pausa é uma figura que indica a duração do silêncio, que varia de acordo com a composição a ser executada e são tão importantes quanto as figuras de som. Segue abaixo uma tabela com as figuras de som com seus respectivos nomes, as figuras de pausa correspondentes e o tempo de duração de acordo com a unidade de referência. Por exemplo, quando tomamos a colcheia representando a unidade de medida de tempo de duração do som, temos a semínima representando duas unidades de tempo, a mínima representando quatro unidades de tempo, a semibreve representando oito unidades de tempo, a semicolcheia representando meia unidade de medida de tempo, a fusa representando um quarto e a semifusa representando um oitavo de medida de tempo de duração da som da nota.















Som	Nome	Pausa	Tempo	Tempo	Tempo
	semibreve		4	2	8
	mínima		2	1	4
	semínima		1	$\frac{1}{2}$	2
	colcheia		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
	semicolcheia		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
	fusa		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
	semifusa		$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$

Tabela 2: Figuras de som

Além dos símbolos citados nesta tabela existem muitos outros, porém para não fugir do nosso objetivo principal iremos falar somente dos necessários ao desenvolvimento do nosso trabalho. Nesse sentido, cabe ressaltar ainda, a ligadura, o ponto de aumento a unidade de tempo e a unidade de compasso, este pode ser simples ou composto, conforme veremos adiante.

O ponto de aumento (.) é um símbolo que ao ser colocado ao lado de uma figura de som ou de pausa, prolonga a sua duração em cinquenta por cento. A ligadura (—) é um símbolo que indica que as notas ligadas não são repetidas, apenas a primeira é emitida e as demais são prolongações da primeira.

5.2.2. Compassos

Uma composição musical pode ser dividida em grupos baseados em duração do som e da pausa, cada um desses grupos é chamado de compasso. Os compassos são divididos na partitura a partir de linhas verticais desenhadas sobre a pauta. A soma dos valores temporais das figuras de som e de pausa, dentro de um compasso, deve ser igual à duração definida. O símbolo utilizado para definir o valor temporal de cada compasso em uma composição é composto por dois números inteiros, colocados ao lado da clave no início da pauta, sendo chamado de fórmula de compasso. Logo, a fórmula de compasso fica bem definida pela unidade de tempo e a unidade de compasso.

Na pauta abaixo, temos a representação de um trecho musical formado por seis compassos, com unidade de tempo e de compasso quatro e quatro, respectivamente. Tomando a semínima como unidade de medida de referência, vemos que o primeiro compasso é constituído por quatro semínimas, o segundo por duas mínimas, o terceiro por uma semibreve, o quarto por oito colcheias, o quinto por dezesseis semicolcheias e o sexto por três colcheias, e duas semínimas, sendo uma delas com aumento de duração em cinquenta por cento do tempo. Consequentemente, cada compasso possui quatro unidades de tempo, tomando a semínima como unidade de referência.

Por outro lado, é importante observar que o compasso dessa música não seria alterado se trocássemos uma figura de som pela sua correspondente figura de pausa, no entanto, a melodia seria outra.



Figura 15: Pauta de compassos

Segue abaixo a partitura, ou pauta, da música noite feliz. Seu compasso é três quartos, isso significa que cada compasso deverá conter exatamente três semínimas ou figuras com duração equivalente a três semínimas.

Noite feliz

F. Gruber

C G C Csus4

Noi - te fe - liz! Noi - te fe - liz! Ó Se - nhor, Deus de_a -

C C7 F C C7 F F7

8 mor Po - bre - zi - nho nas - ceu em Be - lém Eis na la - pa Je -

C Gsus4 G C C/G

15 sus, nos-so bem Dor-me_em paz, ó Je - sus! Dor - me_em

G7 C (Dm7 G7)

22 paz, ó Je - sus!

Figura 16: Partitura da música Noite Feliz

Um compasso ainda pode ser simples, composto ou complexo, mas para não fugirmos do nosso objetivo, veremos apenas uma noção básica desses compassos, nos ocupando mais com os compassos simples. Como vimos, no início da pauta, ao lado da clave, geralmente há um símbolo “fracionário” indicando a unidade de tempo e de compasso da composição, ou seja, a fórmula do compasso. No compasso simples os numeradores podem ser 2, 3 ou 4 e no composto 6, 9 ou 12, enquanto que para denominador de ambos os compassos podemos ter 1, 2, 4, 8, 16 ou 32. O compasso composto foi introduzido na música para facilitar a escrita de partituras com notas agrupadas de três em três.

Por outro lado, temos o compasso complexo, muito pouco utilizado pelos compositores, tal compasso consiste numa justaposição de outros compassos, ou seja, de uma soma de outros compassos. Vejamos como ocorre, ao somarmos a

fração $\frac{2}{4}$ com $\frac{3}{4}$, temos a fração $\frac{5}{4}$, ou seja, temos o compasso complexo $\frac{5}{4}$ formado pela justaposição dos compassos $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$.

O denominador da fórmula de compasso determina qual é a figura de som utilizada para a unidade de tempo, ou seja, qual a figura de som que determina os pulsos. Segue abaixo uma tabela para facilitar a compreensão dessas unidades de tempo.








Denominador	Figura de Som
1	
2	
4	
8	
16	
32	
64	

Tabela 3: Unidades de tempo

Os compassos são organizados em unidade de tempo e unidade de compasso. A unidade de tempo pode ser entendida como o valor musical que sozinho preenche um tempo do compasso. Qualquer figura de som pode representar a unidade de tempo, porém as mais comuns são mínima, semínima e colcheia. Por outro lado, a unidade de compasso pode ser entendida como o valor musical que sozinho ou junto com outro valor preenche o compasso inteiro.

Vejamos como a fórmula de compasso deve ser compreendida numa pauta.



Figura 17: Pauta de fórmula de compasso 2/4

Na pauta acima temos cada compasso formado por duas semínimas, ou uma mínima, ou quatro colcheias, ou oito semicolcheias. Neste caso, como a fórmula de compasso é $\frac{2}{4}$, temos que cada compasso é composto por dois pulsos de semínima. Enquanto que para preencher cada compasso por inteiro basta utilizar uma mínima, logo a mínima é a unidade de compasso dessa composição. Vejamos outro exemplo na pauta abaixo.

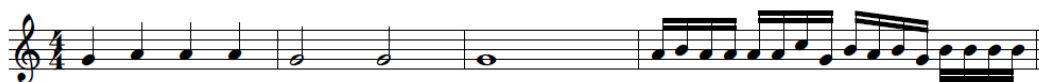


Figura 18: Pauta de compasso 4/4

Neste exemplo cada compasso é formado por quatro semínimas, ou duas mínimas, ou uma semibreve, ou 16 semicolcheias. Neste caso, cada compasso é composto por quatro pulsos de semínima, pois a fórmula de compasso é $\frac{4}{4}$. Por outro lado, para preencher cada compasso por inteiro basta utilizar uma semibreve, que é a unidade de compasso. Vejamos outro exemplo de compasso na pauta abaixo.



Figura 19: Pauta de compasso 6/8

Neste exemplo a unidade de tempo é a colcheia, isso significa que para preencher um compasso, neste caso, são utilizadas seis colcheias, cada colcheia representando um pulso. Como o numerador é 6, trata-se de um compasso composto, para sabermos a unidade de tempo basta dividirmos um compasso em duas partes, como cada uma dessas partes terá 3 colcheias, que é equivalente a uma semínima com ponto de aumento, temos que a unidade de medida de tempo é

a semínima com ponto de aumento ou uma mínima ligada a uma semínima. Finalizaremos os exemplos de compassos com o compasso complexo, também chamado de irregular ou alternado. Vejamos abaixo, como exemplo, uma pauta com compasso $\frac{5}{4}$. Esse compasso pode ser obtido pela justaposição dos compassos $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{4}$ ou $\frac{2}{4}$ com $\frac{2}{4}$ com $\frac{2}{8}$.



Figura 20: Pauta de compasso 5/4

5.3.

Aplicação com o Menor Múltiplo Comum (MMC)

Os pré-requisitos para essa aplicação são o conceito de menor múltiplo comum, noções de compasso musical e pulsos.

5.3.1.

Aplicação 7

Dividindo a turma em dois grupos, ambos os grupos fazem a marcação dos pulsos de um compasso representado na figura abaixo. A letra f representa os pulsos fracos, enquanto que a letra F representa os pulsos fortes. O primeiro grupo faz a marcação do primeiro compasso e o segundo grupo do segundo compasso. Ao iniciarem a marcação dos pulsos juntos, os grupos deverão perceber que os pulsos fortes coincidem no 6º e no 12º, como queremos o menor deles, segue que o MMC entre 2 e 3 é 6.

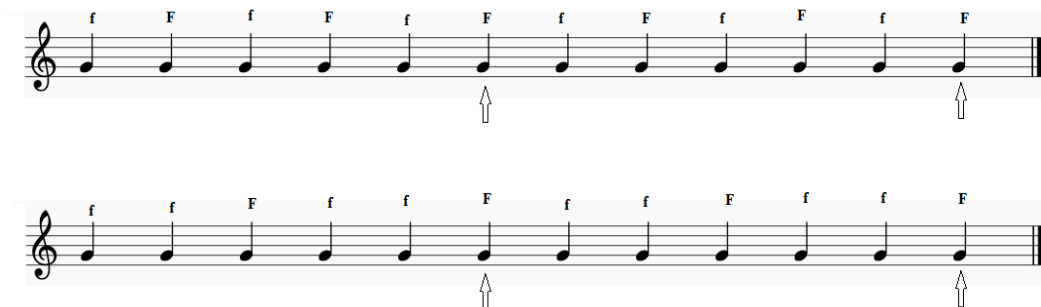


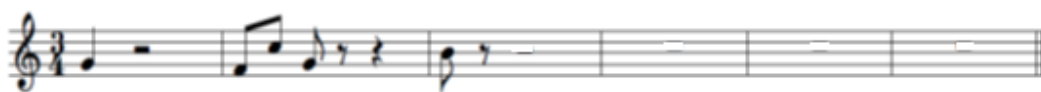
Figura 21: Pauta de MMC entre 2 e 3

5.4. Aplicações com Frações

Os pré-requisitos para essas aplicações são o conceito de frações, as operações com frações, figuras de som, figuras de silêncio e compassos.

5.4.1. Aplicação 8

Preencha os compassos da pauta de forma que satisfaça à fórmula de compasso estabelecida no início da pauta.



Uma possível solução é a pauta abaixo, observe que para preencher cada compasso dessa pauta foi necessário efetuar adições com frações.



5.4.2. Aplicação 9

Escreva o compasso complexo $\frac{5}{4}$ como soma de outros compassos não complexos.

Neste caso, teremos mais de uma solução, pois $\frac{5}{4}$ pode ser escrito da forma $\left(\frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)$, ou $\left(\frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)$, ou $\left(\frac{2}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)$.

5.5. Acordes

Alguns instrumentos musicais, como piano, violão, guitarra, entre outros, são chamados de instrumentos harmônicos. Outros, como a flauta e o violino, entre outros, são chamados de instrumentos melódicos. Nos instrumentos harmônicos podemos tocar duas, três ou mais notas musicais simultaneamente, formando assim o que chamamos de acorde.

Podemos definir acorde como um conjunto de dois ou mais sons simultâneos, preferencialmente harmônicos entre si. Os acordes mais comuns são formados por três notas, chamadas tríades. Os acordes maiores são constituídos pela unísson, pela terça maior e pela quinta, a nota unísson é a nota que nomeia o acorde, ou seja, o acorde recebe o mesmo nome da nota unísson. O acorde de dó maior, por exemplo, é formado pelas notas dó-mi-sol (C, E, G). Neste acorde, o primeiro intervalo C-E é um intervalo de quatro semitons, enquanto que o segundo intervalo, E-G é um intervalo de três semitons.

Por outro lado, para formarmos os acordes menores, devemos baixar a terça em meio tom, fazendo com que o primeiro intervalo do acorde fique com três semitons e o segundo com quatro semitons. No caso do acorde de dó menor, teríamos as seguintes notas compondo esse acorde: C, Eb, G. Segue abaixo uma tabela com as notas e seus respectivos intervalos, em destaque, que formam os acordes maiores e menores.

Notas	1° I	2° I	3° I	4° I	5° I	6° I	7° I	8° I	9° I	10° I	11° I	12° I
Un	2ªm	2ªM	3ªm	3ªM	4ªJ	5ªdim	5ªJ	6ªm	6ªM	7ªm	7ªM	8ª
C	Db	D	Eb	E	F	Gb	G	Ab	A	Bb	B	C
C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C	C#
D	Eb	E	F	F#	G	Ab	A	Bb	B	C	C#	D
D#	E	F	Gb	G	G#	A	A#	B	C	Db	D	D#
E	F	F#	G	G#	A	Bb	B	C	C#	D	D#	E
F	Gb	G	Ab	A	A#	B	C	Db	D	Eb	E	F
F#	G	G#	A	A#	B	C	C#	D	D#	E	F	F#
G	Ab	A	Bb	B	C	Db	D	Eb	E	F	F#	G
G#	A	A#	B	C	C#	D	D#	E	F	Gb	G	G#
A	Bb	B	C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A
A#	B	C	Db	D	D#	E	F	Gb	G	Ab	A	A#
B	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
C	Db	D	Eb	E	F	Gb	G	Ab	A	Bb	B	C

Tabela 4: Intervalos

Legenda:

J=justa

m=menor

M=maior

dim=diminuta

Un=uníssona

Acordes Maiores				Acordes Menores			
Acorde	Uníssona	Terça	Quinta	Acorde	Uníssona	Terça	Quinta
C	C	E	G	C	C	Eb	G
C#	C#	F	G#	C#	C#	E	G#
D	D	F#	A	D	D	F	A
D#	D#	G	A#	D#	D#	Gb	A#
E	E	G#	B	E	E	G	B
F	F	A	C	F	F	Ab	C
F#	F#	A#	C#	F#	F#	A	C#
G	G	B	D	G	G	Bb	D
G#	G#	C	D#	G#	G#	B	D#
A	A	C#	E	A	A	C	E
A#	A#	D	F	A#	A#	Db	F
B	B	D#	F#	B	B	D	F#
C	C	E	G	C	C	Eb	G

Tabela 5: Acordes

Ao perceber que, no temperamento igual, as notas musicais são equidistantes e cíclicas, construí dois círculos de mesmo centro e tamanhos diferentes, com o objetivo de fazer transportes de tonalidade de músicas, o que se tornou possível com o advento dessa escala. No entanto, percebi que se eu colocasse mais um disco, nesse sistema de discos, poderia formar qualquer acorde de três notas em qualquer tonalidade, intitulei esse sistema de discos de SATMA (Sistemas de formação de Acordes e Transporte de tonalidade Musical Alonso). Acredito que esse sistema de discos⁶ tem muito a acrescentar no ensino de teoria musical e no estreitamento da relação matemática e música. O sistema de discos funciona assim: ao alinharmos as notas C, E e G, estamos formando o acorde de dó maior, conseqüentemente todas as outras notas alinhadas também formarão acordes maiores, C#, F e G#, formando o acorde de dó sustenido maior (C#) e assim por diante, conforme a figura abaixo.

SATMA

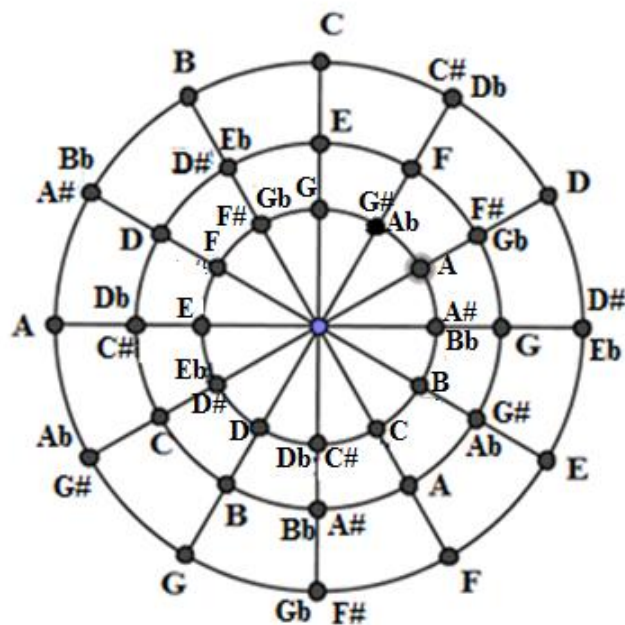


Figura 22: SATMA de 3 discos

⁶ O sistema de discos foi desenvolvido por Carlos André dos Santos Costa Alonso em sua dissertação de mestrado, com a finalidade de facilitar a formação de acordes, o transporte de tonalidade e relacioná-los com algumas aplicações da matemática.

Se quisermos formar os acordes menores, basta baixarmos a terça meio tom, ou seja, basta alinharmos as notas C, Eb e G, que formaremos todos os acordes menores compostos por três notas. Podemos ainda, acrescentar mais discos para formamos acordes com mais notas. Uma grande vantagem é que o aluno não precisa ficar decorando a composição de todas as notas de cada acorde, basta conhecer a composição de um acorde e saber quando se utiliza o sustenido (#) e quando se utiliza o bemol (b).

6 Aritmética Modular

Nesse capítulo apresentamos brevemente relações de equivalência e congruência modular, relacionando suas aplicações com parte da teoria musical através de atividades de aplicação.

6.1. Relações de Equivalência

Dizemos que uma relação R é de equivalência, se satisfaz às seguintes propriedades:

- i) $a R a$ (lê-se: a se relaciona com ele mesmo).
- ii) Se $a R b$, então $b R a$ (lê-se: se a se relaciona com b , então b se relaciona com a)
- iii) Se $a R b$ e $b R c$, então $a R c$ (lê-se: se a se relaciona com b e b se relaciona com c , então a se relaciona com c).

Um exemplo simples de relação de equivalência é a igualdade, podemos ver claramente que satisfaz às três propriedades acima.

- i) $x=x$, para todo x .
- ii) se $x=y$, então $y=x$, quaisquer que sejam x e y .
- iii) se $x=y$ e $y=z$, então $x=z$, quaisquer que sejam x , y e z .

Outro exemplo de equivalência, desta vez no conjunto dos reais é o seguinte: sejam x e y números reais quaisquer, dizemos que x relaciona com y , e denotaremos por $x \sim y$, se e somente se $x-y$ for um número inteiro. É claro que é uma relação de equivalência, pois:

- i) $x-x=0$, para todo x real.
- ii) Se $x-y$ é inteiro, então $y-x$ é inteiro, quaisquer que sejam x e y reais.
- iii) Se $x-y$ é inteiro e $y-z$ também é inteiro, então $x-z$ também é inteiro.

Este exemplo é uma relação de equivalência em $[0,1[$, pois dado um número real w , qualquer, existe um número t no intervalo semiaberto $[0,1[$ tal que $w-t$ é inteiro.

Tomando $x = \log_2 f_i$ e $y = \log_2 f_j$, temos que $x \sim y \leftrightarrow \log_2 f_i \sim \log_2 f_j \leftrightarrow (\log_2 f_i) - (\log_2 f_j) = n$ é um número inteiro.

Daí $\log_2 \left(\frac{f_i}{f_j} \right) = n \rightarrow \frac{f_i}{f_j} = 2^n \rightarrow f_i = f_j \cdot 2^n$. Considerando f como sendo uma frequência qualquer, temos que x e y se relacionam se e somente se a frequência de uma é igual à frequência da outra multiplicada por uma potência de base 2, que é exatamente o que nós vimos quando falamos de notas musicais de mesmo nome. Por outro lado, como $\log_2 f_i$ e $\log_2 f_j$ são números reais, temos que existe um f no intervalo $[0,1[$, tal que $\log_2 f - \log_2 f_i$ e $\log_2 f - \log_2 f_j$ são números inteiros, o que mostra que qualquer frequência possui uma classe de equivalência no intervalo $[0,1[$, logo o conjunto de todas as frequências podem ser reduzidas ao intervalo $[0,1[$, pela relação de equivalência \sim . Tal intervalo é representado comumente por uma circunferência de raio $\frac{1}{2\pi}$, ou seja, por uma circunferência de comprimento igual a 1. Isso explica o fato de qualquer frequência dada se corresponder com uma nota no intervalo de uma oitava, isto é, a circularidade das notas, bem como sua distribuição sobre discos.

6.2. Congruência Modular

Dizemos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m , se e somente se, eles deixam o mesmo resto na divisão por m e essa congruência será denotada da seguinte forma $a \equiv b \pmod{m}$. Em outras palavras $a \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow a - b = k \cdot m$, para algum k inteiro. Desse modo, fica claro que a congruência modular é uma relação de equivalência, pois:

- i) $a \equiv a \pmod{m}$, quaisquer que sejam a e m inteiros.
- ii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então, $b \equiv a \pmod{m}$, quaisquer que sejam a , b e m inteiros.
- iii) $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$, quaisquer que sejam a , b , c e m inteiros.

Chamamos de sistema completo de resíduos módulo m a todo conjunto de números inteiros cujos restos pela divisão por m são os números $0, 1, 2, \dots, m-1$, sem repetições e numa ordem qualquer. Iremos denotar por Z_m o sistema completo de resíduos módulo m , ou seja, $Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$.

Por outro lado, o intervalo de oitava, na escala de temperamento igual, está dividido em intervalos de doze semitons iguais. Como, a cada oitava esse ciclo se repete, podemos pensar numa congruência módulo 12, ou ainda num

sistema completo de resíduos módulo 12, basta tomarmos uma bijeção do conjunto $M = \{C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#, B\}$ no conjunto $Z_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$, a saber: $f(C) = \bar{0}$, $f(C\#) = \bar{1}$, $f(D) = \bar{2}$, $f(D\#) = \bar{3}$, $f(E) = \bar{4}$, $f(F) = \bar{5}$, $f(F\#) = \bar{6}$, $f(G) = \bar{7}$, $f(G\#) = \bar{8}$, $f(A) = \bar{9}$, $f(A\#) = \bar{10}$, $f(B) = \bar{11}$, o que é ilustrado na imagem abaixo. Desse modo, podemos dizer que a nota D, por exemplo, é equivalente ao conjunto $\{\bar{2}\}$, ou seja, $D \equiv 2 \pmod{12}$.

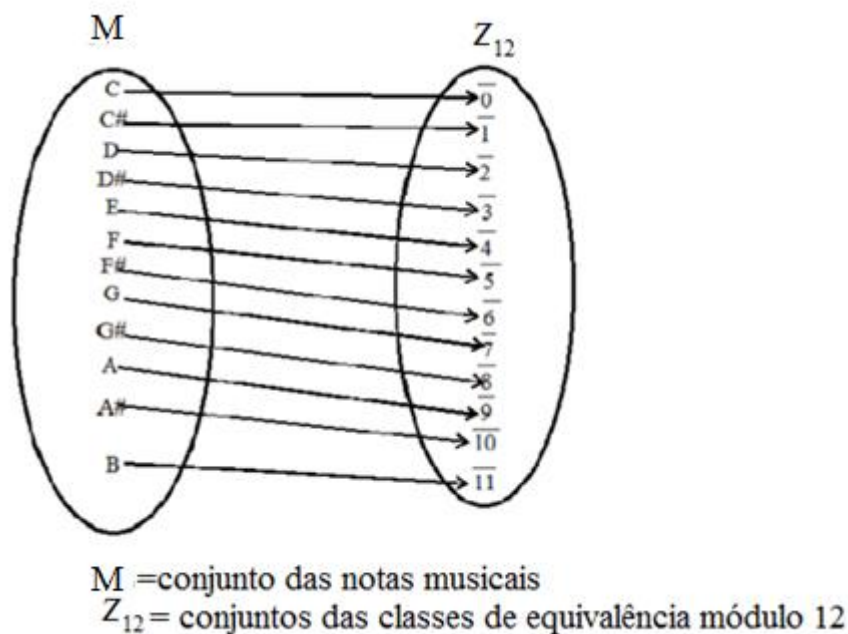


Figura 23: Bijeção

6.3.

Aplicações com Aritmética Modular

Os pré-requisitos para essas aplicações são o conceito de aritmética modular, o conceito de notas musicais como uma classe de equivalência módulo 12, conceito de intervalos musicais na escala bem temperada e o conhecimento do SATMA.

6.3.1. Aplicação 12

$19 \equiv 5 \pmod{7}$, pois $19 - 5 = 2 \cdot (7)$, ou ainda, 19 dividido por 7 deixa resto 5 e 5 dividido por 7 também deixa resto 5.

6.3.2. Aplicação 13

Qual é o menor número natural x , tal que $x \equiv 8 \pmod{12}$?

Neste caso, devemos encontrar um menor natural x , tal que $x - 8 = 12 \cdot k$, para algum k inteiro. Notemos que isso acontece quando $k = 0$, ou seja, $x = 8$ é o menor número natural que satisfaz ao enunciado. De fato, qualquer que seja x inteiro, tem-se $x \equiv x \pmod{m}$, pois qualquer número é equivalente a si próprio. Tornando o enunciado um pouco menos óbvio, vamos ao exemplo 3.

6.3.3. Aplicação 14

Qual é o menor número natural, diferente de oito, tal que $x \equiv 8 \pmod{12}$?

Neste caso, devemos encontrar um menor natural x , tal que $x - 8 = 12 \cdot k$, para algum k inteiro e diferente de zero. Logo isso ocorrerá quando $k = 1$, daí $x = 12 + 8$, ou seja, $x = 20$ é o menor natural que satisfaz ao enunciado. De modo geral, tem-se que $x = 12k + 8$ é solução da equação $x \equiv 8 \pmod{12}$.

6.3.4. Aplicação 15

Qual é a nota musical equivalente ao número 27 e em qual oitava ela se encontra?

Neste caso, devemos encontrar uma nota N , tal que $N \equiv 27 \pmod{12}$, ou seja, $27 - N = 12k$, com k inteiro e N um natural menor que 12. Daí $27 - 12k = N \Rightarrow k = 2$ e $N = 3$, ou seja, a nota N é o $D\#$ e se encontra três oitavas acima da nota fundamental.

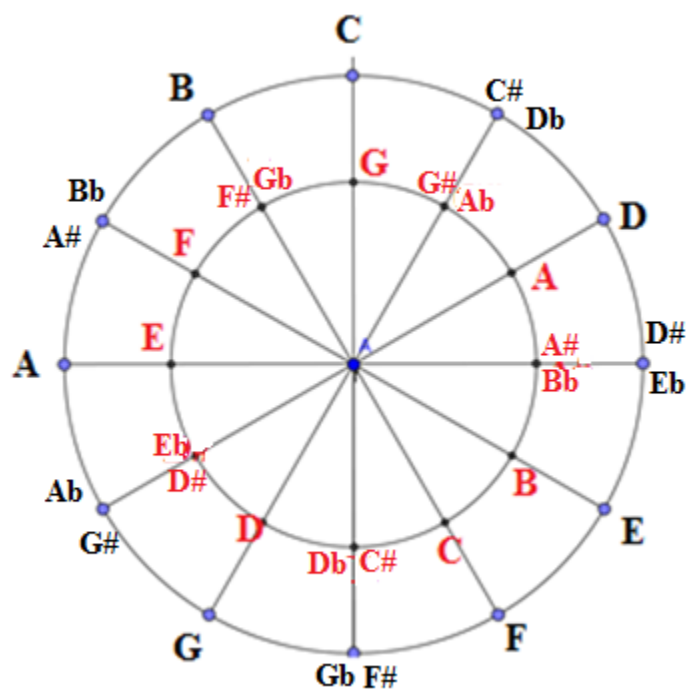
6.3.5. Aplicação 16

Uma determinada música se inicia com um acorde formado pelas notas C, F e G (dó, fá e sol). Ao transportar essa música três tons e meio para cima ela deverá se iniciar com qual acorde?

A solução consta em aumentar as três notas que compõem esse acorde em três tons e meio. Para tanto, é importante observar que três tons e meio é equivalente a sete semitons, logo a nota C passa para a nota G e a nota F passa para a nota C e a nota G para a nota D. O novo acorde que deverá iniciar a música transportada três tons e meio é formado pelos acordes G, C e D (sol, dó e ré).

Outro modo de efetuar esse transporte é notar as alturas entre as notas que compõem o acorde, pois elas deverão se manter. No acorde inicial as alturas são C-F de cinco semitons e F-G de dois semitons, logo podemos contar sete semitons de C até G, depois a partir de G contamos cinco semitons encontrando a nota C e a partir de C contando dois semitons chegamos à nota D.

Por outro lado, se utilizarmos os discos do SATMA (Sistema de Acordes e Transportes Musicais Alonso), basta alinharmos a nota C com a nota G, utilizando apenas dois discos, que as outras notas do acorde ficam alinhadas simultaneamente.



7

Atividades de Aplicações na Educação Básica

Este capítulo destina-se a apresentar algumas aplicações da matemática na música, que podem ser desenvolvidas num projeto escolar que tenha por objetivo desenvolver nos discentes algumas habilidades de forma descontraída e prazerosa.

7.1.

Atividade 1

Construir uma circunferência, dividir em doze partes iguais e colocar as 12 notas dispostas como num relógio, em seguida responder as questões abaixo.

7.1.1.

Exercício 1

Considerando as notas musicais dentro de uma mesma oitava e sempre o menor ângulo, qual é a medida em graus, de cada intervalo musical abaixo:

- a) E e A?
- b) F e E?
- c) C e G?

7.1.2.

Exercício 2

Considerando uma circunferência de raio 4cm, qual é o comprimento de arco correspondente a um intervalo de um tom?

7.1.3.

Exercício 3

Considerando uma circunferência de raio 2m, qual é o comprimento de arco correspondente ao intervalo C-F?

7.1.4. Exercício 4

Considerando que cada intervalo de semitom possuiu 100 cents. Qual é a quantidade de cents que possui um intervalo correspondente a um ângulo reto?

7.2. Atividade 2

Dividir a turma em dois grupos, o primeiro grupo faz a marcação de um compasso $\frac{3}{4}$ e o segundo a marcação de um compasso $\frac{4}{4}$, ambas as marcações destacando o pulso mais forte. Ao iniciarem a marcação, ambos os grupos, no mesmo instante de tempo e com mesmo intervalo de tempo entre os pulsos, determinar em quais pulsos os dois grupos destacarão juntos o pulso mais forte, percebendo que o intervalo entre os pulsos mais fortes em comum será o MMC entre 3 e 4.

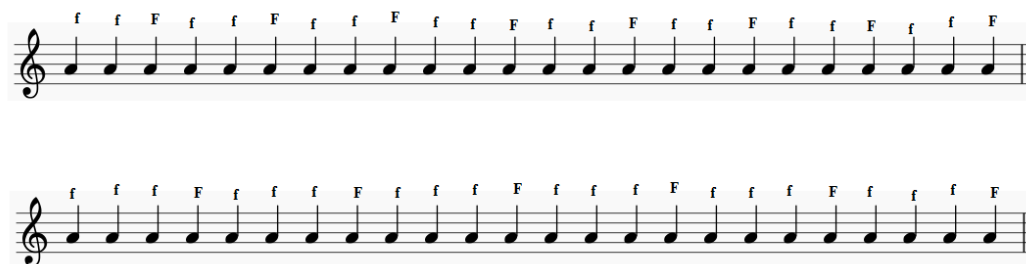


Figura 24: Pauta de MMC entre 3 e 4

Outras atividades com mesmo objetivo podem ser criadas, bastando alterar a marcação dos pulsos efetuada pelos grupos.

7.3. Atividade 3

7.3.1. Exercício 5

Essa atividade consta de exibir uma pauta com fórmula de compasso predefinida e compassos não totalmente preenchidos. Os alunos deverão preencher os compassos da pauta de forma a satisfazer as propriedades da fórmula de compasso estabelecida no início da pauta, alterando apenas as figuras de silêncio. Findo a atividade os alunos podem ouvir o que produziram, para tanto, basta escrever a partitura criada num programa de partituras como o *encore* ou o *finale*, por exemplo. Vejamos um exemplo de pauta para desenvolver essa atividade.



Figura 25: Pauta para atividade 3

7.3.2. Exercício 6

Escrever o compasso complexo $\frac{7}{4}$ como soma de outros compassos não complexos.

7.4. Atividade 4

Construir um monocórdio⁷ (figura abaixo) juntamente com os alunos fazendo as marcações pitagóricas $\frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{16}{27}, \frac{128}{243}$ e $\frac{1}{2}$. Essa atividade é uma atividade mais extensa e requer uma boa infraestrutura da escola e disposição de materiais mais específicos. Porém além de trabalhar as frações na marcação dos intervalos no monocórdio, o professor poderá trabalhar também o conceito de área de retângulos e volume de paralelepípedo. Refazendo o caminho de Pitágoras e

⁷ Monocórdio é um instrumento de uma única corda criado e utilizado por Pitágoras.

com o auxílio de um frequencímetro⁸, esticamos uma corda de comprimento igual a 1, pode ser 1m, até atingir a frequência de 132Hz, podemos chamar o som produzido por essa corda de C, efetuando divisões sucessivas, conforme a ilustração abaixo, encontramos as notas D, E, F, G, A, B e C (264HZ) na afinação pitagórica, conforme ilustração abaixo. Para facilitar a localização de cada traste do monocórdio é importante utilizar as operações com frações, e as unidades de medida metro, centímetro e milímetro, pelo menos.

Suponha que a distância do ponto M ao ponto N (figura abaixo) seja de um metro, ou seja, cem centímetros. Daí, para determinarmos o lugar onde colocaremos o traste⁹ referente à nota D, devemos efetuar o produto $\left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{100}{1}\right) = \frac{800}{9} \cong 88,9 \text{ cm} = 889 \text{ mm}$. Podemos notar que trabalhamos com o aluno o produto de frações, sua representação decimal, conversão de unidades de medida de comprimento e ainda critérios de aproximação de um número decimal. O mesmo deverá ser feito para cada um dos trastes referentes às notas E, F, G, A, B e C, respeitando o intervalo pitagórico de cada uma dessas notas em relação à nota uníssona.

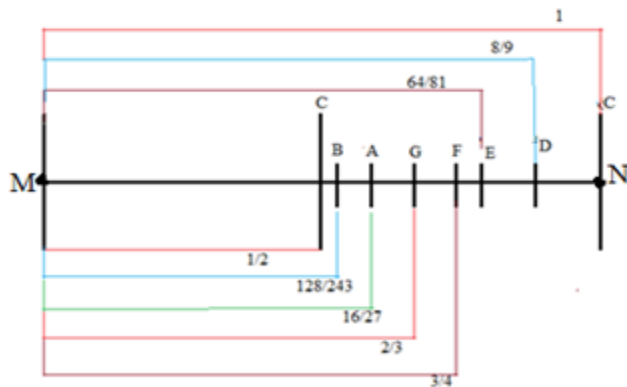


Figura 26: Monocórdio

⁸ Frequencímetro é um instrumento eletrônico utilizado para medição da frequência de um sinal periódico.

⁹ Trastes são peças, geralmente metálicas, utilizadas para criar divisões da corda de alguns instrumentos musicais em intervalos de meio tom.

7.5.
Atividade 5**7.5.1.**
Exercício 7

Um número x maior que 200 e menor que 300 é tal que $x \equiv 80 \pmod{15}$. Que número é esse?

7.5.2.
Exercício 8

Considerando as notas musicais como classe de equivalência módulo 12, a saber qual é nota musical equivalente ao número 45 e em qual oitava ela se encontra?

8 Conclusão

Um projeto que relacione o estudo de música com alguns tópicos da matemática é muito útil, tanto para o ensino de música, quanto para o ensino de matemática. Para o estudo de música, no que diz respeito à compreensão da teoria e prática musical e para o ensino de matemática no que diz respeito às suas aplicações diretas e satisfatórias.

Desse modo, este trabalho pode ser o ponto de partida de um projeto que mude o jeito de ensinar, pois sabendo que nossos alunos e o mundo não são os mesmo de décadas atrás, não podemos ensinar como ensinavam há décadas. Não podemos esperar consequências inovadoras sobre ações arcaicas e estáticas.

9 Referências bibliográficas

- [1] LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. Coleção do Professor de Matemática. Editora SBM 2006
- [2] LIMA, E. L. **Logaritmos**. Coleção do Professor de Matemática. Editora SBM 1996.
- [3] PTIOLLI, M. L. **Princípios básicos da Música para a Juventude**. Editora Casa Oliveira de Músicas LTD 2009
- [4] CARRON, O. G.; GUIMARÃES, O. **As faces da Física**. Editora Moderna 2002.
- [5] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Coleção PROFMAT . Editora SBM 2013
- [6] ILARI, Beatriz. **A música e o cérebro: algumas implicações do neurodesenvolvimento para a educação musical**. Revista da ABEM, Porto Alegre, setembro 2003.
- [7] MUSZKAT, M.; CORREIA, C.M.F. & CAMPOS, S.M. – **Música e Neurociências Rev. Neurociências 8(2): 70-75, 2000**
- [8] CUERVO, Luciane. **Anais do SIMCAM4 – IV Simpósio de Cognição e Artes Musicais** — maio 2008 UFRGS
- [9] Fonseca, Daniel F. **Aspectos estruturais e históricos que relacionam a música e a matemática : uma abordagem interdisciplinar para a aplicação de médias, progressões e logaritmos, no Ensino Médio**. Lavras : UFLA, 2013.
- [10] WISNIK, José Miguel (1999). **O som e o sentido**. São Paulo: Cia das letras.
- [11] JUST INTONATION. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2011. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Just_intonation>.

- [12] GIOSEFFO ZARLINO. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2011. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Gioseffo_Zarlino>.
- [13] MUSIC AND MATHEMATICS. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2011. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Music_and_mathematics>.
- [14] SCALE (MUSIC). In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2011. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Scale_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Scale_(music))>
- [15] COUNTERPOINT. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2011. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Counterpoint>>
- [16] DALLIN S. Durfee.; JOHN, S. Colton. **The physics of musical scales: Theory and experimente**. Department of Pheysics and Astronomy, Brigham Young University, Provo, Utah 84602