UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Mario Hivanildo Almeida

Otimização Linear como Ferramenta Metodológica

Campinas-SP

2016

Mario Hivanildo Almeida

Otimização Linear como Ferramenta Metodológica

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Profa. Dra. Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Mario Hivanildo Almeida e orientada pela Profa. Dra. Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini

Campinas-SP

2016

Ficha catalográfica

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

AL64o Almeida, Mario Hivanildo, 1970-
Otimização linear como ferramenta metodológica / Mario Hivanildo Almeida. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Programação linear. 2. Processo decisório. 3. Ensino-aprendizagem. 4. Modelagem matemática. 5. Educação - Modelos matemáticos. I. Ghidini, Carla Taviane Lucke da Silva,1976-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Linear optimization as methodological tool
Palavras-chave em inglês:
Linear programming
Decision making
Teaching-learning
Mathematical modeling
Education - Mathematical models
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini [Orientador]
Claudina Izepe Rodrigues
Sônia Cristina Poltroniere Silva
Data de defesa: 03-08-2016
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Folha de aprovação

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 03 de agosto de 2016

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). CARLA TAVIANE LUCKE DA SILVA GHIDINI

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Prof(a). Dr(a). SÔNIA CRISTINA POLTRONIERE SILVA

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Aos meus filhos, Juliana Priscila Almeida, Bruno Leandro Almeida e Marcus Victor Almeida, *que sempre estiveram ao meu lado dando força e apoio.*

Agradecimentos

Ao Pai Supremo por dar força durante todo o tempo, permitindo em cada batalha o caminho para o que mais precisava. A Profa. Dra. Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini, pela dedicação e atenção em todo o trabalho e pela oportunidade de aprendizado. A minha mãe Lucia Geralda Pereira de Almeida pelo carinho e paciência. Aos meus Filhos: Juliana Priscila Almeida, Bruno Leandro Almeida e Marcus Victor Almeida, pela atenção, compreensão e parceria e auxilio todo o tempo. A todos os professores da EE Célio Rodrigues Alves que de forma direta ou indireta participaram do estudo. A todos os amigos que sempre estiveram ao meu lado. A equipe da Secretaria Municipal de Cosmópolis pela oportunidade de aprendizado, vivencia e a colaboração durante todo o tempo do Mestrado. A CAPES pelo oferecido. Em Especial a Todos os professores que fizeram parte da minha formação, desde do ensino de primeiro grau, segundo grau, graduações até chegar aos professores do PROFMAT na UNICAMP. Um grande abraço de agradecimento a todos.

Resumo

Um dos grandes desafios do professor no mundo contemporâneo é se colocar como mediador no processo de ensino e aprendizagem, motivando os alunos na construção de seus saberes. Nesse trabalho, a modelagem matemática de problemas de Otimização Linear e suas técnicas de resolução são utilizadas como ferramenta metodológica para auxiliar no processo ensino-aprendizagem dos diversos níveis de educação. Os problemas abertos servem de agente motivador ao aprendiz, levando à construção de vários saberes matemáticos e possibilitando o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias à vida em sociedade. Problemas que envolvem tomadas de decisão com um conjunto de restrições, que fazem parte do cotidiano, permitem uma interação direta da realidade com o conteúdo a ser aprendido. Escolher uma melhor opção entre as possibilidades existentes faz parte do instinto humano, nas várias idades e momentos da vida. Usar esta abordagem em sala de aula torna o momento de aprendizagem mais interativo e dinâmico. Organizar, classificar e usar as operações básicas para entender o que está a nossa volta torna o aprendizado da matemática mais prazeroso, pois dá sentido ao que está sendo aprendido. Aprendemos melhor quando temos um propósito para isso.

Palavras-chave: Otimização Linear, tomada de decisão, ensino-aprendizagem, ferramenta metodológica, modelagem matemática.

Abstract

One of the biggest challenges for the teacher in the contemporary world is to be placed as mediator in the teaching/learning process, motivating the students to build their knowledge. In this work, the mathematical modeling of Linear Optimization problems and their solving techniques are used as methodological tools to help in the teaching/learning process of several levels of education. The open problems can be motivating agents to the learner, taking to the construction of several mathematical lessons enabling the development of competencies and skills necessary for life in society. Problems involving decision making, with a set of constraints, which are part of everyday life, allow direct interaction of reality with the content to be learned. Choosing the best option among the possibilities is part of the human instinct, taking advantage, at all ages and moments in life. Using that in the classroom makes the learning time more interactive and dynamic. Organizing, classifying and using the basic operations to understand what is around us makes the math learning more pleasurable, because it makes sense of what is being learned. We learn better when we have a purpose for it.

Key words: Linear Optimization, decision making, teaching/learning, methodological tools, mathematical modeling.

Sumário

Introdução

A matemática na Educação Básica se coloca como um dos grandes desafios ao estudante, principalmente no Ensino Médio. Muitos alunos têm dificuldade em aplicar o conteúdo desenvolvido na escola no seu cotidiano e, com isso, acabam por não desenvolver as habilidades necessárias ao seu aprendizado. Buscar uma contextualização para as atividades propostas, que tenha sentido para o aluno em seus vários níveis, tem sido um grande desafio ao educador que tem de permear por várias metodologias e recursos na busca do sucesso do educando. De acordo com Willingham [2011] "As pessoas são naturalmente curiosas, mas não são boas pensadoras. A menos que as condições cognitivas sejam favoráveis, pensar será evitado". Daí o grande desafio de provocarmos o aluno para que possa aprender.

Quando contextualizamos bem as situações de aprendizagem, o aluno se envolve de forma interativa nas aulas. Quando desafiado, colocado em conflito, responde de maneira favorável sendo protagonista de seu aprendizado. O aluno passa a criar e resolver seus próprios problemas e a analisar o que está ao seu redor.

> Resolver problemas é uma atividade humana fundamental. De fato, a maior parte do nosso pensamento consciente relaciona-se com problemas. A não ser quando nos entregamos a meros devaneios ou fantasias, os nossos pensamentos dirigem-se para um fim, procuramos meios, procuramos resolver um problema.

Polya [2006]

A todo momento nos deparamos com situações problema, mensuráveis ou não, que são criados pela sociedade ou por nós mesmos. Resolver problemas faz parte de nosso cotidiano e até mesmo de nossa diversão. Somos levados a todo momento a tomar decisões. Temos que decidir entre as diversas oportunidades que a convivência social nos propõe. Aceitamos algo ou não a todo momento.

Nessa perspectiva, se nos aproveitarmos disso no preparo das aulas, enriquecendo nossas ferramentas metodológicas, podemos motivar nossos alunos ao aprendizado dos diversos conteúdos da Matemática. A tomada de decisões, bem como a análise das possibilidades nos rodeiam a todo instante. E porque não nos apropriarmos disso para a construção do aprendizado?

Temos conhecimento de que, nos maiores conflitos, surgem novas oportunidades. A tomada de decisão é cada vez mais primordial. Andrade [2012], no primeiro capítulo de seu livro, fala sobre o surgimento da Pesquisa Operacional como ferramenta na solução de problemas militares durante a Segunda Guerra Mundial. Desde seu nascimento, esse novo método de análise de decisão vem sendo utilizado nas mais variadas áreas do conhecimento. Como podemos usufruir dessa ferramenta também na Educação Básica?

A sistematização de elementos na tomada de decisões nos permite uma análise mais crítica na busca do melhor resultado. Se pudermos usar isso na construção do conhecimento, estaremos otimizando alguns processos e fornecendo aos nossos alunos novas ferramentas de trabalho, preparando-os para a vida adulta.

> O principal a saber é que apresentar aos alunos desafios que requerem a criação de algo novo é uma tarefa além do alcance deles - mas isso não quer dizer que você não deve propor essas tarefas. Apenas mantenha em mente o que os alunos irão ou não ganhar com isso.

Willingham [2011]

Percebemos que a articulação entre as várias áreas do conhecimento, seus problemas e soluções vem servir-nos como base na construção dos saberes matemáticos e de seus registros. O uso da Otimização Linear, sua abordagem algébrica e geométrica proporcionam a comunicação entre vários conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. O que nos coloca alguns questionamentos a serem investigados nesse trabalho. Quando modelamos um problema usando Otimização Linear? Quais conteúdos da Educação Básica estão relacionados a essa abordagem? Como nos apropriarmos dos recursos tecnológicos como facilitadores desse processo?

Esse trabalho busca refletir sobre esses aspectos, apresentando no decorrer de sua construção uma fundamentação teórica do que é Otimização Linear. Sua aplicação e comunicação com os conhecimentos matemáticos adquiridos com o passar dos tempos e como essa ferramenta pode nos ser útil nos vários momentos de aprendizagem.

A investigação e aplicação de atividades aos alunos do Ensino Regular, Fundamental e Médio, e Educação de Jovens e Adultos, servirão de referência às decisões e sugestões de atividades no desenvolvimento desse texto.

Pretende-se com isso analisar como educadores e educandos se colocam à frente de situações que envolvem múltiplas análises na busca de uma melhor solução. Além de, com o uso de planilhas e gráficos, fundamentando o registro algébrico e geométrico, contribuir na formação para o mercado de trabalho e à vida social, como explicitada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBN 9.394 [1996]).

No Capítulo 1, "Otimização Linear", buscaremos entender alguns conceitos relacionados a problemas de otimização. Iniciaremos pelas ideias de tomada de decisão, onde ressaltaremos a importância desse conceito na Otimização. Veremos ainda como a modelagem de problemas pode facilitar o entendimento do mesmo e a identificação de seu objetivo, observando as características de problemas de Otimização Linear. Discutiremos, ainda nesse capítulo, conceitos importantes que servirão de base ao entendimento e à resolução desses problemas.

Analisando situações problema e observando as diferentes formas de resolução, no Capítulo 2, "Resolução de Problemas de Otimização Linear", discutiremos como cada método de resolução nos encaminha à solução. O uso de recursos computacionais para facilitar o entendimento e a resolução de problemas e a análise algébrica de situações se comunicam nesse segundo capítulo, de forma a valorizarmos cada um dos processos que serão mais explorados no decorrer desse material.

O processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica traz como cerne o desenvolvimento de habilidades necessárias à constituição do cidadão como um todo. Tomar decisões e fazer escolhas fazem parte do cotidiano. No Capítulo 3, "Otimização Linear e a Aprendizagem", buscamos entender um pouco mais de como as técnicas da Otimização Linear podem nos ajudar em cada fase dessa modalidade de ensino. Usaremos cada passo do processo de modelagem para entender como essas práticas podem nos ajudar a construir os vários conceitos matemáticos, desenvolvendo habilidades de calcular e usar os números e operações para descrever o mundo em que vivemos. Os vários saberes construídos no passar dos tempos se comunicam diretamente no desenvolvimento das competências e habilidades necessárias à vida em sociedade.

Escolher um melhor caminho, uma dieta mais apropriada, o melhor combustível a colocar no carro, entre outras opções na vida, fazem parte da rotina de crianças e adultos no mundo contemporâneo. E, nesse contexto, por que não usarmos as necessidades para motivar o aprendizado com situações significativas a comunidade escolar? Buscamos, no decorrer do Capítulo 4, "Como aplicar a Otimização Linear na Educação de Base", estruturar métodos para o desenvolvimento de alguns dos tópicos a serem trabalhados em cada nível de ensino, na Educação Básica, no componente curricular de Matemática. Através de problemas de Otimização Linear, desencadear ou revisitar o conhecimento necessário à resolução de problemas. Enfrentar uma situação, escolhendo a melhor solução, faz parte, desde as brincadeiras de infância, até o mundo do trabalho na vida de todos.

Como trazer vivências para dentro da sala de aula? Como dar significado ao conteúdo da matemática a ser ensinado? Em comunicação com os anteriores, o Capítulo 5, "Atividades para Sala de Aula", traz algumas sugestões de situações de aprendizagem que podem ser desenvolvidas na Educação Básica. As atividades não se colocam de forma obrigatória, e mesmo com sugestões de nível de ensino, podem ser adaptadas de um para outro nível, conforme o que o professor pretende com sua turma. Objetivamos aqui que essas propostas sirvam de modelos à construção de outras e que as orientações ao professor levem à reflexão da importância da valorização dos vários saberes a serem adquiridos. Alunos e professores fazem parte de uma parceria na construção do conhecimento e no uso de novas ferramentas. Aprendemos e ensinamos a todo momento através da vivência e dos desafios apresentados dentro e fora da sala de aula.

Finalizaremos nossa discussão com uma reflexão sobre o uso das ferramentas da Otimização Linear na Educação Básica. O Capítulo 6, "Reflexões Finais", não tem por objetivo esgotar as possibilidades do assunto, mas sim, fazer uma análise sobre o que foi discutido até o momento. Estamos sempre aprendendo e não esgotamos esse conteúdo enquanto o homem continuar produzindo conhecimento. Como seres criativos estamos em constante transformação e aquisição de novos saberes. A evolução tecnológica nos coloca à frente de novos desafios e temos de estar sempre prontos a aceitá-los.

Nos apêndices, as atividades e modelos devem servir como apoio às vivências das atividades desenvolvidas, um apanhado de sugestões ao professor, para servir de subsídio ao preparo de algumas aulas ou até mesmo para testar as atividades discutidas nesse material. O conhecimento não está pronto e sim em transformação. Devemos sempre buscar o nosso melhor e em cada final um novo recomeço, decidindo o caminho a ser seguido e traçando nossos objetivos pessoais.

Capítulo 1

Otimização Linear

> Nesse capítulo discutiremos os principais conceitos envolvidos em Otimização, como podemos modelar matematicamente um problema e as características dos problemas de Otimização Linear.

A busca pelas melhores soluções dos problemas que surgem no cotidiano norteiam o ser humano a construir conhecimentos desde seus primórdios. Buscar por modelos matemáticos representativos e por melhores caminhos para alcançar objetivos vem contribuindo no desenvolvimento do conhecimento matemático com o passar dos tempos. Nessa busca, percebemos em várias passagens da história o aparecimento de símbolos e equações modelando situações cotidianas ou problemas desafiadores para melhorar seu raciocínio, competir entre seus pares e valorizar o próprio ego.

Os matemáticos da Índia, além de contribuírem no desenvolvimento do sistema numérico utilizado até hoje, já buscavam soluções para equações com mais de uma variável entre os séculos VII e XII.

Na China, além de outros algoritmos, já se tinha soluções de problemas por métodos muito parecidos com o nosso modo de resolver Sistemas Lineares, lembrando bastante o escalonamento de Gauss. Já resolviam diversas equações simultâneamente e modelavam diversos problemas.

Na Grécia, além das contribuições em geometria, resolviam equações e descreviam algoritmos para encaminhar solução de problemas. Nesse período histórico já podemos encontrar métodos de resoluções para equações de mais de uma incógnita e solução de vários problemas.

Assim, a busca de soluções aos problemas de cada época conduziu ao desenvolvimento da matemática que conhecemos hoje. Podemos buscar mais informações em Bernghoff and Gouvêa [2012] , Roque and Carvalho [2012] entre outros autores, onde encontramos várias passagens interessantes sobre o desenvolvimento matemático. Como exemplo temos:

> Começando na Primeira Guerra Mundial, governos descobriram que pensar matematicamente os problemas levavam a resultados úteis, e nasceu a "pesquisa operacional". Na Segunda Grande Guerra, matemáticos tiveram um papel crucial de muitos modos, com mais fama ao desenvolver a ciência da criptografia e quebrar o código alemão Enigma. Redes de telefonia e, mais tarde, a internet foram estudadas matematicamente. A "programação linear" foi desenvolvida para lidar com o fato de determinar o "melhor modo" de fazer coisas de todas as espécies de áreas, desde a indústria, passando pela governamental, até a área militar.
>
> Bernghoff and Gouvêa [2012]

A busca por soluções cada vez melhores para os problemas encontrados nos leva a construção de saberes e ao desenvolvimento de novos métodos. A expressão "Pesquisa Operacional", surge pela primeira vez durante a Segunda Guerra Mundial, onde se buscava desenvolver métodos para resolver problemas de operações militares. A busca pela melhor utilização de materiais de guerra levaram os cientistas britânicos ao desenvolvimento de novos métodos que, posteriormente, foram adaptados para melhorar a eficiência de outros processos.

Com o término da Segunda Guerra, a pesquisa operacional evolui rapidamente na Inglaterra e nos Estados Unidos. Um dos objetivos eram apoiar as decisões de operações da força aérea americana. No final da década de 1940, *George Dantzig* desenvolveu, formalizou e testou o método simplex para resolver problemas de Otimização Linear. No Brasil a pesquisa operacional iniciou-se na década de 1960 com um simpósio realizado no ITA, em São José dos Campos, em 1968. Temos uma abordagem um pouco mais detalhada e mais contribuições históricas no livro de Arenales et al. [2007].

A tomada de decisão e a busca pelo melhor desempenho é o objetivo de toda a produtividade mundial. Dessa forma, a "Otimização Linear" se coloca como uma importante ferramenta que administra em vários campos, buscando um melhor aproveitamento de recursos sem perder os objetivos esperados.

Otimização Linear, ou mais genericamente, a Pesquisa Operacional, tem enfoque direto na tomada de decisão. Busca a melhor solução para um determinado problema independente de sua área. Dessa forma, sua aplicabilidade acabou por ser reconhecida em várias atividades profissionais, seja na busca de maximizar lucros, minimizar despesas ou até mesmo alocação de funcionários de forma a melhorar o atendimento. Ela facilita muito o processo de análise de decisão permitindo, em alguns casos, uma experimentação anterior.

Um grande desafio do mundo contemporâneo é o melhor aproveitamento de recursos, sem, com isso, abrir mão dos confortos com os quais estamos acostumados. Nessa premissa, a busca por melhores soluções para os problemas enfrentados como cidadãos produtivos faz parte da formação do homem moderno. Tanto na administração doméstica como na empresarial, a tomada de decisão é fundamental. Qual a melhor escolha? O que se deve fazer? Como ganhar mais? Como gastar menos? Na busca dessas e outras respostas temos como importante ferramenta os conceitos de otimização, a busca do ótimo ou do melhor possível. Com isso, a Pesquisa Operacional, junto com as facilidades tecnológicas, se tornam auxiliadoras na tomada de decisão.

Somos levados a todo instante a tomar decisões, a fazer escolhas, seja na vida diária ou no trabalho. Isso determina um melhor desenvolvimento ou perda de alguns recursos, e até mesmo conflitos interpessoais ou transtornos no ambiente social. Dessa forma, a tomada de decisão se coloca de forma crucial na resolução de problemas.

1.1 Tomada de Decisão

A tomada de decisão pode ser identificada como parte do reconhecimento de um problema ou de um caminho para sua solução. Não se trata de um processo simplório e, muitas vezes, deve-se levar em conta muitos fatores, inclusive uma avaliação posterior a ela. Em seu livro, Andrade [2012] coloca:

> [...] uma decisão é o resultado de um processo que se desenvolve a partir do instante em que o problema foi detectado, o que geralmente ocorre através da percepção de sintomas. [...]

Andrade [2012]

Existem várias definições sobre tomada de decisão, entre as quais podemos, como afirmado por Andrade [2012], destacar: "uma decisão é um curso de ação escolhido pela pessoa, como o meio mais efetivo a sua disposição, para alcançar os objetivos pretendidos, ou seja, para resolver o problema que o incomoda". Com isso, percebemos que a decisão está diretamente ligada à experiência de quem vai resolver o problema, seu conhecimento, sua cultura e até mesmo seu estado emocional. A decisão pode ser individual, tomada por uma única pessoa, ou em grupo, tomada por um grupo de pessoas, mas carrega as seguintes características: sequencial, complexa, subjetiva, institucional, racional.

- No **processo sequencial**, mesmo que pareça por impulso, as decisões se desencadeiam conforme o andamento do problema. Uma nova decisão sempre depende da anterior, sem com isso perder o foco do objetivo a se atingir. Está presente em discussões e, muitas vezes, é difícil de se apontar o ponto principal do processo.

- No **processo complexo**, que se caracteriza, geralmente, pela quantidade insuficiente de informações, a experiência do indivíduo ou do grupo reflete diretamente na solução do problema. A análise das informações e elementos do problema podem variar conforme o nível da decisão do problema.

- Em **processos que implicam valores subjetivos**, fatores intuitivos norteiam a decisão na solução do problema. É de grande importância na tomada de decisão e sofre interferência da personalidade dos envolvidos na resolução do problema. Muitas vezes, é o que vai caracterizar a solução do problema como boa ou ruim.

- O **processo institucional** está ligado à forma organizacional do local onde se pretende resolver o problema. Está interligado ao relacionamento entre as pessoas e na interação entre os diferentes grupos de trabalho. Criar um bom ambiente institucional favorece uma melhor solução do problema.

- A **decisão racional** está ligada a lógica do processo, ao conjunto de todos os fatores envolvidos, no grau de conhecimento do problema. Nesse caso, um estudo minucioso da situação se faz necessário e a experiência da equipe é crucial ao produto final.

Todo processo de decisão está ligado ao nível hierárquico do grupo, do número de pessoas que participarão do processo decisório, do tipo e da qualidade da informação disponível. Outro fator importante é a identificação do problema a ser resolvido e um bom modelo para a resolução do problema.

1.2 A Arte da Modelagem

Após a identificação do problema, cabe agora a construção de um modelo que permita sua representação, análise e possível solução. Cada tipo de problema tem seu modelo específico e cabe ao administrador[1] escolher o que melhor represente seu problema. Em alguns casos, plantas, mapas ou modelos servem bem, em outros podemos ter expressões matemáticas ou muitas vezes, uma junção de vários modelos. O modelo mais adequado é o que melhor representa a situação a ser estudada, podendo ser dividido em conceitual, simbólico ou heurístico.

- Os **modelos conceituais** relacionam como uma sequência lógica as informações e características do objeto de estudo, possibilitando análise e tomada de decisão. Identifica-se as interferências no problema e a estrutura de forma a buscar a melhor possibilidade ao objetivo proposto.

[1]Quem está buscando solução para o problema.

- Baseando-se em todas as informações e variáveis relevantes do problema, o **modelo simbólico** ou matemático permite, com o uso de símbolos matemáticos, quantificar e analisar as relações entre as informações apresentadas, de forma a encontrar a melhor possibilidade.

- Quando a complexidade inviabiliza a representação matemática, se torna necessário o uso de **modelos heurísticos**. Esses modelos se baseiam em regras empíricas e intuitivas que permitem um encaminhamento a um modelo que facilite a tomada de decisão. Um exemplo são modelos com o uso de inteligência artificial.

A escolha de um modelo ou uma sequência de modelos depende sempre do encaminhamento do desafio que se propõe a enfrentar, suas certezas e incertezas, além dos riscos que a situação pode oferecer. Quanto mais detalhes conhecemos do problema, melhor será sua modelagem e mais sucesso teremos em sua solução. Cabe lembrar que, muitas vezes, temos de elencar prioridades nas análises para atender mais rapidamente ou até mesmo atender conflitos de interesses. Em seu livro, Andrade [2012] coloca:

> Um estudo de Pesquisa Operacional consiste, basicamente, na construção de um modelo para um sistema real que sirva como instrumento de análise e compreensão do comportamento desse sistema, com o objetivo de levar o sistema a apresentar o desempenho desejado.

Andrade [2012]

A Pesquisa Operacional se dedica, principalmente, aos problemas que podem ser representados por modelos matemáticos que vão depender da qualidade da informação, da natureza matemática de suas variáveis e dos níveis de incertezas. Dessa forma, os modelos matemáticos se dividem em modelos de simulação e modelos de otimização.

- Os **modelos de simulação** buscam uma representação do problema real, permitindo interferências antes da implantação completa da solução do problema em questão. Dão uma flexibilidade considerável na escolha das ações mais convenientes.

- Os **modelos de otimização** não permitem flexibilidade, pois estão estruturados para encontrar apenas uma alternativa através de algoritmos.

Podemos ainda alternar entre os dois tipos de modelos na busca da melhor solução do problema a ser enfrentado. A resolução de problemas permeia as várias atividades humanas e nos leva a várias reflexões sobre o que devemos fazer ou não. De acordo com March [2009]:

> Preferências seriam definidas incluindo coisas como lucros, vendas e valor de estoque (amanhã, no ano que vem, dentro de dez anos); contribuições para metas político sociais (por exemplo, ação afirmativa, metas de qualidade de vida, impacto da decisão sobre as famílias)...
>
> March [2009]

O conceito de otimização está ligado a busca de mínimo ou máximo de uma função, atendendo as condições impostas pelo problema. A função matemática que define as possíveis soluções em relação ao conjuntos de variáveis do problema é chamada de **função objetivo**. Esses tipos de problemas permeiam as várias atividades humanas e estão diretamente ligadas ao cotidiano. Assim podemos dividir os problemas de otimização em:

1.2.1 Otimização Linear

Nos problemas de Otimização Linear as variáveis são contínuas e apresentam comportamento linear, tanto em relação às restrições como à função objetivo. Estaremos nesses problemas trabalhando com igualdades representadas por equações lineares e desigualdades que podem ser transformadas em equações lineares. Sua importância está na eficácia dos algoritmos existentes e na possibilidade de transformação de modelos não-lineares em lineares por aproximações.

1.2.2 Otimização Não-Linear

A Otimização Não-Linear se caracteriza pela existência de qualquer tipo de não linearidade, seja na função objetivo ou em qualquer uma de suas restrições. Podemos ter aqui outros tipos de funções, polinomiais ou não, onde observamos casos de convexidade preservando as propriedades matemáticas. Está presente em várias representações que envolvem fenômenos naturais e em alguns casos conseguimos boas aproximações para funções lineares, podendo aplicar as técnicas da Otimização Linear.

1.2.3 Otimização Inteira

Quando as variáveis não podem assumir valores contínuos, ou seja, permitem apenas valores inteiros, temos a Otimização Inteira. Assume apenas valores Discretos e pode ser Linear ou Não-Linear, exigindo técnicas de resolução mais abrangentes.

Priorizaremos aqui a Otimização Linear, por estarem mais próximos aos conteúdos trabalhados na Educação Básica.

1.3 Problemas de Otimização Linear

Os problemas que podem ser formulados como problemas de Otimização Linear, em que todas as expressões são lineares com variáveis contínuas, são dos tipos:

- **Problemas de mistura** – consiste em combinar vários materiais para gerar novos produtos.
- **Problemas de transporte**, **transbordo e designação** – consiste em transportar produtos ou materiais ao seu destino.
- **Problemas de planejamento da produção** – está ligado a fabricação de diversos produtos envolvendo períodos e condições de produção.
- **Problemas de gestão financeira** – envolvem decisões relacionadas a investimentos financeiros.
- **Problemas de meio ambiente** – envolvem o melhor aproveitamento de recursos naturais minimizando os impactos ambientais.
- **Problemas de corte e empacotamento** – ligados ao melhor aproveitamento de matéria prima, objetos e embalagens de comercialização.
- **Problemas de dieta alimentar** – Envolve questões de nutrição.
- **Problemas de alocação de funcionários** – Envolve estruturação de cronogramas de trabalho.

1.3.1 Hipóteses de Linearidade

Nesses e em outros tipos de problemas de Otimização Linear, as grandezas envolvidas precisam obedecer as hipóteses: de aditividade, de proporcionalidade e de fracionamento.

- **Hipótese de aditividade** - o todo é igual à soma das partes. Por exemplo, se juntarmos 200g de açúcar com 300g de farinha teremos 500g de mistura. Temos de lembrar de que por transformações químicas nem sempre isso será verdade no que diz respeito a volumes ou por questões de volatilidade.
- **Hipótese de proporcionalidade** - a constante da variável é uma constante de proporcionalidade, ou seja, se $a = 0,1$ é o valor de uma bala em reais (Cada bala custa R$ 0,10) e x é o número de balas, então 3 balas será $a \times x = 0,1 \times 3 = R\$0,30$.
- **Hipótese de fracionamento** - os valores fracionários para as variáveis são válidos. As variáveis, dentro de suas restrições podem assumir qualquer valor no Conjunto dos Números Reais ($x_i \in \mathbb{R}$).

1.3.2 Características

Em modelos de problemas de Otimização Linear, com todas as funções lineares, essas hipóteses nos levam a observação de que esses problemas devem possuir as seguintes características:

- **Proporcionalidade** – A quantidade de recurso e o custo, devem ser proporcionais ao nível, em cada atividade.
- **Não Negatividade** – deve sempre ser possível desenvolver a atividade com valores não negativos.
- **Aditividade** – o custo total é a soma das parcelas associadas a atividade.
- **Separabilidade** – pode-se **identificar** de forma separada o custo, ou consumo, das operações em cada atividade.

1.3.3 Propriedades básicas

Assim temos que, o problema para ser modelado como Otimização Linear deve ter a função objetivo e as restrições, respectivamente, todas representadas por funções lineares contínuas, além de atender as três propriedades básicas:

1. **Proporcionalidade** - requer que a variável de decisão contribua de forma diretamente proporcional, tanto na função objetivo como nas restrições.
2. **Aditividade** - requer que a contribuição de todas as variáveis da função objetivo e das restrições seja a soma direta das contribuições individuais de cada variável.
3. **Certeza** - todos os coeficientes podem ser determinados, ou seja, são constantes conhecidas.

Resolver um problema modelado como Otimização Linear é encontrar uma solução que atenda todas as restrições do problema e que seja a melhor possível, maximizar ou minimizar a função objetivo.

As soluções do problema de Otimização Linear são classificadas em:

- **Solução viável ou factível**: é o conjunto de valores das variáveis que atendem a todas as restrições do problema.

- **Solução ótima**: é a solução viável que melhor atende a função objetivo do problema.

1.4 Modelando problemas de Otimização Linear

Após o entendimento do problema e visto que se trata de Otimização Linear, tendo interdependência proporcional entre as várias grandezas envolvidas, cabe agora modelarmos matematicamente esse problema para encaminhar sua solução. Devemos identificar as variáveis a serem manipuladas e a da função objetivo a ser alcançada, que retrata o que queremos melhorar (tornar ótimo). Essa função envolve as variáveis a serem manipuladas na situação e, em nosso caso, é uma expressão linear. Também devemos elencar as restrições apresentadas pelo problema, verificar como essas informações se comportam e construir as expressões algébricas lineares, igualdades, desigualdades, que representam a situação. Podemos buscar mais aprofundamentos em Taha [2013].

O modelo matemático de um problema de Otimização Linear, como qualquer modelo de problema de Otimização, tem três componentes básicos:

1. **Variáveis de decisão** que procuramos determinar. As variáveis que podemos modificar na busca da solução ótima.

2. **Função Objetivo** (meta) que precisamos otimizar (maximizar ou minimizar). Função linear e contínua, que envolve todas as variáveis de decisão.

3. **Restrições** que a solução deve satisfazer. Expressões algébricas lineares (igualdades e/ou desigualdades), que atendem as características de linearidade, e envolve as variáveis de decisão.

1.4.1 Forma Geral de um problema de Otimização Linear

Consideramos um problema de Otimização Linear escrito na seguinte forma geral:

$$\begin{aligned} Minimizar: &\quad f(x) \longrightarrow função\ objetivo \\ Sujeito\ a: &\quad x \in S \longrightarrow região\ variável, \end{aligned}$$

em que o conjunto S é definido por equações e/ou inequações, as quais chamamos de restrições do problema. Temos que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é a **Região de factibilidade**[2] , nessa região estão as soluções que atendem a todas as restrições do problema, que são chamadas de soluções viáveis ou factíveis.

Seja $\overrightarrow{x}$, o vetor[3] das variáveis do problema, representado por $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)^t$ com $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, vetor coluna. Para aprofundar os conhecimentos sobre vetores e matrizes veja Boldrini et al. [1986] e Steinbruch and Winterle [2006].

[2]Região onde se encontram as possíveis soluções da situação problema. Também pode ser chamada de **Região de Viabilidade**.
[3]É o conjunto de todos os segmentos orientados com a mesma direção, módulo e sentido.

O vetor $\overrightarrow{x}$ é uma possível solução do nosso problema se, e somente se ele atende a todas as restrições da região S, ou seja, $\overrightarrow{x} \in S$.

$$S = \begin{cases} h_i(x) = 0, & i = 1, ..., m \quad \rightarrow \textit{restrições de igualdade} \\ g_j(x) \leqslant 0, & j = 1, ..., l \quad \rightarrow \textit{restrições de desigualdade} \\ r_k(x) \geqslant 0, & k = 1, ..., q \quad \rightarrow \textit{restrições de desigualdade} \end{cases}$$

A dificuldade de modelar matematicamente e resolver problemas de Otimização Linear depende, em geral, da dimensão do problema, isto é, do número de restrições e variáveis envolvidas.

Resolver um problema de Otimização Linear consiste em determinar a melhor solução, ou seja, determinar o vetor $\overrightarrow{x} \in S$ que minimiza a função objetivo $f(x)$, denominada solução ótima. Para isso é necessário usarmos um dos métodos de resolução disponíveis em Otimização Linear.

Considere um Problema de Otimização Linear escrito da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } Z(x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\text{Sujeito a} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leqslant b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \leqslant b_3 & (3) \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant b_m & (m) \end{cases}$$

Muitos dos problemas de programação linear não são de minimização e sim de maximização. Quando isso ocorrer, podemos usar artifícios algébricos para reescrever o modelo na forma desejada.

Considere que o problema modelado tenha a seguinte forma:

$$\text{Maximizar } Q(x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\text{Sujeito a} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leqslant b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \leqslant b_3 & (3) \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant b_m & (m) \end{cases}$$

Se queremos aplicar um método que necessita que a função seja de minimização podemos nos ater na propriedade de que Min Z = Max (-Z), ou seja, maximizar uma função é minimizar a sua função simétrica. No modelo de maximização apresentado acima, se considerarmos W = -Q podemos reescrever o modelo da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } W(x_n) = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n$$

$$\text{Sujeito a} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leqslant b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \leqslant b_3 & (3) \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant b_m & (m) \end{cases}$$

Como exemplo, suponha que queremos maximizar $Z = 7x_1 - 2x_2$.

$$\text{Considerando } W = -Z \text{ , temos } W = 2x_2 - 7x_1.$$

Então maximizar Z, nessa situação, é equivalente a minimizar W.

Outra possibilidade é termos restrições do tipo maior ou igual, ao invés de menor ou igual. Nesse caso podemos escrever a desigualdade simétrica, multiplicando a mesma por (-1).

Por exemplo, supondo que uma restrição do problema seja $5x_1 - 3x_2 \geqslant 7$.

- Podemos reescrevê-la como $(-1) \times (5x_1 - 3x_2 \geqslant 7) \iff -5x_1 + 3x_2 \leqslant -7$.
- Dessa forma, passamos a ter a inequação: $-5x_1 + 3x_2 \leqslant -7$.

Podemos ainda transformar desigualdades em igualdades acrescentando variáveis de folga, para restrições de menor ou igual ($...+x_m$), ou retirando variáveis de excesso ($...-x_m$), para restrições de maior ou igual. Para mais detalhes veja:

Arenales and Darezzo [2015], Lachtermarcher [2013], Goldbarg and Luna [2005] e Arenales et al. [2007].

> [...transformar o conjunto de restrições em um conjunto de equações equivalentes, com a introdução de variáveis que representarão a folga entre os lados direito (right hand side – RHS) e esquerdo (left hand side – LHS) das inequações...]
>
> Lachtermarcher [2013]

Como exemplo, considere as desigualdades:

$$5x_1 - 3x_2 \geqslant 7 \qquad (i)$$

$$4x_1 - 2x_2 \leqslant 6 \qquad (ii)$$

Admitindo a existência de uma variável de folga x_3 e uma variável de excesso x_4:

- escreveremos a inequação (i) como equação: $5x_1 - 3x_2 - x_4 = 7$,

- a inequação (ii) como equação: $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$.

E continuamos o processo de resolução do problema pelo método escolhido.

Esses e outros casos que podem aparecer serão melhor exemplificados nos capítulos seguintes onde analisaremos alguns problemas e discutiremos, mais detalhadamente, os métodos apresentados até o momento.

A forma geral de um problema de otimização atende aos passos de resolução de problemas apresentado por Polya [2006], que podem ser resumidos em:

1. Entender o problema.

2. Criar uma estratégia para resolução.

3. Aplicar essa estratégia.

4. Verificar se a solução atende as condições do problema.

1.4.2 Forma padrão do problema de Otimização Linear

Consideremos, como Arenales and Darezzo [2015], que um problema de Otimização Linear pode ser escrito na forma padrão:

$$Minimizar\ Z(x) = \overrightarrow{c} \cdot x \quad \longrightarrow \quad (0)\ função\ objetivo$$

$$Sujeito\ a \begin{cases} A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{x} \geqslant \overrightarrow{0} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad (1)\ restrições\ do\ problema$$

Em (0), temos a função objetivo a ser minimizada, enquanto que em (1) as restrições do problema, em que a matriz $A_{m \times n}$ é a matriz dos coeficientes das variáveis de decisão, em geral com $n > m$, o vetor custo $\overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor linha, o vetor solução $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ um vetor coluna e $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ um vetor coluna com componentes não negativas.

Temos que:

- $\overrightarrow{c} = (\ c_1,\ c_2,\ ...,\ c_n)$ é o vetor custo.
- $\overrightarrow{x} = (\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)^t$ é o vetor das variáveis.
- $\overrightarrow{b} = (\ b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n)^t$ é o vetor dos termos independentes.
- $\overrightarrow{0} = (\ 0,\ 0,\ ...,\ 0)^t$ é o vetor cujos elementos são todos iguais a zero.

Sem perda de generalidade, consideramos que o conjunto formado pelas m linhas da matriz A é linearmente independente. Se tivermos linhas linearmente dependentes o sistema $Ax = b$ não tem solução ou tem equações que podem ser retiradas sem que a região factível se altere.

O conjunto de restrições de um problema de Otimização Linear pode conter desigualdades, igualdades ou ambas, mas sempre podemos escrevê-lo na forma padrão para aplicarmos o Método Simplex, que detalharemos no capítulo seguinte.

Quando o problema de Otimização Linear não está na forma padrão, para cada caso, temos técnicas para colocá-lo como segue:

- **Desigualdades** ($\leqslant$ *ou* $\geqslant$), elas podem ser transformadas em igualdades quando adicionamos ou subtraímos variáveis de folga ou excesso, respectivamente. Essas variáveis serão melhor definidas nos exemplos subsequentes.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_n \leqslant b \longrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} = b & Variável\ de\ folga \\ & ou \\ a_1 + a_2 + ... + a_n \geqslant b \longrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n - a_{n+1} = b & Variável\ de\ excesso \end{cases}$$

- **Termo independente**, $b < 0$, nesse caso basta multiplicar a restrição por (-1) e temos $b > 0$.

- **Variáveis livres**, são as variáveis que podem assumir valores positivos, negativos ou nulos, ou seja, são irrestritas de sinal. Indicamos no problema como x_k livre e podemos substituí-las pela diferença de duas variáveis não negativas x'_k e x''_k, isto é, $x_k = x'_k - x''_k$, em que $x'_k \geqslant 0$ e $x''_k \geqslant 0$.

- **Variável não positiva**, nesse caso basta substituí-la pela sua simétrica, ou seja, $x'_k = -x_k$, e substituir x_k por $-x'_k$ e temos $x'_k \geqslant 0$.

- **Problemas de maximização**, nesse caso também usamos a simetria, substituindo a função objetivo a ser maximizada por uma função objetivo a ser minimizada com sinal trocado, da seguinte forma:

  $Max \quad Z(x) = Min\ - Z(x)$

Aplicando essas técnicas conseguimos escrever o problema de Otimização Linear na forma padrão e prosseguimos com a solução pelo Método Simplex ou outro método de resolução de problemas de Otimização Linear.

Podemos resumir os passos da solução de problemas como na Figura 1.1:

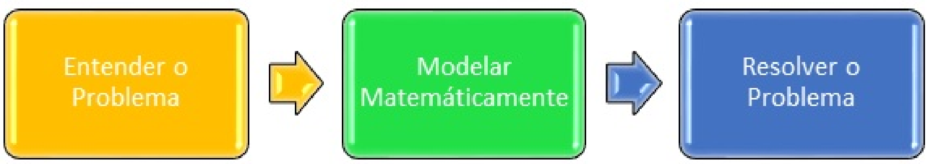


Figura 1.1: Passos para resolução de problemas.

1.4.3 Exemplo de modelagem de problema de Otimização Linear

Para entendermos melhor o processo de modelagem, nos apoiaremos em uma situação problema, que envolve consumo de combustíveis em carros flex. Essa mesma situação será abordada várias vezes com objetivo de entender o processo e fazer comparações.

> Em um determinado posto da cidade, a gasolina custa R$ 3,15 e o etanol custa R$ 1,95. Consideremos carros populares que fazem, com etanol, 9,1 km/l (cidade) e 9,6 km/l (estrada); se abastecidos com gasolina, as médias ficam em 13,1 km/l (cidade) e 14,3 km/l (estrada). Para facilitar as análises consideraremos que na mistura de combustíveis o consumo é diretamente proporcional à mistura e em situações ideais de manutenção e uso. Um carro popular tem tanque de combustível em média de 50 litros. Queremos percorrer a máxima quilometragem na estrada, com os R$ 120,00 que temos. Qual a melhor forma de abastecimento?

Analisando o problema percebemos que as variáveis de decisão, que controlam o objetivo, são a quantidade de litros de cada combustível. Chamaremos de x_1 a quantidade de litros de gasolina e de x_2 a quantidade de litros de álcool. Percebemos que toda situação está vinculada a essas grandezas. Aqui encontramos duas variáveis, mas vale lembrar de que podemos ter muitas outras em problemas reais.

Queremos andar à máxima quilometragem na estrada e sabemos que o rendimento do álcool na estrada é de 9,6 km/l e o de gasolina 14,3 km/l. Com essa informação, podemos escrever a nossa função objetivo, a qual queremos maximizar.

$Maximizar\ f(x_1, x_2) = 14,3x_1 + 9,6x_2.$

Identificada a função objetivo, devemos verificar as restrições do problema:

- Sabemos que no carro só cabem 50 litros de combustível, logo,

$$x_1 + x_2 \leqslant 50.$$

- O gasto com combustível não pode ultrapassar R$ 120,00. Assim,

$$3,15x_1 + 1,95x_2 \leqslant 120.$$

- A quantidade de combustível não pode ser negativa, ou seja,

$$x_1 \geqslant 0 \quad e \quad x_2 \geqslant 0$$

.

Ressaltadas as restrições e a função objetivo, podemos escrever o modelo, em que todos os valores que atendem ao sistema são soluções factíveis (possíveis) do problema, temos de encontrar a melhor entre elas (solução ótima).

$$Maximizar\ f(x_1, x_2) = 14,3x_1 + 9,6x_2\ (2)$$

$$Sujeito\ a\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 50 & (3) \\ 3,15x_1 + 1,95x_2 < 120 & (4) \\ x_1 \geqslant 0 & (5) \\ x_2 \geqslant 0 & (6) \end{cases}$$

A equação (2) representa a função objetivo que está sujeita as restrições (3), (4), (5) e (6) e todas são funções lineares, o que implica em atender a três propriedades básicas: **proporcionalidade, aditividade e certeza.**

Como atende as três propriedades, o conjunto de equações e inequações representa o modelo matemático de Otimização Linear e sua resolução consiste em encontrar a melhor solução, que pode ser obtida por métodos gráficos ou algébricos.

1.5 Alguns Conceitos Preliminares

Para compreendermos melhor os métodos de resolução de problemas de Otimização Linear vamos rever alguns conceitos. Caso seja necessário podemos aprofundar na literatura disponível sobre o assunto, das quais elencamos:
Steinbruch and Winterle [2006], Boldrini et al. [1986],
Arenales and Darezzo [2015], Arenales et al. [2007].

1.5.1 Vetor

Vetor é um substantivo masculino que significa condutor ou portador. Na matemática representa o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes. É o conjunto de n segmentos orientados que dependem de um sistema de coordenadas n-dimensionais e que se transformam segundo leis bem determinadas quando se muda o sistema.

Para entendermos melhor, consideraremos:

- Os pontos $A = (-3, -2)$, $B = (-1, 1)$, $C = (2, -1)$, $D = (4, 2)$, $E = (2, 2)$, $F = (4, 5)$, $G = (-3, 2)$ e $H = (-1, 5)$
- E os segmentos orientados: AB, CD, EF e GH.

Representando esses segmentos no plano cartesiano na Figura, temos:

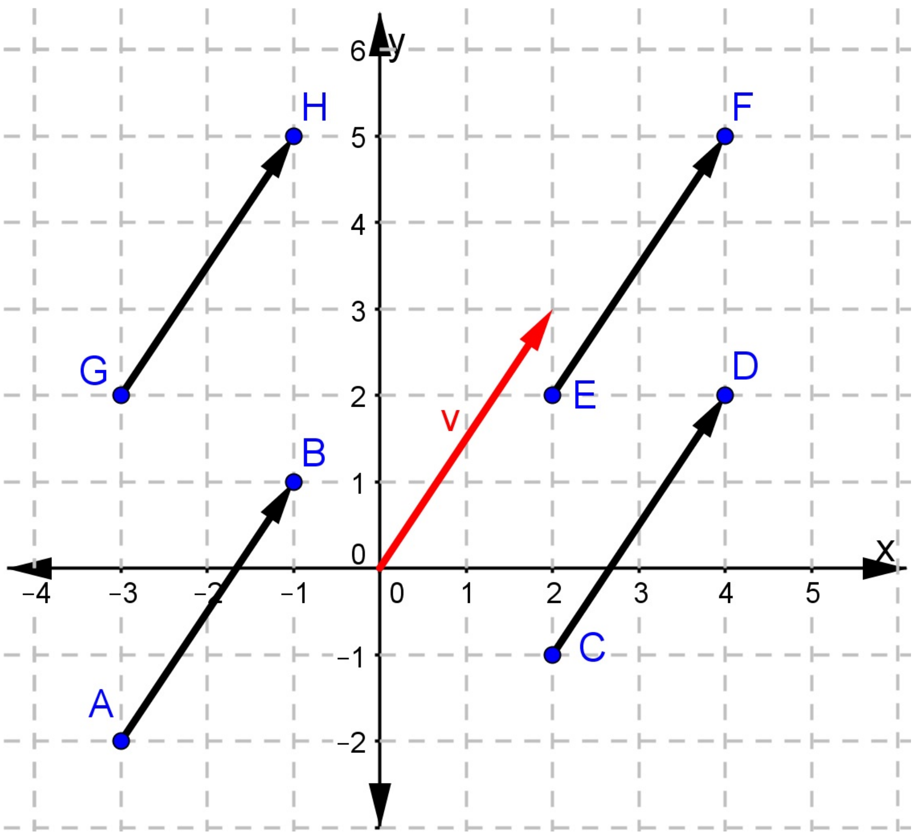


Figura 1.2: Segmentos e vetores no Plano Cartesiano

Chamamos de segmentos equipolentes os que possuem a mesma direção, comprimento e sentido, então; AB, CD, EF e GH, são equipolentes.

$$AB \sim CD \sim EF \sim GH$$

Se indicarmos por v este conjunto, simbolicamente podemos escrever:

$\overrightarrow{v} = AB \sim CD \sim EF \sim GH$, onde v representa qualquer segmento equipolente a ele.

Identificamos o vetor $\overrightarrow{AB}$ como $B - A$ e chamamos de $\overrightarrow{v}$, assim:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 1) - (-3, -2) = (2, 3) \iff \overrightarrow{v} = (2, 3).$$

Genericamente no plano cartesiano representamos um vetor como $\overrightarrow{v} = (x, y)$.

Assim, um vetor $\overrightarrow{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados todos equipolentes entre si. Assim, um segmento determina um conjunto que é o vetor $\overrightarrow{v}$, e qualquer um desses representantes determina o mesmo vetor. Portanto, com origem de cada ponto no espaço, podemos visualizar um representante de um vetor. Usando um pouco mais nossa capacidade de generalização, se considerarmos todos os infinitos segmentos orientados de origem comum, estaremos caracterizando, através de representantes, a totalidade de vetores no espaço. Consequentemente, todos os vetores se acham representados naquele conjunto que imaginamos.

Sem perda de generalidade representaremos os vetores $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ como $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$.

1.5.2 Vetor Gradiente

Em uma função de múltiplas variáveis, chamamos de **vetor gradiente** o vetor que indica o sentido e a direção na qual ocorre o crescimento dessa quando alteramos o valor de uma de suas variáveis. Nas funções lineares o vetor gradiente é obtido usando como coordenadas os coeficientes das variáveis da função. Esses coeficientes controlam os incrementos na função provocando sua alteração.

Considerando a função de duas variáveis $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$, os coeficientes de x_1 e x_2 são as coordenadas do vetor gradiente da função, assim:

$$\overrightarrow{n} = (c_1\,;\,c_2) \implies vetor\ gradiente\ da\ função.$$

Seja (a, b) um vetor qualquer fixo na direção e sentido do vetor gradiente $\overrightarrow{n}$, e r a reta perpendicular à direção do vetor gradiente passando por (a, b). E considerando nas retas, para simplificação de registro, $x = x_1$ e $y = x_2$, como convencionado na geometria analítica plana, observamos, como na Figura 1.3.

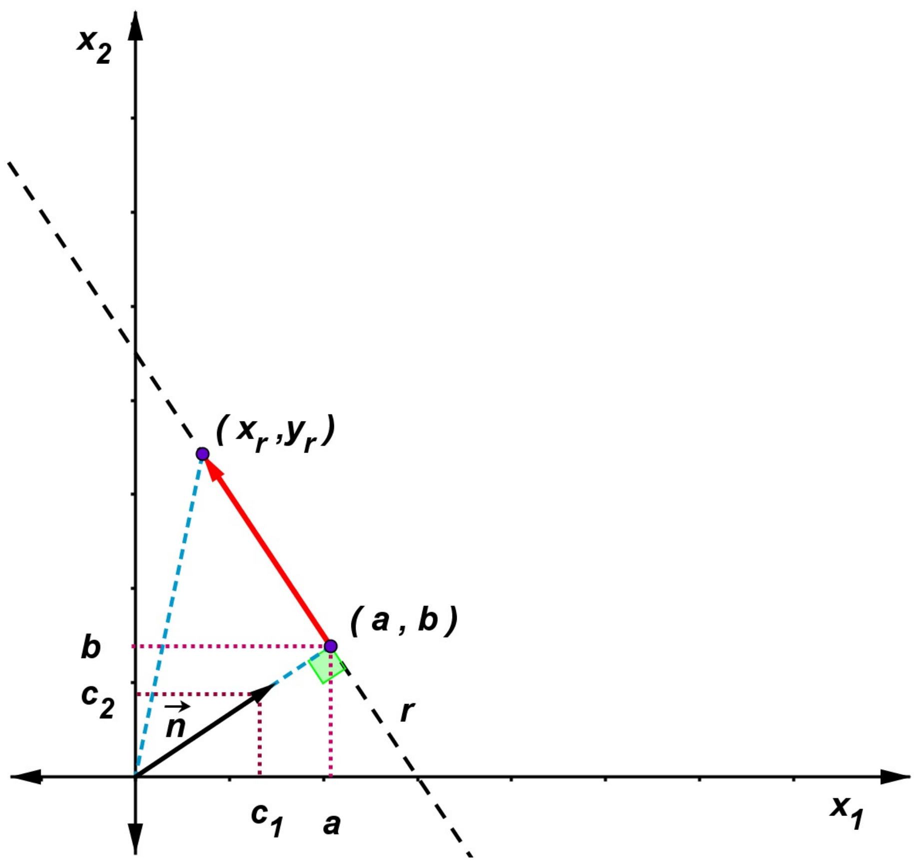


Figura 1.3: Vetor gradiente $\overrightarrow{n}$ e reta r

Assim, $r:\ (x,\,y) = (a,\,b) + \lambda(-c_2,\,c_1)$, com $(-c_2,\,c_1)$ vetor perpendicular ao vetor gradiente.

Isso mostra que qualquer ponto na reta r é dado por $(-c_2,\,c_1)$, com $(-c_2,\,c_1)$ perpendicular ao vetor gradiente$\overrightarrow{n}$.

Logo, para qualquer ponto na reta r temos:

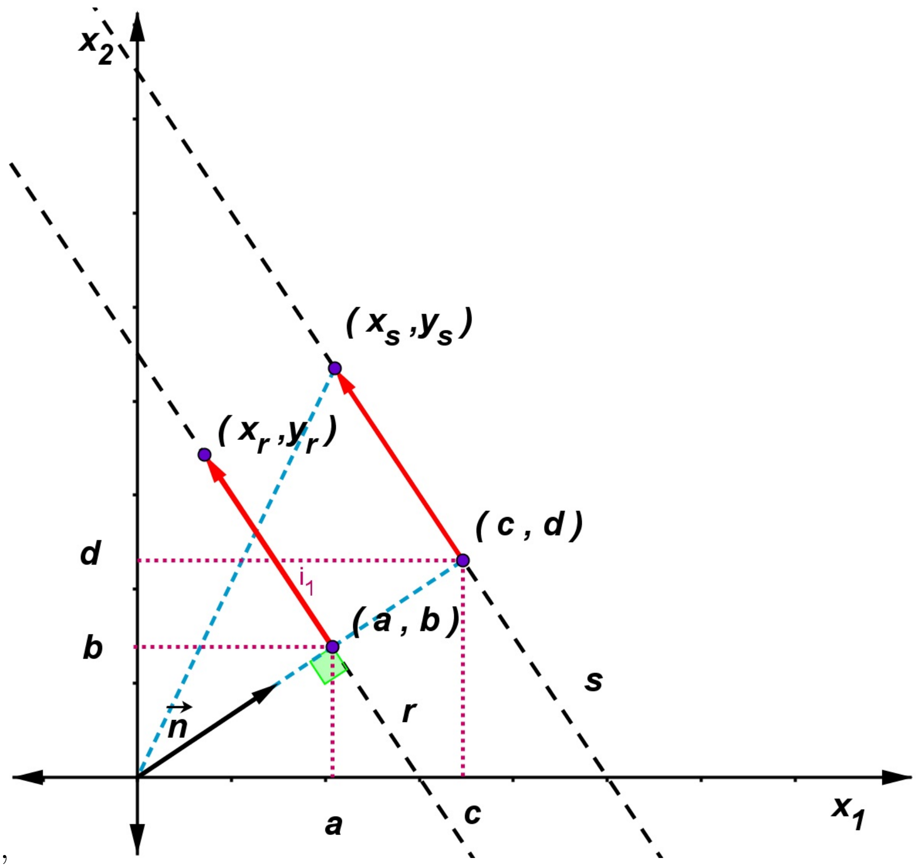
$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$f(x_1, x_2) = c_1(a - c_2\lambda) + c_2(b + c_1\lambda)$$

$$f(x_1, x_2) = c_1a + c_2b.$$

Portanto, para todo (x, y) em r a função $f(x_1, x_2)$ é constante e igual a $c_1a + c_2b$. (depende apenas de a e de b)

Assim, se tivermos (c, d) na direção e sentido do vetor gradiente $\overrightarrow{n}$ com $c > a$ e $d > b$ e $s: \ (x,\, y) = (c,\, d) + \lambda(-c_2,\, c_1)$, como na Figura 1.4.



,

Figura 1.4: Retas r e s representando $f(x_1, x_2)$

De forma análoga à reta r, na reta s temos:

$$f(x_1, x_2) = c_1c + c_2d$$

Logo, para todo (x, y) em s a função $f(x_1, x_2)$ é constante e igual a $c_1c + c_2d$. (depende apenas de c e de d)

Como $c_1c + c_2d > c_1a + c_2b$ o valor na reta s para $f(x_1, x_2)$ é maior do que o valor na reta r.

Dessa forma, a medida que vamos aumentando o valor da função $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ a linha que representa a função f é perpendicular ao vetor gradiente $\overrightarrow{n}$ e consequentemente, paralela a linha anterior. Com isso concluímos que a função cresce na direção do vetor gradiente $\overrightarrow{n}$.

Sem perda de generalidades, definimos o vetor gradiente $\overrightarrow{n}$ de uma função linear,

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \;\ldots\; + x_n,$$

como sendo o vetor perpendicular na direção do crescimento da função, escrito como:

$$\overrightarrow{n} = (c_1,\, c_2,\, c_3,\, \ldots,\, c_n).$$

1.5.3 Conjuntos convexos

Chamamos de **conjunto convexo** uma variedade linear de um espaço vetorial. Uma região no espaço em que se pegarmos dentro dela dois pontos quaisquer e traçarmos um segmento de reta, ele estará contido na região.

Consideremos S um subconjunto em um espaço vetorial V. Se pegarmos dois pontos quaisquer $A \subset S$ e $B \subset S$ e traçarmos o segmento AB, se $AB \subset V$ temos um conjunto complexo. Vejamos, na Figura 1.5. a representação em um espaço vetorial bidimensional.

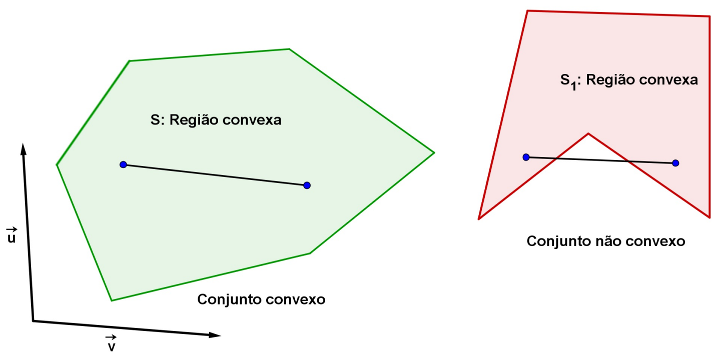


Figura 1.5: Regiões em um espaço vetorial bidimensional

Para quaisquer pontos A e B dentro da região S_1, o segmento AB formado estará todo dento de S_1. Logo temos um conjunto convexo. Na região S_2, como ilustrado na Figura 1.5, podemos traçar o segmento AB com partes fora da região. Podemos estender a ideia, sem perda de generalidades para um espaço vetorial n-dimensional.

1.6 Solução de problemas de Otimização Linear

Resolver um problema de Otimização Linear consiste em dentre as soluções factíveis do problema encontrar, quando existir, a solução ótima. O tipo de solução do problema vai depender de como é a região de factibilidade, podendo ser inexistente, única ou infinitas soluções.

1.6.1 Tipos de solução

Das Figuras 1.6 até 1.15, observaremos os diferentes tipos soluções para um problema de Otimização Linear de duas variáveis com função objetivo, $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$, no entanto, as mesmas soluções aparecem em problemas com mais variáveis.

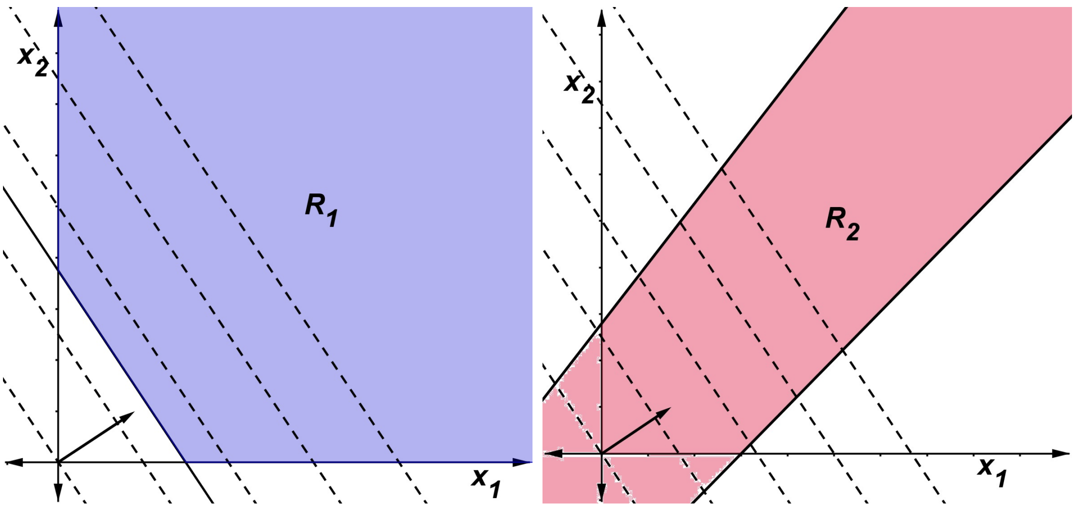


Figura 1.6: Regiões ilimitadas e sem vértice

- Em R_1 a função $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ assume o valor mínimo em toda a reta que limita R_1 e não assume valor máximo.

- Em R_2 a função $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ não assume nem o valor mínimo e nem valor máximo.

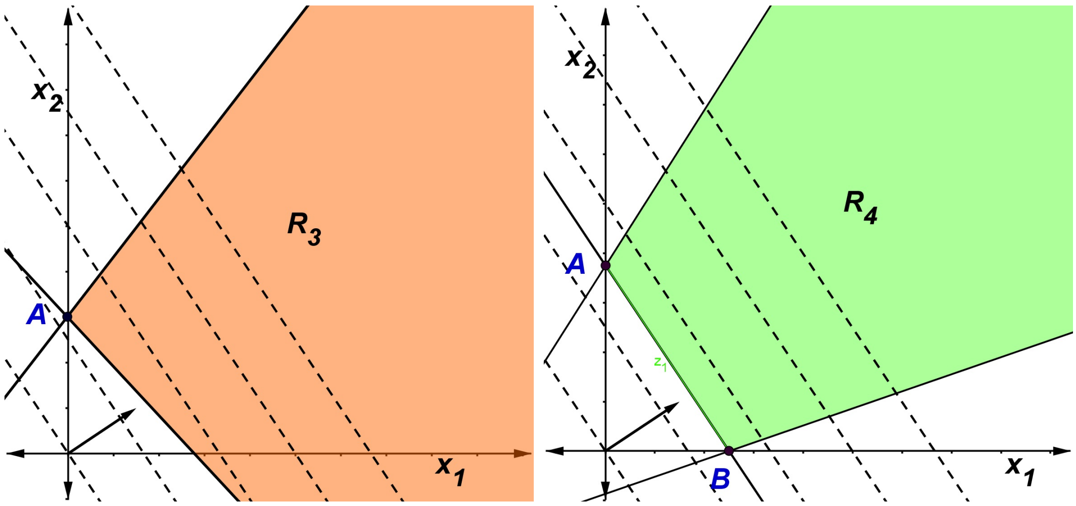


Figura 1.7: Regiões ilimitadas e com vértice

- Em R_3 a função $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ não assume valor máximo e tem o valor mínimo em A.

- Em R_4 a função $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ assume o valor mínimo nos vértices A e B, portanto assume valor mínimo em todo segmento AB, e não assume valor máximo.

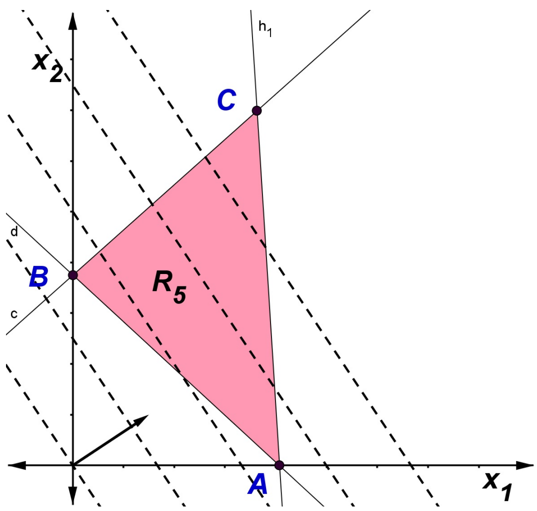


Figura 1.8: Regiões limitadas com pelo menos três vértices

- Em R_5 a função $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ assume o valor mínimo no vértice B e assume valor máximo no vértice C.

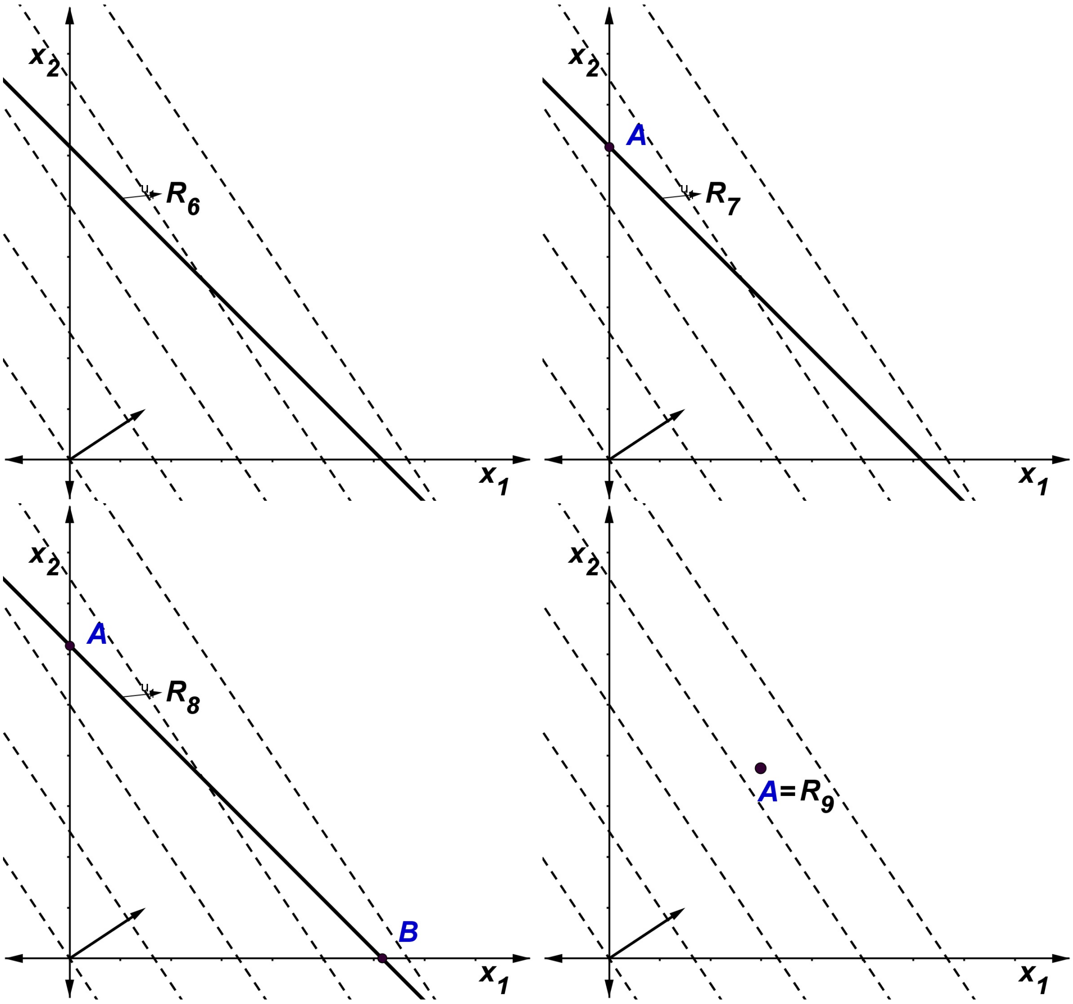


Figura 1.9: Casos degenerados

- Em R_6 a função $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ não assume nem o valor mínimo e nem valor máximo, pois a região factível é toda a reta.

- Em R_7 a função $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ assume valor mínimo no vértice A e não assume o valor máximo.

- Em R_8 a função $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ assume o valor máximo no vértice B e assume valor mínimo no vértice A.

- Em R_9 a função $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ tem o valor mínimo igual a $f(A)$.

1.6.2 Teorema Fundamental de Otimização linear

Consideremos um problema de Otimização linear escrito na forma padrão,

$$Minimizar\ Z(x) = \overrightarrow{c} \cdot x$$

$$Sujeito\ a \begin{cases} A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{x} \geqslant \overrightarrow{0} \end{cases}$$

onde:

- A é uma matriz $(m \times n)$ com $m > n$, que chamamos matriz das restrições,
- $\overrightarrow{c} = (c_1,\ c_2,\ ...\ ,\ c_n)$, é o vetor gradiente n da função objetivo, o qual também pode ser chamado de vetor custo,
- $\overrightarrow{x} = (x_1,\ x_2,\ ...\ ,\ x_n)^t$, é o vetor das váriáveis que, quando se encontra em um vértice da região de factibilidade, chamaremos de **solução básica viável**.

Temos que:

1. A função objetivo assume necessariamente uma valor máximo e um valor mínimo quando o conjunto convexo (região factível) for limitado. Se existir uma solução viável, existe uma solução básica viável.

2. Os vértices da região poliedral (conjunto convexo) desempenham um papel fundamental na procura de máximos e mínimos. Se existir uma solução viável ótima, ela estará num vértice da região poliedral.

Os pontos máximos ou mínimos da função objetivo serão procurados pelo deslocamento das curvas de nível [4] da função objetivo na direção do vetor gradiente para maximizar, e no sentido contrário para minimizar, percorrendo a região de factibilidade. Esse fato é fundamental para a resolução de problemas de Otimização Linear.

[4]Curvas de Nível são as linhas paralelas que representam a transição da função objetivo perpendicularmente no sentido do vetor gradiente.

Lema 1.1. *Seja* $f(x_1,\ x_2,\ ...\ x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 +\ ...\ + c_nx_n$ *e seja um ponto* P *interior a um segmento* AB *do* R^n*, isto é,* $P = \lambda + (1-\lambda)B$*,* $0 < \lambda < 1$*.*

Então teremos $f(A) \leqslant f(P) \leqslant f(B)$ *ou* $f(B) \leqslant f(P) \leqslant f(A)$*.*

Demonstração. Como $P = \lambda + (1-\lambda)B$ e $f(x_1,\ x_2,\ ...\ x_n)$ é uma transformação afim, temos:

$f(x) = L(x) + b$, onde $L(x) = L(x_1\ ,\ ...\ ,\ x_n) = c_1x_1 +\ ...\ + c_nx_n$ é linear,

$f(P) = L(P) + b = L(\lambda A + (1-\lambda)B) + b = \lambda L(A) + (1-\lambda)L(B) + b.$

Suponha $f(A) \leqslant f(B) \longrightarrow L(A) \leqslant L(B)$.

Como $f(P) = \lambda L(A) + (1-\lambda)L(B) + b$ temos

$\lambda L(A) + (1-\lambda)L(A) + b \leqslant f(P) \leqslant \lambda L(B) + (1-\lambda)L(B).$

$L(A) + b \leqslant f(P) \leqslant L(B) + b$

Portanto:
$f(A) \leqslant (P) \leqslant f(B)$

De forma análoga, se tivermos$f(B) \leqslant f(A)$ mostramos que $f(B) \leqslant (P) \leqslant f(A)$. □

Uma consequência deste resultado é o lema a seguir.

Lema 1.2. *Seja* $f(x_1,\ ...\ ,\ x_n) = c_1x_1 +\ ...\ + c_nx_n$*. Se dentre os valores que* $f(x_1,\ ...\ ,\ x_n)$ *assumir num segmento* AB *do* R^n*, o valor máximo (mínimo) for assumido num ponto* P *interior desse segmento, então* $f(x_1,\ ...\ ,\ x_n)$ *será constante em* AB*.*

Esse lema pode ser provado da mesma forma do anterior, o que é um bom exercício ao leitor. Pode ser visto em Goldbarg and Luna [2005].

Observando os lemas 1 e 2 e a natureza da região poliedral convexa, podemos enunciar o principal resultado da Otimização Linear.

Teorema Fundamental

Seja $f(x_1,\ x_2,\ ...\ x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 +\ ...\ + c_nx_n + b$ definida num conjunto convexo A do R^n. Suponha que $f(x_1,\ ...\ ,x_2)$ assuma um valor máximo, ou valor mínimo, nesse conjunto. Então, se A possui vértices, o valor máximo, ou valor mínimo, será assumido num vértice.

Demonstração. Suponhamos, para regiões A do R^2, que o valor máximo, ou valor mínimo, de $f(x_1,\ x_2)$ seja assumida num ponto P de A.

Considerando todas as regiões possíveis do R^2, apresentadas em 1.6.1, podemos ter:

P é um vértice, já estando provado o teorema.

P está numa aresta. $f(x_1,\ x_2)$ assumirá este valor máximo, ou valor mínimo, em toda a aresta, veja lema 1.2. Como a região A possui vértices esta aresta conterá um vértice v obrigatoriamente. Portanto $f(P) = f(v)$.

P está no interior de A. Neste caso,$f(x_1,\ x_2)$ será constante em toda região A.

Seja Q um outro ponto interior de A. Como A é um conjunto convexo, o segmento QP está contido em A; além disso, como P é interior, podemos considerar um prolongamento QQ' desde que ainda esteja contido em A. Do lema 1.2 segue que $f(x_1,\ x_2)$ é constante em QQ' e, portanto, $f(P) = f(Q)$.

A prova deste teorema vai envolver um número maior de possibilidades: o ponto inicial de máximo ou mínimo poderá estar:

Num vértice.

Numa aresta. Nesse caso, o máximo ou mínimo será assumido em toda aresta que é subconjunto de dimensão 1;

Numa face. Neste caso, o máximo ou mínimo será assumido em toda a face que é um subconjunto de dimensão 2;

Numa região contida em A. neste caso o máximo ou mínimo será assumido em toda região que é um subconjunto de dimensão n;

Num ponto interior da região A. neste caso, a função será constante em toda a região.

Pode-se mostrar que em todos estes casos, quando a região tem vértices, conseguimos um vértice v onde a função assume seu máximo ou mínimo,

$f(v) = f(P)$. □

Observação. É este teorema que permite, nos casos em que, pela natureza da função, já sabemos que ela assume máximo ou mínimo, encontrá-los apenas determinando seus valores nos vértices da região de restrição (conjunto convexo).

Como exemplo podemos citar o problema da seção 1.4.3, $f(x_1,\ x_2) = 14,3x_1 + 9,6x_2 \geqslant 0$ pois: $x_1 + x_2 \leqslant 50$, $3,15x_1 + 1,95x_2 \leqslant 120$, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

$f(x_1,\ x_2)$ é limitada por um polígono no plano, o que nos permite concluir que ela assumirá mínimo e máximo na região que é fechada. Para encontrá-lo, bastará portanto calcular o valor da função nos vértices da região.

Uma situação onde, para qualquer função objetivo, temos necessariamente máximo e mínimo acontece quando a região A for limitada. Note que ao varrermos o R^n por hiperplanos[5] perpendiculares ao vetor gradiente da função objetivo, sempre tocaremos a região A uma primeira e uma última vez. Um conjunto convexo contém vértices, o que nos permite escrever o teorema fundamental da Otimização Linear.

Teorema 1.3. *Seja* $f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \ldots\ + c_nx_n$ *definida em um conjunto convexo limitado A. Então* $f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n)$ *assume seus valores máximo e mínimo nos vértices de A.*

Resolver problemas de Otimização Linear é buscar dentro das soluções factíveis a melhor solução viável, que segundo o teorema fundamental se encontra em um dos vértices dessa região.

[5] Se $N = (a_1,\ \ldots\ ,\ a_n) \neq 0$, então H é um hiperplano de R^n. Para $n = 3$ os hiperplanos são planos e para $n = 2$ os hiperplanos são retas.

Capítulo 2

Resolução de Problemas de Otimização Linear

Nesse capítulo discutiremos os principais métodos de resolução em problemas de Otimização Linear, como podemos analisar matematicamente as soluções de um problema e como representa-las algebricamente e graficamente.

Após termos entendido a situação problema e a representarmos matematicamente, devemos escolher um método de resolução, executar a estratégia prevista para chegarmos a solução e posteriormente verificar se ela atente ou não as condições apresentadas. No exemplo do consumo de combustível, do Capítulo 1, modelamos o problema matematicamente e o escrevemos na forma padrão de problemas de Otimização. Nesse tipo de problema podemos reescrever as técnicas de resolução de Polya [2006] como: entendimento do problema, modelagem matemática, escolha do método de resolução, execução do método de resolução, verificação da solução e conclusão. Podemos ilustrar essa sequência como na Figura 2.1.

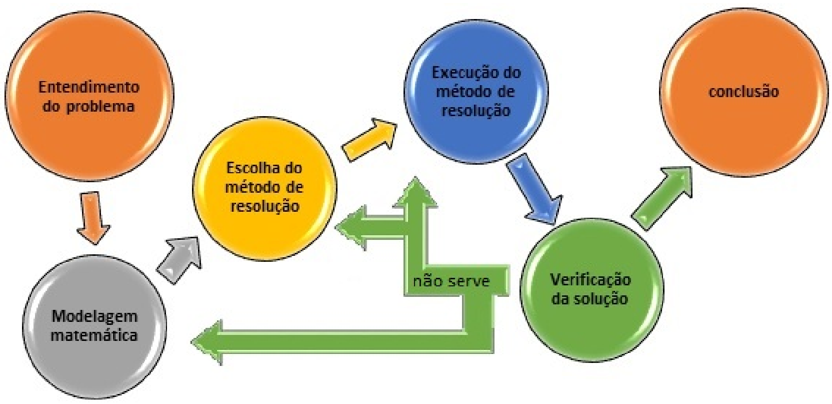


Figura 2.1: Resolução de problemas de Otimização

Para a resolução de problemas Otimização Linear podemos elencar vários métodos. Aqui destacaremos as seguintes: tabulação das informações, método gráfico, método algébrico, Método Simplex e uso do computador.

2.1 Tabulação das informações

Entre os vários caminhos podemos construir tabelas com as soluções viáveis e tentar identificar a melhor solução, ou seja, buscar a solução ótima. Apesar de trabalhosa esta é uma estratégia possível, mas para problemas com muitas variáveis pode-se tornar muito complicado ou mesmo impossível.

Para entender melhor o comportamento das grandezas envolvidas no problema que estamos discutindo, construiremos uma tabela de múltiplas entradas. Dessa forma, analisaremos a interferência das variáveis na função objetivo e quais das soluções obtidas são viáveis, ou seja, atendem as restrições do problema, e qual atende da melhor maneira o objetivo proposto.

Consideremos o exemplo do consumo de combustível:

$$Maximizar\ f(x_1, x_2) = 14,3x_1 + 9,6x_2 \ (2)$$

$$Sujeito\ a \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 50 & (3) \\ 3,15x_1 + 1,95x_2 < 120 & (4) \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Na Tabela 2.1, temos nas colunas 1 e 2 as variáveis de decisão, quantidade de gasolina e álcool, na coluna 3 a Função Objetivo (2), que representa o percurso realizado pelo veículo em quilômetros, na coluna 4 a restrição (3), que representa o volume do tanque em litros, na coluna 5 a restrição (4), que representa o valor disponível, em Reais e na coluna 5 o tipo de solução obtida (viável, inviável).

Gasolina	Álcool	Função Objetivo (0)	Restrição (1)	Restrição (2)	Tipo de Solução
x_1	x_2	$14,3x_1 + 9,6x_2$	$x_1 + x_2$	$3,15x_1 + 1,95x_2$	
0	50	480	50	97,50	viável
50	0	715	50	157,50	inviável
25	25	597,5	50	127,50	inviável
30	0	429	30	94,50	viável
35	0	500,5	35	110,25	viável
38	0	543,4	38	119,70	viável
30	13	553,8	43	119,85	viável
35	5	548,5	40	120,00	viável
31	11	548,9	42	119,10	viável
28	16	554	44	119,40	viável
23	24	559,9	47	119,25	viável
20	**29**	**564,4**	**49**	**119,55**	**viável (Melhor)**

Tabela 2.1: Soluções do problema

Completando e analisando a Tabela 2.1, podemos nos encaminhar a uma solução do problema, em nosso caso como maior percurso, que chamamos de solução ótima. O método de completar tabelas nos encaminha a uma solução, mas pode se tornar muito longo e, às vezes, inviável, conforme a quantidade e os tipos de variáveis do problema. O tamanho da tabela dependerá de quem está resolvendo a situação e de seu bom senso. Aqui cabe algumas escolhas do tipo: vamos usar decimal ou apenas valores inteiros. Nossas decisões interferem na qualidade da resposta final.

- Pela Tabela 2.1, temos como solução 20 litros de gasolina e 29 litros de álcool, percorrendo 564km, que dentro dos valores testados é o máximo percurso.

Essa tabela poderia ser ampliada com facilidade usando uma planilha de cálculo como o Excel ou outras equivalentes. Com o uso de planilhas podemos obter rapidamente uma maior quantidade de resultados na função objetivo, obtendo uma solução cada vez melhor.

No Excel por exemplo faríamos com facilidade o cálculo para a primeira coluna com x_1, variando de 0 até $50l$ e na segunda coluna x_2, variando de $50l$ até 0. Enquanto na variável x_1 acrescentamos uma unidade, na variável x_2 retiramos. Essa verificação permite uma melhor compreensão do comportamento da função objetivo quando ocorre a variação de suas variáveis.

Na busca de soluções para o problema podemos usar também gráficos e métodos algébricos, que com o uso de algoritmos e softwares, favorecem a resolução do problema com maior agilidade e melhor precisão na resposta.

2.2 Método Gráfico

O método gráfico é bem útil na resolução de problemas de Otimização Linear com duas variáveis e nos permite observar o que está ocorrendo no problema e como é o comportamento das restrições e da função objetivo. Os gráficos podem ser feitos manualmente ou com o uso de programas de computador, que nos permitem uma visualização de maior precisão e qualidade.

Para ilustrar esse método, vamos observar como fica nosso problema exemplo em gráficos construídos com uso do GeoGebra, programa livre para fins educacionais, encontrado em GeoGebra [2016],<`https://www.geogebra.org/`>, observando passo a passo as restrições do problema e o comportamento da função objetivo.

Inicialmente, representaremos a restrição de não negatividade das variáveis, colocando no eixo horizontal a variável x_1 e no vertical x_2.

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0 & horizontal \\ x_2 \geqslant 0 & vertical \end{cases}$$

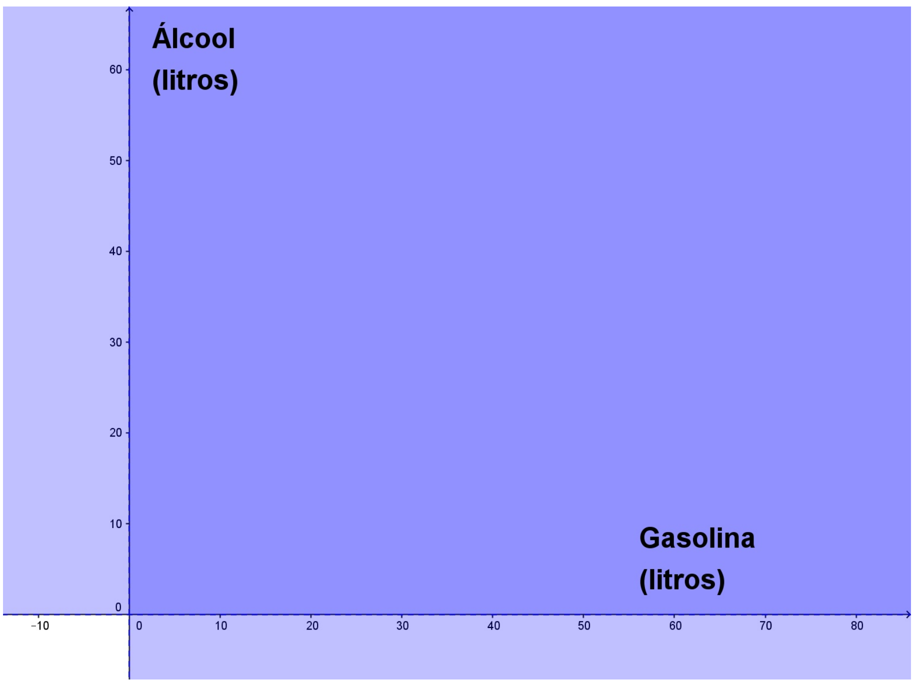


Figura 2.2: Restrições de não negatividade no problema de consumo de combustíveis

A região mais escura, na Figura 2.2, representa a interseção das duas restrições. Agora colocaremos no mesmo gráfico a restrição da capacidade do tanque de combustível, $x_1 + x_2 \leqslant 50$.

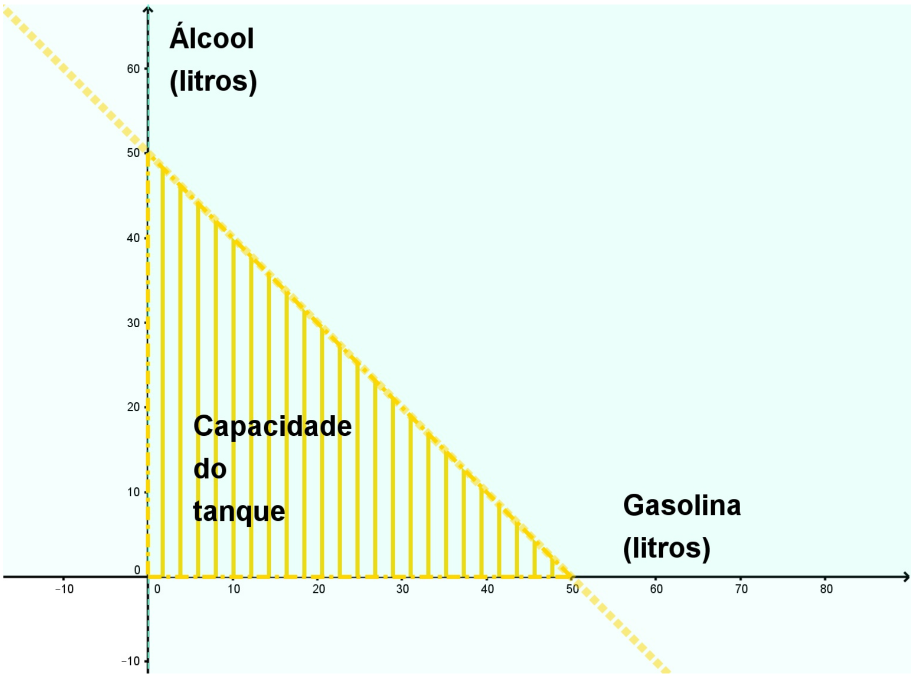


Figura 2.3: Restrição de capacidade do tanque no problema de consumo de combustíveis

A linha pontilhada, na Figura 2.3, limita a capacidade do tanque. A região preenchida com traços verticais no gráfico representa a união das restrições de não negatividade e capacidade do tanque. Vamos inserir agora a última restrição que é a do valor de abastecimento: $3,15x_1 + 1,95x_2 \leqslant 120$.

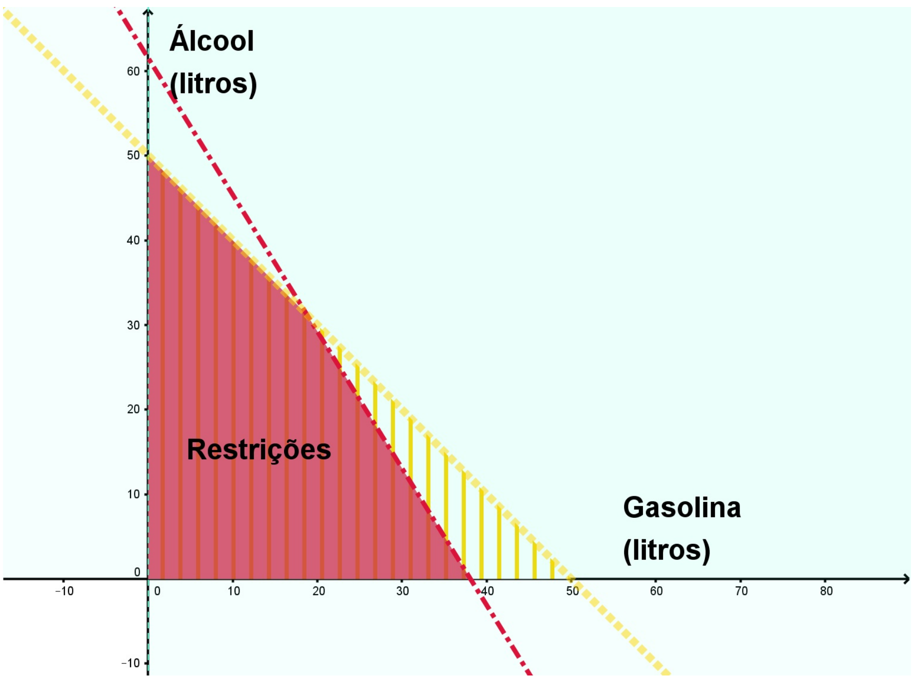


Figura 2.4: Restrição do valor a ser gasto no problema de consumo de combustíveis

A região abaixo da linha traço e ponto, da Figura 2.4, representa o conjunto de pontos que satisfaz a restrição de valor na igualdade e o polígono formado pela interseção de todas as regiões é a região de factibilidade, onde as variáveis atendem a todas as restrições ao mesmo tempo, ou seja, são as soluções do problema.

A função objetivo, *maximizar* $f(x_1, x_2) = 14,3x_1 + 9,6x_2$, busca o percurso máximo.

Vamos representar alguns desses percursos no gráfico das restrições:

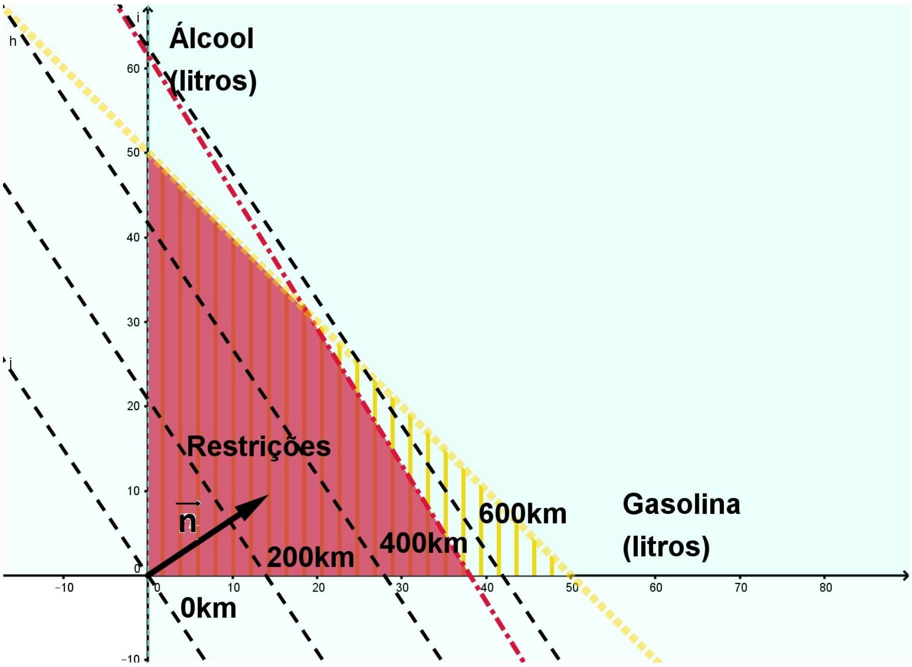


Figura 2.5: Curvas de Nível da função objetivo do problema de consumo de combustíveis

Representamos no gráfico da Figura 2.5, em linhas tracejadas, as Curvas de Nível : $14,3x_1 + 9,6x_2 = 0$, $14,3x_1 + 9,6x_2 = 200$, $14,3x_1 + 9,6x_2 = 400$ e $14,3x_1 + 9,6x_2 = 600$, relacionadas a função objetivo. Dessa forma, percebemos que a melhor solução está na interseção das retas que delimitam as restrições de capacidade do tanque e valor de abastecimento. Percorrendo a região de factibilidade com as curvas de nível, no sentido do vetor gradiente para problemas de máximo e no sentido oposto para os de mínimo, até tocar o último ponto da região de factibilidade encontramos o ponto A no gráfico da Figura 2.6.

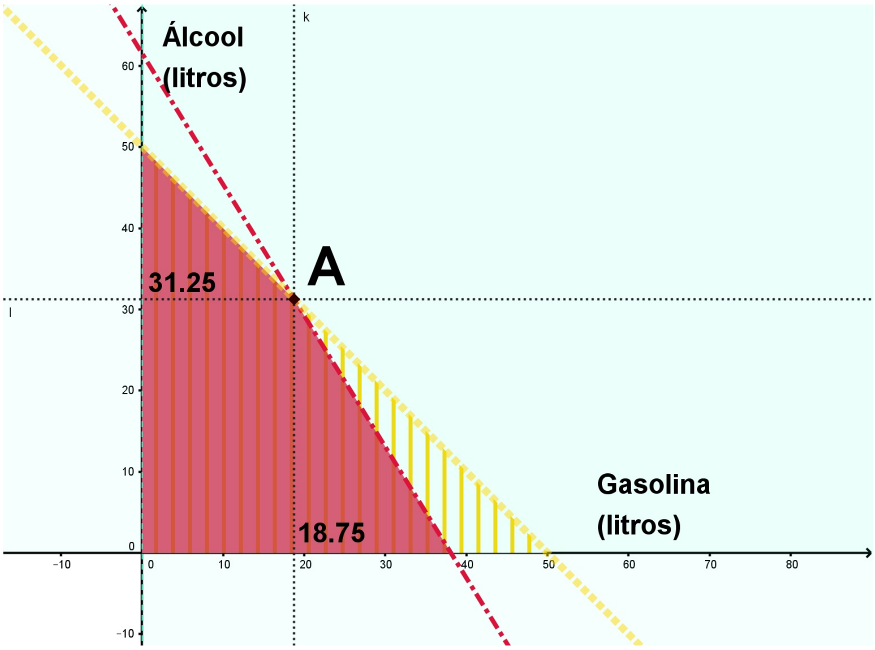


Figura 2.6: Solução ótima do problema de consumo de combustíveis

Na representação gráfica, as curvas de nível percorrem a região factível atingindo o polígono que delimita essa região, dessa forma podemos observar, no gráfico da Figura 2.7, que a solução ótima encontra-se em um dos vértices desse polígono. O ponto A de coordenadas $x_1 = 18,75$ e $x_2 = 31,25$ indica a melhor solução do problema e nos permite percorrer $14,3 \times 18,75 + 9,6 \times 31,25 = 568,125\,km$.

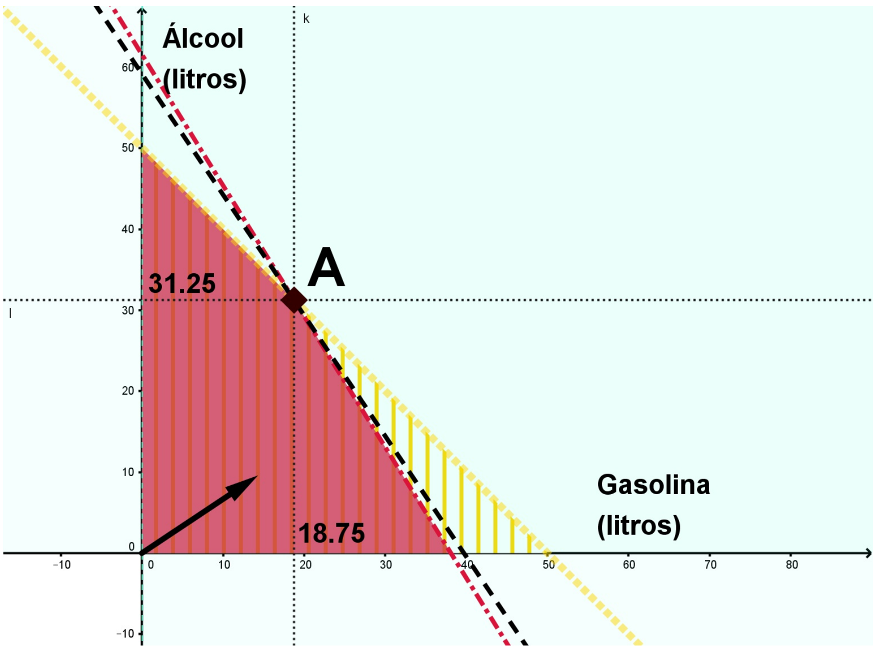


Figura 2.7: Solução ótima do problema de consumo de combustíveis com curva de nível da função objetivo

Percebemos uma diferença entre a solução ótima obtida na seção 2.2 usando tabela : $x_1 = 20$ e $x_2 = 29$ percorrendo $564km$ e a solução gráfica que foi $x_1 = 18,75$ e $x_2 = 31,25$ percorrendo $568,125km$. Isso se deve a só usarmos valores inteiros na tabela, que mesmo assim não se distanciou tanto uma resposta da outra.

Podemos ainda nos apropriar de métodos algébricos e analíticos para resolver esse tipo de problema e até mesmo mesclar mais de um método para um melhor entendimento.

2.3 Métodos Algébricos de Otimização Linear

Resolver um problema algebricamente consiste em nos apropriarmos dos registros matemáticos e de algoritmos na busca da melhor solução da situação a ser enfrentada. Temos de entender a matemática envolvida e manipularmos as informações.

Continuando com o problema do consumo de combustível, temos a seguinte situação:

$$\text{Maximizar: } z = f(x_1, x_2) = 14,3x_1 + 9,6x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 50 \\ 3,15x_1 + 1,95x_2 < 120 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

onde z é o percurso em quilômetros, x_1 e x_2 o volume de gasolina e álcool, respectivamente.

Nesse problema em específico, se nos apropriarmos das observações na resolução gráfica, percebemos que a melhor solução está na interseção das retas limites das restrições de volume ($x_1 + x_2 = 50$) e de valor ($3,15x_1 + 1,95x_2 = 120$) e que a função objetivo ($z = 14,3x_1 + 9,6x_2$) deve passar por esse ponto, vértice do polígono da região factível. Dessa forma, a solução do problema é a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 50 & (i) \\ 3,15x_1 + 1,95x_2 = 120 & (ii) \end{cases}$$

Esse sistema linear tem solução relativamente simples e pode ser resolvido por qualquer um dos métodos de solução de sistemas. Nesse caso, resolveremos por substituição:

- Da equação (i) temos:

$$x_1 = 50 - x_2$$

- Substituindo x_1 na equação (ii) temos:

$$3,15 \cdot (50 - x_2) + 1,95x_2 = 120$$

- Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação passamos a ter:

$$157,5 - 3,15x_2 + 1,95x_2 = 120$$

- Retirando 157,5 nos dois membros da igualdade, juntando os termos semelhantes e multiplicando a equação toda por -1 obtemos:

$$1,2x_2 = 37,5$$

- Dividindo os dois membros da equação por 1,2 descobrimos:

$$x_2 = 31,25$$

- Substituindo na equação (i) observamos:

$$x_1 = 18,75$$

- Usando os valores das variáveis na função objetivo, concluímos:

$$z = 568,125km$$

Temos então como solução ótima do problema 31,25 litros de álcool e 18,75 litros de gasolina, que é a mesma resposta obtida no método gráfico.

Poderíamos ter resolvido esse sistema pelo método do escalonamento de Gauss ou pelo método de Cramer e chegaríamo ao mesmos resultado. É importante ressaltar que poderíamos ter mais variáveis ou não ter a visualização gráfica, tornando-se necessário outro tipo de algoritmo de resolução.

Ampliando a ideia de resolução de problemas de otimização, pensando também em problemas com mais variáveis, algoritmos de resolução de sistemas e métodos computacionais se colocam como ferramentas importantes no tratamento desses tipos de situações. Continuaremos em nosso problema exemplo para descrevermos o método simplex analítico e a solução por computador com o auxílio do Excel Solver.

2.4 Método Simplex

O método gráfico e a utilização de resolução de sistemas como descrito anteriormente só podem ser utilizados para resolução de situações com duas ou no máximo três variáveis. Para problemas maiores, o Método Simplex se coloca como um grande auxiliar na solução dos problemas de Otimização Linear. Esse método consiste em, após a modelagem matemática do problema, obter uma solução factível (viável) inicial e, aplicando sempre os mesmos passos nas iterações, ir melhorando tal solução até chegar à solução ótima, caso exista, ou concluir que não temos uma solução para o problema.

Podemos esquematizar da seguinte maneira:

Para o desenvolvimento do Método Simplex consideramos o problema escrito na forma padrão:

$$\text{Minimizar } Z(x) = \vec{c} \cdot \vec{x}$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} A \cdot \vec{x} = \vec{b} \\ \vec{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

Seja, $S = \{x \; tal \; que \; A \cdot x = b, \; x \geqslant 0\}$ o conjunto das soluções factíveis do problema, em que A é a matriz dos coeficientes das restrições, $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_m)^t$ é o vetor das variáveis, $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ é o vetor de custos e $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)^t$ é o vetor dos termos independentes. Assim, para entendermos melhor o desenvolvimento do Método Simplex, temos de retornar em alguns conceitos matemáticos importantes.

Definição I - Uma base de uma matriz A $(m \times n)$ é uma matriz quadrada de m vetores coluna linearmente independentes em R^m. As variáveis associadas a essas colunas denominaremos variáveis básicas.

Podemos docompor o vetor das variáveis x que em variáveis básicas x_B e variáveis não básicas x_N da seguinte forma:

$x = (x_B,\ x_N)$, onde x_B representa o vetor das variáveis básicas de m componentes e x_N é o vetor das restantes $n - m$ variáveis não básicas.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \textit{variáveis básicas} \qquad\qquad & \qquad\qquad \textit{variáveis não básicas} \end{array} \\
(B|\ N) = & \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,m} & a_{1\,m+1} & a_{1\,m+2} & a_{1\,m+3} & \cdots & a_{1\,n} \\
a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,m} & a_{2\,m+1} & a_{2\,m+2} & a_{2\,m+3} & \cdots & a_{2\,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdots & a_{m\,m} & a_{m\,m+1} & a_{m\,m+2} & a_{m\,m+3} & \cdots & a_{m\,n}
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Podemos solucionar o conjunto de equações $m \times n$ somente em função das variáveis básicas, $x = (x_B,\ 0)$. Dessa forma dividimos a matriz $A \quad (m \times n)$ em duas matrizes: $B \quad (m \times m)$, a matriz das variáveis básicas, e $N \quad (m \times n - m)$, a matriz das variáveis não básicas.

Em relação a essa divisão, podemos afirmar que:

- **Definição II** - Seja B uma base associada à matriz A. O vetor composto por $\overrightarrow{x_B} = B^{-1}\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{x_N} = 0$ é chamado de solução básica.
- **Definição III** - Uma solução básica sem componentes negativas é denominada solução básica viável.

$$x = \left(\begin{array}{ccc|ccc} x_{m+1}, & \cdots, & x_n & x_1, & \cdots, & x_n \end{array} \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$x_B = \left(\begin{array}{ccc} x_{m+1}, & \cdots, & x_n \end{array} \right) \text{ e } x_N = \left(\begin{array}{ccc} x_1, & \cdots, & x_n \end{array} \right)$$

Para entendermos melhor as definições anteriores, consideraremos um conjunto de restrições de um problema de Otimização Linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 25 \\ 7x_1 + 2x_2 \leqslant 40 \end{cases}$$

Passando para a forma padrão de representação, acrescentando as variáveis de folga x_3 e x_4, temos:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 25 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \end{cases}$$

Então a matriz A será:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

As variáveis básicas serão x_1 e x_2, e as variáveis não básicas serão x_3 e x_4. Assim, escrevemos a matriz $A = (B|\ N)$:

$$A = (B|\ N) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Obtemos então as matrizes B e N:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $x_B = (x_3,\ x_4)$ e $x_N = (x_1,\ x_2)$

- **Definição IV** - O conjunto $C = \{x \textit{ tal que } A \cdot x = b,\ x \geqslant 0\}$ é chamado de conjunto de soluções viáveis.

Além das definições, para o entendimento do método simplex, são importantes os seguintes teoremas:

Teorema 2.1. *O conjunto C das soluções viáveis de um modelo de Otimização Linear é um conjunto convexo.*

Demonstração. Seja C o conjunto formado pelos pontos x tais que: $A \cdot x = b$ e $x \geqslant 0$.

Se C é convexo então para qualquer conjunto composto por dois pontos distintos x_1, x_2 pertencentes a C, a combinação linear convexa desses pontos também pertence a C, o que equivale a dizer que:

$$\{x_1,\ x_2\} \in C \implies \begin{cases} x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C \\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \end{cases}$$

Sejam duas soluções viáveis de C, x_1, x_2, tais que $x_1 \neq x_2$, então:

$$\begin{array}{c} A \cdot x_1 = b \\ x_1 \geqslant 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} A \cdot x_2 = b \\ x_2 \geqslant 0 \end{array}$$

e seja:

$$\begin{array}{c} x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \end{array}$$

Então:

$$Ax = A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2\right] = \lambda A x_1 + A(1-\lambda)x_2 = \lambda b + (1-\lambda) = b$$

e $x \geqslant 0$ uma vez que:

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geqslant 0\ ,\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \text{ e } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

□

Teorema 2.2. *Toda solução básica viável do sistema $Ax = b$ é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, ou seja, um extremo do conjunto C.*

Demonstração. Seja C o conjunto formado pelos pontos x tais que:

$Ax = b$, $x \geqslant 0$ e $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_m,\ 0,\ \ldots\ , 0)^t$, de dimensão n, na qual as variáveis básicas são as m primeiras. Todas maiores ou iguais a zero ($x_i \geqslant 0$).

Suponhamos, por absurdo, que x não seja um ponto extremo do conjunto convexo C, definido anteriormente. Então x pode ser escrito como combinação convexa de outros dois pontos distintos desse mesmo conjunto.

Chamando de y e z esses dois pontos, temos:

$$\begin{array}{c} x = \lambda y + (1-\lambda)z \\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \end{array} \quad \text{como} \quad \begin{array}{c} y \in C \\ z \in C \end{array} \quad \text{obtemos:} \quad \begin{array}{c} Ay = b \\ y \geqslant 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} Az = b \\ z \geqslant 0 \end{array}$$

A relação $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, colocada em termos das coordenadas de cada um dos três, fornece as seguintes relações:

$x_1 = \lambda y_1 + (1-\lambda) z_1$
$x_2 = \lambda y_2 + (1-\lambda) z_2$
....
$x_m = \lambda y_m + (1-\lambda) z_m$
$0 = \lambda y_{m+1} + (1-\lambda) z_{m+1}$
....
$0 = \lambda y_n + (1-\lambda) z_n$

Como, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $y \geqslant 0$ e $z \geqslant 0$ as últimas $(n-m)$ relações do conjunto só podem ser satisfeitas em um dos seguintes casos:

$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ e $y_{m+i} = x_{m+i}$ para $i = 1, \ ... \ , \ n-m$.

Assim $x = y = z$, pois tanto y quanto x são soluções básicas do mesmo sistema, calculados com as mesmas variáveis básicas.

$\lambda = 0$ e $y_{m+i} = 0$ para $i = 1, \ ... \ , \ n-m$, de forma análoga $x = y$ e como $h = 0$, $x = y = z$

$\lambda = 1$ e $y_{m+1} = 0$ para $i = 1, \ ... \ , \ n-m$. Então $x = y = z$.

Com isso demonstramos que não existem soluções viáveis y e z, diferentes da solução básica x que satisfaçam à relação $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, contradizendo a hipótese inicial. Por contradição demonstramos que x é um ponto extremo do conjunto convexo C. □

O Teorema 2.2 mostra a correspondência no sentido de uma solução básica viável para o ponto extremo, reforçando o teorema fundamental da Otimização Linear, e o Teorema 2.3 completa a associação.

Teorema 2.3. *Um ponto x é extremo em um conjunto de soluções viáveis de um problema de Otimização Linear se e somente se $x \geqslant 0$ for solução básica do sistema de equações lineares $Ax = b$.*

Com esses teoremas temos:

Corolário. *1 - O conjunto dos pontos extremos de um conjunto de soluções viáveis é finito e limitado em C_n^m.*

2 - Se existe uma solução viável, então existe uma solução básica viável.

O último respaldo necessário para entendermos a estratégia do método simplex diz respeito ao valor ótimo alcançado pela função objetivo.

Teorema 2.4. *1 - Se uma função objetivo possui um máximo ou um mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo C do Teorema 2.1.*

2 - Se a função objetivo assume o máximo ou o mínimo em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos.

Podemos ver a demonstração desse teorema em Arenales et al. [2007] e Goldbarg and Luna [2005].

Essa fundamentação teórica pode ser resumida como:

- Uma solução factível S é solução básica viável do problema de Otimização Linear, se e somente se, é vértice do conjunto convexo C.

- Existe um número finito de vértices em C.

- Se o problema possui uma solução ótima, então existe uma solução básica viável ótima em C, isto é, um vértice ótimo em C.

- Se o problema possui mais de uma solução ótima, então este possui infinitas soluções ótimas.

Esses resultados são a fundamentação teórica para o desenvolvimento do Método Simplex. A busca pela solução ótima está em transitar pelos vértices do conjunto das restrições, soluções básicas viáveis, na busca da melhor solução. Como o número de vértices é finito, teremos finitas iterações para a solução do problema.

Consideraremos para exemplificação do Método Simplex um problema de Otimização Linear modelado como:

$$\text{Maximizar } f(x_1,\ x_2) = 15x_1 + 12x_2$$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 45 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 110 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Para escrever o problema na forma padrão de Otimização Linear acrescentaremos as variáveis de folga x_3 e x_4 no conjunto de restrições do problema.

$$\text{Maximizar } f(x_1,\ x_2) = 15x_1 + 12x_2$$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 45 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 110 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Observemos que a base $B = [a_{ij}]_{m\times m}$ da matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $m > n$, do sistema $Ax = b$, é igual a m colunas linearmente independentes em A. Dessa forma é possível escrever uma partição conveniente em A, como $A = [B\ N]$ e escrevê-lo como:

$$Ax = b \iff Bx_B + Nx_N = b \iff Bx_B = b - Nx_N$$

$$Ax = b \qquad \xrightarrow{\textit{no problema}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 110 \end{bmatrix}.$$

$$Bx_B + Nx_N = b \quad \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 110 \end{bmatrix},$$

em que B é uma matriz $m \times m$ formada pelas m colunas linearmente independentes de A, denominada de matriz base, N a matriz formada pelas $(n-m)$ colunas restantes da matriz A. Assim temos na matriz $A = [B\ N]$ os vetores x_B e x_N que são formados pelas componentes x das colunas das matrizes B e N, respectivamente. Escrevemos o vetor x como:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \qquad \xrightarrow{\textit{no problema}} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \text{ em que:}$$

- **Variáveis básicas** são as m componentes do vetor $x_B = (x_1,\ x_2)$;

- **Variáveis não básicas** são as $(m - n)$ restantes, componentes do vetor $x_N = (x_3,\ x_4)$.

Sendo B, uma matriz base, existe uma única matriz inversa B^{-1}. Dessa forma, podemos escrever o vetor x_B, como segue:

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N)$$

Obtemos essa forma partindo do sistema linear $Ax = b$, aplicando as operações elementares para transformar a matriz B na matriz identidade I (método de Gauss-Jordan). Isso equivale a multiplicar o sistema $Bx_B + Nx_N = b$ pela matriz inversa B^{-1} tendo:

$$I \cdot x_B + (B^{-1}N) \cdot x_N = B^{-1}b$$

No exemplo temos:

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, calculando sua inversa obtemos $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Como $x_B = B^{-1}b$, temos $x_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 45 \\ 110 \end{bmatrix}$.

Logo, $x_B = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \end{bmatrix}$, obtendo como solução $(x_1,\ x_2) = (20,\ 25)$.

Quando resolvemos o sistema $Ax = b$, partindo da forma $x_B = B^{-1}(b - Nx_N)$, para cada escolha de valores para as variáveis x_N obtemos um valor para as variáveis x_B. Como podemos atribuir arbitrariamente valores às $(m - n)$ componentes do vetor x_N e determinarmos de forma única os valores das componentes do vetor x_B, o sistema $Ax = b$ admite infinitas soluções, ou seja, temos um **Sistema de Equações Lineares Indeterminado**.

Chamamos de **solução básica** uma solução particular do sistema $Ax = b$, ou $x_B = B^{-1}(b - Nx_N)$, que é atribuir $x_N = 0$, assim, $x_B = B^{-1}b$, e podemos dividir em:

- **Solução básica viável**, quando todas as componentes do vetor x são maiores ou iguais a zero;

- **Solução básica viável degenerada**, quando uma ou mais componentes básicas são iguais a zero.

Uma forma de aplicar o algoritmo do Método Simplex é com o uso de tabelas, que facilita a organização das informações durante a resolução do problema.

Método Simplex no formato tabular

Partindo de uma solução básica inicial do sistema original $Ax = b$, cujos coeficientes são denotados por a_{ij} e b_i, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, alteramos essa solução pelas operações de pivotamento do método de Gauss-Jordan, obtendo novas soluções em um sistema equivalente $\hat{A} = x\hat{b}$. Isto é equivalente a encontrar soluções que transitam pelos vértices da região de factibilidade (viabilidade), repetindo o processo até chegarmos a solução ótima.

Podemos resumir o método em alguns passos:

1. Determine uma solução básica viável inicial, que pode ser representada em uma tabela como segue:

Quadro inicial do problema								
	Equação	Coeficientes de						
		$\mathbf{x_1}$	$\cdots$	$\mathbf{x_m}$	$\mathbf{x_{m+1}}$	$\cdots$	$\mathbf{x_n}$	constante
z	**0**	$c_{0\,1}$	$\cdots$	$c_{0\,m}$	$c_{0\,m+1}$	$\cdots$	$c_{0\,n}$	b_0
V.N.B.								
$\mathbf{x_{m+1}}$	**1**	$a_{1\,1}$	$\cdots$	$a_{1\,m}$	$a_{1\,m+1}$	$\cdots$	$a_{1\,n}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{x_n}$	**m**	$a_{m\,1}$	$\cdots$	$a_{m\,m}$	$a_{m\,m+1}$	$\cdots$	$a_{m\,n}$	b_m

Tabela 2.2: Modelo de quadro para o algoritmo do Método Simplex em tabelas

Na Tabela 2.2, consideramos como variáveis básicas (V.B.), x_1, x_2, ..., x_n, e como variáveis não básicas (V.N.B.), x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n. As constantes, b_0, b_1, ..., b_m são os valores da expressões para a solução básica viável inicial e serão atualizados a cada nova solução viável até chegarmos à solução ótima.

2. Se algum dos coeficientes das variáveis não básicas, na função objetivo $f(x) = cx$, $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$, for menor que zero ($c_j < 0$), observamos que, quando aumentamos o valor da variável a função objetivo decresce, então a solução ainda não é ótima, vamos para o **passo 3**.

3. Coloque na base a variável x_j com coeficiente mais negativo na função objetivo, pois ela faz com que a função decresça mais rapidamente.

4. Retire da base a variável x_i que se anula mais rapidamente com o crescimento da variável x_j que entra na base. Para isso verificamos o valor mínimo dentre as razões entre a constante do vetor $b = (b_1, \ ... \ , b_m)$ e os coeficientes da variável que entra na base $x_j = (a_1, \ ... \ , a_m)$, ou seja $Mín\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \cdots, \frac{b_m}{a_m}\right\}$. Como esta linha será a do pivô analisar apenas as razões maiores que zero, $\frac{b_m}{a_m} > 0$

5. Atualize o quadro, aplicando operações de pivotamento. Atualize a nova base, determine uma nova solução básica e vá para o **passo 2**.

Para exemplificar os passos do Método Simplex, retornaremos ao problema de combustível.

$$\text{Maximizar: } z = 14,3x_1 + 9,6x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 50 & (3) \\ 3,15x_1 + 1,95x_2 \leqslant 120 & (4) \\ x_1, \, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Transformando as desigualdades em equações lineares, podemos escrever as restrições do problema como um sistema de equações lineares.

Para resolvermos o problema acrescentaremos as variáveis de folga x_3 e x_4, que irão transformar as inequações (3) e (4) nas equações (5) e (6), escrevendo o conjunto de restrições na forma de um sistema de equações lineares. Assim teremos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50 & (5) \\ 3,15x_1 + 1,95x_2 + x_4 = 120 & (6) \\ x_1, \, x_2, \, x_3, \, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Devemos agora juntar ao conjunto de restrições a função objetivo.

$$\text{Maximizar } z = 14,3x_1 + 9,6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ 3,15x_1 + 1,95x_2 + x_4 = 120 \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Para escrevermos o problema na forma de minimização, como anteriormente, lembramos que maximizar z é minimizar $w = -z$, dessa forma podemos escrever o problema como:

$$\text{Minimizar } w = -14,3x_1 - 9,6x_2 - 0x_3 - 0x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ 3,15x_1 + 1,95x_2 + x_4 = 120 \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Uma solução viável do nosso problema é o ponto $A = (x_1, x_2) = (0, 0)$, vértice do polígono formado pelas restrições do problema, como pode ser visto na Figura 2.7. Queremos buscar, dentre os outros vértices B, C e D o que fornece o menor valor para a função objetivo, que será a Solução Ótima.

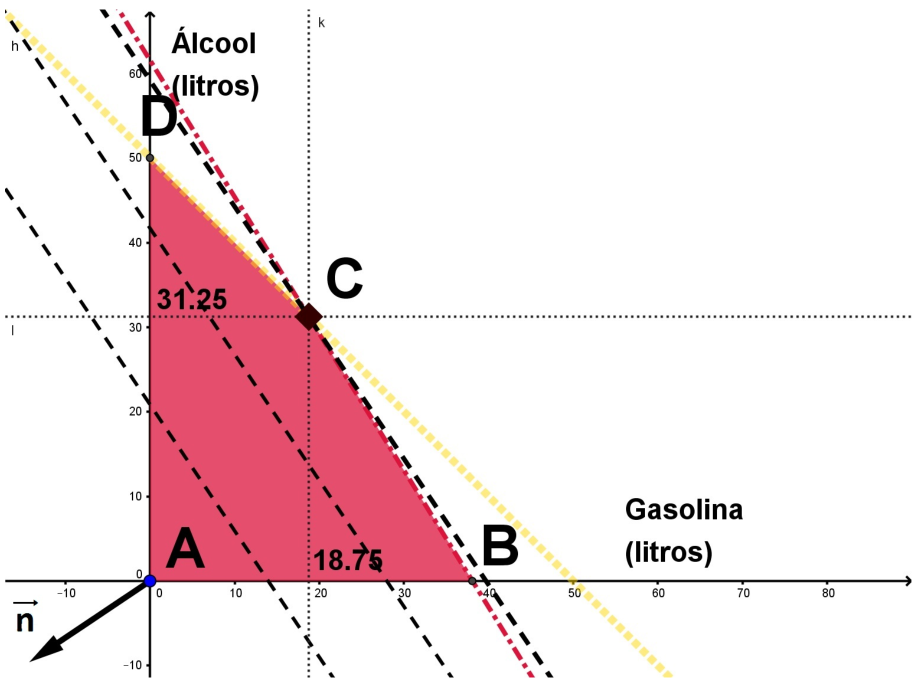


Figura 2.8: Representação gráfica do Método Simplex.

Graficamente, deslocamos a função objetivo $w = -14,3x_1 - 9,6x_2$ no sentido contrário ao vetor gradiente $\overrightarrow{n} = (-14,3\,;\,-9,6)$ até atingir o último ponto da região de factibilidade (viabilidade), obtendo assim, a solução ótima que é o vértice C.

Aplicaremos o Método Simplex em tabelas no problema com as iterações na Tabela 2.3, construída com o modelo de nosso problema.

Considere as variáveis de folga, x_3 e x_4, como **variáveis básicas (V.B.)**. Com isso, construímos o quadro inicial do método.

Quadro inicial do método							Linha
	Equação	Coeficientes de					
		x_1	x_2	x_3	x_4	b	
w	0	-14,3	-9,6	0	0	0	L_1
V.B.							
x_3	1	1	1	1	0	50	L_2
x_4	2	3,15	1,95	0	1	120	L_3

Tabela 2.3: Problema do consumo de combustível - método simplex - Inicial

Para verificarmos se temos uma solução ótima, observamos, no quadro da Tabela 2.3, se os coeficientes das variáveis não básicas são todos não negativos na equação (0). Caso contrário, ela pode ser melhorada. No quadro inicial temos coeficientes negativos, e nesse caso, devemos melhorar a solução que inicialmente é $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (0,\ 0,\ 50,\ 120)$ e $z = 0$.

Buscando melhorar a solução, vamos escolher qual variável não básica entra na base e qual variável básica sai, fazendo as iterações na tabela. Escolhemos para entrar a de maior negatividade, x_1, e para sair aquela em que ocorre o valor mínimo dentre as razões entre a constante do vetor b, e os coeficientes da variável que entra na base ,

$$Min.(\tfrac{50}{1}, \tfrac{120}{3,15}) = \tfrac{120}{3,15}.\ \text{Dessa forma } x_1 \text{ entra na base e sai } x_4.$$

Aplicaremos as operações de pivotamento de Gauss-Jordan para tornar a coluna de x_1 como a coluna de x_4 , formada somente por 1 e zeros.

Primeira iteração						Sai	Entra
	Coeficientes de						
	x1	x2	x3	x4	b		
z	0	-0,748	0	4,540	544,762	L_1	$L_1 + \frac{14{,}3}{3{,}15} \times L_3$
Base							
x3	0	0,381	1	-0,317	11,905	L_2	$L_2 - \frac{L_3}{3{,}15}$
x1	1	0,619	0	0,317	38,095	L_3	$\frac{1}{3{,}15} \times L_3$

Tabela 2.4: Problema do consumo de combustível - método simplex – primeira iteração

Após a primeira iteração, na Tabela 2.4, percebemos que uma segunda iteração se torna necessária, já que temos variáveis não básicas com custo negativo.

Escolheremos agora a variável não básica com coeficiente de maior negatividade na função objetivo, x_2, para entrar na base e a variável básica que apresentar a menor razão, não negativa, entre os coeficientes do vetor b com o coeficiente da variável que entra na base para sair.

$$Min.(\frac{11{,}905}{0{,}381}, \frac{38{,}095}{0{,}619}) = \frac{11{,}905}{0{,}381}, \; x_3 \text{ sai da base.}$$

Aplicaremos novamente as operações de pivotamento na coluna de x_2 para torná-la igual a de x_3 obtendo:

Segunda iteração						Sai	Entra
	Coeficientes de						
	x1	x2	x3	x4	b		
z	0	0	1,963	3,916	568,134	L_1	$L_1 + \frac{0{,}748}{0{,}381} \times L_2$
Base							
x2	0	1	2,625	-0,833	31,246	L_2	$\frac{1}{0{,}381} \times L_2$
x1	1	0	-1,625	0,833	18,754	L_3	$L_3 - \frac{0{,}619}{0{,}381} \times L_2$

Tabela 2.5: Problema do consumo de combustível - método simplex – segunda iteração

Analisando a Tabela 2.5, observamos que os custos de todas as variáveis não básicas são positivos. Logo, estamos na solução ótima, que é $x_1 = 18,75\,l$ de gasolina e $x_2 = 31,25\,l$ de álcool. Percorrendo $568,13\,km$. Vale observar que é a mesma obtida pelo método gráfico e pela resolução de sistemas visto anteriormente.

2.4.1 Problemas de Maximização

No exemplo apresentado, resolvemos um problema de maximização usando a função simétrica para transformá-lo em minimização. Podemos também resolver problemas de Otimização Linear de maximização sem essa transformação, mudando-se apenas o critério de entrada das variáveis na base e o critério de otimalidade[1]. Com isso, entra na base a variável não básica de maior coeficiente positivo na função objetivo, e temos a solução ótima quando todos os coeficientes na função forem não positivos.

Podemos resumir o método para resolver problemas de Otimização Linear de maximização nos seguintes passos:

1. Determine uma solução básica viável inicial.

2. Se algum dos coeficientes das variáveis não básicas, na função objetivo $f(x) = cx$, forem maiores do que zero ($c_j > 0$), favorecendo o crescimento da função, então a solução viável não é ótima, vamos para o **passo 3**.

3. Coloque na base a variável não básica x_j com coeficiente mais positivo na função objetivo, o que proporciona o maior crescimento da função.

4. Retire da base a variável básica que se anula mais rapidamente com o crescimento da variável que entra na base. Para isso verificamos o valor mínimo dentre as razões entre a constante do vetor $b = (b_1, \ ... \ , b_m)$, e o coeficiente da variável que entra na base $x_j = (a_1, \ ... \ , a_m)$. Como esta linha será o nosso pivô analisar apenas as razões maiores que zero $\frac{b_m}{a_m} > 0$
   $Mín \left\{ \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \cdots, \frac{b_m}{a_m} \right\}$.

5. Atualize o quadro, aplicando operações de pivotamento, atualize a nova base, determine uma nova solução básica e vá para o **passo 2**.

2.4.2 Casos especiais em problemas de Otimização Linear

A convergência do algoritmo simplex é garantida pela certeza de que, a cada passo, o critério de escolha de troca de uma variável da base melhora o valor da função objetivo. Mesmo se tivéssemos que fazer um número grande de iterações, em finitos passos, o algoritmo terminaria. Porém, em alguns problemas de Otimização Linear, encontramos

[1]Encontrar a solução ótima.

situações que não permitem o perfeito uso dos critérios apresentados anteriormente. Podemos dividir esses casos em:

- **Empate na entrada de variáveis na base**, nesse caso, a escolha é aleatória, dependendo da escolha pode levar a mais ou menos iterações no Método Simplex. Esse procedimento de escolha pode ser feito se ocorrer o empate em qualquer iteração do método.

- **Empate na saída de variáveis da base**, esta escolha também é aleatória, acarretando soluções básicas viáveis degeneradas, ou seja, temos variável básica, uma ou mais, que assume valor zero.
  O **fenômeno de ciclagem**[2], apesar de raro pelos erros de arredondamento, pode ocorrer de forma a levar as bases se repetirem indefinidamente.
  Quando não ocorre degeneração o conjunto de soluções básicas é finito de forma que o Método Simplex pode apresentar uma **única solução**, **infinitas soluções**, **solução ilimitada** ou **não ter solução**.

- **Problemas com infinitas soluções**, identificamos infinitas soluções ótimas em problemas de Otimização Linear quando, no quadro simplex da solução ótima, temos algum zero nas variáveis não básicas da função objetivo.

- **Problema ilimitado**, são os problemas de Otimização Linear onde não temos uma solução ótima, na minimização $Z(x) \longrightarrow -\infty$ e na maximização $Z(x) \longrightarrow \infty$. Identificamos essa situação quando na iteração do Método Simplex nenhuma das restrições impede o crescimento da variável que entra na base, a função objetivo cresce indefinidamente.

- **Problema inviável**, quando o problema de Otimização Linear não possui uma região de factibilidade (viabilidade).

Além dos casos descritos acima podemos ter problemas de Otimização Linear em que não é direto encontrar uma solução básica viável para inicialização do Método Simplex. Nesse caso, o método terá duas fases.

[2]

– repetição de forma indefinida.

2.4.3 Método Simplex em duas fases

Para iniciarmos o processo iterativo do Método Simplex precisamos de uma solução básica viável. Portanto, precisamos fazer uma busca de colunas linearmente independentes para obtermos uma matriz-básica que nos dará uma solução para iniciarmos o método. Para isso se torna necessário considerar o método em duas fases:

- Fase I, onde determinamos, usando função e variáveis artificiais, uma base e uma solução básica viável, quando ela não é direta, para iniciarmos o Método Simplex.

- Fase II, com a solução obtida na fase I, prosseguimos com o Método Simplex até obtermos a solução ótima do problema original.

Para resolvermos a questão podemos introduzir variáveis artificiais, que não tem significado nenhum para o problema real, mas permite a inicialização do método.

> Para operacionalizar a busca viável inicial existem duas alternativas, todas com base na ideia de "variáveis artificiais". Vamos definir como variáveis artificiais aquelas que faremos introduzir no problema de otimização para que tenhamos a tão necessária base viável inicial. Essas variáveis não necessitarão possuir qualquer ligação com a realidade da modelagem do problema, daí o nome de "artificiais".
>
> Goldbarg and Luna [2005]

Considere o problema de Otimização Linear na forma padrão:

$$Minimizar\ Z(x) = cx \quad \longrightarrow \quad função\ objetivo$$

$$Sujeito\ a \begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad restrições\ do\ problema$$

em que A é uma matriz $m \times n$, $b \in R^n$, $c \in R^n$, $x \in R^n$ e $b \geqslant 0$.

Se o sistema $Ax = b$ não possuir uma solução para inicialização do Método Simplex, acrescentamos variáveis artificiais no conjunto das soluções da seguinte forma:

$$\begin{cases} Ax + x^a = b \\ x \geqslant 0, \quad x^a \geqslant 0 \end{cases}$$

com $x^a = (x_{n+1},\ x_{n+2},\ ...,\ x_{n+p})^t$, com $p \leqslant n$ e $b \geqslant 0$.

Com o acréscimo das variáveis artificiais, forçamos obter uma matriz identidade, que será a base considerada para inicialização do Método Simplex. Temos então uma solução básica viável tomando-se $x^a = (x_1^a,\ ...\ ,\ x_p^a) = b$ e $x = 0$.

Para que a solução do sistema com as variáveis artificiais seja solução do sistema das restrições do modelo do problema de Otimização Linear, devemos ter $x^a = 0$, pois $Ax = b \Longleftrightarrow Ax + x^a = b$, com $x^a = 0$.

Fase I - Primeira fase do método

O primeiro passo, considerando o problema de Otimização Linear na forma padrão, é alterar a função objetivo e as restrições com a introdução das variáveis artificiais. Considerando que para todas as variáveis originais do problema e variáveis de folga os coeficientes das variáveis α_j da função artificial será a soma dos coeficientes das colunas da matriz de restrições do problema original, acrescido das variáveis artificiais e o vetor gradiente artificial $d = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}, ..., \alpha_{n+p})$, temos nosso problema artificial escrito na seguinte forma :

$$Minimizar\ W(x,\, x^a) = -d \cdot x \qquad função\ artificial$$

$$Sujeito\ a \begin{cases} Ax + x^a = b \\ x \geqslant 0, \quad x^a \geqslant 0 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{matrix} restrições\ com \\ variáveis\ artificiais \end{matrix}$$

$$(x,\, x^a) = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m,\ x_{m+1},\ x_{m+2},\ ...,\ x_{m+p})$$

Independentemente de que tipo é o problema de Otimização Linear inicial, o artificial será sempre de minimização para anularmos as variáveis artificiais.

Para aplicarmos o Método Simplex Tabular, vamos construir a Tabela 2.6 com os coeficientes da função objetivo original, da função artificial e das restrições com as variáveis artificiais, x_{n+1} até x_{n+p}, inseridas como variáveis básicas no problema artificial. Seguimos o seguintes critérios:

- Para os custos das variáveis do problema original na função artificial, calculamos a soma em cada coluna, como por exemplo:

$$\alpha_1 = a_{1\,1} + a_{2\,1} + ... + a_{p\,1}.$$

$$\alpha_2 = a_{1\,2} + a_{2\,2} + ... + a_{p\,2}.$$
$$\vdots$$

$$\alpha_m = a_{1\,m} + a_{2\,m} + ... + a_{p\,m}.$$

- No coeficiente das variáveis artificiais colocamos o zero, pois são as variáveis básicas do método. Como nos problemas de minimização são acrescentadas inicialmente apenas no conjunto das restrições.

- A constante na função artificial é a soma das constantes das restrições.

$$b_{Art} = -(b_1 + b_2 + \ ... \ + b_p)$$

- Só colocamos na base os coeficientes das linhas que temos variável artificial.

Quadro inicial do método								
	Equação	Coeficientes de						
		x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+p}	constante
z	0	a_1	$\cdots$	a_n	a_{n+1}	$\cdots$	a_{n+p}	b_0
w	Art.	α_1	$\cdots$	α_n	α_{n+1}	$\cdots$	α_{n+p}	b_{Art}
V.B.								
x_{n+1}	1	$a_{1\,1}$	$\cdots$	$a_{1\,n}$	$a_{1\,n+1}$	$\cdots$	$a_{1\,n+p}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+p}	p	$a_{p\,1}$	$\cdots$	$a_{p\,n}$	$a_{p\,n+1}$	$\cdots$	$a_{p\,n+p}$	b_p

Tabela 2.6: Modelo de quadro para o algoritmo do Método Simplex - Fase I

Após o preenchimento da tabela devemos aplicar as iterações do Método Simplex até que os coeficientes, menos os das variáveis artificiais, da função artificial zere. Atingida a solução ótima dois casos podem ocorrer:

- **O valor da função objetivo artificial ser igual a zero** ($b_{Art} = 0$), nesse caso obtemos uma solução básica inicial para o problema original e devemos continuar a solução indo para a Fase II. Descartamos a função artificial e as variáveis artificiais.

- **O valor da função objetivo artificial ser diferente de zero** ($b_{Art} \neq 0$), o problema original não tem solução viável, o que significa que as restrições devem ser inconsistentes.

Fase II - Segunda fase do método

Temos uma solução básica viável para o problema original no final da Fase I. Para prosseguir a resolução do problema de Otimização Linear, pelo Método Simplex, devemos abandonar a função objetivo artificial e as variáveis artificiais e prosseguimos com as iterações do método até obtermos a solução ótima.

Para exemplificar o método, consideremos o problema:

> Uma pessoa tem disponível hambúrguer e ovo para se alimentar. Cada unidade de ovo contém 15mg de vitamina e 10g de proteína. Cada hambúrguer contém 30mg de vitamina e 10g de proteína. Cada hambúrguer custa R$ 3,00 e cada ovo custa R$ 2,50. A necessidade diária de proteína é no mínimo 50g e a de vitamina no mínimo 120mg. Qual a quantidade de carne e ovo que a pessoa deve consumir para atender suas necessidades diárias gastando o mínimo possível?

Considerando x_1 a unidade de ovo e x_2 a unidade de hambúrguer, podemos modelar o problema de Otimização Linear da seguinte forma:

$$\text{Minimizar: } z = 2,5x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 10x_1 + 10x_2 \geqslant 50 \\ 15x_1 + 30x_2 \geqslant 120 \\ x_1,\, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Representando o problema na forma gráfica na Figura 2.9 verificamos que não temos uma solução básica imediata, pois as restrições são do tipo maior ou igual.

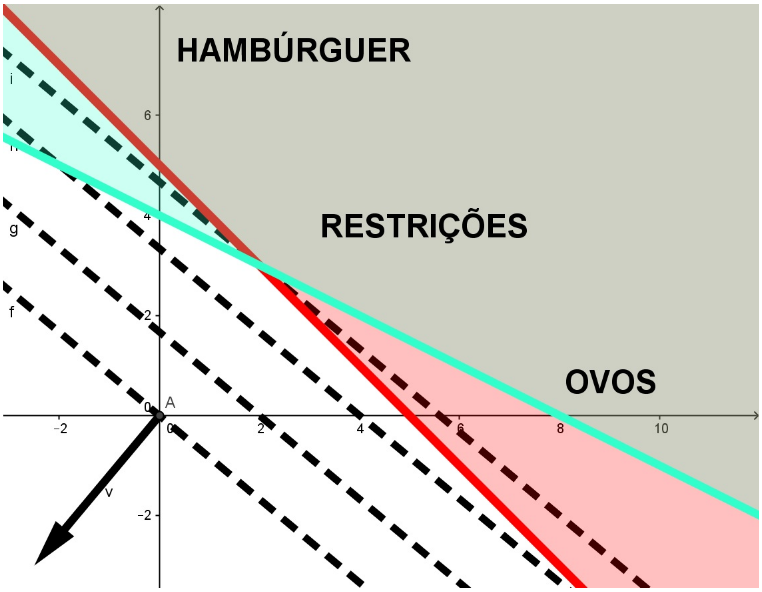


Figura 2.9: Representação do problema da dieta com hambúrguer e ovos

Primeiramente, acrescentaremos as variáveis de excesso x_3 e x_4, escrevendo nosso problema na forma padrão:

$$\text{Minimizar: } z = 2,5x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 10x_1 + 10x_2 - x_3 = 50 \\ 15x_1 + 30x_2 - x_4 = 120 \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Para a primeira fase do método acrescentar as variáveis artificiais x_5 e x_6, obtendo o problema artificial:

$$\text{Minimizar: } w = -25x_1 - 40x_2 + x_3 + x_4$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 10x_1 + 10x_2 - x_3 + x_5 = 50 \\ 15x_1 + 30x_2 - x_4 + x_6 = 120 \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

Completar a Tabela 2.7 com as informações do problema artificial e a função objetivo original.

Quadro inicial do método								
	Equação	Coeficientes de						
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	constante
z	0	-2,5	-3	0	0	0	0	0
w	A	-25	-40	1	1	0	0	-170
V.B.								
x_5	1	10	10	-1	0	1	0	50
x_6	2	15	30	0	-1	0	1	120

Tabela 2.7: Dieta com hambúrguer e ovos - Método Simplex - Fase I

Buscando zerar a função objetivo artificial vamos escolher qual variável entra na base e qual sai, fazendo as iterações na Tabela 2.7.

Escolhemos para entrar a que possui coeficiente de maior negatividade, x_2, e para sair a variável com o valor mínimo dentre as razões entre a constante do vetor b, e o coeficiente da variável que entra na base x_2. Como esta linha será o nosso pivô analisar apenas as razões maiores que zero,

$$Min.(\tfrac{50}{10}, \tfrac{120}{30}) = \tfrac{120}{30}, \text{ dessa forma } x_6 \text{ sai da base.}$$

Atualizando o quadro temos:

Primeira iteração								Sai	Entra
	Coeficientes de								
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b		
z	-1	0	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	12	L_1	$L_1 + 3 \times \frac{L_4}{30}$
w	-5	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	-10	L_2	$L_2 + 40 \times \frac{L_4}{30}$
Base									
x_5	5	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	10	L_3	$L_3 - 10 \times \frac{L_4}{30}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{30}$	4	L_4	$\frac{1}{30} \times L_4$

Tabela 2.8: Dieta com hambúrguer e ovos - Método Simplex - Fase I– primeira iteração

Após a primeira iteração, na Tabela 2.8, percebemos que uma segunda iteração se torna necessária, já que o coeficiente de x_1 é o mais negativo na função objetivo artificial.

Escolhemos agora x_1 para entrar na base. Acontece a menor razão, não negativa, dentre as razões entre a constante do vetor b, e o coeficiente da variável que entra na base x_1 em x_5, portanto, essa variável deixa a base.

Após atualizar o quadro temos:

Segunda iteração								Sai	Entra
	Coeficientes de								
	x$_1$	x$_2$	x$_3$	x$_4$	x$_5$	x$_6$	b		
z	0	0	-$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	14	L_1	$L_1 + \frac{L_3}{5}$
w	0	0	0	0	1	1	0	L_2	$L_2 + 5 \times \frac{L_3}{5}$
Base									
x$_1$	1	0	-$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{15}$	2	L_3	$\frac{1}{5} \times L_3$
x$_2$	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	3	L_4	$L_4 - \frac{1}{2} \times \frac{L_3}{5}$

Tabela 2.9: Dieta com hambúrguer e ovos - Método Simplex - Fase I– segunda iteração

Analisando a segunda iteração, na Tabela 2.9, observamos que todas as variáveis da função objetivo artificial tem custo maior ou igual a zero, e que o valor da função objetivo artificial é zero, $W = 0$. Logo, estamos na solução ótima do problema artificial e temos uma solução básica inicial para o problema original. Devemos continuar a solução indo para a Fase II.

Descartamos a função objetivo artificial e as variáveis artificiais, obtendo a Tabela 2.10 do problema original.

Quadro inicial do problema						
	Equação	Coeficientes de				
		x$_1$	x$_2$	x$_3$	x$_4$	constante
z	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	14
V.B.						
x$_1$	1	1	0	-$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	2
x$_2$	2	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{15}$	3

Tabela 2.10: Dieta com hambúrguer e ovos - Método Simplex - Fase II

Na Tabela 2.10, temos os coeficientes de x_1 e x_2 iguais a zero, variáveis x_3 e x_4 com custos não negativos e, portanto, não será necessário nova iteração, pois já temos a solução ótima: 2 ovos e 3 hambúrgueres dando um valor de R$ 14,00.

A tabela do método simplex nos permite analisar melhor as informações por fornecer mais dados que os pedidos no problema, o que favorece a tomada de decisão posterior em caso de alteração de algumas informações no mesmo problema. Apesar de tediosos, os cálculos de Gauss-Jordan permitem a solução de problemas indiferentemente do número de variáveis apresentadas. Na prática, esses cálculos são executados em computadores. Porém, torna-se válido conhecer o funcionamento do método. Uma ferramenta que temos em mãos para esse tipo de situação é o Solver do Excel.

2.5 Solução por Computador Solver do Excel

Os métodos computacionais facilitam muito a resolução de problemas de otimização linear. A resolução com softwares permite agilidade no processo sem restrição a quantidade de variáveis do problema. Para entender o método, continuaremos em nosso problema exemplo do consumo de combustível modelado como:

$$\text{Maximizar: } z = f(x_1, x_2) = 14,3x_1 + 9,6x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 50 \\ 3,15x_1 + 1,95x_2 \leqslant 120 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Lembremos de que nossa função objetivo, $f(x_1, x_2) = z$, representa o percurso a ser maximizado com as variáveis x_1 (litros de gasolina) e x_2 (litros de álcool), usando apenas R$ 120,00 e no máximo um tanque de combustível (50 litros). Usaremos o Solver do Excel 2013 para resolver nosso problema.

Podemos representar nossa situação em uma tabela com as informações retiradas do problema inicial:

Dados	Gasolina	Álcool	Restrição dada no problema
Preço	R$ 3,15	R$ 1,95	
Desempenho na cidade	13,1	9,1	
Desempenho na estrada	14,3	9,6	
Volume utilizado			máximo de 50 litros
Deslocamento do veículo			máximo possível
Valor gasto			máximo de 120 reais

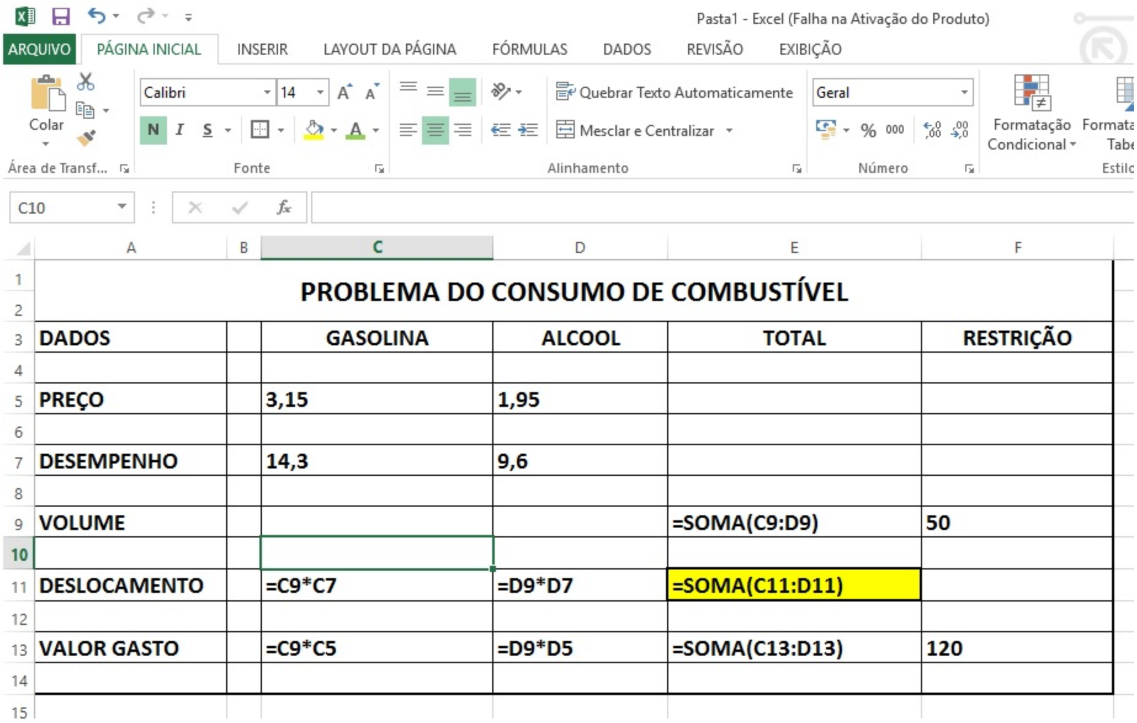
Tabela 2.11: Informações do problema de consumo de combustível

Na Tabela 2.11, representamos as informações retiradas do problema. O deslocamento e o valor gasto dependem do volume a ser utilizado, logo a quantidade de cada combustível são nossas variáveis de decisão.

Agora, construiremos no Excel uma planilha conforme o modelo da Figura 2.9, onde já estão as fórmulas que devem ser colocadas no programa.

Colocamos as informações do problema da seguinte forma nas células do Excel:

- Preço nas células: C5 e D5
- Desempenho na estrada nas células: C7 e D7
- Variáveis de decisão: C9 e D9, na E9 somamos esses valores e na F9 o valor de restrição desse volume.
- Deslocamento, cuja soma é nossa função objetivo: na C11 digitamos =C9*C7, na D11 digitamos =D9*D7 e na E11 somamos os valores de C11 e D11. Observamos que nosso objetivo final está na E11, que chamamos de célula objetivo.
- Valor Gasto, cuja soma é uma das restrições do problema: na C13 digitamos =C9*C5, na D13 digitamos =D9*D5 e na E13 somamos os valores de C11 e D11. Na F13, digitamos o valor da restrição de valor.



	A	B	C	D	E	F
1	PROBLEMA DO CONSUMO DE COMBUSTÍVEL					
2						
3	DADOS		GASOLINA	ALCOOL	TOTAL	RESTRIÇÃO
4						
5	PREÇO		3,15	1,95		
6						
7	DESEMPENHO		14,3	9,6		
8						
9	VOLUME				=SOMA(C9:D9)	50
10						
11	DESLOCAMENTO		=C9*C7	=D9*D7	=SOMA(C11:D11)	
12						
13	VALOR GASTO		=C9*C5	=D9*D5	=SOMA(C13:D13)	120
14						
15						

Figura 2.10: Planilha Excel – Fórmulas – Consumo de Combustível - SOLVER

Colocamos as informações retiradas do problema, conforme a tabela na Figura 2.10 e obtemos a tabela na Figura 2.11. Nessa tabela, marcaremos a célula onde está o resultado da função objetivo (aqui em amarelo) e as células das variáveis (aqui em azul). É importante destacarmos essas células, pois serão nossa referência para usarmos adequadamente a ferramenta.

	A	B	C	D	E	F
1	**PROBLEMA DO CONSUMO DE COMBUSTÍVEL**					
2						
3	**DADOS**		**GASOLINA**	**ALCOOL**	**TOTAL**	**RESTRIÇÃO**
4						
5	**PREÇO**		**R$ 3,15**	**R$ 1,95**		
6						
7	**DESEMPENHO**		**14,3**	**9,6**		
8						
9	**VOLUME**				**0**	**50**
10						
11	**DESLOCAMENTO**		**0**	**0**	**0**	
12						
13	**VALOR GASTO**		**R$ -**	**R$ -**	**R$ -**	**120**
14						

Figura 2.11: Planilha Excel– Consumo de Combustível – SOLVER

Observemos, na Figura 2.11, que no desempenho colocamos somente o da estrada, que estamos usando nesse exemplo, mas podemos mudar facilmente na planilha e executar novamente as ferramentas que mostraremos a seguir. O mesmo vale se ocorrer variações nas informações ou na restrição do problema. Isso facilita muito a resolução de problemas parecidos e as adequações a realidade.

Usando o Excel 2013 devemos verificar se a ferramenta Solver já está habilitada. Caso não esteja, clicamos em:

- Arquivo $\longrightarrow$ Opções $\longrightarrow$ Suplementos $\longrightarrow$ Solver $\longrightarrow$ Ok.

Será nossa ferramenta de trabalho na resolução desse tipo de problema.

Agora, configuraremos a resolução de nossa situação. Clicando em:

- Dados $\longrightarrow$ Solver.

E obtemos a tela da Figura 2.12.

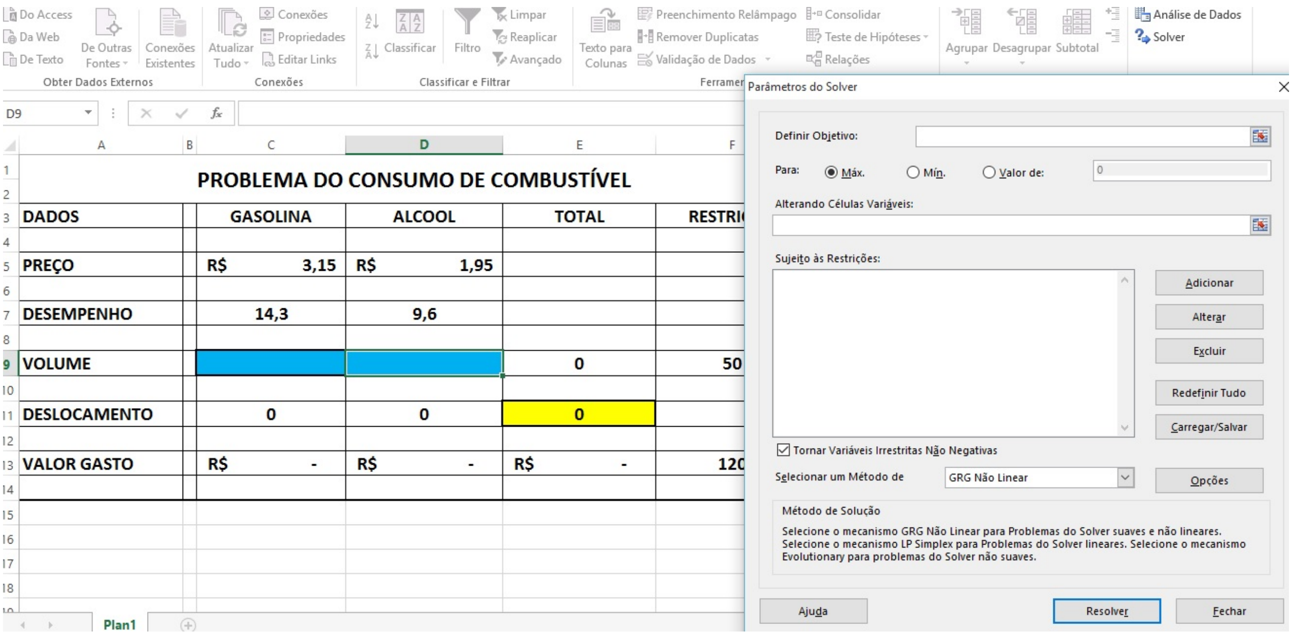


Figura 2.12: Abrindo o Solver do Excel

Em seguida, configuraremos a ferramenta definindo:

- A célula objetivo (amarela), que em nossa planilha é a E11.
- Se nosso Objetivo é maximizar (Máx.) ou minimizar (Min.).
- As células das variáveis de decisão, C9 e D9.
- As restrições. Devemos adicionar uma a uma e não esquecer da não negatividade.
- Selecionar modo de Solução LP Simplex.

Ao adicionar as restrições, devemos ficar atentos aos sinais condicionais, pois o preenchimento correto garantirá a qualidade da resposta obtida.

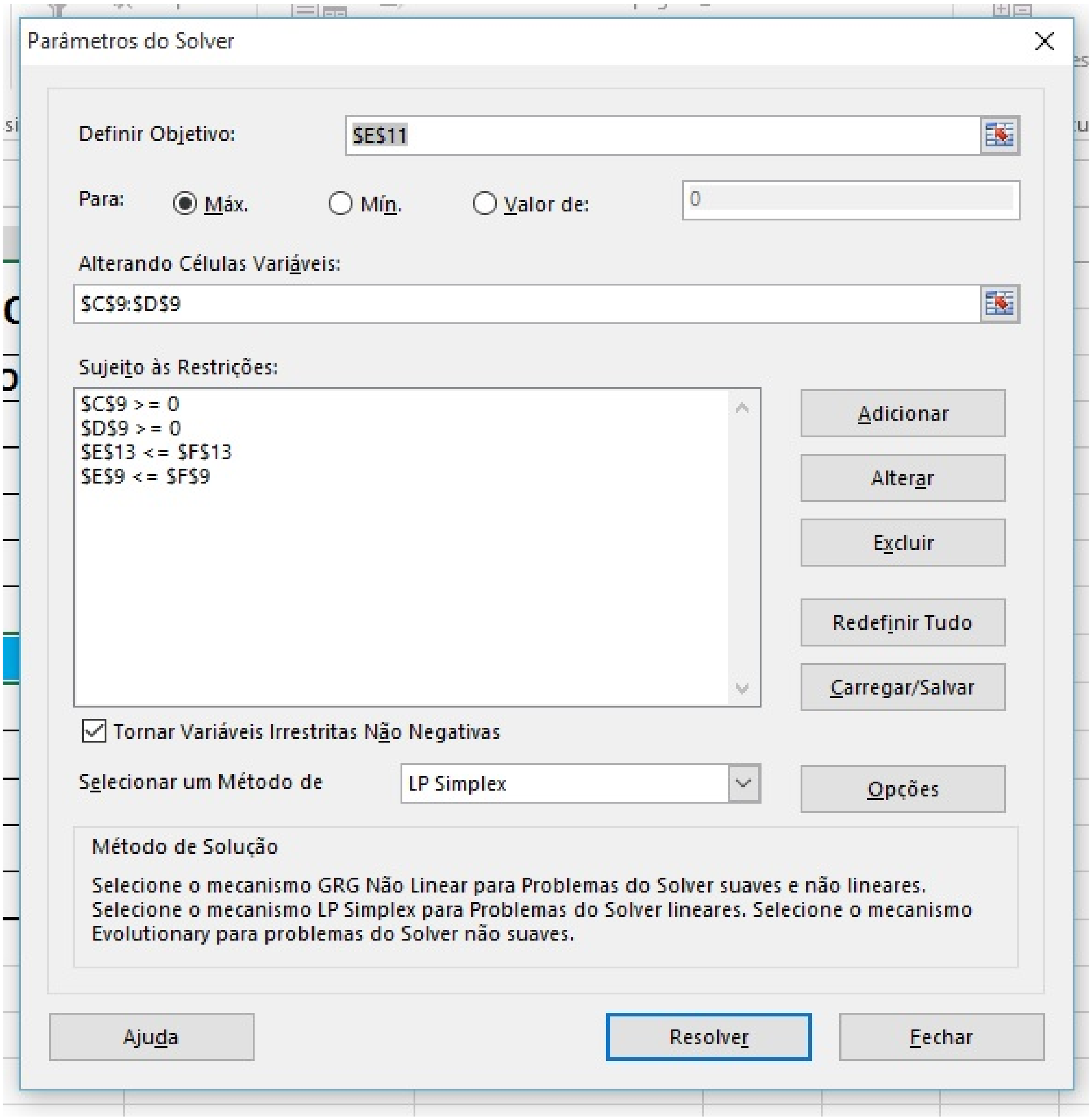


Figura 2.13: Configuração do Solver

Após configurar o Solver como na Figura 2.13, clicamos em resolver e obtemos os valores de uma solução do problema.

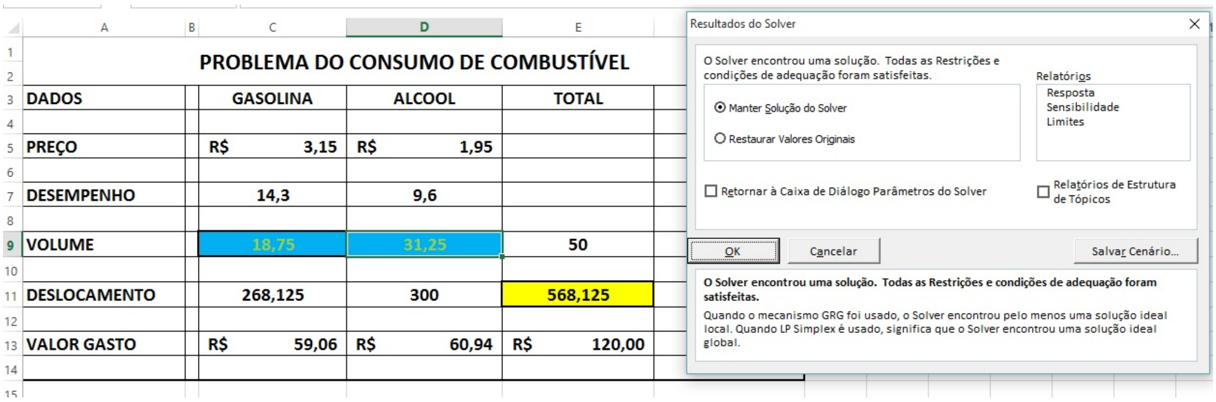


Figura 2.14: Confirmação do Solver

Estando de acordo com a solução, como na Figura 2.14, clicamos em Ok e obtemos a tabela com uma solução ótima do problema. Vale lembrar de que a qualidade da resposta depende da boa modelagem do problema e da configuração correta da ferramenta.

	A	B	C	D	E	F
1	PROBLEMA DO CONSUMO DE COMBUSTÍVEL					
2						
3	DADOS		GASOLINA	ALCOOL	TOTAL	RESTRIÇÃO
4						
5	PREÇO		R$ 3,15	R$ 1,95		
6						
7	DESEMPENHO		14,3	9,6		
8						
9	VOLUME		18,75	31,25	50	50
10						
11	DESLOCAMENTO		268,125	300	568,125	
12						
13	VALOR GASTO		R$ 59,06	R$ 60,94	R$ 120,00	120
14						

Figura 2.15: Solução do problema

Comprovando as soluções que já tínhamos do problema pelos outros métodos, obtemos, na Figura 2.15, que devemos abastecer o carro com 18,75 litros de gasolina, 31,25 litros de álcool e percorreremos 568,125km na estrada.

A resolução pelo solver é bem menos trabalhosa e nos permite interferências rápidas. Vamos supor que após modelarmos o problema verificamos que o novo preço da gasolina é R$ 3,65 e do álcool R$ 2,45. Como o combustível aumentou, vamos dispor agora de R$ 150,00 para o abastecimento. Na tabela do problema, como na Figura 2.15, só alteramos esses valores e executamos a ferramenta solver novamente obtendo a nova resposta.

	A	B	C	D	E	F
1	PROBLEMA DO CONSUMO DE COMBUSTÍVEL					
2						
3	DADOS		GASOLINA	ALCOOL	TOTAL	RESTRIÇÃO
4						
5	PREÇO		R$ 3,65	R$ 2,49		
6						
7	DESEMPENHO		14,3	9,6		
8						
9	VOLUME		41,09589041	0	41,09589041	50
10						
11	DESLOCAMENTO		587,6712329	0	587,6712329	
12						
13	VALOR GASTO		R$ 150,00	R$ -	R$ 150,00	150
14						

Figura 2.16: Solução nova do problema

A nova solução, na Figura 2.16, nos mostra que devemos abastecer somente com gasolina, 41,09 litros e vamos percorrer 587,671km com a nova situação.

A grande vantagem do uso computacional é que nos permite trabalhar facilmente com problemas com número grande de variáveis sem nos preocuparmos com algoritmos gigantescos. O computador se coloca como um facilitador na análise e resolução de problemas. Ele faz as devidas alterações mesmo se o objetivo for minimizar.

Capítulo 3

Otimização Linear e Aprendizagem

> Nesse capítulo discutiremos como a Otimização Linear está presente nos vários níveis da Educação Básica e como ela pode ajudar no desenvolvimento das habilidades e conteúdos presentes nas atividades de matemática, auxiliando o processo do ensino e da aprendizagem.

As técnicas utilizadas na Otimização Linear podem ser uma ferramenta metodológica em toda Educação Básica. Permeando pelos conceitos podemos perceber, nos processos de modelagem e resolução, técnicas que podem ser usadas em atividades nas diferentes fases da aprendizagem. Os jogos e brincadeiras na educação infantil, as atividades de entendimentos de problemas, as resoluções de situações e a construção dos registros algébricos permitem a provocação ao aprendizado de vários conceitos e ao desenvolvimento de habilidades fundamentais na formação do cidadão.

Na educação infantil, as brincadeiras que envolvem tomada de decisão e sequências permitem o desenvolvimento social da criança. Decidir sobre a melhor ação, o caminho a seguir, a forma geométrica que melhor se encaixa ou até mesmo a cor que completa a sequência está ligado ao entendimento de problemas, tão necessário para identificação de qual ferramenta será usada na sua resolução, que ainda de forma simplória, está articulada nas estratégias de enfrentamento das situações e contribuem no desenvolvimento das habilidades necessárias à construção dos saberes matemáticos.

No Ensino Fundamental ciclo I, primeiro ao quinto ano, começamos a construção das operações e aplicações da matemática em algumas situações cotidianas. Nesse foco, as ferramentas da Otimização Linear, alguns de seus registros, contribuem no desenvolvimento do aluno em cada fase da aprendizagem. No início, problemas mais simples com tomada de decisão por tabelas e adições básicas, seguido por modelagens e vivências e culminando na construção de modelos com gráficos e tabelas para a tomada de decisão.

No ciclo II do Ensino Fundamental, sexto ao nono ano, partimos para problemas um pouco mais elaborados, já iniciando o desenvolvimento e o uso da álgebra. Nesse momento, o uso de situações que envolvem tomada de decisão com várias variáveis permitem contextualizações nos conceitos a serem apresentados. Tornar o problema significativo aos aprendizes torna o momento da aprendizagem mais prazeroso e nos leva a melhores resultados. Os problemas cotidianos com as ideias da programação linear são de grande valia. Partindo das tabelas e gráficos nos anos iniciais, vamos ampliando com o crescimento algébrico e a construção de sistemas, onde a resolução gráfica e algébrica analítica servem ao desenvolvimento dos algoritmos que favorecem o desenvolvimento lógico matemático.

O Ensino Médio, que separa o Ensino Fundamental da Universidade, tem como finalidade fundamentar as ideias desencadeadas nas séries iniciais e construir aplicações e conceitos úteis na formação do cidadão. Nessa fase, o aluno já se apropria melhor dos registros algébricos e podemos aumentar o número de variáveis e a dificuldade nos problemas usando algoritmos mais elaborados e aprofundando o conhecimento de sistemas e desigualdades. Com o estudo das funções e da geometria analítica podemos modelar melhor nossos problemas e em via dupla, do conteúdo aos problemas de otimização e das situações ao conteúdo, melhorar nossas resoluções.

Para entendermos melhor, em cada seção desse capítulo, descreveremos atividades em cada uma das fases de ensino e aprendizagem, discutiremos alguns conceitos e reforçaremos as ideias de Otimização Linear, analisando em cada situação o conteúdo matemático e algumas das formas de solução dos problemas.

3.1 Otimização na Educação Infantil

Com crianças até seis anos de idade, a educação infantil se caracteriza pelo processo lúdico e o uso de material concreto. Vivenciar é fundamental nessa fase da aprendizagem e as atividades devem ser voltadas à experimentação e manipulação de materiais. Com essa visão analisaremos algumas atividades com olhos nas ideias de tomada de decisão.

Para discutirmos melhor o assunto, partiremos de uma situação problema para que as crianças possam decidir e vivenciar tomando decisões e fazendo experimentação.

Queremos cobrir um retângulo de 20cm por 30cm (para a criança a medida não é tão importante, já apresentamos o polígono cortado.). Podemos fazê-lo com figuras de três lados (triângulos), quatro lados (quadrados), cinco lados (pentágonos), seis lados (hexágonos) ou podemos mesclar entre as figuras usando um pouco de cada uma. Dispomos de polígonos regulares (ângulos e lados iguais) em quantidade limitada (10 de cada) e temos de investigar a forma que podemos cobrir o retângulo da melhor maneira possível (a maior parte), usando o menor número de peças.

Na educação infantil, o problema é mostrado de maneira mais lúdica, dentro de uma história ou contexto divertido, onde com as peças em mãos a criança desenvolve habilidades como: percepção de forma, espaço, cores, quantidade e tamanho. Permite dentro da contagem e comparação, levar o aluno à escolha da melhor solução para o problema, nesse caso minimizar a quantidade de peças, tendo de decidir entre a melhor solução encontrada.

Para resolvermos o problema com a criança, fornecemos quadrados, triângulos, pentágonos e hexágonos, todos com medida de 10 cm de lados e com cores diferentes. Nesse momento é importante discutirmos as diferenças das formas e cores e onde elas aparecem em nossas vidas. Após a primeira discussão, vivenciaremos a atividade propriamente dita, lembrando que nosso objetivo é cobrir a maior parte do retângulo com o menor número de peças possível.

Organizaremos a solução em uma tabela com o número de figuras necessárias para cobrir o retângulo dado. Em nosso caso usaremos registro de algarismos, mas dependendo da idade da criança devemos nos ater ao desenho das figuras para compor nossa Tabela 3.1. Com os polígonos, em quantidade suficiente, solicitamos primeiramente que eles preencham a figura somente com um tipo de polígono e conte quantas peças foram necessárias.

Tentativa	Triângulos	Quadrados	Pentágonos	Hexágonos	Total de figuras
1	10	0	0	0	10
2	0	6	0	0	6
3	0	0	2	0	2
4	0	0	0	1	1
5					
6					
7					
8					

Tabela 3.1: Quantidade de polígonos para cobrir o retângulo

Nesse processo, estaremos trabalhando cor, formas e quantidade, juntamente com a noção de espaço e conservação de espaço. Após a contagem é hora de partirmos ao nosso problema propriamente dito. Colocar o maior número de peças possível sem sobrepor e anotar na tabela os resultados obtidos. Após a Tabela 3.1 completa, decidiremos qual a melhor solução para o problema. Lembramos que todas as soluções atendem nossa proposta, mas uma delas é a melhor que podemos chamar de solução ótima.

De forma simples, passamos pela construção de um problema de otimização para ser vivenciado por crianças. Podemos variar com os tamanhos dos polígonos e até mesmo em mais restrições no problema aumentando a dificuldade e adequando a necessidade de cada turma. O registro na tabela pode ser feito com algarismos ou outra representação que o aluno já tenha se apropriado, como por exemplo: barrinha, bolinha, etc.

É importante, nessa fase de aprendizagem, valorizar todas as respostas com a finalidade de manter a motivação e a busca na superação de desafios. Buscar a melhor solução está diretamente ligado a auto provocação no enfrentamento de problemas. Não importa a idade, queremos sempre o melhor.

Outra atividade na busca da melhor solução é entregarmos aos alunos tampinhas de garrafas para representar rodas (para crianças menores devemos usar tampas maiores) e caixas para representar os veículos, carros ou motos. Com um número de peças limitado a criança deverá formar o maior número de veículos sobrando a menor quantidade de rodas, pode não sobrar nenhuma, usando a maior parte das caixas. Ainda com registro em tabela, respeitando o nível do aluno, vamos anotando todas as possibilidades encontradas, para dentre elas, escolher a melhor solução.

Nessa fase da aprendizagem, trabalhamos apenas com as ideias da otimização sem o registro algébrico, porém já estamos embutindo no aprendiz uma base que servirá de conhecimento prévio a outros saberes como nos diz Willingham [2011]:

> O conhecimento prévio não serve apenas para fazer de você um leitor melhor, ele também é necessário para ser um bom pensador. [...] ..., as pessoas recorrem à memória para solucionar problemas mais frequentemente do que você pode imaginar. Por exemplo, pode ser que muito da diferença entre os melhores jogadores de xadrez do mundo não seja a capacidade de raciocinar sobre o jogo ou planejar o melhor movimento, mas a memória para as posições do jogo...
>
> Willingham [2011]

Com as atividades de vivência e tomada de decisão na educação infantil, estaremos proporcionando ao aluno conteúdos para memória e habilidades de escolhas que no decorrer do processo de ensino e aprendizagem permitirá o crescimento do saber. Quanto mais vivência a criança tiver da educação infantil, melhor será seu desempenho no Ensino Fundamental.

3.2 Otimização no Ensino Fundamental ciclo I

Dividido em cinco anos, tem como foco a alfabetização nas diversas linguagens, entre elas a lógica matemática e sua aplicação na vida cotidiana. As atividades, ainda com foco no concreto, permeiam entre o lúdico e o abstrato atendendo a idade e a necessidade de cada turma. Aqui analisaremos algumas atividades desse nível e o conteúdo matemático envolvido.

Nessa fase de aprendizagem, a comunicação entre as áreas do conhecimento e a realidade é de grande importância, dar significado ao que se aprende e ao que se pretende ensinar se torna fundamental. A matemática se comunica em seus vários conteúdos e com a realidade vivida, proporcionando uma amplitude de possibilidades. As ideias apresentadas na Otimização Linear, principalmente as questões de modelagem de problemas, servem para problematizar a realidade e buscar a melhor solução para as situações, isso faz parte da natureza humana. Essa necessidade de motivação é reforçada por Willingham [2011].

> As pessoas são naturalmente curiosas, mas não são naturalmente boas pensadoras. A menos que as condições cognitivas sejam favoráveis, pensar será evitado.
>
> Willingham [2011]

Esse fato nos coloca o desafio de provocar o aluno com situações desafiadoras que levem à tomada de decisões e os coloquem em constantes conflitos. Situações problema abertas, que apresentam frases ou parágrafos mais longos, contêm dados suplementares, permitem vários modos de resolução e diferentes soluções, que envolvam tomada de decisão e a busca de uma melhor solução. Os problemas de otimização, em nosso caso linear, adaptados a linguagem da criança, se tornam boas representações da realidade. Observemos a situação a seguir.

> Queremos construir carrinhos de mão que podem ser feitos com duas, três ou quatro rodas. Dispomos de vinte e três rodas, cinco moldes para carrinhos de duas rodas, cinco moldes para carrinhos de três rodas e quatro moldes para carrinhos de quatro rodas, para a construção desses carrinhos e queremos fazer o máximo de carrinhos usando todas as rodas.

Para desencadear a resolução desse problema, de forma mais concreta, sem o uso de algoritmos algébricos, proporcionamos a construção de modelos físicos para facilitar o entendimento e construir ideias matemáticas que possibilitem o desenvolvimento futuro dos modelos de otimização linear e resolução de problemas. O trabalho em grupo favorece a circulação de informações.

Fornecemos, inicialmente, os moldes para grupos de quatro alunos de forma a conhecerem o material disponível. As linhas cheias definem corte e as pontilhadas dobras na construção dos carrinhos. Para percepção de espaço podemos solicitar aos alunos que pintem as figuras a serem usadas e identifiquem as formas geométricas. É importante que eles registrem em seu caderno o nome das figuras e suas características, além das conclusões observadas até o momento.

Para conhecermos melhor o material, ilustrado na Figura 3.1, propomos a construção de um carrinho de mão de cada tipo para iniciarmos a problematização, modelagem do problema e nosso estudo numérico. Ressaltamos a importância de que se registrem as observações em seu caderno para depois podermos socializar as conclusões com a turma em uma roda de conversa. No caso do professor, as anotações dos avanços e dificuldades favorecem as interferências no processo do ensino e da aprendizagem.

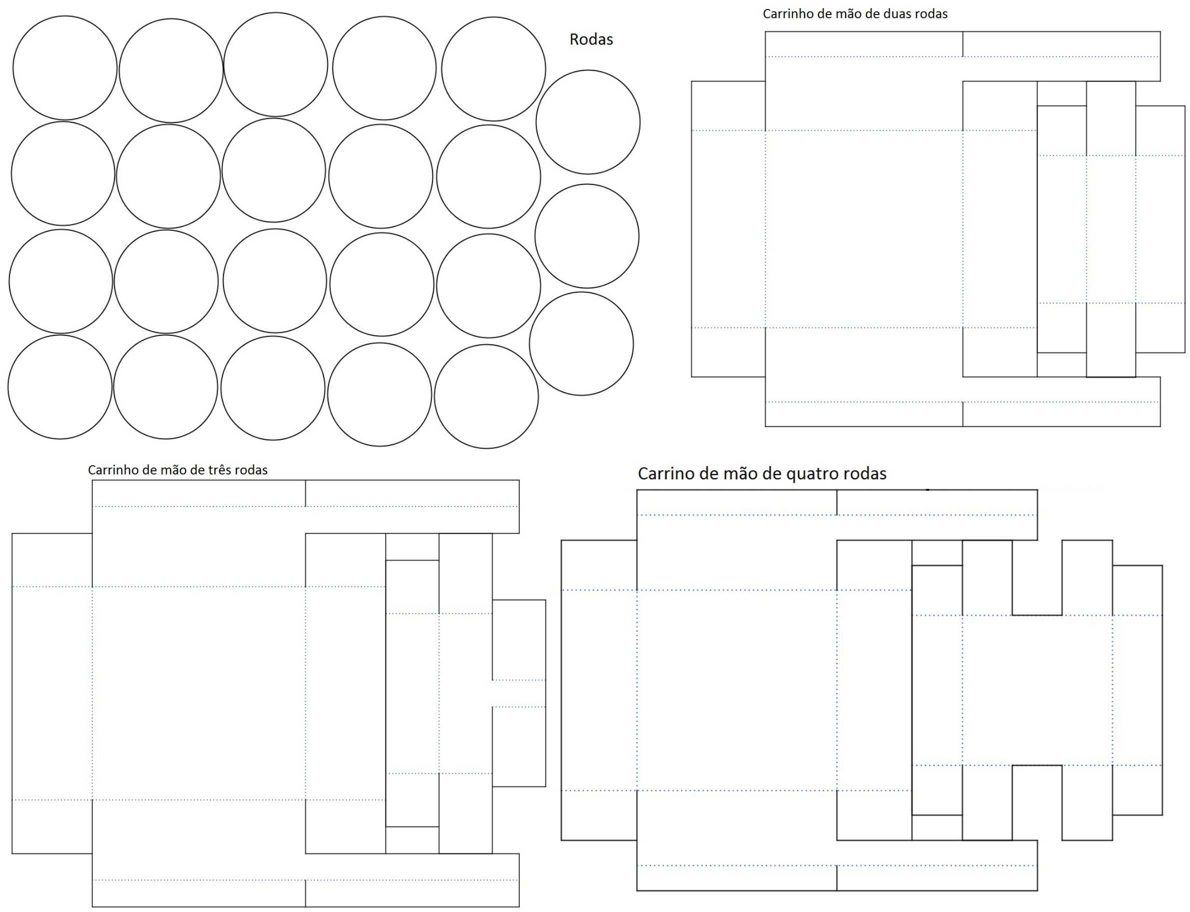


Figura 3.1: Moldes para construção dos carrinhos de mão e modelagem do problema.

Feito um carrinho de cada tipo, podemos começar nosso planejamento no entendimento do problema. Uma sugestão é construir uma tabela como a Tabela 3.2 para verificar a quantidade de rodas necessárias à construção de outros carrinhos. Podemos relacionar cada roda a uma unidade do material dourado[1], ou outro material concreto similar, para permitir a comprovação do número de rodas por contagem.

[1]Material Dourado é um dos materiais idealizados pela médica e educadora Maria Montessori. Ele tem como foco o trabalho com a matemática.

Número de carrinhos	Duas rodas	Três rodas	Quatro rodas
1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	
4	8		
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Tabela 3.2: Relação de número de rodas e carrinhos

O preenchimento da Tabela 3.2 possibilita o trabalho com as sequências dos múltiplos de 2, 3 e 4. Os alunos que já se encontram em fase operacional o fazem por multiplicação ou adição, enquanto os que não estão se utilizam da contagem. As relações com os registros matemáticos também são muito importantes durante toda a atividade. Para os alunos de quartos e quintos anos já podemos observar as regularidades da sequência e discutir critérios de divisibilidade por dois, três e quatro.

Preenchida a tabela, nos apropriando de seus resultados, podemos estar provocando os alunos a juntar as informações e conduzir a algumas ideias pertencentes as operações:

- Em um carrinho de cada tipo, quantas rodas usamos?
- Se fizermos dois carrinhos de cada tipo, quantas rodas usamos?
- Vamos fazer dois carrinhos de quatro rodas, três de três rodas e um de duas rodas. Quantas rodas usaremos?
- Com dez rodas, quantos carrinhos de três rodas podemos fazer? Quantas sobram?
- Com vinte e três rodas, quantos carrinhos de quatro rodas podemos fazer? Quantas sobram?

Podemos provocar outras problematizações conforme o nível da turma, explorando as potencialidades existentes. Devemos valorizar e incentivar os alunos a buscarem sempre o seu melhor.

Terminada a investigação, pedimos que os alunos proponham uma solução para a situação inicial, usar as vinte e três rodas para fazer os carrinhos, e verificar com os moldes fornecidos, se ela é possível ou não. Registraremos a informação em uma nova tabela como a Tabela 3.3 e discutiremos a possibilidade de outras soluções. Lembremos de que dispomos de cinco moldes para carrinhos de duas rodas, cinco moldes para carrinhos de três rodas e quatro moldes para carrinhos de quatro rodas. Temos apenas 23 rodas, ou seja, sobrarão carrinhos sem rodas.

Imaginemos que as respostas de um determinado grupo de alunos sejam:

	Carrinhos de 2 rodas	Carrinhos de 3 rodas	Carrinhos de 4 rodas	Total de carrinhos
	máximo 5	máximo 5	máximo 4	máximo 14
(1)	2	1	4	7
(2)	1	3	3	7
(3)	0	5	2	7
(4)	2	5	1	8
(5)	4	5	0	9
(6)	5	3	1	9

Tabela 3.3: Resultados obtidos para 23 rodas

É importante solicitarmos que os alunos, quarto e quinto ano, registrem e confiram as expressões do número de rodas para verificar se foi atendido a restrição das vinte e três rodas dadas no problema como segue:

$$(1)\ 2 \times 2 + 1 \times 3 + 4 \times 4 = 23$$

$$(2)\ 1 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 = 23$$

$$(3)\ 0 \times 2 + 5 \times 3 + 2 \times 4 = 23$$

$$(4)\ 2 \times 2 + 5 \times 3 + 1 \times 4 = 23$$

$$(5)\ 4 \times 2 + 5 \times 3 + 0 \times 4 = 23$$

$$(6)\ 5 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 4 = 23$$

Todas as soluções atendem a restrição das vinte e três rodas e ao limite máximo de carrinhos fornecida pelo problema. Nesse momento, informamos aos alunos que todas são soluções viáveis, porém como o problema nos pede o maior número de carrinhos, devemos verificar quais delas atendem, realmente, a essa proposta. Essa chamamos de solução ótima. Na solução apresentada temos:

(1) Solução viável

(2) Solução viável

(3) Solução viável

(4) Solução viável

(5) Melhor solução entre as analisadas

(6) Melhor solução entre as analisadas

Aqui temos duas soluções que podem ser consideradas como ótimas, podemos pedir que os alunos busquem outras soluções possíveis na busca de uma melhor solução. Eles também podem escolher uma dessas encontradas como resposta ao problema.

Uma resposta possível para esse problema seria: quatro carrinhos de duas rodas, cinco de três rodas e nenhum de quatro rodas. Atendendo as condições do problema.

Esse problema permite o desenvolvimento de várias habilidades relacionadas aos conhecimentos matemáticos, mas nas séries finais do ciclo I, podemos torná-lo mais próximo à otimização se colocarmos um objetivo a ser melhorado. Nosso problema era:

Queremos construir carrinhos de mão que podem ser feitos com duas, três ou quatro rodas. Dispomos de vinte e três rodas, cinco moldes para carrinhos de duas rodas, cinco moldes para carrinhos de três rodas e quatro moldes para carrinhos de quatro rodas, para a construção desses carrinhos e queremos fazer o máximo de carrinhos usando todas as rodas.

Agora acrescentaremos a seguinte informação:

> O carrinho de duas rodas para ser fabricado custa R$ 60,00. Quando acrescentamos mais rodas, para a primeira roda, ocorre um acréscimo de R$ 6,00 no custo de produção e para a segunda R$ 5,00, ou seja, o de três rodas tem um custo de R$ 66,00 e o de quatro rodas R$ 71,00. Queremos gastar o mínimo possível atendendo as condições de nosso problema inicial. Qual o maior número de carrinhos que devemos produzir?

Reconstruiremos a tabela de respostas obtida anteriormente acrescentando as informações adicionais, conforme a Tabela 3.4, e verificaremos como ficaria a nova solução.

	Carrinhos de				Custo
	2 rodas	3 rodas	4 rodas	total	
	máximo 5	máximo 5	máximo 4	máximo 14	
(1)	2	1	4	7	R$ 470,00
(2)	1	3	3	7	R$ 471,00
(3)	0	5	2	7	R$ 472,00
(4)	2	5	1	8	R$ 521,00
(5)	4	5	0	9	R$ 570,00
(6)	5	3	1	9	R$ 569,00

Tabela 3.4: Resultados obtidos para 23 rodas com custo de produção

Com a nova condição, podemos reclassificar as soluções do nosso problema como:

(1) Solução viável

(2) Solução viável

(3) Solução viável

(4) Solução viável

(5) Solução viável

(6) Solução ótima

Passamos então a ter uma única solução ao problema. Podemos ainda inserir outras variações ou outras restrições valorizando a tomada de decisão na busca de uma melhor solução para o problema.

É importante a valorização dos registros e a construção dos algoritmos das operações dentro dessa fase de aprendizagem. Com o uso de problemas de otimização, com muitas respostas viáveis e com possibilidades de escolha o aluno se coloca como protagonista de seu aprendizado, desmistificando a dificuldade e a punição do erro. Valorizar as várias respostas nos mantém motivados à busca de outras que podem ser melhores ou não. Isso promove o treino das operações e um melhor entendimento de problemas.

O problema apresentado pode sofrer várias alterações conforme as dificuldades da turma e pode ser ampliado em turmas mais desenvolvidas, preparando o aluno para o sexto ano, que abre a segunda fase do Ensino Fundamental.

3.3 Otimização no Ensino Fundamental ciclo II

Estruturado em quatro anos, o Ensino Fundamental ciclo II busca um aprimoramento dos saberes, desenvolvendo a competência leitora e escritora, bem como as habilidades de trabalhar com a informação fazendo operações e se apropriando dos registros matemáticos. Nessa seção, consideraremos problemas que podem ser resolvidos com uso de tabelas, sistemas lineares e computador.

Mais uma vez discutiremos algumas abordagens partindo de uma atividade e analisando algumas ideias que podem ser abordadas com maior relevância para as questões de Otimização Linear. As grandezas e medidas se colocam como ligação entre os conteúdos na atividade que gradativamente vai ganhando um registro algébrico e uma notação mais formal. Para resolver um problema temos de conhecer seus elementos. Em "A Arte de Resolver Problemas" temos uma boa abordagem, como segue:

> [...] Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

Polya [2006]

Em problemas abertos que podem ser modelados por Otimização Linear, usamos as ideias de Polya, primeiro devemos conhecer o problema para depois podermos modelar e aplicar os processos de solução, que podem ser gráficos, algébricos ou computacionais. Problemas de Otimização Linear usados como ferramenta metodológica nos permitem investigar vários conteúdos matemáticos nos vários níveis de ensino. Voltando ao Ensino Fundamental analisaremos o problema da fabricação de mesas e cadeiras.

Problema norteador da atividade

Queremos fazer mesas e cadeiras com o material disponível de forma a aproveitá-lo da melhor maneira possível. Dispomos de 10 placas de material, representado por folhas de sulfite, e os moldes de: cadeiras, mesas de quatro lugares e mesas de seis lugares. Qual o maior número de mesas e cadeiras podemos fazer de modo a formar jogos completos, quatro ou seis lugares, com as 10 placas?

Primeiramente, forneceremos aos alunos os materiais a serem utilizados de forma a conhecer melhor o problema e solicitar que eles relatem as semelhanças e diferenças apresentadas nas Figuras, 3.2 a 3.4, que formam os moldes das mesas e cadeiras. Medir segmentos, ângulos e retomar características de polígonos são alguns dos conteúdos trabalhados nessa fase.

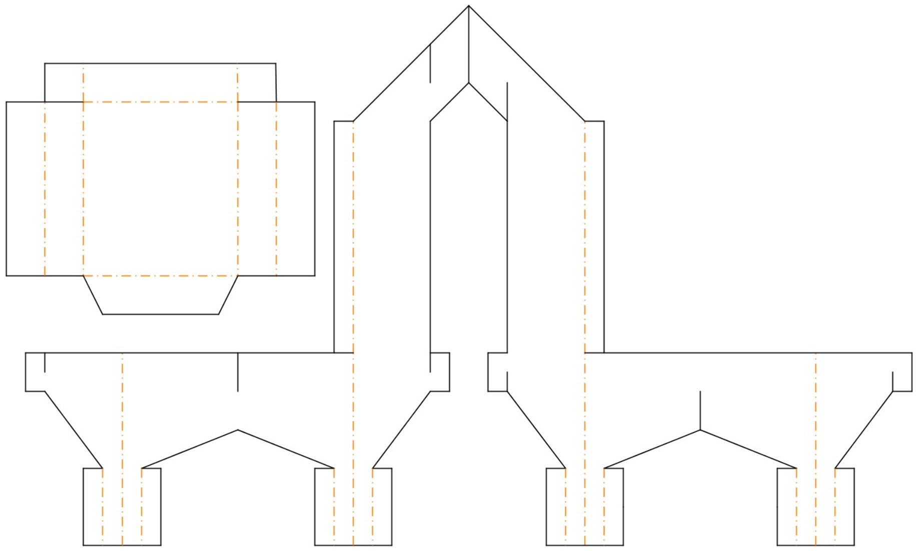


Figura 3.2: Molde para as cadeiras

As linhas cheias no molde representam corte e as "traço-e-ponto" representam dobra, tanto na cadeira quanto na mesa. Dobrar, cortar, encaixar na placa de forma a obter o melhor rendimento favorece o desenvolvimento de espacialidade, além de melhorar a coordenação motora do aluno. Essas habilidades devem ser reforçadas em todos os níveis de aprendizagem.

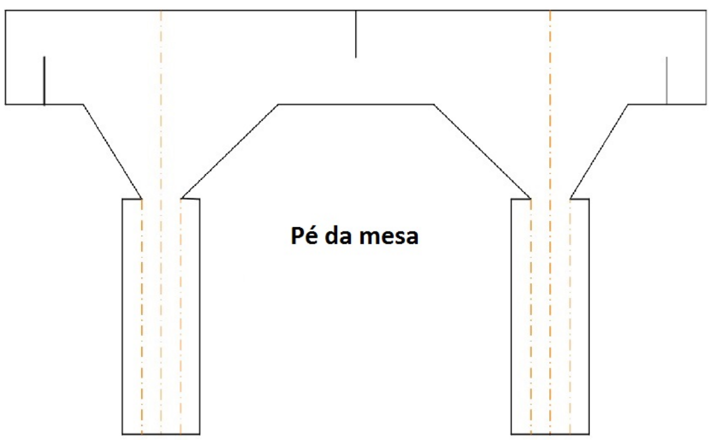


Figura 3.3: Molde para as mesas 1.

Medir os segmentos e identificar como cada uma das peças ficarão após a montagem, perceber como os encaixes se completam de forma a constituir o todo favorecem o desenvolvimento de raciocínio lógico e cria bagagem para modelagem de outros problemas semelhantes.

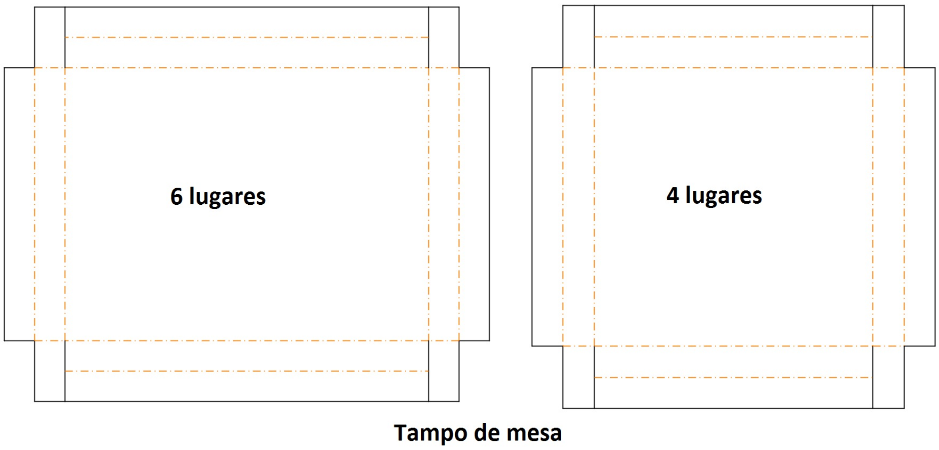


Figura 3.4: Molde para as mesas 2.

Outra ideia a ser trabalhada em uma atividade que representa a realidade são as proporções entre a realidade e o modelo apresentado. Dessa forma, o contexto com a realidade do aluno permeia seu aprendizado e suas descobertas.

Voltando a modelagem matemática, vamos supor observações que podem ser feitas por alunos com os moldes em mãos. Cada folha de permite a confecção de uma das seguintes opções:

- Duas cadeiras completas.
- Pés suficientes para três mesas.
- Dois tampos de mesa de 6 lugares.
- Dois tampos de mesa de 4 lugares.
- Um tampo de mesa de 4 lugares mais uma cadeira completa.
- Um tampo de mesa de 6 lugares mais uma cadeira completa.
- Uma mesa de 6 lugares completa.
- Uma mesa de 4 lugares completa.

Lembremos de que em nosso problema inicial, dispomos de dez placas e queremos jogos completos, quatro ou seis cadeiras com mesa. Com essa informação um dos grupos colocou como solução possível, fazer com uma placa, três pés de mesa, três tampos de seis lugares com uma cadeira cada um e com as placas restantes, dezesseis cadeiras. Dessa forma, obtiveram três jogos completos de seis cadeiras e sobrou uma cadeira.

Com esse problema interagimos de forma a construir uma ideia e propor uma solução, agora podemos expandir a ideia de forma a trabalhar com restrições e variáveis.

Na venda individual, cada cadeira tem lucro de R$ 7,20, cada mesa de seis lugares R$ 15,35 e cada mesa de quatro lugares R$ 11,75. Qual foi o lucro na solução obtida? Como fica a expressão que representa esse lucro?

Observemos que na solução encontrada, obtivemos 3 mesas de seis lugares e 19 cadeiras, podendo escrever a expressão da seguinte forma:

$$3 \times 15,35 + 19 \times 7,20 = 182,85$$

Logo, o lucro na venda de peças individuais foi de R$ 182,85. Já podemos colocar a ideia de variáveis, a quantidade de cada peça varia conforme as diferentes soluções da turma, assim podemos escrever uma expressão aberta para o cálculo do lucro como sendo: $z = 15,35\,s + 11,75\,q + 7,2\,c$, onde z é o lucro, s o número de mesa de seis cadeiras, q o número de mesas de quatro cadeiras e c o número de cadeiras. Percebemos que o lucro depende do número individual de cada item produzido, temos nesse caso três variáveis que controlam o lucro final.

No Ensino Fundamental é trabalhada a ideia de equações e inequações de até duas incógnitas, bem como os sistemas de equações de duas variáveis. Por isso restringiremos nosso problema inicial em jogos de seis cadeiras, que chamaremos de x, e jogos de quatro cadeiras, que chamaremos de y, e trabalharemos com representações no plano cartesiano. Essas ideias serão mais abrangentes no ensino médio com o estudo de sistemas com mais variáveis e a notação de matriz.

Agora consideraremos que o lucro no jogo de quatro cadeiras é de R$ 45,00 e no de seis cadeiras R$ 65,00. Dessa forma, a expressão do lucro ficaria $z = 65\,x + 45\,y$,, sendo o lucro nosso objetivo principal.

Inicialmente, analisaremos o problema como equação de duas incógnitas, equações diofantinas, propondo soluções inteiras e depois propondo outras características ao nosso problema base. Fixaremos, inicialmente, valores para o lucro z e buscaremos a quantidade de jogos de cada tipo para atender a solução.

Queremos um lucro de R$ 2000,00 na venda dos jogos de mesa. Quantos jogos de cada tipo devemos produzir? Nessa situação, a equação obtida é $65x + 45y = 2000$ e todas as soluções inteiras dessa equação nos servem como resposta. Podemos solicitar aos alunos que, de forma empírica (tentativas), busque as soluções possíveis. Dessa forma, estaremos desenvolvendo as várias possibilidades de resposta nesse tipo de equação. Admitindo soluções no Conjunto dos Números Reais, podemos representar a solução no Plano Cartesiano e dessa forma observar se temos mais de uma solução inteira não negativa. Uma restrição natural de nosso problema é a não negatividade, não podemos produzir menos um jogo de mesa.

Usando um software como o GeoGebra [2016], podemos representar facilmente essa equação no Plano Cartesiano, conforme ilustrado na Figura 3.5. Caminhando sobre a reta, verificaremos que apesar de termos infinitas soluções reais, as inteiras são finitas, pois não são permitidas soluções negativas.

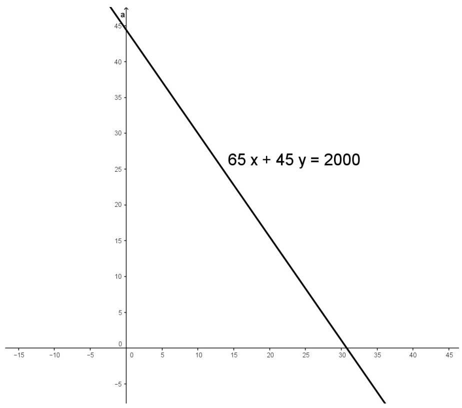


Figura 3.5: Lucro de R$ 2000,00

Podemos transformar esse tipo de equação para uma única variável fixando um dos valores. Por exemplo: Se produzirmos 19 jogos de seis lugares na busca do lucro de R$ 2000,00, quantos jogos de quatro lugares devemos produzir?

Substituindo em x obtemos uma equação com a incógnita y como segue:

- $65 \times 19 + 45y = 2000$, efetuando o produto temos:
- $1235 + 45y = 2000$, tirando 1235 nos dois membros teremos:
- $45y = 795$, dividindo os dois membros por 45 obtemos;
- $y = 17$, ou seja, devemos produzir 17 jogos de 4 cadeiras.

Ainda na linha de uma variável para depois estender a duas, levamos a ideia da desigualdade. Se quisermos ter um lucro maior de R$ 2000,00, já tendo produzido 19 jogos de seis lugares, quantos jogos de quatro lugares devemos produzir? Nessa situação, obtemos a expressão $1235 + 45y > 2000$ e verificaremos que deverá ser produzido mais de 17 jogos de quatro cadeiras, $y > 17$.

Antes de impormos as restrições na linha de um problema de otimização linear, observaremos uma variação de um sistema linear de duas incógnitas, assunto abordado no oitavo ano do Ensino Fundamental. Queremos ter um lucro de R$ 2000,00 produzindo exatamente 40 jogos de mesa. Quantos jogos de seis cadeiras devemos produzir? E de quatro cadeiras?

Com o acréscimo dessa informação passamos a ter uma nova equação de duas variáveis, $x+y=40$, onde x é o número de jogos de seis cadeiras e y o de quatro cadeiras. Juntando as duas equações temos o sistema:

$$\begin{cases} 65x + 45y = 2000 & (1) \\ x + y = 40 & (2) \end{cases}$$

Representando a segunda equação no GeoGebra [2016], verificamos a resposta do sistema pelo método gráfico, conforme ilustrado na Figura 3.6, onde na interseção das retas encontramos nossa resposta.

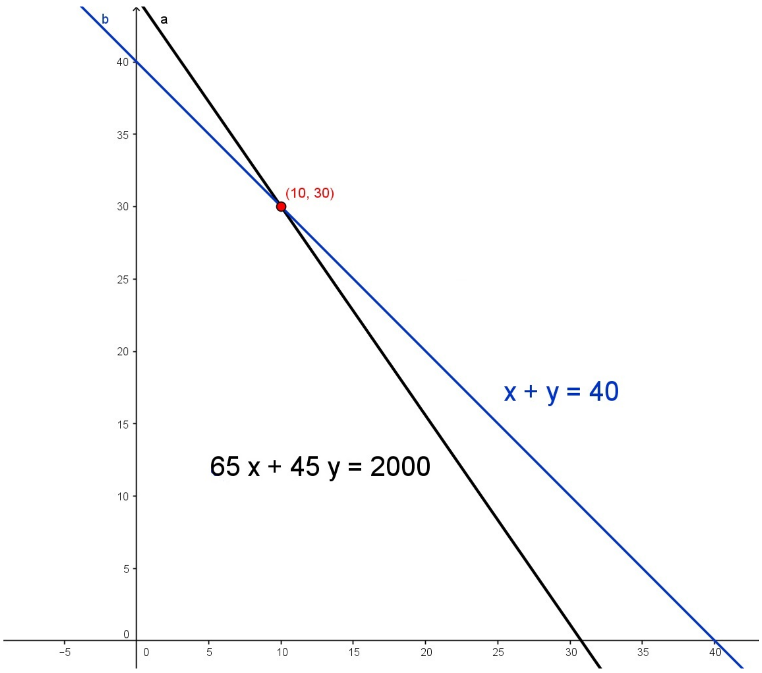


Figura 3.6: Resolução gráfica do sistema das mesas

Observando no gráfico, obtemos que devem ser produzidos 10 jogos de seis cadeiras e 30 jogos de quatro cadeiras. Podemos ainda resolver nesse nível de ensino e aprendizagem pelo método da substituição que consiste em substituir uma equação na outra como segue:

- $\begin{cases} 65x + 45y = 2000 & (1) \\ x + y = 40 & (2) \end{cases}$, isolamos da equação (2) uma das incógnitas obtendo:

- $y = 40 - x$, e substituímos na equação (1):

- $65x + 45(40 - x) = 2000$, que resolvendo obtemos:

- $x = 10$, que substituindo em (2) teremos $y = 30$.

Outra forma seria o método da adição, que traz as operações de Gauss-Jordan, mesmo sem ainda ter se estudado matriz.

- $\begin{cases} 65x + 45y = 2000 & (1) \\ x + y = 40 & (2) \end{cases}$, multiplicamos a equação (2) por -45, obtendo o sistema modificado:

- $\begin{cases} 65x + 45y = 2000 & (1) \\ -45x - 45y = -1800 & (3) \end{cases}$, e somamos a equação (1) na (3) tendo:

- $20x = 200$, logo:

- $x = 10$, que substituindo em (2) teremos $y = 30$

Agora sim podemos propor um problema mais amplo, com mais características de otimização, pois já construímos alguns conhecimentos prévios que permitiram o encaminhamento da solução.

Pensemos no seguinte problema:
Queremos fazer mesas e cadeiras, de modo a compor jogos de seis e quatro cadeiras. Sabemos que o lucro na venda desses jogos é R$ 65,00 e R$ 45,00, respectivamente. Analisando a produção percebemos que conseguimos produzir, no máximo, 40 mesas por dia indiferente do número de lugares e, no máximo, 220 cadeiras. Quantos jogos devemos produzir de forma a obter o maior lucro possível? Qual será esse lucro?

No problema proposto, com informações vivenciadas na situação, temos duas variáveis que controlam o lucro, nosso objetivo, e um conjunto de restrições que devem ser atendidas na resolução. Inicialmente, buscaremos as expressões matemáticas que compõe nosso objetivo e as restrições apresentadas:

- Nosso objetivo é maximizar o lucro que pode ser representado pela equação matemática: $z = 65x + 45y$, onde x é o número de jogos de seis cadeiras e y o de quatro cadeiras.

- O número máximo de mesas é 40, logo $x + y \leqslant 40$

- Podemos fazer, no máximo, 220 cadeiras, então $6x + 4y \leqslant 220$

- Não podemos ter número de jogos negativos, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$

Dessa forma, podemos representar nosso problema da seguinte forma:

$$\text{Maximizar } z = 65x + 45y \quad (0)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} x + y \leqslant 40 & (1) \\ 6x + 4y \leqslant 220 & (2) \\ x \geqslant 0 & (3) \\ y \geqslant 0 & (4) \end{cases}$$

Temos em (0), nossa função objetivo que é maximizar o lucro z. As expressões (1), (2), (3), e (4), representam as restrições, de número máximo de mesas, número máximo de cadeiras e não negatividade das variáveis x e y, respectivamente, em que x é o número de jogos de seis cadeiras e y é o número de jogos de quatro cadeiras.

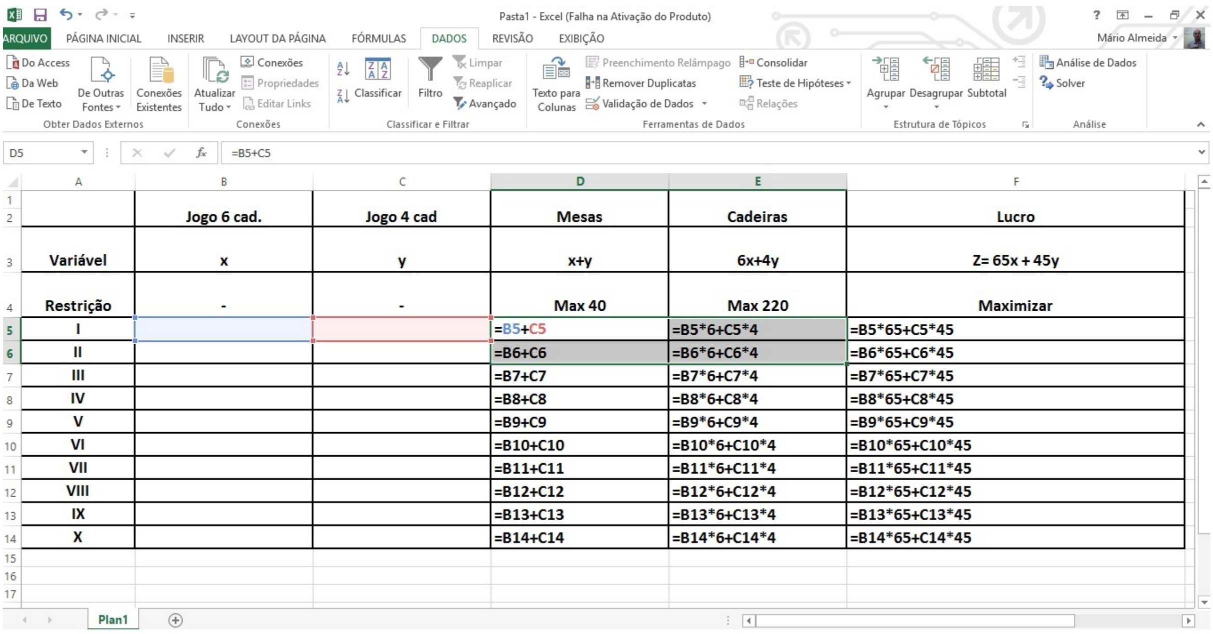
Encaminharemos a solução do problema construindo uma tabela, conforme a Tabela 3.5, com as informações apresentadas, respeitando as restrições.

	Jogo 6 cad.	Jogo 4 cad	Mesas	Cadeiras	Lucro
Variável	x	y	$x+y$	$6x+4y$	$z=65x+45y$
Restrição	-	-	Max 40	Max 220	Maximizar
I	20	20	40	200	2200
II	10	30	40	180	2000
III	5	35	40	170	1900
IV	35	2	37	218	2365
V	30	10	40	220	2400

Tabela 3.5: Problema dos jogos de mesas e cadeiras

Observamos que todas as soluções apresentadas na Tabela 3.5 respeitam as restrições, são soluções viáveis, e que a solução V representa o máximo lucro que era nosso objetivo, solução ótima. Por essa solução, a resposta do problema é 30 jogos de seis cadeiras, 10 jogos de quatro cadeiras, tendo um lucro de R$ 2400,00.

Um facilitador para cálculos em tabelas seriam planilhas eletrônicas como o Excel, pois se programado corretamente faz os cálculos de forma rápida. Como exemplo poderíamos montar uma tabela semelhante à Tabela 3.5 na planilha e ir atribuindo valores para as variáveis para ver o que ocorre com o lucro, veja a Figura 3.7.



	A	B	C	D	E	F
2		Jogo 6 cad.	Jogo 4 cad	Mesas	Cadeiras	Lucro
3	Variável	x	y	x+y	6x+4y	Z= 65x + 45y
4	Restrição	-	-	Max 40	Max 220	Maximizar
5	I			=B5+C5	=B5*6+C5*4	=B5*65+C5*45
6	II			=B6+C6	=B6*6+C6*4	=B6*65+C6*45
7	III			=B7+C7	=B7*6+C7*4	=B7*65+C7*45
8	IV			=B8+C8	=B8*6+C8*4	=B8*65+C8*45
9	V			=B9+C9	=B9*6+C9*4	=B9*65+C9*45
10	VI			=B10+C10	=B10*6+C10*4	=B10*65+C10*45
11	VII			=B11+C11	=B11*6+C11*4	=B11*65+C11*45
12	VIII			=B12+C12	=B12*6+C12*4	=B12*65+C12*45
13	IX			=B13+C13	=B13*6+C13*4	=B13*65+C13*45
14	X			=B14+C14	=B14*6+C14*4	=B14*65+C14*45

Figura 3.7: Fórmulas do Excel para o problema dos jogos de mesas.

Vinculamos os cálculos às nossas variáveis que são mesas de seis cadeiras e mesas de quatro cadeiras e solicitamos aos alunos que vão atribuindo valores às variáveis e observando o que ocorre com o lucro e as restrições, conforme ilustrado na Figura 3.8. Verificando se a solução proposta é viável ou atribuir uma nova na busca da melhor solução entre as analisadas.

	Jogo 6 cad.	Jogo 4 cad	Mesas	Cadeiras	Lucro
Variável	x	y	x+y	6x+4y	Z= 65x + 45y
Restrição	-	-	Max 40	Max 220	Maximizar
I	10	20	30	140	R$ 1.550,00
II	20	10	30	160	R$ 1.750,00
III	25	10	35	190	R$ 2.075,00
IV	25	15	40	210	R$ 2.300,00
V	26	14	40	212	R$ 2.320,00
VI	27	13	40	214	R$ 2.340,00
VII	28	12	40	216	R$ 2.360,00
VIII	29	11	40	218	R$ 2.380,00
IX	30	10	40	220	R$ 2.400,00
X	31	9	40	222	R$ 2.420,00

Figura 3.8: Tabela de soluções para o problema dos jogos de mesas.

Na última linha da tabela, da Figura 3.8, apesar de termos um lucro maior, a solução não é viável por ter ultrapassado a restrição do número de cadeiras, mantendo a mesma solução anterior.

Outras formas poderiam ainda ser exploradas conforme a turma. O uso de gráficos pode favorecer o entendimento do problema e o encaminhamento da solução que pode ser melhor explorada no Ensino Médio quando aprofundamos alguns conceitos e exploramos novas ferramentas.

3.4 Otimização no Ensino Médio

Dividido em três anos, o Ensino Médio tem por finalidade o preparo para o mercado de trabalho e a formação de um cidadão crítico na busca de novos saberes. Não traz em sua base uma formação técnica e sim um ponto de partida para a área de estudo escolhida no futuro, pelo educando. Essa modalidade de ensino trabalha conceitos mais amplos, não direcionados a apenas uma profissão, buscando criar um alicerce para que o estudante prossiga em seus objetivos.

Os problemas que envolvem tomadas de decisão e se colocam de maneira mais aberta, com mais de uma solução possível, são importantes ferramentas de motivação ao estudo dos diversos conteúdos abordados pela matemática. Permitem o desenvolvimento de habilidades que constituirão competências essenciais em sua vida futura. Os problemas que envolvem ideias de Otimização Linear, nesse contexto, nos são de grande valia.

Na construção de modelos matemáticos para resolver problemas, o uso de equações e funções são fundamentais. Assim, a linguagem matemática se coloca como elo de comunicação entre diferentes áreas do conhecimento, ferramenta para o entendimento das outras áreas da ciência. Dessa forma, quando equacionamos um problema estamos passando-o para a linguagem matemática como reafirma George Polya, na página 84, em a "Arte de Resolver Problemas".

> Equacionar significa expressar por símbolos matemáticos uma condicionante que está formulada por palavras; é a tradução da linguagem corrente para a linguagem das fórmulas matemáticas. As dificuldades que podem surgir no equacionamento são dificuldades de tradução.
>
> Polya [2006]

O olhar da matemática como linguagem nos coloca de frente com a modelagem onde passamos o texto da língua pátria para a linguagem matemática. A apropriação de diferentes representações e registros se fundamentam nesse período e a competência leitora e escritora se colocam como fundamentais. Quando problematizamos situações cotidianas, próximas da realidade do aluno, tornamos as ideias matemáticas mais significativas e próximas do aprendiz.

Iniciaremos nossa abordagem da otimização no Ensino Médio por uma situação que envolva o carro bicombustível. Devemos usar álcool, gasolina ou a mistura desses dois combustíveis. Observando manuais de alguns fabricantes de automóveis, podemos construir nosso problema norteador que servirá de base para a investigação de alguns conceitos matemáticos.

Situação de consumo de combustível

Em um determinado posto da cidade, a gasolina custa R$ 3,69 e o etanol custa R$ 2,65. Consideremos carros populares que fazem, com etanol, 9,1 km/l (cidade) e 9,6 km/l (estrada); se abastecidas com gasolina, as médias ficam em 13,1 km/l (cidade) e 14,3 km/l (estrada). Para facilitar as análises, utilizaremos que na mistura de combustíveis o consumo é diretamente proporcional à mistura e em situações ideais de manutenção e uso.
Um carro popular tem tanque de combustível, em média, de 50 litros.

A situação nos coloca de frente a um problema real e os questionamentos feitos sobre a situação, desencadeiam várias ideias importantes na aplicação dos conteúdos a serem abordados nos vários anos do Ensino Médio. Analisando nosso problema, percebemos que as grandezas variáveis são: litros de álcool, x_1, e litros de gasolina, x_2. Todas as outras grandezas envolvidas na situação são controladas por elas. Inicialmente, vamos observá-las como Função Afim.

Analisando a situação na cidade temos a função $f(x_1)$ que representa o percurso com álcool, $f(x_2)$ que representa o percurso com gasolina, $p(x_1)$ que representa o gasto com álcool e $p(x_2)$ o gasto com gasolina. Observemos as leis das funções com base em nossa situação problema:

- $f(x_1) = 9,1x_1$
- $g(x_2) = 13,1x_2$
- $p(x_1) = 2,65x_1$
- $q(x_2) = 3,69x_2$

Que podemos representar no plano cartesiano, conforme ilustrado na Figura 3.9, observando as inclinações das retas formadas e algumas características dessas funções.

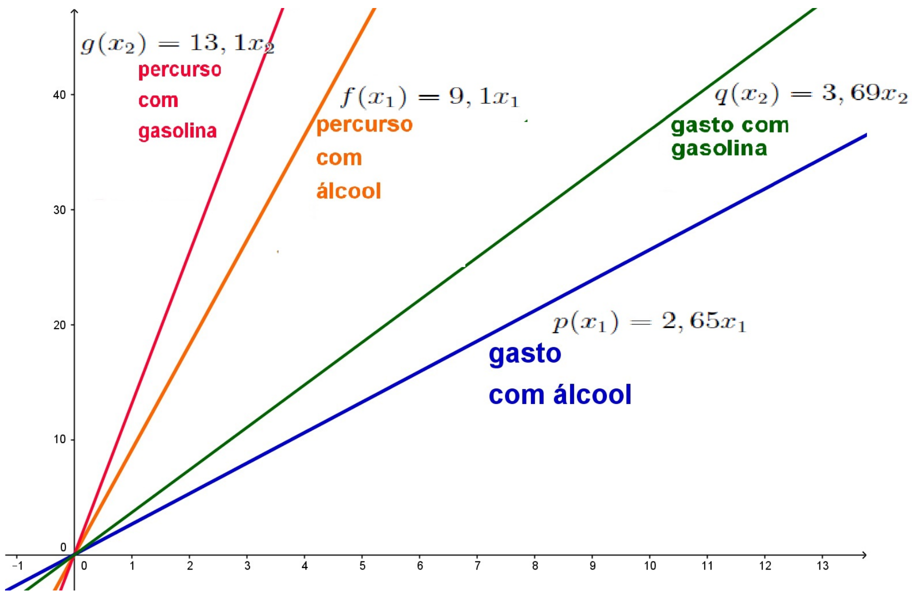


Figura 3.9: Função Afim – Percurso e Gasto.

Podemos escrever funções de duas variáveis, pensando na mistura de combustíveis na cidade, teremos para o percurso em km a função $f(x_1, x_2) = 9,1x_1 + 13,1x_2$ e para o custo $g(x_1, x_2) = 2,65x_1 + 3,69x_2$. Assim, podemos verificar o percurso máximo e o gasto para algumas situações de abastecimento representados na Tabela 3.6.

Opção	Álcool (l)	Gasolina (l)	Percurso (km)	Valor (R$)
Variável	x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = 9,1x_1 + 13,1x_2$	$g(x_1, x_2) = 2,65x_1 + 3,69x_2$
(1)	50	0	455	132,50
(2)	0	50	655	184,50
(3)	25	25	555	158,50
(4)	10	40	615	174,10
(5)	40	10	495	142,90

Tabela 3.6: Relação entre alguns custos e percurso na cidade.

Analisando a situação descrita, discutiremos as questões de Domínio e Imagem das Funções. Na Função Afim, o domínio e a imagem percorrem o Conjunto dos Números Reais, mas em nossa situação estamos restritos aos valores maiores ou iguais a zero. Temos: $x_1 \geqslant 0$ e $x_2 \geqslant 0$ como restrição implícita no problema. Como todas elas são crescentes, teremos as Imagens também maiores ou iguais a zero.

Fixando valores de Imagens, limite de valor ou distância, obtemos equações com duas variáveis, em outros problemas poderíamos ter mais, onde podemos buscar soluções e representar graficamente. Supondo que queremos abastecer com exatamente R$ 100,00, quantos litros de álcool ou de gasolina podemos colocar? Mantendo a notação inicial temos: $2,65x_1 + 3,69x_2 = 100$, uma equação linear de duas incógnitas que podemos representar em uma tabela com algumas de suas soluções, Tabela 3.7, ou em forma de um gráfico cartesiano colocando x_1 no eixo das abscissas (x) e x_2 no eixo das ordenadas (y), Figura 3.10.

Opção	Álcool (l)	Gasolina (l)	Percurso (km)	Valor (R$)
Variável	x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = 9,1x_1 + 13,1x_2$	$g(x_1, x_2) = 2,65x_1 + 3,69x_2$
(1)	37,73	0	343,3	100
(2)	0	27,1	355	100
(3)	9,88	20	351,9	100
(4)	23,81	10	347,6	100
(5)	30,77	5	345,5	100

Tabela 3.7: Algumas possibilidades de abastecimento com R$ 100,00

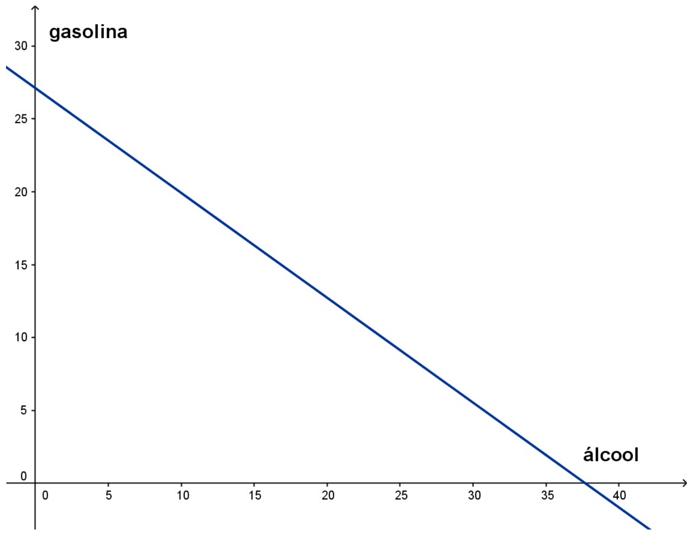


Figura 3.10: Algumas possibilidades de abastecimento com R$ 100,00

- Podemos também estipular que queremos percorrer com esses R$ 100,00 a distância de 350km, nesse caso passaremos a ter juntamente com a equação do valor, $2,65x_1 + 3,69x_2 = 100$, a da distância, $9,1x_1 + 13,1x_2 = 350$, obtendo o Sistema de Equações Lineares:

$$\begin{cases} 2,65x_1 + 3,69x_2 = 100 \\ 9,1x_1 + 13,1x_2 = 350 \end{cases}$$

Podemos resolver esse sistema por diversos métodos e também representá-lo graficamente, Figura 3.11. Inicialmente, retomaremos que um Sistema de Equações Lineares pode ser classificado como:

- Impossível **(SI)** – Não tem solução.
- Possível, tem solução, podendo ser:
  - Determinado **(SPD)**, quando tem uma única solução.
  - Indeterminado **(SPI)**, quando permite infinitas soluções.

Resolveremos esse sistema usando a notação de matrizes com o escalonamento de Gauss-Jordan, mas poderíamos usar qualquer um dos outros métodos.

Nosso sistema, $\begin{cases} 2,65x_1 + 3,69x_2 = 100 \\ 9,1x_1 + 13,1x_2 = 350 \end{cases}$, pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 2,65 & 3,69 \\ 9,1 & 13,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 350 \end{pmatrix}$$

Do sistema escrito na forma de produto de matrizes, retiramos as variáveis escrevendo a matriz estendida do sistema

$$\begin{pmatrix} 2,65 & 3,69 & 100 \\ 9,1 & 13,1 & 350 \end{pmatrix}$$

Com as operações elementares de matrizes de adição, multiplicação por escalar e troca de posição das linhas na matriz obtemos a matriz em sua forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 2,65 & 3,69 & 100 \\ 9,1 & 13,1 & 350 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3,69}{2,65} & \frac{100}{2,65} \\ 0 & \frac{1,136}{2,65} & \frac{17,5}{2,65} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3,69}{2,65} & \frac{100}{2,65} \\ 0 & 1 & \frac{17,5}{1,136} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{49,025}{3,0104} \\ 0 & 1 & \frac{17,5}{1,136} \end{pmatrix}$$

Transformando as frações em números decimais aproximados, obtemos a matriz e dela voltamos ao sistema equivalente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{49,025}{3,0104} \\ 0 & 1 & \frac{17,5}{1,136} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16,28 \\ 0 & 1 & 15,4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,29 \\ 15,4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 16,29 \\ x_2 = 15,4 \end{cases}$$

Assim, temos que a solução do sistema é 16,29 litros de álcool e 15,4 litros de gasolina, conforme ilustrado na Figura 3.11.

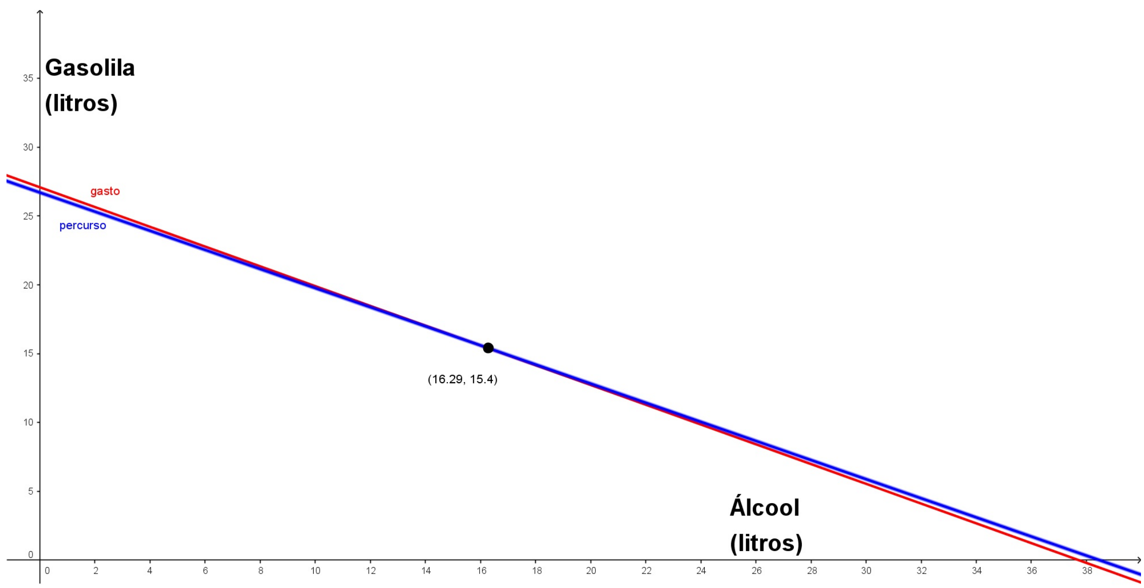


Figura 3.11: Gráfico do sistema para percorrer 350km com R$ 100,00

Avançando a ideia das Equações Lineares e seus Sistemas, podemos investigar situações com mais variáveis e direcionar a ideia a problemas abertos. Analisaremos uma situação que envolva nutrição.

Situação de consumo de alimentos

Uma família de quatro pessoas, passando por dificuldades financeiras resolveram entender melhor seus gastos com alimentação. Mas também estão preocupados com a saúde da família. Após uma pesquisa de preços conseguiram chegar a alguns valores de alimentos, depois de prontos por quilo: arroz R$ 4,85, feijão R$ 7,25 e peito de frango grelhado R$ 9,45. Em uma busca na internet, observaram os valores nutricionais para cada 100g do alimento pronto e resumiram em uma tabela.

Alimento pronto	Arroz (100g)	Feijão (100g)	Frango (100g)
Proteínas	2,5g	4,8g	32g
Colesterol	0	0	89mg
Carboidratos	28,1g	13,6g	0
Fibras	1,6g	8,5g	0
Calorias (kcal)	128 kcal	320 kcal	159 kcal

Observaram que a quantidade mínima de proteína diária é 50g, a de colesterol 300mg, a de fibra alimentar 25g, a de calorias 2000kcal e de carboidratos 300g.

Sejam x_1 a massa de arroz, x_2 a massa de feijão e x_3 a massa de frango, todos em quilogramas, obtemos funções em relação das três variáveis para o valor a ser gasto e as quantidades de nutrientes fornecidos como segue:

- Gasto (R$): $g(x_1, x_2, x_3) = 4,85x_1 + 7,85x_2 + 9,45x_3$
- Proteínas (g): $p(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 48x_2 + 320x_3$
- Colesterol (mg): $c(x_1, x_2, x_3) = 890x_3$
- Carboidratos (g): $a(x_1, x_2, x_3) = 281x_1 + 136x_2$
- Fibras (g): $f(x_1, x_2, x_3) = 16x_1 + 85x_2$
- Calorias (kcal): $e(x_1, x_2, x_3) = 1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3$

Podemos acrescentar nessas funções as restrições apresentadas pelo problema de forma a encaminhar um melhor conhecimento do mesmo como segue:

- Gasto (R$): $g(x_1, x_2, x_3) = 4,85x_1 + 7,85x_2 + 9,45x_3$,queremos minimizar, já que se busca economia.
- Proteínas (g): $p(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 48x_2 + 320x_3 \geqslant 50$
- Colesterol (mg): $c(x_1, x_2, x_3) = 890x_3 \geqslant 300$
- Carboidratos (g): $a(x_1, x_2, x_3) = 281x_1 + 136x_2 \geqslant 300$
- Fibras (g): $f(x_1, x_2, x_3) = 16x_1 + 85x_2 \geqslant 25$
- Calorias (kcal): $e(x_1, x_2, x_3) = 1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3 \geqslant 2000$

O problema passa a ser representado matematicamente, em que x_1 é a massa de arroz, x_2 a massa de feijão e x_3 a massa de frango, da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } g(x_1, x_2, x_3) = 4,85x_1 + 7,85x_2 + 9,45x_3 \quad (0)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} 25x_1 + 48x_2 + 320x_3 \geqslant 50 & (1) \\ 890x_3 \geqslant 300 & (2) \\ 281x_1 + 136x_2 \geqslant 300 & (3) \\ 16x_1 + 85x_2 \geqslant 25 & (4) \\ 1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3 \geqslant 2000 & (5) \\ x_1 \geqslant 0 & (6) \\ x_2 \geqslant 0 & (7) \\ x_3 \geqslant 0 & (8) \end{cases}$$

Desse modo, já estamos com nosso problema modelado como um problema de Otimização Linear, mas vamos, primeiramente, explorar alguns conceitos do Ensino Médio, para depois resolver pelos métodos da Programação Linear.

Considerando apenas proteínas, carboidratos e calorias com a condição de igualdade teremos o Sistema de Equações Lineares de três equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} 25x_1 + 48x_2 + 320x_3 = 50 \\ 281x_1 + 136x_2 = 300 \\ 1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3 = 2000 \end{cases} .$$

Esse tipo de sistema pode ser interpretado como planos no espaço e sua solução é dada pela interseção desses planos. Buscamos solução única, se tiver, ou condições para que possamos entender o problema. Como no problema anterior usamos Gauss-Jordan, aqui analisaremos pelo Método de Cramer, uma das maneiras de se resolver Sistemas Lineares. Para isso, escreveremos matricialmente o sistema:

$$\begin{pmatrix} 25 & 48 & 320 \\ 281 & 136 & 0 \\ 1280 & 3200 & 1590 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 300 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

Primeiramente, verificamos se o sistema tem solução única. Segundo a Regra de Cramer, isso ocorre se o determinante da matriz do sistema for diferente de zero.

$$Det \begin{pmatrix} 25 & 48 & 320 \\ 281 & 136 & 0 \\ 1280 & 3200 & 1590 \end{pmatrix} = Det(A)$$

$Det(A) = 25 \times (136 \times 1590 - 0 \times 3200) - 48 \times (281 \times 1590 - 0 \times 1280) + 320 \times (281 \times 3200 - 136 \times 1280) = 215998480$

Como o determinante da matriz principal é diferente de zero, o sistema tem solução e é única. Para obtê-la, calculamos os determinantes das matrizes formadas substituindo o vetor dos termos independentes na coluna da variável correspondente. Chamaremos aqui de $Det(A_{x_1})$ o determinante formado, trocando a primeira coluna, $Det(A_{x_2})$ o determinante formado, trocando a segunda coluna e $Det(A_{x_3})$ o determinante formado, trocando a terceira coluna.

$$Det \begin{pmatrix} 50 & 48 & 320 \\ 300 & 136 & 0 \\ 2000 & 3200 & 1590 \end{pmatrix} = Det(A_{x_1})$$

$50 \times (136 \times 1590 - 0 \times 3200) - 48 \times (300 \times 1590 - 0 \times 2000) + 320 \times (300 \times 3200 - 2000 \times 136) = 208076000$

$$Det \begin{pmatrix} 25 & 50 & 320 \\ 281 & 300 & 0 \\ 1280 & 2000 & 1590 \end{pmatrix} = Det(A_{x_2})$$

$Det(A_{x_2}) = 25 \times (300 \times 1590 - 0 \times 2000) - 50 \times (281 \times 1590 - 0 \times 1280) + 320 \times (281 \times 2000 - 1280 \times 300) = 46545500$

$$Det \begin{pmatrix} 25 & 48 & 50 \\ 281 & 136 & 300 \\ 1280 & 3200 & 2000 \end{pmatrix} = Det(A_{x_3})$$

$Det(A_{x_3}) = 2,5 \times (13,6 \times 2000 - 300 \times 320) - 4,8 \times (28,1 \times 2000 - 300 \times 128) + 50 \times (28,1 \times 320 - 13,6 \times 128) = 10512000$

A solução do sistema será dada pelo quociente entre o determinante com o resultado e o determinante da matriz do sistema $x_n = \frac{Det(A_{x_n})}{Det(A)}$.

$$x_1 = \frac{Det(A_{x_1})}{Det(A)} = \frac{208076000}{215998480} = 0,9633$$

$$x_2 = \frac{Det(A_{x_2})}{Det(A)} = \frac{46545500}{215998480} = 0,2155$$

$$x_3 = \frac{Det(A_{x_3})}{Det(A)} = \frac{10512000}{215998480} = 0,0487$$

Com isso, temos a solução do sistema $S = (x_1;\ x_2;\ x_3) = (0,9633;\ 0,2155;\ 0,0487)$, que nos serve bem como solução do sistema. Retornando ao problema inicial, teremos como resposta: 963g de arroz, 216g de feijão e 49g de filé de frango. Essa resposta realmente atendem as restrições do problema? Elas atendem também as outras restrições? Cabe aqui uma discussão de que nem toda solução encontrada soluciona o problema, ou seja, o sistema ter solução não implica em termos nossa situação resolvida.

Voltando ao problema inicial, verificamos que as restrições são abertas e que podemos alterar os valores de referência, após a igualdade, de forma a buscar novas soluções positivas que atendam às restrições impostas. Isso já está ligado à resolução dos problemas de otimização.

Com as respostas obtidas em nosso sistema, retornaremos ao problema inicial para verificar se ela atende a todas as características impostas em nosso modelo.

Minimizar $g(0,9633; 0,2155; 0,0487) = 4,85 \times 0,9633 + 7,85 \times 0,2155 + 9,45 \times 0,0487 = 6,84 \quad (0)$

$$\text{Sujeito a} \begin{cases} 25 \times 0,9633 + 48 \times 0,2155 + 320 \times 0,0487 = 50 \geqslant 50 & (V) \\ 890 \times 0,0487 = 43 \geqslant 300 & (F) \\ 281 \times 0,9633 + 136 \times 0,2155 = 300 \geqslant 300 & (V) \\ 16 \times 0,9633 + 85 \times 0,2155 = 34 \geqslant 25 & (V) \\ 1280 \times 0,9633 + 3200 \times 0,2155 + 1590 \times 0,0487 = 2000 \geqslant 2000 & (V) \\ x_1 = 0,9633 \geqslant 0 & (V) \\ x_2 = 0,2155 \geqslant 0 & (V) \\ x_3 = 0,0487 \geqslant 0 & (V) \end{cases}$$

Verificamos que somente a equação (2) do sistema não é atendida, pois foi a única que não implicou em verdadeira. Dessa forma, a solução encontrada só não atende a restrição do colesterol, atendendo a todas as outras. Poderíamos aqui buscar outras soluções para o problema.

Problemas abertos como esses permitem a investigação de diversos conceitos e o uso das tecnologias. A tomada de decisão e a comparação de resultados se colocam de forma a desenvolver diversas habilidades e competências. O Ensino Médio, atendendo a Legislação Nacional (Lei 9394/1996), com o preparo para o mundo do trabalho nos permite a exploração dessa e outras ferramentas. No próximo capítulo, resolveremos esse problema na íntegra, de forma a discutir os métodos de Programação Linear e alguns de seus benefícios na aprendizagem dos alunos.

Capítulo 4

Como aplicar a Otimização Linear na Educação de Base

Nesse capítulo mostraremos como usar a Otimização Linear e suas técnicas na Educação de Base para resolver um problema cotidiano.

As soluções de problemas abertos, com várias possibilidades de soluções, nos permitem interferências e tomadas de decisões. A busca da melhor solução, Solução Ótima, proporciona o desenvolvimento de diversas habilidades necessárias ao aprendizado. Nesse contexto, a otimização, mais precisamente a Otimização Linear, serve de ferramenta à análise, modelagem e solução de diversos problemas do cotidiano. Somos provocados a todo momento a escolher entre várias possibilidades e pescar dentro das opções existentes a que mais nos convém.

Partiremos, inicialmente, do problema da dieta, transcrito abaixo, onde queremos gastar o menor valor possível, atendendo às necessidades diárias de nutrição. Dentre as várias possibilidades queremos escolher a melhor. Lembremos de que poderíamos ter um número maior de possibilidades de alimentos, mas para nosso estudo nos restringimos a três.

Situação de consumo de alimentos
Uma família de quatro pessoas, passando por dificuldades financeiras resolveu entender melhor seus gastos com alimentação. Mas a família também está preocupada com a saúde. Após uma pesquisa, os preços de alguns alimentos depois de prontos por quilo, foram determinados: arroz R$ 4,85, feijão R$ 7,25 e peito de frango grelhado R$ 9,45.
Em uma busca na internet, os valores nutricionais para cada 100g do alimento pronto foram obtidos e resumidos na Tabela 4.1 a seguir:

Alimento pronto	Arroz (100g)	Feijão (100g)	Frango (100g)
Proteínas	2,5g	4,8g	32g
Colesterol	0	0	89mg
Carboidratos	28,1g	13,6g	0
Fibras	1,6g	8,5g	0
Calorias (kcal)	128 kcal	320 kcal	159 kcal

Tabela 4.1: Valores nutricionais

Além disso, a família descobriu em sua busca que a quantidade mínima de proteína diária é 50g, a de colesterol 300mg, a de fibra alimentar 25g, a de calorias 2000kcal e de carboidratos 300g.

Supondo que uma pessoa queira passar o dia somente com esses três alimentos, qual a quantidade necessária de cada um deles e qual valor será gasto de forma a minimizar o custo?

Considerando o modelo matemático construído no Capítulo 3 temos:

$$\text{Minimizar } Z = g(x_1, x_2, x_3) = 4,85x_1 + 7,85x_2 + 9,45x_3 \quad (0)$$

$$\text{Sujeito a} \begin{cases} 25x_1 + 48x_2 + 320x_3 \geqslant 50 & (1) \\ 890x_3 \geqslant 300 & (2) \\ 281x_1 + 136x_2 \geqslant 300 & (3) \\ 16x_1 + 85x_2 \geqslant 25 & (4) \\ 1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3 \geqslant 2000 & (5) \\ x_1 \geqslant 0 & (6) \\ x_2 \geqslant 0 & (7) \\ x_3 \geqslant 0 & (8) \end{cases}$$

Chamamos aqui a função objetivo de Z, então em nosso problema queremos minimizar $Z = g(x_1, x_2, x_2)$ que representa o gasto com os três alimentos: arroz (x_1), feijão (x_2) e frango (x_3).

Ao construir o modelo matemático, estaremos formalizando o registro algébrico nas diversas séries do Ensino Fundamental e Médio e podemos retomar a linguagem matemática, seus registros e a importância de seus símbolos. Juntamente com o estudo dos problemas, ressaltamos os diferentes tipos de números e como eles interferem na solução.

A solução pode ser decimal ou só aceitaremos valores inteiros? Aqui podemos ressaltar os diferentes Conjuntos Numéricos e suas aplicações em contextos reais.

Nos processos de resolução do problema com o uso dos métodos da Programação Linear, sejam analíticos, gráficos ou com uso de ferramentas tecnológicas, reforçamos diversos conteúdos matemáticos ligados a Geometria e a Álgebra.

Esse tipo de trabalho com problemas ligados à realidade motiva os alunos a construir novos saberes e a estudar os conceitos que ainda não estão fundamentados em sua cabeça, além de reforçar os conteúdos já adquiridos.

Para resolver nosso problema usando métodos da Otimização Linear, principalmente em métodos algébricos, o problema deve estar na forma padrão. Em alguns casos, temos de manipular nossa função objetivo de forma a escrevê-la na forma padrão, minimizar. Para isso usamos a ideia de função simétrica, onde o máximo de $f(x)$ é o mínimo de $-f(x)$. Dessa forma, se chamarmos de W a simétrica de Z teremos $W = (-Z)$, onde maximizar Z é minimizar W. Com duas incógnitas, podemos mostrar isso facilmente de forma gráfica aos alunos que não estão abstraídos[1].

Regressando ao problema do consumo de alimentos, na função objetivo, temos:

$$\text{Minimizar } Z = 4,85x_1 + 7,85x_2 + 9,45x_3$$

Escrevendo a função simétrica passamos a ter:

$$\text{Maximizar } W = -Z = -4,85x_1 - 7,85x_2 - 9,45x_3$$

Como minimizar Z é maximizar W observamos que passamos de um problema de mínimo para máximo. Assim, o nosso modelo matemático do problema passa a ser:

$$\text{Maximizar } W = -4,85x_1 - 7,85x_2 - 9,45x_3$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} 25x_1 + 48x_2 + 320x_3 \geqslant 50 & (1) \\ 890x_3 \geqslant 300 & (2) \\ 281x_1 + 136x_2 \geqslant 300 & (3) \\ 16x_1 + 85x_2 \geqslant 25 & (4) \\ 1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3 \geqslant 2000 & (5) \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 & (6) \end{cases}$$

[1]Alunos que ainda não conseguem entender conceitos abstratos sem uma contextualização com a realidade. Tem necessidade de material concreto para relacionar o que está sendo desenvolvido com a realidade.

As desigualdades podem ser transformadas em igualdades com a adição de uma variável de folga, se a desigualdade for menor ou igual, ou de excesso, se a desigualdade for maior ou igual. Temos em nosso problema, como variáveis, as massas de arroz (x_1), feijão (x_2) e frango (x_3). Temos cinco desigualdades para serem transformadas, então acrescentaremos as variáveis x_4, x_5, x_6, x_7 e x_8. Assim, o conjunto de desigualdades das restrições torna-se o Sistema de Equações Lineares:

$$\begin{cases} 25x_1 + 48x_2 + 320x_3 - x_4 = 50 & (1) \\ 890x_3 - x_5 = 300 & (2) \\ 281x_1 + 136x_2 - x_6 = 300 & (3) \\ 16x_1 + 85x_2 - x_7 = 25 & (4) \\ 1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3 - x_8 = 2000 & (5) \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8 \geqslant 0 & (6) \end{cases}$$

Ao resolver este Sistema de Equações Lineares encontraremos uma solução para o problema. Dessa forma, podemos explorar um método de resolução de sistemas. Usaremos Gauss-Jordan.

4.1 Gauss-Jordan para resolução de Sistemas Lineares

Esse método consiste em usarmos as operações elementares nas linhas da matriz A do sistema $Ax = b$ de forma a transformá-lo em uma Matriz Identidade, cujos elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos e os elementos dela, unitários.

No processo do ensino e da aprendizagem, estamos nesse momento retomando ou desenvolvendo o conteúdo referente às Matrizes e suas operações. Para obter a Matriz Identidade podemos aplicar as seguintes operações elementares:

- Trocar uma linha de posição com outra.
- Multiplicar a linha por um número escalar.
- Somar uma linha na outra.

Consideremos o Sistema de Equações Lineares com as restrições de (1) a (5) do problema:

$$
\begin{cases}
25x_1 + 48x_2 + 320x_3 - x_4 = 50 & (1) \\
890x_3 - x_5 = 300 & (2) \\
281x_1 + 136x_2 - x_6 = 300 & (3) \\
16x_1 + 85x_2 - x_7 = 25 & (4) \\
1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3 - x_8 = 2000 & (5)
\end{cases}
$$

Representando o Sistema Linear na forma matricial temos:

$$
\begin{pmatrix}
25 & 48 & 320 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 890 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
281 & 136 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
16 & 85 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1280 & 3200 & 1590 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
50 \\ 300 \\ 300 \\ 25 \\ 2000
\end{pmatrix}
$$

Nessa transição de sistema para matriz estamos retomando o produto de matrizes. Devemos lembrar de que nosso objetivo é encontrar a Matriz Identidade, que é uma matriz quadrada do tipo $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$.

$$
I_{5\times 5} = \begin{cases} a_{ij} = 1 \quad se \quad i = j \\ a_{ij} = 0 \quad se \quad i \neq j \end{cases} \Longrightarrow I = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Em nosso problema temos cinco equações. As colunas da matriz A representam as variáveis descritas no problema, x_1 à x_3, e as outras acrescentadas, variáveis de excesso, x_4 à x_8, para transformação das desigualdades em igualdades. Para exemplificar o método, consideraremos as cinco primeiras colunas da matriz A do sistema $Ax = b$ e os valores de b. Dessa forma, as três primeiras colunas representam a quantidade de arroz, feijão e filé de frango, respectivamente.

$$A \qquad\qquad \times \quad X \quad = B$$

$$\begin{pmatrix} 25 & 48 & 320 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 890 & 0 & -1 \\ 281 & 136 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 85 & 0 & 0 & 0 \\ 1280 & 3200 & 1590 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 300 \\ 300 \\ 25 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

Do Sistema Linear $A \times X = B$, construímos a Matriz Aumentada, $[A\,|B]$, formada pelos elementos de A, nas primeiras colunas e pelos elementos de B, na última coluna.

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Para o nosso problema temos:

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 25 & 48 & 320 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 890 & 0 & -1 & 300 \\ 281 & 136 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 16 & 85 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 1280 & 3200 & 1590 & 0 & 0 & 2000 \end{array}\right] \text{Matriz Aumentada do Sistema Linear}$$

Para obtermos a Matriz Identidade a partir de A, aplicaremos as operações elementares nas linhas da Matriz Aumentada do Sistema Linear.

Com essas operações estaremos retomando ideias operacionais com matrizes e reforçando o método de Gauss-Jordan. A seguir, acompanharemos o passo a passo do método de Gauss-Jordan para obter a Matriz Identidade, partindo da Matriz Aumentada do Sistema Linear.

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 25 & 48 & 320 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 890 & 0 & -1 & 300 \\ 281 & 136 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 16 & 85 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 1280 & 3200 & 1590 & 0 & 0 & 2000 \end{array}\right]$$

Consideremos $a_{11}^{(1)} = 25 \neq 0$ como pivô do passo 1

Passo 1: Dividiremos a linha 1 pelo pivô e subtrairemos da 3ª, 4ª e 5ª linhas a 1ª linha multiplicada por $a_{31} = 281$, $a_{41} = 16$ e $a_{51} = 1280$, respectivamente:

$$L_1 \mapsto \tfrac{L_1}{25},\ L_3 \mapsto L_3 - 281 \times \tfrac{L_1}{25},\ L_4 \mapsto L_4 - 16 \times \tfrac{L_1}{25},\ L_5 \mapsto L_5 - 1280 \times \tfrac{L_1}{25}.$$

Trocaremos a 2ª com a 3º linha:

$$L_2 \mapsto L_3,\ L_3 \mapsto L_2.$$

$$\left[A^{(1)} \middle| B^{(1)}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{48}{25} & \frac{64}{5} & \frac{-1}{25} & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{10088}{25} & -\frac{17984}{5} & \frac{281}{25} & 0 & -262 \\ 0 & 0 & 890 & 0 & -1 & 300 \\ 0 & \frac{1357}{25} & -\frac{1024}{5} & \frac{16}{25} & 0 & -7 \\ 0 & \frac{3712}{5} & -14794 & \frac{256}{5} & 0 & -560 \end{array}\right]$$

$$\text{Consideremos } a_{22}^{(2)} = -\tfrac{10088}{25} \neq 0 \text{ como pivô do passo 2}$$

Passo 2: Dividiremos a linha 2 pelo pivô e subtrairemos da 1ª, 4ª e 5ª linhas a 2ª linha multiplicada por $a_{12} = \frac{48}{25}$, $a_{42} = \frac{1357}{25}$ e $a_{52} = \frac{3712}{5}$, respectivamente:

$$L_2 \mapsto \tfrac{-25}{10088} \times L_2,\ L_1 \mapsto L_1 - \tfrac{48}{25} \times \tfrac{-25 \times L_2}{10088},\ L_4 \mapsto L_4 - \tfrac{1357}{25} \times \tfrac{-25 \times L_2}{10088},\ L_5 \mapsto L_5 - \tfrac{3712}{5} \times \tfrac{-25 \times L_2}{10088}.$$

$$\left[A^{(2)} \middle| B^{(2)}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{5440}{1261} & \frac{17}{1261} & 0 & \frac{950}{1261} \\ 0 & 1 & \frac{11240}{1261} & -\frac{281}{10088} & 0 & \frac{3275}{5044} \\ 0 & 0 & 890 & 0 & -1 & 300 \\ 0 & 0 & -\frac{868360}{1261} & \frac{21709}{10088} & 0 & -\frac{213075}{5044} \\ 0 & 0 & -\frac{26999810}{1261} & \frac{90640}{1261} & 0 & -\frac{1314000}{1261} \end{array}\right]$$

$$\text{Consideremos } a_{33}^{(3)} = 890 \neq 0 \text{ como pivô do passo 3}$$

Passo 3: Dividiremos a linha 3 pelo pivô e subtrairemos da 1ª, 2ª, 4ª e 5ª linhas a 3ª linha multiplicada por $a_{13} = -\frac{5440}{1261}$, $a_{23} = \frac{11240}{1261}$, $a_{43} = -\frac{868360}{1261}$ e $a_{53} = -\frac{26999810}{1261}$, respectivamente:

$$L_3 \mapsto \tfrac{L_3}{890},\ L_1 \mapsto L_1 - (-\tfrac{5440}{1261}) \times \tfrac{L_3}{890},\ L_2 \mapsto L_2 - \tfrac{11240}{1261} \times \tfrac{L_3}{890},$$

$$L_4 \mapsto L_4 - (-\tfrac{868360}{1261}) \times \tfrac{L_3}{890},\ L_5 \mapsto L_5 - (-\tfrac{26999810}{1261}) \times \tfrac{L_3}{890}.$$

$$
\left[A^{(3)}\left|B^{(3)}\right.\right]=\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \frac{17}{1261} & -\frac{544}{112229} & \frac{247750}{112229}\\
0 & 1 & 0 & -\frac{281}{10088} & \frac{1124}{112229} & -\frac{1057325}{448916}\\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{890} & \frac{30}{89}\\
0 & 0 & 0 & \frac{21709}{10088} & -\frac{86836}{112229} & \frac{85239525}{448916}\\
0 & 0 & 0 & \frac{90640}{1261} & -\frac{2699981}{112229} & \frac{693048300}{112229}
\end{array}\right]
$$

Consideremos $a_{44}^{(4)}=\frac{21709}{10088}\neq 0$ como pivô do passo 4

Passo 4: Dividiremos a linha 4 pelo pivô e subtrairemos da 1ª, 2ª e 5ª linhas a 4ª linha multiplicada por $a_{14}=\frac{17}{1261}$, $a_{24}=-\frac{281}{10088}$ e $a_{54}=\frac{90640}{1261}$, respectivamente:

$$
L_4\mapsto\frac{10088}{21709}\times L_4,\ L_1\mapsto L_1-\frac{17}{1261}\times\frac{10088\times L_4}{21709},\ L_2\mapsto L_2-(-\frac{281}{10088})\times\frac{10088\times L_4}{21709},\ L_5\mapsto L_5-\frac{90640}{1261}\times\frac{10088\times L_4}{21709}.
$$

$$
\left[A^{(4)}\left|B^{(4)}\right.\right]=\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1300}{1277}\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2225}{21709}\\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{890} & \frac{30}{89}\\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{32}{89} & \frac{170479050}{1932101}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{159}{89} & -\frac{322629300}{1932101}
\end{array}\right]
$$

Consideremos $a_{55}^{(5)}=\frac{159}{89}\neq 0$ como pivô do passo 5

Passo 5: Dividiremos a linha 5 pelo pivô e subtrairemos da 3ª e 4ª linhas a 5ª linha multiplicada por $a_{35}=-\frac{1}{890}$ e $a_{45}=-\frac{32}{89}$, respectivamente:

$$
L_5\mapsto\frac{89}{159}\times L_5,\ L_3\mapsto L_3-(-\frac{1}{890})\times\frac{89\times L_5}{159},\ L_4\mapsto L_4-(-\frac{32}{89})\times\frac{89\times L_5}{159}.
$$

$$
\left[A^{(5)}\left|B^{(5)}\right.\right]=\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1300}{1277}\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2225}{21709}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{267000}{1150577}\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{62854050}{1150577}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{107543100}{1150577}
\end{array}\right]
$$

Aproximando os valores temos:

$$
[I\,|S]=\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1300}{1277}\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2225}{21709}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{267000}{1150577}\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{62854050}{1150577}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{107543100}{1150577}
\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,018\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,1025\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,2321\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 54.6283\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -93,4688
\end{array}\right]
$$

Com isso passamos ao nosso sistema de restrições:

$$\begin{cases} x_1 = 1,018 & Variável\ do\ problema \\ x_2 = 0,103 & Variável\ do\ problema \\ x_3 = 0,232 & Variável\ do\ problema \\ x_4 = 54,628 & Variável\ de\ excesso \\ x_5 = -93,469 & Variável\ de\ excesso \end{cases}$$

Retornando ao problema inicial teremos como resposta: 1018g de arroz, 103g de feijão e 232g de filé de frango. Agora, analisaremos se atende as restrições e verificaremos o custo dessa dieta.

$$Z = g(1,018;\ 0,103;\ 0,232) = 4,85 \times 1,018 + 7,85 \times 0,103 + 9,45 \times 0,232 = 7,94 \qquad (0)$$

$$\begin{cases} 25 \times 1,018 + 48 \times 0,102 + 320 \times 0,232 = 104,63 \geqslant 50 & (V) \\ 890 \times 0,232 = 206,48 \geqslant 300 & (F) \\ 281 \times 1,018 + 136 \times 0,102 = 300,07 \geqslant 300 & (V) \\ 16 \times 1,018 + 85 \times 0,102 = 25,04 \geqslant 25 & (V) \\ 1280 \times 1,018 + 3200 \times 0,102 + 1590 \times 0,232 = 2001,52 \geqslant 2000 & (V) \end{cases}$$

Nesta solução, atendemos as restrições de proteína, carboidrato, fibras e calorias, porém não atendemos a restrição colesterol. A restrição de colesterol melhorou em relação a solução anterior. Como nosso objetivo era explorar o Método de Gauss-Jordan, esse nos encaminhou a solução do sistema, porém nosso problema ainda não está resolvido por completo, atendendo todas as restrições. Esta solução do problema não é factível (viável)!

Trabalhando com esse processo estamos reforçando operações com matrizes e equivalência numérica, destacando várias operações fundamentais e explorando números e aproximações. Ainda explorando a variação de valores conforme as quantidades, usaremos uma planilha eletrônica para comparar as soluções e encaminhar a uma solução factível com uso do computador.

4.2 Tabelas e Planilhas Eletrônicas na Resolução de Problemas

Uma ferramenta importante na discussão de problemas abertos é organizar as informações em tabelas para posterior tomada de decisão. Uma das habilidades esperadas do aluno ao término da Educação Básica é que ele saiba ou consiga analisar as informações em uma tabela e/ou gráfico. Nesse contexto, proporcionar a construção desse recurso, planilhas eletrônicas, além de encaminhar nosso problema até a sua solução, permite o desenvolvimento de diversas capacidades necessárias à tomada de decisão.

Retornando ao nosso problema, temos o consumo de alimentos com o objetivo de gastar o mínimo possível sem prejudicar a nutrição diária. Dessa forma, podemos transformar nosso problema em uma tabela de múltiplas entradas para analisar as variações quando mudamos a quantidade de cada alimento.

Alimentos			Nutrientes					Valor
Arroz	Feijão	Frango	Proteína	Colesterol	Carboidrato	Fibra	Calorias	
Kg	Kg	Kg	g	mg	g	g	Kcal	R$
1,018	0,102	0,232	105	206	300	25	1998	8
0,9633	0,2155	0,0487	50	43	300	34	2000	6,84
1	0,2	0,35	147	312	308	33	2477	9,83

Tabela 4.2: Situação do consumo de alimentos

As primeiras linhas foram preenchidas por valores encontrados anteriormente, e a última linha da Tabela 4.2 foi preenchida com valores arbitrários apenas para exemplificação. Vale relembrar que as massas e quilogramas (kg) dos alimentos; Arroz, Feijão e Filé de frango, são representadas no problema pelas variáveis; x_1, x_2 e x_3, respectivamente, conforme o modelo matemático:

$$\text{Minimizar} g(x_1, x_2, x_3) = 4,85x_1 + 7,85x_2 + 9,45x_3 (Valor)$$

$$\begin{cases} 25x_1 + 48x_2 + 320x_3 \geqslant 50 & (Proteína) \\ 890x_3 \geqslant 300 & (Colesterol) \\ 281x_1 + 136x_2 \geqslant 300 & (Carboidrato) \\ 16x_1 + 85x_2 \geqslant 25 & (Fibra) \\ 1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3 \geqslant 2000 & (Calorias) \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 & (Não \quad negatividade) \end{cases}$$

Por conter muitas fórmulas e cálculos a serem realizados, uma planilha no Excel facilita o preenchimento e temos uma maior possibilidade de valores a serem analisados para tomarmos a decisão. Vamos, inicialmente, construir uma tabela como a anterior e nela colocarmos as fórmulas para cálculo de cada item. Veja Figura 4.1.

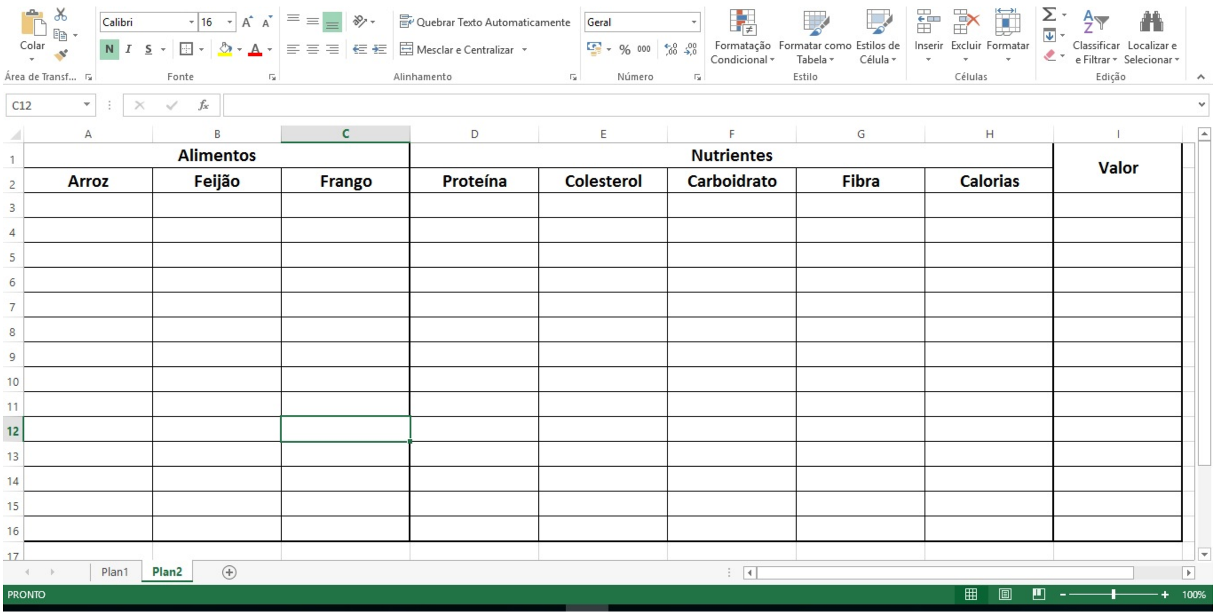


Figura 4.1: Situação do consumo de alimentos - Excel

Colocamos nas colunas A, B e C as variáveis de decisão que são os alimentos, nas colunas D, E, F, G e H as restrições que são os nutrientes. E na Coluna I o valor que é nosso objetivo a ser minimizado.

Vamos escrever as fórmulas no Excel para cada tipo de função, nas restrições e valor.

	Funções	Excel
Valor	$g(x_1, x_2, x_3) = 4,85x_1 + 7,85x_2 + 9,45x_3$	=A3*4,85+B3*7,85+C3*9,45
Proteína	$p(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 48x_2 + 320x_3$	=A3*25+B3*48+C3*320
Colesterol	$c(x_1, x_2, x_3) = 890x_3$	=C3*890
Carboidrato	$a(x_1, x_2, x_3) = 281x_1 + 136x_2$	=A3*281+B3*136
Fibra	$f(x_1, x_2, x_3) = 16x_1 + 85x_2$	=A3*16+B3*85
Calorias	$e(x_1, x_2, x_3) = 1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3$	=A3*1280+B3*3200+C3*1590

Tabela 4.3: Situação do consumo de alimentos - Fórmulas para planilha no Excel

Digitando essas fórmulas, apresentadas na Tabela 4.3, na linha 3 da planilha, selecionando as células e arrastando, obtemos uma planilha com auto preenchimento quando fornecermos as variáveis.Veja Figura 4.2.

	D	E	F	G	H	I
1	**Nutrientes**					**Valor**
2	**Proteína**	**Colesterol**	**Carboidrato**	**Fibra**	**Calorias**	
3	=A3*25+B3*48+C3*320	= C3*890	=A3*281+B3*136	=A3*16+B3*85	=A3*1280+B3*3200+C3*1590	=A3*4,85+B3*7,85+C3*9,45
4	=A4*25+B4*48+C4*320	= C4*890	=A4*281+B4*136	=A4*16+B4*85	=A4*1280+B4*3200+C4*1590	=A4*4,85+B4*7,85+C4*9,45
5	=A5*25+B5*48+C5*320	= C5*890	=A5*281+B5*136	=A5*16+B5*85	=A5*1280+B5*3200+C5*1590	=A5*4,85+B5*7,85+C5*9,45
6	=A6*25+B6*48+C6*320	= C6*890	=A6*281+B6*136	=A6*16+B6*85	=A6*1280+B6*3200+C6*1590	=A6*4,85+B6*7,85+C6*9,45
7	=A7*25+B7*48+C7*320	= C7*890	=A7*281+B7*136	=A7*16+B7*85	=A7*1280+B7*3200+C7*1590	=A7*4,85+B7*7,85+C7*9,45
8	=A8*25+B8*48+C8*320	= C8*890	=A8*281+B8*136	=A8*16+B8*85	=A8*1280+B8*3200+C8*1590	=A8*4,85+B8*7,85+C8*9,45
9	=A9*25+B9*48+C9*320	= C9*890	=A9*281+B9*136	=A9*16+B9*85	=A9*1280+B9*3200+C9*1590	=A9*4,85+B9*7,85+C9*9,45
10	=A10*25+B10*48+C10*320	= C10*890	=A10*281+B10*136	=A10*16+B10*85	=A10*1280+B10*3200+C10*1590	=A10*4,85+B10*7,85+C10*9,45
11	=A11*25+B11*48+C11*320	= C11*890	=A11*281+B11*136	=A11*16+B11*85	=A11*1280+B11*3200+C11*1590	=A11*4,85+B11*7,85+C11*9,45
12	=A12*25+B12*48+C12*320	= C12*890	=A12*281+B12*136	=A12*16+B12*85	=A12*1280+B12*3200+C12*1590	=A12*4,85+B12*7,85+C12*9,45
13	=A13*25+B13*48+C13*320	= C13*890	=A13*281+B13*136	=A13*16+B13*85	=A13*1280+B13*3200+C13*1590	=A13*4,85+B13*7,85+C13*9,45
14	=A14*25+B14*48+C14*320	= C14*890	=A14*281+B14*136	=A14*16+B14*85	=A14*1280+B14*3200+C14*1590	=A14*4,85+B14*7,85+C14*9,45
15	=A15*25+B15*48+C15*320	= C15*890	=A15*281+B15*136	=A15*16+B15*85	=A15*1280+B15*3200+C15*1590	=A15*4,85+B15*7,85+C15*9,45

Figura 4.2: Situação do consumo de alimentos - Excel - fórmulas

Com a tabela preparada, podemos solicitar que os alunos mudem os valores nas variáveis de forma a perceber as variações nas funções buscando soluções Factíveis (viáveis) e tentando descobrir a melhor entre elas (solução ótima). Devem observar se as soluções apresentadas são factíveis ou não.

Observaremos uma tabela preenchida com os valores considerando como legenda que os valores em vermelho, formatação condicional do Excel, observemos a Figura 4.3, não atendem as restrições, as soluções são infactíveis (não viáveis). As linhas que não apresentarem valores em destaque nas restrições representam soluções factíveis, e a de menor valor consideraremos como ótima entre as que foram analisadas.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Alimentos**			**Nutrientes**					**Valor**
2	**Arroz**	**Feijão**	**Frango**	**Proteína**	**Colesterol**	**Carboidrato**	**Fibra**	**Calorias**	
3	**1**	**1**	**1**	393	890	417	101	6070	R$ 22,15
4	**0,5**	**0,5**	**0,5**	196,5	445	208,5	50,5	3035	R$ 11,08
5	**1**	**0,5**	**0,5**	209	445	349	58,5	3675	R$ 13,50
6	**1**	**0,2**	**0,4**	162,6	356	308,2	33	2556	R$ 10,20
7	**1**	**0,1**	**0,4**	157,8	356	294,6	24,5	2236	R$ 9,42
8	**1**	**0,2**	**0,4**	162,6	356	308,2	33	2556	R$ 10,20
9	**1,1**	**0,5**	**0,3**	147,5	267	377,1	60,1	3485	R$ 12,10
10	**0,9**	**0,35**	**0,35**	151,3	311,5	300,5	44,15	2828,5	R$ 10,42
11	**1**	**0,2**	**0,35**	146,6	311,5	308,2	33	2476,5	R$ 9,73
12	**1**	**0,15**	**0,35**	144,2	311,5	301,4	28,75	2316,5	R$ 9,34
13	**1,1**	**0,15**	**0,34**	143,5	302,6	329,5	30,35	2428,6	R$ 9,73
14	**0,9**	**0,35**	**0,34**	148,1	302,6	300,5	44,15	2812,6	R$ 10,33
15	**1**	**0,16**	**0,34**	141,48	302,6	302,76	29,6	2332,6	R$ 9,32
16									

Figura 4.3: Situação do consumo de alimentos - Excel - fórmulas

Observando a tabela percebemos que as linhas; 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14 e 15 apresentam soluções factíveis e que a linha 15 tem o menor valor nos gastos. Dessa forma, uma solução para nosso problema é consumirmos 1000g de arroz, 160g de feijão e 340g de filé de frango, gastando R$ 9,32.

Será que podemos encontrar uma solução melhor? Com essa provocação abrimos várias discussões e levamos o aluno a explorar a mudança de valores na busca de outras possibilidades. Uma maneira que podemos, de forma prática, buscar essa resposta é usando a tabela que montamos no Excel e com a ferramenta Solver buscar uma solução.

Abrindo a ferramenta definiremos como objetivo a célula I3, como variáveis as células A3, B3 e C3. Adicionaremos as restrições do problema e selecionaremos o método, LP Simplex. Veja Figura 4.4.

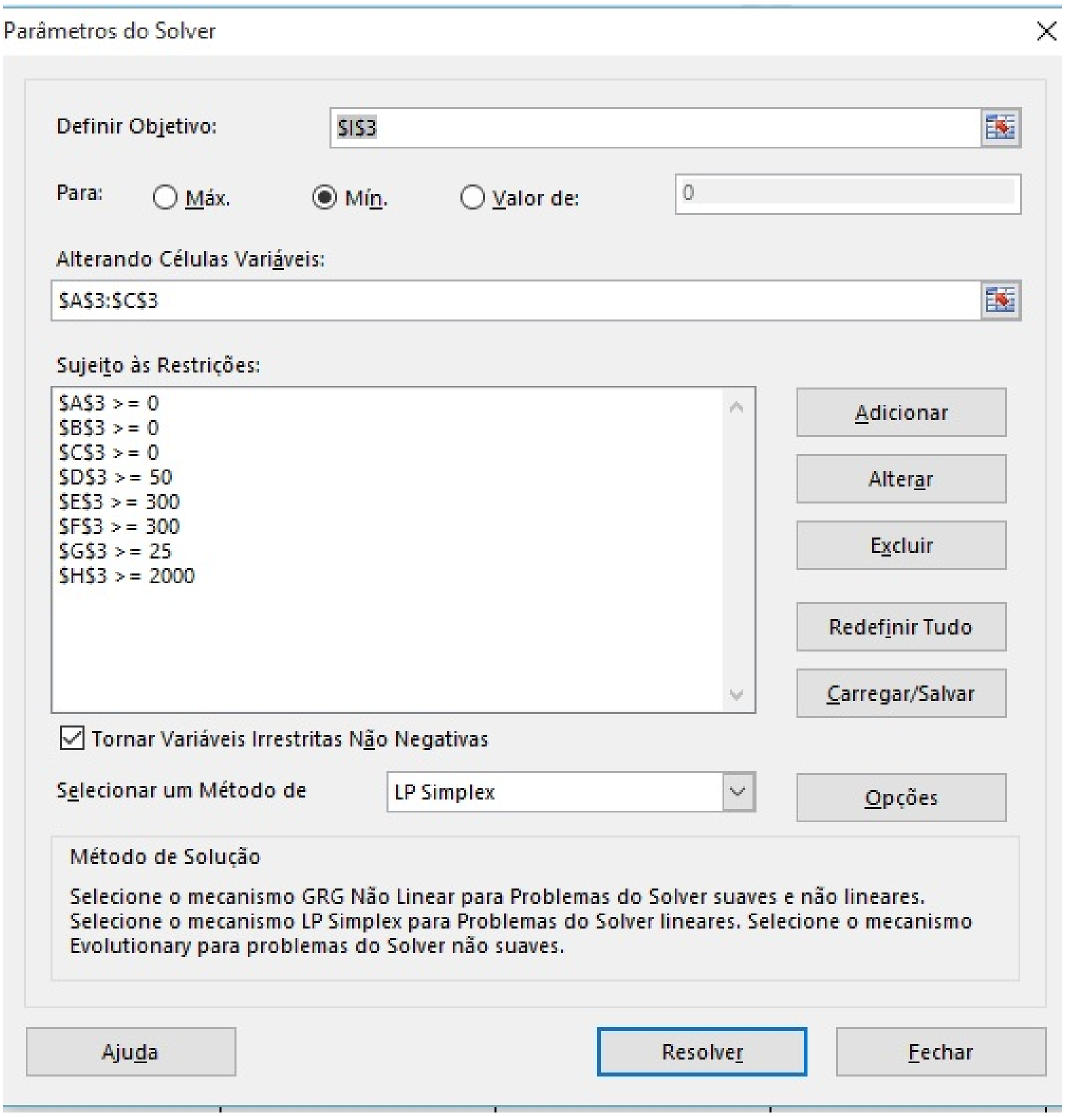


Figura 4.4: Situação do consumo de alimentos - Excel - Solver

Clicando em resolver, obtemos nas células indicadas uma nova solução para o problema na Figura 4.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Alimentos			Nutrientes					Valor
2	Arroz	Feijão	Frango	Proteína	Colesterol	Carboidrato	Fibra	Calorias	
3	1,018	0,102	0,337	138,2350612	300	300	25	2166,983662	R$ 8,93
4	0,5	0,5	0,5	196,5	445	208,5	50,5	3035	R$ 11,08
5	1	0,5	0,5	209	445	349	58,5	3675	R$ 13,50
6	1	0,2	0,4	162,6	356	308,2	33	2556	R$ 10,20

Figura 4.5: Situação do consumo de alimentos - Excel - Após Solver

Com essa ação, a solução do problema, na Figura 4.5, passa a ser: 1018g de arroz, 102g de feijão e 337g de filé de frango, gastando R$ 8,93. Que é melhor que a encontrada anteriormente.

Encontramos uma solução para o problema com o uso do computador que nem sempre é uma ferramenta disponível em sala de aula. Uma outra forma de buscarmos uma resposta seria o algoritmo do Método Simplex.

4.3 Método Simplex

Para resolvermos o nosso problema pelo Método Simplex devemos lembrar que minimizar Z é maximizar $-Z = W$, com isso temos o modelo matemático :

$$\text{Minimizar } Z = 4,85x_1 + 7,85x_2 + 9,45x_3 \qquad (0)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} 25x_1 + 48x_2 + 320x_3 - x_4 = 50 & (1) \\ 890x_3 - x_5 = 300 & (2) \\ 281x_1 + 136x_2 - x_6 = 300 & (3) \\ 16x_1 + 85x_2 - x_7 = 25 & (4) \\ 1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3 - x_8 = 2000 & (5) \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8 \geqslant 0 & (6) \end{cases}$$

Inicialmente, devemos construir a tabela inicial com os coeficientes das variáveis para as respectivas iterações do método. Vale lembrar de que as iterações estão relacionadas às operações de Gauss-Jordan e que buscamos coeficientes positivos ou nulos na nossa função objetivo.

Para iniciar o método, precisamos de uma solução viável básica inicial, o que não temos de forma direta nesse caso por conta das restrições de maior ou igual ($\geqslant$), $x = (0, 0, 0)$ não é solução do problema. Além de explorar o método, estamos discutindo operações em desigualdades e reforçando procedimentos em matrizes e tabelas. Para aplicação do Método Simplex, não há necessidade de inverter as desigualdades pois para transformar em igualdades podemos usar variáveis de folga ou excesso. Como não temos a solução viável inicial aplicaremos o Método Simplex em duas fases.

4.3.1 Fase I

O primeiro passo, considerando o problema de Otimização Linear na forma padrão, é alterar a função objetivo original e as restrições com a introdução das variáveis artificiais, $x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13}$. Considerando que para todas as variáveis reais e de folga o coeficiente α_J é a soma dos coeficientes da coluna da matriz de restrições do problema com as variáveis artificiais:

$$\alpha_1 = 25 + 281 + 16 + 1280 = 1702$$

$$\alpha_2 = 48 + 136 + 85 + 3200 = 3469$$

$$\alpha_3 = 320 + 890 + 1590 = 2800$$

$$W = 50 + 300 + 300 + 25 + 2000 = 2675$$

Temos o vetor $d = 1702, 3469, 2800, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0$ e nosso problema artificial:

$$\text{Minimizar } W = -1602x_1 - 3469x_2 - 2800x_3 - x_4 - x_5 - x_7 - x_8 = -2675 \qquad (0)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} 25x_1 + 48x_2 + 320x_3 - x_4 + x_9 = 50 & (1) \\ 890x_3 - x_5 + x_{10} = 300 & (2) \\ 281x_1 + 136x_2 - x_6 + x_{11} = 300 & (3) \\ 16x_1 + 85x_2 - x_7 + x_{12} = 25 & (4) \\ 1280x_1 + 3200x_2 + 1590x_3 - x_8 + x_{13} = 2000 & (5) \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10},\ x_{11},\ x_{12},\ x_{13} \geqslant 0 & (6) \end{cases}$$

Para aplicarmos o Método Simplex , vamos construir a Tabela 4.4 com os coeficientes da função objetivo original, da função artificial e das restrições com as variáveis artificiais inseridas como variáveis básicas no problema artificial.

Quadro inicial do problema														
	Coeficientes de													
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	b
z	-4,85	-7,85	-9,45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
w	-1602	-3469	-2800	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	-2675
V.B.														
x_9	25	48	320	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	50
x_{10}	0	0	890	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	300
x_{11}	281	136	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	300
x_{12}	16	85	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	25
x_{13}	1280	3200	1590	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	2000

Tabela 4.4: Dieta - Método Simplex - Fase I

Após o preenchimento da Tabela 4.4 devemos aplicar as iterações do Método Simplex até que os coeficientes, menos os das variáveis artificiais, da função artificial zerem.

Buscando zerar a função artificial vamos escolher uma linha pivô e aplicar as operações de pivotamento de Gauss-Jordan de matrizes. Devemos fazer a escolha de qual variável entra na base e qual sai, fazendo as iterações na tabela. Escolhemos para entrar a de maior negatividade, x_2, e para sair a menor razão entre a constante b e o coeficiente a da variável x_2, $Min.(\frac{50}{18}, \frac{300}{136}, \frac{25}{85}, \frac{2000}{3200}) = \frac{25}{85}$, dessa forma x_2 entra na base e sai x_{12}.

Em cada linha, L_n, faremos as operações indicadas na Tabela 4.5:

Operações elementares em cada linha – primeira iteração	
Linha do passo anterior	Nova linha
L_1	$L_1 + 7,85 \times P$
L_2	$L_2 + 3469 \times P$
L_3	$L_3 - 48 \times P$
L_4	$L_4 - 0 \times P$
L_5	$L_5 - 136 \times P$
L_6	$P = \frac{1}{85} \times L_1$
L_7	$L_7 - 3200 \times P$

Tabela 4.5: Dieta - Primeira iteração - Operações - Fase I

Fazendo as operações elementares entre as linhas obtemos a Tabela 4.6:

Quadro primeira iteração														
	Coeficientes de													
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	b
z	-3,3724	0	-9,45	0	0	0	-0,0924	0	0	0	0	0,0924	0	2,3088
w	-949,0118	0	-2800	1	1	1	-39,8118	1	0	0	0	40,8118	0	-1654,7059
V.B.														
x_9	15,9647	0	320	-1	0	0	0,5647	0	1	0	0	-0,5647	0	35,8824
x_{10}	0	0	890	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	300
x_{11}	255,4	0	0	0	0	-1	1,6	0	0	0	1	-1,6	0	260
x_2	0,1882	1	0	0	0	0	-0,0118	0	0	0	0	0,0118	0	0,2941
x_{13}	677,6471	0	1590	0	0	0	37,6471	-1	0	0	0	-37,6471	1	1058,8235

Tabela 4.6: Dieta - Primeira iteração - Método Simplex - Fase I

Após a primeira iteração, na Tabela 4.6, temos que x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, $x_8 < 0$. Nem todos os coeficientes da função artificial são maiores ou iguais a zero. Escolheremos agora o coeficiente de maior negatividade, x_3, na função artificial para entrar na base e a variável que timer a menor razão, não negativa, entre a constante b e o coeficiente a de x_3 para sair; $Min.(\frac{35,8824}{320}, \frac{300}{890}, \frac{1058,8235}{1590}) = \frac{35,8824}{320}$, dessa forma x_9, sai da base.

Logo na segunda iteração entra x_3 e sai x_9 conforme Tabela 4.7:

Operações elementares em cada linha – Segunda iteração	
Linha do passo anterior	Nova linha
L_1	$L_1 + 9,45 \times P$
L_2	$L_2 + 2800 \times P$
L_3	$P = \frac{1}{320} \times L_3$
L_4	$L_4 - 890 \times P$
L_5	$L_5 - 0 \times P$
L_6	$L_6 - 0 \times P$
L_7	$L_7 - 1590 \times P$

Tabela 4.7: Dieta - Segunda iteração - Operações - Fase I

Das operações elementares obtendo a Tabela 4.8.

Quadro segunda iteração														
	Coeficientes de													
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	b
Z	-2,9009	0	0	-0,0295	0	0	-0,0757	0	0,0295	0	0	0,0757	0	3,3685
W	-809,3206	0	0	-7,7500	1	1	-34,8706	1	8,7500	0	0	35,8706	0	1340,7353
V.B.														
x_3	0,0499	0	1	-0,0031	0	0	0,0018	0	0,0031	0	0	-0,0018	0	0,1121
x_{10}	-44,4018	0	0	2,7813	-1	0	-1,5706	0	-2,7813	1	0	1,5706	0	200,2022
x_{11}	255,4	0	0	0	0	-1	1,6	0	0	0	1	-1,6	0	260
x_2	0,1882	1	0	0	0	0	-0,0118	0	0	0	0	0,0118	0	0,2941
x_{13}	598,3224	0	0	4,9688	0	0	34,8412	-1	-4,9688	0	0	-34,8412	1	880,5331

Tabela 4.8: Dieta - Segunda iteração - Operações - Fase I

Observamos na Tabela 4.8 que ainda temos coeficientes menores do que zero na função artificial, x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 < 0, temos a maior negatividade em x_1 e $Min.(\frac{260}{255{,}4}, \frac{880{,}5331}{598{,}3224}) = \frac{260}{255{,}4}$, em x_{11}.

Então na terceira iteração entra x_1 e sai x_{11} conforme as operações da Tabela 4.9:

Operações elementares em cada linha – Terceira iteração	
Linha do passo anterior	Nova linha
L_1	$L_1 + 2,9009 \times P$
L_2	$L_2 + 809,3206 \times P$
L_3	$L_3 - 0,0499 \times P$
L_4	$L_4 + 44,4018 \times P$
L_5	$P = \frac{1}{255{,}4} \times L_5$
L_6	$L_6 - 0,1882 \times P$
L_7	$L_7 - 598,3224 \times P$

Tabela 4.9: Dieta - Terceira iteração - Operações - Fase I

Obtendo, pelas operações elementares entre as linhas, a Tabela 4.10:

Quadro terceira iteração														
	Coeficientes de													
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	b
Z	0	0	0	-0,0295	0	-0,0114	-0,0575	0	0,0295	0	0,0114	0,0575	0	6,3216
W	0	0	0	-7,75	1	-2,1688	-29,8005	1	8,75	0	3,1688	30,8005	0	-516,8381
V.B.														
x_3	0	0	1	-0,0031	0	0,0002	0,0015	0	0,0031	0	-0,0002	-0,0015	0	0,0613
x_{10}	0	0	0	2,7813	-1	-0,1739	-1,2924	0	-2,7813	1	0,1739	1,2924	0	245,4038
x_1	1	0	0	0	0	-0,0039	0,0063	0	0	0	0,0039	-0,0063	0	1,018
x_2	0	1	0	0	0	0,0007	-0,0129	0	0	0	-0,0007	0,0129	0	0,1025
x_{13}	0	0	0	4,9688	0	2,3427	31,0929	-1	-4,9688	0	-2,3427	-31,0929	1	271,4343

Tabela 4.10: Dieta - Terceira iteração - Operações - Fase I

Na Tabela 4.10 ainda temos coeficientes menores do que zero na função artificial; x_4, x_5, x_6, x_7, $x_8 < 0$, temos a maior negatividade em x_7 e $Min.(\frac{0{,}0613}{0{,}0015}, \frac{271{,}4343}{31{,}0929}) = \frac{271{,}4343}{31{,}0929}$ em x_{13}.

Então na quarta iteração entra x_7 e sai x_{13} conforme as operações da Tabela 4.11:

Operações elementares em cada linha – Quarta iteração	
Linha do passo anterior	Nova linha
L_1	$L_1 + 0,0575 \times P$
L_2	$L_2 + 29,8005 \times P$
L_3	$L_3 - 0,0015 \times P$
L_4	$L_4 + 1,2924 \times P$
L_5	$L_5 - 0,0627 \times P$
L_6	$L_6 + 0,0129 \times P$
L_7	$P = \frac{1}{31{,}0929} \times L_7$

Tabela 4.11: Dieta - Quarta iteração - Operações - Fase I

Obtendo a Tabela 4.12:

Quadro quarta iteração														
	Coeficientes de													
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	b
z	0	0	0	-0,0203	0	-0,007	0	-0,0018	0,0203	0	0,007	0	0,0018	6,8235
w	0	0	0	-2,9878	1	0,0765	0	0,0416	3,9878	0	0,9235	1	0,9584	-256,6864
V.B.														
x_3	0	0	1	-0,0034	0	0	0	0	0,0034	0	0	0	0	0,0487
x_{10}	1	0	0	2,9878	-1	-0,0765	0	-0,0416	-2,9878	1	0,0765	0	0,0416	256,6864
x_1	0	0	0	-0,001	0	-0,00439	0	0,0002	0,001	0	0,0044	0	-0,0002	0,9633
x_2	0	1	0	0,0021	0	0,0017	0	-0,0004	-0,0021	0	-0,0017	0	0,0004	0,2155
x_7	0	0	0	0,1598	0	0,0753	1	-0,0322	-0,1598	0	-0,0753	-1	0,0322	8,7298

Tabela 4.12: Dieta - Quarta iteração - Operações - Fase I

Temos na Tabela 4.12 coeficientes menores do que zero na função artificial, x_4, x_5, x_6, $x_8 < 0$, e a maior negatividade em x_4 e $Min.(\frac{256{,}6861}{2{,}9878}, \frac{0{,}2151}{0{,}0021}, \frac{8{,}7298}{0{,}1598}) = \frac{8{,}7298}{0{,}1598}$ em x_7.

Então na quinta iteração entra x_4 e sai x_7 conforme as operações da Tabela 4.11:

Operações elementares em cada linha – Quinta iteração	
Linha do passo anterior	Nova linha
L_1	$L_1 + 0,0203 \times P$
L_2	$L_2 + 2,9878 \times P$
L_3	$L_3 + 0,0034 \times P$
L_4	$L_4 - 2,9878 \times P$
L_5	$L_5 + 0,001 \times P$
L_6	$L_6 - 0,0021 \times P$
L_7	$P = \frac{1}{0{,}1598} \times L_7$

Tabela 4.13: Dieta - Quinta iteração - Operações - Fase I

Temos então, a Tabela 4.14.

Quadro quinta iteração														
	Coeficientes de													
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	b
Z	0	0	0	0	0	0,0026	0,1273	-0,0059	0	0	-0,0026	-0,1273	0,0059	7,9349
W	0	0	0	0	1	1,4852	18,6966	-0,5597	1	0	-0,4852	-17,6966	1,5597	-93,4688
V.B.														
x_3	0	0	1	0	0	0,0017	0,021	-0,0006	0	0	-0,0017	-0,021	0,0006	0,2321
x_{10}	0	0	0	0	-1	-1,4852	-18,6966	0,5597	0	1	1,4852	18,6966	-0,5597	93,4686
x_1	1	0	0	0	0	-0,0039	0,0063	0	0	0	0,0039	-0,0063	0	1,018
x_2	0	1	0	0	0	0,0007	-0,0129	0	0	0	-0,0007	0,0129	0	0,1025
x_4	0	0	0	1	0	0,4715	6,2577	-0,2013	-1	0	-0,4715	-6,2577	0,2013	54,6283

Tabela 4.14: Dieta - Quinta iteração - Operações - Fase I

Na Tabela 4.14 ainda temos coeficientes menores do que zero na função artificial, x_5, x_6, x_7, $x_8 < 0$, temos a maior negatividade em x_8 e como o único coeficiente $a > 0$ que está em na base é x_{10}, na sexta iteração entra x_8 e sai x_{10} conforme as operações da Tabela 4.15:

Operações elementares em cada linha – Sexta iteração	
Linha do passo anterior	Nova linha
L_1	$L_1 + 0,0059 \times P$
L_2	$L_2 + 0,5598 \times P$
L_3	$L_3 + 0,0007 \times P$
L_4	$P = \frac{1}{0,1598} \times L_4$
L_5	$L_5 + 0 \times P$
L_6	$L_6 - 0 \times P$
L_7	$L_7 + 0,2013 \times P$

Tabela 4.15: Dieta - Sexta iteração - Operações - Fase I

Temos então, a Tabela 4.16.

Quadro sexta iteração														
	Coeficientes de													
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	b
Z	0	0	0	0	-0,0106	-0,0132	-0,0711	0	0	0,0106	0,0132	0,0711	0	8,9273
W	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
V.B.														
x_3	0	0	1	0	-0,0011	0	0	0	0	0,0011	0	0	0	0,3371
x_8	1	0	0	0	-1,7865	-2,6533	-33,4018	1	0	1,7865	2,6533	33,4018	-1	166,9837
x_1	0	0	0	0	0	-0,0039	0,0063	0	0	0	0,0039	-0,0063	0	1,018
x_2	0	1	0	0	0	0,0007	-0,0129	0	0	0	-0,0007	0,0129	0	0,1025
x_4	0	0	0	1	-0,3596	-0,0625	-0,4647	0	-1	0,3596	0,0625	0,4647	0	88,2351

Tabela 4.16: Dieta - Sexta iteração - Operações - Fase I

Após a sexta iteração, na Tabela 4.16, zeramos a função artificial, $W = 0$, dessa forma descartamos as variáveis artificiais e vamos para a fase II.

4.3.2 Fase II

Temos uma solução básica factível (viável) para o problema original no final da Fase I. Para prosseguir a resolução do problema de Otimização Linear, pelo Método Simplex, devemos abandonar a função artificial e as variáveis artificiais, como na Tabela 4.17, e prosseguimos com as iterações do método até obtermos a solução ótima.

Quadro Inicial da Fase II									
	Coeficientes de								
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
z	0	0	0	0	-0,0106	-0,0132	-0,0711	0	8,9266
V.B.									
x_3	0	0	1	0	-0,0011	0	0	0	0,3371
x_8	1	0	0	0	-1,7865	-2,6533	-33,4018	1	166,9837
x_1	0	0	0	0	0	-0,0039	0,0063	0	1,018
x_2	0	1	0	0	0	0,0007	-0,0129	0	0,1025
x_4	0	0	0	1	-0,3596	-0,0625	-0,4647	0	88,2351

Tabela 4.17: Dieta - Inicial da Fase II

Como os coeficientes das variáveis na função objetivo e todas as constantes são maiores que zero, temos uma solução ótima dada por $b = \{1,018;\ 0,103;\ 0,337\}$ com o valor da função objetivo em R$ 8,93. Se não tivéssemos obtido uma solução ótima, continuaríamos as iterações.

Com isso, temos como solução do nosso problema: 1,018kg de arroz, 0,103kg de feijão e 0,337kg de frango, gastando R$ 8,93, que é o mesmo que verificamos com o uso do Excel.

O algoritmo do Método Simplex pode favorecer o desenvolvimento de habilidades com as operações numéricas, bem como fundamentar as operações com matrizes e a apresentação da notação de vetores como ferramenta na resolução de problemas corriqueiros.

Capítulo 5

Atividades para Sala de Aula

> Nesse capítulo apresentaremos algumas sugestões de situações de aprendizagem envolvendo ideias da Otimização Linear e orientações ao professor.

Em todos os níveis de ensino, as situações de aprendizagem servem de base para o bom andamento da aula. Problematizar uma situação ou até mesmo levantar hipóteses sobre um determinado assunto é o ponto de partida no desencadeamento da construção do conhecimento. Quando interagimos de forma bem articulada, tanto educadores como educandos ampliam suas habilidades e constroem novos saberes.

As técnicas da administração que envolvem tomadas de decisões nos permitem amplas discussões. Temos de conhecer o problema a ser resolvido para depois elaborarmos uma estratégia de resolução. Já na leitura do problema, iniciamos as tomadas de decisões. Quais as informações importantes? Já enfrentamos situações parecidas? Onde se quer chegar? Qual o melhor caminho? Essas e outras perguntas norteiam o entendimento do problema. Estamos constantemente lidando com escolhas que podem facilitar ou dificultar atingir o objetivo proposto.

Entendido o problema, temos de criar uma estratégia de resolução. Levantarmos as ferramentas que temos e como vamos utilizá-las para chegar à solução. Nessa fase do problema, novamente a escolha é fundamental. Usaremos tabelas e/ou gráficos? Construiremos equações ou inequações? Usaremos matrizes ou simplesmente analisaremos as informações? Se já resolvemos problemas parecidos temos um parâmetro, se não temos que desenvolver o caminho como um todo. Todos os passos fazem parte do desenvolvimento de nossas habilidades.

Elaborada a estratégia, é momento de aplicá-la para verificar se realmente o problema é resolvido e verificar se a solução realmente atende ao que se propunha. Encontrada essa solução entramos em novos questionamentos: A resposta realmente atende ao problema? Temos mais de uma solução? Podemos encontrar uma solução melhor? Claro que estamos a todo momento escolhendo, comparando e buscando o melhor caminho ou a melhor solução e a tomada de decisão acaba sendo inerente a existência humana, permeando por todas as suas atividades. Na matemática e na sala de aula não é diferente! Estamos a todo momento envolvidos em conflitos internos e externos que servem de motivação para a construção de nossos saberes.

A Otimização Linear, ou parte dela, nos serve de base para a resolução de diversos problemas e na elaboração de muitas atividades para a sala de aula. Nesse capítulo conheceremos algumas atividades envolvendo problemas de otimização para serem resolvidos nos diversos níveis de aprendizagem. Em alguns desses problemas, nos diversos níveis são, parcialmente, usadas as técnicas da Otimização Linear, os quais servirão de conhecimento prévio para a resolução de problemas futuros. Separaremos por níveis de ensino, mas uma atividade pode migrar de um ao outro com as adequações de linguagem e respeitados os limites de cada turma.

5.1 Brincando com os blocos lógicos

5.1.1 Objetivo

A atividade deve proporcionar a relação entre as formas geométricas fazendo relações entre número de lados, tamanho, espessura e cores. Trabalhar as diferenças e semelhanças e proporcionar senso de contagem. Os eixos a serem abordados devem ser: percepção, classificação, posição e contagem. Desenvolver no aluno a percepção de que podemos classificar e organizar informações para tomar a melhor decisão.

5.1.2 Público alvo

Crianças de 3 anos a 6 anos de idade, atendendo a Educação Infantil e o início do Ensino Fundamental.

5.1.3 Material necessário

Para cada grupo de quatro alunos será necessário:

- 1 caixa de blocos lógicos.
- 1 quadrado de papel cartão de 20cm x 20cm.
- 4 folhas de sulfite.
- 1 caixa de lápis de cor.
- 1 cartolina.
- Figuras equivalentes às que temos nos blocos lógicos, em papel colorido, para colagem na cartolina.

5.1.4 Problema norteador

Com as peças dos blocos lógicos, queremos cobrir o quadrado de 20cm x 20cm usando o menor número de peças possível.

5.1.5 Desenvolvimento

- Em grupos de 4 alunos, fornecer os blocos lógicos e proporcionar o manuseio para conhecimento do material. Como são as peças? Quais as cores que temos? Quais as semelhanças e diferenças?

- Em uma cartolina dividida ao meio, propor que eles representem acima da linha central, o que tem no céu e abaixo, o que tem no chão, constituindo as ideias de acima e abaixo.

- Solicitar aos alunos que formem algo com as peças, deixando a criatividade fluir. Provocar para que descrevam o que fizeram e levantar questões. O que temos na parte de baixo? O que temos na parte de cima? O que temos ao lado?

- Pedir para que cada aluno pegue uma peça. Questionar sobre como ele fez essa escolha e o que podemos formar com essa peça. O que temos parecido com essas formas em nossas casas?

- EMPILHANDO PEÇAS - Peças do material espalhadas pela mesa (ou pelo chão). Cada aluno deverá pegar uma peça e colocar no centro do grupo, de modo que as peças serão empilhadas uma a uma. O aluno deverá fazer de tudo para a "torre" não cair. Para isso os alunos terão que pensar nas peças mais adequadas para a base, meio ou topo da torre deixando as "piores" para o companheiro seguinte. Nesta atividade, os alunos desenvolverão a capacidade de discernimento, raciocínio lógico e motricidade.

- Encaminhando ao nosso problema norteador, solicitaremos que os alunos separem as peças por formas e tamanhos e conte quantas temos de cada tipo, descrevendo suas características.

- Com as peças separadas, propor uma primeira solução para cobrir o quadrado, registrando no sulfite quantas peças de cada tipo foram utilizadas. Nesse momento, comparamos a solução de cada um.

- Solicitar que busquem outras soluções na tentativa de identificar uma com um menor número de peças.

- Em uma roda de conversa socializar as soluções encontradas, construir um gráfico na cartolina usando como registro representações das figuras e discutir a existência de várias soluções certas e que tem uma que melhor atende nossa proposta.

5.1.6 Orientação ao professor

Nessa atividade, a socialização e circulação das informações é fundamental ao desenvolvimento da criança. Proporcionar que o aluno coloque sua observação permite as ligações cognitivas da comparação. Quem é maior? Quem é menor? Quem é fino? Quem é grosso? Qual rola? Qual não rola? Essas e outras questões favorecem a classificação e a construção da ideia de conjunto. Na educação infantil, ainda não fundamentamos o registro matemático, porém é de grande importância a construção de ideias que servirão de alicerce ao desenvolvimento de conceitos futuros.

É importante relembrarmos que para conduzir adequadamente turmas de alunos menores, devemos dar um comando de cada vez, para que com isso, nos façamos entender sem causar tumulto durante a atividade.

Explorar as várias vertentes do material e repetir a atividade mais de uma vez desenvolve noções de classificação, contagem, mais e menos. Comparando as soluções, analisando os gráficos e buscando sempre uma melhor solução. Quando comparamos com um tipo só de figuras e percebemos que uma cabe mais que a outra estamos embutindo a diferença de superfície e a percepção de conservação de área em diferentes quantidades.

Nas ideias da otimização linear, apesar de não estarmos registrando de forma abstrata, estamos induzindo as ideias de restrição, solução viável e solução ótima.

5.1.7 Conteúdos envolvidos

- Ordenação.

- Conjuntos.

- Contagem.

- Formas geométricas.

- Noção de superfície.

- Tomada de decisão.

5.2 Brincando com os sapatos

5.2.1 Objetivo

Desenvolver a percepção de quantidade, cor e as possibilidades de escolhas. Levar o aluno a construir referenciais de escolha, maior, menor, quantidade e comparação de formas e tipos. A classificação e a noção de conjuntos, ainda de forma intuitiva também fazem parte da proposta dessa atividade. Escolher dentre as opções selecionadas a que melhor atende o que se pretende fazer.

5.2.2 Público alvo

Crianças de 3 anos a 6 anos de idade atendendo a Educação Infantil e o início do Ensino Fundamental.

5.2.3 Material necessário

- Texto: A Centopéia e Seus Sapatinhos de Milton Camargo.
- Poema: Os sapatos de quem anda descalço.

Para cada grupo de quatro alunos será necessário:

- Figuras de tipos de sapatos usados no cotidiano.
- 1 cartolina.
- 6 folhas de papel sulfite.
- 1 caixa de lápis colorido.

5.2.4 Problema norteador

Queremos separar tipos de sapatos para a melhor estação do ano, ou ocasião e analisar a quantidade necessária para o uso individual e coletivo.

5.2.5 Desenvolvimento

- Contar a história aos alunos.

A Centopéia e Seus Sapatinhos

Autor: Milton Camargo

Naquela manhã, a centopéia acordou mais cedo. Era dia de comprar sapatos. Levantou, arrumou a sua caminha e foi para sala tomar café. Sua mãe já tinha arrumado a mesa. O café estava quentinho e havia uns bolinhos de que ela gostava muito.

_ Menina, ande logo, senão vamos chegar muito tarde, e não vai dar tempo de comprarmos todos os sapatos de que precisamos.

Dona Centopéia e sua filha pegaram os seus chapéus e suas sombrinhas, por que estava um sol muito forte e saíram. Quando chegaram à loja, a joaninha veio atendê-las:

_ Bom dia, Dona Centopéia! Como sua filha está bonita! Fazia muito tempo que a senhora não aparecia.

A centopéia pediu um sapato vermelho muito bonitinho.

A joaninha subiu e desceu a escada, subiu e desceu, subiu e desceu diversas vezes para trazer os pares de sapato.

A joaninha colocou todos os sapatos na centopéia e ela andou um pouco para ver se eles não apertavam os pezinhos.

_ Dona Joaninha, estão muito apertados! Não tem nenhum número maior? - pediu a centopeinha.

E a joaninha subiu e desceu novamente a escada, subiu e desceu diversas vezes para buscar os sapatos maiores. Quando acabou de colocar os sapatos nos pés da centopéia, a joaninha não tinha mais força para levantar. Dona Centopéia, então, abriu a bolsinha e disse:

_ Você está muito cansada, amanhã eu volto para comprar os sapatos.

Ouvindo isso, a joaninha desmaiou.

- Solicitar as crianças que falem sobre a história. O que aconteceu? Quem fez parte da história? O que usamos nos pés para protegê-los? Quais tipos de sapatos usamos?
- Pedir que representem na folha de sulfite os sapatos provados pela centopeia e a ordem que os fatos ocorreram.
- Recitar ou cantar o poema com os alunos.

Os sapatos de quem anda descalço

(adaptado da canção “A Barefoot Walker’s Shoes”)

Tenho sapatos para caminhar,

E pés de pato pra nadar.

Tênis bem fortes pra segurar

Meus pés e eu poder escalar.

Tenho belas sapatilhas

E botas pra cavalgar

E um lindo par de patins

Que me fazem deslizar.

Botas quentes para o frio,

E de borracha pra quando chove.

E sandálias pra dar saltos

Com meus amigos, saltos bem altos!

Perto da cama tem pés de pato

Botas, sandálias e sapatos.

“O que eu calço?”

“Fico descalço!”

O que eu faria sem meus sapaaaaatos?

(Eu não quero usar sapaaaaatos!”)

- Retornando ao poema, solicite que as crianças interpretem os movimentos.
- Solicite que as crianças peguem o tipo de sapato, nas figuras apresentadas, que vão aparecendo no poema e separe conforme seu uso. Onde usamos esse tipo de sapato?
- Separar os tipos de sapatos pelas suas características e discutir onde usamos e como usamos.
- Aproveitar a atividade para trabalhar as quantidades 1 e 2, a questão dos pares, duplas, relação biunívoca.
- Levantar a discussão de quantos pares de sapato precisamos ter para atender as nossas necessidades. Lembremos de que é uma questão aberta e todas as respostas devem ser aceitas.
- Fazer uma roda de conversa para discutir as duas histórias e ressaltar as diferenças entre as respostas encontradas.

5.2.6 Orientação ao professor

Ao contar a história, entonar e discutir as relações de subir e descer, proporcionar o entendimento do texto e aguçar a imaginação das crianças de forma a interagirem com o texto para seu melhor entendimento. Ler um fato e imaginar o que está ocorrendo é fundamental no entendimento e posterior resolução de problemas.

Na reconstrução da história, elencar a ordem em que os fatos ocorreram e problematizar se eles poderiam ter ocorrido em outra sequência. Perceber a ordenação é outra habilidade importante ao entendimento de problemas. Tanto no poema como no texto, proporcionar a expressão do que está ocorrendo favorece o entendimento.

Discutir que cada pessoa usa por vez um par de sapatos e que existe uma relação de dois sapatos para uma pessoa. Todos os animais tem dois pés? Se fossemos fazer sapatos a eles usaríamos pares? Essas e outras discussões devem permear a roda de conversa de forma a construir relações de quantidades.

Na separação dos tipos de sapatos, observar as características envolvidas: cor, uso, tamanho, conforto e outras que os alunos levantarem. Ressaltar a importância da classificação na hora da escolha.

Estamos trabalhando nessa atividade ordenação e tomada de decisão que serve de conhecimento prévio a problemas de otimização. Também tratamos de forma implícita das restrições naturais.

5.2.7 Conteúdos envolvidos

- Sequências.
- Conjuntos.
- Contagem.
- Tomada de decisão.

5.3 Brincando com as formas

5.3.1 Objetivo

Vivenciar como as diferentes formas interferem no espaço que temos para utilizar. Desenvolver a percepção da interferência da forma no uso do espaço. Comparar medidas e registrar de forma a passar essa informação ao outro. Escolher o melhor espaço para desenvolver uma atividade e a melhor solução para um problema.

5.3.2 Público alvo

Crianças de 3 anos a 8 anos de idade atendendo a Educação Infantil e o início do Ensino Fundamental.

5.3.3 Material necessário

- Papel Sulfite - 1 folha por aluno.
- Lápis colorido -1 caixa para cada grupo de quatro alunos.
- 1 corda de 8m de comprimento.

5.3.4 Problema norteador

Queremos, com uma corda de oito metros, delimitar uma área que caiba o maior número de pessoas.

5.3.5 Desenvolvimento

1. Com a corda de 8m, formar uma região e desenhar a região formada no papel sulfite.
2. Ainda com a forma montada, ir entrando, um aluno de cada vez, dentro da forma para verificarmos quantas crianças cabem dentro dessa região. Registrar no desenho a quantidade de pessoas.
3. Levantar hipóteses: Quais formas podemos obter? Qual forma cabe mais crianças? Em qual delas obtemos o maior espaço? Qual delas é mais útil? E solicitar que verifiquem cada uma das afirmações, repetindo os passos 1 e 2.
4. Após formarem várias possibilidades diferentes, organizar as anotações do que tem mais para o que tem menos e descreverem a forma com o maior e com o menor número de crianças.
5. Socializar as respostas, comparar as diferenças e verificar se temos uma melhor. Registrar as informações e discutir o resultado obtido com a turma e a diferença entre as formas geométricas encontradas.

5.3.6 Orientação ao professor

Na construção das formas geométricas é interessante observar que não existe a obrigatoriedade das formas serem regulares. Quanto maior a variedade de formas, mais rica se torna a discussão e mais se relaciona com a tomada de decisão. Possibilitemos a nossos alunos que levantem suas hipóteses e compare com situações do cotidiano.

Em turma com alunos mais novos, o professor deve mediar todo o processo e a forma de registro deve respeitar o nível de aprendizagem que o aluno se encontra. Com os alunos mais velhos já podemos explorar a ideia de perímetro, o mesmo se mantém, mas a região formada se altera. Vale a questão da decisão de qual a melhor forma a ser usada.

Fazer escolha e verificar a melhor para uma determinada finalidade, muitas vezes, é condição necessária à solução de um problema de Otimização Linear e quando vivenciamos atividades práticas com nosso alunos, estamos fornecendo um repertório de memória espacial para que se construa seu aprendizado nos problemas futuros. É importante que ele tenha vivenciado situações concretas para depois gradativamente construir o abstrato.

Atividades como essa da corda podem ser adaptadas às séries posteriores acrescentando cálculo de áreas, sistemas lineares, noções de máximo e mínimo. Em cada série do Ensino Básico podemos ampliar as dificuldades até chegar em situações rotineiras que podem ser resolvidas com essas ideias.

5.3.7 Conteúdos envolvidos

- Sequências.
- Área.
- Perímetro.
- Formas.
- Contagem.
- Tomada de decisão.
- Problemas de maximização.

5.4 Vamos construir figuras?

5.4.1 Objetivo

Essa atividade traz como principal objetivo explorar as formas planas na construção de figuras espaciais. Levar o aluno à construção da noção de capacidade e proporcionar a tomada de decisão para escolher a melhor solução do problema. Vivenciar situações que envolvam interferências do triângulo equilátero e do quadrado na criação de caixas.

5.4.2 Público alvo

Alunos do Ensino Fundamental ciclo I – 1º ano ao 5° ano.

5.4.3 Material necessário

Para cada grupo de quatro alunos serão necessários:

- 20 bolas de isopor com 5cm de diâmetro.
- 20 quadrados de 15cm de lado em papel cartão.
- 20 triângulos equiláteros de lado 15cm em papel cartão.
- 1 folha de papel quadriculado.
- 2 folhas de sulfite.
- 1 régua.

5.4.4 Problema norteador

Queremos construir caixas de três formas: cubos, pirâmide de base triangular, pirâmide de base quadrada, de forma a usar 20 quadrados e 20 triângulos todos com 15 cm de lado. Pretendemos guardar dentro dessas caixas o maior número possível de bolas.

5.4.5 Desenvolvimento

- Fornecer os triângulos e quadrados para que os alunos se familiarizem com as formas, comparando número de lados, medidas de lados, semelhanças e diferenças.
- Discutir quantas dessas peças serão necessárias para fazer cada caixa, provocar para que sejam tampadas de forma a obter os sólidos geométricos, usando um só tipo de polígono ou os dois e registrando essa informação na forma de uma tabela.
- Com fita adesiva, fazer uma caixa de cada tipo deixando uma extremidade aberta para explorarmos a capacidade, quantas bolas cabem dentro de cada uma.
- De forma experimental, verificar quantas bolas cabem em cada uma e registrar essa informação.
- Partiremos para problematização e experimentação, quantas caixas e quais formas podemos fazer com os polígonos que temos? Sobra algum polígono? É possível fazer sem sobras? É importante que essas informações sejam compartilhadas e registradas.
- Proporcionar o preenchimento de tabelas com múltiplos relacionados às quantidades de polígonos e à quantidade de bolas que cabem em cada caixa, sempre valorizando o registro numérico e operacional.

- Após as várias experimentações e registros, provocar para que eles proponham soluções ao problema norteador e verificar se ela é possível ou não.

- Comparar as várias soluções encontradas de forma a verificar se existe uma melhor entre elas. É possível obtermos uma solução melhor?

- Socializar as conclusões e discutir as melhores formas de registros para essa situação.

5.4.6 Orientação ao professor

Temos uma atividade com envolvimento de diversas habilidades e conteúdos matemáticos, valorizar as propriedades desses polígonos regulares e a construção de poliedros com eles é muito importante e a forma de abstração dependerá do nível de cada turma. Nesse momento, já podemos discutir semelhanças/diferenças de forma a classificarmos e reconhecermos polígonos e poliedros. Algumas noções como oblíquo, paralelo, perpendicular já podem ser exploradas nas construções valorizando a atividade. Claro que devemos primeiro verificar as observações dos alunos e relacionar com figuras presentes em seu cotidiano.

Nas representações de quantidades, estaremos explorando sequências de múltiplos e contagem de forma a fundamentar as operações básicas, seus registros e suas inversas. A construção de expressões e relações já podem também ser vivenciadas e contextualizadas. Na comparação entre as soluções estamos verificando as várias soluções para um mesmo problema desencadeando a tomada de decisão. Temos também a inserção de que para um problema podemos ter mais de uma resposta e múltiplas formas para a sua resolução.

É importante ressaltar que em vários problemas cotidianos temos de escolher entre a melhor opção. O mais vantajoso, que depende sempre da situação em que estamos vivendo. Proporcionar a importância da organização das informações para posterior tomada de decisão. Aqui podemos explorar gráficos, tabelas e diagramas representativos como um preparo para o aprendizado da álgebra nas séries subsequentes. Também é importante provocar questionamentos e socializar as respostas obtidas de forma a circular a informação e construir novos saberes.

5.4.7 Conteúdos envolvidos

- Formas geométricas planas.

- Formas geométricas espaciais.

- Sequências de múltiplos.

- Números e operações.

- Gráficos e tabelas.

- Tomada de decisão.

- Problemas de maximização.

5.5 Vamos medir e construir figuras?

5.5.1 Objetivo

Proporcionar ao aluno a vivência com sólidos geométricos e sua construção plana, planificação, desenvolvendo a percepção de quantidade de material necessário, área, perímetro e ideia de volume. Utilizar da melhor maneira possível de um material na construção de objetos concretos e visualizar as formas de como podemos interferir nessas situações. Em uma atividade lúdica, desenvolver as habilidades de medidas e tomada de decisão.

5.5.2 Público alvo

Alunos do 3º ao 6º ano do Ensino Fundamental e/ou mais adiantados para revisitar conceitos.

5.5.3 Material necessário

Para cada grupo de quatro alunos serão necessários:

- 4 réguas.

- 2 tesouras.

- 4 lápis.

- 1 cartolina ou papel cartão.

- 1 rolo de fita adesiva.

- 2 compassos.

5.5.4 Problema norteador

Fazer com uma folha de cartolina, sem mudar as dimensões dos polígonos, o maior número de sólidos possível de forma a obter o maior volume acumulado entre os poliedros encontrados.

5.5.5 Desenvolvimento

- Entregar para cada grupo de quatro alunos uma cartolina e solicitar que, primeiramente, em uma folha de caderno, desenhe em medidas exatas as seguintes figuras: Quadrado de lado 5 cm, quadrado de lado 10 cm, retângulo de lados 5 cm por 10 cm.

- No desenho formado, verificar se, realmente, são quadrados e retângulos, medindo suas diagonais e comparando essas medidas. Estão corretos? Como podemos usar o compasso para facilitar nossa construção? Quais as diferenças e semelhanças entre quadrados e retângulos? Existem figuras de quatro lados iguais que não são quadrados?

- Na cartolina, depois de medir e anotar suas dimensões no caderno, reproduzir 3 quadrados de lados 5 cm e 3 quadrados de lados 10 cm e 6 retângulos de lados 5 cm por 10 cm e reservar a parte restante para a próxima etapa da atividade.

- Usando fita adesiva para unir os lados, podemos formar caixas com essas figuras? Quais suas características? Se fossemos guardar balas dentro dessas caixas, qual caberia mais? Registre em seu caderno as observações de seu grupo.

- É possível fazermos triângulos com lados 5 cm? E com lados 10 cm? Desenhe um de cada tipo em seu caderno e depois de conferir suas medidas corte na cartolina.

- Como poderíamos montar as caixas usando esses triângulos? Monte um exemplo.

- Podemos fazer triângulos com lados de medidas diferentes? Como ficariam as caixas montadas por eles?

- Você poderia sugerir uma figura com mais de quatro lados e montar uma caixa diferente para mostrar para seus amigos?

- Observe as peças que você montou, elas representam sólidos geométricos e são chamadas de poliedros onde observamos três elementos: face, vértice e aresta. Dê um nome para cada uma delas e complete a tabela com a quantidade de cada um desses elementos.

Nome	Faces	Vértices	Arestas

- Retornando às nossas primeiras caixas de base quadrada, observaremos mais alguns elementos. Qual o perímetro e a área de cada um dos polígonos usados? Registre suas observações.

- Voltando a quanto cabe dentro de cada caixa, quantos cubinhos de lado 1cm cabem dentro da caixa de base quadrada de 5cm? E dentro da caixa de base 10cm? Qual cabe mais? Quantos a mais? Preencher a tabela, com as medidas dos polígonos usados, para observar mais algumas possibilidades de respostas e como o volume se comporta em relação as outras dimensões.

Medidas da base		Altura da caixa	Área da base	Volume
lado	lado			
a	b	c	$a \times b$	$a \times b \times c$

- Com uma cartolina, quantas caixas de cada tipo podemos fazer? Use para planejar as medidas da cartolina anotadas no início da atividade.

- Usando o volume de cada caixa, em qual teríamos um volume acumulado maior? Em qual sobraria mais papel?

- Usando os dois tipos de caixa, qual o maior número de cada uma que podemos fazer e qual o volume acumulado em cada caso? Analise várias possibilidades e anote na tabela. Quanto mais melhor!

Quantidade de caixas		Volume de cada caixa		Volume acumulado
Base de 5cm	Base de 10cm	Base de 5cm	Base de 10cm	
n_1	n_2	v_1	v_2	$V = n_1 \times v_1 + n_2 \times v_2$

- Em qual das soluções obtemos o maior volume acumulado? É possível obtermos uma solução melhor? Proponha uma outra possibilidade para esse problema.

5.5.6 Orientação ao professor

Essa situação de aprendizagem deve levar o aluno a construir algumas ideias de grandezas e suas dimensões. Na medida de comprimento, valorizar o uso da régua com múltiplos e submúltiplos do centímetro e seu registro como número decimal. Retomar o uso da régua como instrumento de medida e o parâmetro de contagem apresentado na mesma. Todos os alunos sabem usar a régua? Como eles usam? Como eles transferem medidas? Essas e outras perguntas devem permear a avaliação da atividade e a valorização do uso de instrumentos como régua e compasso.

Na observação das características do retângulo, observar que as diagonais devem ser iguais, e que no caso particular do quadrado, lados iguais, o não atendimento à restrição nos propicia o losango. Vale ressaltar as características, as classificações de polígonos e as diferenças entre regulares ou não. Na construção do triângulo, mais uma vez, vamos explorar o uso do compasso como facilitador da construção. É importante que o aluno registre suas observações para concretizar ideias que facilitarão no aprendizado de conceitos futuros e comece a dissertar na resolução de problemas.

No cálculo de área e volume, o uso de material concreto para comparação facilita o entendimento. O material dourado se coloca como facilitador se considerarmos como dimensão unitária e construirmos os polígonos contando quadrados ou poliedros contando cubos. O produto entre as dimensões no cálculo de área e volume também pode se associar a métodos de contagem e podemos contextualizar outras situações onde multiplicamos para contar. Fazer o registro das operações já na linguagem algébrica facilita a familiarização com essa escrita facilitando processos futuros.

A organização da informação em tabelas para posterior consulta, agrupando os dados, e tomada de decisão, já nos leva à leitura e proposição de situações cotidianas. Quando nos deparamos com diversas soluções e temos que escolher uma delas por algum critério, estamos nos apropriando das técnicas de otimização que nos favorecem em várias atividades. Aqui o uso de planilhas e gráficos também podem ser explorados como facilitadores do processo e aplicações tecnológicas.

5.5.7 Conteúdos envolvidos

- Números e operações.
- Polígonos e poliedros.
- Contagem e operações básicas.
- Perímetro, área e volume.
- Expressões algébricas.
- Tomada de decisão e Problemas de Otimização (maximização).

5.6 Construindo brinquedos de papel

5.6.1 Objetivo

Desenvolver a percepção de espaço revisitando ideias da geometria e melhorando o aproveitamento de materiais. Revisitar operações básicas e construir expressões e modelos para representação e solução de problemas.

5.6.2 Público alvo

Alunos do 3º ao 9º ano do Ensino Fundamental conforme abordagem dos registros e linguagem apresentada.

5.6.3 Material necessário

Para cada grupo de quatro alunos serão necessários:

- 1 cartolina.
- 4 réguas.
- 4 lápis.
- 4 tesouras.
- Modelos dos brinquedos, ver apêndice A.3.
- 4 tabelas de registro.
- 4 folhas de papel quadriculado ou milimetrado.

5.6.4 Problema norteador

Qual o número máximo de casas e carros, mantendo a escala inicial, podemos fazer em uma cartolina de forma que o número de carros seja, pelo menos, o dobro do número de casas?

5.6.5 Desenvolvimento

- Fornecer aos alunos os modelos das casas e carros, disponível no apêndice A.3, a serem feitos na cartolina, um de cada, e com auxílio de uma régua solicitar que, inicialmente, verifiquem quantos carros e casas seria possível fazer com apenas uma cartolina.
- Provocar os alunos para que observem as figuras geométricas envolvidas, suas características e dimensões. É importante o registro dessas observações e a sistematização de alguns conceitos, como por exemplo retas paralelas e concorrentes.
- Proporcionar as relações de medidas entre os segmentos usados. Explorar as medidas decimais e as classificações em maior e menor.
- Retomar ideias de proporções. Se a casa é 100 vezes menor que a realidade, quais seriam suas medidas reais? Um carro tem aproximadamente 4m de comprimento, quantas vezes esse carro é menor que o real?

- Fornecer aos alunos mais moldes de forma a fazerem os carros e casas com sua cartolina e depois compararem as quantidades obtidas. Levar a discussão do termo “pelo menos” no problema norteador.

- Ampliando nossa situação, vamos problematizar! Em uma loja de brinquedos, o lucro no carro é de R$ 2,75 e da casa R$ 1,35. Com os carros e casas feitos em uma cartolina o lucro seria, ao todo, quanto?

- Comparando grandezas, completaremos uma tabela para o número de carros produzido e uma para o número de casas e representá-las em um gráfico no papel quadriculado. Para que o lucro seja, aproximadamente, igual entre os dois brinquedos, quantos de cada um devemos ter?

Casas			Carros	
Quantidade	Lucro Obtido		Quantidade	Lucro Obtido
1	R$ 1,35		1	R$ 2,75
2			2	
3			3	
4		....	4	
5			5	
10			10	
15			15	
20			20	

- Agora juntaremos as informações do lucro de carros e casas e completaremos a nova tabela acrescentando os resultados obtidos pelos alunos da turma.

Quantidade de casas	Quantidade de carros	Lucro Obtido
1	1	R$ 4,10
1	2	
2	1	
2	5	

- Valorizar a escrita na forma de expressões numéricas para a construção do registro, $1 \times 2,75 + 1 \times 1,35 = 4,10$ e propor discussões, nos resultados da turma, do tipo: Onde obtivemos o maior lucro? E o menor lucro? É possível obtermos um lucro maior nessa situação? Proponha que os alunos produzam um texto argumentativo com as respostas dessas perguntas e registrem as conclusões da atividade.

5.6.6 Orientação ao professor

A importância do registro no ensino e aprendizagem de matemática tem de ser observado com atenção. Em turmas das séries iniciais, valorizar as questões dos números e operações dando ideias de variações. Nos alunos das séries finais do Ensino Fundamental, já podemos introduzir variáveis na forma de incógnitas e construir equações e inequações para a representação da situação e comparação nas tabelas e gráficos. É possível escrever uma regularidade? Existem restrições a serem analisadas? Podemos interferir na situação? Essas e outras perguntas devem nortear sempre o problema, levando ao aluno a percepção de que suas decisões interferem nos resultados obtidos. A valorização da produção se coloca como motivador na busca de novas soluções.

No trabalho com proporção e escala é importante a discussão de onde esse conceito aparece no cotidiano e como ele pode nos ajudar a entender e representar situações. A ideia de fração como razão pode ser provocada ou retomada, revisitando e construindo parâmetros a cada momento. Circular as conclusões e provocar para que as respostas tenham origem nos próprios alunos.

Além de conhecimentos básicos da matemática, a situação permite uma exploração de grandezas variáveis linearmente, podendo ser exploradas dentro da resolução de sistemas lineares e sua representação gráfica e se ampliarmos a situação que envolve tomada de decisão, podemos interagir nas ideias de otimização linear já nessa fase do aprendizado.

5.6.7 Conteúdos envolvidos

- Números e Operações.
- Razão e Proporção.
- Medidas e Formas.
- Expressões Algébricas.
- Gráficos e Tabelas.
- Tomada de decisão e problemas de otimização restritos (maximização).
- Modelagem matemática e resolução de problemas.

5.7 Carrinho de Mão

5.7.1 Objetivo

Problematizar de forma lúdica a contagem e a sequência de múltiplos. Manipular formas geométricas, recortar, dobrar e colar, para aperfeiçoamento da coordenação motora. Vivenciar ideias operacionais do princípio aditivo e multiplicativo. Levar o aluno a construção de soluções em problemas abertos que envolvam tomada de decisão. Proporcionar o registro em tabelas na resolução de problemas. Escolher a melhor possibilidade entre as respostas encontradas na solução de um problema.

5.7.2 Público alvo

Alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental ou das séries subsequentes com necessidade de retomada dos conceitos.

5.7.3 Material necessário

Para cada grupo de cinco alunos serão necessários:

- 5 folhas de moldes, disponível no Apêndice A.2 desse material, de cada tipo, A.2.1 à A.2.4.
- 10 folhas de papel sulfite.
- 1 caixa de lápis de cor.
- Material dourado ou outro equivalente.
- 5 tesouras.
- 1 tubo de cola.

5.7.4 Problema norteador

Construir número máximo de carrinhos de mão que podem ser feitos com duas, três ou quatro rodas. Dispomos de vinte e três rodas, cinco moldes para carrinhos de duas rodas, cinco moldes para carrinhos de três rodas e quatro moldes para carrinhos de quatro rodas, disponíveis no apêndice A.2 desse material, e todas as rodas devem ser usadas.

5.7.5 Desenvolvimento

- Inicialmente, forneceremos os moldes para grupos de quatro alunos de forma a conhecerem o material disponível. As linhas cheias definem corte e as pontilhadas dobras na construção do material. Para percepção de espaço podemos solicitar aos alunos que pintem as figuras a serem usadas e identifiquem as formas geométricas. Solicite que eles registrem em seu caderno o nome das figuras e suas características.

- Nesse momento, construiremos um carrinho de mão de cada tipo para iniciarmos a problematização e nosso estudo numérico. Mais uma vez é importante que os alunos registrem suas observações em seu caderno para depois podermos socializar as conclusões com a turma em uma roda de conversa.

- Feito um carrinho de cada tipo, podemos começar nosso planejamento na solução do problema. Uma sugestão é construir uma tabela para vermos a quantidade de rodas necessárias à construção de outros carrinhos. Podemos relacionar cada roda a uma unidade do material dourado para permitir a comprovação do número de rodas por contagem.

Número de carrinhos	Quantidade de rodas para carros de:		
	Duas rodas	Três rodas	Quatro rodas
1	2	3	4
2	4	6	8
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

- Nesse momento, podemos provocar os alunos a juntar as informações para conduzir a algumas operações:

  - Em um carrinho de cada tipo, quantas rodas temos?
  - Se fizermos dois carrinhos de cada tipo, quantas rodas temos?
  - Se fizermos dois carrinhos de quatro rodas, três de três rodas e um de duas rodas. Quantas rodas teremos?
  - Com dez rodas, quantos carrinhos de três rodas podemos fazer? Quantas sobram?

    * Podemos provocar outras problematizações conforme o nível da turma, explorando as potencialidades existentes.

- Terminada a investigação, pedimos que os alunos proponham uma solução para a situação inicial e verifiquem, com os moldes fornecidos, se ela é possível ou não, discutindo em seu grupo a solução encontrada.

- Após a discussão no grupo fazemos uma roda de conversa para a socialização das conclusões obtidas em cada grupo e após essa discussão, o professor fundamenta as descobertas e faz os registros necessários.

5.7.6 Orientação ao professor

Problematizar a situação de forma a motivar a turma no desenvolvimento da atividade. Uma boa provocação, com retomada de regras de convivência, facilitam o desenvolvimento do trabalho, favorecendo um melhor resultado e uma boa circulação da informação. Valorizar os vários métodos utilizados no desenvolvimento da atividade e proporcionar a reflexão sobre o registro correto das operações básicas. É importante ressaltar que existem vários algoritmos para realização dos cálculos, porém, no momento de apresentar os resultados, usamos expressões algébricas.

Nessa atividade, é importante que o aluno desenvolva a percepção de sequências de múltiplos, mesmo que por contagem, para a ampliação de seus saberes. Uma boa observação do professor permite avaliar o nível que se encontra cada aluno intervindo com perguntas e uso de materiais concretos que favoreçam o entendimento. Para alunos com maior facilidade e agilidade no entendimento, podemos ampliar as problematizações de forma a não tornar a atividade entediante.

No que diz respeito a tomada de decisão, temos as várias possibilidades de respostas que devem circular na turma de forma a desenvolver vários caminhos. Temos de discutir que, nem sempre pela resposta estar diferente, está errada e sim que podemos ter, em vários casos, mais de uma resposta para uma mesma questão. Dentre as várias possibilidades podemos escolher a que melhor atende as nossas necessidades.

5.7.7 Conteúdos envolvidos

- Sequências numéricas e regularidades.

- Números e operações.

- Resolução de problemas e preenchimento de tabelas.

- Formas geométricas, linhas e segmentos.

- Contagem e possibilidades.

- Tomada de decisão e problemas de otimização restritos (maximização).

5.8 Fazendo mesas e cadeiras

5.8.1 Objetivo

Trabalhar múltiplas habilidades ligadas ao contexto matemático. Proporcionar fixação de ideias na resolução de problemas. Desenvolver competência leitora de situações matemáticas. Perceber ideias das operações matemáticas. Relacionar Geometria, Números e Álgebra na resolução de problemas. Modelar um problema com a linguagem algébrica se apropriando dos modelos da Programação Linear.

5.8.2 Público alvo

Alunos no final do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio, com a linguagem adequada a cada fase de aprendizagem.

5.8.3 Material necessário

Para cada grupo de cinco alunos serão necessários:

- 10 folhas de sulfite 40.
- 5 folhas de papel quadriculado.
- 5 réguas.
- 5 tesouras.
- 2 transferidores
- Modelo das mesas e cadeiras, disponíveis nos apêndices A.1 desse material.
- Roteiro da atividade.

5.8.4 Problema norteador

Com as 10 folhas de sulfite fornecidas, fazer o maior número possível de mesas e cadeiras de forma a termos o maior número de jogos completos de mesa com quatro cadeiras e mesa com seis cadeiras.

5.8.5 Questões da Atividade

1. Quais as semelhanças e diferenças entre as peças que seu grupo recebeu?
2. Quais as medidas dos segmentos de retas usados na construção das figuras? Quantos segmentos temos de cada tamanho?

3. Quantos ângulos temos em cada figura?
   (a) Quantos são retos?
   (b) Quantos são agudos?
   (c) Quantos são obtusos?
   (d) Quais a medidas em graus de cada ângulo?
4. Qual o perímetro de cada figura?
   (a) Qual tem o maior perímetro?
   (b) Qual tem o menor perímetro?
   (c) Qual a diferença entre eles?
   (d) Quantas vezes o maior cabe no menor?
5. Qual a área de cada uma das figuras?
   (a) Qual a maior área?
   (b) Qual a menor área?
   (c) Qual a média aritmética das áreas obtidas?
   (d) Qual a diferença entre a maior e a menor área?
6. Qual a área da folha que você tem para construir as peças?
   (a) Usando o valor da área de cada figura, estime quantas peças de cada uma, de apenas um tipo, poderíamos fazer com a folha.
   (b) Qual cabe mais?
   (c) Qual cabe menos?
7. Usando a figura, verifique quantas realmente é possível fazer de cada uma na folha.
   (a) Compare com os resultados obtidos pela área e verifique a diferença entre eles.
   (b) Como podemos explicar a diferença obtida nos cálculos e na realidade?
8. As peças analisadas formam mesas e cadeiras.
   (a) Quantas mesas de 6 lugares obtivemos?
   (b) Quantas mesas de 4 lugares obtivemos?
   (c) Quantas cadeiras nós obtivemos?

9. Na venda individual, se cada cadeira tem lucro de R$ 7,20, cada mesa para quatro cadeiras tem lucro de R$11,75 e cada mesa para seis cadeiras tem lucro de R$ 15,35.

    (a) Qual o lucro obtido se vendermos todas as cadeiras individualmente?

    (b) Qual o lucro obtido se vendermos todas as mesas individualmente?

    (c) Qual o lucro total obtido?

10. O lucro no jogo de uma mesa e 4 cadeiras vendidos conjuntamente é R$ 45,00 e o lucro no jogo de uma mesa e 6 cadeiras é R$ 65,00. Se formarmos os jogos e vendermos todos, qual será o lucro obtido?

11. Considerando "x" o número de conjuntos de 4 cadeiras e "y" o número de conjuntos de 6 cadeiras, escreva a equação que representa:

    (a) O lucro total "L" na venda dos conjuntos.

    (b) O número de cadeiras "z" para fazer os conjuntos.

12. Em um determinado dia foram produzidas 100 cadeiras.

    (a) Quantos jogos de 4 lugares e quantos de 6 podemos obter? Encontre pelo menos 3 respostas diferentes.

    (b) Represente no plano cartesiano as possibilidades de respostas e escreva sua conclusão.

    (c) Qual o lucro em cada uma das suas respostas no item "a"?

    (d) Qual o maior lucro que podemos obter para as 100 cadeiras? Justifique sua resposta.

13. Crie uma situação problema envolvendo as mesas e cadeiras e passe para o outro grupo resolver.

14. Escreva um texto de 15 a 20 linhas falando sobre como os conhecimentos matemáticos ajudaram a desenvolver essa atividade.

5.8.6 Desenvolvimento

- Fornecer aos grupos de 4 alunos, 10 folhas de sulfite 40, os moldes das mesas e cadeiras, disponível no apêndice A.1, e a folha de atividades a serem resolvidas no caderno.

- Solicitar que sejam feitas, primeiramente, as questões de 1 a 8, para depois confeccionar as mesas e cadeiras. Um planejamento pode levar a uma solução mais favorável ao nosso problema norteador.

- Após o término dessas questões e a vivência com o material, não é necessário que sejam feitas todas as mesas e cadeiras e sim que façam o levantamento de quantas dessas peças serão feitas com o material fornecido de forma a termos a menor perda de material. Vamos socializar as respostas encontradas na turma e organizá-las em uma tabela para melhor visualização da informação.

Peças avulsas			Jogos de mesas	
Cadeiras	Mesa de 4 cadeiras	Mesa de 6 cadeiras	Com 4 cadeira	Com 6 cadeiras
10	1	1	1	1
25	3	2	3	2

- Discutir as várias possibilidades encontradas, se ocorreram sobras de mesas ou cadeiras, solicite que os alunos que obtiveram o melhor aproveitamento relatem como fizeram. É possível melhorar nossa solução?

- Nas questões 9 e 10, com os dados da tabela anterior, proponha soluções para cada questão de forma a registrar a expressão necessária ao cálculo e relatar seu procedimento.

- Nas questões 11 e 12 proporcionar o registro das equações e representar a situação no plano cartesiano. O gráfico pode ser feito com ajuda de um software ou de um aplicativo, mas é importante que o aluno saiba como usar a escala gráfica no papel quadriculado.

- O desenvolvimento e a discussão das questões 13 e 14 devem sistematizar os principais conceitos a serem fundamentados nesse momento. Será de grande valia se cada grupo apresentar suas principais conclusões com mediação do professor.

5.8.7 Orientação ao professor

Um bom envolvimento com a turma, usando comandos claros, favorece o desenvolvimento de atividades desse tipo. Saber que em alguns momentos estarão produzindo em grupos, e em outros, em seu próprio caderno é fundamental para o bom andamento da aula. A construção das regras para o desenvolvimento dos trabalhos também fazem parte do conjunto de restrições na resolução do problema. Outro fator importante é a discussão do objetivo principal que é a construção dos saberes matemáticos.

Na representação das equações de duas variáveis pode-se retomar as ideias de função afim e equação da reta na geometria analítica e as representações necessárias para a construção de problemas maiores. O movimento de retas no plano cartesiano pode ser explorado por ideias de vetores e suas representações. Os sistemas lineares podem ser resolvidos por diversos métodos conforme o nível de abstração de cada turma. Num nono ano do ensino fundamental, eles ainda não viram matrizes e resolvem pelo método da substituição ou o método da adição, já no ensino médio podemos explorar o método de Gauss-Jordan ampliando a sistemas maiores.

Outra ferramenta interessante na exploração desse problema são softwares de geometria dinâmica que permitem a visualização da reta da função objetivo pelo plano de forma concreta. Um Software livre que pode ser usado é o GeoGebra, disponível para computadores e alguns tipos de celulares. O uso de tecnologias, se bem colocado para exemplificação, se coloca como facilitador no entendimento de conceitos. Mas é importante frisar que eles não servem como justificativas e que para isso devemos nos apoiar nos conceitos matemáticos.

Não podemos esquecer de revisitar os conceitos da geometria plana, suas construções, medidas, ângulos e como isso interfere no consumo de material. O cálculo de área e perímetro e como as formas interferem nessas grandezas. A contextualização desses conceitos torna mais clara sua aplicação e permite um melhor entendimento.

5.8.8 Conteúdos envolvidos

- Grandezas e medidas.
- Ângulos e retas.
- Área e perímetro.
- Função afim.
- Equação da reta.
- Representação no plano cartesiano.
- Desigualdades.
- Sistemas lineares.
- Tomada de decisão e problemas de Otimização Linear, método gráfico, modelagem matemática.

5.9 Consumo de Combustíveis

5.9.1 Objetivo

Desenvolver as habilidades de leitura e interpretação de problemas dando significados aos números que aparecem em seu contexto. Modelar matematicamente como um problema de Otimização Linear uma situação com uso de sistemas e funções fazendo interferências nas soluções propostas. Vivenciar em uma situação rotineira os conceitos matemáticos estudados em sala de aula e construir significado ao aprendizado. Escolher a melhor possibilidade entre as respostas encontradas na solução de um problema.

5.9.2 Público alvo

Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio.

5.9.3 Material necessário

Para cada dupla ou trio de alunos serão necessários:

- 1 Folha com as questões da atividade.
- 2 réguas.
- 2 folhas de papel quadriculado ou milimetrado

5.9.4 Problema norteador

Com o surgimento de carros bicombustíveis, a necessidade de escolha se torna cada vez mais presente no cotidiano doméstico. Como podemos percorrer a maior distância possível gastando o menor valor possível?

5.9.5 Questões da Atividade

Em um determinado posto da cidade, a gasolina custa R$ 3,15 e o etanol custa R$ 1,95. Consideremos carros, bicombustíveis, populares que fazem, com etanol, 9,1 km/l (cidade) e 9,6 km/l (estrada); se abastecidos com gasolina, as médias ficam em 13,1 km/l (cidade) e 14,3 km/l (estrada). Para facilitar as análises, consideraremos que na mistura de combustíveis, álcool e gasolina, o consumo é diretamente proporcional à mistura e tendo situações ideais de manutenção e uso. Um carro popular tem tanque de combustível em média de 50 litros.

Com essas informações proponha respostas aos questionamentos explicando como chegou ao resultado. Quando encontrar mais de uma resposta para as perguntas, mantenha todas que encontrar.

1. Com o tanque cheio de gasolina, quantos quilômetros o carro pode rodar:

    (a) Somente na cidade?

    (b) Somente na estrada?

(c) Metade na cidade e o resto na estrada?

(d) 30% na cidade e o resto na estrada?

2. Quanto eu gastaria, no máximo, para completar o tanque do carro com:

   (a) Somente gasolina?

   (b) Somente etanol?

   (c) Metade de cada combustível?

   (d) 30% de um combustível e 70% do outro?

3. Uma pessoa que dispõe de R$ 100,00 pode colocar no tanque no máximo quantos:

   (a) Litros de gasolina?

   (b) Litros de etanol?

   (c) Litros de gasolina e 10 l de etanol?

   (d) Litros de etanol e 20 l de gasolina?

4. Em um determinado dia, em que cabem 40l de combustível no tanque, uma pessoa quer encher o tanque com exatamente R$ 100,00.

   (a) Quantos litros de cada combustível ele deverá colocar para ter o máximo de gasolina no tanque?

   (b) Quantos litros de combustível deverá colocar para ter o máximo de álcool no tanque?

5. Consideremos que o tanque do carro está vazio e temos apenas R$ 100,00. Queremos encher o tanque percorrendo a máxima distância sem reabastecer. Quantos litros de cada combustível devemos colocar para percorrer a máxima distância:

   (a) Somente na cidade?

   (b) Somente na estrada?

   (c) Usando metade do combustível na cidade e o restante na estrada?

6. Como você construiria um modelo matemático para resolver problemas desse tipo?

5.9.6 Desenvolvimento

- Fazer uma leitura criteriosa do problema de forma a identificar os números que aparecem no problema, seus significados e suas relações no contexto apresentado.

- Em duplas ou trios, os alunos devem propor solução para todas as questões registrando o procedimento utilizado para posterior discussão.

- Terminada a proposta de resposta é de grande valia que cada dupla ou trio comente, sucintamente, as dificuldades enfrentadas na resolução do problema e as observações levantadas.

- Identificar junto com os alunos as variáveis do problema e suas relações, levantando as restrições apresentadas e o objetivo proposto. Vale lembrar de que o objetivo e as restrições dependem do problema a ser resolvido. Dessa forma, modelamos o problema como um problema de Otimização Linear e discutimos o modelo encontrado com o que os alunos escreveram.

- Modelado o problema, representamos no papel quadriculado as restrições mostrando a região no gráfico onde se encontram as possíveis respostas, onde buscaremos nossa solução ótima, que maximiza o percurso com o combustível disponível.

- Representamos no mesmo plano das restrições algumas retas construídas pela função objetivo, levando o aluno a perceber que elas vão percorrendo a região das restrições e que a melhor solução encontra-se no vértice do polígono formado. Essa construção pode ser feita com uso de software de geometria dinâmica favorecendo a visualização.

- Os alunos de posse dessa ferramenta devem rever as respostas de sua atividade e verificar se podem melhorá-la, mantendo as duas soluções.

- Solicitar que os alunos produzam um texto dissertativo com a vivência dessa atividade e como a modelagem pode ajudar na tomada de decisão.

- Socializar com a turma as conclusões e observações.

5.9.7 Orientação ao professor

A discussão dos problemas em duplas, com a verificação de que a proporcionalidade permeia as questões iniciais, funciona como uma retomada desses conceitos e uma forma de revisitar diferentes conjuntos numéricos. Aqui, a relação entre grandezas já se coloca como ideia da lei de uma função afim levando a construção de equações e funções. Essa vivência facilita o entendimento do problema e as múltiplas possibilidades para o abastecimento do veículo. Podemos ainda discutir a interferência de várias variáveis em uma mesma situação e como isso está presente em nosso cotidiano. Aqui estamos relacionando tanto o valor monetário como o rendimento do combustível, permitindo uma relação entre diferentes tipos de medidas. O significado do número no problema e o conceito abstrato de número, deve permear toda a interpretação de valores.

Dentro das construções algébricas, valorizamos funções de uma ou múltiplas variáveis na descrição de um problema real e como isso interfere na conclusão da situação. Quando impomos restrições abertas já estamos introduzindo as desigualdades e com isso aparecem múltiplas soluções do problema. A tomada de decisão, atendendo as restrições, e a escolha de parâmetros permitem o desenvolvimento de habilidades, como reconhecer uma informação e elencar sua prioridade e conceitos de números e operações.

O número racional em sua escrita decimal e percentual permeiam a situação, aqui vale a discussão entre as várias formas de se escrever um número racional. As várias ideias da fração (parte de um todo, medida, razão e percentual), devem ser revisitadas a todo momento permitindo que os alunos que não se familiarizaram com esse tipo de representação de número o façam. Os conjuntos numéricos e suas aplicações são de grande valia na interpretação de problemas.

Quando envolve função linear, já podemos trabalhar as questões relacionadas à equação da reta e sua representação no plano cartesiano. O uso de planilhas eletrônicas e construção de gráficos podem agir como facilitadores na visualização de propriedades, mas vale ressaltar que precisam ser verificadas também algebricamente. Justificar matematicamente é fundamental na construção da solução de um problema e na concretização de conceitos matemáticos.

Nas restrições que envolvem desigualdades, explorando aqui as lineares, estamos trabalhando variações e representações de região no plano cartesiano (duas variáveis). Quando estamos em turmas em nível mais avançado, com mais facilidade no entendimento dos conceitos matemáticos, uma discussão de vetores e matrizes contribui na modelagem e solução do problema. Mais uma vez, o uso de software de geometria dinâmica facilita a visualização para o aluno para posterior abstração.

Falando de Otimização Linear, já podemos discutir as questões relacionadas à função objetivo e ao conjunto de restrições. Se tratando do plano fica fácil perceber a localização das soluções viáveis e a busca de uma solução ótima que pode ser máxima ou mínima conforme o objetivo do problema a ser resolvido.

Socializar as descobertas e os vários meios de chegar à solução também contribuem ao aprendizado e ao entendimento do objeto de estudo. Nessa premissa, é importante que os alunos discutam entre si e comentem as descobertas com toda a turma.

5.9.8 Conteúdos envolvidos

- Números e Operações.
- Conjuntos e Relações.

- Funções e Desigualdades.
- Retas e Plano Cartesiano.
- Gráficos e Tabelas.
- Sistemas Lineares e Matrizes.
- Tomada de decisão e problemas de Otimização Linear, método gráfico, modelagem matemática como um problema de Otimização Linear, Método Simplex.

5.10 Dieta Alimentar

5.10.1 Objetivo

Partindo de uma situação concreta, desenvolver ideias que envolvam funções de múltiplas variáveis e com o uso de ferramentas algébricas, tomar decisões na busca de soluções para problemas cotidianos. Reconhecer em problemas lineares com várias possibilidades de solução as soluções viáveis e a existência de uma possibilidade de melhora em seus resultados. Modelar matematicamente um problema e explorar soluções de sistemas e uso de matrizes nas resoluções algébricas e no uso de tecnologias.

5.10.2 Público alvo

Alunos do Ensino Médio.

5.10.3 Material necessário

Para cada aluno serão necessários:

- Folha com a situação de aprendizagem.
- Papel quadriculado ou milimetrado.
- Régua.

5.10.4 Problema norteador

Gastar o mínimo possível em alimentação atendendo as necessidades básicas diárias de nutrientes.

5.10.5 Questões da Atividade

Uma família de quatro pessoas, passando por dificuldades financeiras resolveram entender melhor seus gastos com alimentação. Além disso estão preocupados com a saúde da família. Após uma pesquisa de preços conseguiram chegar a alguns valores de alimentos depois de prontos por quilo: arroz R$4,85, feijão R$7,25 e peito de frango grelhado R$9,45.

Em uma busca na internet, observaram os valores nutricionais para cada (100g) do alimento pronto e resumiram em uma tabela.

Alimento pronto	Arroz	Feijão	Frango
Proteínas	2,5g	4,8g	32g
Colesterol	—	—	89mg
Carboidratos	28,1g	13,6g	—
Fibras	1,6g	8,5g	—
Calorias (kcal)	128 kcal	320 kcal	159 kcal

Observaram que a quantidade mínima de proteína diária é 50g, a de colesterol 300mg, a de fibra alimentar 25g e de carboidratos 300g.

Com base nas informações, responda as perguntas e mostre como chegou nos resultados:

1. Quanto a família vai gastar em uma refeição se for consumido 800g de arroz, 500g de feijão e 700g de frango grelhado?
2. Uma pessoa que consumiu 200g de arroz, 150g de feijão e 180g de frango grelhado, obterá quanto de:
   (a) Proteína?
   (b) Colesterol?
   (c) Carboidrato?
   (d) Fibras?
   (e) Calorias?
3. Uma pessoa quer obter 1000 cal em uma refeição.
   (a) Qual o cardápio necessário? (Encontre pelo menos dois diferentes)
   (b) Quanto de cada nutriente ela vai obter?
   (c) Considerando a quantidade mínima diária de nutrientes, como ficará cada um deles em relação ao consumo da dieta estipulada?

(d) Quanto essa pessoa gastaria nessa refeição?

4. Qual o mínimo de frango a pessoa tem que comer para obter 300mg de colesterol?

5. Qual o mínimo de cada alimento uma pessoa deve consumir para obter 25g de fibras alimentares?

6. Uma pessoa quer garantir o mínimo necessário de cada nutriente em uma única refeição gastando o mínimo possível.

   (a) Quantos gramas de cada alimento ela deve consumir?

   (b) Quanto de cada nutriente ela está obtendo?

   (c) Quanto ela gastará na refeição?

7. Uma das pessoas da família está de dieta e precisa consumir menos de 2000 kcal sem com isso prejudicar o mínimo diário necessário e com o menor custo.

   (a) Quantos gramas de cada alimento ela deve consumir?

   (b) Quanto de cada nutriente ela está obtendo?

   (c) Quanto ela gastará na refeição?

8. Como você usaria essas informações na tomada de decisão? É possível construir um modelo matemático?

5.10.6 Desenvolvimento

- Provocar uma leitura compartilhada na situação problema de forma a analisar as informações e como elas se comportam no texto. Não esquecer de verificar a equivalência entre as grandezas para que se construa um real entendimento da situação.

- Conhecendo um pouco mais do problema, solicitar que em duplas, os alunos proponham solução para cada uma das questões registrando os procedimentos necessários.

- Levantar o questionamento sobre a representação do problema por equações e/ou funções de múltiplas variáveis. Quais seriam as vantagens?

- Discutir com os alunos as respostas encontradas e como elas seriam registradas com o uso das expressões algébricas.

- Nas questões com mais de uma equação, discutir sobre sistemas numéricos, sua representação matricial e verificar se o sistema apresentado tem única solução. Existem outras possibilidades?

- Representar o problema graficamente, lembrando que estamos tratando de uma situação com três variáveis, ou seja, é uma representação de plano no espaço.
- Levantar as possibilidades do uso de planilhas e softwares gráficos como facilitadores do processo de resolução.
- Resolver o sistema apresentado em uma das questões retomando o método de Gauss-Jordan reforçando a construção da Matriz Identidade.
- Nas questões com restrições abertas apresentar, ou retomar, ideias da Otimização Linear, Modelagem Matemática, resolução gráfica e Método Simplex.
- Solicitar aos alunos que após as discussões apresentadas, revejam as soluções do problema na busca de melhorar suas respostas e/ou seus argumentos.
- Analisar a situação que envolve otimização usando o SOLVER do EXCEL, compare com a solução encontrada e discuta a importância de um bom entendimento e uma boa modelagem para a resolução de problemas. Sejam com métodos algébricos ou tecnológicos.
- Lembrar-se de que problemas reais podem ter um número de variáveis bem maior que o apresentado e que para análise o uso de tecnologia pode ser muito útil.
- Para finalizar a atividade podemos pedir uma dissertação sobre os assuntos abordados na atividade ou que sejam propostos novos problemas com o encaminhamento de solução. É importante ressaltar que a escrita da resolução deve ser colocada de forma clara, se apropriando da linguagem matemática, justificando todos os recursos utilizados.

5.10.7 Orientação ao professor

Nessa atividade, a retomada de ideias de anos anteriores percorrem os vários anos da Educação Básica e devemos explorar ao máximo cada um dos assuntos. Podemos propor outras questões paralelas às apresentadas atendendo a dificuldade apresentada por um aluno ou pela turma. Revisitar conceitos anteriores é necessário para a construção de novos saberes. Para entender as representações algébricas, as operações fundamentais e suas propriedades devem estar bem fundamentadas e as representações das grandezas analisadas em cada momento. Tudo tem uma justificativa e se for colocado de maneira mecânica, não desenvolve saberes.

Nas discussões sobre funções e equações é importante ressaltar a interdependência entre as grandezas e como elas interferem no desencadear da situação. As questões de domínio e imagem de uma função e sua relação com aceitar ou não um tipo de resultado. Posso ter valores negativos? Os resultados têm de ser inteiros? Todo problema tem realmente solução? Nesse contexto, a linguagem matemática passa a ser utilizada conjuntamente à linguagem materna interagindo-se entre si para entender o mundo. A comunicação pode resolver ou criar novos problemas.

Na discussão de sistemas é importante tratar dos vários tipos de sistemas lineares, quando tem solução, quando não tem e quando tem infinitas soluções. No caso de infinitas soluções podemos ter algumas de nosso interesse e outras não. Discutir o uso de matrizes como ferramenta de resolução e representação de situações rotineiras é de grande valia, ampliando o repertório de possibilidades ao enfrentar uma situação. Os vários métodos de solução de sistemas lineares podem ser explorados e discutidos, permitindo ao aluno a percepção dos vários caminhos a serem escolhidos. Como vamos propor o Método Simplex com o uso de planilhas eletrônicas, é necessário explorar um pouco mais o Método de Gauss-Jordan, lembrando que o recurso tecnológico é um facilitador e não serve sozinho de argumento matemático.

A circulação de informação entre os alunos e a mediação do professor é fundamental no desenvolvimento da atividade. Temos de lembrar de que não devemos dar respostas e sim provocar o aluno a construir um caminho. Quando o aluno é tirado de sua área de conforto, provocado, constrói caminhos. Discutindo seu caminho com o de outros, amplia suas possibilidades. E quando compara e reflete sobre as várias possibilidades intervindo na construção, constrói conceitos.

5.10.8 Conteúdos envolvidos

- Funções de múltiplas variáveis.
- Resolução de problemas e modelagem matemática.
- Matrizes e Sistemas Lineares
- Tomada de decisão e problema de Otimização, método gráfico, Método Simplex.

Capítulo 6

Reflexões Finais

Resolver problemas e buscar caminhos está sempre ligado às relações humanas e à construção de diversas situações da sociedade. A busca pela solução dos conflitos nas várias civilizações acabaram por desenvolver a lógica e a matemática. A Otimização Linear se coloca como uma importante ferramenta na administração e também na construção de conhecimentos matemáticos na Educação Básica. Buscar soluções, tomar decisões, analisar informações e construir novos caminhos se faz necessário a todo instante no mundo contemporâneo, e por que não na sala de aula?

A tomada de decisão, organização dos registros e escolha pela melhor forma de fazer proporcionam ao educador uma importante ferramenta para a problematização de conteúdos em suas aulas nos diversos níveis de ensino. Na Educação Básica, problemas ligados ao cotidiano dos alunos servem como motivadores na construção e sistematização do conhecimento. Mestre e aprendiz se alternam na mediação do aprendizado significativo.

Na Educação Infantil, nos jogos e brincadeiras, as ideias da tomada de decisão presentes na Pesquisa Operacional favorecem o desenvolvimento da autonomia na criança e permite o desenvolvimento das habilidades ligadas à lateralidade e autonomia de escolha. Organizar para decidir e classificar leva a criança a uma melhor escolha dentre as várias possibilidades e desenvolve o conteúdo de números e sequências. As cores e formas também são desenvolvidas dentro dessa proposta de forma lúdica e dinâmica, levando ao desenvolvimento de todos os atores da escola.

No Ensino Fundamental, em problemas com várias possibilidades de respostas, o aluno desenvolve as operações básicas, reforça o sistema de numeração e os registros algébricos que gradativamente chegam à representação por equações e sistemas de equações. Nessa fase do aprendizado, o aluno já constrói conceitos de igualdade e desigualdade, permitindo uma representação mais efetiva do registro matemático. A modelagem matemática da Otimização Linear, introduzida nessa fase do aprendizado, conjuntamente à construção de gráficos e tabelas, possibilitam aprender vários conteúdos da matemática enquanto escolhe a solução melhor, denominada solução ótima, para nossa situação problema.

O estudo das equações ganha mais significado quando inserido em uma situação cotidiana, ou jogo próximo à realidade do aluno. No final do Ensino Fundamental, com a sistematização de equações com duas ou mais variáveis, nos deparamos com múltiplas respostas a um mesmo problema e temos de escolher a melhor entre elas. Resolver o problema, ou encontrar o melhor caminho, passa a ser nosso objetivo principal e desta forma queremos sempre a melhor solução. Para melhorar a visualização dos modelos matemáticos o uso de softwares favorecem o aprendizado. As planilhas eletrônicas e softwares gráficos passam a funcionar como instigadores na busca de novas soluções e revisitam as ideias da tomada de decisão e da Otimização Linear.

Os problemas onde estão presentes as equações lineares, com suas restrições, resolvidos pela Otimização Linear, são de suma importância na sistematização dos conceitos matemáticos ligados a resolução e modelagem matemática de problemas, números e operações, e nos levam a revisitar a interpretação lógica. A competência leitora é valorizada em todo o trabalho e a escritora reforçada na elaboração dos modelos matemáticos, onde estamos usando múltiplas linguagens. Nos vários níveis de aprendizagem, organizar para decidir ou reestruturar a história, a Otimização Linear favorece de forma direta ou indireta o trabalho do professor e o aprendizado do aluno. "Aprendemos enquanto ensinamos e ensinamos enquanto aprendemos".

Finalizando o Ensino Fundamental, vivenciamos situações de Funções Afins, que serão aprimoradas no Ensino Médio, onde a proporcionalidade permeia as equivalências e decisões. O conceito de grandezas, que já vem sendo construído desde o início, passa a ganhar significado e se concretizar em situações cotidianas. Espera-se que nas discussões em sala de aula alunos e professores dêem significado na formação de cidadãos críticos e participativos.

Entrando no Ensino Médio, nos deparamos com uma amplitude maior de conceitos, múltiplas funções e restrições em um mesmo problema, levando ao aparecimento das Matrizes e Sistemas Lineares. Mais uma vez a Otimização Linear nos dará apoio, sistematizando a resolução e reforçando a aplicação de métodos gráficos e algébricos. A representação matricial e os tipos de matrizes funcionam como base ao desenvolvimento de outras habilidades e construção de facilitadores à tomada de decisão.

Com o estudo das matrizes, seus contextos e operações, nos apropriamos do método de Gauss-Jordan e sistematicamente introduzindo o Método Simplex para a resolução de problemas de Otimização Linear, no reforço das operações e iterações em uma matriz na busca dos resultados esperados. O trabalho com esse tipo de algoritmo, além de aprimorar os processos operacionais, revisita o comportamento do ponto e a translação da função objetivo no plano cartesiano. As transições no plano, caminhando pelos vértices do polígono das restrições representam soluções viáveis, dentro das quais está nossa solução ótima. O Método Simplex proporciona o caminhar por esses vértices na busca do melhor objetivo.

Os problemas de múltiplas variáveis, com restrições e tomadas de decisão, principalmente os que podem ser modelados linearmente, possibilitam o desenvolvimento de várias competências e habilidades necessárias aos alunos no prosseguir de seus estudos. Percebemos, durante o desenvolvimento das atividades, uma evolução na construção lógica e o reforço dos vários conceitos matemáticos. Alunos e professores se colocam como mediadores em um processo do ensino e da aprendizagem onde a Otimização Linear nos encaminha para a melhoria das ferramentas de criação do conhecimento matemático permitindo otimizar o aprender e ensinar matemática.

Otimizar é buscar sempre a melhor solução, dessa forma não chegamos a um resultado final como trabalho, mas desencadeamos um processo de busca de novos caminhos e novas atividades, ressaltando o verdadeiro objetivo que é otimizar o ensinar e o aprender matemática, possibilitando a construção de uma sociedade crítica, sempre na busca do melhor caminho.


GRÁFICO
CASA DAS FORMAS

Referências Bibliográficas

Eduardo Leopoldino De Andrade. *Introdução à pesquisa operacional: métodos e modelos para análise de decisões*. LTC, Travessa do ouvidor, 11, Rio de Janeiro, SP, quarta edition, 2012. ISBN 978-85-216-1665-8.

Marcos Arenales, Vinícius Amaral Armento, Reinaldo Morabito, and Horacio Hideki Yanasse. *Pesquisa Operacional para cursos de engenharia*. ABEPRO, 5ª tiragem edition, 2007.

Selma Arenales and Artur Darezzo. *Cálculo Numérico - Aprendizagem Com Apoio de Software*. CENGAGE - Learning, ª edição revisada e ampliada edition, 2015.

William P. Bernghoff and Fernando Q. Gouvêa. *A Matemática Através Dos Tempos*. Blucher, 2012.

José Luiz Boldrini, Sueli I Rodrigues Costa, Vara Lúcia Fiqueiredo, and Henry G Wetzler. *àlgebra Linear:*. HARBRA, 3ª edição edition, 1986.

GeoGebra. Geogebra - software de matemática dinâmica, 2016. URL `https://www.geogebra.org/`.

Marcos Cesar Goldbarg and Henrique Pacca L Luna. *Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos*. Rio de Janeiro, 2ª edição - 6º tiragem edition, 2005.

Gerson Lachtermarcher. *Pesquisa operacional na tomada de decisões*. Pearson Education, Rua Nelson Francisco, 26, São Paulo, SP, quarta edition, 2013. ISBN 978-85-7605-093-3.

Presidência da República LDBN 9.394. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996., 1996. URL `http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm`.

James G. March. *Como As Decisões Realmente Acontecem*. 2009.

George Polya. *A arte de resolver problemas - tradução Heitor Lisboa de Araújo*. Editora Interciência, Rua Verna Magalhães, 66, Engenho novo, Rio de Janeiro, RJ, 2006. ISBN 85-7193-136-4.

Tatiana Roque and João Bosco Pitombeira De Carvalho. *Tópicos de História da Matemática*. SBM, 2012.

Alfredo Steinbruch and Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. Makron Books, 2006.

Handy A. Taha. *Pesquisa Operacional: uma visão geral - tradução Alrlete Simille Marques*. Pearson Education, Rua Nelson Francisco, 26, São Paulo, SP, oitava edition, 2013. ISBN 978-85-7605-150-3.

Daniel T. Willingham. *Por que os alunos não gostam da escola? Respostas da ciência cognitiva para tornar a sala de aula atrativa e efetiva - tradução de Marcos Vinícius Martim da Silva*. armed, Av. Jerônimo de Ornelas, 670, Santana, Porto Alegre, RS, 2011. ISBN 978-0-470-27930-4.

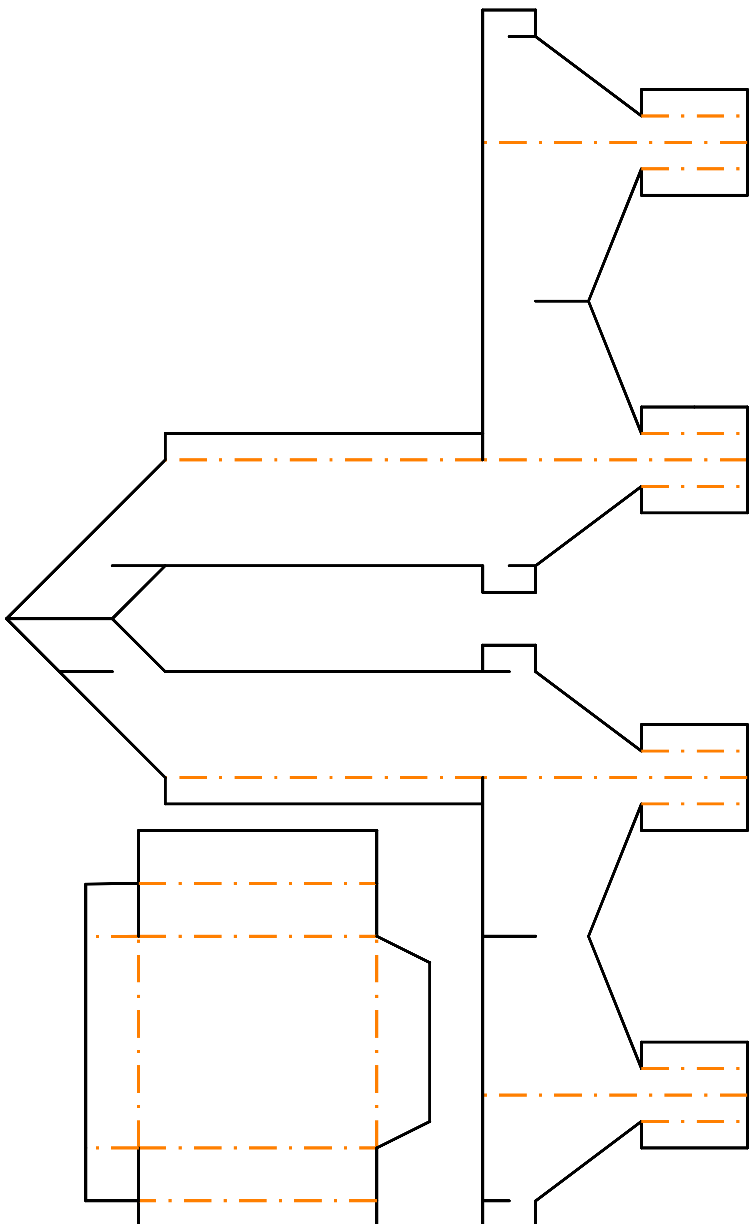
Apêndice A

Modelos Usados nas Atividades

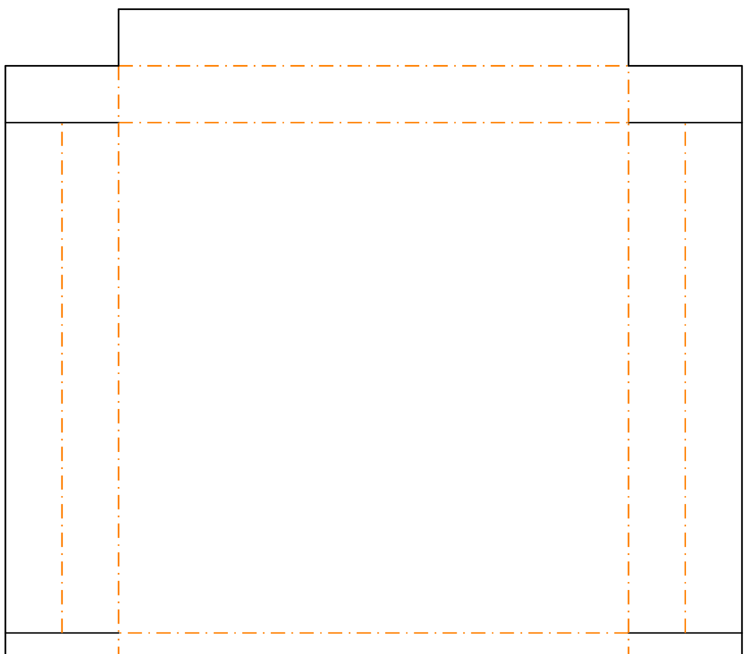
Os modelos apresentados, a seguir foram desenvolvidos com o uso do GeoGebra [2016], software educacional, para facilitar o entendimento dos vários conceitos que permeiam as atividades propostas nesse material. Espera-se que sejam usados e melhorados sempre na busca da melhoria do aprendizado do aluno.

A.1 Fazendo mesas e cadeiras

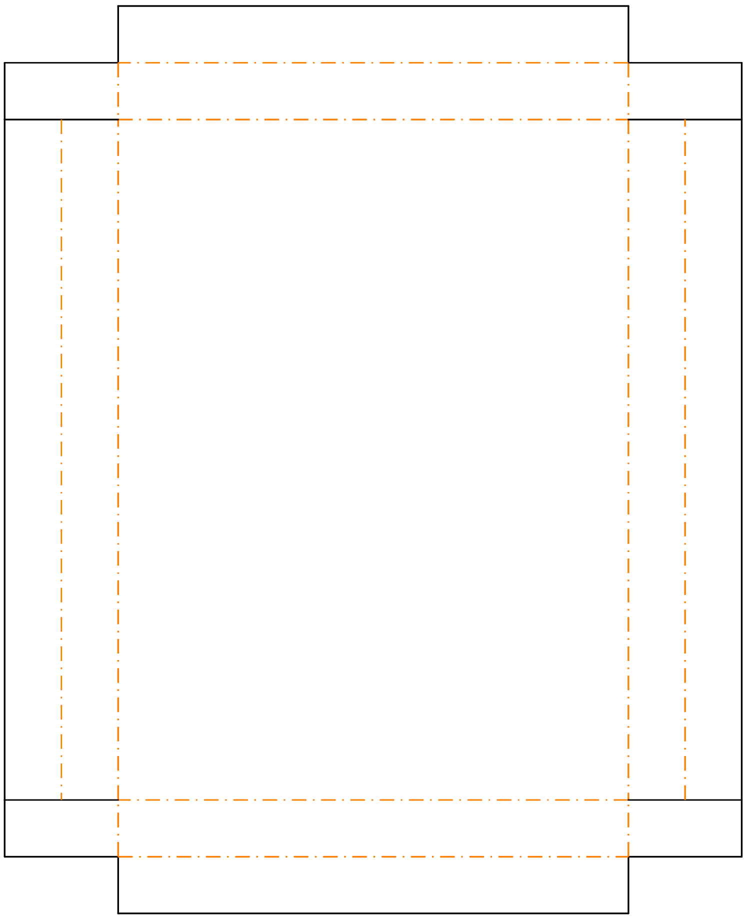
A.1.1 Fazendo mesas e cadeiras - Cadeira



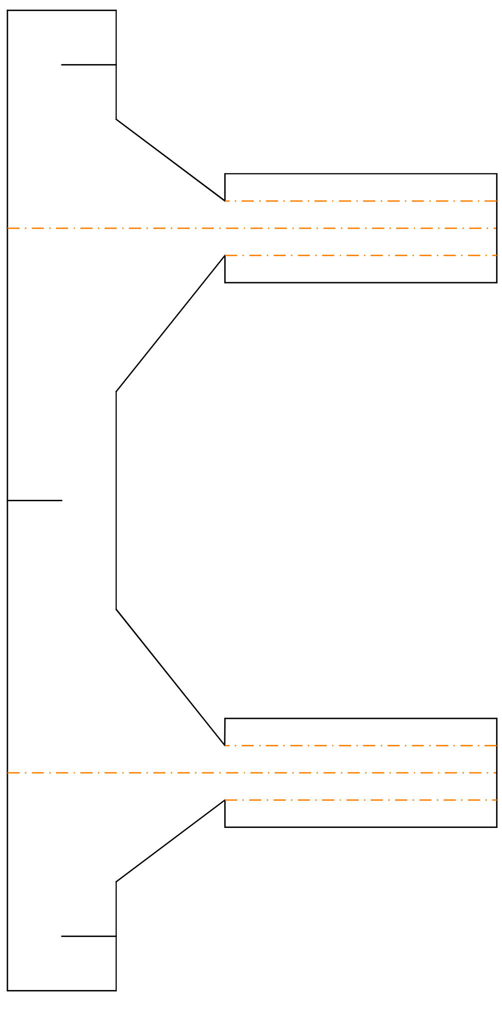
A.1.2 Fazendo mesas e cadeiras – Tampo da mesa de quatro lugares



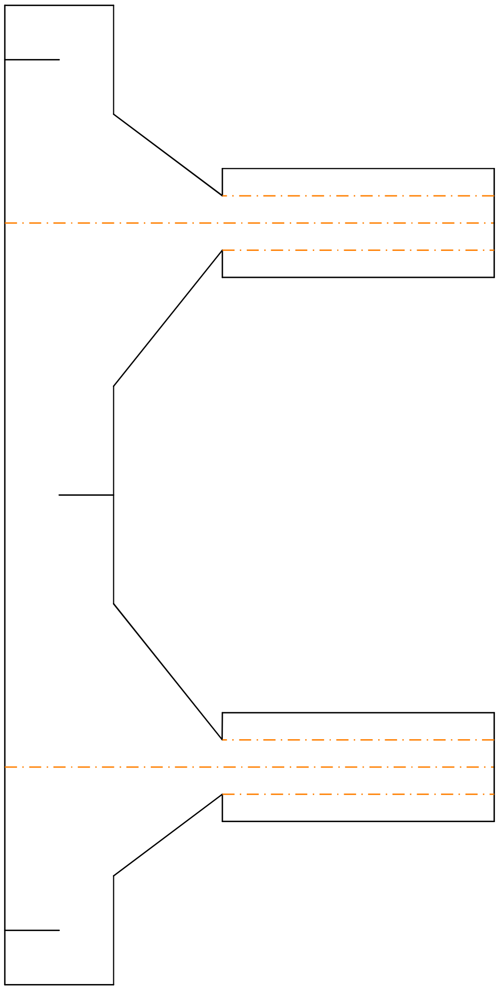
A.1.3 Fazendo mesas e cadeiras – Tampo da mesa de seis lugares



A.1.4 Fazendo mesas e cadeiras – Pé da mesa parte inferior

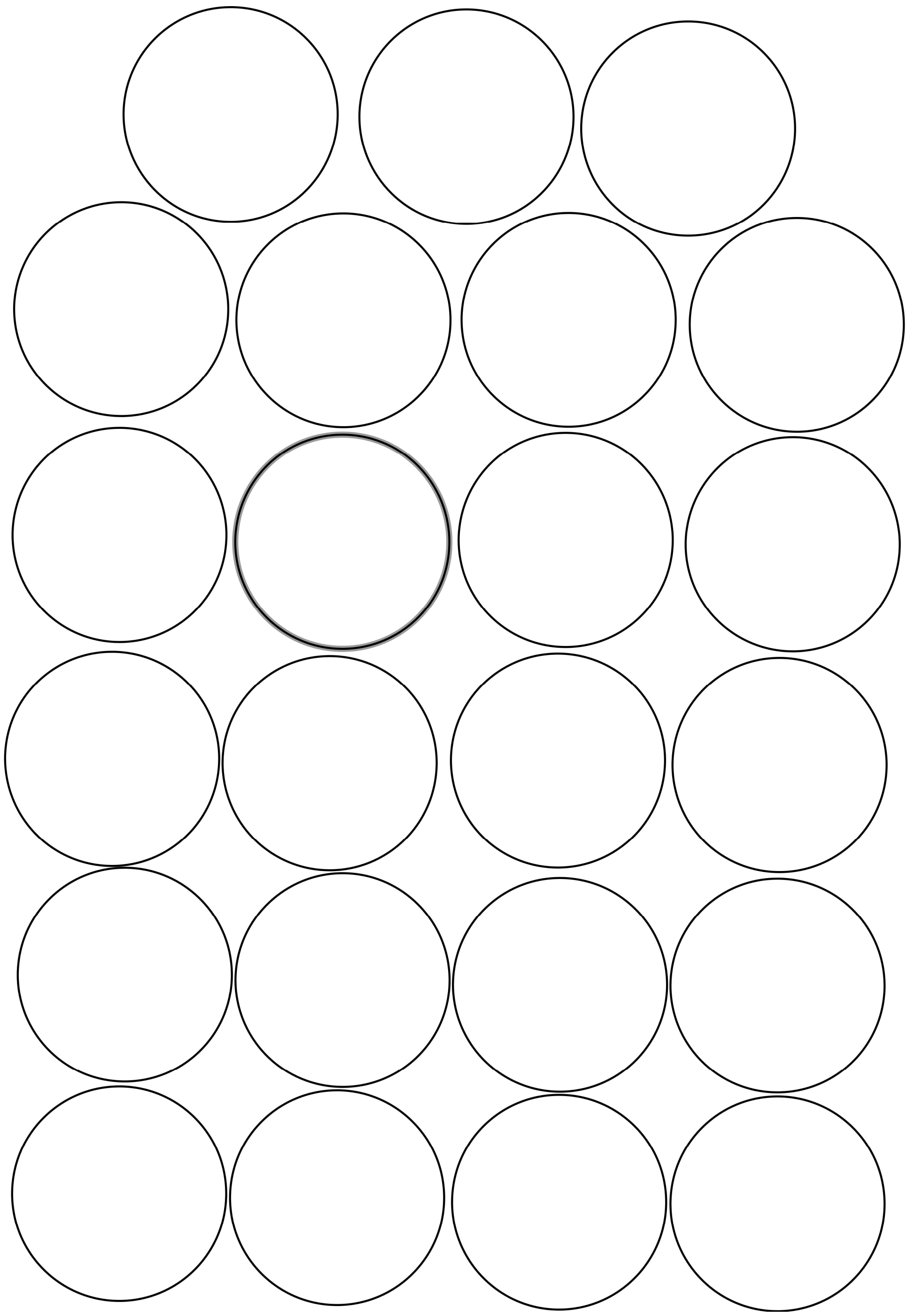


A.1.5 Fazendo mesas e cadeiras – Pé da mesa parte superior

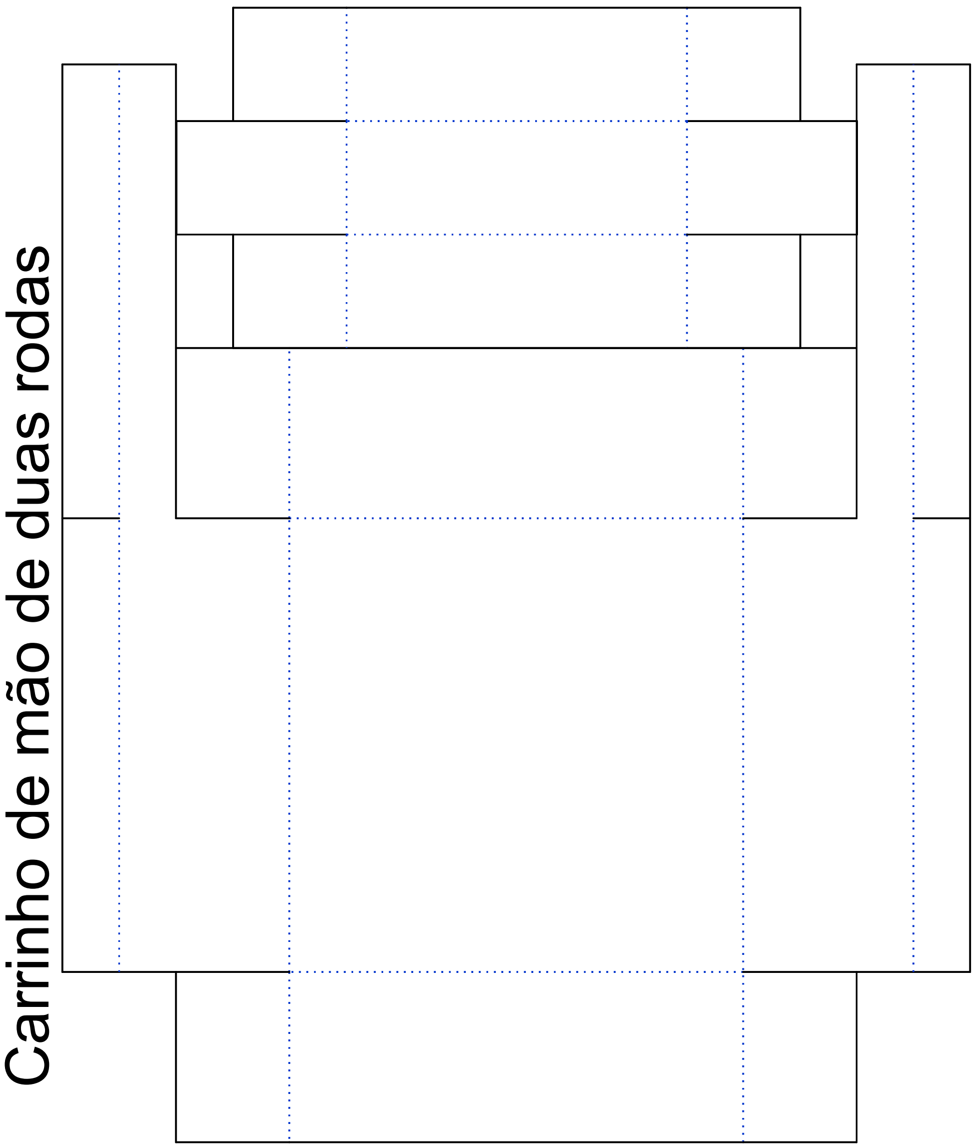


A.2 Carrinho de Mão

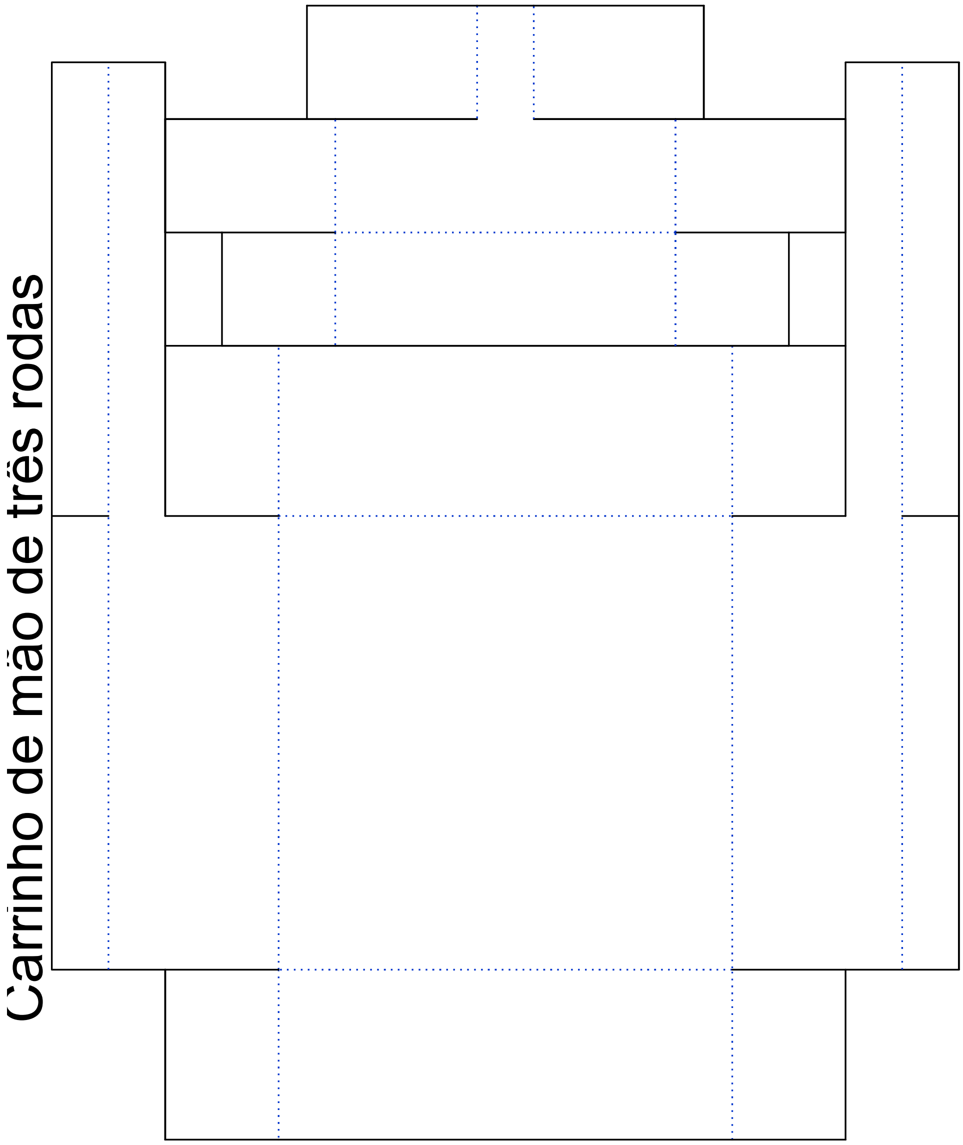
A.2.1 Carrinho de Mão – Rodas



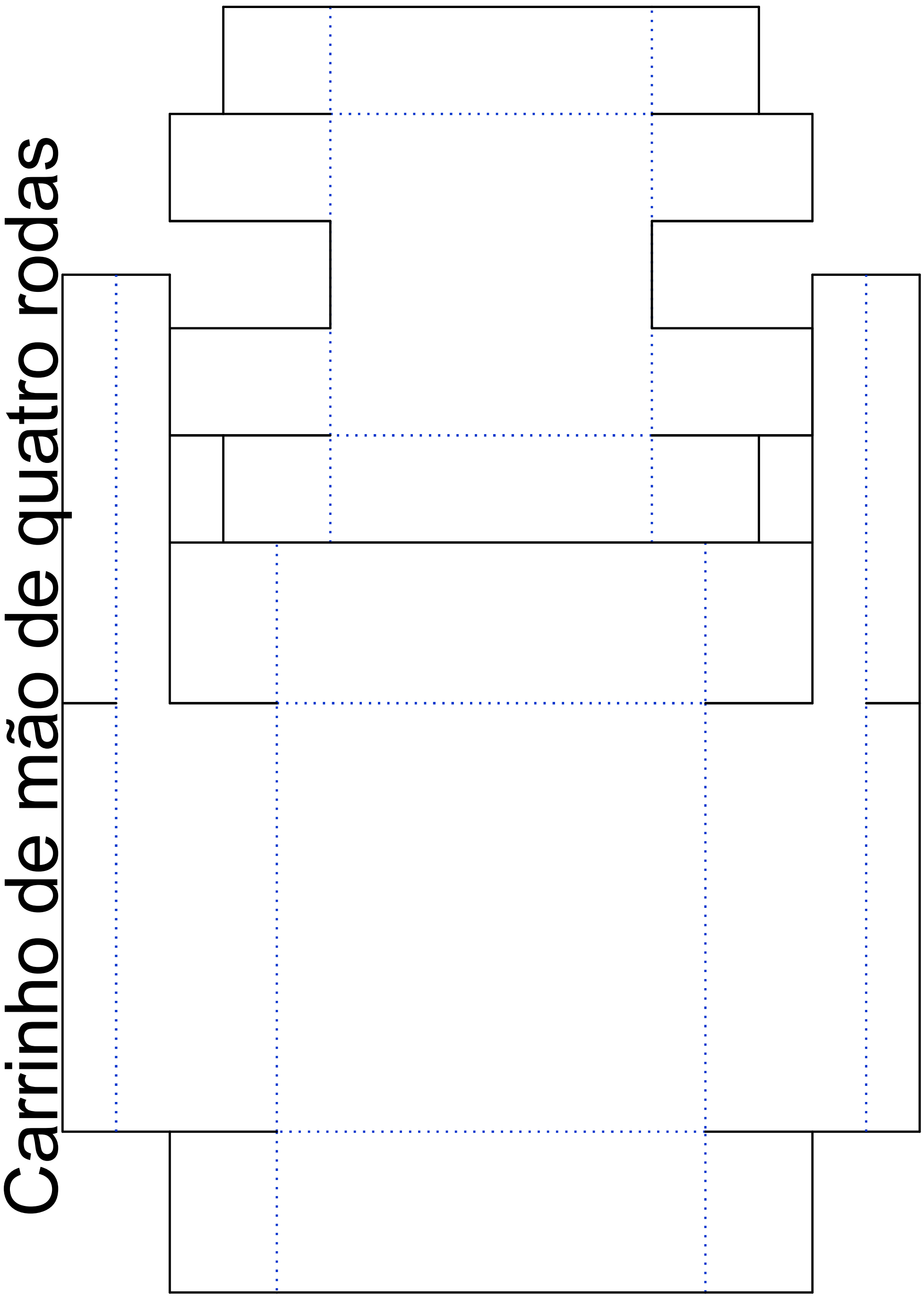
A.2.2 Carrinho de Mão – Com duas rodas



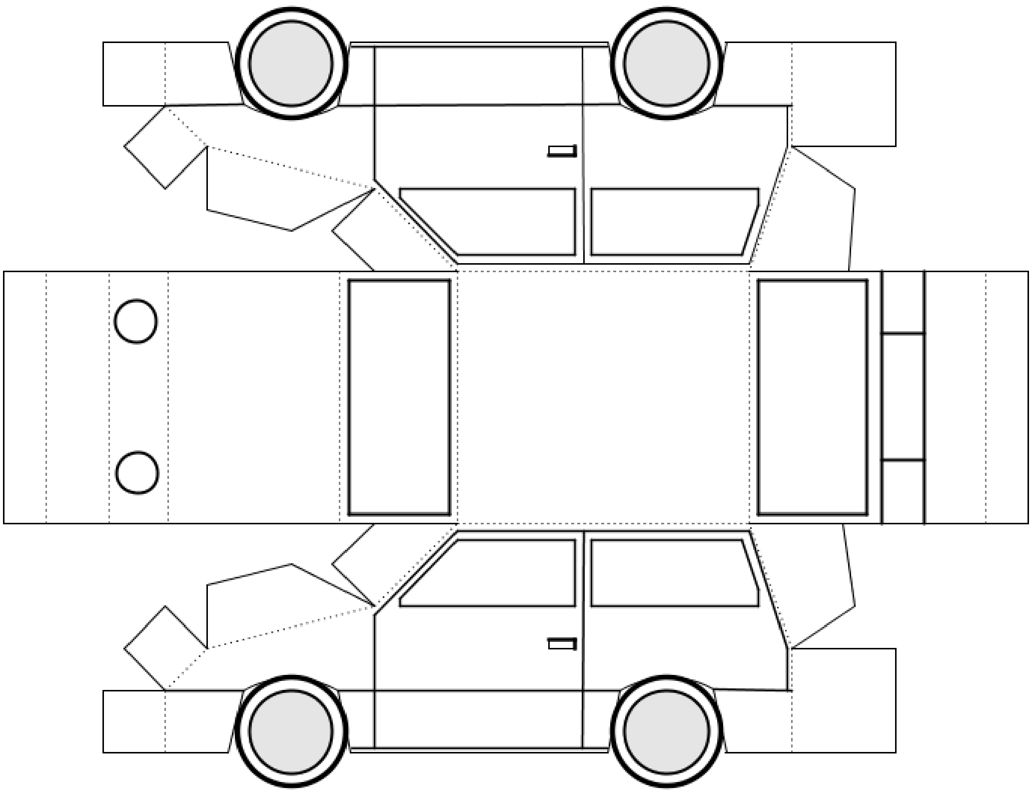
A.2.3 Carrinho de Mão – Com três rodas

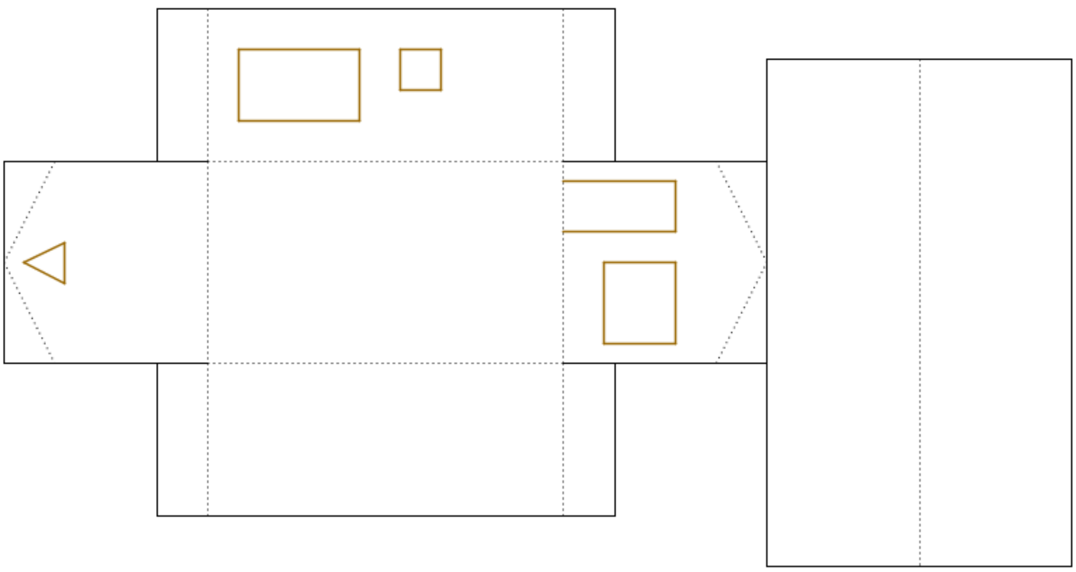


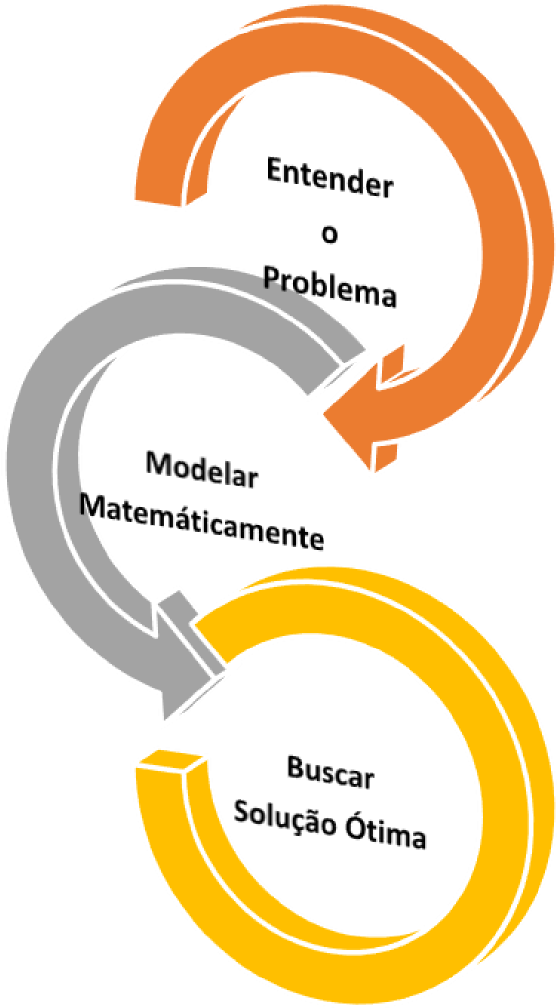
A.2.4 Carrinho de Mão – Com quatro rodas



A.3 Construindo brinquedos de papel






Entender
o
Problema
Modelar
Matemáticamente
Buscar
Solução Ótima