UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

KARINA RODRIGUES DE OLIVEIRA

ATIVIDADES SOBRE DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA PARA O ENSINO BÁSICO

CAMPINAS

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

KARINA RODRIGUES DE OLIVEIRA

ATIVIDADES SOBRE DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA PARA O ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientadora: Professora Doutora Otilia Terezinha Wiermann Paques

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA KARINA
RODRIGUES DE OLIVEIRA E ORIENTADA PELA PROF.
DRª OTILIA TEREZINHA WIERMANN PAQUES

Assinatura da Orientadora

Otilia T. Wiermann Paques

CAMPINAS

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

OL4a

Oliveira, Karina Rodrigues de, 1987-
Atividades sobre demonstrações em matemática para o ensino básico / Karina Rodrigues de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Otilia Terezinha Wiermann Paques.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 3. Demonstrações na educação. 4. Material didático. 5. Ensino - Meios auxiliares. 6. Educação matemática. I. Paques, Otilia Terezinha Wiermann,1946-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Activities about proofs in mathematics in elementary and high school
Palavras-chave em inglês:
Mathematics (Elementary school) - Study and teaching
Mathematics (Highy school) - Study and teaching
Teaching demonstration
Teaching material
Teaching - Aids and devices
Mathematics education
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Otilia Terezinha Wiermann Paques [Orientador]
Maria Zoraide Martins Costa Soares
Emilia de Mendonça Rosa Marques
Data de defesa: 16-08-2016
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 16 de agosto de 2016 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). OTILIA TEREZINHA WIERMANN PAQUES

Prof(a). Dr(a). MARIA ZORAIDE MARTINS COSTA SOARES

Prof(a). Dr(a). EMILIA DE MENDONCA ROSA MARQUES

Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Agradecimentos

À Deus, por me guiar, proteger e dar ânimo e forças no decorrer desta jornada.

À minha família, por todo amor, paciência e compreensão. Em especial à minha mãe, Lúcia Maniasso, que é a pessoa que mais amo neste mundo, mulher batalhadora que tanto admiro.

Ao meu namorado Rovilson Santos, que além do amor, apoio, paciência e incentivo me ajudou muito com as figuras e formatações deste trabalho.

Aos meus professores, do ensino básico ao mestrado, pelos conhecimentos compartilhados, pela dedicação e por possibilitarem que eu concluísse mais essa etapa.

Às minhas amigas Paula Kikuchi, Hellen Rocha, Stela Saes e Josiele Cleodolpho que estiveram sempre presentes, me apoiando e incentivando no decorrer de todo o meu mestrado. Vocês foram fundamentais!

Aos meus colegas do PROFMAT, por tantos exercícios compartilhados e por todo o apoio que me deram no momento em que tanto precisei. Em especial à minha amiga Fabiana Tesine, companheira de viagem que tanto me ajudou: Obrigada pelas caronas, por cada conselho, cada risada, por todo o cuidado e por não me deixar desistir nesta caminhada.

Em especial à Profª Drª Otília Terezinha W. Paques, minha orientadora, pela imensa dedicação e disposição em cada reunião, nas correções, por me ajudar com tantas ideias e por acreditar no meu potencial.

Às professoras membros da banca examinadora pela disponibilidade, atenção e pelas colaborações.

À direção e coordenação do colégio Anglo Cezanne de Americana, por permitirem que eu aplicasse as atividades realizadas neste trabalho durante as aulas.

Aos meus alunos, que tanto colaboraram realizando as atividades propostas, dando opiniões e sugestões, e por me apoiarem sempre.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma sequência de atividades para que o professor do Ensino Fundamental e Médio possa ensinar a seus alunos demonstrações em Matemática. Sabe-se que as demonstrações infelizmente são pouco trabalhadas nas aulas do Ensino Básico e que, muitas vezes, os alunos conhecem teoremas e fórmulas, mas não sabem demonstrá-los. As atividades propostas neste trabalho foram desenvolvidas a partir de experiências práticas na sala de aula e desse olhar para a dificuldade dos alunos em realizar demonstrações e dos professores em como trabalhá-las. Cada atividade elaborada é composta do Guia do Professor, Folha do Aluno e Soluções e Sugestões para o professor, constituindo um material de apoio para o profissional que pretende lecionar demonstrações em Matemática. Todas as atividades elaboradas foram aplicadas em sala de aula do Ensino Médio e os resultados obtidos são discutidos e problematizados.

Palavras-chave: demonstrações em Matemática, atividades para a sala de aula, material de apoio.

Abstract

The purpose of this thesis is to present a sequence of activities that can be used by Elementary and High School teachers in order to teach their students on how to demonstrate the results of mathematics' exercises. It's known that demonstrations are, unfortunately, not regularly used during Elementary School classes, and although the fact that students are aware of theorems and formulas, they often are not able to demonstrate them. The activities proposed in this thesis were developed based on practical experiences occurred in classrooms, e.g. the difficulties that students have in order to demonstrate formulas and how teachers can work those issues during mathematics classes. Each activity proposed here is composed by a Teacher's Guide, a Student's Paper Sheet, Solutions and Suggestions for the Teacher, that together constitute a Support Material that can help teachers on their mathematics demonstrations during classrooms. All the activities proposed here were applied in High School classes, and this thesis also include their results' discussions and problematizations.

Keywords: proofs in Mathematics; activities for the classroom; support material.

Lista de Figuras

Figura 2.1: O desafio do tabuleiro de damas ... 17
Figura 2.2: O quadrado perdido! ... 21
Figura 2.3: O quadrado perdido! ... 23
Figura 2.4: Ilustração para Proposição 6 do Livro I ... 33
Figura 2.5: Triângulo isósceles ABC ... 35
Figura 2.6: Segmentos R e S ... 39
Figura 2.7: Quadrado DBHI ... 41
Figura 2.8: Quadrado AGFE ... 42
Figura 2.9: Quadrado ABCD ... 43
Figura 2.10: Ilustração do livro Chou Pei Suan Ching ... 51
Figura 2.11: Quadrado DEFG ... 51
Figura 2.12: Demonstração sem palavras 1 ... 53
Figura 2.13: Demonstração sem palavras 2 ... 54
Figura 2.14: Demonstração sem palavras 3 ... 55
Figura 2.15: Demonstração sem palavras 4 ... 56
Figura 2.16: Demonstração sem palavras 5 ... 57
Figura 2.17: Semicírculos sobre os lados do triângulo retângulo ABC ... 59
Figura 2.18: Triângulo retângulo ABC ... 60
Figura 2.19: Reta real ... 61
Figura 2.20: Quatro possibilidades de resolução ... 62
Figura 2.21: Demonstração do Teorema de Pitágoras ... 64
Figura 2.22: Construção de um segmento de comprimento $\sqrt{4}$ ... 66
Figura 2.23: Construção de um segmento de comprimento $\sqrt{5}$ ... 67
Figura 2.24: Transporte da medida dos segmentos ... 67
Figura 2.25: Soma do 1º e 2º números triangulares ... 73
Figura 2.26: Soma do 2º e 3º números triangulares. ... 73
Figura 2.27: Soma do 2º número triangular a ele mesmo ... 75
Figura 2.28: Soma do 3º número triangular a ele mesmo ... 75
Figura 2.29: Soma do 3º e 4º números triangulares ... 77
Figura 2.30: Soma do 4º e 5º números triangulares ... 77
Figura 2.31: Soma do 5º e 6º números triangulares ... 78

Figura 2.32: Soma do 4º número triangular a ele mesmo ... 79
Figura 2.33: Segmento de reta AB ... 82
Figura 2.34: Figura da Proposição II-5 ... 83
Figura 2.35: Figura enumerada da Proposição II-5 ... 83
Figura 2.36: Segmento de reta AB ... 86
Figura 2.37: Figura enumerada da Proposição II-6 ... 86
Figura 3.1: Aluno investigando padrão. ... 97
Figura 3.2: Alunas investigando padrão ... 97
Figura 3.3: Alunas investigando padrão ... 98
Figura 3.4: Alunas realizando a atividade ... 100
Figura 3.5: Alunas realizando a atividade ... 100
Figura 3.6: Figura obtida por alunos na atividade ... 104
Figura 3.7: Figura obtida por alunos na atividade ... 105
Figura 3.8: Figura obtida por alunos na atividade ... 105
Figura 3.9: Alunos realizando atividade ... 106
Figura 3.10: Alunos realizando atividade ... 107
Figura 3.11: Alunos realizando atividade ... 107
Figura 3.12: Alunos realizando atividade ... 109
Figura 3.13: Alunos realizando atividade ... 109
Figura 3.14: Alunos realizando atividade ... 111
Figura 3.15: Alunos realizando atividade ... 111
Figura 3.16: Alunos realizando atividade ... 112

Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Áreas das figuras 23
Tabela 2.2: Áreas das partes 24
Tabela 2.3: Coeficientes angulares 25
Tabela 2.4: Resoluções da tabela 2.1 26
Tabela 2.5: Resoluções da tabela 2.2 27
Tabela 2.6: Resoluções da tabela 2.3 28
Tabela 2.7: Construção de segmentos perpendiculares 61
Tabela 2.8: Resolução tabela 2.7 66
Tabela 2.9: Números triangulares 71
Tabela 2.10: Números quadrados 72
Tabela 2.11: Números retangulares 74
Tabela 2.12: Quinto e sexto números triangulares 76
Tabela 2.13: Quinto e sexto números quadrados 77
Tabela 2.14: Quinto e sexto números retangulares 79

Sumário

1 – Introdução 13
2 - Propostas de Atividades para as aulas de Matemática 16
2.1 - Atividade I: O desafio do tabuleiro de damas 17
2.1.1 - Guia do Professor 17
2.1.2 - Folha do Aluno 19
2.1.3 - Solução e Sugestões para o professor 20
2.2 - Atividade II: O quadrado perdido! 21
2.2.1 - Guia do Professor 21
2.2.2 - Folha do Aluno 23
2.2.3 - Solução e Sugestões para o professor 26
2.3 - Atividade III: Provas Diretas e Indiretas 29
2.3.1 - Guia do Professor 29
2.3.2 - Folha do Aluno 31
2.3.3 - Soluções e Sugestões para o professor 35
2.4 - Atividade IV: A Irracionalidade de $\sqrt{2}$ 37
2.4.1 - Guia do Professor 37
2.4.2 - Folha do Aluno 39
2.4.3 - Soluções e Sugestões para o professor 45
2.5 - Atividade V: O Projeto de Pitágoras 48
2.5.1 - Guia do Professor 48
2.5.2 - Folha do Aluno 50
2.5.3 - Soluções e Sugestões para o professor 62
2.6 - Atividade VI: Números Figurados 68
2.6.1- Guia do Professor 68
2.6.2 - Folha do Aluno 70
2.6.3 - Soluções e Sugestões para o professor 76
2.7 - Atividade VII: Equações Quadráticas 80
2.7.1 - Guia do Professor 80
2.7.2 - Folha do Aluno 82
2.7.3 - Soluções e Sugestões para o professor 90

3 - Sobre a aplicação das atividades e resultados obtidos 96

3.1 - Atividade I: O desafio do tabuleiro de damas 96

3.2 - Atividade II: O quadrado perdido! 99

3.3 - Atividade III: Provas Diretas e Indiretas 102

3.4 - Atividade IV: A Irracionalidade de $\sqrt{2}$ 103

3.5 - Atividade V: O Projeto de Pitágoras 104

3.6 - Atividade VI: Números Figurados 108

3.7 - Atividade VII: Equações Quadráticas 110

4 – Considerações Finais 113

Referências Bibliográficas 115

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar um material de apoio para o professor de Matemática do Ensino Básico e auxiliá-lo na relação de ensino e aprendizagem com os alunos durante o entendimento e a realização de demonstrações em Matemática. É muito comum, para os discentes que se deparam com essa disciplina em seu percurso escolar, resolverem questões que envolvam fórmulas e teoremas sem entender como foram obtidos ou como podem ser demonstrados.

O ponto de partida para a realização deste trabalho foi minha própria dificuldade em entender e realizar demonstrações ao ingressar na graduação de Licenciatura em Matemática na Unicamp. No Ensino Básico apenas aplicando fórmulas e usando os teoremas (como o Teorema de Pitágoras) para resolver diversos exercícios, não construía processos matemáticos significativos.

Ao terminar a graduação e começar a lecionar, outras dificuldades surgiram, tais como auxiliar os alunos a entenderem e realizarem as demonstrações necessárias ao desenvolvimento do ensino e aprendizagem da Matemática. O estigma da disciplina estar constantemente relacionada a números e a um incompreensível processo lógico-matemático, contribui para o distanciamento dos discentes na realização de exercícios mais teóricos. A resistência pode ser quebrada com a aplicação de atividades envolvendo demonstrações em Matemática que insiram o aluno na vivência e no entendimento da disciplina.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [3] as finalidades do ensino da Matemática no nível médio indicam, como um dos objetivos, levar o aluno a “expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática.”

Ainda, segundo as Orientações Curriculares [2], ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos “compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído.”

O professor pode discutir com os alunos a diferença entre a experiência, as provas matemáticas e os diferentes tipos de provas que podem ser realizadas. Para iniciar essa discussão pode, por exemplo, perguntar aos seus alunos: “Dados n e p números naturais, satisfazendo $p = n^2 - n + 41$, é verdade que p é sempre um número primo?”. [6]

Algumas experimentações com $n = 1, 2, 3, 7, 10$ farão que eles se convençam que é sempre verdade. Mas para $n = 41$ teremos $p = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ que não é um número primo, além de outros valores. Neste caso dizemos que $n = 41$ é um contraexemplo.

Uma demonstração matemática é um argumento matemático correto e convincente. Um argumento correto é garantido pela lógica.

Pensando nisso, no Capítulo 2, apresentamos sete atividades que podem ser aplicadas nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, podendo ser utilizadas também no Ensino Superior, para que o professor possa trabalhar com seus alunos diferentes tipos de demonstrações.

As atividades propostas nesse trabalho são adaptações do material desenvolvido por Katz e Michalowicz [6]. Elas são independentes, não precisam ser aplicadas na ordem em que estão apresentadas e podem ser modificadas conforme a realidade escolar de cada professor. Cada atividade é composta do Guia do Professor, Folha do Aluno e Soluções e Sugestões para o professor.

Na “Atividade I: O desafio do tabuleiro de damas”, encontramos um algoritmo para provar que o problema não tem solução. Tal argumento pode levar o aluno e seu professor a pensarem que não é uma prova matemática, que seria sempre necessário a generalização ou uma prova algébrica mais mecânica. Este é um bom exemplo de uma demonstração usando algoritmo.

A “Atividade II: O quadrado perdido!” procura apresentar aos alunos a necessidade de uma prova matemática e mostrar uma aplicação do conceito de coeficiente angular de uma reta. Nesta atividade, a partir do preenchimento e análise de tabelas, os alunos deverão concluir o porquê um quadrado não foi coberto ao reorganizarmos as partes de uma figura.

Na Geometria Euclidiana as demonstrações precisam, muitas vezes, de um “insight” geométrico. Um exemplo disso está presente na prova da Proposição 6 do Livro I de Euclides presente na“Atividade III: Provas Diretas e Indiretas”. Embora o mesmo problema possa ser demonstrado mais facilmente usando ferramentas da geometria analítica, a intuição geométrica desapareceria. Nesta atividade, também vemos que embora algumas provas sejam cálculos algébricos, em outras é necessário ter boas ideias, como podemos observar na demonstração de Euclides sobre a infinidade de números primos.

A “Atividade IV: A Irracionalidade de $\sqrt{2}$” trabalha com provas diretas e indiretas, e com a relação entre grandezas incomensuráveis e números irracionais. Nesta atividade propomos inicialmente que os alunos realizem as provas de algumas proposições que serão usadas para demonstrar que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis, ou seja, que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

O que é convincente muda de pessoa para pessoa e se transforma ao longo do tempo. Na “Atividade V: O Projeto de Pitágoras” encontramos uma listrução do livro Chou-Pei Suan-King (ou Ching), escrito na China provavelmente no século XII a.C. A ilustração corresponde a uma demonstração para a época. Também para esta atividade propomos uma demonstração “sem palavras”. Essas demonstrações apareceram na antiguidade na Grécia, na China e na Índia. Alguns matemáticos consideram que os argumentos visuais são provas inaceitáveis, mas concordamos que o desenho pode ajudar a entender o porquê uma afirmação é verdadeira e fornecer uma ideia para uma demonstração.

O reconhecimento de padrões e a capacidade de criar conjecturas são importantes ferramentas do conhecimento matemático e a “Atividade VI: Números Figurados” procura ajudar os alunos a desenvolverem ou aperfeiçoarem essas capacidades. Essa atividade apresenta uma relação entre a aritmética e a geometria tendo em vista a obtenção de uma fórmula para a soma dos n primeiros números inteiros positivos.

Na “Atividade VII: Equações Quadráticas” apresentamos um modo diferente e interessante de abordar essas equações a partir de um contexto histórico, utilizando as proposições 5 e 6 do Livro II do *Elementos* de Euclides. Essas duas proposições são traduzidas algebricamente para obter fórmulas para resolver equações quadráticas dos tipos $\boldsymbol{x^2+c=bx}$ e $\boldsymbol{x^2+bx=c}$, com b e c números reais positivos. A partir da observação do modo como foram traduzidas algebricamente essas proposições, apresentamos um método que possibilita resolver quaisquer equações quadráticas.

No Capítulo 3, relatamos como foram aplicadas as atividades com os alunos do Ensino Médio do colégio Anglo Cezanne, localizado em Americana/SP, e quais foram os resultados obtidos.

Algumas considerações finais sobre esse trabalho são apresentadas no Capítulo 4.

Capítulo 2

Propostas de Atividades para as aulas de Matemática

Neste capítulo são apresentadas sete propostas de atividades que podem ser aplicadas pelo professor de Matemática nas aulas do Ensino Fundamental II e Ensino Médio com o objetivo de trabalhar demonstrações em Matemática. Estas atividades também podem ser utilizadas no Ensino Superior.

As atividades são independentes e não precisam ser aplicadas na ordem em que estão propostas.

O Guia do Professor contém os objetivos da atividade, o nível em que pode ser aplicada, o material que será utilizado para a realização da atividade, o tempo previsto, quando usar, os pré-requisitos e a descrição da atividade.

A Folha do Aluno contém o material que será utilizado pelos alunos no momento da realização da atividade.

Em Soluções e Sugestões para o professor apresentamos as respostas esperadas para as questões e tabelas propostas na Folha do Aluno e algumas sugestões ao professor.

2.1 - Atividade I: O desafio do tabuleiro de damas

2.1.1 - Guia do Professor

Objetivo: Convencer os alunos sobre a necessidade de uma prova.

Nível: Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Material: Papel e lápis.

Tempo previsto: 20 a 30 minutos.

Quando usar: Pode ser aplicado nas primeiras semanas de aula do ano letivo, para despertar o interesse dos alunos a respeito das provas matemáticas, ou em qualquer outro momento que o professor considerar conveniente.

Pré-requisitos: Os alunos precisam ter conhecimento sobre como é um tabuleiro do jogo de damas mesmo sem tê-lo em mãos.

Descrição: Em um tabuleiro de damas, devem ser removidos dois quadrados, um do canto superior esquerdo e um do canto inferior direito, conforme a figura a seguir:

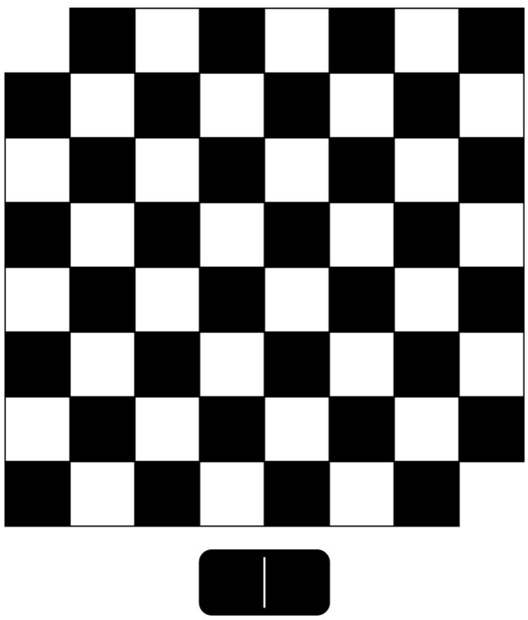


Figura 2.1: O desafio do tabuleiro de damas.

Os alunos devem responder se é possível cobrir este tabuleiro com 31 peças de dominó (o dominó deve cobrir dois quadrados lado a lado do tabuleiro).

Como usar: Distribua uma “Folha do Aluno” para cada aluno e os divida em grupos (o número de alunos em cada grupo fica a critério do professor).

Para os alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, entregue um tabuleiro do jogo de damas por grupo, ou construa-o com os alunos.

Para os alunos entre 8º ano do Ensino Fundamental e o 3º ano do Ensino Médio é mais aconselhável não fornecer o tabuleiro, de modo que os alunos descubram por si só a importância de fazer um esboço do desenho para facilitar a resolução do desafio.

Espere os alunos interpretarem a atividade e criarem suas primeiras hipóteses para a resolução desse problema. Oriente os alunos se necessário.

2.1.2 – Folha do Aluno

Um quebra-cabeça? Um jogo? Uma prova?

"A história do jogo de damas pode ser rastreada até o berço da civilização, onde vestígios da mais antiga forma do jogo foram descobertos em uma escavação arqueológica na antiga cidade de Ur, no sul da Mesopotâmia, atual Iraque. Usando uma placa ligeiramente diferente, ninguém tem certeza das regras exatas do jogo que foi datado em 3000 aC." [7]

O jogo de damas atual parece ter suas origens na França durante o século XI.

O desafio do tabuleiro de damas

Em um tabuleiro de damas com oito quadrados em cada lado, totalizando 64, remova dois quadrados, um do canto superior esquerdo e um do canto inferior direito, restando 62 quadrados. O retângulo que cobre exatamente dois quadrados lado a lado do tabuleiro é chamado de dominó.

É possível dispor os 31 dominós de modo que eles cubram todos os 62 quadrados do tabuleiro?

Se a sua resposta for sim, descreva o padrão que funciona. Se for não, prove que nenhum padrão vai funcionar.

Agora é com você! Boa Sorte!

2.1.3 – Solução e Sugestões para o professor

A resposta é **não**! Para provar que é impossível cobrir o tabuleiro com 31 dominós, observe primeiro que os dois quadrados que são removidos dos cantos do tabuleiro são ambos da mesma cor. No caso da Figura 2.1, por exemplo, restariam 30 quadrados brancos e 32 quadrados pretos. Cada dominó cobre dois quadrados adjacentes, que são de cores opostas. Os primeiros 30 dominós cobrirão 30 quadrados brancos e 30 quadrados pretos. Os dois quadrados que restarão são da mesma cor. Por isso, eles não podem ser cobertos com o dominó restante.

Muitos alunos podem, inicialmente, convencer-se de que o tabuleiro pode ser coberto por 31 dominós, uma vez que 2 x 31 = 62. Os alunos geralmente abordam o problema fazendo um desenho, o que é uma ótima maneira de começar. Depois de algumas tentativas, os alunos mudam de ideia e acreditam que não existe um padrão capaz de cobrir o tabuleiro da forma descrita na atividade. Neste momento, o professor pode perguntar aos alunos: "Como você sabe que o padrão realmente não existe ou que você apenas não está conseguindo encontrá-lo?".

Sugira que os alunos participem de uma outra abordagem. Uma dica útil que o professor pode dar aos alunos é que considerem as cores do tabuleiro.

Este exercício é projetado para apresentar aos discentes que acreditar que o problema não tem solução porque tentaram uma centena de vezes e não obtiveram uma solução, é diferente de provar que de fato não tem solução.

O professor pode aproveitar este momento para discutir com os alunos sobre as diferentes formas de adquirir conhecimento: há o que eles sabem já que alguém disse a eles, ou porque leram sobre o assunto, ou até mesmo o que viram com os próprios olhos. As verdades matemáticas eles sabem pois foram provadas.

Experiência e observação são formas importantes para descobrirem o que pode ser verdade, mas o conhecimento das verdades matemáticas vem de provas.

Alguns alunos podem ficar perplexos diante da conclusão dessa prova, que algo é impossível, ou seja, que mesmo usando um computador ou tentando várias e várias vezes, eles não conseguiriam cobrir o tabuleiro com as regras propostas.

Os jovens que estão aprendendo na sala de aula podem achar difícil aceitar que é realmente impossível. Por este motivo esta atividade mostra-se instigante e necessária.

2.2 - Atividade II: O quadrado perdido!

2.2.1 - Guia do Professor

Objetivo: Convencer os alunos sobre a necessidade de uma prova.

Nível: Ensino Médio.

Material: Papel e lápis.

Tempo previsto: 20 a 30 minutos.

Quando usar: Esta atividade pode ser aplicada depois que o professor tiver ensinado o conceito de coeficiente angular de uma reta.

Pré-requisitos: Saber calcular a área de figuras planas e encontrar o coeficiente angular de uma reta.

Descrição: Os alunos deverão analisar as Figuras 1 e 2, abaixo, e por meio do cálculo de áreas e do coeficiente angular da reta suporte dos segmentos concluir o porquê de faltar um quadrado na Figura 2 quando reorganizamos as partes da Figura 1.

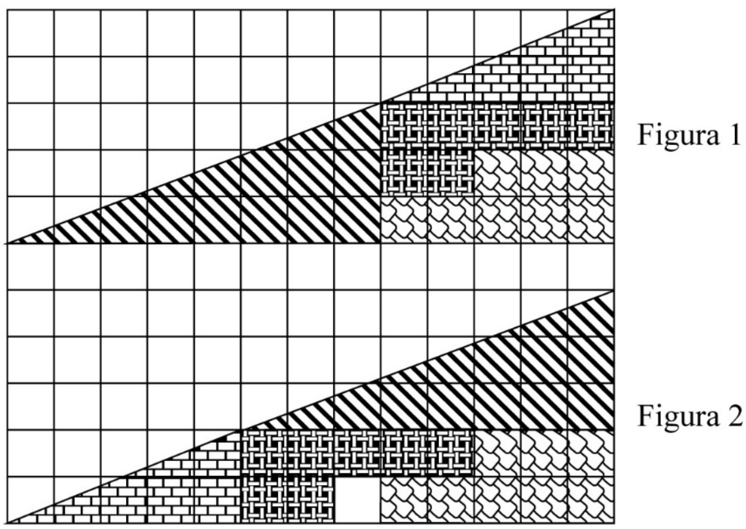


Figura 2.2: O quadrado perdido!

Como usar: Distribua uma “Folha do Aluno” para cada aluno e os divida em grupos (o número de alunos em cada grupo fica a critério do professor). O professor pode orientar os alunos caso necessário.

2.2.2 – Folha do Aluno

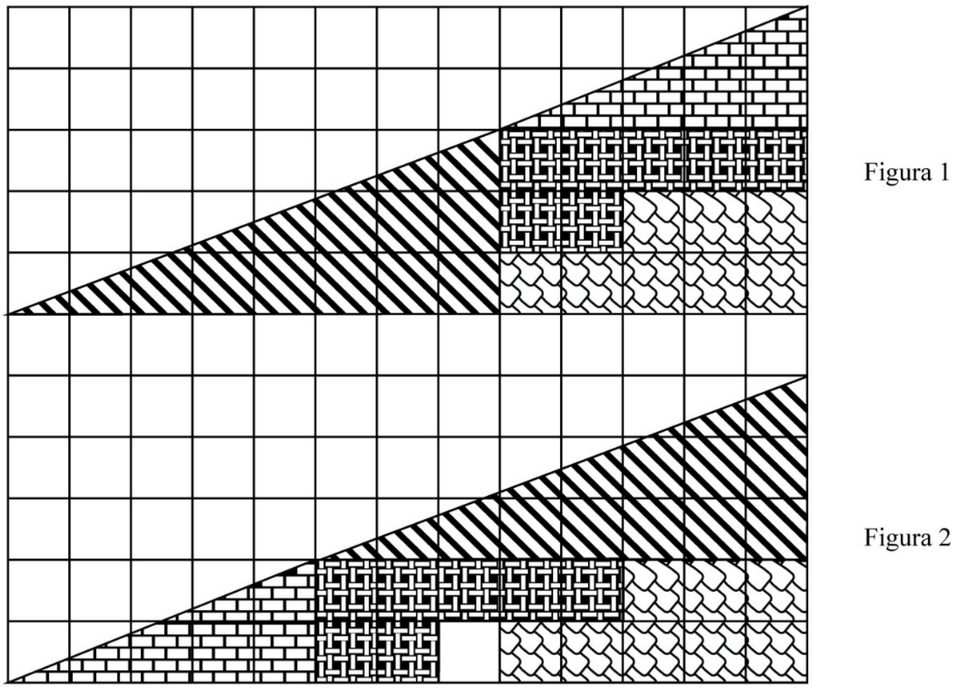


Figura 2.3: O quadrado perdido!

Examine cuidadosamente as figuras acima. A Figura 1 está dividida em quatro partes. Essas partes reorganizadas formam a Figura 2; no entanto, há um quadrado que não está sombreado na Figura 2. Como isso aconteceu?

Vamos agora explorar a resposta a esta pergunta. Para isso, preencha as tabelas a seguir:

Tabela 1:

Figura	**Área da Figura**	**Área Sombreada**
Figura 1		
Figura 2		

Tabela 2.1 : Áreas das figuras.

Tabela 2:

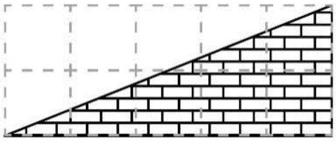
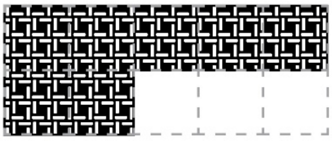
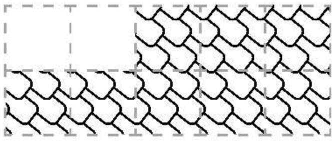
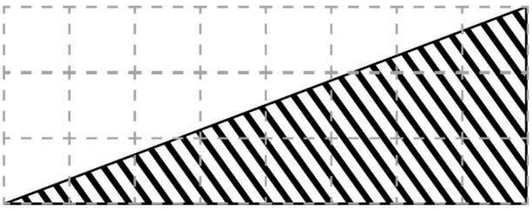
Parte	**Área da parte**
	
	
	
	

Tabela 2.2: Áreas das partes.

A área da Figura 1 deve ser igual a soma das áreas de suas quatro partes. Qual é a soma das áreas das quatro partes da Tabela 2? Esse valor é igual a área da Figura 1 obtida na primeira tabela?

De modo análogo, a área da Figura 2 deve ser igual a soma das áreas de suas quatro partes. A soma das áreas das quatro partes da Tabela 2 é igual a área da Figura 2 obtida na primeira tabela?

Vamos tentar conciliar essas medições. Para calcular o coeficiente angular de uma reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), com $x_1 \neq x_2$, basta calcular o quociente :

$$\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Agora, observe a Figura 1 e preencha a tabela a seguir.

Tabela 3:

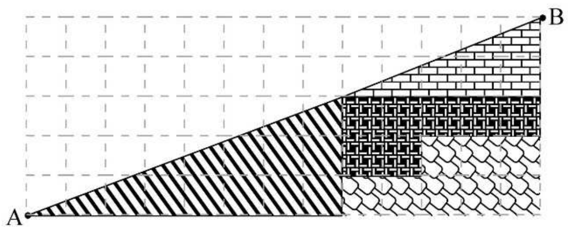
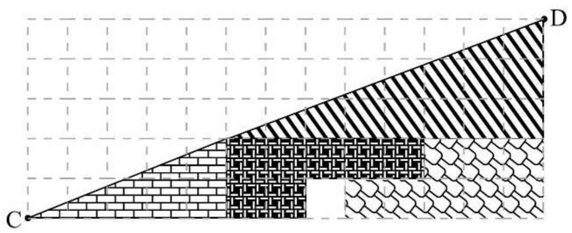
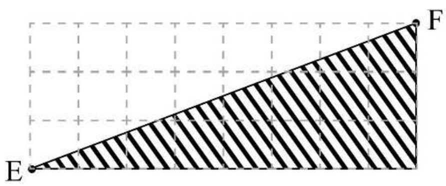
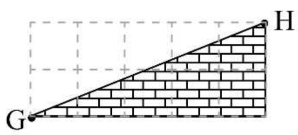
Figura	**Coordenadas das extremidades do segmento**	**Coeficiente angular da reta suporte do segmento**
	A= $(0, 0)$ e B= $(13, 5)$	
	C= $(0, 0)$ e D= $(13, 5)$	
	E= $(0, 0)$ e F= $(8, 3)$	
	G= $(0, 0)$ e H= $(5, 2)$	

Tabela 2.3 : Coeficientes angulares.

Todos os coeficientes angulares encontrados na Tabela 3 têm o mesmo valor? Descreva o que você descobriu e responda: por que há um “quadrado perdido”?

2.2.3 – Soluções e Sugestões para o professor

Acredita-se que ao completar a Tabela 1 (Folha do Aluno) os alunos vão considerar as Figuras 1 e 2 como triângulos, e por este motivo na solução desta tabela utilizamos a fórmula para o cálculo da área do triângulo ao calcular as áreas das Figuras 1 e 2. Considerando u como uma unidade de medida de comprimento do lado do quadrado, obtemos os seguintes resultados:

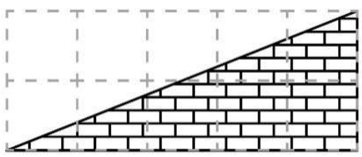
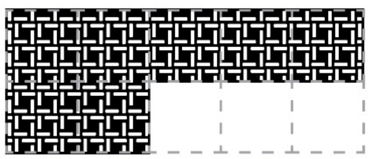
Tabela 1:

Figura	**Área da Figura**	**Área Sombreada**
Figura 1	$\frac{65}{2}u^2$	$\frac{65}{2}u^2$
Figura 2	$\frac{65}{2}u^2$	$\left(\frac{65}{2}-1\right)u^2$, pois um quadrado não está sombreado.

Tabela 2.4 : Resoluções da Tabela 2.1.

Após completar a Tabela 1, o aluno deverá observar novamente as Figuras 1 e 2 e completar a Tabela 2, como a seguir:

Tabela 2:

Parte	**Área da parte**
	$\frac{5.2}{2} = 5\ u^2$ Área do triângulo com base $5\ u$ e altura $2\ u$
	$7\ u^2$ Basta contar os quadrados

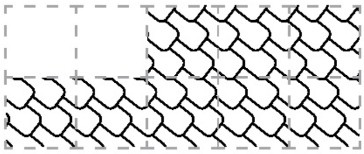
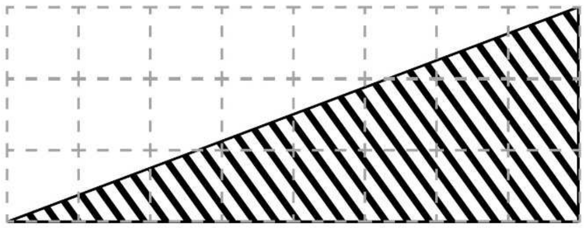
	$8\ u^2$ Basta contar os quadrados
	$\frac{8.3}{2} = 12\ u^2$ Área do triângulo com base $8\ u$ e altura $3\ u$

Tabela 2.5 : Resoluções da Tabela 2.2.

Sabemos que as quatro partes contidas na Tabela 2 formam a Figura 1, logo:

Área da Figura 1 = $5u^2 + 7u^2 + 8u^2 + 12u^2$ = $\boldsymbol{32u^2} \neq \boldsymbol{\frac{65}{2}\ u^2}$ (obtido na Tabela 1). Portanto, a Figura 1 não é um triângulo.

Temos também que as quatro partes contidas na Tabela 2 mais o quadrado não sombreado, que é o “quadrado perdido” , formam a Figura 2, logo:

Área da Figura 2 = $5u^2 + 7u^2 + 8u^2 + 12u^2 + 1u^2$= $\boldsymbol{33u^2} \neq \boldsymbol{\frac{65}{2}\ u^2}$ (obtido na Tabela 1). Ou seja, a Figura 2 também não é um triângulo.

Tabela 3:

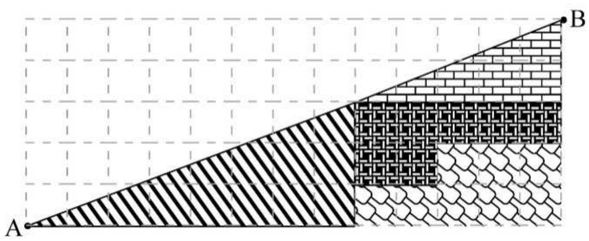
Figura	**Coordenadas das extremidades do segmento**	**Coeficiente angular da reta suporte do segmento**
Figura 1 	A= $(0, 0)$ e B= $(13, 5)$	$\frac{5}{13}$

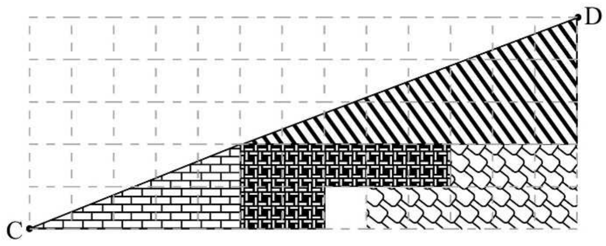
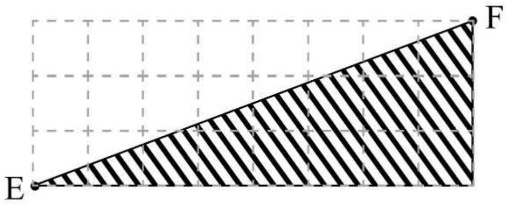
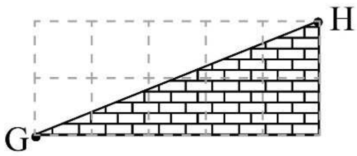
Figura 2 	C= $(0,0)$ e D= $(13,5)$	$\frac{5}{13}$
	E= $(0,0)$ e F= $(8,3)$	$\frac{3}{8}$
	G= $(0,0)$ e H= $(5,2)$	$\frac{2}{5}$

Tabela 2.6 : Resoluções da Tabela 2.3.

Para explicar o porquê de isso acontecer, usaremos o coeficiente angular da reta suporte dos segmentos.

Para que três ou mais pontos estejam alinhados, é necessário que os coeficientes angulares das retas suportes dos segmentos sejam iguais. Assim, concluímos que os pontos $(0,0)$, $(5,2)$, $(8,3)$ e $(13,5)$ não estão alinhados, pois $\frac{5}{13} \neq \frac{3}{8} \neq \frac{2}{5}$.

Portanto esperamos que os alunos percebam que por este motivo as Figuras 1 e 2 não são triângulos como parecem, e concluam que por isso temos um “quadrado perdido” ao reorganizar as partes da Figura 1 para a Figura 2.

2.3 - Atividade III: Provas Diretas e Indiretas

2.3.1 - Guia do Professor

Objetivo: Introduzir os conceitos de provas diretas e indiretas.

Nível: Ensino Médio.

Material: Papel e lápis.

Tempo previsto: 1h40 min.

Quando usar: Esta atividade pode ser aplicada em qualquer momento do ano letivo.

Pré-requisitos: Os alunos precisam saber que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes e conhecer os casos de congruência de triângulos LAL (lado, ângulo, lado), e LLL (lado, lado, lado). Também números primos, e o fato de que todo número inteiro maior do que 1 é divisível por um número primo.

Como usar: Distribua uma “Folha do Aluno” para cada aluno e os divida em grupos (o número de alunos em cada grupo fica a critério do professor). O professor pode orientar os alunos caso necessário. Cada grupo deve formular respostas para as perguntas, e depois o professor pode discutir as respostas com toda a turma.

Descrição: O professor pode começar a atividade lendo com os alunos até a prova do Exemplo 1 da Folha do Aluno. Se esse for o primeiro contato dos alunos com os conceitos de hipótese, tese, axiomas, premissas, proposições, o professor deve explicar cada um desses conceitos e dar mais exemplos caso sinta necessidade.

Após explicar o Exemplo 1, o professor pode solicitar que os alunos resolvam as Atividade 1 e Atividade 2. O professor pode tirar as dúvidas e orientar os alunos que precisarem.

Assim que os alunos terminem essa primeira etapa o professor pode pedir que compartilhem suas respostas. Desse modo o docente notará se os alunos entenderam os conceitos de hipótese e tese, e se conseguiram provar as proposições. Se necessário, o professor pode retomar esses conceitos, e sugerir outras atividades com proposições que podem ser provadas pelo método direto.

Se o professor notar que os alunos não tiveram muitas dificuldades para responder as questões, pode pedir que leiam os Exemplos 2 e 3 e realizem as Atividades 3 a 7. Caso contrário, é aconselhável que o professor leia com os alunos a proposição e a prova do Exemplo 2 e dê um tempo para que eles realizem as Atividades 3 e 4 referentes a este exemplo e oriente no que for necessário. Depois faça o mesmo para o Exemplo 3 e as Atividades 5, 6 e 7.

A prova do Exemplo 2: Livro I, Proposição 6 do *Elementos* de Euclides; e do Exemplo 3: Livro IX, Proposição 20 do *Elementos* de Euclides também podem ser encontradas no livro “Os elementos”. [4] (p.103, p. 343)

2.3.2 – Folha do Aluno

Em linguagem da ciência, costuma-se chamar de “**proposição**” toda afirmação, verdadeira ou falsa. Por exemplo, “a Terra é imóvel e encontra-se no centro do Universo”, é uma proposição falsa da Astronomia. Já a afirmação “um triângulo não é um cubo” é uma proposição verdadeira da Geometria.

As premissas (pontos ou ideias de que se parte para desenvolver um raciocínio) contidas em uma proposição também são chamadas de **hipóteses**. Aquilo que se deseja provar costuma ser denominado **tese**.

Por exemplo, na proposição: “se n é um número inteiro par, então n^2 é um número par”, a hipótese é que n é um número inteiro par e a tese é n^2 é um número par.

Nem tudo na Matemática pode ser demonstrado: algumas afirmações precisam ser aceitas sem provas, para que o processo demonstrativo possa ter início. Essas afirmações que precisamos admitir sem provas são denominadas **postulados** ou **axiomas**.

Nas provas das proposições matemáticas, como veremos, são empregados basicamente dois métodos:

Método Direto: Nesse método, partindo-se das premissas e dos axiomas, evidencia-se a veracidade da proposição por meio de uma sequência direta de inferências (relação que permite passar das premissas para a conclusão).

Método Indireto: O método indireto mais utilizado nas provas matemáticas é o **método da redução ao absurdo.** Nesse método, também chamado de **Prova por Contradição**, supõe-se que a proposição que se deseja demonstrar seja falsa. A partir dessa suposição, usando o método direto, infere-se alguma proposição impossível ou absurda. Assim, a falsidade da proposição original, admitida apenas para fins de argumentação, não é sustentável. Se a proposição não pode ser falsa, considera-se provado que ela é verdadeira. [5]

Exemplo 1: Provar que “se n é um número inteiro par, então n^2 é um número par”.

Definição: Um número inteiro n é par se existir um número inteiro k tal que $n = 2k$ (ou seja, n é um número divisível por 2) e n é um número inteiro ímpar, se existir um número inteiro c tal que $n = 2c + 1$.

Prova: Como n é um número inteiro par, então n pode ser escrito como $n = 2k$, em que k é um número inteiro. Portanto $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Logo, o quadrado de n é divisível por 2, e portanto, também é par, como queríamos demonstrar.

Atividade 1: Observe a proposição: "Se n é um número inteiro ímpar, então n^2 é um número ímpar".

a) Qual é a hipótese desta proposição?

b) Qual é a tese?

c) Prove a proposição.

Atividade 2: Observe a proposição: "Num triângulo isósceles ABC de base AB, o segmento que une o vértice C com o ponto médio M de AB é perpendicular à base". [1]

a) Qual é a hipótese desta proposição?

b) Qual é a tese?

c) Prove a proposição. Dica: Use congruência de triângulos.

Euclides nasceu no ano 330 a.C e acreditava na busca pela verdade matemática pura. Ele dedicou boa parte de sua vida ao trabalho de escrever os *Elementos*, que consistem em treze livros, alguns dedicados aos trabalhos do próprio Euclides, e os demais sendo uma compilação do conhecimento matemático de sua época, incluindo dois volumes dedicados inteiramente aos trabalhos da Irmandade Pitagórica.

Os próximos dois exemplos, segundo Katz [6], foram provas realizadas por Euclides.

Exemplo 2: Livro I, Proposição 6 do *Elementos* de Euclides : Se num triângulo dois ângulos são iguais, os lados opostos aos ângulos iguais também serão iguais.

Atividade 3: Observe a proposição do exemplo 2 e responda:

a) Qual é a hipótese desta proposição?

b) Qual é a tese?

Prova (*Elementos* de Euclides): Seja ABC um triângulo com ângulo ABC igual ao ângulo ACB. Queremos provar que o lado AB é igual ao lado AC.

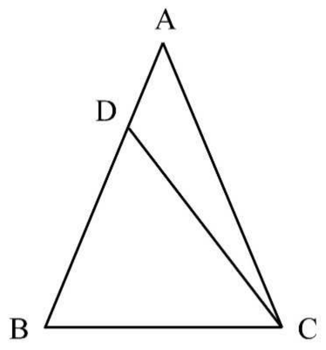


Figura 2.4: Ilustração para Proposição 6 do Livro I.

Vamos supor que AB não seja igual a AC, logo, um deles é maior. Assumindo AB como sendo o maior, podemos encontrar um ponto D em AB, de modo que a medida de DB seja igual a medida de AC. Trace o segmento DC.

Desse modo, DB é igual a AC, BC é lado comum, e o ângulo DBC é igual ao ângulo ACB. Logo, pelo caso de congruência LAL (lado, ângulo, lado), o triângulo DBC é congruente ao triângulo ACB. Mas o triângulo DBC é “menor que” o triângulo ACB, portanto não podem ser iguais. Logo, AB não é maior que AC. Da mesma forma, AB não pode ser menor que AC. Concluímos então que AB é igual a AC.

Atividade 4:

a) Qual foi o método utilizado na prova?

b) O que Euclides começa supondo para provar a proposição?

c) Qual é a contradição que Euclides chega?

d) Como essa contradição prova o teorema?

Exemplo 3: Livro IX, Proposição 20 do *Elementos* de Euclides: Os números primos são mais numerosos do que qualquer quantidade de números primos proposta.

Atividade 5:

a) Qual é a hipótese desta proposição?

b) Qual é a tese?

Prova (*Elementos* de Euclides): Vamos supor que existem apenas três números primos: p , q e r.

Tome $N = p.q.r + 1$. N é primo ou não é primo. Vamos considerar primeiramente N como um número primo. Então, nós encontramos um número primo diferente de p , q e r.

Em segundo lugar , suponhamos que N não é primo. Portanto, ele é divisível por algum número primo s. Mas s não pode ser igual a p, q ou r, porque, se fosse, então um desses números dividiria N. Como p, q ou r dividem $p.q.r$, então dividiriam $N - p.q.r = 1$. Mas nenhum número primo pode dividir 1. Então s é diferente de p , q , r e encontramos um número primo diferente daqueles três. Portanto, em qualquer caso, existe um número primo diferente dos três números primos iniciais p , q e r contradizendo a suposição inicial de que existiam apenas três. Logo a quantidade de números primos é maior do que a quantidade proposta.

Atividade 6:

a) Qual foi o método utilizado na prova?

b) Compare esta prova com a do exemplo 2. Qual é a diferença entre elas?

c) Note que Euclides prova que se há três números primos , deve haver um quarto. Como você adaptaria a prova para mostrar que, se houvesse quatro números primos , deveria haver um quinto ?

d) Como você adaptaria a prova para mostrar que se existem n números primos , deveria haver um $(n + 1)$º número primo?

e) Em linguagem moderna, o teorema afirma: " Há um número infinito de números primos ". Por que você acha que Euclides declarou a proposição daquela maneira?

Atividade 7: Prove que “Se n é um número inteiro e n^2 é um número par, então n é um número par”.

2.3.3 – Soluções e Sugestões para o professor

Atividade 1: a) A hipótese é : n é um número inteiro ímpar.

b) A tese é: n^2 é um número ímpar.

c) Como n é um número inteiro ímpar, então n pode ser escrito como $n = 2c + 1$, para algum c é um número inteiro. Portanto $n^2 = (2c + 1)^2 = 4c^2 + 4c + 1 = 2(2c^2 + 2c) + 1$. Tome $d = 2c^2 + 2c$. Como c é um número inteiro, então c^2 também é inteiro, portanto d é um número inteiro. Assim, o quadrado de n é $2d + 1$ e logo um número inteiro ímpar, como queríamos demonstrar.

Atividade 2: a) A hipótese é: ABC é um triângulo isósceles de base AB.

b) A tese é: O segmento que une o vértice C com o ponto médio M de AB é perpendicular à base.

c) Os alunos podem usar um dos casos de congruência de triângulos (L.L.L ou L.A.L) para provar essa proposição. Considere o triângulo isósceles ABC de base AB. Sendo M o ponto médio de AB queremos provar que CM é perpendicular a AB.

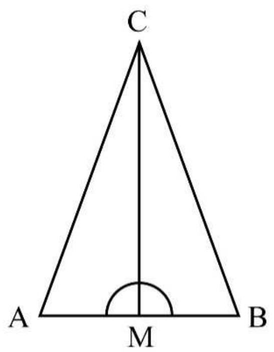


Figura 2.5: Triângulo isósceles ABC.

- Usando o caso L.L.L: Sabemos que CA = CB (pois o triângulo ABC é isósceles), AM = MB (pois M é ponto médio) e CM = CM (lado comum). Logo, pelo caso L.L.L os triângulos CAM e CBM são congruentes. Portanto o ângulo AMB é igual ao ângulo CMB. Como a soma desses dois ângulos é 180º, pois são ângulos adjacentes, cada um deles deve medir 90°. Provamos assim que o segmento CM é perpendicular à base AB.
- Usando o caso L.A.L: Sabemos que CA = CB (pois o triângulo ABC é isósceles), o ângulo CAM é igual ao ângulo CBM, pois os ângulos da base de um triângulo

isósceles são congruentes, e AM = MB (pois M é ponto médio). Logo, pelo caso L.A.L os triângulos CAM e CBM são congruentes. E o restante da prova segue como no caso anterior.

Atividade 3: a) A hipótese é: O triângulo tem dois ângulos iguais.
b) A tese é: Os lados opostos aos ângulos iguais do triângulo dado, também serão iguais.

Atividade 4: a) O método utilizado foi o indireto (Prova por contradição).
b) Euclides começa supondo que AB não seja igual a AC, logo um deles é maior.
c) A contradição que ele chega é que AB não é maior e nem menor que AC.
d) Como AB não é maior e nem menor que AC, então AB = AC.

Atividade 5: a) A hipótese é: Existe uma quantidade de números primos proposta.
b) A tese é: A quantidade de números primos é sempre maior do que qualquer quantidade proposta.

Atividade 6: a) O método utilizado foi o indireto.
b) Nos exemplos 2 e 3 o método utilizado é o indireto. A estrutura básica da prova do exemplo 2 é o que chamamos de "prova por contradição". Esse tipo de argumento também ocorre na prova do exemplo 3, porém a estrutura é um pouco diferente, pois de qualquer uma das alternativas apresentadas para o número N (ser ou não um número primo) chegamos a um número primo adicional. Certifique-se de que os alunos compreendam a distinção entre essas duas provas.
c) Sejam p, q, r e s os números primos. Tome $N = p.q.r.s + 1$. De modo análogo a prova do exemplo 3 teremos que N ou é primo ou existe um número primo diferente de p, q, r e s que divide N, chegando assim a um quinto número primo, como desejado.
d) Vamos supor que existem n números primos $p_{1,}, p_{2,} \dots, p_{n,}$. Tome $N = p_1.p_2. \dots .p_n + 1$. N é primo, ou existe um número primo diferente de $p_{1,}, p_{2,} \dots, p_{n,}$ que divide N. Logo, existem $(n + 1)$ números primos.
e) Uma possível razão é que ele não tinha uma notação que lhe permitia expressar um número arbitrário de primos, como a notação que utilizamos com letras e subscritos.

Atividade 7: Suponhamos que n é um número inteiro ímpar. Provamos na Atividade 1 que se n é ímpar, então n^2 é um número ímpar, o que é uma contradição, logo n é par.

2.4 - Atividade IV: A Irracionalidade de $\sqrt{2}$

2.4.1 - Guia do Professor

Objetivo: Trabalhar com provas diretas e indiretas; relacionar grandezas incomensuráveis com os números irracionais.

Nível: Ensino Médio.

Material: Papel e lápis.

Tempo previsto: 3h20 min.

Quando usar: Essa atividade pode ser aplicada antes ou depois de trabalhar com os números irracionais, ou após aplicar a Atividade III (provas diretas e indiretas).

Pré-requisitos: Conceito de provas diretas e indiretas. Números pares e ímpares; e números racionais.

Como usar: Distribua uma "Folha do Aluno" para cada aluno e os divida em grupos. O professor pode orientar os alunos caso necessário. Cada grupo deve formular respostas para as s propostas, e depois o professor pode discutir as respostas com toda a turma.

Descrição: Antes de entregar a "Folha do Aluno", o professor pode dar alguns exemplos de grandezas comensuráveis, como no exemplo contido na "Folha do Aluno" dos segmentos R e S.

Após perceber que os alunos entenderam o conceito de grandezas comensuráveis, pergunte se eles acreditam que quaisquer dois segmentos são comensuráveis. Deixe que os alunos levantem suas hipóteses, e então entregue as folhas da atividade.

A atividade começa com um texto explicando o conceito de grandezas comensuráveis e incomensuráveis. O professor pode ler esse texto com os alunos e dar mais exemplos caso necessário.

O professor pode ler com os alunos as definições de número par e número ímpar e realizar com eles a Atividade 1, para que entendam como deve ser realizada a prova da proposição. Peça então que os alunos leiam a Proposição 2 e realizem sua prova.

Se perceber que os alunos não tiveram dificuldade, peça para que realizem as Atividades 2 a 9.

Caso os alunos tenham feito a Atividade III (provas diretas e indiretas) a resolução desta atividade será mais fácil.

Depois que os alunos concluírem as Atividades de 2 a 9, solicite que compartilhem as respostas. Assim os alunos terão a base necessária para acompanhar a prova de que a diagonal e o lado de um quadrado são grandezas incomensuráveis.

Aconselha-se que o professor faça a leitura desta prova com os alunos, explicando cada um dos passos.

Após a prova de que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis é proposto aos alunos que provem algebricamente que $\sqrt{2}$ é irracional.

Material de apoio: Se perceber que os alunos tiveram dificuldade em realizar a Atividade 10, ou se desejar estender o assunto sobre a irracionalidade de $\sqrt{2}$, o professor pode reproduzir o vídeo **"A razão dos irracionais"**, que pode ser encontrado no portal do M³ Matemática Multimídia, que contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp, pelo link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1168 (Acesso em: 20/02/2016).

2.4.2 – Folha do Aluno

Duas grandezas são comensuráveis se a razão entre elas pode ser expressa por um número racional, ou seja, se existe uma terceira grandeza que cabe nas duas primeiras um número inteiro de vezes.

Por exemplo, observe os segmentos R e S abaixo:

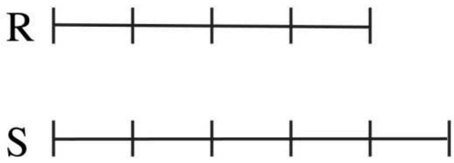


Figura 2.6: Segmentos R e S.

Eles são comensuráveis, pois dividindo R em 4 partes iguais temos: $\mathrm{R} = 4.\left(\frac{1}{4}\mathrm{R}\right)$ e $\mathrm{S} = 5.\left(\frac{1}{4}\mathrm{R}\right)$. Vemos também que a razão entre R e S é $\frac{4}{5}$, que é um número racional.

Embora intuitivamente possamos acreditar que é sempre possível dividir um segmento em um número finito de vezes de modo que cada parte caiba um número inteiro de vezes em outro segmento, a descoberta das grandezas incomensuráveis mostra que nem sempre isso é possível.

Dizemos que duas grandezas são incomensuráveis se a razão entre elas não pode ser expressa por um número racional.

Segundo Tatiana Roque [10] (p.126) "um dos primeiros exemplos a apresentar a possibilidade de duas grandezas incomensuráveis teria sido o problema de se usar o lado para medir a diagonal de um quadrado, o que exige conhecimentos simples de geometria.".

Essa atividade foi projetada para provar que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis. Inicialmente vamos trabalhar com algumas definições e proposições que serão utilizadas nessa prova.

Definição 1: Um número inteiro positivo n é par se existir um número inteiro positivo k tal que $n = 2k$.

Definição 2: Um número inteiro positivo n é ímpar se existir um número inteiro positivo c tal que $n = 2c + 1$.

Proposição 1: A soma de dois números pares é um número par.

Atividade 1: Prove a Proposição 1, usando a definição de número par.

Proposição 2: A soma de dois números ímpares é um número par.

Atividade 2: Prove a Proposição 2, usando as definições de número ímpar e número par.

Proposição 3: O produto de dois números pares é um número par.

Atividade 3: Prove a Proposição 3.

Proposição 4: O produto de dois números ímpares é um número ímpar.

Atividade 4: Prove a Proposição 4.

Definição 3: A área de um quadrado é obtida quando multiplicamos a medida do lado por ela mesma.

Proposição 5: Se a medida do lado de um quadrado é par, então sua área é par. (Ou seja, se n é um número inteiro positivo par, então n^2 é um número par).

Atividade 5: Prove a Proposição 5.

Proposição 6: Se a medida do lado de um quadrado é ímpar, então sua área é ímpar. (Ou seja, se n é um número inteiro positivo ímpar, então n^2 é um número ímpar).

Atividade 6: Prove a Proposição 6.

Proposição 7: Se a medida do lado de um quadrado é um número inteiro positivo e a área deste quadrado é par, então a medida do seu lado é par. (Ou seja, se n é um número inteiro positivo e n^2 é um número par, então n é um número par).

Atividade 7: Prove por contradição a Proposição 7, usando os argumentos da Proposição 6.

Proposição 8: Se a medida do lado de um quadrado é um número inteiro positivo e a área deste quadrado é ímpar, então a medida do seu lado é ímpar. (Ou seja, se n é um número inteiro positivo e n^2 é um número ímpar, então n é um número ímpar).

Atividade 8: Prove por contradição a Proposição 8, usando os argumentos da Proposição 5.

Proposição 9: Se a medida do lado de um quadrado é um número inteiro positivo e a área deste quadrado é par, então ela é divisível por 4. (Ou seja, se n é um número inteiro positivo e n^2 é um número par, então n^2 é divisível por 4).

Atividade 9: Prove a Proposição 9.

Estamos prontos para compreender a prova da nossa principal proposição, de que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis, ou seja, que a razão entre essas duas grandezas não pode ser expressa por um número racional. Para provar esse resultado, vamos supor que eles são comensuráveis, ou seja, que razão entre essas grandezas é um número racional. Devemos obter então uma contradição que vai mostrar que esta hipótese deve ser falsa.

- Suposição básica: o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas comensuráveis.

Considere o diagrama a seguir:

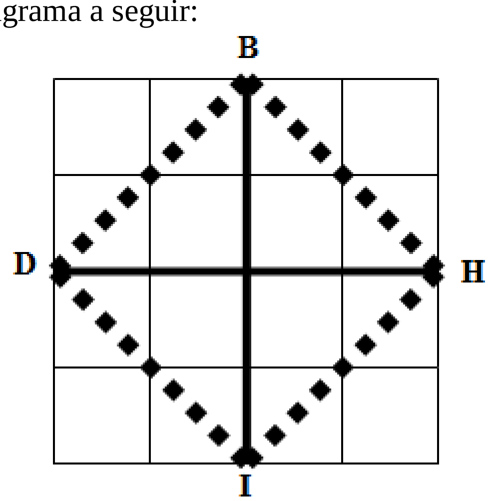


Figura 2.7: Quadrado DBHI.

No quadrado DBHI, DB é um lado e DH é uma diagonal. Assim, uma vez que nosso objetivo é mostrar que DB e DH são incomensuráveis, vamos supor que eles sejam comensuráveis. Isto significa que existe um certo segmento, digamos DX, tal que DH = p.DX e DB = q.DX, em que p e q são números inteiros positivos. Dizemos que DH é representado pelo por p e que DB é representado por q.

Temos que a razão DH : DB = $p : q$ é uma razão entre números inteiros positivos. Podemos supor que DX é o maior segmento possível de que ambos DH e DB são múltiplos. Isto significa que p e q são os menores números inteiros positivos possíveis através do qual podemos expressar a razão da diagonal para o lado. Em particular, isto significa que p e q não podem ser ambos pares.

- Primeiro Resultado: p e q não são ambos pares.

Considere o quadrado AGFE no diagrama abaixo:

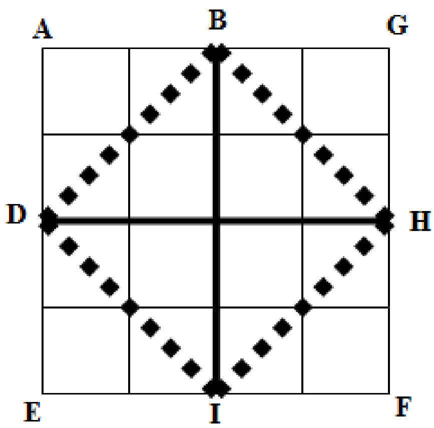


Figura 2.8: Quadrado AGFE.

Por construção, AG =DH, então AG = p.

Observamos pelo diagrama, que a área do quadrado AGFE é o dobro da área do quadrado DBHI. Portanto a área do quadrado AGFE é um número inteiro positivo par. Pela Proposição 7, AG = p é par.

- Segundo Resultado: p é par.

Como a área do quadrado AGFE é um número inteiro positivo par então esse quadrado pode ser dividido em quatro partes iguais (pela Proposição 9). Uma dessas partes é a área do quadrado ABCD, que representa um número inteiro positivo.

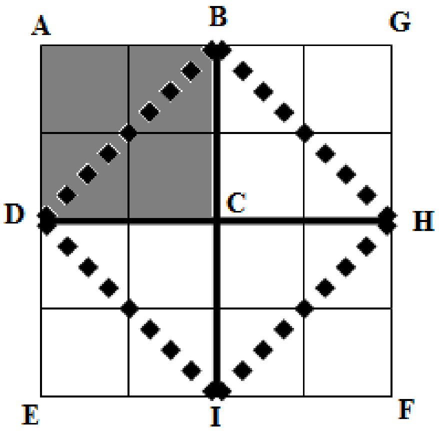


Figura 2.9: Quadrado ABCD.

Pelo diagrama vemos que a área do quadrado DBHI é o dobro da área do quadrado ABCD. Desse modo a área do quadrado DBHI é um número inteiro positivo par. Pela Proposição 7 o lado DB = q é par.

- Terceiro Resultado: q é par.

Comparando o segundo e terceiro resultados com o primeiro resultado, vemos que eles são contraditórios. Portanto a nossa suposição básica, de que o lado e a diagonal de um quadrado são comensuráveis é falsa. Concluímos então que:

- O lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis.

Agora é com você!

Sabemos, pelo teorema de Pitágoras, que a diagonal de um quadrado de lado 1 mede $\sqrt{2}$.

Provamos que a diagonal e o lado de um quadrado são grandezas incomensuráveis, ou seja, a razão entre a medida da diagonal e lado do quadrado não pode ser expressa por um número racional. Portanto, no caso do quadrado de lado 1, concluímos que $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ não é um número racional, logo $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Atividade 10: Prove de modo algébrico, por contradição, que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Sugestão: Comece supondo que $\sqrt{2}$ é um número racional, ou seja, que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, em que p e q são números inteiros, $q \neq 0$, e $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível.

Em seguida, eleve os dois lados da igualdade ao quadrado e use a definição 1 e a Proposição 7 para obter uma contradição.

2.4.3 – Soluções e Sugestões para o professor

Para as soluções das atividades lembre-se: Se a, b são números inteiros positivos, então $a + b$ é um número inteiro positivo e $a.b$ é um número inteiro positivo. (*)

Atividade 1: Sejam m e n dois números inteiros positivos pares. Queremos mostrar que $m + n$ é um número inteiro positivo par. Podemos escrever $m = 2k$ e $n = 2c$, em que k e c são números inteiros positivos. Assim:

$m + n = (2k) + (2c) = 2(k + c)$. Tome $d = k + c$. Por (*), d é um número inteiro positivo. Portanto $m + n = 2d$ é um número inteiro positivo par. Logo, a soma de dois números pares é um número par.

Atividade 2: Sejam m e n dois números inteiros positivos ímpares. Queremos mostrar que $m + n$ é um número inteiro positivo par. Podemos escrever $m = 2k + 1$ e $n = 2c + 1$, em que k e c são números inteiros positivos. Assim:

$m + n = (2k + 1) + (2c + 1) = 2k + 2c + 2 = 2(k + c + 1)$. Tome $d = k + c + 1$. Por (*), d é um número inteiro positivo. Portanto $m + n = 2d$ é um número inteiro positivo par. Logo, a soma de dois números ímpares é um número par.

Atividade 3: Sejam m e n dois números inteiros positivos pares. Queremos mostrar que $m.n$ é um número inteiro positivo par**.** Podemos escrever $m = 2k$ e $n = 2c$, em que k e c são números inteiros positivos. Assim:

$m.n = (2k).(2c) = 4kc = 2(2kc)$. Tome $d = 2kc$. Por (*), d é um número inteiro positivo. Portanto $m.n = 2d$ é um número inteiro positivo par. Logo, o produto de dois números pares é um número par.

Atividade 4: Sejam m e n dois números inteiros positivos ímpares. Queremos mostrar que $m.n$ é um número inteiro positivo ímpar. Podemos escrever $m = 2k + 1$ e $n = 2c + 1$, em que k e c são números inteiros positivos. Assim:

$m.n = (2k + 1).(2c + 1) = 4kc + 2k + 2c + 1 = 2.(2kc + k + c) + 1$. Tome $d = 2kc + k + c$. Por (*), d é um número inteiro positivo. Portanto $m.n = 2d + 1$ é um número inteiro positivo ímpar. Logo, o produto de dois números ímpares é um número ímpar.

Atividade 5: Seja n a medida do lado de um quadrado, em que n é um número inteiro positivo par. Queremos mostrar que a área desse quadrado é par. Podemos escrever $n = 2k$, em que k é um número inteiro positivo. A área do quadrado será:

$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Tome $d = 2k^2$. Por (*), d é um número inteiro positivo. Portanto $n^2 = 2d$ é um número inteiro positivo par. Logo, se a medida do lado de um quadrado é par, então sua área é par, ou seja, se n é um número par, então n^2 é um número par.

Atividade 6: Seja n a medida do lado de um quadrado, em que n é um número inteiro positivo ímpar. Queremos mostrar que a área desse quadrado é ímpar. Podemos escrever $n = 2c + 1$, em que c é um número inteiro positivo. A área do quadrado será:

$n^2 = (2\mathrm{c} + 1)^2 = 4\mathrm{c}^2 + 4\mathrm{c} + 1 = 2(2\mathrm{c}^2 + 2\mathrm{c}) + 1$. Tome $d = 2\mathrm{c}^2 + 2\mathrm{c}$. Por (*), d é um número inteiro positivo. Portanto $n^2 = 2d + 1$ é um número inteiro positivo ímpar. Logo, se a medida do lado de um quadrado é ímpar, então sua área é ímpar, ou seja, se n é um número ímpar, então n^2 é um número ímpar.

Atividade 7: Seja n a medida do lado de um quadrado, em que n é um número inteiro positivo. Queremos mostrar que se n^2, que é a área desse quadrado, é um número inteiro positivo par, então n é um número par.

Suponhamos que n seja um número inteiro positivo ímpar. Provamos na Atividade 6 que se n é um número inteiro positivo ímpar, então n^2 é um número ímpar, o que é uma contradição. Logo n é um número par.

Atividade 8: Seja n a medida do lado de um quadrado, em que n é um número inteiro positivo. Queremos mostrar que se n^2, que é a área desse quadrado, é um número inteiro positivo ímpar, então n é um número ímpar.

Suponhamos que n seja um número inteiro positivo par. Provamos na Atividade 5 que se n é um número inteiro positivo par, então n^2 é um número par, o que é uma contradição. Logo n é um número ímpar.

Atividade 9: Seja n a medida do lado de um quadrado, em que n é um número inteiro positivo. Queremos mostrar que se n^2, que é a área desse quadrado, é um número inteiro positivo par**,** então n^2 é um número divisível por 4.

Provamos na Atividade 7 que se n^2 é um número inteiro positivo par, então n é um número par. Podemos escrever $n = 2k$, em que k é um número inteiro positivo. A área do quadrado será:

$n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, portanto n^2 é divisível por 4. Logo, se a medida do lado de um quadrado é um número inteiro positivo e a área deste quadrado é par, então ela é divisível por 4.

Atividade 10: Para provar algebricamente que $\sqrt{2}$ é irracional, suponha que $\sqrt{2}$ é racional, então $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, em que p e q são números inteiros e $\frac{p}{q}$ é irredutível.

Eleve os dois lados da igualdade $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ao quadrado, assim:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$p^2 = 2q^2. \ (1)$$

Desse modo, p^2 é um número par, portanto, pela Proposição 7, p é um número par.

Se p é um número par, então p pode ser escrito na forma $p = 2k$, em que k é um número inteiro. Substituindo na equação (1) temos:

$$p^2 = 2q^2$$

$$(2k)^2 = 2q^2$$

$$4k^2 = 2q^2$$

$$q^2 = 2k^2.$$

Logo, q^2 é um número par, portanto, pela Proposição 7, q é um número par. O que é uma contradição, pois $\frac{p}{q}$ é irredutível. Assim $\sqrt{2}$ é um número irracional.

2.5 - Atividade V: O Projeto de Pitágoras

2.5.1 - Guia do Professor

Objetivo: Trabalhar com algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Nível: Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Material: Papel, lápis, tesoura, compasso, esquadro (ou transferidor).

Tempo previsto: 3h20 min.

O projeto de Pitágoras é composto por 4 atividades. As atividades são independentes e podem ser aplicadas na ordem que o professor julgar mais adequada para sua turma.

Quando usar: Esta atividade pode ser aplicada após o ensino do Teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental II ou como retomada de conceitos no Ensino Médio.

Pré-requisitos: Conhecer o Teorema de Pitágoras, saber calcular áreas de quadrados, triângulos e semicírculos. Para a Atividade 4, além de conhecer o Teorema de Pitágoras, os pré-requisitos são: Saber construir segmento perpendicular a um segmento dado e transportar segmentos.

Como usar: Divida os alunos em grupos (o número de alunos em cada grupo fica a critério do professor) e distribua uma "Folha do Aluno" para cada grupo. O professor pode orientar os alunos caso necessário.

Descrição: A atividade começa com um texto sobre Pitágoras e o teorema que recebe o seu nome.

Na Atividade 1 os alunos conhecerão um pouco sobre a **"prova chinesa"** e vão realizar uma demonstração do Teorema de Pitágoras usando os conceitos de área de triângulos e área do quadrado.

Depois os alunos realizarão uma “demonstração sem palavras” (recorte e cole). Este tipo de demonstração também será realizada na Atividade 2.

Após a realização da Atividade 2 há a explicação da razão pela qual o recorte realizado na atividade foi satisfatório. Essa folha deve ser entregue aos alunos depois de terem realizado a colagem. Aconselha-se que o professor explique cada um dos passos desta demonstração.

Na Atividade 3 os alunos deverão concluir, utilizando o Teorema de Pitágoras, que área do semicírculo maior $\boldsymbol{A_1}$ é igual a soma das áreas dos outros dois semicírculos ($\boldsymbol{A_2}$ **e** $\boldsymbol{A_3}$). Se necessário o professor poderá retomar o cálculo da área de um semicírculo conhecendo o seu diâmetro.

Na Atividade 4 os alunos construirão um segmento perpendicular a um segmento dado e utilizarão o Teorema de Pitágoras para calcular o comprimento da hipotenusa em cada triângulo obtido. Depois vão utilizar o teorema para obter segmentos de comprimento 2 e $\sqrt{5}$ (itens **a** e **b**), e após perceberem o padrão, no item **c** deverão responder quantos triângulos serão necessários para construir um segmento de reta de comprimento $\sqrt{101}$. No item **d** desta atividade os alunos deverão marcar sobre a reta real os números solicitados, utilizando o transporte de segmento.

2.5.2 – Folha do Aluno

Pitágoras nasceu possivelmente no ano de 570 a.C na ilha de Samos, na região da Ásia Menor e provavelmente morreu em 497 ou 496 a.C. Ele foi uma figura influente, porém misteriosa da Matemática, pois não existem relatos originais sobre a sua vida e seus trabalhos.

Segundo Tatiana Roque [10] (p.98) "é frequente encontrarmos referências a Pitágoras como um dos primeiros matemáticos gregos", porém, segundo a autora "essa afirmação é hoje questionada pelos historiadores", pois evidências mostram que havia uma matemática grega antes dos pitagóricos.

A Irmandade Pitagórica, uma sociedade fundada por Pitágoras, era formada por seguidores que entediam seus ensinamentos e também contribuíam com novas ideias. Membros desta irmandade se envolveram em matemática, porém não sabemos exatamente de que forma e o quanto. No século V a.C o pensamento geométrico e técnico já estava desenvolvido, porém não temos como saber se os pitagóricos contribuíram para isso.

Tatiana reitera [10] (p.100): "Se existiu uma "matemática pitagórica", tratava-se de uma prática bastante concreta", pois segundo ela "os pitagóricos não separavam os números do mundo físico".

Eles descreviam fenômenos naturais por meio de equações matemáticas, e uma das ligações que perceberam foi a relação fundamental entre a harmonia da música e a harmonia dos números.

Você com certeza já estudou o Teorema de Pitágoras, que diz que " num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos". Mas você sabia que existem evidências de que este famoso teorema já era conhecido e utilizado muito antes da época do próprio Pitágoras?

Há muitas maneiras de demonstrar o Teorema de Pitágoras, e existem até livros totalmente dedicados ao assunto. Nesta atividade vamos trabalhar algumas demonstrações desse teorema e resultados obtidos a partir dele.

Atividade 1:

A primeira demonstração do Teorema de Pitágoras que vamos trabalhar é conhecida como “**prova chinesa”,** pois a figura abaixo é encontrada no livro Chou-Pei Suan-King (ou Ching), escrito na China provavelmente no século XII a.C, e sugere uma demonstração do Teorema de Pitágoras para um triângulo específico (de lados 3, 4 e 5). Vale ressaltar que a prova que vamos realizar corresponde a afirmação: **a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.**

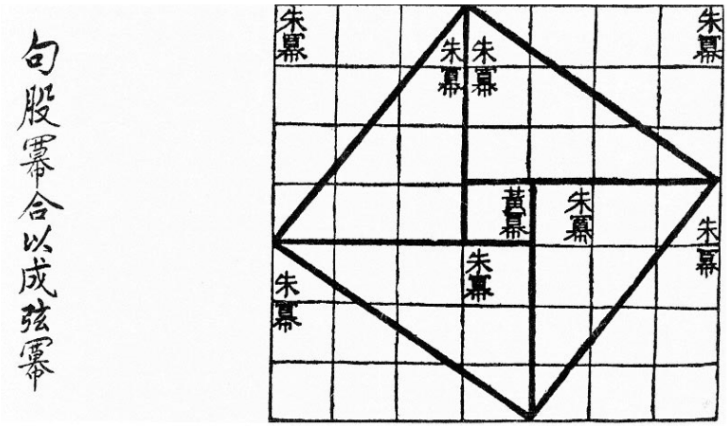


Figura 2.10: Ilustração do livro Chou Pei Suan Ching.

(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras)

Observe a figura a seguir:

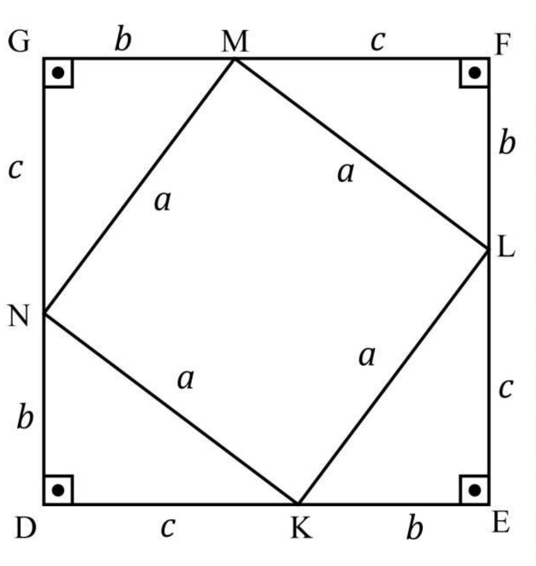


Figura 2.11: Quadrado DEFG. [5] (p.153)

Considere o quadrado DEFG com lados medindo $(b + c)$. São marcados nos lados desse quadrado os pontos K, L, M e N tais que:

KE = LF = MG = ND = b, e DK = EL = FM = GN = c.

Os quatro triângulos NDK, KEL, LFM e MGN são congruentes pelo caso LAL. Desse modo, obtemos que NK = KL = LM = MN = a. Portanto o quadrilátero NKLM é um quadrado, pois seus quatro lados são congruentes e cada um de seus ângulos é reto.

Assim a área do quadrado DEFG é a soma das áreas dos quatro triângulos congruentes com a área do quadrado KLMN.

Agora é com você!

1. Expresse a área do quadrado DEFG em função de b e c. (Lembre-se que o lado do quadrado é $(b + c)$.).

2. Expresse a área do quadrado DEFG como a soma das áreas dos quatro triângulos congruentes com a área do quadrado KLMN. (Obs.: a expressão ficará em função de a, b e c).

3. Iguale as expressões obtidas nos itens 1 e 2, e simplifique o que for possível. O que você obteve?

4. Essa demonstração também pode ser realizada do modo que chamamos “demonstração sem palavras” (Recorte e cole).

a) Recorte os quatro triângulos da figura que está na próxima folha.

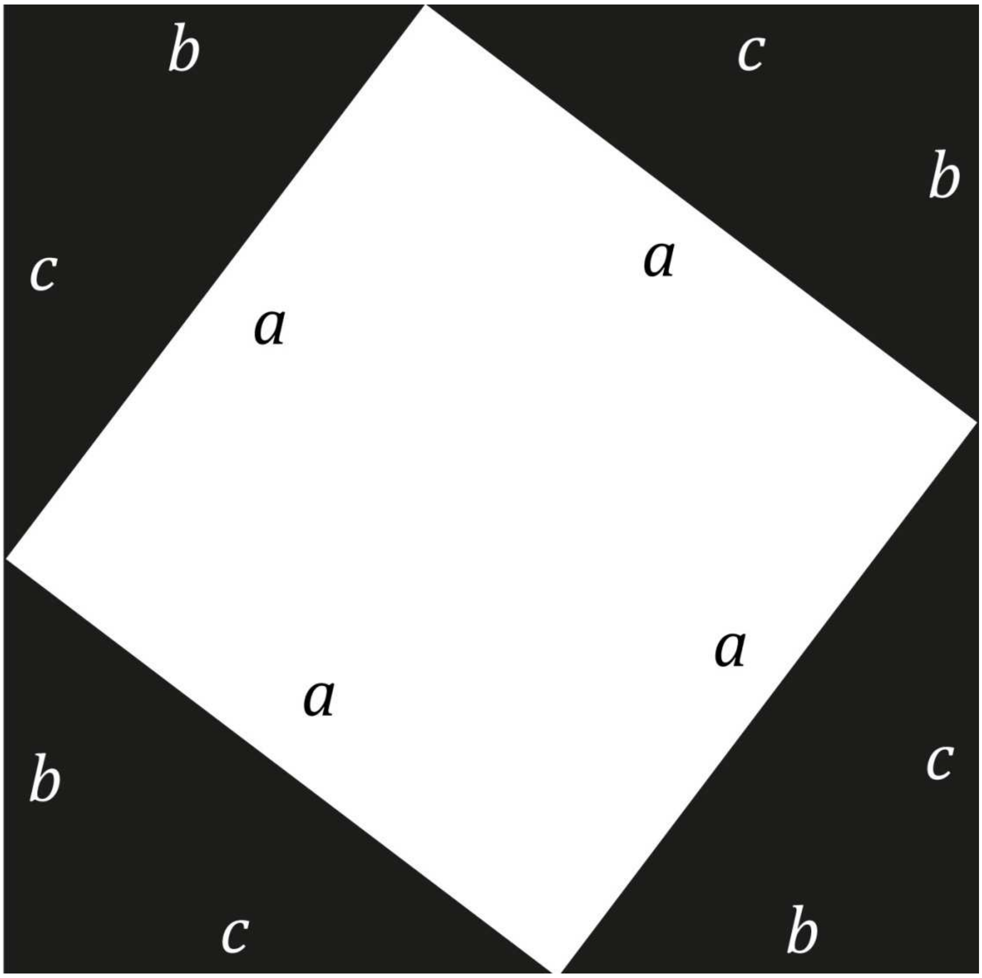


Figura 2.12: Demonstração sem palavras 1.

b) Reorganize e cole no quadrado abaixo os triângulos recortados de modo a obter dois retângulos com dimensões b e c, e dois quadrados: um com lado b e outro com lado c.

Figura 2.13: Demonstração sem palavras 2.

c) Observando as figuras dos itens a e b, o que você conclui?

Atividade 2:

A figura apresentada abaixo é o triângulo retângulo ABC. Em cada um dos lados desse triângulo retângulo foi construído um quadrado.

Mostraremos que a área do quadrado construído sobre o lado c é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os lados a e b.

Agora é com você!

1. Recorte da figura abaixo o quadrado de lado a e os quatro quadriláteros que constituem o quadrado de lado b.

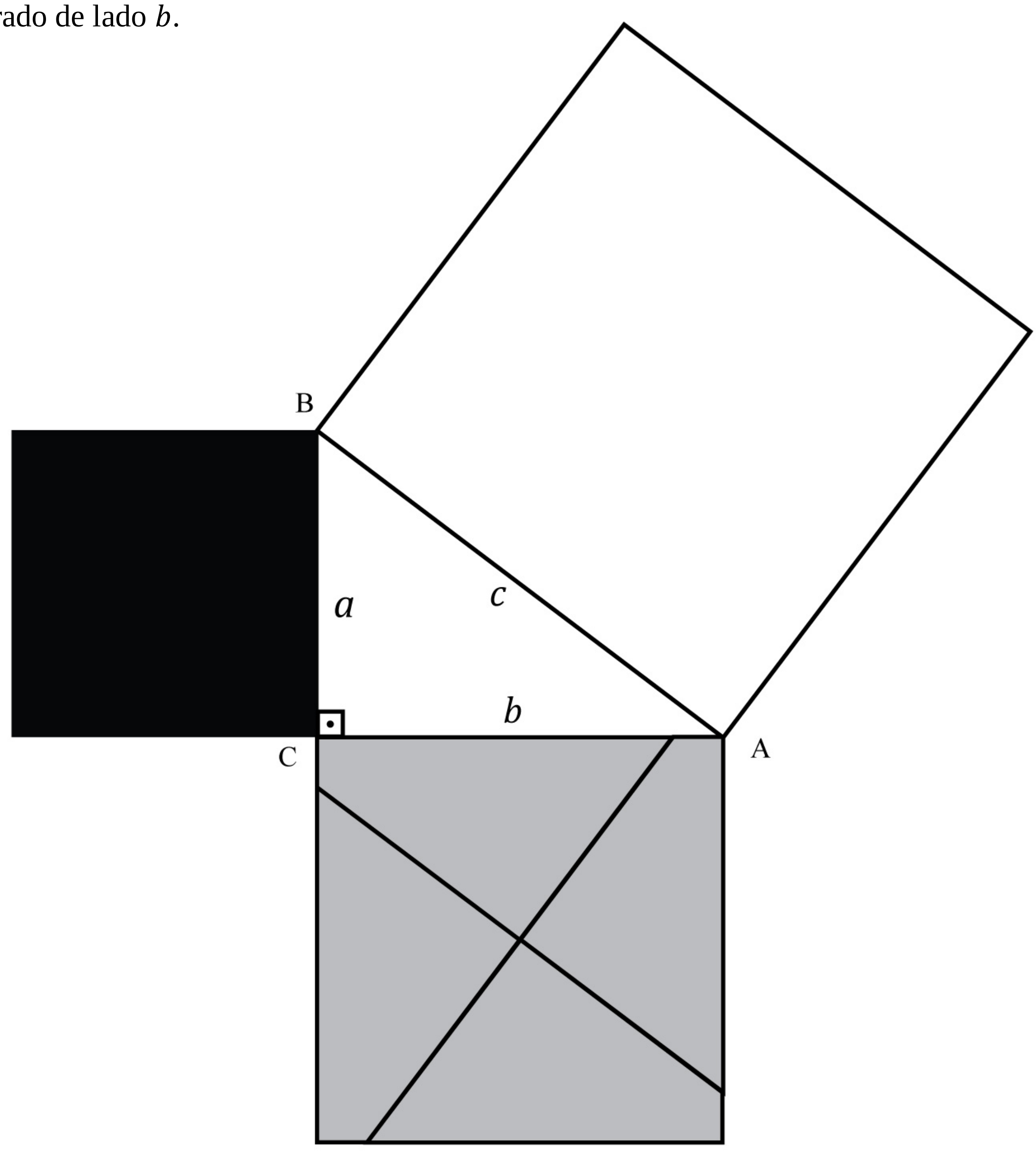


Figura 2.14: Demonstração sem palavras 3.

2. Organize essas 5 peças sobre o quadrado de lado c e cole na figura abaixo:

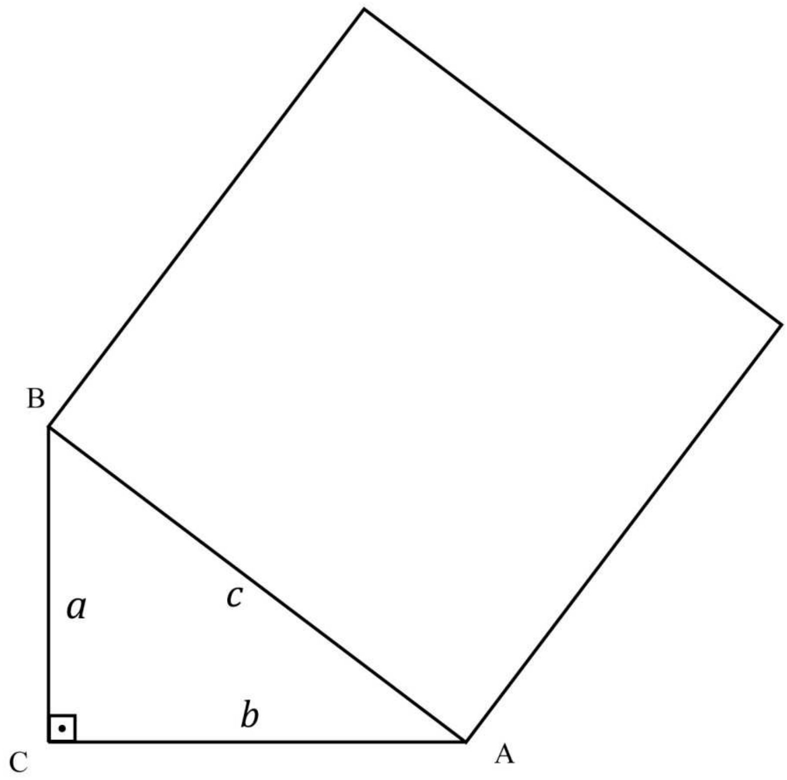


Figura 2.15: Demonstração sem palavras 4.

3. Observando as figuras dos itens 1 e 2, o que você conclui?

Entenda o porquê deu certo!

Os critérios de recorte da figura serão nossas hipóteses na demonstração e as diagonais pontilhadas nos ajudarão na visualização.

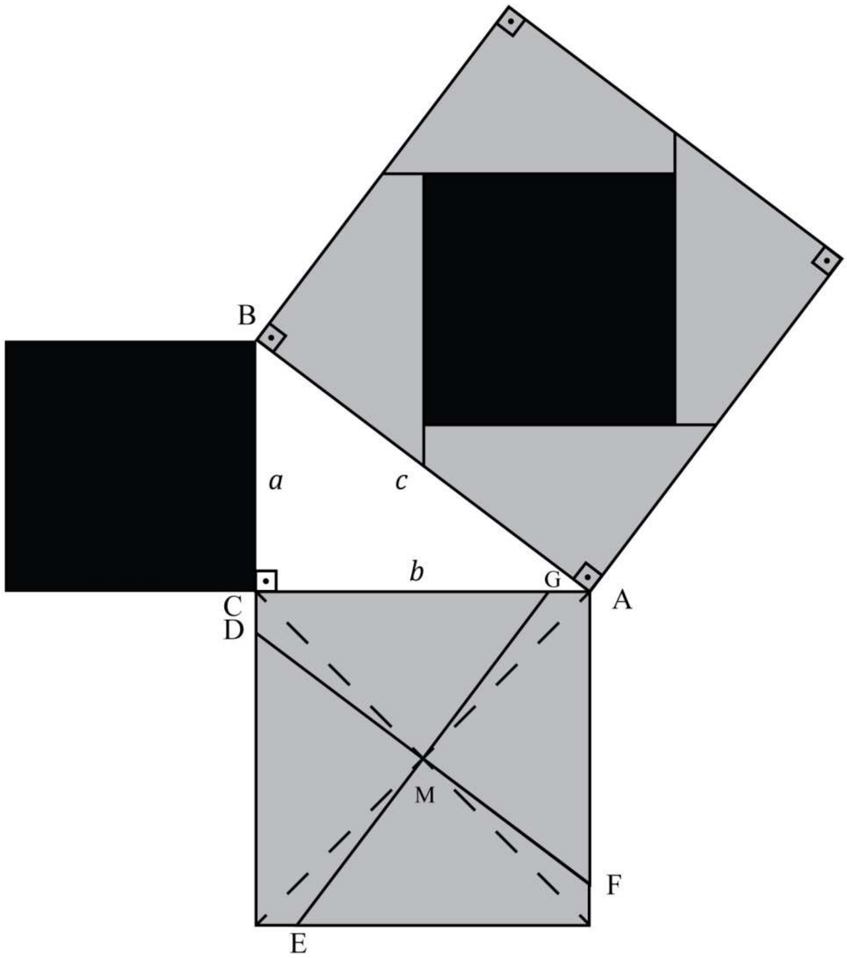


Figura 2.16: Demonstração sem palavras 5.

Considere o quadrado de lado AC e encontre o centro M desse quadrado. Trace retas paralelas aos lados do quadrado de lado AB passando por M, dividindo o quadrado de lado AC em quatro quadriláteros.

Demonstração:

Para montar o quadrado de lado AB reorganizamos o quadrado de lado BC e os quatro quadriláteros que compõe o quadrado de lado AC, colocando o quadrado de lado BC no centro.

Esses quatro quadriláteros que compõe o quadrado de lado AC são congruentes, pois os lados DF e EG resultaram da rotação das diagonais, mantendo a área das figuras.

Observe também que AB = FD e AF = BD pois são lados opostos de um paralelogramo.

Além disso, DM = MF = EM = MG com comprimento igual à metade do lado do quadrado de lado AB.

Como os quatro quadriláteros possuem um ângulo reto, eles se encaixam no quadrado de lado AB, como podemos ver na figura.

Desse modo, o quadrado restante no interior do quadrado de lado AB tem de fato lado BC, pois BD – CD= BC e BD = AF.

Atividade 3:

Use o teorema de Pitágoras para provar que na figura abaixo a área do semicírculo maior é igual à soma das áreas dos outros dois semicírculos, ou seja:

$$\boldsymbol{A_1 = A_2 + A_3}$$

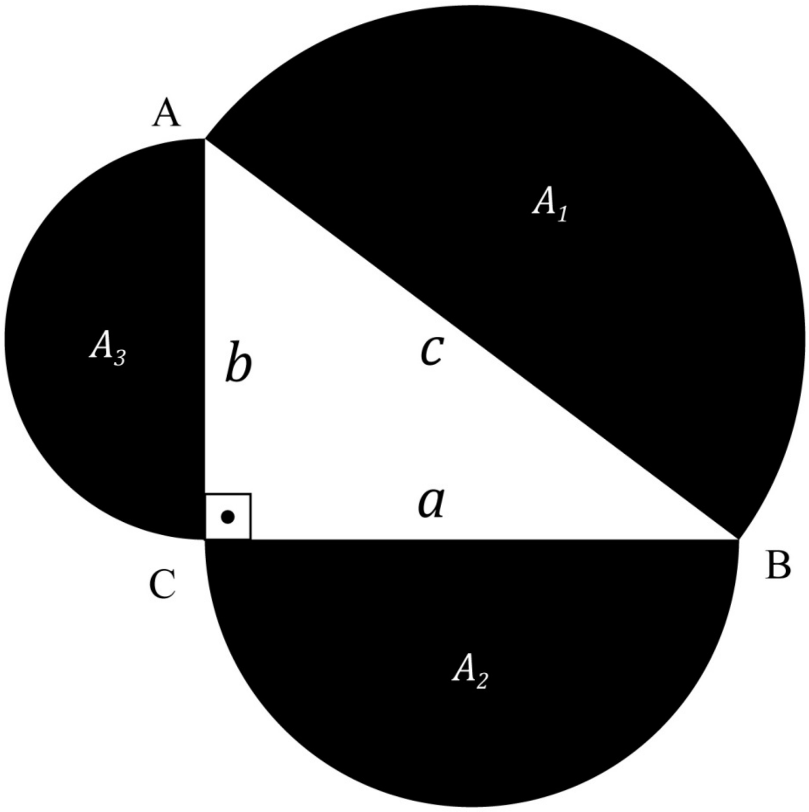


Figura 2.17: Semicírculos sobre os lados do triângulo retângulo ABC.

Atividade 4:

Há muitos problemas que podem ser resolvidos usando o Teorema de Pitágoras. Lembre-se que para qualquer triângulo retângulo:

$$\textbf{(Cateto)}^2 + \textbf{(Cateto)}^2 = \textbf{(Hipotenusa)}^2$$

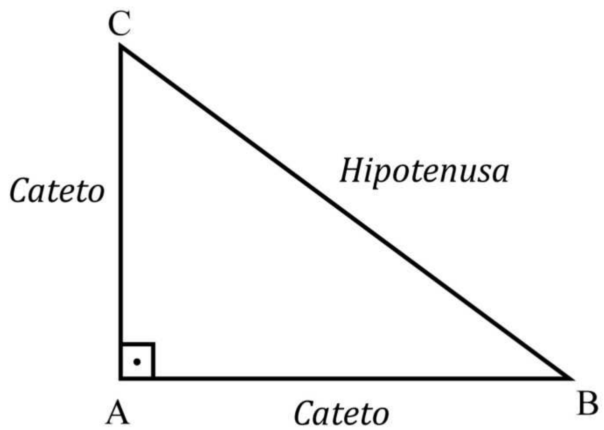
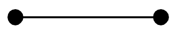
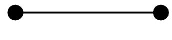


Figura 2.18: Triângulo retângulo ABC.

1. Observe e complete a tabela abaixo:

Considere que o segmento de reta ao lado tem comprimento 1.	 1
Construa, usando o esquadro, um segmento de reta com comprimento igual a 1 perpendicular ao primeiro. Depois ligue as extremidades desses dois segmentos obtendo um triângulo retângulo e usando o teorema de Pitágoras, obtenha o comprimento ***m*** da hipotenusa desse triângulo. ***m*** =	 1

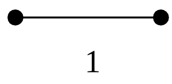
Construa ao lado um segmento de reta de comprimento 1 perpendicular ao de comprimento ***m.*** Ligando as extremidades obtemos um novo triângulo retângulo com hipotenusa ***n.*** Usando o teorema de Pitágoras, obtenha o comprimento ***n*** da hipotenusa desse triângulo. ***n* =**	

Tabela 2.7: Construção de segmentos perpendiculares.

2. Siga este padrão e explique:

a) Como podemos construir um segmento de reta de comprimento $\sqrt{4} = 2$? Faça o desenho.

b) E um segmento de reta de comprimento $\sqrt{5}$? Faça o desenho.

c) Quantos triângulos precisam ser desenhados dessa maneira para construirmos um segmento de reta de comprimento $\sqrt{101}$? Explique seu raciocínio.

d) Com régua e compasso transporte para a reta real os segmentos de comprimentos: 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2 e $\sqrt{5}$, obtidos nos itens anteriores.

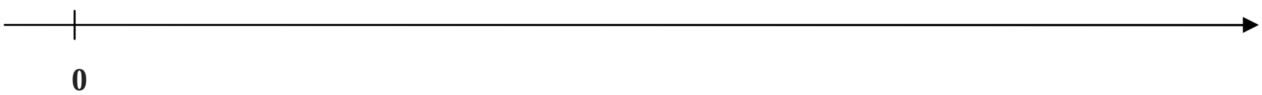


Figura 2.19: Reta real.

2.5.3 – Soluções e Sugestões para o professor

Atividade 1:

1. A = $(b+c)^2$ = $b^2+2bc+c^2$

Alguns alunos podem escrever a área do quadrado apenas como $(b+c)^2$. Neste caso, peça que eles desenvolvam a expressão pois será necessário na resolução do item 3.

2. A = $4.\left(\frac{1}{2}b.c\right)$ + a^2 ⇒ A = $2bc+a^2$

3. $b^2+2bc+c^2$ = $2bc+a^2$ ⇒ b^2+c^2 = a^2. Os alunos devem concluir que é o Teorema de Pitágoras: O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

4. Ao recortar e colar os triângulos conforme solicitado na atividade, os alunos podem obter uma dessas 4 possibilidades:

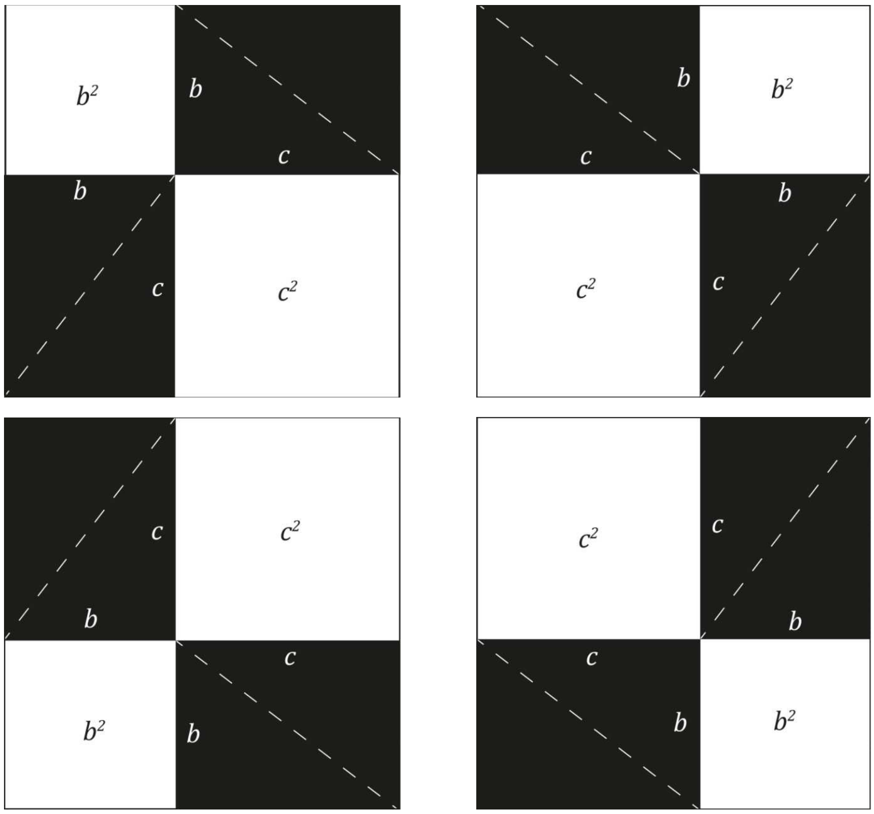


Figura 2.20: Quatro possibilidades de resolução.

Os alunos deverão concluir que a área em branco referente ao quadrado de lado **a** da figura que foi recortada é igual à área em branco da figura obtida, como em qualquer uma das possibilidades acima, obtendo assim: $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras).

Atividade 2:

Após realizar os recortes e colar de modo correto as partes sobre o quadrado de lado c, a figura obtida pelos alunos será:

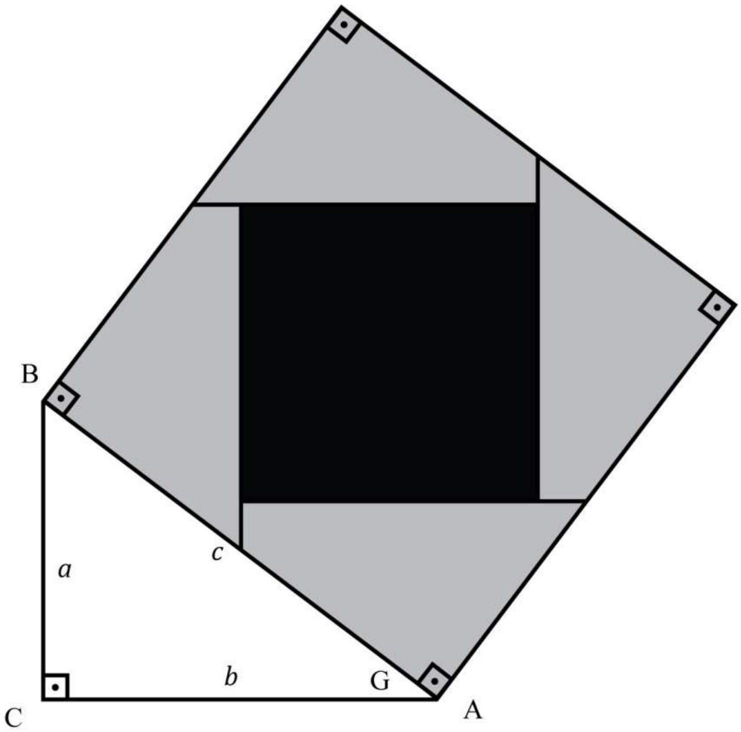


Figura 2.21: Demonstração do Teorema de Pitágoras.

É esperado que os alunos concluam que o quadrado da hipotenusa do triângulo ABC é igual a soma dos quadrados dos catetos, uma vez que a área do quadrado de lado c foi totalmente coberta pelas áreas dos quadrados de lado a e de lado b.

Atividade 3:

Os alunos deverão inicialmente calcular as áreas dos semicírculos ($\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ **e** $\boldsymbol{A_3}$).

Assim:

$$\boldsymbol{A_1} = \frac{1}{2}.\pi.\left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow \boldsymbol{A_1} = \frac{1}{2}.\pi.\frac{c^2}{4} \Rightarrow \boldsymbol{A_1} = \frac{\pi}{8}c^2$$

$$\boldsymbol{A_2} = \frac{1}{2}.\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \boldsymbol{A_2} = \frac{1}{2}.\pi.\frac{a^2}{4} \Rightarrow \boldsymbol{A_2} = \frac{\pi}{8}a^2$$

$$\boldsymbol{A_3} = \frac{1}{2}.\pi.\left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow \boldsymbol{A_3} = \frac{1}{2}.\pi.\frac{b^2}{4} \Rightarrow \boldsymbol{A_3} = \frac{\pi}{8}b^2$$

Após obterem as áreas acima, os alunos devem utilizar o Teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2$) para concluir que :

$$\frac{\pi}{8}c^2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2$$

Ou seja:

$$\boldsymbol{A_1 = A_2 + A_3}\,.$$

Atividade 4:

1.

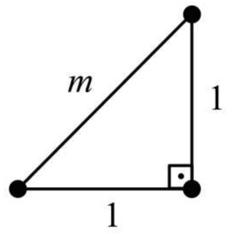
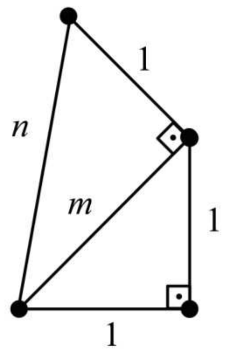
$\boldsymbol{m} = \sqrt{2}$	
$\boldsymbol{n} = \sqrt{3}$	

Tabela 2.8: Resolução tabela 2.7.

2. O professor pode explicar aos alunos que para seguir o padrão e resolver os próximos exercícios, os alunos devem utilizar as medidas dos segmentos da tabela e deverá intervir caso perceba que os alunos não estão utilizando essas medidas.

a) Para obter um segmento de reta de comprimento $\sqrt{4} = 2$, seguindo o padrão da tabela, o aluno deverá construir um segmento de comprimento 1 perpendicular ao de comprimento $\sqrt{3}$. A hipotenusa desse novo triângulo formado terá medida $\sqrt{4} = 2$, conforme as opções abaixo:

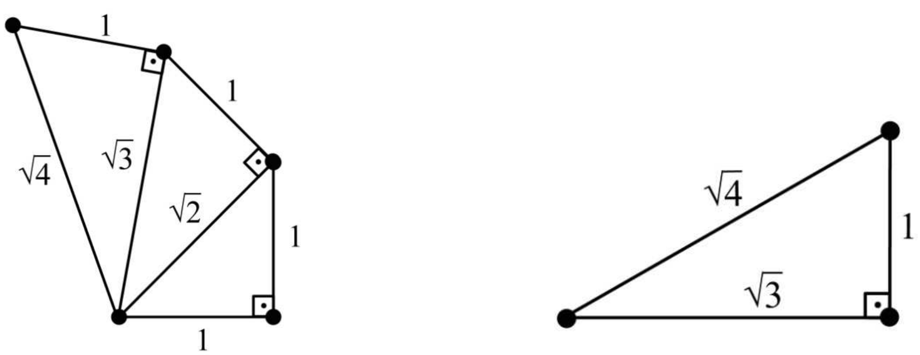


Figura 2.22: Construção de um segmento de comprimento $\sqrt{4}$.

b) Para obter um segmento de reta de comprimento $\sqrt{5}$, seguindo o padrão da tabela, o aluno deverá construir um segmento de comprimento 1 perpendicular ao segmento de comprimento $\sqrt{4} = 2$. A hipotenusa desse novo triângulo formado terá medida $\sqrt{5}$, conforme as opções abaixo:

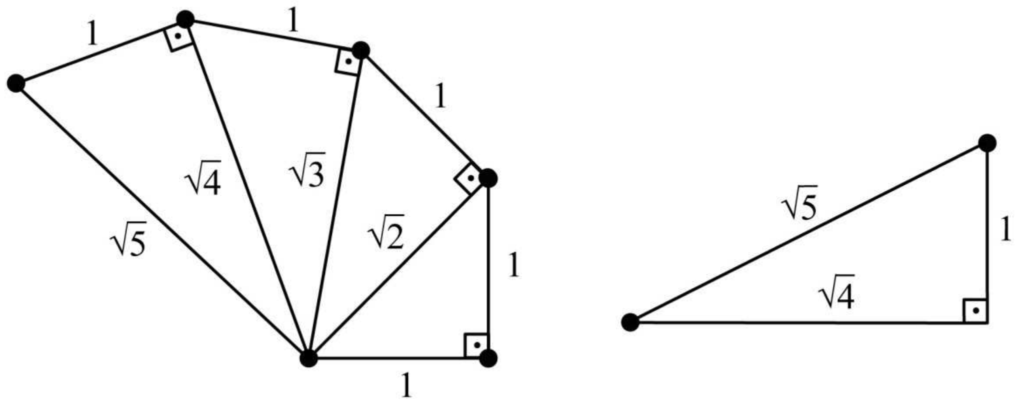


Figura 2.23: Construção de um segmento de comprimento $\sqrt{5}$.

c) Os alunos devem perceber que serão necessários 100 triângulos, pois o primeiro segmento desenhado tem comprimento $\sqrt{2}$; o segundo segmento desenhado tem comprimento $\sqrt{3}$; o terceiro segmento desenhado tem comprimento $\sqrt{4}$; o quarto segmento desenhado tem comprimento $\sqrt{5}$. Seguindo esse padrão, o n-ésimo segmento terá comprimento $\sqrt{n+1}$, portanto, o 100º segmento terá comprimento $\sqrt{101}$.

d) Usando a unidade de medida da tabela, os alunos deverão transportar as medidas dos segmentos, como na figura abaixo:

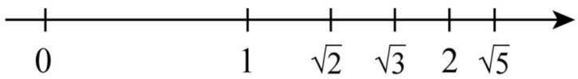


Figura 2.24: Transporte da medida dos segmentos.

Alerte os alunos que o transporte dos segmentos deve ser sempre a partir do 0.

2.6 - Atividade VI: Números Figurados

2.6.1- Guia do Professor

Objetivo: Apresentar uma relação entre a aritmética e a geometria. Obter uma fórmula para a soma dos n primeiros números inteiros positivos.

Nível: Ensino Fundamental II (a partir do 7º ano) e Ensino Médio.

Material: Papel e lápis.

Tempo previsto: 3h20 min.

Quando usar: Esta atividade pode ser aplicada em qualquer momento do ano letivo que o professor achar conveniente.

Pré-requisitos: Conhecimento de expressões algébricas.

Como usar: Distribua a "Folha do Aluno". Os alunos podem realizar esta atividade individualmente ou em grupos.

Descrição: A atividade é iniciada com uma breve introdução sobre os números figurados.

Os exercícios de 1 a 3 referem-se aos números triangulares e de 4 a 6 aos números quadrados. Nos exercícios de 7 a 11 os alunos vão relacionar os números triangulares e números quadrados. As questões 12 a 15 referem-se aos números retangulares e nas questões 16 e 17 os alunos deverão relacionar os números retangulares com os números triangulares.

Depois apresentamos uma fórmula para o número de pontos de um número triangular a partir da relação desses com os números retangulares obtida nas questões 15 e 17.

Neste momento o professor do Ensino Médio pode aproveitar para falar sobre a soma dos n primeiros números inteiros de uma progressão aritmética.

Material de apoio: Se desejar aprofundar o assunto sobre conjecturas, o professor pode reproduzir o áudio **"$\mathbf{3x+1}$"**, que pode ser encontrado no portal do M³ Matemática

Multimídia, que contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp ou pelo link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1328 (Acesso em: 20/05/2016).

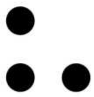
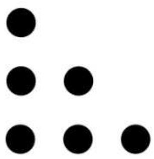
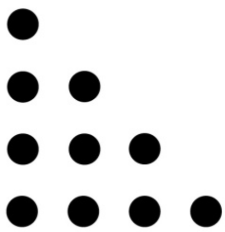
Esse áudio apresenta a conjectura do problema **“$3x + 1$”**, e discute algumas curiosidades em torno dela para mostrar que, mesmo parecendo verdade, os matemáticos só consideram verdadeiro aquilo que é provado lógica e matematicamente.

2.6.2- Folha do Aluno

Os números figurados são formados por um conjunto de pontos equidistantes que compõe uma figura geométrica, como: triângulos, quadrados e retângulos.

Esses números já foram estudados pelos pitagóricos e, segundo Tatiana Roque [10] (p.104) “Os números figurados dos pitagóricos eram constituídos de uma multiplicidade de pontos que não eram matemáticos e que remetiam a elementos discretos: pedrinhas organizadas segundo uma determinada configuração.”.

1. Examine os quatro primeiros **números triangulares** na tabela abaixo. Em seguida, preencha a tabela para o quinto e sexto números triangulares.

	Número triangular	**Número de pontos**
$n = 1$		1
$n = 2$		$1 + 2 = 3$
$n = 3$		$1 + 2 + 3 = 6$
$n = 4$		$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$n = 5$		
$n = 6$		

Tabela 2.9: Números triangulares.

2. Qual é o número de pontos do 10º número triangular?

3. Observe a tabela e responda**:** Se n é um número natural e $n \geq 1$, qual é o número de pontos do n -ésimo número triangular?

4. Examine os quatro primeiros **números quadrados** na tabela abaixo. Em seguida, preencha a tabela para o quinto e sexto números quadrados.

	Número quadrado	**Número de pontos**
$n = 1$	●	$1^2 = 1$
$n = 2$	● ● ● ●	$2^2 = 4$

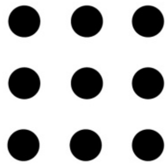
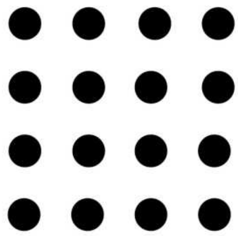
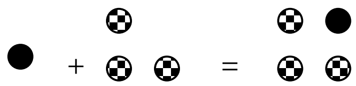
$n = 3$		$3^2 = 9$
$n = 4$		$4^2 = 16$
$n = 5$		
$n = 6$		

Tabela 2.10: Números quadrados.

5. Qual é o número de pontos do 10º número quadrado?

6. Observe a tabela e responda**:** Se n é um número natural e $n \geq 1$, qual é o número de pontos do n -ésimo número quadrado?

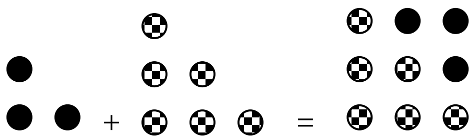
Veja o que acontece quando somamos o 1º e 2º números triangulares:



$1 + 3 = 4 = 2^2$, que é o 2º número quadrado.

Figura 2.25: Soma do 1º e 2º números triangulares.

Adicionando o 2º e 3º números triangulares, obtemos:



$3 + 6 = 9 = 3^2$, que é o 3º número quadrado.

Figura 2.26: Soma do 2º e 3º números triangulares.

7. Seguindo os exemplos anteriores, represente a soma do 3º e 4º números triangulares. O que você obtém?

8. Em matemática, uma conjectura é um palpite. Escreva uma conjectura sobre a soma de dois números triangulares consecutivos quaisquer.

9. Use imagens para exemplificar a sua conjectura para mais dois pares de números triangulares consecutivos.

10. Qual é o número de pontos da soma do 10º e do 11º números triangulares?

11. Qual é o número de pontos da soma do 100º e do 101º números triangulares?

Os **números retangulares** tem exatamente uma coluna a mais do que o número de linhas. O primeiro número retangular tem uma linha e duas colunas. O próximo número retangular tem exatamente duas linhas e três colunas.

12. Examine os quatro primeiros números retangulares na tabela abaixo. Em seguida, preencha a tabela para o quinto e sexto números retangulares.

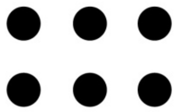
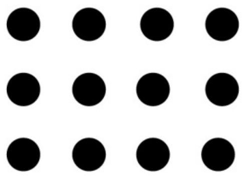
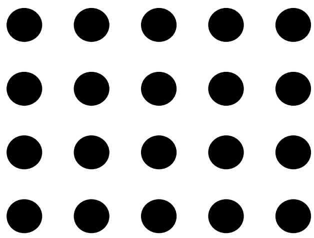
	Número retangular	**Número de pontos**
$n = 1$		$1 . 2 = 2$
$n = 2$		$2 . 3 = 6$
$n = 3$		$3 . 4 = 12$
$n = 4$		$4 . 5 = 20$
$n = 5$		
$n = 6$		

Tabela 2.11: Números retangulares.

13. Qual é o número de pontos do 10º número retangular?

14. Qual é o número de pontos do 100º número retangular?

15. Observe a tabela e responda**:** Se n é um número natural e $n \geq 1$, qual é o número de pontos do n-ésimo número retangular?

Veja o que acontece quando somamos o 2º número triangular a ele mesmo:

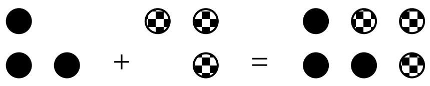
 $3 + 3 = 6$, que é o 2º número retangular.

Figura 2.27: Soma do 2º número triangular a ele mesmo.

Adicionando o 3º número triangular a ele mesmo, obtemos:

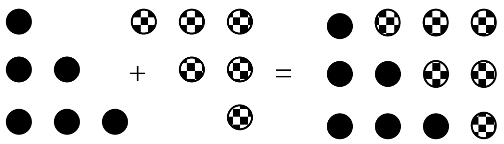
 $6 + 6 = 12$, que é o 3º número retangular.

Figura 2.28: Soma do 3º número triangular a ele mesmo.

16. Seguindo os exemplos anteriores, represente a soma do 4º número triangular a ele mesmo. O que você obtém?

17. Encontre uma relação entre cada número retangular e o número triangular associado a ele. Em seguida, escreva uma conjectura sobre esta relação entre o n-ésimo número retangular e o n-ésimo número triangular.

De **15** e **17** concluímos que o número de pontos do n-ésimo número triangular é igual a $\frac{n.(n+1)}{2}$ ou seja, que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$, em que n é um número natural e $n \geq 1$.

2.6.3 – Soluções e Sugestões para o professor

1.

	Número triangular	**Número de pontos**
$n = 5$	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
$n = 6$	● ●	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

Tabela 2.12: Quinto e sexto números triangulares.

2. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ pontos.

3. $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

4.

	Número quadrado	**Número de pontos**
$n = 5$	● ●	$5^2 = 25$

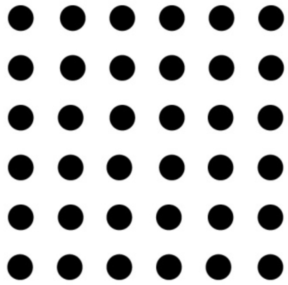
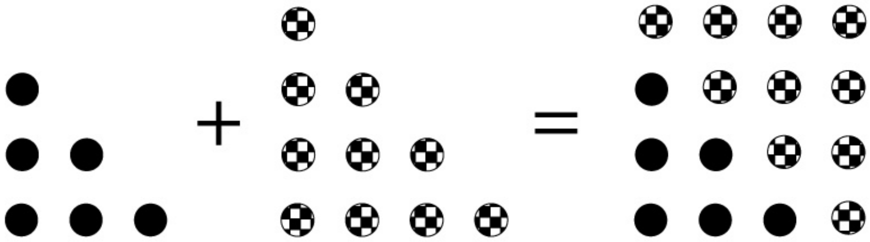
$n = 6$		$6^2 = 36$

Tabela 2.13: Quinto e sexto números quadrados.

5. $10^2 = 100$.

6. n^2.

7.

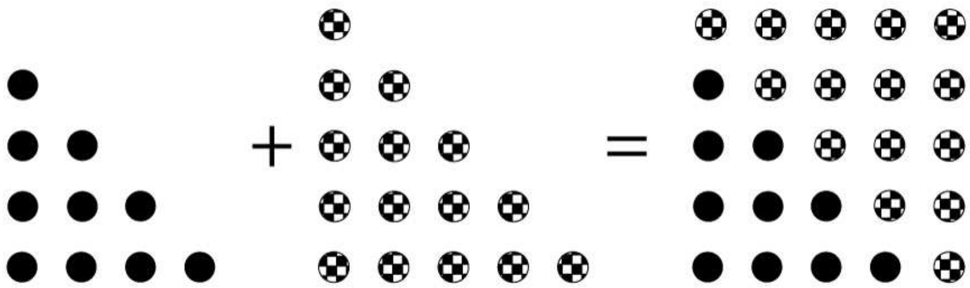


3º número triangular 4º número triangular $16 = 4^2$ (4º número quadrado).

Figura 2.29: Soma do 3º e 4º números triangulares.

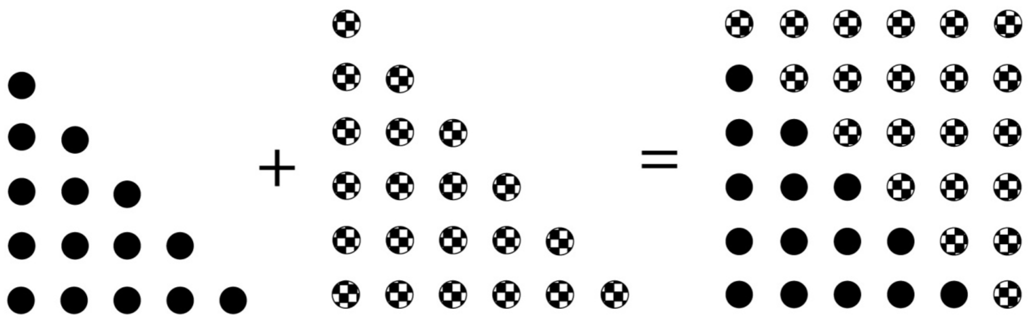
8. A soma de dois números triangulares consecutivos é um número quadrado.

9.



4º número triangular 5º número triangular $25 = 5^2$ (5º número quadrado).

Figura 2.30: Soma do 4º e 5º números triangulares.



5º número triangular 6º número triangular $36 = 6^2$(6º número quadrado).

Figura 2.31: Soma do 5º e 6º números triangulares.

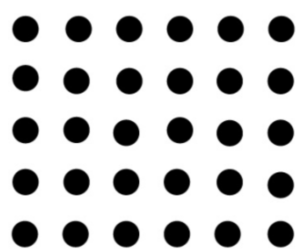
10. 10º número triangular + 11º número triangular = $11^2 = 121$.

11. 100º número triangular + 101º número triangular = $101^2 = 10201$.

Obs.: Se estiver aplicando a atividade com alunos do Ensino Médio, o professor pode pedir para os alunos escreverem uma expressão para a soma do n-ésimo com o $(n+1)$-ésimo números triangulares, ou seja:

$$(1+2+3+\cdots+n) + \big(1+2+3+\cdots+n+(n+1)\big) = (n+1)^2.$$

12.

	Número retangular	**Número de pontos**
$n = 5$		$5.6 = 30$

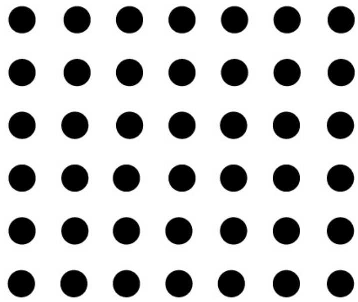
$n = 6$		$6.7 = 42$

Tabela 2.14 : Quinto e sexto números retangulares.

13. $10.11 = 110$ pontos.

14. $100.101 = 10100$ pontos.

15. $n.(n + 1)$ pontos.

16.

$10 + 10 = 20$, que é o 4º número retangular.

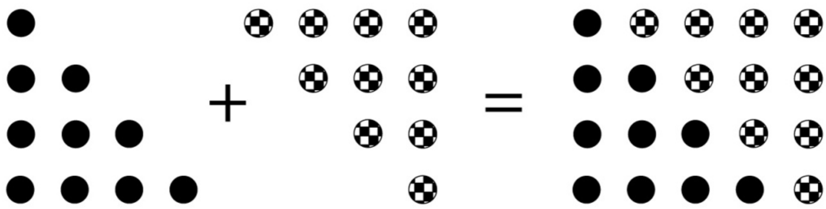


Figura 2.32: Soma do 4º número triangular a ele mesmo.

17. Conjectura: O n-ésimo número retangular é o dobro do n-ésimo número triangular. Ou: O n-ésimo número triangular é a metade do n-ésimo número retangular.

2.7 - Atividade VII: Equações Quadráticas

2.7.1- Guia do Professor

Objetivo: Trabalhar com equações quadráticas a partir de um contexto histórico utilizando duas proposições de Euclides. Obter uma fórmula para resolver equações quadráticas quaisquer.

Nível: Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Material: Papel e lápis.

Tempo previsto: 3h20 min.

Quando usar: Esta atividade pode ser aplicada para introduzir equações quadráticas.

Pré-requisitos: Conhecimento de expressões algébricas.

Como usar: Distribua a “Folha do Aluno”. Os alunos podem realizar esta atividade individualmente ou em grupos.

Descrição: A atividade é iniciada com um texto sobre equações quadráticas e logo após é apresentada a Proposição 5 do Livro II do *Elementos de Euclides* (II-5).

Os alunos podem apresentar dificuldade em entender o enunciado desta proposição, uma vez que a linguagem utilizada por Euclides difere da linguagem que utilizamos atualmente. Por exemplo, quando ele escreve: “Se uma linha reta”, reescrevemos como “Se um segmento de reta”. Desta forma, aconselha-se que o professor leia com os alunos esta primeira parte da atividade. É apresentado na atividade uma “tradução” desta proposição. O professor pode reproduzir o desenho do segmento AB na lousa, e explicar cada um dos elementos da proposição.

Depois da “tradução” é apresentada a prova desta proposição. Acompanhe os alunos em cada passo desta prova, certificando-se que eles entenderam como foi provada a proposição. Se necessário reproduza o desenho utilizado nesta demonstração na lousa.

Após ser provada a Proposição II-5 , ela é traduzida algebricamente. Desse modo é obtida uma fórmula, primeiramente, para a resolução de equações quadráticas na forma: $\boldsymbol{x^2 + c = bx}$, com b e c números reais positivos.

Proponha aos alunos que resolvam os Exercícios- Parte 1. Se necessário resolva um ou dois itens para que os alunos entendam como deve ser aplicada a fórmula. O professor também pode propor que os exercícios sejam resolvidos como tarefa para casa, caso não disponha das 4 aulas para aplicar esta atividade.

Se perceber que os alunos compreenderam essa primeira parte da atividade, o professor pode pedir que eles, em grupos, realizem a segunda parte referente à Proposição 6 do Livro II (II-6). Nesta parte da atividade será obtida uma fórmula para a resolução de equações quadráticas na forma: $\boldsymbol{x^2 + bx = c}$, com b e c números reais positivos.

Na terceira parte da atividade, será apresentado um procedimento que permitirá que os alunos resolvam equações quadráticas para quaisquer números reais b e c.

Após obter a fórmula no item c, comente com alunos que esta fórmula é conhecida como Fórmula de Bhaskara aparentemente apenas no Brasil. [8]

Material de apoio: Se desejar estender o assunto sobre Equações Quadráticas, o professor pode reproduzir o vídeo **"Esse tal de Bhaskara"**, que pode ser encontrado no YouTube, no link: https://www.youtube.com/watch?v=dw6wD5bP5vw (Acesso em: 23/05/2016) ou no link do M³: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1097 (Acesso em: 23/05/2016).

2.7.2- Folha do Aluno

Problemas envolvendo equações quadráticas já apareciam em textos escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos atrás. "Nesses textos o que se tinha era uma receita (escrita em prosa, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos." [8]

Nesta atividade vamos trabalhar a resolução de equações quadráticas a partir de duas proposições do Livro II do *Elementos* de Euclides.

Livro II, Proposição 5 (II-5) do *Elementos* de Euclides:

"Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais e em outras duas desiguais, o retângulo compreendido pelas partes desiguais, juntamente com o quadrado da parte entre as duas seções, será igual ao quadrado da metade da linha proposta." [9]

Vamos explicar esta proposição de modo mais compreensível. Considere o segmento de reta AB. Sejam C o ponto médio de AB e D algum ponto entre C e B, como na figura abaixo:

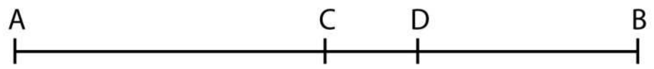


Figura 2.33: Segmento de reta AB.

Ou seja, AB foi dividido em dois segmentos iguais AC e CB e em dois segmentos desiguais AD e DB. Assim temos "o retângulo compreendido pelas partes desiguais", isto é, o retângulo de lados AD e DB, "o quadrado da parte entre as duas seções", isto é, o quadrado de lado CD e "o quadrado da metade da linha proposta", ou seja, o quadrado de lado BC.

A proposição afirma que a soma das áreas do retângulo de lados AD e DB e o quadrado de lado CD é igual à área do quadrado de lado BC. Para provar isso, precisamos adicionar quadrados e retângulos ao segmento AB, como na figura a seguir:

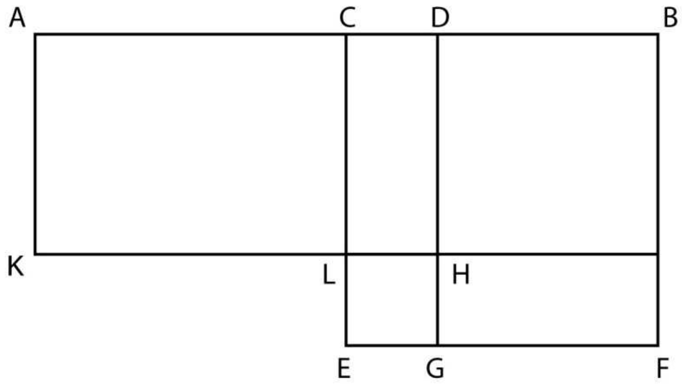


Figura 2.34: Figura da Proposição II-5.

Para construir o retângulo de lados AD e DB, tomamos o lado AK de modo que AK = DB, obtendo o retângulo ADHK. Para desenhar o quadrado de lado CD, prolongamos DH e marcamos sobre ele o ponto G, de tal modo que HG = CD. Como LH = CD, obtemos o quadrado LHGE.

Finalmente, uma vez que BC = CD + DB, temos:

$$CE = CL + LE = AK + HG = DB + CD = BC.$$

Portanto, BCEF é um quadrado de lado BC.

Para provar a Proposição II-5 de Euclides, é mais fácil enumerar os cinco retângulos como na figura abaixo:

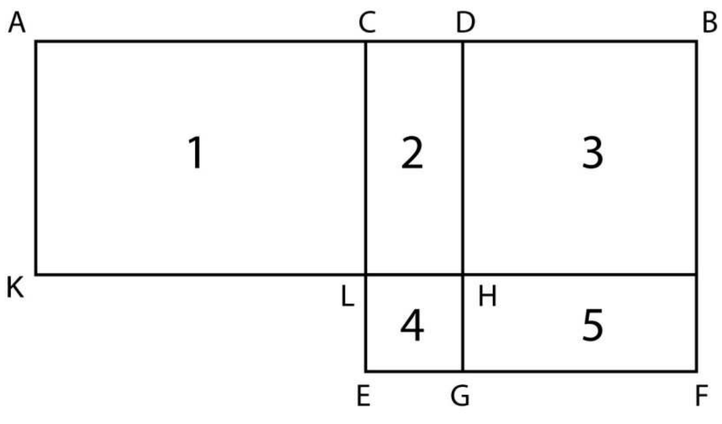


Figura 2.35: Figura enumerada da Proposição II-5.

O retângulo de lados AD e DB consiste nas regiões enumeradas 1 e 2; o quadrado de lado CD é a região 4, e o quadrado de lado BC é composto por quatro regiões: 2, 3, 4 e 5.

Devemos mostrar que a soma das áreas das regiões 1, 2 e 4 é igual à soma das áreas das regiões 2, 3, 4 e 5. Observando a figura vemos que basta mostrar que a área da região 1 é igual a soma das áreas das regiões 3 e 5.

A região 1 é um retângulo de lados AC e AK. As regiões 3 e 5 juntas, formam um retângulo de lados DB e BF. Sabemos que AK = DB, por construção. Além disso, BF = BC, portanto AC = BF. Daí as áreas dos dois retângulos são de fato iguais e a Proposição II-5 de Euclides foi provada.

Este resultado é importante no processo algébrico de resolver equações quadráticas.

Agora, vamos desenvolver a partir da Proposição II-5 o processo de resolução de equações quadráticas da forma $\boldsymbol{x^2 + c = bx}$, com b e c números reais positivos. Essa proposição pode ser traduzida algebricamente da seguinte forma:

Suponha que AB = b. Logo CA = CB = $\frac{b}{2}$. Seja DB = x. Então temos: AK = x, AD = $b - x$, e CD = $\frac{b}{2} - x$. A área do retângulo ADHK é $(b - x).x$, a área do quadrado LHGE é $\left(\frac{b}{2} - x\right)^2$, e a área do quadrado BCEF é igual a $\left(\frac{b}{2}\right)^2$**.** A Proposição II-5 afirma algebricamente, que:

$$\boldsymbol{(b - x).x + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad (*)}$$

Vamos usar **(*)** para resolver a equação quadrática: $x^2 + 24 = 10x$. Podemos reescrever a equação como, $10x - x^2 = 24$ ou $(10 - x).x = 24$. Tomando $b = 10$ e o valor 24 para $(10 - x).x$ em **(*)**, temos:

$$24 + (5 - x)^2 = 25$$

$$(5 - x)^2 = 25 - 24$$

$$(5 - x)^2 = 1$$

Assim, $(5 - x) = 1$, portanto $x = 4$ é a solução desta equação.

Observe que se essa equação não estiver relacionada a um contexto geométrico, como no exemplo acima, então podemos tomar $(5 - x) = -1$ e portanto $x = 6$ também é uma solução desta equação.

Podemos aplicar esse método para o caso geral: $\boldsymbol{x^2+c=bx}$, com b e c números reais positivos. Como no exemplo, primeiro reescrevemos a equação como $bx-x^2=c$, ou, $(b-x).x=c$. Substituindo em **(*)**:

$$c+\left(\frac{b}{2}-x\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Podemos reescrever como:

$$\left(\frac{b}{2}-x\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2-c\ .$$

Temos:

$$\left(\frac{b}{2}-x\right)=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\mathrm{c}}\ .$$

Ou, finalmente:

$$\boldsymbol{x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\mathrm{c}}}\ . \qquad \textbf{(1)}$$

Exercícios- Parte 1:

Use a fórmula obtida para resolver no conjunto dos números reais as equações:

a) $x^2+15=8x$

b) $x^2+3=4x$

c) $x^2+24=11x$

d) $x^2+5=10x$

e) $x^2+7=9x$

f) $x^2-6x+8=0$

g) $x^2+6=2x$ (O que acontece neste caso? Generalize.)

E se a equação for $\boldsymbol{x^2+bx=c}$, com b e c números reais positivos, como podemos resolvê-la?

Observe a Proposição II-6 do *Elementos* de Euclides:

"Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais e uma linha reta é adicionada a ela, o retângulo compreendido pela linha reta com a linha reta adicionada e a linha reta adicionada, juntamente com o quadrado da metade, será igual ao quadrado da metade da linha proposta com a linha reta adicionada."

Vamos explicar esta proposição de modo mais compreensível. Considere o segmento de reta AB. Sejam C o ponto médio de AB e BD o segmento de reta adicionado a AB, como na figura abaixo:

Figura 2.36: Segmento de reta AB.

Ou seja, AB foi dividido em dois segmentos iguais: AC e BC. Em seguida, um novo segmento BD é adicionado a AB. Observando a figura, responda:

1. Temos "o retângulo compreendido pela linha reta com a linha reta adicionada e a linha reta adicionada". Quais são os lados desse retângulo?

2. Em seguida, temos "o quadrado da metade". Qual é o lado desse quadrado?

3. Finalmente, temos o "quadrado da metade da linha proposta com a linha reta adicionada". Qual é o lado desse quadrado?

A proposição afirma que a soma das áreas das duas primeiras destas regiões é igual à área da última região. Para provar isso, precisamos adicionar quadrados e retângulos ao segmento AD, e para facilitar a prova vamos enumerar as regiões, como na figura abaixo:

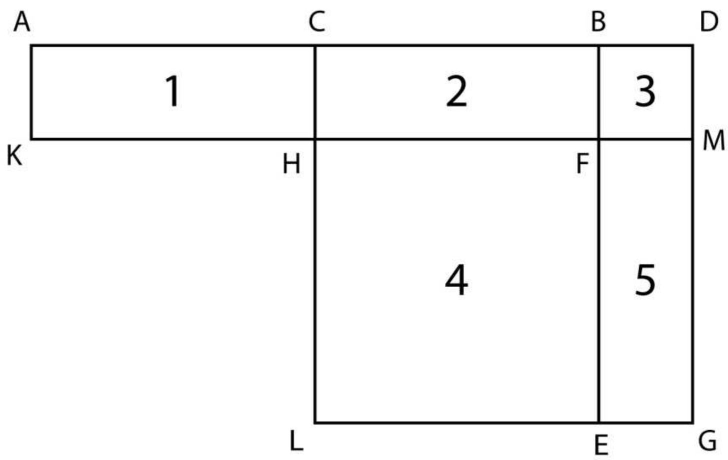


Figura 2.37: Figura enumerada da Proposição II-6.

Observando a figura, responda:

4. A soma das áreas das duas primeiras regiões indicadas na proposição é a soma das áreas de quais regiões numeradas?

5. O último quadrado consiste em quais regiões numeradas?

6. Prove a Proposição II-6.

Agora vamos desenvolver a partir da Proposição II-6 o processo de resolução de equações quadráticas da forma $\boldsymbol{x^2 + bx = c}$, com b e c números reais positivos. Esta proposição pode ser traduzida algebricamente da seguinte forma:

Suponha que AB = b. Logo AC = BC = $\frac{b}{2}$. Seja DB = x. A Proposição II-6 afirma algebricamente, que:

$$\boldsymbol{(b + x).x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2} \quad \textbf{(**)}$$

7. Utilize **(**)** para resolver a equação quadrática: $x^2 + 10x = 24$.

Dica: Reescreva a equação como $(10 + x).x = 24$. Tome $b = 10$ e o valor 24 para $(10 + x).x$ em **(**)**.

Podemos aplicar esse método para o caso geral: $\boldsymbol{x^2 + bx = c}$, com b e c números reais positivos. Como no exemplo, podemos reescrever a equação como $(b + x).x = c$. Substituindo em **(**)**:

$$c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2.$$

Temos:

$$\frac{b}{2} + x = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \mathrm{c}}\,.$$

Ou, finalmente

$$\boldsymbol{x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \mathbf{c}}}\,. \quad \textbf{(2)}$$

Exercícios- Parte 2:

Use a fórmula obtida para resolver no conjunto dos números reais as equações:

a) $x^2 + 4x = 45$

b) $x^2 + 8x = 9$

c) $x^2 + 5x = 24$

d) $x^2 + 6x = 18$

e) $x^2 + 4x = 3$

E para resolvermos a equação: $x^2 + 10x + 24 = 0$?

Repare que se reescrevermos esta equação como no exemplo da Proposição II-5 obtemos: $x^2 + 24 = -10x$. Neste caso $b = -10$, e como a fórmula **(1)** é válida apenas para b e c números reais positivos, não podemos determinar as raízes desta equação por essa fórmula.

O mesmo acontece se reescrevermos a equação conforme proposto na questão 7 da Proposição II-6, pois teríamos: $x^2 + 10x = -24$ e neste caso $c = -24$, portanto não podemos usar a fórmula **(2)**.

Devemos então encontrar uma fórmula que possibilite resolver equações para b e c números reais negativos.

Observe que as equações $\boldsymbol{x^2 + c = bx}$ e $\boldsymbol{x^2 + bx = c}$ foram reduzidas numa equação da forma $(x + e)^2 + f = 0$, em que e e f são constantes à determinar.

Para resolvermos a equação: $x^2 + 10x + 24 = 0$, vamos reduzi-la a seguinte forma: $(x + e)^2 + f = 0$, em que e e f são constantes à determinar. Assim:

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$x^2 + 10x + 24 = (x + e)^2 + f$$

$$x^2 + 10x + 24 = x^2 + 2ex + e^2 + f$$

Obtemos: $$2e = 10 \quad \text{e} \quad e^2 + f = 24$$

$$e = 5 \quad \text{e} \quad 25 + f = 24$$

$$f = -1$$

Logo: $$x^2 + 10x + 24 = (x + 5)^2 - 1$$

E assim: $$(x + 5)^2 - 1 = 0$$

$(x + 5)^2 = 1$. Portanto $x = -6$ ou $x = -4$.

Exercícios - Parte 3:

a) Resolva, no conjunto dos números reais, a equação: $x^2 - 10x - 24 = 0$, seguindo o procedimento do exemplo anterior.

b) Obtenha uma fórmula para resolver a equação: $x^2 + bx + c = 0$, para quaisquer valores reais de b e c, seguindo o procedimento do exemplo anterior.

c) Obtenha uma fórmula para resolver a equação: $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, para quaisquer valores reais de b e c, seguindo o procedimento do exemplo anterior. Dica: Divida todos os coeficientes por a.

2.7.3 – Soluções e Sugestões para o professor

Exercícios- Parte 1:

$$\boldsymbol{x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}}$$

a) $x^2 + 15 = 8x$

Temos $b = 8$ e $c = 15$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = 4 \pm \sqrt{16 - 15}$

$x = 4 \pm 1$

$x = 3$ ou $x = 5$.

b) $x^2 + 3 = 4x$

Temos $b = 4$ e $c = 3$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$

$x = 2 \pm 1$

$x = 1$ ou $x = 3$.

c) $x^2 + 24 = 11x$

Temos $b = 11$ e $c = 24$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 24}$

$x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121-96}{4}}$

$x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$

$x = \frac{11}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x = \frac{6}{2} = 3$ ou $x = \frac{16}{2} = 8$.

d) $x^2 + 5 = 10x$

Temos $b = 10$ e $c = 5$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = 5 \pm \sqrt{25 - 5}$

$x = 5 \pm \sqrt{20}$

$x = 5 - \sqrt{20}$ ou $x = 5 + \sqrt{20}$.

e) $x^2 + 7 = 9x$

Temos $b = 9$ e $c = 7$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 7}$

$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81-28}{4}}$

$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{53}{4}}$

$x = \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{53}}{2}$

$x = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{53}}{2}$ ou $x = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{53}}{2}$.

f) $x^2 - 6x + 8 = 0$

$x^2 + 8 = 6x$

Temos $b = 6$ e $c = 8$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = 3 \pm \sqrt{9 - 8}$

$x = 3 \pm 1$

$x = 2$ ou $x = 4$.

g) $x^2 + 6 = 2x$

Temos $b = 2$ e $c = 6$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = 1 \pm \sqrt{1 - 6}$

$x = 1 \pm \sqrt{-5}$.

Como $\sqrt{-5}$ não é um número real, concluímos que esta equação não possui raízes reais.

De um modo geral, para que $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \mathrm{c}}$ seja um número real, devemos ter:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \mathrm{c} \geq 0. \text{ Ou seja: } \left(\frac{b}{2}\right)^2 \geq \mathrm{c}.$$

Responda:

1. Os lados desse retângulo são AD e BD.

2. O lado deste quadrado é CB.

3. O lado deste quadrado é CD.

4. É a soma das regiões 1, 2, 3 e 4.

5. O último quadrado consiste nas regiões 2, 3, 4 e 5.

6. Para provar a Proposição II-6 devemos mostrar que a soma das áreas das regiões 1, 2, 3 e 4 é igual à soma das áreas 2, 3, 4 e 5. Observando a figura vemos que basta mostrar que a área da região 1 é igual a área da região 5.

A região 1 é um retângulo de lados AC e AK. A região 5 é um retângulo de lados FM e MG. Sabemos que AK = BD = FM, por construção. Além disso, MG = BC, portanto AC = MG. Daí as áreas dos dois retângulos são de fato iguais e a Proposição II-6 de Euclides foi provada.

7. Substituindo $b = 10$ e o valor 24 para $(10 + x).x$ em **(**)**, temos:

$$24 + 5^2 = (5 + x)^2$$

$$24 + 25 = (5 + x)^2$$

$$(5 + x)^2 = 49$$

Assim, $(5 + x) = 7$, portanto $x = 2$ é a solução desta equação.

Observe que se essa equação não estiver relacionada a um contexto geométrico, então podemos tomar $(5 + x) = -7$, e portanto $x = -12$ também é uma solução desta equação.

Exercícios - Parte 2:

$$\boldsymbol{x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \mathbf{c}}}$$

a) $x^2 + 4x = 45$

Temos $b = 4$ e $c = 45$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = -2 \pm \sqrt{4 + 45}$

$x = -2 \pm 7$

$x = -9$ ou $x = 5$.

b) $x^2 + 8x = 9$

Temos $b = 8$ e $c = 9$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = -4 \pm \sqrt{16 + 9}$

$x = -4 \pm 5$

$x = -9$ ou $x = 1$.

c) $x^2 + 5x = 24$

Temos $b = 5$ e $c = 24$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 24}$

$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25+96}{4}}$

$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4}}$

$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{11}{2}$

$x = -\frac{16}{2} = -8$ ou $x = \frac{6}{2} = 3$.

d) $x^2 + 6x = 18$

Temos $b = 6$ e $c = 18$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = -3 \pm \sqrt{9 + 18}$

$x = -3 \pm \sqrt{27}$

$x = -3 - \sqrt{27}$ ou $x = -3 + \sqrt{27}$.

e) $x^2 + 4x = 3$

Temos $b = 4$ e $c = 3$. Substituindo na fórmula, obtemos:

$x = -2 \pm \sqrt{4 + 3}$

$x = -2 \pm \sqrt{7}$

$x = -2 - \sqrt{7}$ ou $x = -2 + \sqrt{7}$.

Exercícios- Parte 3:

a) $x^2 - 10x - 24 = 0$

$x^2 - 10x - 24 = (x + e)^2 + f$, em que e e f são constantes à determinar.

$x^2 - 10x - 24 = x^2 + 2ex + e^2 + f$

Obtemos: $2e = -10$ e $e^2 + f = -24$

$e = -5$ $\quad$ $25 + f = -24$

$f = -49$

Logo: $x^2 - 10x - 24 = (x - 5)^2 - 49$

E assim: $(x - 5)^2 - 49 = 0$

$(x - 5)^2 = 49.$

$(x - 5) = \pm 7$

Portanto $x = -2$ ou $x = 12$.

b) $x^2 + bx + c = 0$

$x^2 + bx + c = (x + e)^2 + f$, em que e e f são constantes à determinar.

$x^2 + bx + c = x^2 + 2ex + e^2 + f$

Obtemos: $2e = b$ e $e^2 + f = c$

$e = \frac{b}{2}$ $\quad$ $f = c - e^2$

$f = \mathrm{c} - \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Logo: $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$

E assim: $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

c) $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + e)^2 + f$, em que e e f são constantes à determinar.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2ex + e^2 + f$$

Obtemos: $2e = \frac{b}{a}$ e $e^2 + f = \frac{c}{a}$

$$e = \frac{b}{2a} \qquad f = \frac{c}{a} - e^2$$

$$f = \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Logo: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

E assim: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Essa fórmula é conhecida como “Fórmula de Bhaskara”.

Capítulo 3
Sobre a aplicação das atividades e resultados obtidos

Todas as atividades propostas nesta dissertação foram aplicadas para alunos do Ensino Médio do colégio Anglo Cezanne localizado em Americana/SP no período de Agosto de 2015 a Maio de 2016.

O desenvolvimento de cada uma das atividades e os resultados obtidos estão descritos neste capítulo.

3.1 - Atividade I: O desafio do tabuleiro de damas

Esta atividade foi aplicada em 2015 em quatro salas do Ensino Médio: 1º A (26 alunos), 1º B (30 alunos), 2º A (34 alunos) e 3º A (20 alunos).

Cada aluno recebeu uma folha da atividade e foram formados trios. O texto inicial e a proposta do desafio foram lidos coletivamente e foi solicitado que os alunos compartilhassem suas hipóteses iniciais. Nas quatro salas em que esta atividade foi aplicada, os alunos inicialmente acreditavam que seria possível cobrir o tabuleiro após serem removidos os dois quadrados, pois, segundo eles, sobrariam 62 quadrados que poderiam ser cobertos por 31 dominós.

Foi solicitado então que os alunos desenhassem o padrão que funcionaria, segundo a hipótese inicial. Mesmo nas diferentes salas a estratégia utilizada para verificar qual padrão funcionaria foi muito parecida. Os alunos desenharam o tabuleiro de damas, e riscaram ou apagaram os dois quadrados que deveriam ser removidos conforme a proposta: um do canto superior esquerdo e um do canto inferior direito. Depois fizeram “risquinhos” que cobrissem dois quadrados adjacentes.

Esta etapa do desenvolvimento foi fotografada, conforme as Figuras 3.1. a 3.3 a seguir:

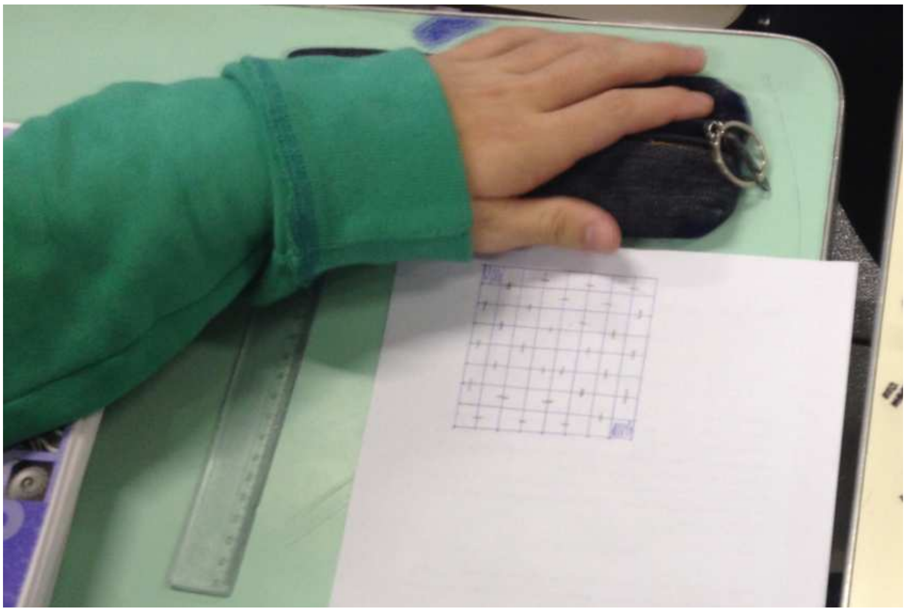


Figura 3.1: Aluno investigando padrão.

Figura 3.2: Alunas investigando padrão.

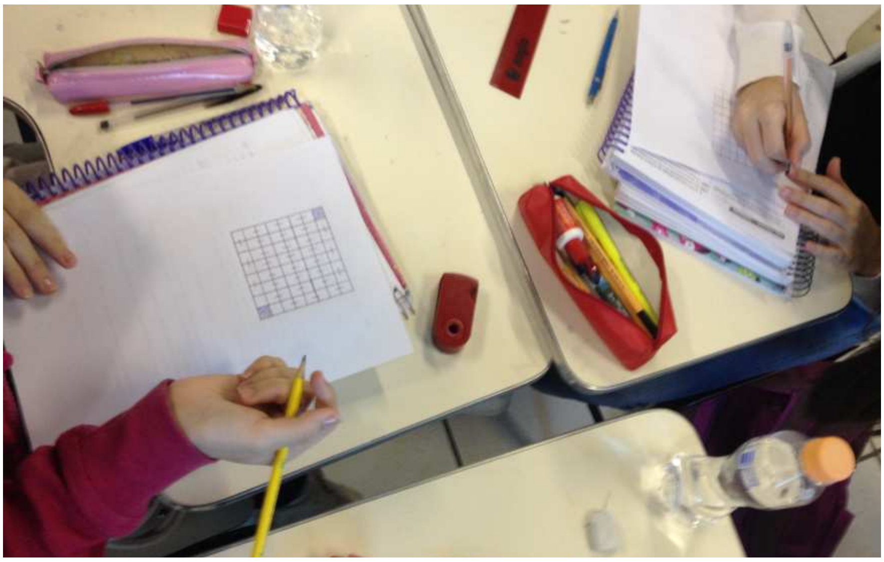


Figura 3.3: Alunas investigando padrão.

Após várias tentativas os alunos começaram a desconfiar que não fosse possível obter um padrão que funcionasse e começaram a perguntar: *"Professora, tem algum jeito que dá certo? Está sempre sobrando dois quadrados!"*.

Foi solicitado que analisassem qual a cor dos dois quadrados que sobravam e que a partir disto elaborassem um argumento para justificar o porquê de não ser possível cobrir o tabuleiro após a retirada dos dois quadrados com o dominó.

Algumas respostas dadas pelos alunos são apresentadas a seguir:

"Não é possível pois os 2 quadrados que restaram são da mesma cor e 1 peça do dominó cobre duas cores." - Aluna do 1º A.

"Cada peça de dominó cobre 1 casa branca e 1 casa preta. As casas retiradas possuem a mesma cor, impedindo assim que o dominó cubra as 62 casas restantes."- Aluna do 1º B.

"O tabuleiro é formado por um padrão de partes pretas e brancas intercaladas. Quando cobrimos com o dominó, este cobrirá uma parte branca e uma preta. Quando é retirado 2 partes dos cantos (ambas pretas por serem cantos opostos), irá sobrar 2 partes brancas que, segundo o padrão, não serão consecutivas. Logo pode-se concluir que não é possível, pois sobrará 2 quadrados em posições aleatórias."- Aluna do 2º A.

"Uma peça de dominó precisa, necessariamente, estar em cima de um espaço preto ao lado de um branco. Ao se retirar 2 peças das extremidades opostas, a 31ª peça não

pode ser colocada devido ao fato de não sobrarem 2 espaços adjacentes de cores distintas.”- Aluna do 3º A.

Os alunos concluíram que não seria possível encontrar um padrão que funcionasse, pois os dois quadrados que foram retirados eram da mesma cor, e cada dominó cobre exatamente um quadrado branco e um quadrado preto. Desta forma, retirando dois quadrados brancos, restariam sempre dois quadrados pretos e retirando dois quadrados pretos, sobrariam dois quadrados brancos.

Esta atividade foi importante para que os alunos percebessem que a experiência e observação são formas importantes para descobrirem o que pode ser verdade, mas o conhecimento das verdades matemáticas vem de provas.

3.2 - Atividade II: O quadrado perdido!

Esta atividade foi aplicada em 2015 em três salas do Ensino Médio: 2º A (39 alunos), 2º B (32 alunos) e 3º A (19 alunos), após o ensino do conceito de coeficiente angular de uma reta.

Cada aluno recebeu uma folha da atividade e foi solicitado que formassem grupos com 4 alunos para que pudessem compartilhar ideias. Os alunos deveriam preencher atentamente as tabelas conforme solicitado na atividade e depois concluir o porquê havia um quadrado perdido.

Esta etapa do desenvolvimento foi fotografada em duas salas, conforme as Figuras 3.4 e 3.5 a seguir:

Figura 3.4: Alunas realizando a atividade.

Figura 3.5: Alunas realizando a atividade.

Vários alunos comentaram que esta atividade lembrava o vídeo do “Chocolate infinito” que foi compartilhado em redes sociais e que pode ser visualizado pelo link do YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=Oespm7LK6tg. (Acesso em 30/05/2016). Uma das resoluções deste problema pode ser encontrada no link do YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=6K7zFvW3THo.

Em geral os alunos não apresentaram dificuldades em preencher as tabelas, porém alguns não sabiam como relacionar os resultados obtidos nas tabelas para concluir o porquê há um quadrado perdido. Alguns alunos inicialmente relacionaram apenas com a tabela 1 e escreveram que havia um quadrado perdido pois a área da Figura 2 era 1 unidade menor que a área da Figura 1. Após serem orientados que este era justamente o fato que queríamos justificar, eles olharam mais atentamente para a tabela 3 e então concluíram, por meio dos coeficientes angulares, que as Figuras 1 e 2 não eram triângulos pois os coeficientes angulares eram diferentes.

Algumas respostas dadas pelos alunos são apresentadas a seguir:

“O coeficiente angular na reta suporte de cada figura é diferente um do outro, o que consequentemente faz não formar uma reta e muito menos um triângulo. Na realidade a figura formada é um quadrilátero. Assim, o fato de não haver um encaixe perfeito das retas, surge o quadrado perdido.” - Aluna do 2º A.

“Porque os coeficientes angulares são diferentes, então o que seria uma linha reta inclina após mudar o valor do coeficiente. Portanto a figura é um quadrilátero.” – Aluna do 2º B.

“Os coeficientes angulares não tem o mesmo valor. Os coeficientes angulares da figura 3 e 4 deveriam ser iguais entre si e iguais ao coeficiente angular da figura 1, mas não são, o que mostra que a diagonal do desenho da figura 1 não é uma reta e, por isso, o erro no cálculo da área.” – Aluno do 3º A.

Após finalizarem a atividade os alunos compartilharam suas conclusões com o restante da sala. Eles gostaram desta atividade e alguns alunos disseram que a atividade ajudou a entender melhor o conceito de coeficiente angular estudado nas aulas anteriores e uma possível aplicação.

3.3 - Atividade III: Provas Diretas e Indiretas

Esta atividade foi aplicada em 2015 em três salas do Ensino Médio: 1º A (27 alunos), 1º B (30 alunos) e 3º A (18 alunos). Também foi sugerida como tarefa opcional para as demais salas: 6 alunos do 2º A, 3 alunos do 3º B e 2 alunas do Pré-Vestibular resolveram a atividade.

Cada aluno recebeu uma folha da atividade e foi solicitado que formassem duplas. O texto inicial e o Exemplo 1, juntamente com a sua prova, foram lidos coletivamente. Foi solicitado que os alunos realizassem as Atividades 1 e 2. Após finalizarem essas duas atividades as respostas foram compartilhadas com o restante da sala. Alguns alunos apresentaram dificuldade em realizar principalmente a Atividade 2, pois estavam começando a prova já supondo que o ângulo era reto. Nas salas em que a atividade foi realizada durante a aula, os alunos foram orientados e corrigiram as suas respostas. Mas uma das alunas do Pré-Vestibular que realizou a atividade sem orientação respondeu:

"Ele é perpendicular pois forma um ângulo de 90º entre o triângulo CMB e outro ângulo de 90º entre CMA". – Aluna do Pré -Vestibular.

Podemos destacar aqui a dificuldade que os alunos têm em realizar demonstrações, mesmo envolvendo conteúdos já trabalhados como a congruência de triângulos. Muitas vezes os alunos confundem a hipótese (o que conhecemos) com a tese (o que deve ser provado).

O texto sobre Euclides, o Exemplo 2 e a sua prova foram lidos coletivamente. Os alunos realizaram as Atividades 3 e 4. Depois de finalizadas, as respostas foram compartilhadas. Para finalizar foi solicitado que os alunos lessem o Exemplo 3 e sua prova e realizassem as Atividades 5, 6 e 7.

Na Atividade 7, alguns alunos novamente confundiram a hipótese com a tese, como, por exemplo, na resposta dada por uma aluna:

" $n^2 = 4k^2$ que é par pois é divisível por 2. Então: $n = \sqrt{4k^2}$ logo $n = 2k$."- Aluna do 2º A.

Vemos que ela já usou o resultado obtido na proposição do Exemplo 1.

Outros alunos responderam corretamente a Atividade 7, provando por contradição a proposição, como na resposta a seguir:

"Se n é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar, pois $n = 2k + 1$ e $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Se n não for ímpar, só poderá ser par. Portanto se n^2 é um inteiro par, então n é par." – Aluno do 3º A.

O desenvolvimento desta atividade não foi fotografado.

3.4 - Atividade IV: A Irracionalidade de $\sqrt{2}$

Esta atividade foi aplicada em 2016 com os 28 alunos do 2º A do Ensino Médio. Cada dupla recebeu uma folha da atividade.

O texto sobre grandezas comensuráveis e incomensuráveis foi lido coletivamente, e vários exemplos foram colocados na lousa, inclusive o do quadrado de lado 1 e sua diagonal. Alguns alunos disseram que acreditavam que se fosse tomada uma unidade de medida bem pequena, seria possível medir tanto o lado quanto a diagonal. Mas então uma aluna falou: *"Não são comensuráveis, pois se o lado é 1, a diagonal vai medir $\sqrt{2}$ que é um número irracional."*

As Atividades 1, 3, 5, 7 e 9 foram realizadas em sala e as Atividades 2, 4, 6 e 8 foram solicitadas como tarefa para casa.

Na Atividade 2 foi solicitado que os alunos provassem que a soma de dois números ímpares é um número par. Algumas respostas dadas pelos alunos são apresentadas a seguir:

"Sejam m e n dois números ímpares. Então $m = 2k + 1$ e $n = 2y + 1$. Logo $m + n = 2k + 2y + 2 = 2(k + y + 1)$ então $m + n$ é um número par."

"Sejam m e n dois números ímpares. Então $m = 1k$ e $n = 1y$. Então $m + n = 1k + 1y = d$, onde d é um número, por isso $m + n$ é par."

"Sejam m e n dois números ímpares. Então $m = 2k + 1$ e $n = 2y + 1$,onde k e y são números inteiros positivos.
$m + n = (2k + 1) + (2y + 1) = 2(k + y) + 1 = 2d + 1$, onde d é um número inteiro positivo. Logo $m + n$ é um número ímpar."

Percebemos nestas respostas que o segundo aluno não entendeu a definição de número par e número ímpar, pois considerou que se $m = 2k$ é um número par, então $m = 1k$ é ímpar. A terceira aluna não colocou o número 1 dentro do parêntese obtendo assim que a soma de dois números ímpares era um número ímpar, o que mostra a falta de atenção.

A prova de que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis foi lida e explicada aos alunos passo a passo. Foi solicitado que os alunos realizassem a Atividade 10, e eles tiveram muita dificuldade. Algumas dicas foram dadas, mas mesmo assim os alunos não conseguiram realizar a prova. Neste momento considerei conveniente explicar a demonstração na lousa.

O desenvolvimento desta atividade não foi fotografado.

3.5 - Atividade V: O Projeto de Pitágoras

Esta atividade foi aplicada em 2016 em quatro salas do Ensino Médio: 1º A (26 alunos), 1º B (25 alunos), 2ºA (28 alunos) e 3º B (34 alunos).

Foi solicitado que os alunos formassem duplas ou trios para realizarem “O projeto de Pitágoras” que está dividido em 4 atividades. No geral os alunos não apresentaram dificuldades em realizar as duas primeiras atividades que continham as demonstrações sem palavras (recorte e cole), porém várias dúvidas surgiram na realização das Atividades 3 e 4.

Na Atividade 1 apenas uma das duplas fez a colagem de modo errado, conforme a Figura 3.6 a seguir:

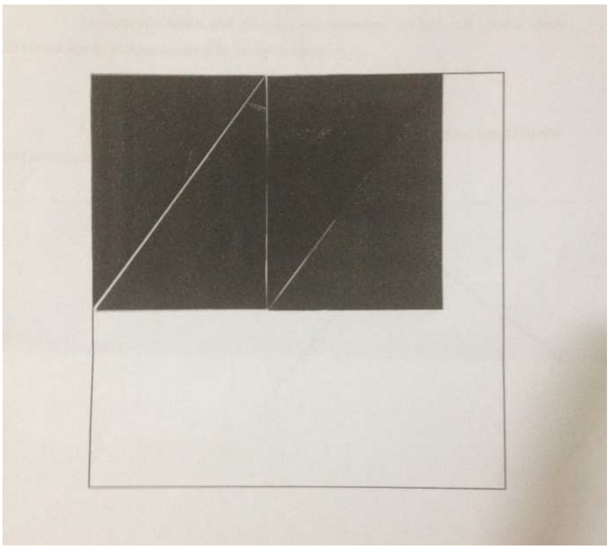


Figura 3.6: Figura obtida por alunos na atividade.

Essa dupla não se atentou às orientações da atividade que solicitava que os triângulos fossem colados de modo a obter dois retângulos e dois quadrados.

Os demais grupos obtiveram a figura correta, conforme Figura 3.7 a seguir:

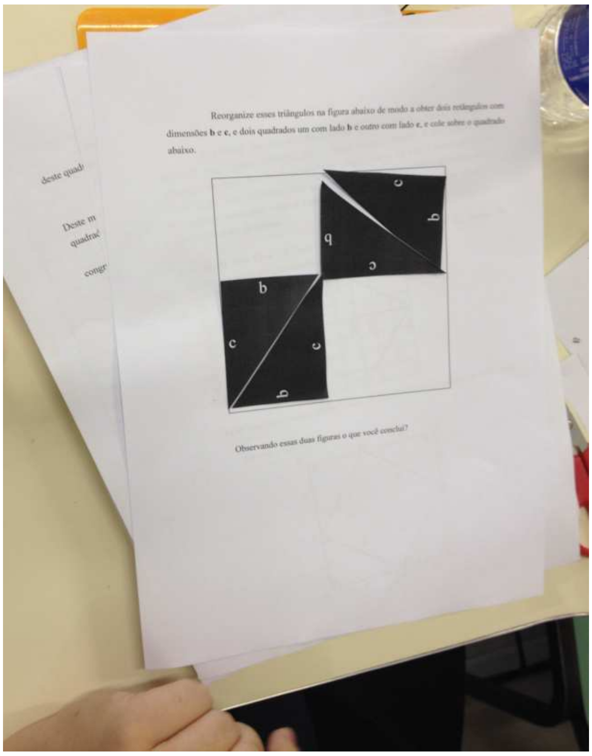


Figura 3.7: Figura obtida por alunos na atividade.

Todos os alunos realizaram corretamente a Atividade 2, conforme Figura 3.8 a seguir:

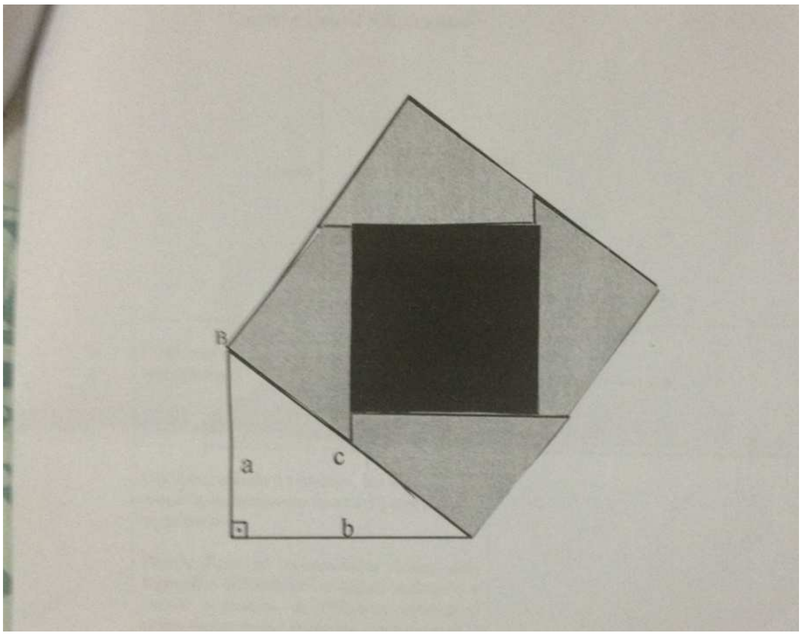


Figura 3.8: Figura obtida por alunos na atividade.

Na Atividade 3 alguns alunos tiveram dificuldade em calcular a área dos semicírculos principalmente na manipulação com as frações, mas as dúvidas foram esclarecidas.

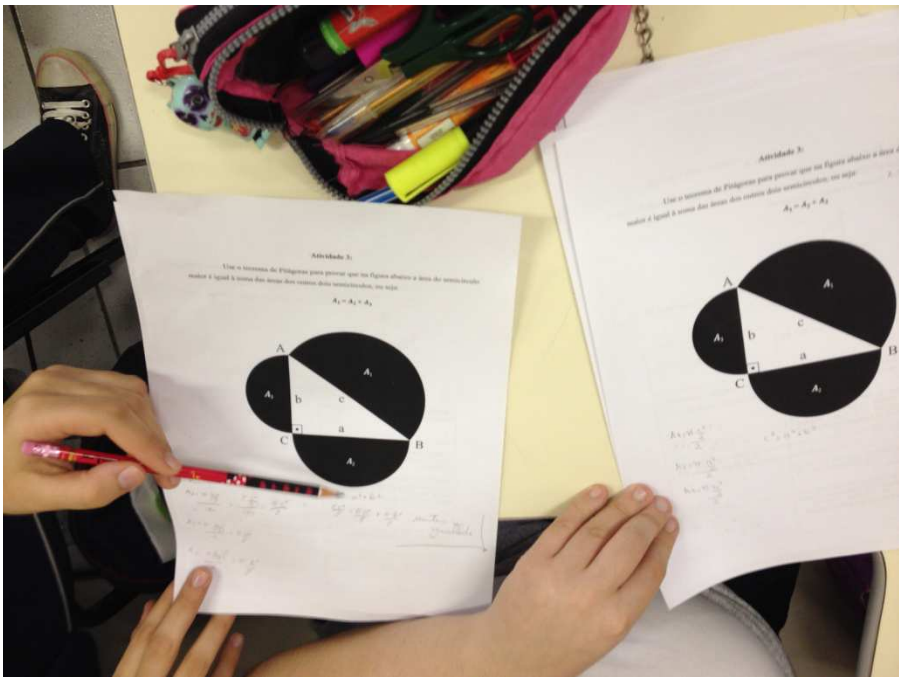


Figura 3.9: Alunos realizando atividade.

Na Atividade 4 vários alunos não se lembravam como pode ser construído um segmento perpendicular a um segmento dado e o transporte de segmentos. Essas construções foram trabalhadas nas aulas de Desenho Geométrico no Ensino Fundamental e foram retomadas nesta atividade.

Para a realização do item d da questão 2 desta Atividade 4, em que os alunos deveriam realizar o transporte dos segmentos para a reta real, foi destacado que este transporte deveria ser feito sempre a partir do 0.

Podemos observar o desenvolvimento desta etapa nas Figuras 3.10 e 3.11 a seguir:

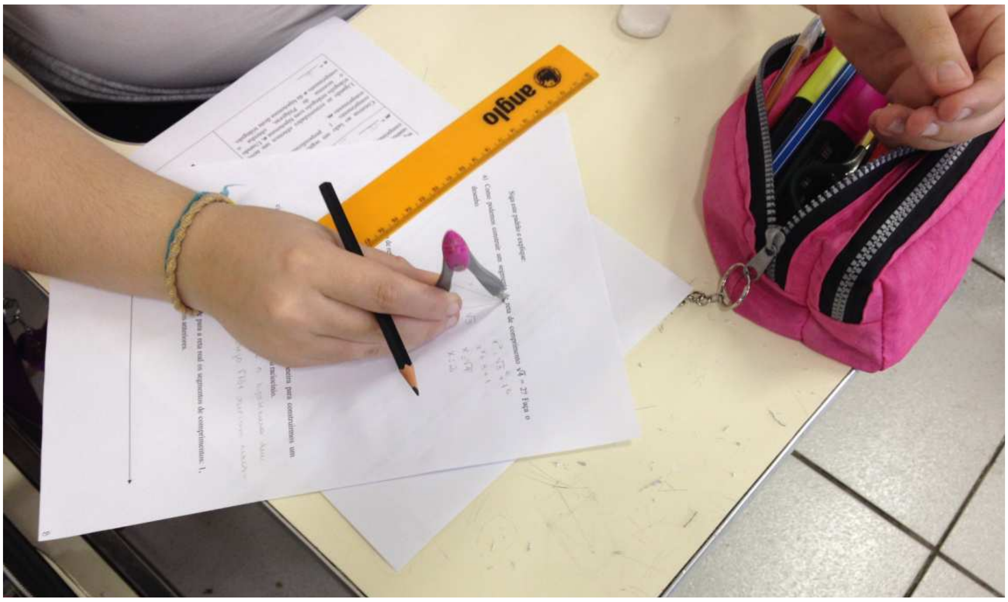


Figura 3.10: Alunos realizando atividade.

Figura 3.11: Alunos realizando atividade.

3.6 - Atividade VI: Números Figurados

Esta atividade foi aplicada em 2016 em duas salas do Ensino Médio: 1º A (26 alunos) e 1ºB (25 alunos). Cada dupla recebeu uma folha da atividade.

Os alunos completaram a tabela da questão 1 e responderam a questão 2 facilmente, mas as dúvidas surgiram quando foi solicitado o número de pontos do n-ésimo número triangular (questão 3). Vários alunos perguntaram: *"Professora, o que significa n-ésimo?"*. Foi explicado que n-ésimo número triangular é aquele que está na posição n, e dado os seguintes exemplos: quando $n = 4$ o número de pontos do 4º número triangular é $1 + 2 + 3 + 4$, quando $n = 5$ o número de pontos do 5º número triangular é $1 + 2 + 3 + 4 + 5$. Deste modo os alunos concluíram que o número de pontos do n-ésimo número triangular seria: $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

Na questão 8 alguns alunos perguntaram (apesar da explicação no enunciado da questão) : *"O que é uma conjectura?"*.Após ser explicado que era uma opinião do que é obtido quando somamos dois números triangulares, os alunos concluíram:

"Dois triângulos consecutivos formam um quadrado"- Alunas do 1º A.

"Qualquer número triangular somado com seu consecutivo (também triangular) formará um quadrado do maior"- Alunos do 1º B.

As demais questões foram realizadas tranquilamente. Na questão 17 parte dos alunos escreveu que o número retangular é o dobro do número triangular e os demais que o número triangular é a metade do número retangular.

Os alunos demonstraram interesse na realização da atividade e disseram ter gostado. Essa atividade foi muito importante para trabalhar com o reconhecimento de padrões e generalização, obtendo fórmulas que possibilitem a obtenção do número de pontos requeridos.

O desenvolvimento desta atividade foi fotografado nas duas salas, conforme as Figuras 3.12 e 3.13 a seguir:

Figura 3.12: Alunos realizando atividade.

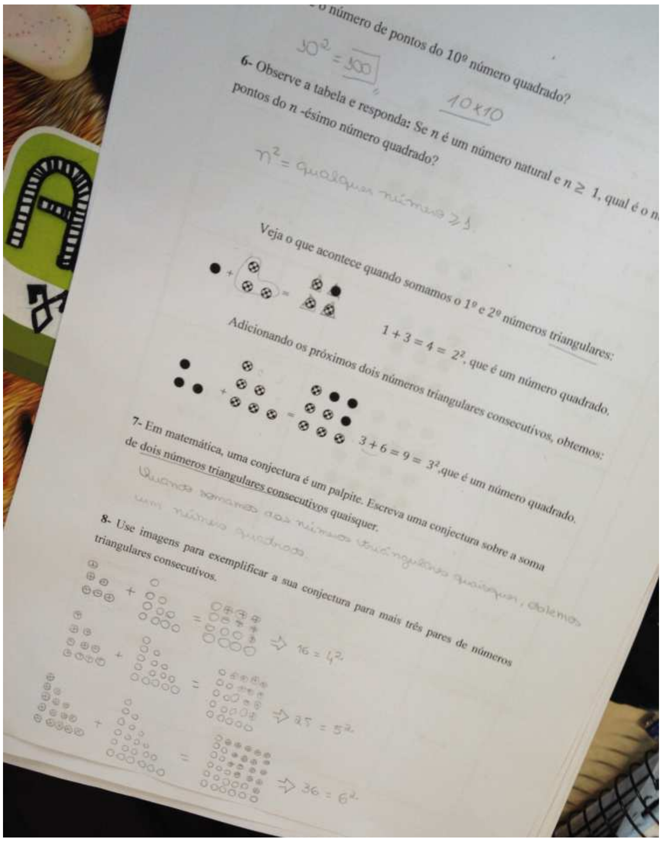


Figura 3.13: Alunos realizando atividade.

3.7 - Atividade VII: Equações Quadráticas

Esta atividade foi aplicada em 2016 em duas salas do Ensino Médio: 2º B (27 alunos) e 3º A (28 alunos).

Cada aluno recebeu uma folha da atividade e foi solicitado que formassem duplas. O texto inicial e a Proposição 5 do Livro II do *Elementos* de Euclides (II-5), como também sua prova, foram lidos coletivamente. A figura referente à Proposição II-5 foi reproduzida na lousa e cada um dos passos da demonstração, de como foi obtida a equação **(*)** e a fórmula **(1)** foram explicados.

Foi solicitado que os alunos resolvessem os Exercícios- Parte 1 e as dúvidas foram esclarecidas conforme os alunos solicitavam. Depois de finalizarem essa etapa, as respostas foram compartilhadas e a correção realizada na lousa.

A Proposição 6, do Livro II do *Elementos* de Euclides (II-6), foi lida coletivamente, a figura do segmento de reta AB (Figura 2.36) foi reproduzida na lousa e foi solicitado que os alunos respondessem as questões 1 a 7. Os alunos apresentaram grande dificuldade em realizar a prova da Proposição II-6 (questão 6). Foi aconselhado que seguissem os passos da prova realizada na Proposição II-5, mas ainda assim muitos alunos tiveram dúvidas. Ao finalizarem essa etapa, as respostas foram compartilhadas, sendo necessárias 2 aulas para a realização destas duas etapas.

Os Exercícios-Parte 2 foram sugeridos como tarefa de casa, e entregues na aula posterior.

A terceira parte foi lida coletivamente e a resolução do exemplo realizado na lousa. Foi solicitado que os alunos resolvessem os Exercícios-Parte 3, porém como apresentaram muita dificuldade, principalmente nos itens b e c, a resolução destes exercícios foram explicados na lousa.

O desenvolvimento desta atividade foi fotografado nas duas salas, conforme as Figuras 3.14 a 3.16 a seguir:

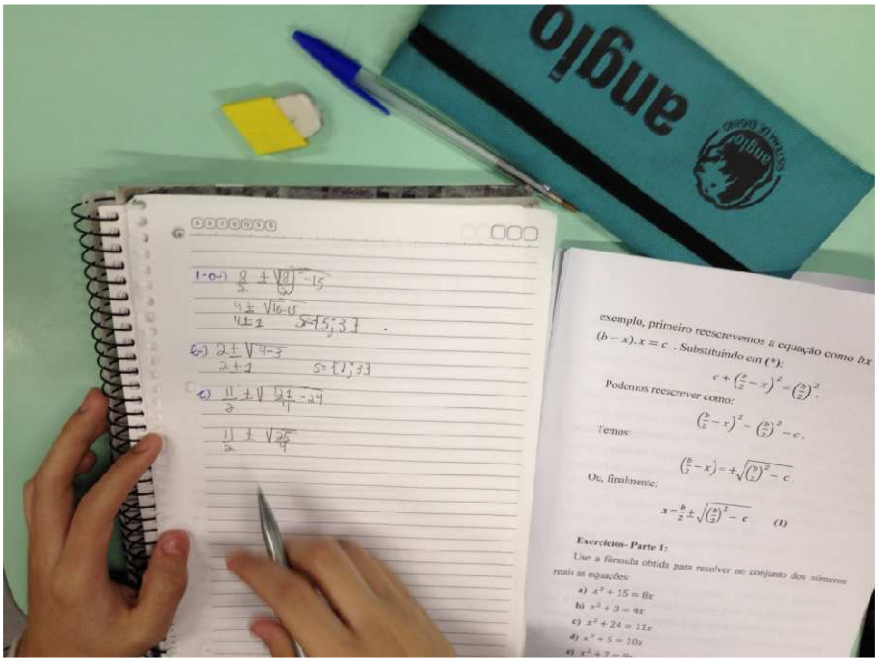


Figura 3.14: Alunos realizando atividade.

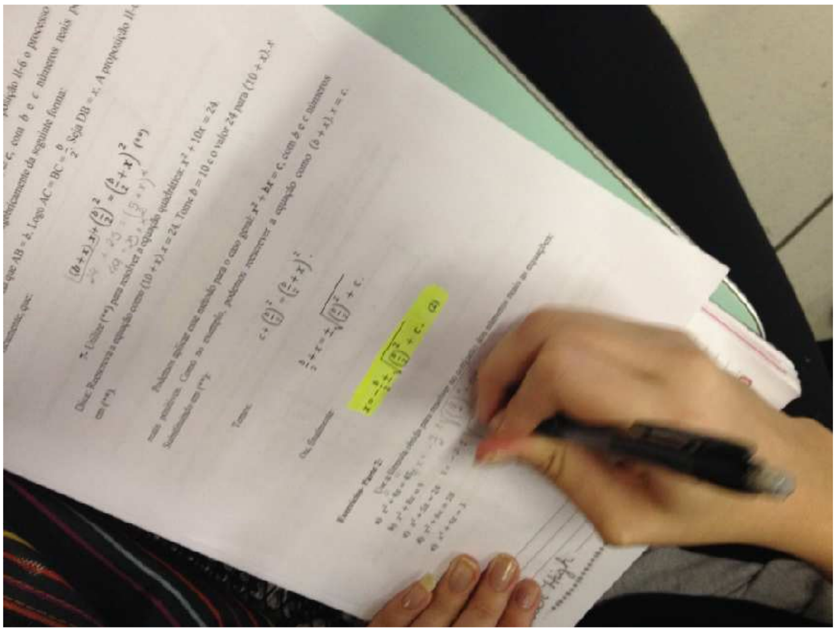


Figura 3.15: Alunos realizando atividade.

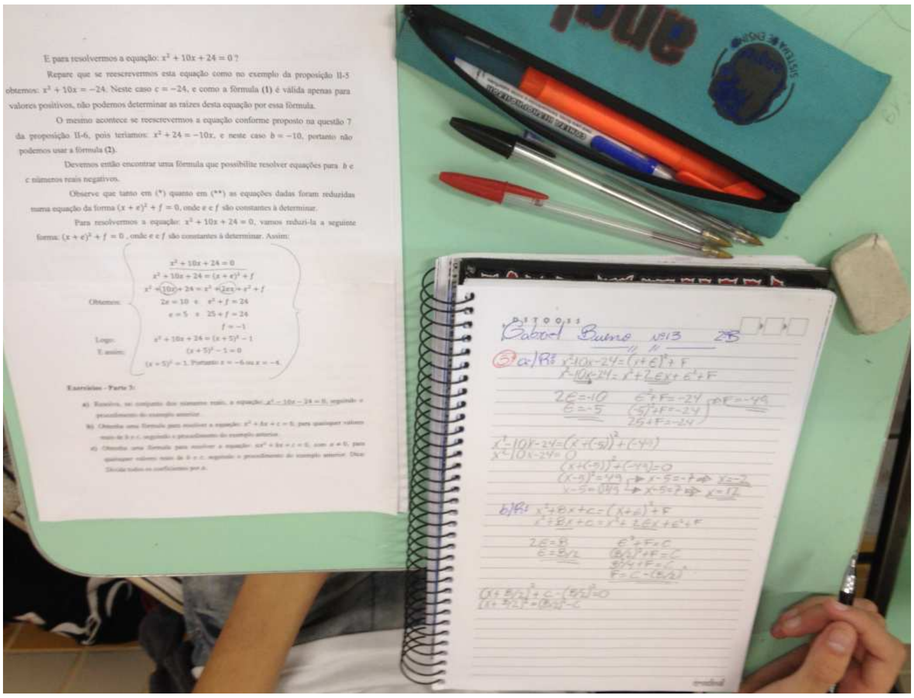


Figura 3.16: Alunos realizando atividade.

Capítulo 4

Considerações Finais

Sabemos que muitas fórmulas e teoremas aparecem nos materiais didáticos de Matemática, mas é comum os professores omitirem nas aulas as demonstrações destas, seja por falta de tempo, desinteresse dos alunos, ou até mesmo por falta de material de apoio para ajudá-los nesta tarefa.

Pensando nisso, apresentamos neste trabalho sete atividades que podem servir de material de apoio para o professor do Ensino Fundamental II, Ensino Médio, ou até mesmo do Ensino Superior, com as devidas adequações para cada nível.

As atividades foram aplicadas com os alunos do Ensino Médio da escola Anglo Cezanne em Americana/SP, e essa experiência foi muito gratificante, pois os alunos demonstraram interesse e bom envolvimento na realização das atividades, relatando que ajudaram a ampliar seus conhecimentos e dar sentido aos conteúdos, mesmo àqueles amplamente estudados, como por exemplo o Teorema de Pitágoras e as Equações Quadráticas.

Acreditamos que a História da Matemática, utilizada como um instrumento em algumas das atividades tenha contribuído nesta construção do sentido, pois segundo as Orientações Curriculares [2]:

> "A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático.".

De fato, nas Atividades II e VII nas quais apresentamos proposições dos *Elementos* de Euclides com a própria linguagem de Euclides, acreditamos que o contexto histórico despertou o interesse dos alunos, principalmente daqueles que não possuem tanta afinidade com a Matemática, mas gostam, por exemplo, de História. Os alunos demonstraram curiosidade e levantaram hipóteses sobre a razão do modo diferenciado como enunciamos essas mesmas proposições atualmente. Sem dúvida essas atividades ajudaram os alunos a compreenderem "que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído.”, conforme sugerido nas Orientações Curriculares [2].

Algumas dificuldades foram enfrentadas no decorrer da aplicação das atividades propostas neste trabalho como podemos destacar:

- A falta de tempo: Trabalhamos com um material apostilado e é necessário cumprir o conteúdo proposto, e não foi possível aplicar todas as atividades em cada sala.
- A resistência de alguns alunos em realizar demonstrações e exercícios mais teóricos.
- Dificuldades nas operações com frações, na resolução de raízes quadradas, nas manipulações algébricas, no transporte de segmentos com regra e compasso entre outros conteúdos aprendidos anteriormente. Foi necessária a retomada de alguns conceitos no decorrer da aplicação das atividades.

Apesar das dificuldades acreditamos que a experiência de trabalhar com essas atividades na sala aula foi muito válida e contribuiu para que os alunos pudessem “expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática.” conforme indicado nos Parâmetros Curriculares Nacionais [3].

Esperamos que as atividades propostas neste trabalho ajudem a compor o material de apoio para os professores que desejarem ensinar seus alunos a entenderem e realizarem demonstrações em Matemática assim como a compreensão de teoremas e fórmulas.

Referências Bibliográficas

[1] AMSON, Glenn Albert Jacques Van. et al. **Apostila do Sistema Anglo de Ensino**: Matemática- Terceirão. Caderno 1. São Paulo: Anglo, 2014. p. 96.

[2] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Conhecimentos de Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

[3] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

[4] EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. p.103, p. 343

[5] GARBI, Gilberto G. **C.Q.D:** Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. p. 31, p.35-38.

[6] KATZ, Victor; MICHALOWICZ, Karen D. Editors. **Geometric Proof.** In: Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics. The Mathematical Association of America, 2004.

[7] LIVRE ESPORTES. **História e as regras do jogo de damas**. Disponível em: http://www.livresportes.com.br/reportagem/historia-e-as-regras-do-jogo-de-damas - Acesso em: 11/05/2016.

[8] REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. **A fórmula é de Bhaskara?** Volume 39. São Paulo: Revista do Professor de matemática, 1999. p. 54

[9] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João B. P. de. **Tópicos de História da Matemática**. In: Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2012. p.96

[10] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar , 2012.