UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JOSÉ EURIPEDES POSSEBON

FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA: Uma abordagem para o Ensino Básico

PALMAS - TO
2016.

JOSÉ EURIPEDES POSSEBON

FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA:
Uma abordagem para o Ensino Básico

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. MSc. Gilmar Pires Novaes.

PALMAS - TO
2016.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

P856f Possebon, José Euripedes.
FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA: Uma abordagem para o Ensino Básico . / José Euripedes Possebon. – Palmas, TO, 2016.
130 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2016.

Orientador: MSc. Gilmar Pires Novaes

1. Sequência de Fibonacci. 2. Razão Áurea. 3. Ensino Básico. 4. Aplicações. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

JOSÉ EURIPEDES POSSEBON

FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA: Uma abordagem para o Ensino Básico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Msc. Gilmar Pires Novaes.

Aprovada em 30 / 08 / 2016

BANCA EXAMINADORA

Andrés Barraza

____

Prof. Dr. Andres Lázaro Barraza De La Cruz (Presidente-UFT)

Hellena Apolinário

____

Profa. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

____

Prof. Dr. Claudio de Castro Monteiro (IFTO)

A DEUS

E à minha FAMÍLIA

Entrega o teu caminho ao Senhor; confia nele, e ele tudo fará (Sl 37:5).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a *Deus*, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, socorro presente em todos os momentos.

Aos meus pais, Jehovah Martins de Paula (*in memoriam*), e Ana Possebon Martins que me presentearam com a mais bela *Família*.

Aos meus irmãos: Valéria, Vânia (*in memoriam*), Vera, Vanderlei, Marcília, José Divino e Eduardo, que nunca mediram esforços para me ajudar.

Agradeço também à minha esposa, Regina, que, de forma especial e carinhosa, me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades, quero agradecer também à minha filha, Valentinna, que sempre iluminou de maneira especial os meus pensamentos me levando a buscar mais conhecimentos.

Ao meu orientador, um verdadeiro Mestre, Gilmar Pires Novaes, por seus ensinamentos, paciência, confiança e principalmente apoio durante todo esse projeto, que possibilitou a realização desse sonho.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação deste importante Programa de Mestrado.

À Universidade Federal do Tocantins (UFT) pelo espaço cedido.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, sem o qual essa trajetória se tornaria ainda mais difícil.

Ao coordenador e professor Dr. Andrés Lázaro Barraza de La Cruz pela dedicação e sabedoria com que conduziu esse Mestrado.

E, finalmente, aos grandes amigos conquistados ao longo desse Mestrado.

A Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa, de modo que o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, matemáticos professores, tanto mais se tivermos como objetivo principal, ou como um dos objetivos mais importantes, ensinar crianças a pensar.

(George Polya)

RESUMO

A abordagem deste trabalho foi efetivada pelos alunos da Educação Básica enquanto estratégia de ensino da sequência de Fibonacci, uma vez que o objetivo prioritário é o de promover e disseminar o aprender/gostar matemático dos discentes, apresentando a Matemática por meio de atividades envolventes, sejam elas de pesquisas, jogos, curiosidades ou cálculos relacionando Fibonacci e a sua sequência com outros campos da Matemática. Nos capítulos que se seguem, além do histórico às aplicações das sequências de Fibonacci e de Lucas, e a Razão Áurea, apresentaremos atividades realizadas com alunos da Educação Básica enquanto estratégia de ensino das respectivas sequências agregadas ao número de ouro, exemplificadas em várias situações e descobertas intrigantes que servem de base para o processo de ensino-aprendizagem em relação às atividades propostas. No entanto, a sequência de Fibonacci e a Razão Áurea sempre serão utilizadas pelo homem no intuito de conferir as suas obras, a beleza e a perfeição que estão presentes na Natureza. Podemos perceber tudo isso na Natureza, na Arte, na Arquitetura, na Física, na Música e no corpo humano, dentre outros. Da teoria à prática apresentamos algumas aplicações imagináveis em diversos campos, como a produção de um relógio, solução de problemas de ópticas de raios de luz, até a resolução de enigmas matemáticos. Com base nos resultados das atividades propostas, sequência de Fibonacci e Razão Áurea, foi possível propormos sugestões sobre a aplicabilidade dessas atividades, a fim de que os alunos conseguissem aplicar os conceitos estudados em problemas com implicações na sua realidade.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci. Razão Áurea. Ensino Básico. Aplicações.

ABSTRACT

The approach of this work was made by the students of Basic Education as a teaching strategy of Fibonacci sequence, since the priority objective is to promote and disseminate the learning and liking of Math in the students, presenting mathematics through engaging activities, whether search, games, trivia or calculations relating Fibonacci and its sequence with other fields of mathematics. In the following chapters, in addition to historical applications of Fibonacci and Lucas sequences, and the Golden Ratio, we are also going to present activities with students of Basic Education as a teaching strategy of the respective sequences aggregated to the number of gold, exemplified in a lot of situations and intriguing findings which form the basis for the teaching-learning process in relation to the proposed activities. However, the Fibonacci sequence and the Golden Ratio will always be used by man in order to give his works the beauty and perfection that are present in nature. We can see all of this in nature, in art, in architecture, in physics, in music and in the human body, among other things. From theory to practice we present some imaginable applications in various fields such as the production of a clock, the solution of optic light ray problems, and mathematical troubleshooting. Based on the results of the proposed activities, Fibonacci sequence and Golden Ratio, it was possible to propose suggestions on the applicability of these activities, so the students would be able to apply the studied concepts in problems with implications in their reality.

Keywords: Fibonacci Sequence. Golden Ratio. Basic Education.Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
NBR	Norma Brasileira
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SI	Sistema Internacional de Unidades
UFT	Universidade Federal do Tocantins

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\sum$	Somatório

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática, dentre tantas disciplinas curriculares, apresenta-nos situações, as mais diversas, que a tornam simplesmente apaixonante. Situações como os Problemas do Milênio: a Clay Mathematics Institute lançou, em 2000, um desafio: quem resolver um dos sete "Problemas do Milênio" ganhará o prêmio de 1 milhão de dólares.

A título de exemplo, o russo Grigory Perelman conseguiu, em 2010, resolver a "Hipótese de Poincaré", um de tais problemas. É interessante ressaltar que Perelman rejeitou o prêmio justificando que o reconhecimento pela solução seria a sua grande recompensa. Ao todo, ainda serão dados 6 milhões de dólares ao(s) grande(s) matemático(s) que se aventurarem a solucionar os teoremas e as questões propostas pela citada entidade.

De acordo com Dienes (1985), elucidar questões matemáticas ainda é o anseio de diversos matemáticos da atualidade, os quais procuram resultados de questões mal explicadas no passado, popularmente chamados de "Desafios Matemáticos".

Problemas como: Hipótese de Riemann, P = NP, Equações de Navier-Stokes, Conjectura de Hodge, Teoria de Yang-Mills, Conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer, fazem com que os apaixonados por essa "Rainha das Disciplinas" se coloquem como sonhadores capazes de entrar para o "Rol" dos grandes Matemáticos, conseguindo a façanha de resolver algum desses problemas, embora complexos e de difícil compreensão.

Mas essa paixão Matemática não é acometida a todos. Na verdade, existe uma grande parcela, e é importante que se diga, "em sua grande maioria", que não compartilha dessa paixão. Ainda existe todo tipo de aversão à Matemática, chegando mesmo ao ponto de torná-la uma disciplina indesejada, seja no Ensino fundamental, Médio ou Superior.

Valente (1993) (apud Serra (2015)), ressalta que, ao observar o ensino da Matemática nas escolas, nota-se um argumento de que o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo não é subproduto mais comumente encontrado. Muito pelo contrário. De acordo com essa autora, aprender Matemática ou fazer Matemática é sinônimo de fobia, de aversão à escola e, em grande parte, responsável pela repulsa em aprender.

No entanto, desde os primórdios da história da humanidade, seja na Babilônia, Egito, Grécia ou China, dentre outros, a Matemática tem se mostrado presente, sendo indispensável para a organização e desenvolvimento das sociedades. (D'AMBRÓSIO (2001)).

Dessa maneira, entende-se que a Matemática está presente na vida de todos, auxiliando na organização dos povos, evitando o "caos" e, de maneira precoce, a sua extinção.

Em outros contextos, a Matemática está presente servindo como ferramenta para gerenciar, organizar e embasar futuras apostas ou escolhas. Como uma simples organização de finanças familiar, que permitirá ou não a compra de um determinado bem, ou ainda em situações mais complexas, tais como a aplicação em compra de ações de uma determinada empresa. Contudo, a questão é que “A Rainha das Disciplinas” está presente em nossas vidas. Desejando-a ou não, ela se faz presente, auxilia-nos, mostra-nos os caminhos ou ausência deles. Então, por que não a desenvolver? Pois, para Devlin (2011), todos os seres humanos nascem com a capacidade de aprender Matemática, tendo em vista que tal aprendizado requer as mesmas aptidões que o domínio de uma linguagem para torná-la nossa aliada e desenvolvê-la em nossa capacidade cognitiva.

Diante do exposto, surge como proposta apresentar a Matemática para os alunos da Educação Básica de forma contextualizada, para que haja a fixação de conteúdos e “descobertas”, pois ela se fazia e ainda hoje se faz presente e é amplamente aplicada em vários segmentos de nossa sociedade. Uma dessas aplicações é a sequência de Fibonacci.

De acordo com AMARAL (2014), em 1202, Fibonacci tornou-se conhecido por meio do livro Liber Abaci (ou Livro de Cálculo), no qual apresenta um problema sobre a reprodução de coelhos e define a mencionada sequência, que apresentou várias propriedades que foram objeto de estudo de vários matemáticos ao longo do tempo. Além disso, trouxe para sociedade o sistema numérico que utilizamos (com algumas modificações).

CARVALHO (2013) afirma que a Proporção Áurea consiste em uma ideia Matemática voltada ao lado harmônico da vida, e a sequência de Fibonacci nos apresenta esse número intrigante. Esse autor relata também que é possível realizar algumas atividades geométricas e algébricas dentro de um contexto matemático cabível aos alunos de Ensino Médio e Fundamental.

Segundo OLIVERIA(2013), além de auxiliar no ensino e aprendizagem dos conteúdos propostos, tem-se a possibilidade de explorar alguns aspectos da História da Matemática, objetivando introduzir e complementar os conteúdos do currículo.

Logo, abordaremos nos capítulos que se seguem, o histórico sobre Fibonacci, a sua maior publicação (o Liber Abaci), a fórmula recursiva e as aplicações da sequência de Fibonacci, além da fórmula fechada de Binet e o Teorema de Zeckendorf, e, por fim, apresentaremos atividades que realizamos com alunos da educação básica na qual trabalhamos enquanto estratégia de ensino da respectiva sequência, uma vez que o objetivo sempre presente neste trabalho é o de promover e disseminar o aprender/gostar matemático dos discentes, e nada melhor para isso do que apresentar a Matemática por meio de atividades envolventes, sejam elas de pesquisas, jogos e cálculos relacionando Fibonacci e a sua sequência com outros campos da Matemática.

2 BREVE HISTÓRICO DE FIBONACCI

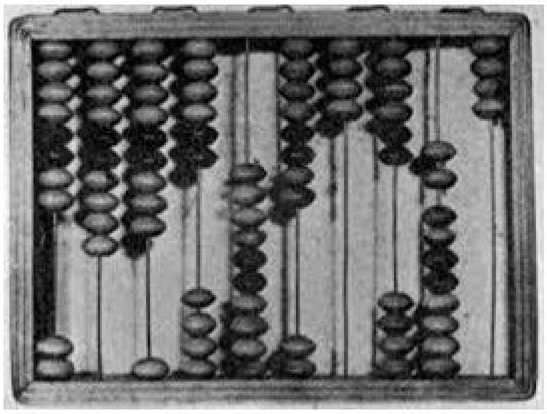
Segundo (KOSHY 2001), Leonardo Fibonacci, que também é chamado de Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa, foi o mais notável matemático da Idade Média Europeia. Pouco se sabe sobre a sua vida, excetos os poucos fatos que vêm de algumas referências “conteúdo autobiográfico” em suas obras e dois documentos contemporâneos: a escritura de 1226 e uma resolução do Município de Pisa datado entre 1233 e 1241. Ironicamente, embora nenhum dos seus contemporâneos tenha o mencionado em qualquer documento que sobrevive, Fibonacci foi o grande destaque da Matemática em sua época.

Figura 1 – Localização de Pisa - Cidade Natal de Leonardo FIBONACCI

FONTE: https://pt.wikipedia.org

Nasceu na década de 1170 (data aproximada) na família Bonacci de Pisa, em um centro mercantil próspero. Seu pai, Guglielmo (alguns autores o chamam de Guilielmo dei Bonnacci, daí o significado Fibonacci: “filho de Bonacci”), era um comerciante bem sucedido, que almejava ao filho a sua mesma profissão (KOSHY 2001). Por volta de 1190, quando Guglielmo dei Bonacci foi nomeado mercador na cidade argelina de Bugia (hoje, Bougie ou Bejaïa), ele trouxe Leonardo para aprender a arte de calcular (por meio do ábaco Fig. 2). Em Bougie, Fibonacci recebeu aulas de um professor muçulmano que o apresentou para o sistema de numeração indo-arábico. Ele também apresentou Fibonacci a um livro sobre Álgebra, *Hisab al-jabr w’al muqabalah*, escrito pelo matemático persa *Al-Khowarizmi* (cerca de 825). A palavra Álgebra é derivada do título desse livro.

Figura 2 – Leonardo FIBONACCI/Ábaco

FONTE: wikipedia/tecteclas.blogspot.com.br

Na fase adulta, Fibonacci fez frequentes viagens de negócios para o Egito, Síria, Grécia, França e Constantinopla, onde estudou os diversos sistemas de aritmética, em uso, e trocou pontos de vista com os estudiosos nativos. Ele também viveu por um tempo na corte do Imperador Romano, Frederick II (1194-1250), e esteve envolvido em debates científicos com o Imperador e seus filósofos.

Por volta de 1200, com a idade de cerca de 30 anos, Fibonacci voltou para casa, em Pisa. Ele estava convencido da elegância e superioridade prática do sistema indo-arábico sobre o sistema de numeração romana então em uso na Itália. Logo, por volta de 1202, Fibonacci publicou seu trabalho pioneiro, Liber Abaci (a palavra abaci aqui não se refere à calculadora de mão chamada de ábaco). O livro é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos em que o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado, segundo Boyer (1974).

Liber Abaci foi dedicada à Aritmética, Geometria e Álgebra Elementar; introduziu o sistema de numeração indo-arábico e algoritmos aritméticos para a Europa. Na verdade, Fibonacci demonstra, nesse livro, o poder do sistema indo-arábico de forma mais vigorosa do que qualquer trabalho matemático até aquele momento. Os 15 capítulos de Liber Abaci (Livro de Cálculo) explicam as principais contribuições para a Álgebra por Al-Khowarizmi e outro matemático persa, Abu Kamil (cerca de 900). Seis anos mais tarde, Fibonacci revisa Liber Abaci e dedica a segunda edição a Michael Scott, o mais famoso filósofo e astrólogo da corte de Frederico II.

Após Liber Abaci, Fibonacci escreveu três outros livros influentes. Practica Geometriae, escrito em 1220, é dividido em oito capítulos e é dedicado ao Mestre Domonique, sobre o qual pouco se sabe. Esse livro apresenta habilmente Geometria e Trigonometria com rigor euclidiano e alguma originalidade. Fibonacci emprega álgebra para resolver problemas geométricos e geometria para resolver problemas algébricos, uma abordagem radical para a Europa do seu tempo.

Seus dois livros seguintes, a Flos (ou flor) e o Liber Quadratorum (O Livro dos Números Quadrados) foram publicados em 1225. Embora ambos lidassem com a Teoria dos Números, Liber Quadratorum garantiu a Fibonacci sua reputação como um grande teórico das teorias dos números, classificando-o entre o matemático grego Diofanto (cerca de 250 dC) e o matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665). Flos e Liber Quadratorum exemplificam brilho e originalidade do pensamento de Fibonacci, que ofuscaram as habilidades da maioria dos estudiosos do seu tempo.

Segundo Livio:

> [...] Liber Abaci deu a Fibonacci um reconhecimento considerável, e sua fama chegou até aos ouvidos do imperador romano, Frederico II, conhecido como "Stupor Mundi" ("Maravilha do Mundo") por patrocinar a Matemática e a as ciências. [...]. (2015, p. 114)

Em 1225, o Imperador Frederick II queria testar os talentos de Fibonacci. Então ele o convidou ao seu tribunal para um torneio de Matemática. A competição consistia em três problemas.

O primeiro era determinar um número racional x tal que tanto $x^2 - 5$ quanto $x^2 + 5$ fossem quadrados de números racionais.

Fibonacci forneceu-lhe a resposta correta $\left(\frac{41}{12}\right)$:

$$(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$$

e

$$(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2.$$

O segundo problema foi o de obter uma solução da equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

Fibonacci mostrou, geometricamente, que essa equação não tem soluções da forma $\sqrt{a + \sqrt{b}}$. Mas forneceu-lhe uma solução aproximada, 1,3688081075, que é correta até nove casas decimais. Essa resposta aparece no Flos sem qualquer explicação.

O terceiro problema, também registrado no Flos, foi a seguinte questão:

Três homens possuem um monte de moedas, sendo suas partes 1/2, 1/3 e 1/6. Cada homem retira algumas moedas do monte até que nada reste. O primeiro homem põe então de volta 1/2 do que retirou, o segundo 1/3 do que retirou e o terceiro 1/6. Quando se divide igualmente entre os três o total das moedas postas de volta, verifica-se que cada homem fica exatamente com a quantia de moedas que lhe pertence. Quantas moedas havia no monte original e quantas cada homem retirou do monte, Eves (2008).

Fibonacci teria estabelecido que o problema era indeterminado e forneceu-lhe 47 como a menor resposta. No concurso, nenhum dos concorrentes de Fibonacci pôde resolver qualquer um desses problemas.

O Imperador reconheceu as contribuições de Fibonacci para a cidade de Pisa, tanto como professor quanto como cidadão, sendo que a cidade de Pisa forneceu a ele um salário para que pudesse estudar e exercer sua profissão de professor. No século XIX, Fibonacci foi novamente reconhecido e homenageado com uma estátua, por ser um cidadão destaque de Pisa. A princípio, essa estátua ficaria em um jardim em frente ao Rio Arno, perto da Torre de Pisa.

Segundo (KOSHY 2001), não muito tempo depois da morte de Fibonacci, por volta de 1240, mercadores italianos começaram a apreciar o poder do sistema indo-arábico e aprovou-o gradualmente para negócios e transações. Até o final do século XVI, a maior parte da Europa já o tinha adotado. O padrão europeu se manteve por mais de dois séculos, e o Liber Abaci desempenhou um papel significativo na substituição do sistema de numeração romana (complicado para cálculos) para o sistema indo-arábico.

Segundo Franci (2002), os quinze capítulos do Liber Abaci são divididos da seguinte forma: os primeiros sete capítulos (que, na edição impressa, ocupam oitenta páginas) são dedicados à apresentação do novo sistema de numeração e algoritmos relacionados a executar as quatro operações aritméticas.

Do oitavo ao décimo segundo capítulo são abordados assuntos inerentes ao comércio da época. Essa parte em especial é representada de forma minuciosa por Leonardo Fibonacci, por se tratar de algo importante para os comerciantes da época.

O décimo segundo e o décimo terceiro capítulos constituem a maior parte do tratado, tendo diversos problemas que o autor chama de “questiones erratice”, os quais mais se relacionam a questões de “Matemática Recreativa”. Dentre elas, destaca-se a famosa procriação de coelhos, que, séculos mais tarde, daria ao mundo a famosa e intrigante “Sequência de Fibonacci”.

Os dois últimos capítulos do tratado, juntamente com o primeiro, são aqueles que têm o maior impacto sobre o desenvolvimento da Matemática. Juntos, eles constituem o que pode ser considerado o primeiro tratado de Álgebra escrito em Latim. O décimo quarto capítulo é dedicado ao cálculo dos radicais. O capítulo final, o décimo quinto, é dedicado à Geometria e a questões de Álgebra.

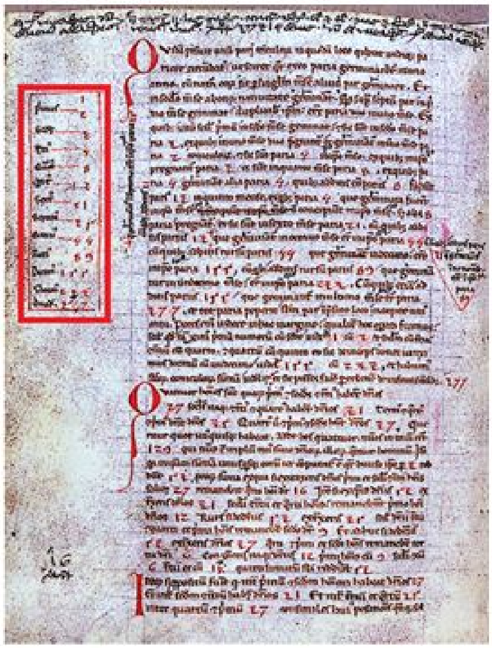
Figura 3 – O Liber Abaci – Representação dos nove algarismos Indo-Arábico

FONTE: Franci (2002)

2.1 O Problema do Coelho

Como já mencionado no décimo segundo capítulo do Liber Abaci (Livro de Cálculo), existem muitos problemas elementares, incluindo o problema com coelhos (fig. 5).

Figura 4 – O problema do Coelho – Na margem esquerda constam os doze primeiros termos destacados do que é atualmente chamado de sequência de Fibonacci



FONTE: Franci (2002)

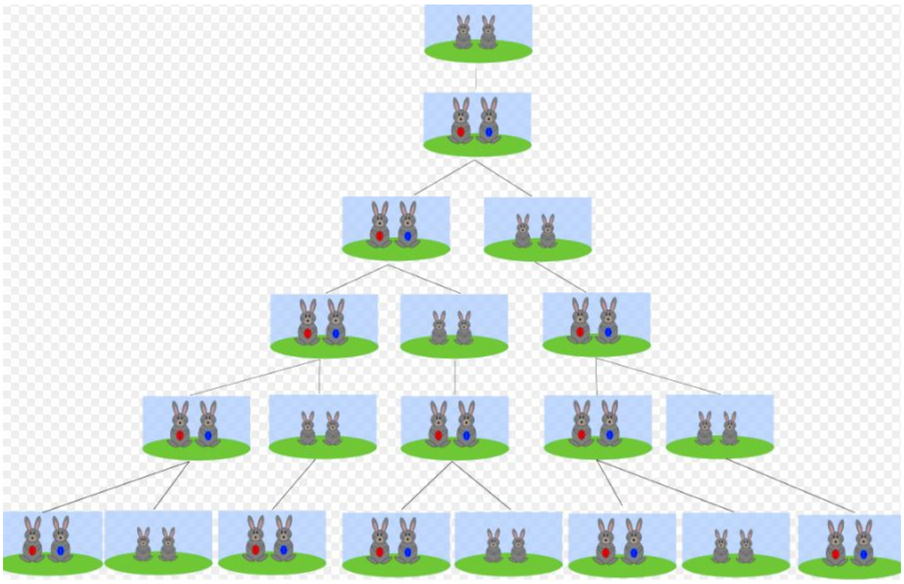
Esse problema sugere que há dois coelhos recém-nascidos, um do sexo masculino e outro do sexo feminino. Considerando algumas regras e evitando-se situações adversas (como a morte de coelhos e a produção de casais inférteis, dentre outras) pede-se para obter o número de coelhos produzidos em um ano, se:

- cada par leva um mês para se tornar maduro;
- cada par produz um par misturado (um casal, férteis) a cada mês, a partir do segundo mês;
- não há coelhos que morrem no decorrer do ano.

Suponha-se, por conveniência, que o par original de coelhos nasceu em 1º de janeiro. Eles levam um mês para se tornarem maduros (capazes de gerar um novo casal). Por isso, há ainda apenas um par em 1º de fevereiro.

Em 1º de março, ambos já com dois meses de idade e produzem um novo par misto, um total de dois pares. Continuando assim, haverá três pares em 1º de abril, cinco pares em 1º de maio, oito pares em 1º de junho, e assim por diante, conforme a Fig. 5 abaixo.

Figura 5 – As gerações do Coelho



FONTE : https://pt.wikipedia.org

A solução dada para esse problema, que é 144 pares de coelhos, a princípio na época sem relatos, não provocou, na classe Matemática, nenhum tipo de curiosidade, porém a sequência que nos possibilita obter essa solução $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots)$, séculos mais tarde, provocaria, em François Edouard Anatole Lucas, surpresa e curiosidade, a ponto de fazer com que ele estudasse a fundo essa sequência, descobrindo sua beleza e aplicabilidade, nomeando-a Sequência de Fibonacci.

3 SEQUÊNCIAS DE LUCAS E FIBONACCI E SUAS PROPRIEDADES

3.1 Lucas e a Sequência de Fibonacci

A sequência numérica $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$ é a famosa sequência de Fibonacci, a qual recebeu esse nome em maio de 1876 do notável matemático francês François Edouard Anatole Lucas (Fig. 6), que, originalmente, chamou-a “série de Lamé", em homenagem ao matemático francês Gabriel Lamé (1795-1870)Koshy (2001).

Figura 6 – François Edouard Anatole Lucas

$FONTE: http: //www.nautilus.com.br/clientes/backup_pontes/biografia/lucas.htm$

Lucas amava computação e desenvolveu planos para um computador, mas nunca se materializou. Além de suas contribuições para a Teoria dos Números, ele é conhecido por seu clássico de quatro volumes sobre matemática recreativa. O mais conhecido dentre todos os problemas que ele desenvolveu é a Torre de Brahma, também conhecida como Torre de Hanói, que consiste em transferir discos de uma torre à outra, como na figura 7. A solução mínima de movimentos nesse jogo é $2^n - 1$. Assim, se a torre tem quatro discos, então a menor quantidade de movimentos será 15.

Figura 7 – Torre de Hánoi

FONTE : http://super.abril.com.br/comportamento/jogo-torre-de-brahma-a-torre-do-fim-do-mundo

Sobre a sequência de Fibonacci estudada por Lucas, essa é uma das sequências de números mais intrigantes, e continua a fornecer amplas oportunidades para os matemáticos profissionais e amadores para fazer conjecturas e para expandir o horizonte sobre a Matemática. Essa sequência é tão importante que uma organização de matemáticos, The Fibonacci Association (Fundada em 1963), foi formada para o estudo de Fibonacci e as sequências relacionadas. Essa associação foi fundada por Verner E. Hoggatt, Jr. (1921-1980), do Colégio San Jose State College (agora, San Jose State University), Califórnia, e o irmão Alfred Brousseau (1907-1988), do Colégio de Santa Maria, também Califórnia. Tal Associação publicou "O Fibonacci Quarterly", dedicado a artigos relacionados com sequências de números inteiros.

Lucas notou que a sequência, intitulada por ele de "Sequência de Fibonacci", tem uma propriedade fascinante: cada número de Fibonacci, exceto os dois primeiros, ou seja, o terceiro, o quarto, o quinto, e assim por diante, é a soma dos dois imediatamente precedentes, conforme apresentada a seguir:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

3.2 Propriedades da sequência de Fibonacci

Os números de Fibonacci satisfazem inúmeras identidades que foram descobertas ao longo dos séculos. A seguir, abordaremos algumas dessas importantes propriedades que foram desenvolvidas por Lucas e outros matemáticos.

3.2.1 Definição Recursiva

Podemos apresentar os termos da sequência de Fibonacci pela seguinte relação de recorrência:

Condições Iniciais:

$$F_1 = F_2 = 1.$$

Relação de Recorrência:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para todo } n \geq 3.$$

Demonstração. Usando a relação de recorrência acima, temos:

$$F_3 = F_2 + F_1,$$

$$F_4 = F_3 + F_2,$$

$$F_5 = F_4 + F_3,$$

$$\ldots$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

3.2.2 Propriedades da soma entre termos da sequência de Fibonacci

Os termos da sequência de Fibonacci apresentam várias propriedades relacionadas à soma dos seus termos. Apresentaremos algumas dessas importantes propriedades que são aplicáveis ao ensino básico, as quais demonstraremos, de modo geral, por indução finita.

Proposição 1. *A soma finita de n de números de Fibonacci é dada por*

$$\sum_{1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Dada a sequência de Fibonacci, é possivel somar uma quantidade finita de elementos dessa sequência utilizando a Proposição 1.

Demonstração. Usando a relação de recorrência da sequência de Fibonacci, temos:

$$F_1 = F_3 - F_2,$$

$$F_2 = F_4 - F_3,$$

$$F_3 = F_5 - F_4,$$

$$\ldots$$

$$F_{(n-1)} = F_{(n+1)} - F_n,$$

$$F_n = F_{(n+2)} - F_{(n+1)}.$$

Adicionando essas equações, obtemos:

$$\sum_{1}^{n} F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

Por exemplo, temos:

$$F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1,$$

$$F_1 + F_2 = 2 = 3 - 1 = F_4 - 1,$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = 4 = 5 - 1 = F_5 - 1,$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 8 = 8 - 1 = F_6 - 1,$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 12 = 13 - 1 = F_7 - 1.$$

Outra maneira de demonstrar essa propriedade é utilizar o método da Indução Matemática.

Demonstração. Para $n = 1$, temos: $F_1 = F_3 - 1$, ou seja, $1 = 1$(Verdade). Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para um inteiro $k \geq 1$:

$$\sum_{1}^{k} F_k = F_{k+2} - 1.$$

Então:

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{k+1} F_i &= \sum_{1}^{k} F_i + F_{k+1}. \\ &= F_{k+2} - 1 + F_{k+1} \\ &= F_{k+1} + F_{k+2} - 1 \\ &= F_{k+3} - 1, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 2. *A soma finita de n números de Fibonacci pertencentes à ordem ímpar é dada por*

$$\sum_{1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

É possível, de forma prática, somar os termos finitos de ordem ímpar da sequência de Fibonacci utilizando a Proposição 2.

Demonstração. Usando a relação de recorrência da sequência de Fibonacci, temos:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 - F_0, \\ F_3 &= F_4 - F_2, \\ F_5 &= F_6 - F_4, \\ &\dots \\ F_{2n-3} &= F_{2n-2} - F_{2n-4}, \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}. \end{aligned}$$

Adicionando essas equações, obtemos:

$$\sum_{1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}.$$

Por exemplo, temos:

$$\sum_{1}^{10} F_{2i-1} = F_{20} = 6765.$$

Proposição 3. *A soma finita de n números de Fibonacci pertencentes à ordem par é dada por*

$$\sum_{1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$$

Também é possível. de forma simples, somar os termos finitos de ordem par da sequência de Fibonacci utilizando a Proposição 3.

Demonstração.

$$\sum_{1}^{n} F_{2i} = \sum_{1}^{2n} F_i - \sum_{1}^{n} F_{2i-1}.$$

Usando as Proposições 1 e 2, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{n} F_{2i} &= (F_{2n+2} - 1) - F_{2n} \\ &= (F_{2n+2} - F_{2n}) - 11 \\ &= F_{2n+1} - 1. \end{aligned}$$

Proposição 4. *A soma finita de n números de Fibonacci ao quadrado é dada por*

$$\sum_{1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

A Proposição 4 nos permite transformar cálculos extensos em um produto simples de termos.

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$\sum_{1}^{1} F_i^2 = F_1^2 = 1^2 = 1 \cdot 1 = F_1 \cdot F_2.$$

Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para um número inteiro positivo arbitrário k.

$$\sum_{1}^{k} F_i^2 = F_k F_{k+1}.$$

Então:

$$\sum_{1}^{k+1} F_i^2 = \sum_{1}^{k} F_i^2 + F_{k+1}^2.$$

Pela hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{k+1} F_i^2 &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} F_{k+2}.\end{aligned}$$

Portanto, por indução finita, a propriedade dada é verdadeira.

Por exemplo:

$$\sum_{1}^{25} F_i^2 = F_{25} F_{26} = 75025 \cdot 121383 = 9107509825.$$

Proposição 5. *A soma finita de n números de Fibonacci, de ordem múltipla de 3, é dada por*

$$F_0 + F_3 + F_6 + \ldots + F_{3n} = \sum_{k=1}^{n} F_{3k} = \frac{F_{3n+2} - 1}{2}.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$\sum_{k=1}^{1} F_{3k} = \frac{F_{3.(k)+2}-1}{2}.$$
$$F_{3(0)}+F_{3(1)} = \frac{F_{3.(1)+2}-1}{2}.$$
$$F_0+F_3 = \frac{F_5-1}{2}$$
$$0+2 = \frac{5-1}{2}$$
$$2 = \frac{4}{2}$$
$$2 = 2.$$

Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = k$:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{3k} = \frac{F_{3k+2}-1}{2}.$$

Desejamos demonstrar que

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{3k} = \frac{F_{3n+5}-1}{2}.$$

Partindo da hipótese de indução e somando a ambos lados F_{3n+3}, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} F_{3k} &= \frac{F_{3n+5}-1}{2} + F_{3n+3}\\ &= \frac{F_{3n+2}-1+2F_{3n+3}}{2}\\ &= \frac{F_{3n+2}+F_{3n+3}-1+F_{3n+3}}{2}\\ &= \frac{F_{3n+4}+F_{3n+3}-1}{2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{3k} = \frac{F_{3n+5}-1}{2},$$

como queríamos provar.

Proposição 6. *A soma finita de n números de Fibonacci, de ordem múltipla de 4, é dada por*

$$F_0+F_4+F_8+...+F_{4n} = \sum_{k=1}^{n} F_{4k} = F_{2n+1}^2 - 1.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} F_{4k} &= F^2_{2.(k)+1} - 1 \\
F_{4.(0)} + F_{4.(1)} &= F^2_{2.(1)+1} - 1 \\
F_0 + F_4 &= F_3^2 - 1 \\
0 + 3 &= 2^2 - 1 \\
3 &= 4 - 1 \\
3 &= 3.
\end{aligned}$$

Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = k$:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{4k} = F^2_{2n+1} - 1.$$

Desejamos demonstrar que

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{4k} = F^2_{2n+3} - 1.$$

Para a demonstração dessa propriedade, teremos que utilizar a Proposição 8, a qual demonstraremos mais adiante:

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}.$$

Partindo da hipótese de indução e somando F_{4n+4} a ambos os lados dessa igualdade, temos

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{4k} = F^2_{2n+1} - 1 + F_{4n+4}.$$

Considerando que $4n+4 = (2n+3)+(2n+1)$ e aplicando a propriedade de soma de subíndices, obtemos:

$$F_{(2n+3)+(2n+1)} = F_{2n}F_{2n+3} + F_{2n+1}F_{2n+4}.$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{4k} = F^2_{2n+1} - 1 + F_{2n}F_{2n+3} + F_{2n+1}F_{2n+4}$$

$$= F_{2n+1}F_{2n+1} - 1 + F_{2n}F_{2n+3} + F_{2n+1}F_{2n+4}$$

$$= F_{2n+1}F_{2n+1} - 1 + F_{2n}F_{2n+3} + F_{2n+1}[F_{2n+3} + F_{2n+2}]$$

$$= F_{2n+1}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} + F_{2n+3}F_{2n+1} + F_{2n}F_{2n+3} - 1$$

$$= F_{2n+1}(F_{2n+1} + F_{2n+2}) + F_{2n+3}(F_{2n+1} + F_{2n}) - 1$$

$$= F_{2n+1}F_{2n+3} + F_{2n+3}F_{2n+2} - 1$$

$$= F_{2n+3}(F_{2n+1} + F_{2n+2}) - 1$$

$$= F_{2n+3}^2 - 1.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} F_{4k} = F_{2n+3}^2 - 1,$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 7. *A soma finita de n números de Fibonacci, de ordem $4k-1$, é dada por*

$$\sum_{k=1}^{1} F_{4k-1} = F_{2n}F_{2n+1}.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$F_{4.(1)-1} = F_{2.(1)}F_{2.(1)+1}.$$

$$F_3 = F_2F_3$$

$$2 = 1.2$$

$$2 = 2.$$

Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = k$:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{4k-1} = F_{2n}F_{2n+1}.$$

Desejamos demonstrar que

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{4k-1} = F_{2n+2}F_{2n+3}.$$

Somando F_{4n+3} a ambos lados da igualdade na hipótese de indução, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} F_{4k-1} = F_{2n}F_{2n+1} + F_{4n+3},$$

e usando $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$, temos

$$F_{4n+3} = F_{(2n+1)(2n+2)} = F_{2n}F2n+2+F2n+1F_{2n+3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} F_{4k-1} &= F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n}F_{2n+2} + F_{2n+1}F_{2n+3} \\ &= F_{2n}(F_{2n+1} + F_{2n+2}) + F_{2n+1}F_{2n+3} \\ &= F_{2n}F_{2n+3} + F_{2n+1}F_{2n+3} \\ &= F_{2n+3}(F_{2n} + F_{2n+1}) = F_{2n+3}F_{2n+2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{4k-1} = F_{2n+2}F_{2n+3},$$

como queríamos demonstrar.

3.2.3 Produto dos termos da sequência de Fibonacci

Proposição 8.

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}, \ \textit{para } m > 1, n > 1.$$

Demonstração. Demonstraremos essa proposição por indução sobre m.

Para $m = 1$, temos

$$F_{n+1} = F_0F_n + F_1F_{n+1}.$$

Como $F_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned}F_{n+1} &= F_0F_n + F_1F_{n+1}, \\ F_{n+1} &= F_0F_n + F_1F_{n+1}, \\ F_{n+1} &= F_1F_{n+1} = F_{n+1}.\end{aligned}$$

Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $m = k+1$ e todos os anteriores, em particular, para $m = k$. Demonstraremos que é verdadeira para $m = k+2$:

$$F_{n+k} = F_{k-1}F_n + F_kF_{k+1}$$

e

$$F_{n+k+1} = F_k F_n + F_{k+1} F_{n+1}.$$

Demonstremos que

$$F_{n+k+2} = F_{k+1} F_n + F_{k+2} F_{n+1}.$$

Somando termo a termo as fórmulas para $m = k$ e para $m = k+1$, obtemos

$$F_{n+k} + F_{n+k+1} = (F_{k-1} F_n + F_k F_n) + (F_k F_{n+1} + F_{k+1} F_{n+1}),$$
$$F_{n+k+2} = F_n (F_{k-1} + F_k) + F_{n+1} (F_k + F_{k+1}).$$

Portanto,

$$F_{n+k+2} = F_n F_{k+1} + F_{n+1} F_{k+2},$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 9. *Diferença entre dois termos de Fibonacci ao quadrado:*

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$$

Demonstração. Usando a Propriedade 9 e considerando $m = n$, obtemos

$$F_{2n} = F_{n-1} F_n + F_n F_{n+1}.$$

Fatorando o segundo membro dessa igualdade, obtemos $F_{2n} = F_n (F_{n-1} + F_{n+1})$, e como $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$, substituindo na igualdade sob análise, temos

$$F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}).$$

Portanto,

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2,$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 10. *Identidade de Cassini*

Para todo ”n” *natural,*

$$F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$F_{1-1}F_{1+1} - F_1^2 = (-1)^1$$

$$F_0F_2 - F_1^2 = (-1)^1$$

$$1.1 - 1^2 = (-1)^1$$

$$-1 = -1.$$

Temos, por hipótese de indução,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Devemos demonstrar que

$$F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

Partindo da hipótese de indução e a multiplicando por $(-1)^1$ ambos os lados, obtemos

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

Logo, somando $F_nF_{n+1} - F_nF_{n-1}$, temos:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} + F_nF_{n+1} - F_nF_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

$$F_n(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}(F_{n-1} + F_n) = (-1)^{n+1}$$

$$F_nF_{n+2} - F_{n+1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Portanto,

$$F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1},$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 11. *A soma finita de n produtos de pares de números consecutivos de Fibonacci é dada por*

$$F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$F_{2.(1)-1}F_{2.(1)} = F_{2.(1)}^2$$

$$F_1F_2 = F_2^2$$
$$1.1 = (1)^2$$
$$1 = 1.$$

Dada a hipótese de indução

$$F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$$

, devemos demonstrar que

$$F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} = F_{2n+2}^2.$$

Somando $F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2}$ a ambos os lados da hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned} F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} &= F_{2n}^2 + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} \\ &= F_{2n}^2 + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} \\ &= F_{2n}(F_{2n} + F_{2n+1}) + F_{2n+1}F_{2n+2} \\ &= F_{2n}F_{2n+2} + F_{2n+1}F_{2n+2} \\ &= F_{2n+2}(F_{2n} + F_{2n+1}) \\ &= F_{2n+2}F_{2n+2} \\ &= F_{2n+2}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} = F_{2n+2}^2,$$

como queríamos demonstrar.

3.3 Sequência de Lucas e as suas Propriedades

Analogamente às identidades anteriores de Fibonacci, Lucas também formulou algumas identidades baseando-se nos termos de sua sequência, intitulada Sequência de Lucas, que é a sequência dada a seguir:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \ldots,$$

a qual satisfaz as seguintes condições iniciais e a seguinte relação de recorrência:

Condições Iniciais:

$$L_1 = 1,$$
$$L_2 = 3.$$

Relação de Recorrência

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$$

Proposição 12. *A soma de n números de Lucas*

$$\sum_1^n L_i = L_{n+2} - 3.$$

Demonstração. Usando a relação de recorrência de Lucas, temos:

$$L_1 = L_3 - L_2,$$
$$L_2 = L_4 - L_3,$$
$$L_3 = L_5 - L_4,$$
$$............$$
$$L_{n-1} = L_{n+1} - L_n,$$
$$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}.$$

Adicionando essas equações, membro a membro, obtemos:

$$\sum_1^n L_i = L_{n+2} - L_2 = L_{n+2} - 3.$$

Proposição 13. *A soma de n números de Lucas pertencentes à ordem ímpar é dada por*

$$\sum_1^n L_{2i-1} = L_{2n} - 2.$$

Demonstração. Usando a relação de recorrência de Lucas, temos:

$$L_1 = L_2 + L_0,$$
$$L_3 = L_4 - L_2,$$
$$L_5 = L_6 - L_4,$$

....

$$L_{2n-3} = L_{2n-2} - L_{2n-4},$$

$$L_{2n-1} = L_{2n} - L_{2n-2}.$$

Adicionando essas equações, membro a membro, e considerando $L_0 = 2$, obtemos

$$\sum_1^n L_{2i-1} = L_{2n} + L_0 = L_{2n} - 2.$$

Proposição 14. *A soma de n números de Lucas pertencentes à ordem par é dada por*

$$\sum_1^n L_{2i} = L_{2n+1} - 1.$$

Demonstração. Usando a relação de recorrência de Lucas, temos:

$$\sum_1^n L_{2i} = \sum_1^{2n} L_i - \sum_1^n L_{2i-1}.$$

Usando, agora, 3.2.6 e 3.2.7, temos

$$\begin{aligned} \sum_1^n L_{2i} &= (L_{2n+2} - 3) - (L_{2n} - 2) \\ &= (L_{2n+2} - L_{2n}) - 1. \end{aligned}$$

Portanto, por definição, temos

$$\sum_1^n L_{2i} = L_{2n+1} - 1.$$

Proposição 15. *A soma dos termos da sequência de Lucas com índices múltiplos de 3 é dada por*

$$L_3 + L_6 + L_9 + ... + L_{3k} = \sum_{k=1}^n L_3k = \frac{L_{3n+2} - 3}{2}.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$\sum_{k=1}^n L_{3k} = 4 = \frac{8}{2} = \frac{11 - 3}{2} = \frac{L_5 - 3}{2} = \frac{L_{3+2} - 3}{2} = \frac{L_{3n+2} - 3}{2}.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} L_{3k} = \frac{L_{3n+2} - 3}{2}.$$

Temos, por hipótese de indução,

$$\sum_{k=1}^{n} L_{3k} = \frac{L_{3n+2} - 3}{2}.$$

Desejamos demonstrar que

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{3k} = \frac{L_{3n+5} - 3}{2}.$$

Somando L_{3n+3} a ambos os membros na hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} L_{3k} &= \frac{L_{3n+2} - 3}{2} + L_{3n+3} \\
&= \frac{L_{3n+2} - 3 + 2L_{3n+3}}{2} \\
&= \frac{L_{3n+2} + L_{3n+3} - 3 + L_{3n+3}}{2} \\
&= \frac{L_{3n+4} - 3 + L_{3n+3}}{2} \\
&= \frac{L_{3n+4} + L_{3n+3} - 3}{2} \\
&= \frac{L_{3n+5} - 3}{2},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 16. *A soma de n números de Lucas ao quadrado é dada por*

$$\sum_{1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2.$$

Demonstração. Para $n = 1$,

$$\sum_{1}^{n} L_i^2 = L_1^2 = 1^2 = 1.1 = 1 = 3 - 2 = L_1.L_2 - 2,$$

de modo que a proposição é verdadeira.

Suponhamos que a proposição seja verdadeira para um número inteiro positivo arbitrário k:

$$\sum_{1}^{k} L_i^2 = L_k L_{k+1} - 2.$$

Então:

$$\sum_{1}^{k+1} L_i^2 = \sum_{1}^{k} L_i^2 + L_{k+1}^2.$$

Pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{k+1} L_i^2 &= L_k L_{k+1} - 2 + L_{k+1}^2 \\ &= L_{k+1}(L_k + L_{k+1}) - 2 \\ &= L_{k+1} L_{k+2} - 2.\end{aligned}$$

Portanto, por indução, a proposição é verdadeira.

3.4 Relação entre as sequências de Fibonacci e de Lucas

As sequência de Lucas e de Fibonacci podem se relacionar por meio dos seus termos, originando algumas propriedades interessantes que apresentaremos a seguir.

Proposição 17.

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned}L_1 &= F_0 + F_2 \\ 1 &= 0 + 1 \\ 1 &= 1.\end{aligned}$$

Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Se $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, então $L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$.

Por definição, $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ representa a sequência dos números de Lucas, e, dado que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ e $L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$, temos

$$\begin{aligned}L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} \\ L_{n+1} &= (F_{n-1} + F_{n+1}) + (F_{n-2} + F_n) \\ L_{n+1} &= (F_{n-1} + F_{n-2}) + (F_{n+1} + F_n) \\ L_{n+1} &= L_n + L_{n+2},\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 18. *(Identidade Fundamental)*

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^2.$$

Demonstração. Com base na Proposição 17, temos

$$\begin{aligned}
L_n^2 - 5F_n^2 &= (F_{n-1} + Fn + 1)^2 - 5F_n^2 \\
&= F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 + 2F_{n-1}F_{n+1} - 5F_n^2 \\
&= F_{n-1}^2 + (F_{n-1} + F_n)^2 + 2F_{n-1}F_{n+1} - 5F_n^2 \\
&= F_{n-1}^2 + F_{n-1}^2 + F_n^2 + 2F_{n-1}F_n + 2F_{n-1}F_{n+1} - 5F_n^2 \\
&= 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n + 2F_{n-1}F_{n+1} - 4F_n^2 \\
&= 2F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) + 2F_{n+1}F_{n-1} - 4F_n^2 \\
&= 4F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) - 4F_n^2 \\
&= 4F_{n-1}F_{n+1} - 4F_n^2 \\
&= (F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2).
\end{aligned}$$

Usando a Identidade de Cassini (Proposição 10: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^2$), concluímos que

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^2,$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 19.

$$F_n = \frac{1}{5}(L_{n-1} + L_{n+1}).$$

Demonstração. Para demonstrar essa proposição, substituímos $L_n = F_{n-1}F_{n+1}$ na expressão acima, e, assim, temos

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{5}[(F_{n-2}+F_n)+(F_n+F_{n+2}) \\
&= \frac{1}{5}[(F_{n-2}+2F_n+F_{n+2})] \\
&= \frac{1}{5}[(F_{n-2}+F_{n-1}-F_{n-1}+2F_n+F_{n+2})] \\
&= \frac{1}{5}[(F_n-F_{n-1}+2F_n+F_{n+2})] \\
&= \frac{1}{5}(F_n-F_{n-1}+2F_n+F_n+F_{n+1}) \\
&= \frac{1}{5}(4F_n+F_{n+1}-F_{n-1}) \\
&= \frac{1}{5}(4F_n+F_n) \\
&= \frac{1}{5}(5F_n).
\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{1}{5}(L_{n-1}+L_{n+1}) = F_n$.

Proposição 20. *O dobro de um número de Fibonacci é igual à soma do antecessor desse número com o de Lucas, de mesma ordem:*

$$2F_{n+1} = F_n + L_n.$$

Demonstração. Para demonstrar essa proposição, procedemos como segue

$$\begin{aligned}
F_n+L_n &= (F_{n+1}-F_{n-1})+(F_{n+1}+F_{n-1}) \\
&= F_{n+1}-F_{n-1}+(F_{n+1}+F_{n-1} \\
&= F_{n+1}+(F_{n+1} \\
&= 2F_{n+1}
\end{aligned}$$

ou

$$\frac{1}{2}(F_n+L_n) = F_{n+1},$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 21. *Qualquer número de Fibonacci F_{m+n} é a média aritmética dos produtos alternados F_mL_n e L_mF_n, em que L_m e L_n são números de Lucas:*

$$F_{m+n} = \frac{1}{2}(F_mL_n + L_mF_n).$$

Demonstração. De acordo com a identidade da soma dos números de Fibonacci, temos

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n.$$

Substituindo, nessa igualdade, $F_{n+1} = \frac{1}{2}(F_n + L_n)$, temos

$$\begin{aligned}
F_{m+n} &= 2F_n \left[\frac{1}{2}(F_n + L_n)\right] + F_n \left[\frac{1}{2}(F_{m-2} + L_{m-2})\right] \\
&= \frac{1}{2}[F_m(F_n + L_n) + F_n(F_{m-2} + L_{m-2})] \\
&= \frac{1}{2}[(F_m F_n + F_m L_n) + (F_n F_{m-2} + F_n L_{m-2})].
\end{aligned}$$

Substituindo, agora, $L_{m-2} = L_m - L_{m-1}$, nessa igualdade, temos

$$\begin{aligned}
F_{m+n} &= \frac{1}{2}[F_m F_n + F_m L_n + F_n F_{m-2} + F_n(L_m - L_{m-1})] \\
&= F_{m+n} = \frac{1}{2}[F_m F_n + F_m L_n + F_n F_{m-2} + F_n L_m - F_n L_{m-1})].
\end{aligned}$$

Dado que $L_{m-1} = F_{m-2} + F_m$, temos

$$\begin{aligned}
F_{m+n} &= \frac{1}{2}[F_m F_n + F_m L_n + F_n F_{m-2} + F_n L_m - F_n(F_{m-2} + F_m)] \\
&= \frac{1}{2}[F_m F_n + F_m L_n + F_n F_{m-2} + F_n L_m - F_n F_{m-2} - F_n F_m)].
\end{aligned}$$

Cancelando os termos semelhantes, obtemos, finalmente,

$$F_{m+n} = \frac{1}{2}(F_m L_n + L_m F_n),$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 22. *A soma finita de n números de Fibonacci, de ordem $4k-2$, é o número de Fibonacci de ordem $4n$:*

$$\sum_{k=1}^{n} L_{4k-2} = F_{4n}.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} L_{4k-2} = L_2 = 3 = F_4.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} L_{4k-2} = F_4.$$

Considerando, como hipótese de indução,

$$\sum_{k=1}^{n} L_{4k-2} = F_{4n},$$

devemos demonstrar que

$$\sum_{k=1}^{n} L_{4k-2} = F_{4n+4}.$$

Somando $L_4n + 2$ a ambos os lados da igualdade na hipótese de indução, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{4k-2} = F_{4n} + L_{4n+2},$$

e, substituindo $L_{4n+2} = F_{4n+1} + F_{4n+3}$ nessa igualdade, temos

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{4k-2} = F_{4n} + F_{4n+1} + F_{4n+3} = F_{4n+2} + F_{4n+3} = F_{4n+4}.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n+1} L_{4k-2} = F_{4n+4},$$

Portanto, por indução finita, a proposição é verdadeira.

As propriedades que abordamos até agora, relacionadas à sequência de Fibonacci, foram apresentadas em grande parte por Lucas. Não se tem informação se Fibonacci tinha conhecimento dessas relações. Se ele tinha ou não, não há registros que comprovem que essas demonstrações teriam sido feitas anteriormente por ele.

Na verdade, a primeira confirmação por escrito da relação de recorrência apareceu quatro séculos mais tarde, quando o grande matemático holandês Albert Girard (1595-1632) formulou $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (KOCHY, 2001, p.6), que é a definição da sucessão de Fibonacci. No entanto, outro grande matemático e astrônomo alemão, Johannes Kepler (1571-1630), escreveu que Fibonacci devia ter, certamente, notado essa relação recursiva. Embora não haja comprovações escritas, segundo P. Singh de Raj Narain College, em Bihar, na Índia, essa sequência de Fibonacci já era conhecida na Índia há séculos, por Virahanka (entre 600 e 800 dC), Gopala (antes de 1135 dC) e Hemacandra (cerca de 1150 dC). Na verdade, números de Fibonacci também ocorreram como um caso especial em uma fórmula estabelecida por Narayana Pandita (1356 dC).

Dentro dessas propriedades e fatos históricos apresentados acima, acerca da sequência de Fibonacci, surge uma questão: é possível o cálculo direto de qualquer termo da sequência? (Em outras palavras: existe uma fórmula fechada que nos permita o cálculo imediato de qualquer termo?) A resposta para essa questão está na figura de Jacques Phillipe Marie Binet (1786- 1856), que apresentou a fórmula que propicia o cálculo do "n-ésimo" termo, a qual apresentaremos a seguir.

3.5 A Fórmula de Binet

Segundo Ferreira (2007, p.19), na metade do século XIX, o matemático francês Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856) (Fig. 8) redescobriu uma expressão que, claramente, era conhecida no século XVIII pelo matemático Leonard Euler (1707-1783) e pelo também matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754). Essa fórmula possibilita o cálculo de qualquer termo da sequência de Fibonacci.

Figura 8 – Binet

FONTE:$https://en.wikipedia.org/wiki/Jacques_Philippe_Marie_Binet$

A fórmula em questão é dada abaixo:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\Phi)^n}{\sqrt{5}},$$

sendo que, quando n tende ao infinito, temos

$$F_n = \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}},$$

em que $\Phi = 1.618033\ldots$, ou seja, Φ é um número irracional (conhecido como número de ouro ou razão áurea), do qual trataremos adiante.

A demonstração de que está fórmula é válida é por indução finita, como segue.

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \\
&= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned}
F_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{4}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right] \\
&= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo, a fórmula é válida para $n = 1$ e para $n = 2$, satisfazendo a base da indução finita.

Hipótese de Indução: a fórmula de Binet é válida para $n = k$ e também para $n = k+1$, sendo k um inteiro positivo. Assim:

$$F_k + F_{k+1} = F_{k+2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right] = F_{k+2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}.\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = F_{k+2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right]-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]=F_{k+2}.$$

Com o cálculo auxiliar, temos

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1\pm2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6\pm2\sqrt{5}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Assim, podemos afirmar que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=F_{k+2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}.\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]-\frac{1}{\sqrt{5}}.\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]=F_{k+2},$$

ou seja,

$$F_{k+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}.\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right].$$

Logo, a fórmula de Binet é válida para $n=k+2$. Portanto, por indução, a é válida, para todo n inteiro positivo.

3.6 Teoria Elementar dos Números e os Termos da Sequência de Fibonacci

Nesta seção, abordaremos algumas relações entre os termos da sequência de Fibonacci e alguns conceitos da Teoria Elementar dos Números correlatos.

3.6.1 Máximo Divisor Comum dos Termos da Sequência de Fibonacci

Apresentaremos algumas propriedades que relacionam máximo divisor comum e termos da sequência de Fibonacci.

Teorema 1. *Dois termos de Fibonacci consecutivos são primos entre si*

$$(F_n,F_{n+1})=1.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$(F_1, F_2) = (1, 1) = 1.$$

Considerando como hipótese de indução

$$(F_n, F_{n+1}) = 1,$$

devemos demonstrar que

$$(F_{n+1}, F_{n+2}) = 1.$$

Se $d = (F_{n+1}, F_{n+2})$, então $d|F_{n+1}$ e $d|F_{n+2}(= F_{n+1} + F_n)$. Assim, $d|F_n$. Logo, d é um divisor comum de F_n e F_{n+1}, de modo que $d|(F_n, F_{n+1}) = 1$. Uma vez que $d > 0$, temos que, necessariamente, $d = 1$, como queríamos demonstrar.

Teorema 2. *O máximo divisor comum dos termos F_n e o F_{n+3} é 1 ou 2, ou seja,*

$$(F_n, F_{n+3}) = 1$$

ou

$$(F_n, F_{n+3}) = 2.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$(F_1, F_4) = (1, 3) = 1.$$

Considerando como hipótese de indução

$$(F_n, F_{n+3}) = 1$$

ou

$$(F_n, F_{n+3}) = 2,$$

devemos demonstrar que

$$(F_{n+1}, F_{n+4}) = 1$$

ou

$$(F_{n+1}, F_{n+4}) = 2.$$

Se $d|(F_{n+1}, F_{n+4})$, então $d|F_{n+1}$ e $d|F_{n+4}$.

Como

$$\begin{aligned} F_{n+4} &= F_{n+3} + F_{n+2} \\ &= F_{n+2} + F_{n+1} + F_{n+2} \\ &= 2F_{n+2} + F_{n+1}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

segue que $d|(2F_{n+2}+F_{n+1})$ e $d|F_{n+1}$. Assim, $d|2F_{n+2}$. Logo, $d|2$ ou $d|F_{n+2}$.

Caso 1. Se $d|2$, então $d=1$ ou $d=2$.

Caso 2. $d|F_{n+2}$. Como $d|F_{n+1}$, então $d|(F_{n+2},F_{n+1}) = 1$. Assim, $d = 1$. Logo, $(F_n,F_{n+3}) = 1$ ou $(F_n,F_{n+3}) = 2$, como queríamos demonstrar.

Teorema 3. *Se m divide n, então F_m divide F_n.*

$$m|n \Rightarrow F_m|F_n.$$

Demonstração. Vamos demonstrar que $F_m|F_{mn}$, por indução sobre n.

Consideremos $k = mn$.

Para $n=1$, $F_m|F_m$ e $F_m = F_k$, de modo que $F_m|F_k$.

Suponhamos que a propriedade seja verdadadeira para n.

Se $k_1 = mn$, então $F_m|F_{mn} = F_{k_1}$. Devemos demonstrar essa relação para $n+1$, $k_1 = mn$. Somando m a ambos os lados, temos $k_1+m = mn+m$ e $k_1+m = k_2$. Assim, $k_2 = m(n+1)$ e $m|k_2$.

Se $F_{k_1+m} = F_{k_1-1}F_m + F_{k_1}Fm+1$, então, por hipótese de indução, temos $F_m|F_m$ e $F_m|F_{k_1}$. Logo, $F_m|F_mFk1-1$ e $F_m|F_{k_1}F_{m+1}$. Assim, F_m divide uma combinação linear desses dois, que é exatamente F_{k_1+m}. Logo,

$$F_m|F_{k_1+m} = F_{mn+n} = F_{m(n+1)},$$

concluindo, assim, que $F_m|F_{m(n+1)}$, como queríamos demonstrar.

O teorema a seguir (ainda sobre o relacionamento entre o máximo divisor comum e os termos de Fibonacci, cuja demonstração omitimos) tem o intuito de nos auxiliar nas demonstraçóres de alguns critérios que abordaremos adiante.

Teorema 4.

$$(F_m,F_n) = F_{(m,n)}.$$

3.6.2 Propriedades da divisibilidade dos termos da Sequência de Fibonacci

Apresentaremos, agora, somente dois critérios de divisibilidade envolvendo os termos da sequência de Fibonacci, embora saibamos da existência de outros.

Critério 1. Um número de Fibonacci é par se e somente se o seu subíndice é divisível por 3.

($\Longleftarrow$) Se $3|m$, então, pelo Pelo Teorema 3, $F_3|F_m$, e como $F_3 = 2$, então $2|F_m$. Portanto, $F_m = 2k$, ou seja, F_m é par.

($\Longrightarrow$) Se F_m é par, então $F_m = 2k$. Logo, $2|F_m$, e como $F_3 = 2$, então $F_3|F_m$, e também como o máximo divisor comum de F_3 e F_m é F_3, então, pelo Teorema 4, $(F_3, F_m) = F(3, m) = 3$. Portanto, $3|m$.

Critério 2. Um número de Fibonacci é divisível por 3 se e somente se o seu subíndice é divisível por 4.

($\Longleftarrow$) Se $4|m$, então $F_4|F_m$, pelo Teorema 3, e como $F_4 = 3$, então $3|F_m$.

($\Longrightarrow$) Se $3|F_m$ e $F_4 = 3$, então $F_4|F_m$ e $(F_4, F_m) = F_{(4,m)}$, pelo teorema 4, e sabendo que o máximo divisor comum de F_4 e F_m é F_4, então $F_{(4,m)} = F_4$, Logo, $(4, m) = 4$. Portanto, $4|m$.

3.7 Teorema de Zeckendorf

Figura 9 – Edouard Zeckendorf

FONTE: Kimberling (1998)

Zeckendorf nasceu em Liège, na Bélgica, em 2 de maio de 1901. Em 1925, formou-se em Medicina pela Universidade de Liège. Em seguida, foi incorporado ao exército belga, exercendo a função de médico. Quando o exército alemão invadiu a Bélgica, foi feito prisioneiro de guerra e permaneceu na prisão até 1945. Durante esse período, prestou serviços aos prisioneiros aliados. Zeckendorf despediu-se do exército com a patente de coronel, em 1957. Mas, qual a relação entre a Matemática e Zeckendorf? No campo da Matemática, mais precisamente na Teoria Elementar dos Números, foi conhecido por seu trabalho em relação aos números pertencentes à sequência de Fibonacci, enunciou um teorema e o demonstrou, sendo este conhecido por Teorema de Zeckendorf, que trata da representação dos números naturais em termos de números da sequência de Fibonacci.

Teorema 5. *Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de termos da sequência de Fibonacci, de índices não consecutivos e maiores que* 1

Demonstração. Iniciamos mostrando a existência da representação, usando indução finita em n. Temos: $1 = F_2$, $2 = F_3$, $3 = F_4$, $4 = 3+1 = F_4 + F_2$, $5 = F_5$, $6 = F_5 + F_2$ e, assim, o resultado vale para todo $n \leq 6$. Suponhamos que o resultado valha até um certo k. Se $k+1$ é um termo da sequência de Fibonacci, então está demonstrado. Caso contrário, existe um j tal que $F_j < k+1 < F_{j+1}$. Logo, $a = k+1-F_j$ é menor que F_{j-1}. De fato, se $a \geq F_{j-1}$, então $k+1 = a+F_j \geq F_{j-1}+F_j = F_j+1$, o que é uma contradição. Assim, por hipótese de indução, segue que "a" é soma de termos não consecutivos da sequência de Fibonacci, dentre os quais o maior deles é menor que F_{j-1}. Portanto, $k+1$ pode ser escrito como soma de termos não consecutivos da sequência de Fibonacci.

Agora, demonstraremos a unicidade dessa representação. Suponhamos que a representação seja única até um certo k e que $k+1 = F_{a_0} + F_{a_1} + \ldots + F_{a_r} = F_{b_0} + F_{b_1} + \ldots + F_{b_s}$, com $a_i + 1 < a_{i+1}$ e $b_j + 1 < b_{j+1}$. Então $F_{a_r} \leq F_{a_0} + F_{a_1} + \ldots + F_{a_r} = F_{b_0} + F_{b_1} + \ldots + Fb_s \leq F_{b_s} + F_{b_s-2} + \ldots + F_t = F_{b_s+1} - 1$, onde $t = 2$, se b_s é par, e $t = 3$, se b_s é ímpar. Logo, $F_{a_r} < F_{b_s} + 1$ e, assim, $a_r < b_s + 1$, ou seja, $a_r \leq b_s$. De maneira análoga, podemos demonstrar que $b_s \leq a_r$ e, portanto, $a_r = b_s$. Usando a hipótese de indução, concluímos que $r-1 = s-1$ e que $a_i = b_j$, para $i, j \in 0, 1, ..., r-1$. Portanto, está demonstrada a unicidade.

Por exemplo, a representação do número 100, conforme o Teorema de Zeckendorf, é dada de maneira única por

$$100 = 89 + 8 + 3.$$

Há outras maneiras de representar o número 100 como soma dos números de Fibonacci, por exemplo:

$$100 = 89 + 8 + 2 +;$$

$$100 = 55 + 34 + 8 + 3.$$

No entanto, elas não satisfazem o Teorema de Zeckendorf.

O Teorema de Zeckendorf servirá como suporte para as atividades que propomos neste trabalho (último capítulo).

3.8 A Razão Áurea e as Relações com as Sequências de Fibonacci e Lucas

Para QUEIROZ (2007, p.4),

> A razão áurea representa a mais agradável proporção entre duas medidas. Os gregos antigos a designavam como “divisão de um segmento em média e extrema razão” ou simplesmente “secção”. No inicio do século XXI, convencionou-se identificá-la pela letra grega Φ (maiúsculo) (lê-se: “Fi”), em homenagem ao arquiteto e escultor Phidias, responsável pelo templo grego Parthenon. Φ é o numero irracional $1,618\ldots$ obtido matematicamente por meio de sequências contínuas infinitas, deduções algébricas ou geométricas.

O “número de ouro”, razão áurea ou segmento dourado, denotado pela letra grega maiúscula Φ, aparece em várias situações geométricas que abordaremos a seguir. Na Figura 10, temos o Partenon, em Atenas, na Grécia, que foi arquitetado por Phideas.

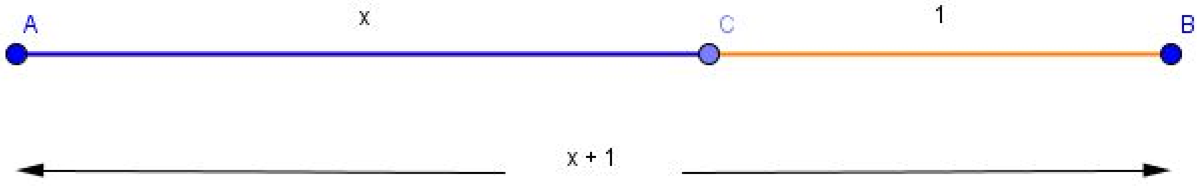
Figura 10 – Partenon

FONTE: https://br.pinterest.com

3.8.1 O Segmento Dourado

O segmento áureo (Figura 11) foi definido pela primeira fez por Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C., conforme apontado por Lívio (2015), como uma linha reta cortada na razão extrema e média: assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.

Figura 11 – Segmento Dourado



FONTE: Autor

De acordo com a definição de segmento áureo, temos a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

A solução positiva dessa equação é

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

a qual representa o número de ouro ($\Phi = 1{,}6180339\ldots$). Isto é, a razão entre as duas partes que se dividem é o número de ouro $\Phi(Fi)$.

3.8.2 O Retângulo Dourado

Em outra situação geométrica, em um retângulo, encontramos também o número de ouro $\Phi(Fi)$, por meio da razão entre o comprimento desse retângulo e a sua largura, como veremos a seguir.

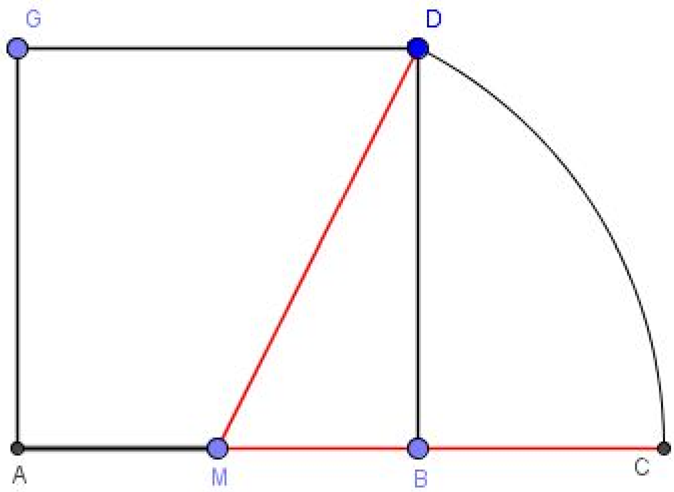
Construiremos um quadrado e seu prolongamento (Figura 12) seguindo os seguintes passos:

1º desenhar um quadrado de lado AB e marcar o ponto médio M;

2º unir o ponto médio M ao vértice D do lado oposto;

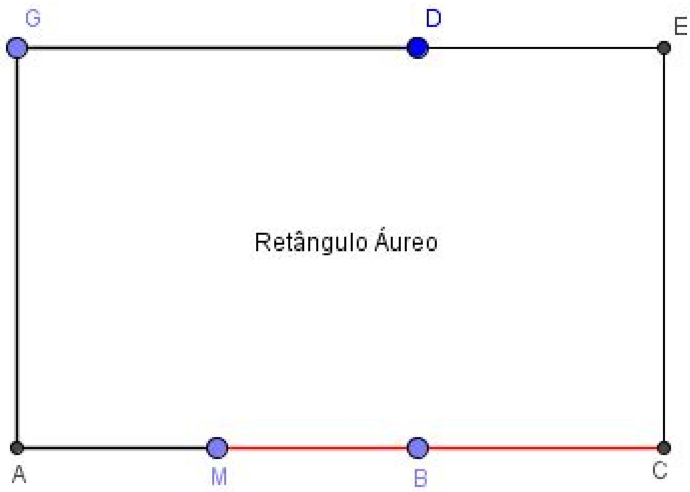
3º desenhar, sobre o lado AB, o segmento MC de comprimento igual ao de MD, de modo a obter o lado AC (o maior lado do retângulo $ACEG$, Figura 13.

Figura 12 – Quadrado



FONTE: Autor

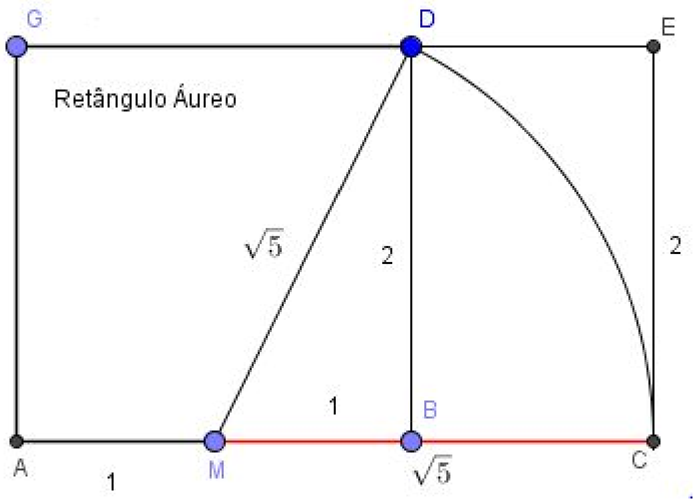
Figura 13 – Retângulo



FONTE: Autor

Agora, considere o lado do quadrado $AB = 2$ (unidades). Assim, temos que o lado AC do retângulo mede $1+\sqrt{5}$ (Figura 13), de maneira que a razão entre as duas partes (AC/EC) é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (o número de ouro).

Figura 14 – Retângulo Áureo

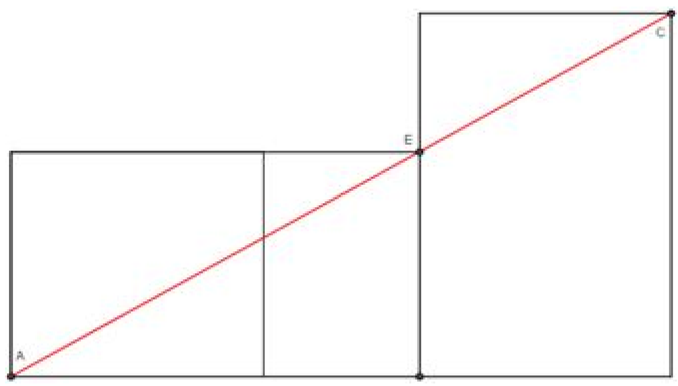


FONTE: Autor

Assim, obtivemos um retângulo cujos lados estão na proporção áurea. A partir desse retângulo, poderemos construir outros, essa razão foi utilizada na arquitetura (Parthenon, as pirâmides egípcias) design (cartões de crédito, cartões de identificação, caixas de rapé, etc...), dentre outras.

Uma propriedade importante dos retângulos de ouro, é que quando dois retângulos iguais a (Fig. 14), são colocados juntos, sendo o primeiro na posição original, e o outro em pé como mostrado na (Fig. 15), os três pontos A, E e C, ficam alinhados, ou seja, AC é a diagonal que contém esses três pontos.

Figura 15 – Retângulos de Ouro



FONTE: Autor

Na verdade, nós colocamos os retângulos em um sistema de coordenadas com origem no ponto A. As coordenadas dos três pontos são, então: $A(0,0)$, $E(1+\sqrt{5},2)$ e $C(3+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$.

Vamos demonstrar que os vetores $\overrightarrow{AC}=(3+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$ e $\overrightarrow{AE}=(1+\sqrt{5},2)$ são proporcionais.

Demonstração. Basta dividirmos as coordenadas correspondentes desses vetores:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})}.\frac{(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})} = \frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{1-5} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-4} = \Phi$$

A divisão das ordenadas já é o próprio Φ.

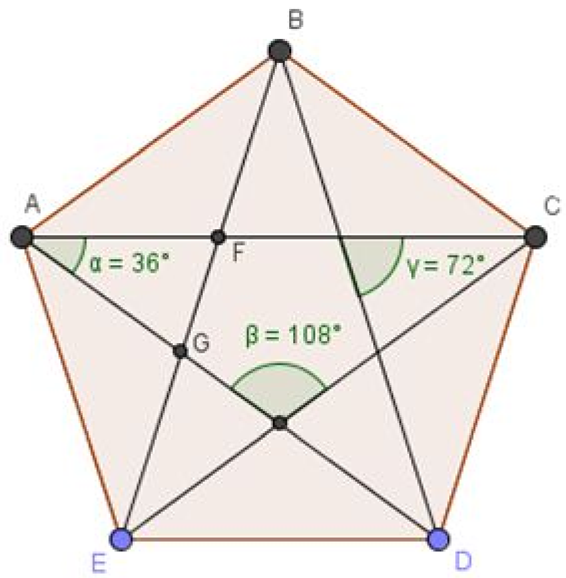
Portanto, os três pontos A, E e C são colineares.

3.8.3 A Trigonometria Dourada

Na Trigonometria, também temos a presença da razão áurea, como veremos a seguir, considerando um pentágono regular, para o que usaremos as leis do seno.

Considere um pentágono regular no qual explicitamos as diagonais (Figura 16).

Figura 16 – Pentágono Regular



FONTE: Autor

Nessa figura, apenas três ângulos diferentes aparecem. Eles medem 36°, 72° e 108°. A relação entre esses ângulos é

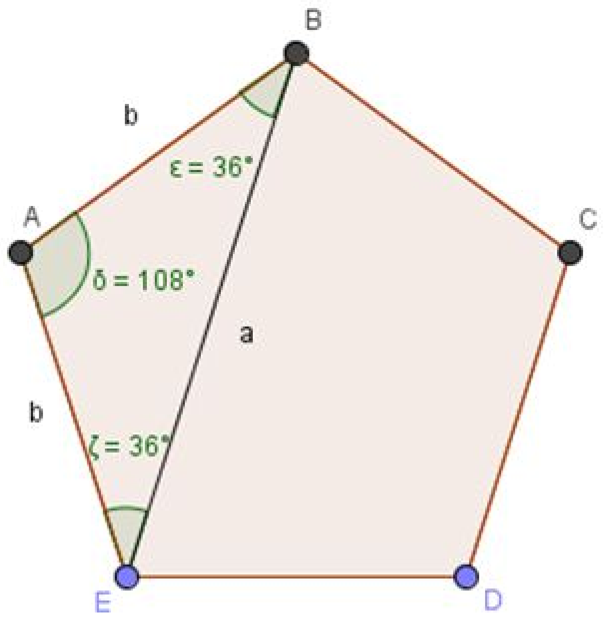
72° é duas vezes 36°, e 108° é o triplo de 36°.

Existem vários tipos diferentes de triângulos isósceles nessa figura, dos quais selecionamos três: ABE, ABF e AFG. Os triângulos restantes são semelhantes a qualquer um desses e não fornecem informações adicionais. Finalmente, existem quatro segmentos diferentes nesses triângulos, os quais assim denotamos: $BE = a$, $AB = AE = b$, $AF = BF = GE = AG = c$ e $GF = d$. Os comprimentos desses segmentos são tais que:

$a > b > c > d$. Consideremos cada um desses triângulos separadamente e apliquemos a lei dos senos.

No triângulo ABE (Figura 17):

Figura 17 – Pentágono/Triângulo ABE



FONTE: Autor

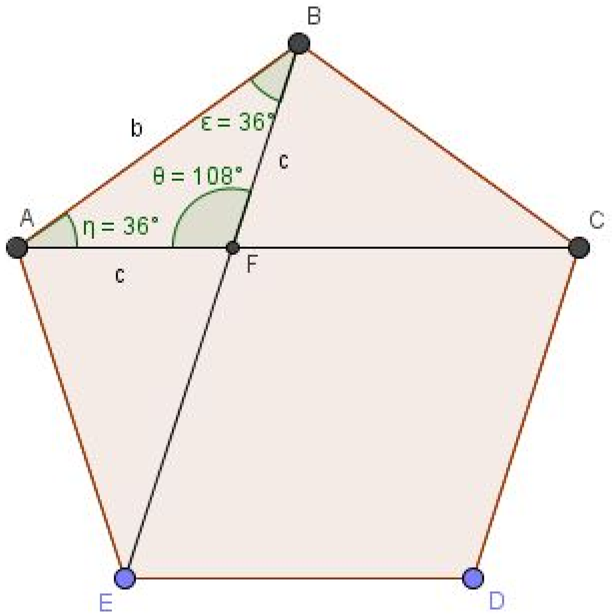
$$\frac{a}{sen\,108^\circ} = \frac{b}{sen\,36^\circ}.$$

Logo,

$$\frac{a}{b} = \frac{sen\,108^\circ}{sen\,36^\circ}.$$

No triângulo ABF (Figura 18):

Figura 18 – Pentágono/Triângulo ABF



FONTE: Autor

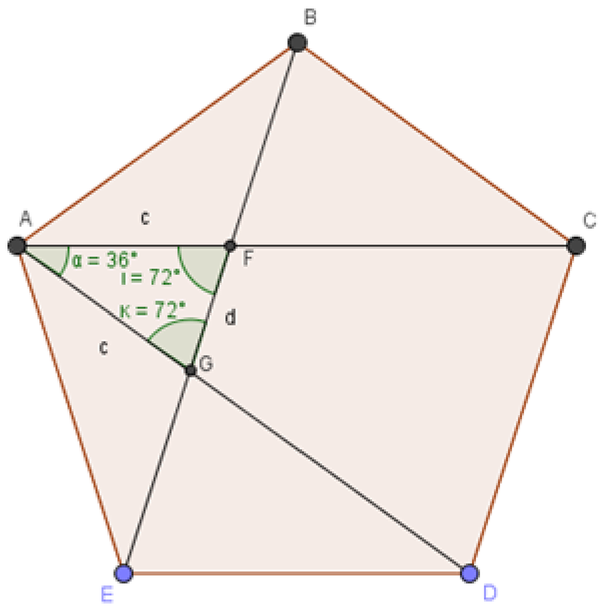
$$\frac{b}{sen\,108°} = \frac{c}{sen\,36°}.$$

Logo,

$$\frac{b}{c} = \frac{sen\,108°}{sen\,36°}.$$

No triângulo AFG (Figura 19):

Figura 19 – Pentágono/Triângulo AFG



FONTE: Autor

$$\frac{c}{sen\ 72^\circ} = \frac{d}{sen\ 36^\circ}.$$

Logo,

$$\frac{c}{d} = \frac{sen\ 72^\circ}{sen\ 36^\circ}.$$

Como $72^\circ = 180^\circ - 108^\circ$ (72° e 108° são correspondentes), verificamos que $sen\ 72^\circ = sen\ 108^\circ$.

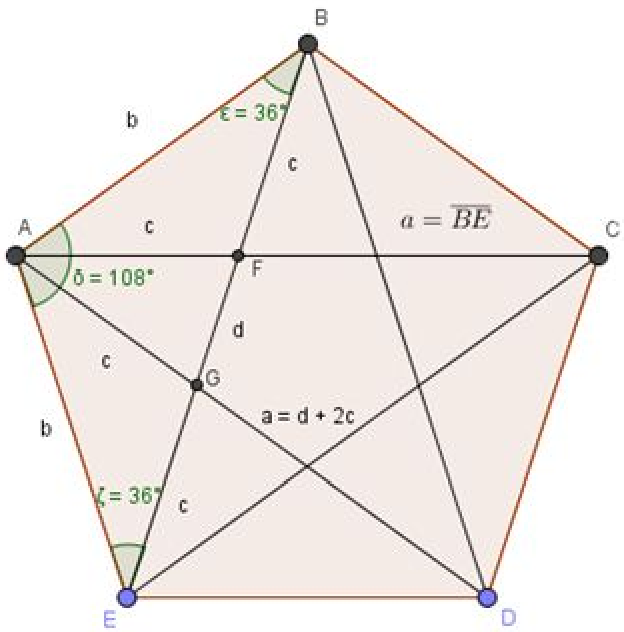
Consequentemente, podemos estabelecer as seguintes proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{sen\ 108^\circ}{sen\ 36^\circ} = \Phi = 1,618033988\ldots$$

Isto é, uma vez que os comprimentos dos quatro segmentos são classificados decrescentes, a relação entre cada segmento e o próximo é constante e igual ao número de ouro.

Considerando a primeira parte da proporção, $c = a - b$ (pois o triângulo AGB é isósceles. Logo, $b = c + d$, e ainda temos $d = a - 2c$) e, considerando $b = 1$ (Figura 20):

Figura 20 – Pentágono/Triângulo AGB



FONTE: Autor

Consideremos

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}.$$

Se $c = a - b$, então

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}.$$

Considerando $b = 1$, temos $\frac{a}{1} = \frac{1}{a-1} \Rightarrow a^2 - a = 1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$.

Resolvendo essa equação quadrática, a raiz positiva é

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi = 1,618033988\ldots$$

3.8.4 Sequências de Fibonacci e de Lucas e o Número de Ouro

Representadas na Tabela 1 a seguir, as sequências de Fibonacci e de Lucas trazem consigo uma propriedade interessante: quando dividimos seus termos pelos seus imediatos antecessores, obtemos uma razão que tende à razão áurea. Esse valor torna-se cada vez mais próximo da razão áurea, à medida que consideramos dois números das respectivas sequências de ordens cada vez maiores, ou seja, quanto mais distantes forem os termos das sequências de Fibonacci ou Lucas, mais próximos da razão áurea o quociente dessa divisão estará. Nessa tabela, apresentamos o cálculo da razão de F_{n+1}/Fn e L_{n+1}/Ln dos primeiros números de Fibonacci e Lucas.

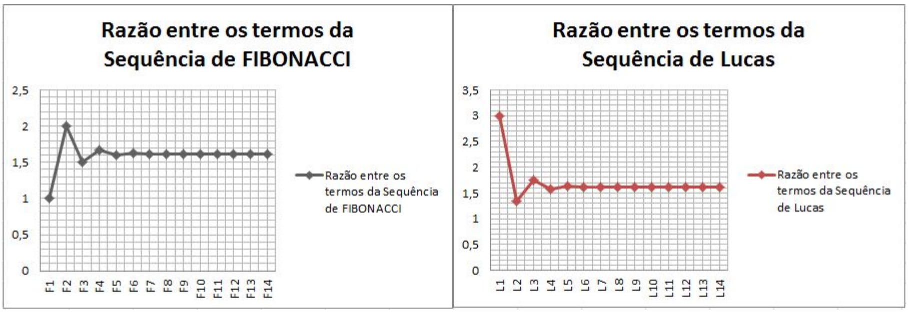
Tabela 1 – Razão entre os termos das sequência de Fibonacci e de Lucas

FIBONACCI	Lucas
$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\frac{L_{n+1}}{L_n}$
$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$	$\frac{L_2}{L_1} = \frac{3}{1} = 3$
$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{L_3}{L_2} = \frac{4}{3} = 1,3333\ldots$
$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{L_4}{L_3} = \frac{7}{4} = 1,75$
...	...
$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} = 1,6176\ldots$	$\frac{L_{10}}{L_9} = \frac{123}{76} = 1,6184\ldots$
$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1,6181\ldots$	$\frac{L_{11}}{L_{10}} = \frac{199}{123} = 1,6178\ldots$
...	...
$\frac{F_{18}}{F_{17}} = \frac{2584}{1597} = 1,6180...$	$\frac{L_{18}}{L_{17}} = \frac{5778}{3571} = 1,6180\ldots$
...	...
$\frac{F_{38}}{F_{37}} = \frac{39088169}{24157817} = 1,6180\ldots$	$\frac{L_{38}}{L_{37}} = \frac{87403803}{54018521} = 1,6180\ldots$

FONTE: Autor

Podemos observar que, quando n se torna cada vez maior (ou seja, os termos da sequência crescem, tendendo ao infinito), a razão F_{n+1}/F_n, bem como a razão L_{n+1}/L_n, aproximam-se cada vez mais do valor de $\Phi = 1.618033\ldots$. Na Figura 21, representamos em um gráfico essa razão entre termos das sequências de Fibonacci e de Lucas.

Figura 21 – Gráfico das Sequências de Fibonacci e de Lucas



FONTE: Autor

Esse fenômeno foi observado pelo astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630), Koshy (2001, p.240). Desse modo, é razoável prever que ambas as razões convergem para o mesmo limite, a saber, a raiz positiva da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$, que, conforme já observamos, é o número de ouro.

Para confirmar essa conjectura, demonstraremos, a seguir, esse resultado para a sequência de Fibonacci.

Demonstração. Suponhamos que o referido limite exista (igual a L):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = L.$$

Considerando que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, dividiremos ambos os lados por F_n:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Assim, temos

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}.$$

Usaremos o seguinte fato:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = L.$$

Aplicando o limite a ambos os lados da equação que antecede imediatamente esse fato, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}}.$$

Logo, de acordo com a hipótese e o fato acima, temos

$$L = 1 + \frac{1}{L},$$

ou seja,

$$L^2 - L - 1 = 0.$$

A solução positiva dessa equação quadrática é

$$L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Portanto,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi = 1,61803\ldots,$$

quando n tende ao infinito.

3.8.5 Curiosidades sobre o número de ouro Φ

Considerando o número de ouro

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

,

se compararmos

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\ldots$$

e

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0,61803\ldots,$$

observaremos que eles têm a mesma parte decimal. Em outras palavras:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi},$$

de modo que temos a seguinte propriedade.

Propriedade 1.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = \ldots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}}} = \ldots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}}$$

Segundo Vorobiov (1974), está fração é denominada fração continua, e a sua representação genérica é dada abaixo.

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \frac{1}{\cdots}}}}}$$

Sendo que q_1, q_2, q_3,..., q_n, são números inteiros positivos e o q_0 é um inteiro não negativo. Ou seja, a diferença entre q_1, q_2, q_3, ...,q_n e o q_0, pode ser igual a zero.

Propriedade 2. Multiplicando $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ por Φ, temos:

$$\Phi \cdot (\Phi) = \Phi \cdot \left(1 + \frac{1}{\Phi}\right) \Rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1.$$

Multiplicando, sucessivamente, $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ por Φ, e usando recursivamente $\Phi^2 = \Phi + 1$, temos as seguintes potências de Φ:

$$\begin{gathered}
\Phi^2 = \Phi + 1, \\
\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = 2\Phi + 1, \\
\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = 3\Phi + 2, \\
\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = 5\Phi + 3, \\
\Phi^6 = \Phi^5 + \Phi^4 = 8\Phi + 5, \\
\Phi^7 = \Phi^6 + \Phi^5 = 13\Phi + 8, \\
\Phi^8 = \Phi^7 + \Phi^6 = 21\Phi + 13, \\
\ldots \\
\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = F_n\Phi + F_{n-1}.
\end{gathered}$$

É importante observarmos que os coeficientes de Φ nos segundos membros das equações acima formam a sequência $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, e os coeficientes independentes de Φ formam a sequência $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, ou seja, em ambos os casos, a sequência de Fibonacci.

Propriedade 3. Continuando com as curiosidades matemáticas, outra forma de representar o número de ouro é mediante a sucessão de radicais consecutivos:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}}}}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado dessa sucessão,

$$(\Phi)^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}}}}\right)^2,$$

temos

$$(\Phi)^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}}}.$$

Observemos que

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}}}}$$

Portanto,

$$\Phi^2 = 1+\Phi,$$

uma equação quadrática cuja raiz positiva é

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

ou seja, o próprio número de ouro.

Propriedade 4. Série Somatório, Huntley (1985, p.58):

$$1, \Phi, 1+\Phi, 1+2\Phi, 2+3\Phi, 3+5\Phi, 5+8\Phi, 8+13\Phi, 13+21\Phi, 21+34\Phi,$$

Concluímos este capítulo considerando a última de tais curiosidades matemáticas.

Propriedade 5: Série Geométrica, Huntley (1985, p.58):

$$1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \Phi^5, \Phi^6, \Phi^7, \Phi^8, \ldots$$

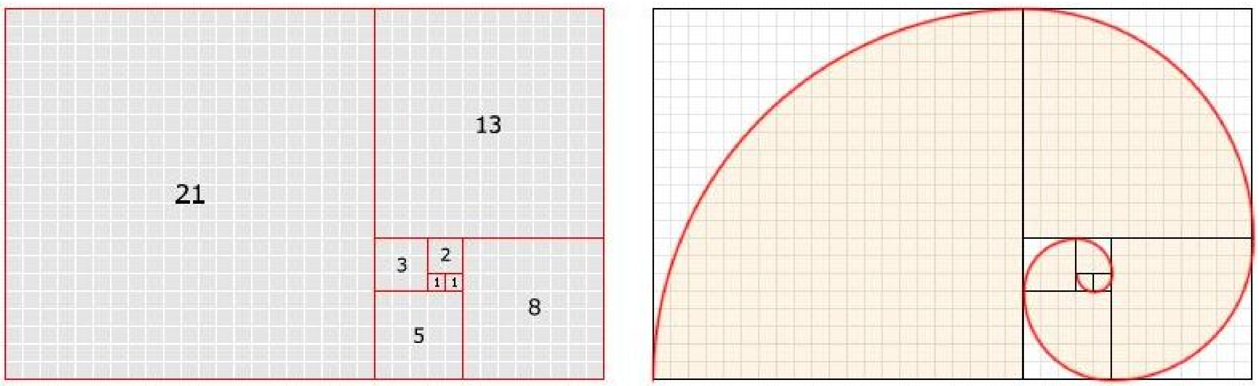
4 AS APLICAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE "Φ"BONACCI E O NÚMERO ÁUREO

Apresentamos, até agora, uma grande quantidade de situações algébricas, curiosidades e descobertas intrigantes sobre a sequência de Fibonacci e o número de ouro que servirão de base para o processo de ensino-aprendizagem dos discentes com relação às atividades que propomos adiante. Entretanto, a sequência de Fibonacci e o número de ouro apresentam outras aplicações, algumas das quais abordaremos neste capítulo.

> [...] a Sequência de Fibonacci está associada a diversos fenômenos, tais como o comportamento da luz, a árvore genealógica de um zangão, a bolsa de valores, o Triângulo de Pascal, o crescimento das plantas, o formato de diversos seres vivos, etc. [...] Ramos (2013, p.53)

Associada à sequência de Fibonacci, podemos observar também a espiral de Fibonacci (Figura 22), a qual é construída conectando os cantos opostos dos quadrados cujos lados são as medidas da mesma sequência.

Figura 22 – Espiral de FIBONACCI



FONTE: Sorando (2011)

4.1 Fibonacci e a Natureza

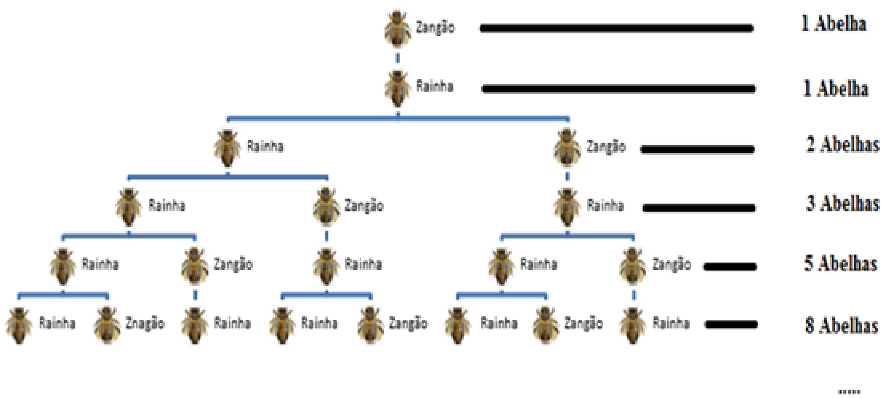
Curiosamente, os números de Fibonacci ocorrem surpreendentemente na Natureza em vários lugares inesperados. Podemos ver a sequência de Fibonacci nos ramos das árvores, no arranjo das folhas, no caule, nas flores de alcachofras e girassóis, nas inflorescências de brócolis, na configuração dos cones das coníferas, e em um dos exemplos mais comumente utilizados: nas conchas. Mesmo o nosso sistema solar, os planetas que o compõem, galáxias e o próprio universo, parecem responder de forma impressionante a essa proporção perfeita.

Outra curiosidade é que podemos determinar o número de abelhas em cada geração da árvore genealógica de um zangão utilizando a sequência de Fibonacci.

> Os ovos são formados nos dois ovários da rainha e, ao passarem pelo oviduto, podem ou não ser fertilizados pelos espermatozóides armazenados. Os ovos fertilizados darão origem a abelhas operárias e os não fertilizados nascerão zangões. Esse fenômeno do nascimento dos zangões a partir de ovos não fecundados é conhecido cientificamente como partenogênese. Portanto, o zangão nasce sempre puro de raça, por originar-se de um ovo não fecundado. Cicco (2000)

Conforme explicado por Lúcia Helena Salvetti De Cicco, um zangão tem somente um dos pais, pois nasce de um ovo não fertilizado, ao mesmo tempo em que a fêmea exige ambos os pais, pois são geradas de um ovo fertilizado, como mostra a Figura 23 a seguir.

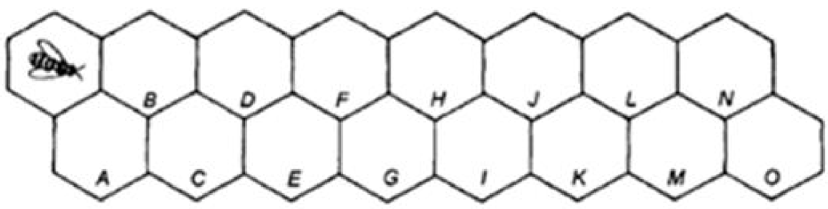
Figura 23 – Árvore Genealógica do Zangão



FONTE: Autor

Ainda tratando de abelhas, consideremos uma colmeia com duas linhas adjacentes de células hexagonais, conforme indicadas na Figura 24 a seguir.

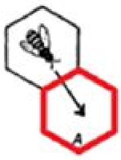
Figura 24 – Colmeia



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Aqui, o objetivo é obter o número de caminhos possíveis existentes em que uma abelha possa rastejar de uma célula para outra célula adjacente, sendo que tal abelha poderá somente se movimentar para uma direção geral, no caso, à direita. Caso a abelha se desloque para a casa A (Figura 25), terá somente uma e exclusiva rota.

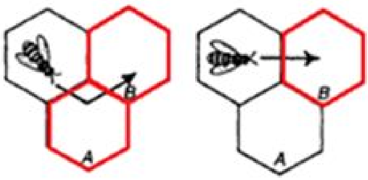
Figura 25 – Colmeia/Fração



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Assim, caso a abelha queira chegar à célula B (Figura 26), ela já terá dois caminhos distintos como opção.

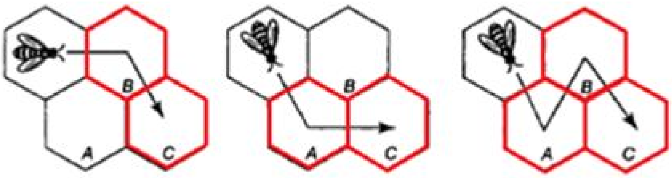
Figura 26 – Colmeia/Fração



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Se ela for até C (Figura 27), terá 3 caminhos diferentes.

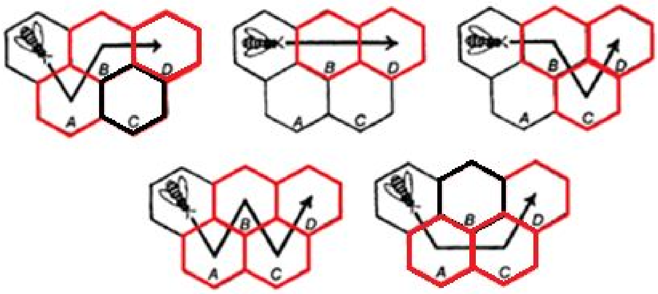
Figura 27 – Colmeia/Fração



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Existem 5 caminhos distintos (Figura 28) que a levarão até a célula D, e assim sucessivamente.

Figura 28 – Colmeia/Fração



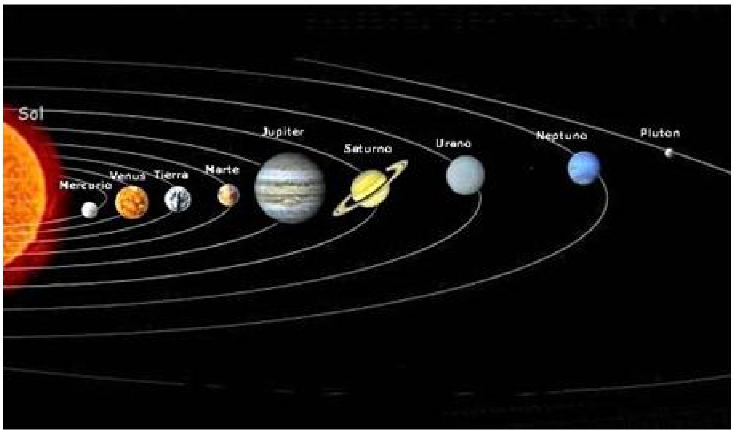
FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Observando o esquema acima, podemos observar, claramente, que existe um padrão resultante da quantidade de rotas possíveis que a abelha pode escolher para chegar a tal destino, e esse mesmo padrão segue a ordem da sequência de Fibonacci.

4.1.1 Fibonacci e o Planeta Terra

A título de curiosidade, a Terra está inserida na galáxia Via Láctea. Tratando, por um momento especificamente sobre ela, podemos observar que ela é composta por uma estrela central, chamada Sol, sendo essa uma estrela de quinta maior grandeza universal; por oito planetas (Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno) e um planetoide ou planeta anão (Plutão), como visto na Figura 29, abrangendo os respectivos números da sequência de Fibonacci.

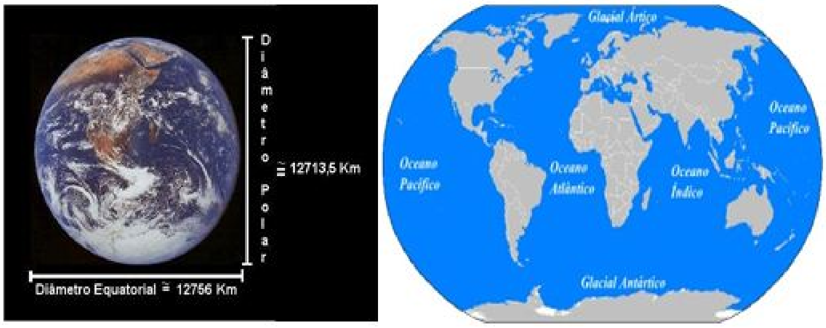
Figura 29 – Via Láctea



FONTE: www.google.com.br/vialactea

O diâmetro da Terra, em milhas, é representado aproximadamente pelo produto de números de Fibonacci, $55 \cdot 144 = 7920\ mi$, ou ainda, $89 \cdot 144 = 12816\ km$. Observamos que 55, 89 e 144, são números da sequência de Fibonacci. Abrangendo mais curiosidades sobre a Terra e a respectiva sequência, observamos que nosso planeta tem dois polos (norte e sul); e é composto também por cinco oceanos (Antártico, Ártico, Atlântico, Pacífico e Índico), como mostra a Figura 30.

Figura 30 – Planeta Terra



FONTE: www.google.com.br/diametrodaterra

4.1.2 Fibonacci e as Flores

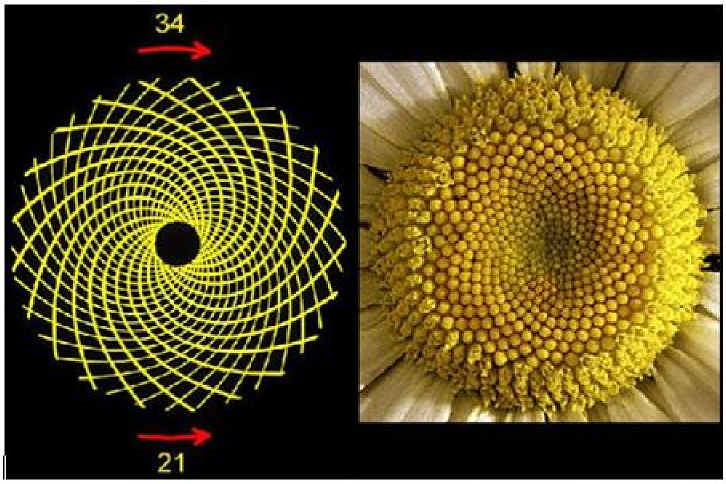
A sequência de Fibonacci está presente muitas vezes até mesmo na quantidade de pétalas de uma flor, como por exemplo, o copo-de-leite, que tem uma pétala; coroa-de-cristo, com duas; Trillium branco, com três; a rosa selvagem, com cinco; cosmos, com oito; e as margaridas, que podem ter 13, 21 ou 34 pétalas, como mostra a Figura 31.

Figura 31 – Flores de FIBONACCI

FONTE: www.google.com.br/quantidadedepetalasdasflores

Outra situação peculiar da seqüência de Fibonacci e as flores está presente nos girassóis. Quando observados bem de perto, em sua grande maioria, percebemos a maneira com que as sementes estão organizadas formando espirais. Em seu interior, existem duas séries de espirais de sementes. Cada série segue uma direção diferente, e o numero de séries não é igual: elas são formadas por 21 curvas para a direita e 34 curvas para a esquerda, como mostra a Figura 32.

Figura 32 – Girassol



FONTE: www.google.com.br/girassol

Após termos mencionado o girassol, não poderíamos deixar de citar a presença da sequência de Fibonacci nos frutos. Um deles tem como característica a cor castanho-avermelhada, coberto por escamas, com polpa amarelada, chamada de Buriti, também conhecido como miriti.

> Buriti, na língua indígena, significa “a árvore que emite líquidos” ou “a árvore da vida”, considerada sagrada pelos índios, por dela se fazer tudo o que é necessário para a sobrevivência: a casa, os objetos e a alimentação. (Lucélia Valda/Odicleise Maués 2012, p. 41.)

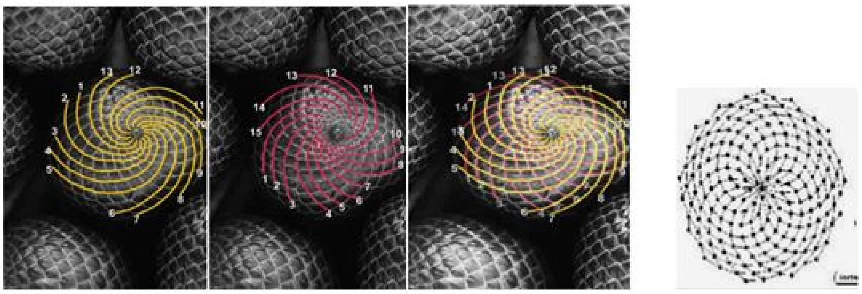
Figura 33 – Buriti

FONTE: Cardoso e Quaresma (2014)

São bem visíveis as espirais formadas na casca do buriti, como podemos observar na Figura 34. Olhando para a fruta, observamos padrões espirais tanto no sentido horário quanto no anti-horário, semelhantes às sementes de girassol. De acordo com Livio (2015, p.140), “A espiral logarítmica e a Razão Áurea caminham de mãos dadas”. Isso faz com que possamos encontrar a razão áurea no buriti.

Para uma melhor visualização das espirais formadas pela casca da fruta, observemos a Figura 34. Nela, podemos encontrar claramente a quantidade de 13 espirais no sentido horário, número este encontrado na sequência de Fibonacci, e temos 15 espirais no sentido anti-horário.

Figura 34 – Buriti e a Espiral de FIBONACCI



FONTE: Cardoso e Quaresma (2014)

> [...] à medida que o fruto amadurece, a espiral é acompanhada de um crescimento proporcional, de modo que a forma permanece inalterada, assim, mantendo sua auto-semelhança, que é uma das características fundamentais nos objetos da geometria fractal. Cardoso e Quaresma (2014, p.42)

Comparando a junção das espirais encontradas no Buriti na Figura 34, observamos que as características de espirais e auto-semelhança são as mesmas. Fica evidente que as estruturas matemáticas presentes em ambos os desenhos têm as mesmas propriedades, o que justifica as hipóteses de que o Buriti, em sua estrutura, guarda elementos da sequência de Fibonacci e o número de ouro, visto que ambos estão relacionadas.

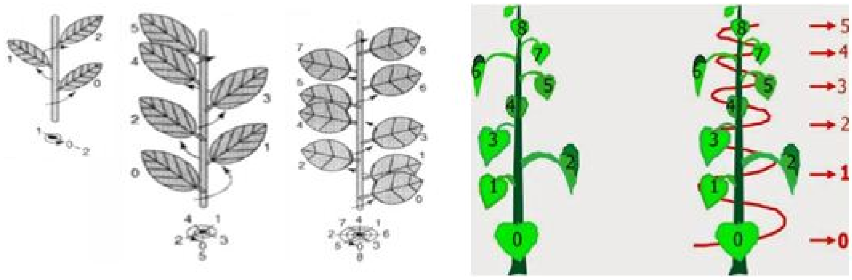
4.1.3 Fibonacci e a Filotaxia

Assim como nas flores, a sequência de Fibonacci também pode ser encontrada na disposição das folhas no caule, o que é conhecido como Filotaxia.

> O termo Filotaxia, na Botânica, é usado num tópico que inclui a disposição das folhas nos ramos das plantas. Essas disposições são características dos gêneros. Bez (1997, p.58)

Considere que exista um padrão em espiral de crescimento das folhas em torno do caule. Cada conjunto formado por três folhas consecutivas nasce formando um mesmo ângulo entre a primeira e segunda folhas e entre a segunda e terceira folhas, mantendo certa distância do caule, e assim sucessivamente, como mostra a Figura 35.

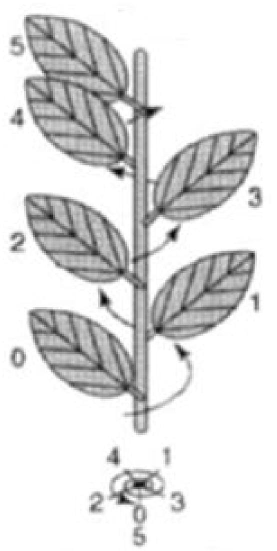
Figura 35 – Galhos de Árvores representando a Filotaxia



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Tendo ainda como base a Figura 36 a seguir, de um galho de cerejeira, observamos que, para 5 folhas chega-se a 2 voltas. Cada volta é entendida como uma rotação de 360° para que uma folha possa se sobrepor à outra. Para que isso ocorra, cada ângulo deverá ser igual a 144°. Admitindo V como o número de voltas e f como o número de folhas, temos

Figura 36 – Cerejeira



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

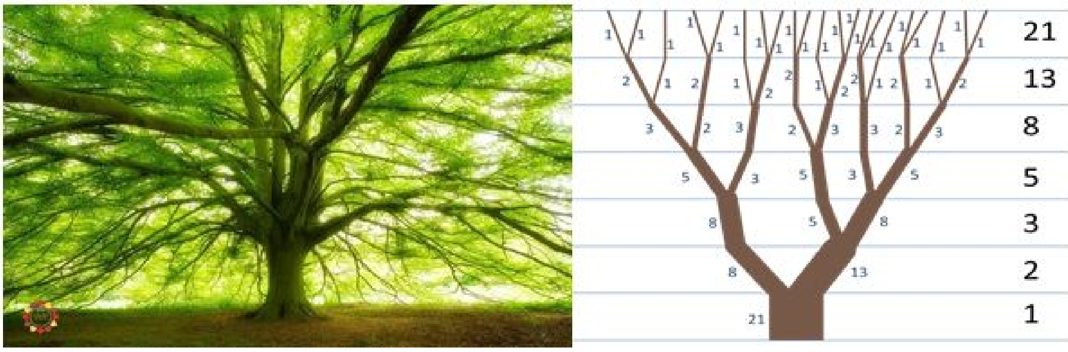
$$\frac{V \cdot 360^\circ}{f} = \frac{2 \cdot 360^\circ}{5} = 144^\circ.$$

Muitas experiências com plantas mostram que V e f assumem comumente valores como $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, números da sequência de Fibonacci. É claro que existem exceções, mas os números de Fibonacci ocorrem tão frequentemente que não podem ser explicados como casuais.

Biólogos e especializados em Botânica ainda tentam explicar a predominância dos números de Fibonacci na Filotaxia, pois a simetria das folhas dá equilíbrio ao caule e também facilita a exposição à luz solar, mas a Ciência está longe de uma explicação concisa. Além disso, observamos a presença da sequência de Fibonaci na disposição dos galhos das árvores (Figura 37).

> [...] dependendo da espécie de árvore, a disposição dos galhos segue uma regra. O carvalho, por exemplo, apresenta a proporção de 2/5, o que significa que, imaginando uma espiral, são necessários 5 galhos para que a espiral dê um número exato de 2 voltas. (Thiago Xavier 2012)

Figura 37 – Carvalho



FONTE: www.google.com.br/carvalhoefibonacci

Como outros exemplos temos o ulmeiro (razão de 1/2), a faia (razão de 1/3), o salgueiro (razão de 3/8) e a amendoeira (razão de 5/13). Outra curiosidade é que, dividindo os termos adjacentes, obtemos valores aproximados do número de ouro.

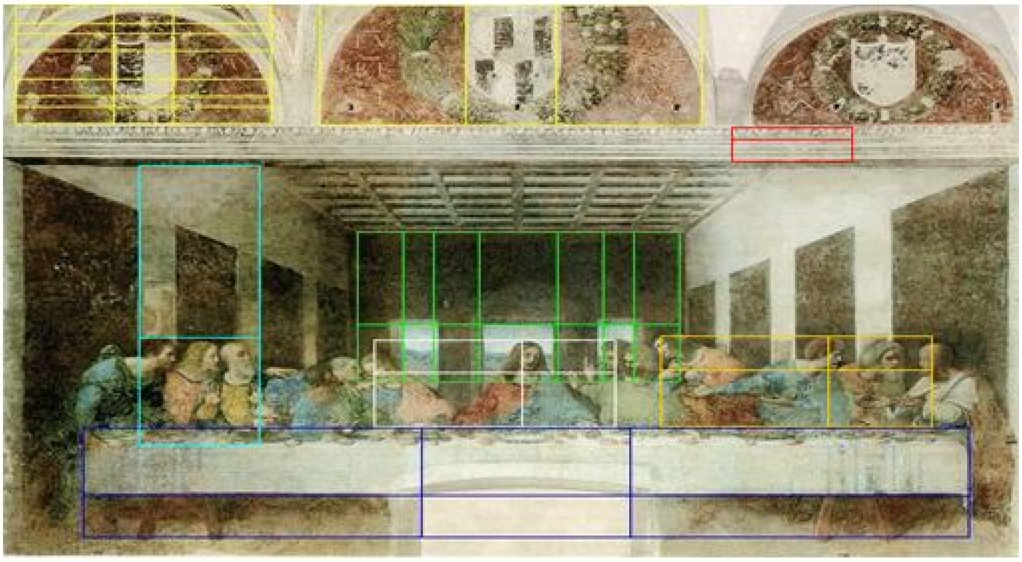
4.1.4 Fibonacci e a Arte

Assim como o número de ouro é encontrado na beleza da Natureza, ele também pode ser usado para alcançar a beleza e harmonia na Arte. Foi e ainda é uma ótima ferramenta para a composição da Arte. Além disso, a proporção áurea pode ser usada de maneira mais elegante para criar uma estética visual em qualquer ramo da Arte, mas vale ressaltar que a proporção áurea não é encontrada em tudo na Arte.

> Com a insistente busca pela beleza e perfeição em suas obras, renomados artistas, tais como Piet Mondrian, Cândido Portinari, Michelangelo, Salvador Dalí, Albrech Dürer, Leonardo da Vinci, dentre outros, usaram o número áureo, por meio do retângulo de ouro, em suas criações artísticas, para lhes conferir harmonia. Ferrer (2005, p.9)

Em sua obra "A Última Ceia", Leonardo da Vinci baseia as principais dimensões da sala, a mesa e os escudos ornamentais na proporção áurea, como mostra a Figura 38. Observe as linhas que mostram o uso da proporção áurea.

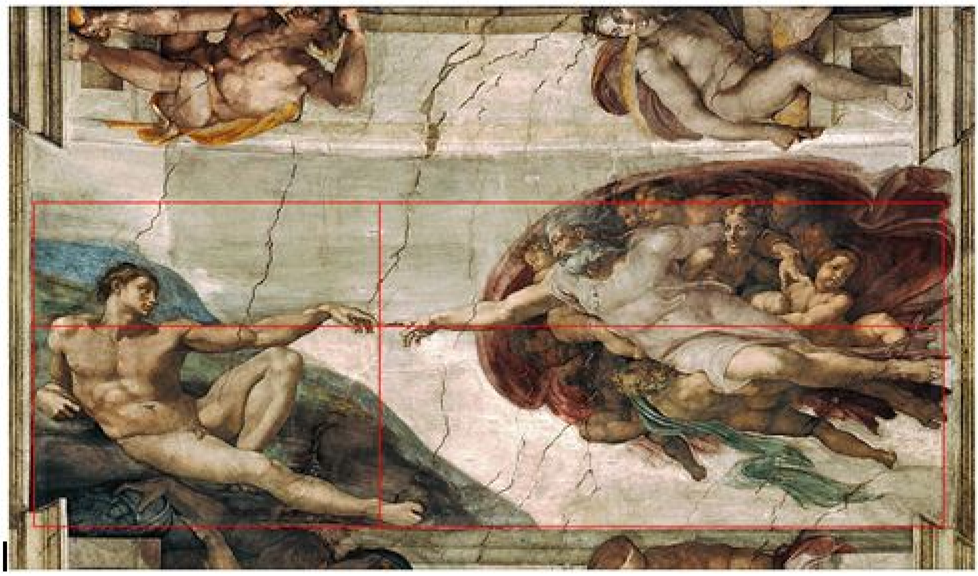
Figura 38 – A Última Ceia - da Vinci



FONTE: Meisner (2014)

Pintor, escultor, poeta e arquiteto italiano, considerado um dos maiores criadores da história da arte do ocidente, em uma de suas obras mais famosas “A Criaçao de Adão”, Michelangelo pinta o dedo de Deus tocando o dedo de Adão precisamente no ponto de proporção áurea da largura e altura da área que contém ambos.

Figura 39 – A Criação de Adão - Michelangelo



FONTE: Meisner (2014)

Salvador Dalí foi um importante pintor catalão, conhecido pelo seu trabalho surrealista, e também um artista utilizador da proporção áurea. Em "O Sacramento da Última Ceia"(Figura 40), Dalí enquadrou sua pintura em um retângulo de ouro. Dalí posicionou a mesa exatamente na proporção áurea da altura desta. Salvador posicionou os dois discípulos de Cristo, lado à lado, segundo a proporção áurea da largura da obra. Além disso, as janelas do fundo são formados por um grande dodecaedro, composto por 12 pentágonos, que exibem relações Φ(Fi) em suas proporções.

> O uso extensivo da relação dourada mostra a necessidade do artista, não só para criar a imagem que está em um equilíbrio perfeito, mas também que é o mais agradável aos olhos do público. Silka (2015)

Figura 40 – O Sacramento da Última Ceia - Dali

FONTE: Meisner (2014)

Outra obra conhecida por muitos em que os traços da proporção áurea foi bastante utilizada é "O Nascimento de Vênus", (Figura 41). Segundo Meisner (2014) a própria tela é um retângulo de ouro. Acredita-se ainda que Botticelli compôs a obra de maneira em que o umbigo de Vênus está na proporção dourada de sua altura, assim como também na própria altura do quadro. Essa obra mostra que se pode considerar o ponto da proporção áurea utilizando muitas variações lógicas distintas. Entretanto, todas essas variações apontam para o umbigo e a ponta inferior do cotovelo direito da personagem.

Figura 41 – O Nascimento de Vênus - Botticelli

FONTE: Meisner (2014)

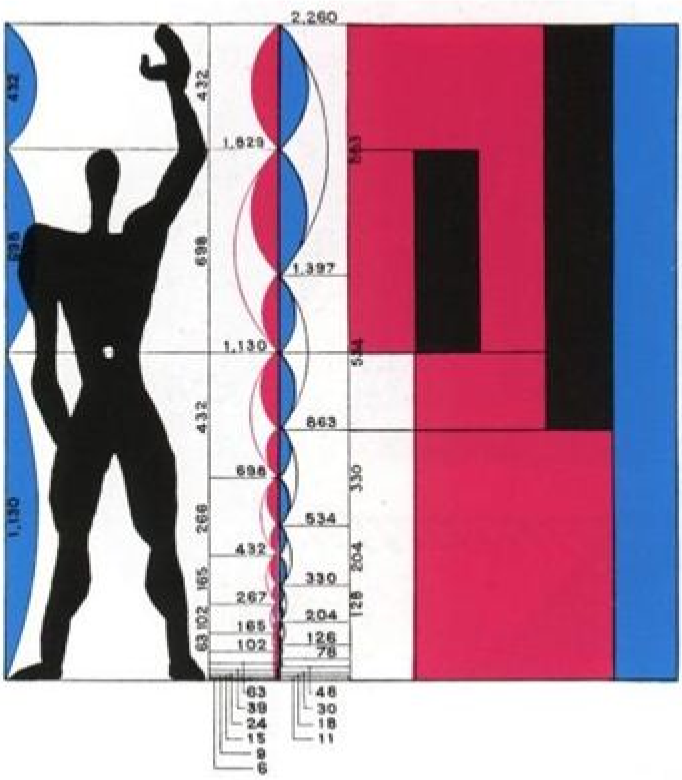
> Um dos mais fortes defensores da aplicação da relação dourada para a arte e arquitetura foi o famoso arquiteto suíço-francês Le Corbusier (Charles-Edouard Jeanneret, 1887- 1965). Parveen (2010).

Le Corbusier foi o responsável pela introdução de um novo sistema proporcional chamado de "Modulor". O Modulor é basicamente um sistema de dosagem baseado na sequência de Fibonacci. O objetivo do Modulor era "manter a escala humana em todos os lugares". Le Corbusier sugeriu que o Modulor (Figura 42) daria proporções harmoniosas para tudo, desde o tamanho dos armários e puxadores das portas, a edifícios e espaços urbanos.

> O Modulor deveria fornecer "uma medida harmônica para a escala humana, universalmente aplicável à Arquitetura e à Mecânica". No espírito do Homem Vitruviano e com o compromisso filosófico geral para descobrir um sistema de proporção equivalente ao da criação natural, o Modulor foi baseado em proporções humanas. Parveen (2010)

O modulor funcionaria da seguinte maneira: um homem de cerca de 183 centímetros, com o braço levantado, teria uma altura de 226 centímetros, inserido em um quadrado. A relação da altura do homem para a altura do umbigo no ponto médio de 113 centímetros foi feita precisamente numa relação dourada. A partir dessa primeira dimensão e somando e subtraindo igualmente a seção áurea, a chamado série azul é obtida, e a segunda, assim como a vermelha, sendo que cada série é uma sucessão de Fibonacci, permitindo que ocorram combinações harmônicas.

Figura 42 – O Modulor - Le Corbusier



FONTE: www.google.com.br/modulor

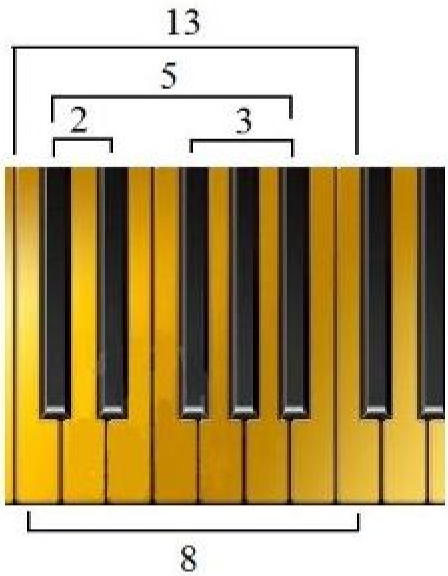
4.1.5 Fibonaccie e a Música

A música também tem sido influenciada pela sequência de Fibonacci buscando padrões em acordes que soam bem aos ouvidos. É fato que, desde o seu surgimento, as escalas e notas musicais estão ligadas à Matemática.

> Não é uma grande coincidência que algumas proporções entre duas notas estejam relacionadas aos números de Fibonacci. Essas seriam "combinações naturalmente perfeitas". Como o dó (afinado em 264 Hz) e o lá (em 440 Hz), que representam a proporção de 3/5: Fibonacci. Noize (2014)

A sequência de Fibonacci também é levada em consideração na construção de alguns instrumentos musicais, tais como o piano ou o teclado musical (Figura 43) e o violino (Figura 44). Segundo Arias (2012), os números da sequência de Fibonacci aparecem nas escalas do piano. O piano é constituído por sete oitavas, ordenadas da mais grave para a mais aguda. Cada oitava do piano é formada por 13 teclas, sendo 8 teclas brancas(notas maiores) e 5 teclas pretas (notas sustenidos), estas agrupadas em chaves de 2 e 3 teclas.

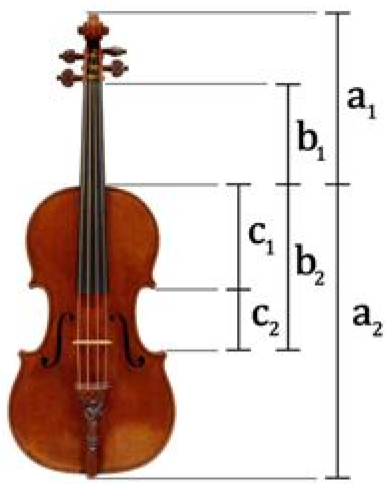
Figura 43 – Teclas de um Piano



FONTE: Arias (2012)

Outro exemplo evidente da utilização da sequência de Fibonacci na construção de instrumentos está presente no violino: o seu tamanho, a distância e a ordem dos elementos segue o número de ouro, como regra na construção que seria mais agradável de manusear, conforme mostrado na Figura 44.

Figura 44 – Violino



FONTE: Arias (2012)

Outro aspecto da sequência de Fibonacci e o número áureo na área musical está presente na influência sobre as melodias musicais, principalmente na harmonia produzindo sons agradáveis aos ouvidos humanos. Como exemplo de músico importante que usou essas proporções, por acaso ou com vista a alcançar um agradável efeito sobre as pessoas, podemos citar Mozart.

> As obras musicais de Mozart são consideradas de um brilho incomum pela maioria das pessoas. Sua música tem sido reverenciada por várias gerações. Ao total, Mozart compôs 19 sonatas, a primeira delas aos 18 anos, e a maioria das outras nos quatro anos seguintes. (SOUZA; ABDOUNUR, , p. 3)

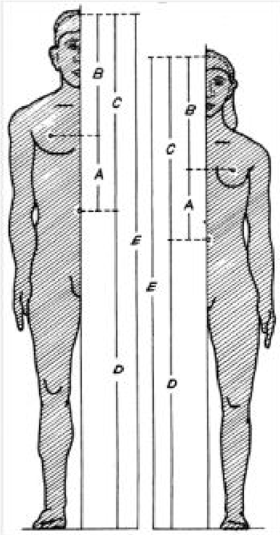
Em várias sonatas de Mozart, a relação entre o desenvolvimento delas e a sua introdução é o mais próximo possível da razão áurea. A principal característica da primeira sonata de Mozart para o piano é que o segundo tema harmônico da melodia é sempre maior do que o primeiro. O primeiro tema harmônico é dividido em 38 e 62 compassos, ou seja, $62/38 = 1,6315$; já o segundo tema harmônico é dividido em 28 e 46 compassos, ou seja, $46/28 = 1,6428$.

4.1.6 Fibonacci e o Corpo Humano

No corpo humano, a razão áurea e a sequência de Fibonacci também estão presentes. Por exemplo, se um humano "mediano" dividir sua altura pela distância entre o umbigo e a cabeça, o resultado será algo em torno de $1,618\ldots$. Medindo sua perna inteira e dividindo-a pelo comprimento do seu joelho até o chão, o resultado será em torno de $1,618\ldots$. A altura do seu crânio dividido pelo tamanho da sua mandíbula até o alto da cabeça, também resultará em torno de $1,618\ldots$. Medindo a sua cintura até a cabeça e depois o tórax, obterá, por divisão, algo em torno de $1,618\ldots$.

Antony T. Davis, do Indian Statistical Institute (India) e Rudolf Altevogt, do Zoologisches Institut der Universitat (Alemania), realizaram um estudo no final de 1973 e início de 1974, no qual 207 estudantes alemães e 252 jovens de Calcutá foram medidos. As medidas de A, B, C, D e E estão apresentados na Figura 45. Segundo Davis e Altevogt (1979), os resultados confirmam que a altura total do corpo e a altura dos pés até o umbigo seguem a razão áurea, podendo, de fato, equivaler-se a ela, embora existam exceções.

Figura 45 – Razões entre partes do Corpo Humano



Jovens Alemães

População	A/B	B/C	C/D	D/E
Estatura maior	0.528	0.655	0.609	0.621
Estatura menor	0.575	0.635	0.636	0.611
Garotas	0.498	0.668	0.626	0.615
Garotos	0.544	0.647	0.618	0.618
Total de 207	0.537	0.650	0.619	0.618

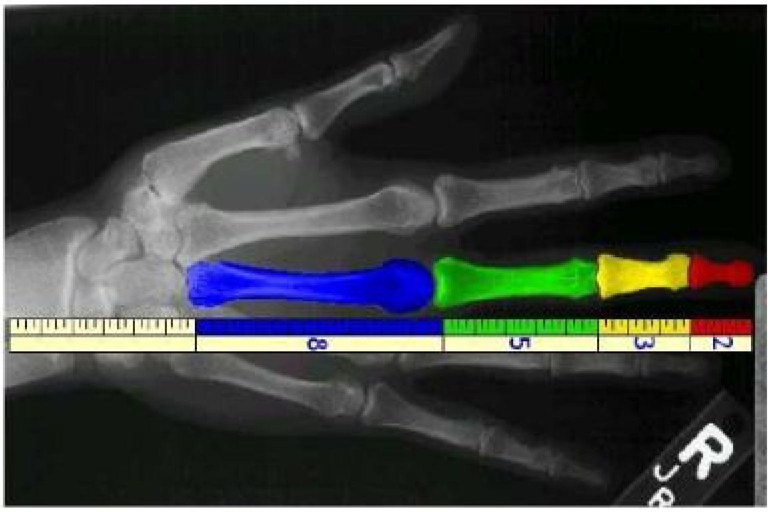
Jovens de Calcutá

População	A/B	B/C	C/D	D/E
Estatura maior	0.548	0.646	0.633	0.612
Estatura menor	0.560	0.641	0.622	0.616
Total de 252 jovens	0.555	0.643	0.627	0.615

FONTE: Davis e Altevogt (1979)

Outro fator interessante é que as medidas das articulações do ser humano resultam no número de ouro. Já o número de ossos segue o padrão da sequência de Fibonacci. Se medirmos os ossos de forma crescente e dividirmos uma medida pela antecessora, também obteremos o número de ouro (Figura 46).

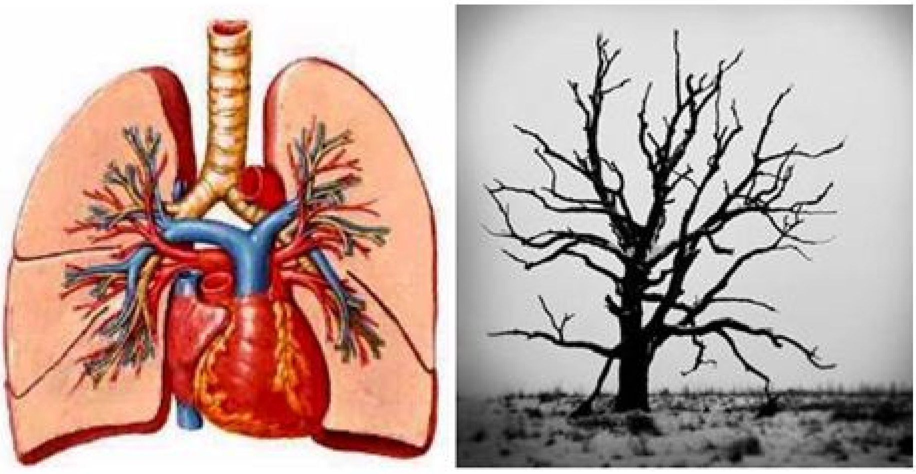
Figura 46 – Radiográfia da Mão



FONTE: Tanure (2012)

Olhando para o interior do corpo humano em sua composição orgânica, percebemos que também existe a presença da sequência de Fibonacci. Como exemplo, consideremos os pulmões. Neles, os vasos sanguíneos seguem o mesmo procedimento dos ramos das árvores, que se dividem em números da sequência de Fibonacci, como mostra a Figura 47.

Figura 47 – Órgãos Internos do Corpo Humano



FONTE: Tanure (2012)

> Deus expressa-se por meio de Leis da Matemática Universal, ao construir com elas o Universo (físico) em sua harmônica e proporcional geometria. A Verdade é uma tanto para o mundo das medidas nanométricas quanto para o mundo das medidas astronômicas e, além deles. Tanure (2012)

4.1.7 Fibonacci e a Física

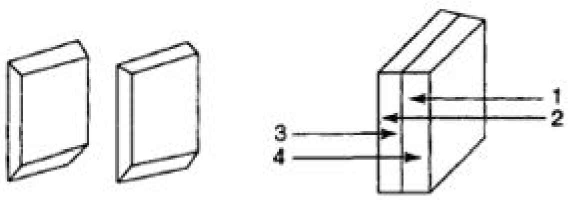
A sequência de Fibonacci e o número de ouro têm se mostrado presentes até então em várias situações, e não poderia ser diferente na Física. Em redes elétricas e Óptica, o nosso amigo Fibonacci também se faz presente.

4.1.7.1 Fibonacci e a Óptica

> A Óptica é definida como a ciência que estuda a origem da propagação da luz e as transformações de diferentes fenômenos, os quais estão diretamente ligados a ela. Existem dois pólos principais na Óptica: a física e a geométrica. A óptica física analisa primeiramente a natureza e as características da luz [...]. Cavalcanti (2009, p. 11)

Considere duas placas de vidro, ambas colocadas face-a-face, formando uma única pilha de vidros composta por quatro faces reflexivas, como mostra a Figura 48.

Figura 48 – Placas de Vidro

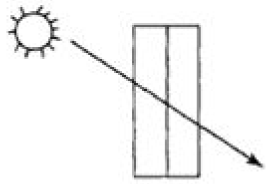


FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Suponha que um feixe de luz incida na pilha de vidro. Esse mesmo feixe irá deixar um número distinto de caminhos reflexivos feitos com n reflexões, admitindo $n > 0$. Aqui, o objetivo será determinar a quantidade de reflexões possíveis que poderão acontecer com a passagem desse mesmo feixe de luz através da pilha de vidros.

Como primeiro caso, pode ocorrer que não haja reflexão. Quando isso acontecer, o feixe de luz apenas atravessará as placas de vidro, Figura 49.

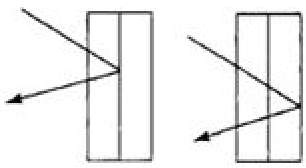
Figura 49 – Placas de Vidro



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Supondo que o feixe provoque uma reflexão, logo haverá dois caminhos possíveis distintos.

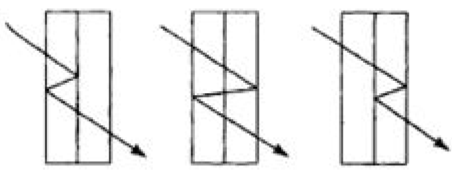
Figura 50 – Placas de Vidro



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Se o raio for refletido duas vezes, três caminhos distintos possíveis surgirão, como mostra a ilustração a seguir.

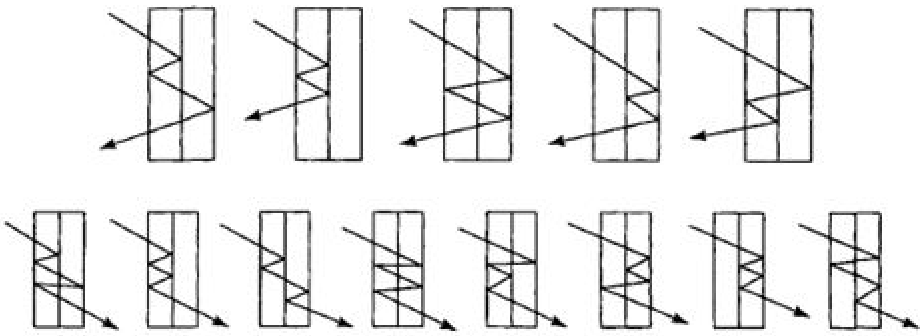
Figura 51 – Placas de Vidro



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Sendo assim, três feixes de luz gerarão cinco reflexões distintas. Quatro feixes produzirão oito reflexões, e assim sucessivamente, seguindo como padrão a sequência de Fibonacci.

Figura 52 – Placas de Vidro



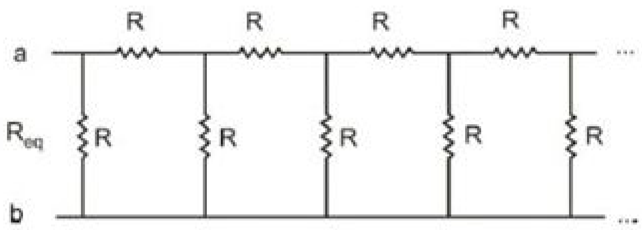
FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

4.1.7.2 Fibonacci e a Eletricidade

> Circuito elétrico é um conjunto formado por um gerador elétrico, um condutor em circuito fechado e um elemento capaz de utilizar a energia produzida pelo gerador. (Talita Alves, Equipe Mundo Educação).

Consideremos, agora, um circuito elétrico com infinitos resistores paralelamente em série. Na ilustração a seguir, temos um circuito com um número infinito de resistências de igual valor descrito R. Podemos demonstrar que o circuito equivalente é da forma $R_{eq} = \Phi R$.

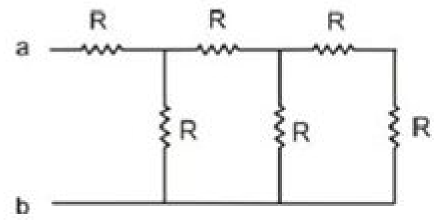
Figura 53 – Circuito Elétrico de Infinitas Resistências

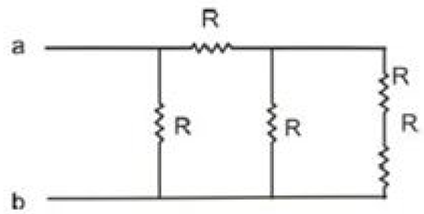


FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Para uma primeira demonstração indutiva, comecemos com parte de um circuito de apenas três malhas.

Figura 54 – Circuito Elétrico de Três Malhas





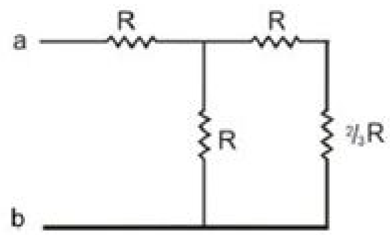
FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

A malha final tem duas resistências em série, que estão em paralelo com a sua adjacente. Apliquemos a fórmula para o cálculo da resistência equivalente para um circuito em paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{2}{3}R.$$

Observe o circuito resultante da aplicação da fórmula:

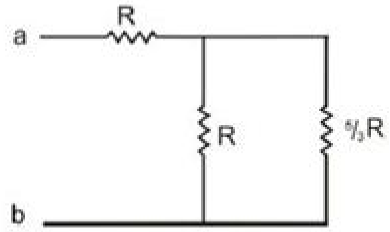
Figura 55 – Circuito Elétrico



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Observando bem as duas resistências em série (pelo mesmo processo acima, temos $R + \frac{2}{3}R$), estas também estão em paralelo com a adjacente. Assim, a nova configuração resultante do circuito é a que descrevemos a seguir.

Figura 56 – Circuito Elétrico



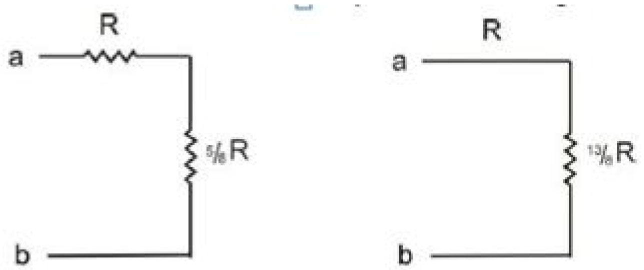
FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

A ilustração acima nos permite determinar também outra resistência equivalente:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{5}{3}R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{5}{8}R.$$

O processo para resolver o problema de um circuito de três malhas, finalmente, tem as seguintes configurações:

Figura 57 – Circuito Elétrico/Resistência Equivalente para as Três Malhas



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

Na figura acima, estão presentes as novas resistências equivalentes para as três malhas. Aplicando esta última solução, obtemos:

$$R_{eq} = R + \frac{5}{8}R = \frac{13}{8}R.$$

Já para um circuito de quatro malhas, a solução é $R_{eq} = 21R/13$.

A presença da sequência de Fibonacci é identificada utilizando demonstrações com base em frações contínuas, segundo o fato de que cada número irracional pode ser representado como uma fração contínua infinita, de modo que o número de ouro possa ser escrito como

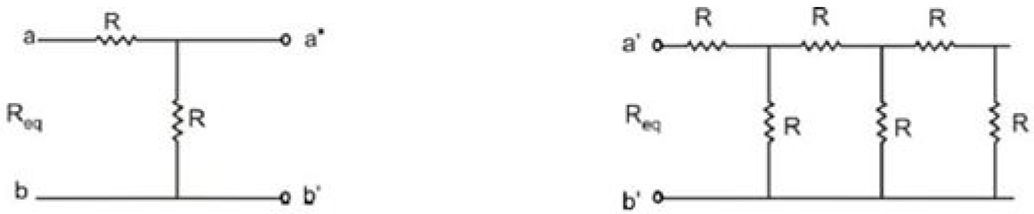
$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}}.$$

Assim, podemos expressar o circuito acima como

$$\frac{R_{eq}}{R}=\frac{13}{8}=1+\frac{5}{8}=1+\frac{1}{\frac{8}{5}}=1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}.$$

Uma demonstração mais formal para isso baseia-se na separação do circuito em duas seções, como mostrado abaixo (Figura 58).

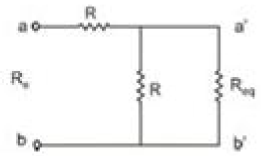
Figura 58 – Circuito Elétrico/Forma abreviada para representar todas as infinitas resistências



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

A ilustração acima representa outra forma abreviada para definir a resistência infinita de um circuito. O lado direito da figura acima é ainda uma coleção infinita de resistências, sendo, portanto, igual a 1. Podemos representar essa situação pode na figura a seguir.

Figura 59 – Circuito Elétrico/Contém todas as Resistências Equivalentes



FONTE: FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS WITH APPLICATIONS

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_{eq}}=\frac{R+R_{eq}}{RR_{eq}}\Rightarrow R_{eq}=\frac{RR_{eq}}{R+R_{eq}}.$$

A ilustração acima (Figura 59) representa um circuito contendo todas as outras resistências equivalentes. Também define uma nova variável de tal modo que $R_e=R+R_{eq}$. Considerando o lado direito dessa equação como a resistência equivalente desejada, temos:

$$R_{eq}=R+\frac{RR_{eq}}{R+R_{eq}}=\frac{R^2+2RR_{eq}}{R+R_{eq}}\Rightarrow R_{eq}^2-RR_{eq}-R^2=0.$$

Resolvendo essa equação, concluímos que $R_{eq}=$.

4.1.8 Fibonacci e o Cotidiano

Atualmente, um estudante americano com 13 anos de idade, chamado Aidan Dwyer, conseguiu criar uma forma mais eficaz para a captação de energia solar por meio da sequência de Fibonacci.

Figura 60 – Aidan Dwyer

FONTE: Xavier (2012)

O que Aidan fez foi uma espécie de árvore em PVC em que as folhas e os galhos são pequenos painéis solares que respeitam a sequência de fibonacci.

Figura 61 – Árvore de Fibonacci

FONTE: Xavier (2012)

O resultado da experiência, segundo Xavier (2012), foi que, ao analisar a coleta de luz solar na árvore que seguia a sequência de Fibonacci, a imitação da natureza se mostrou mais eficaz. Além disso, a árvore ocupa menos espaço físico que um painel de captação de energia solar e aumenta significativamente a coleta de luz solar durante o período do inverno.

Com a sua invenção, o garoto ganhou uma patente provisória do governo dos EUA, além do interesse de diversas organizações em comercializar a sua inovação.

Outro fato da presença da sequência de Fibonacci em nosso cotidiano atual está na criação do “Relógio de Fibonacci”.

Figura 62 – Relógio de Fibonacci

FONTE:Ventura (2015)

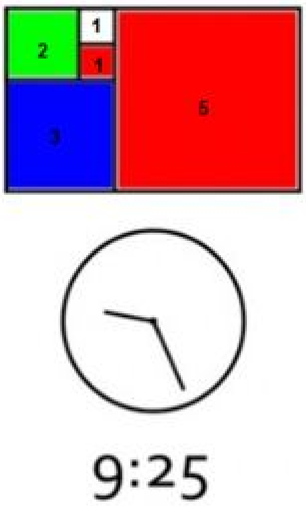
O canadense Philippe Chrétiens especulava a ideia de que a sequência de Fibonaci poderia ser usada para ver as horas e construiu um relógio nunca visto antes. Sua fabricação utiliza uma placa Arduino e seu acabamento é feito de madeira. Ele utilizou somente os primeiros cinco números da sequencia de Fibonacci, 1,1,2,3 e 5, sabendo que a soma destes resulta em 12, e desenvolveu alguns cálculos para descobrir que horas são.

Figura 63 – Philippe Chrétiens

FONTE:Ventura (2015)

Segundo Ventura (2015), para saber que horas são, cada um dos cinco números corresponde a um dos quadrados do relógio. As horas correspondem à cor vermelha; os minutos, à cor verde; a cor azul representa o número que deve ser adicionado às horas e aos minutos, e, ao final, os minutos devem ser multiplicados por cinco para obter o número correto. Como exemplo, acompanhe a ilustração a seguir.

Figura 64 – Representação de Hora no relógio de Fibonacci



FONTE:Ventura (2015)

Horas: $1+5+3=9$.

Minutos:$2+3=5\times 5=25$.

Além disso, o relógio de Fibonacci serve também como abajur, ainda que basicamente sua principal função seja marcar a passagem das horas.

4.2 Sugestões de Atividades sobre Fibonacci e a Razão Áurea

A sequência de Fibonacci é uma sequência que possibilita uma grande quantidade de aplicações dentro da educação básica, tornando o processo de ensino-aprendizagem em Matemática mais prazeroso e significativo para os discentes, Dante (2005, p. 10), destaca que uma aprendizagem significativa envolve:

> "Pensar logicamente, relacionar ideias, descobrir regularidades e padrões, estimular a curiosidade, espírito de investigação, criatividade, desenvolver a capacidade de fazer Matemática, construir conceitos e procedimentos, formular e resolver problemas".

É dentro desse pensamento que surge a ideia de relacionar a sequência de Fibonacci com algumas situações do dia a dia, aguçando a vontade de "fazer Matemática e aprender Matemática" dos alunos. LARA (2003), reforça essa ideia dizendo:

> Estimular o pensamento independente e não apenas a capacidade mnemônica; desenvolver a criatividade e não apenas transmitir conhecimentos prontos e acabados; desenvolver a capacidade de manejar situações reais e resolver diferentes tipos de problemas. Somente dessa maneira, será possível pensar em uma matemática prazerosa, interessante, que motive nossos alunos, dando-lhes recursos e instrumentos que sejam úteis para o seu dia-a-dia buscando mostrar-lhes a importância dos conhecimentos matemáticos para a sua vida social, cultural e política (p. 19).

Usaremos técnicas de Aritmética, jogos, truques e conceitos históricos para apresentar aos discentes uma Matemática diferente, divertida e curiosa, sempre tendo como base a sequência de Fibonacci.

4.2.1 Pesquisa sobre a vida e a obra de Fibonacci

A ideia deste tópico é apresentar, aos discentes, Leonardo Fibonacci e a sua sequência, por meio de pesquisa em computadores (com acesso à internet) e/ou material impresso. Essa atividade poderá ser realizada em grupos (4 a 6 alunos), para que haja o debate entre os seus integrantes, promovendo a interação e uma aprendizagem mais significativa. Também poderá ser realizada tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, com o propósito de difundir a Matemática entre os discentes, mostrando que ela é uma ciência viva.

> *Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns porquês e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. [..] (BRASIL, 1998, p. 48)*

Tendo como objetivo principal a interação entre o aluno e o objeto de ensino a ser estudado, essa primeira atividade dará suporte para as demais atividades, pois todas as próximas atividades terão como solução algo relacionado à sequência de Fibonacci. Portanto, essa atividade se torna imprescindível para que os discentes, ao trabalharem as demais, tenham um conhecimento prévio de quem foi Fibonacci e suas contribuições para a Matemática.

4.2.1.1 Atividade: Pesquisa sobre a vida e a obra de Leonardo Fibonacci

Responda ao seguinte questionário sobre a vida e a obra de Fibonacci.

Quem foi Leonardo Fibonacci?

Qual o significado do nome dele?

Quais outros nomes ele tinha?

Em que local ele nasceu, viveu e morreu?

O que significa “Liber Abaci”?

Como ele foi impresso?

Por que ele foi escrito?

Que imagens relevantes estão lá?

Redija um breve relato, sobre fatos interessantes, de Fibonacci ou de sua família.

Onde, na Natureza, podemos encontrar os números de Fibonacci?

Além da história dos coelhos, existe uma similar relacionada às abelhas. Descreve-a.

Como a sequência de Fibonacci se relaciona com as flores? Quais flores?

Quais as imagens relevantes que você pode encontrar, relacionadas à sequência de Fibonacci?

O que mais você descobriu sobre esse assunto?

4.2.2 O problema que gera a sequência de Fibonacci e a relação de recorrência

Neste segundo tópico, apresentaremos o clássico problema dos coelhos, introduzindo a ideia da criação de pares férteis e capazes de procriarem com um mês de vida, fazendo com que os discentes possam refletir e criarem, por si sós, a sequência que posteriormente denominaremos sequencia de Fibonacci.

Para a realização dessa atividade, será necessária a divisão dos alunos em grupos, folhas para anotações e confecções de tabelas, material impresso (ou computador com acesso à internet), papel, caneta e régua. Será necessária uma primeira explanação do assunto por parte do professor, para poderem iniciar as atividades. Caso o docente veja a necessidade de intervir, que o faça de maneira a assessorar os alunos, visando à realização de um bom trabalho.

É importante que, depois de introduzida a sequência, os alunos conjecturem algumas situações, como:

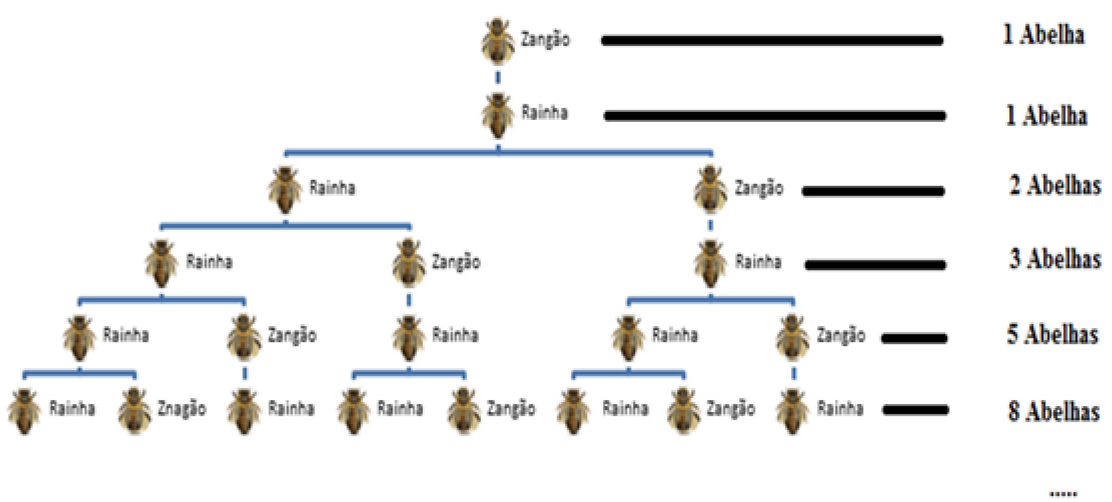
1ª Cada elemento da sequência, a partir do terceiro, é a soma imediata dos dois termos anteriores:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

2ª A soma de uma quantidade finita de números de Fibonacci é dada pela diferença entre o termo F_{n+2} e 1, ou se seja, $F_{n+2} - 1$, se considerarmos F_n como sendo o maior termo. Conjectura de fácil demostração, que, certamente, servirá como inspiração para os discentes se concentrarem nas demais atividades.

3ª Para os discentes enxergarem a sequência de Fibonacci em outra situação um pouco mais realista, usaremos a árvore genealógica do zangão (Figura 65) a seguir. Essa atividade dará à Matemática um aspecto de aplicabilidade real.

Figura 65 – Árvore genealógica do Zangão



FONTE: Autor

4.2.2.1 Atividade: Produção da Tabela de procriação dos coelhos, razão entre os termos da sequência de Fibonacci (sucessor pelo antecessor), árvore genealógica do zangão e blocos de anotações

Para a realização dessa atividade, sugerimos a seguinte sequência de ensino.

1º Peça aos alunos que façam, em seus blocos de notas, todas as anotações pertinentes em relação ao que será abordado nessa atividade.

2º Relate aos alunos a história dos coelhos e, com a sua ajuda, produza algumas gerações na lousa.

3º Deixe os alunos ajudá-lo na elaboração dos números de pares de coelhos em cada geração. Nesse momento, é interessante a construção da tabela, representada pela Figura 66 a seguir.

Figura 66 – Reprodução de coelhos

Meses	Quantidade de Casais Jovens	Quantidade de Casais Adultos	Sequência de Fibonacci Quantidade de casais (Jovens e Adultos)
Janeiro			
Fevereiro			
Março			
Abril			
Maio			
Junho			
Julho			
Agosto			
Setembro			
Outubro			
Novembro			
Dezembro			

FONTE: Autor

4º Pergunte aos alunos quais os padrões que eles veem nesses números. (Observar, em particular, o fato de que o próximo número, a partir do terceiro, é a soma dos dois números anteriores).

5º Diga aos alunos como é conhecida essa sequência e defina com eles F_n como sendo um número da sequência de Fibonacci. Verifique se eles estão fazendo a descoberta dos números dessa sequência, observando o preenchimento da tabela (F_3, F_5, F_6, dentre outros). Também pergunte-lhes se eles podem obter os valores de "n" nas equações $F_n = 8; F_n = 144; F_n = 377$, dentre outros.

6º Peça aos alunos para calcularem a seguinte divisão:

$$F_{n+1}/F_n.$$

7º Apresente aos alunos (caso não conheçam) o número de ouro (razão áurea) – o $\Phi(Fi)$, comparando-a com a razão obtida com a divisão entre os termos acima.

8º Você poderá também discutir se este é um modelo muito bom de crescimento da população ou não. (Seria o mundo inundado com coelhos até agora?)

9º Apresente aos alunos o modelo de geração de um zangão. Observe se eles visualizam nesse modelo a sequência de Fibonacci.

10º Permita que os alunos apresentem suas anotações e conclusões, para que possa ser aferido o que de fato foi assimilado.

4.2.3 Conversões entre milhas e quilômetros usando a sequência de Fibonacci

A terceira atividade que consideraremos é uma aplicação da sequência de Fibonacci à transformação entre unidades de medida de comprimento. Embora saibamos que essa transformação não seja exata, porém nos fornecerá uma boa aproximação.

A unidade “milha” (mi) é a unidade adotada pelos EUA e Reino Unido, para medida de comprimento, embora o Sistema Internacional de unidades (SI) indique o metro (m) como unidade padrão internacional. Mas, para dimensionar medidas de comprimento, principalmente entre cidades e grandes dimensões, é usado nos demais países o quilômetro (km).

É dentro desse contexto que surgem a ideia e a necessidade de transformação de um determinado valor em milhas para quilômetro ou vice-versa, e o fato interessante é que essa transformação se aproxima de uma troca de valores pertencentes à sequência de Fibonacci. Observe a Figura 67 a seguir com algumas dessas transformações de unidades.

Figura 67 – Transformação de Unidade: Quilômetro/Milha

Quilômetros	**Representação como soma de números de Fibonacci**	**Milhas**
8	8	≅5
13	13	≅8
10	2+8	≅1+5 = 6
15	2+13	≅1+8 = 9
23	2+21	≅1+13 = 14
38	1+3+34	≅1+2+21 = 24
99	2+8+89	≅1+5+55 = 61

FONTE: Autor

Embora já tenhamos mencionado, essa transformação funciona de forma aproximada, devido ao valor de conversão de quilômetros para milha ou vice-versa, que é de aproximadamente de $1,6093\ldots$, o que faz com que esse número e a razão áurea $1,618\ldots$ estejam próximos entre si.

Logo, como visto anteriormente, os termos da sequência de Fibonacci, quando divididos nessa ordem (sucessor pelo antecessor), quanto maiores forem esses números, com maior precisão obteremos o número áureo $1,618\ldots$, fato este que faz com que tenhamos uma boa aproximação na transformação de quilômetros para milhas, usando a sequência de Fibonacci. A conversão funcionará da seguinte maneira. Considere a medida de $8\,km$, a qual será equivalente a $5\,mi$, uma vez que esses números são números de Fibonacci. É importante ressaltar que, em algumas situações, os números que serão convertidos não pertencem à sequência de fibonacci. Nesse casso, teremos que recorrer ao conhecido (e já mencionado neste trabalho) Teorema de Zeckendorf (Fibonacci Quarterly 36 (1998), páginas 416-418). Recordemos que o Teorema de Zeckendorf afirma que cada número inteiro positivo pode ser representado como a soma de dois ou mais números distintos de Fibonacci, de tal maneira que essa soma não inclua quaisquer dois números consecutivos de Fibonacci. Como no último exemplo acima (Figura 67), em que temos o número 99, esse número poderá ser escrito da seguinte maneira: $2+8+89$. Observe que nenhum número é consecutivo, mas todos pertencem à sequência de Fibonacci.

Procedimento para conversão de quilômetros para milha e vice-versa.

1º Transforme os números dados em soma de números pertencentes à sequência de Fibonacci.

2º Substitua cada número de Fibonacci da soma por um anterior na sequência de Fibonacci (tem o efeito de reduzir o número em cerca de 0,618 vezes Φ).

3º Caso queira efetuar a transformação inversa, milhas para quilômetros, basta trocar cada número que for escrito pela soma de números de Fibonacci pelo seguinte correspondente na sequência (tem o efeito de aumentar o número por cerca de $1,618$ vezes $\Phi(Fi)$).

Exemplo 1. Para converter $20km$ ("20" não é número da sequência de Fibonacci) para milhas, procedemos como segue:

$$20 = 2+5+13\ (2,5 \text{ e } 13, \text{ são números de Fibonacci}).$$

Substitua 13 por 8, 5 por 3; 2 por 1. Somando 8, 3 e 1 (números da sequência de Fibonacci), teremos 12 milhas, ou seja, 20

Exemplo 2. Para converter $30\,mi$ ("30" não é número da sequência de Fibonacci) para quilômetros, procedemos como segue:

$30 = 21 + 5 + 3 + 1$ $(1, 3, 5e21$ são números da sequência de Fibonacci).

Substitua 21 por 34; 5 por 8; 3 por 5, e 1 por 2. Logo, teremos, após efetuarmos a soma, que 30 mi equivalem a, aproximadamente, 49 km.

4.2.3.1 Atividade: Conversão entre milhas e quilômetros

Essa atividade abordará uma interessantíssima aplicação da sequência de Fibonacci, e, juntamente com essa aplicação, outros conteúdos pertinentes serão abordados, tais como: Razão, Proporção, sequências numéricas, conversão de unidades, dentre outros (soma, subtração, multiplicação e divisão).

É importante salientar que essa atividade necessita de pré-requisito, que é a sequência de Fibonacci, pois se trata, claro, de uma conversão que usa os termos dessa sequência. Portanto, é de extrema necessidade que os discentes tenham conhecimento da sequência de Fibonacci. Certamente, caso ela não tenha sido trabalhada anteriormente, será um bom momento para aplicar a Atividade 4.1.1 proposta neste trabalho.

Sugestão de cronograma para aplicação da atividade **conversão entre milhas e quilômetros**.

1º Faça a introdução sobre sequência de Fibonacci.

2º Mostre que os números naturais podem ser escritos como a soma de dois ou mais números pertencentes à sequência de Fibonacci.

3º Relembre conceitos sobre razão, proporção e número de ouro.

4º Faça a divisão entre os números da sequência de Fibonacci, sucessor pelo antecessor e antecessor pelo sucessor.

5º Construa a tabela representada pela Figura 68 a seguir.

Figura 68 – Transformação de Unidade: Quilômetro/Milha

Quilômetros	**Representação como soma de números de Fibonacci**	**Representação da soma, substituindo cada uma pelo seu antecessor na sequência de Fibonacci**	**Milhas**
39	5+34	3+21	≅24

FONTE: Autor

6º Aplique algumas atividades que possam levar o discente à aplicação desse método de conversão, tais como os seguintes:

6. 1 - há alguns anos, o limite de velocidade nos EUA era de 55 milhas por hora. A qual velocidade ele corresponde em quilômetros por hora, aproximadamente? Uma pessoa que habitualmente desenvolve uma velocidade de 100 km/h seria multada nos EUA?

6. 2 - o limite de velocidade nas estradas do Reino Unido é de 70 milhas por hora. A qual velocidade ele corresponde em quilômetros por hora, aproximadamente?

6. 3 - o recorde de velocidade do trem de alta velocidade era de 552 km/h e foi fixado em 14 de Abril de 1999, no Japão. Qual é a velocidade equivalente em milhas por hora utilizando o método de Fibonacci? Qual é a velocidade equivalente em milhas por hora utilizando o fator de conversão de $1,6093$ quilômetros por milha? Qual é o percentual de diferença utilizando o método de Fibonacci e o de conversão de $1,6093$?

7º Discuta com os alunos todas as soluções e conclusões que eles obtiveram, e tente traçar um paralelo sobre o que foi trabalhado e o que foi assimilado.

4.2.4 O processo de multiplicação utilizando a sequência de Fibonacci

Os egípcios tinham uma maneira diferente para multiplicar dois números inteiros que só envolvia a duplicação de números e a adição, uma forma relativamente fácil para resolver multiplicações entre números, necessitando apenas da construção de uma tabela (colunas) de duplicação de valores. Trata-se, pois, de um excelente processo para ser trabalhado principalmente com alunos do fundamental.

No entanto, esse processo pode ser apresentado para todo o ensino básico, servindo como fonte de inspiração para os discentes, mostrando que os processos básicos de soma, subtração, divisão e multiplicação, desde muito tempo, constituem uma preocupação das sociedades.

Como exemplo, calcularemos, por esse processo, a multiplicação 42×82. Observe a tabela representada pela Figura 69 a seguir.

Figura 69 – Multiplicação utilizando a sequência de Fibonacci

<table>
<tr><th>Números que serão duplicados</th><th>Números duplicados a partir do primeiro valor</th><th>Escolha dos números que serão somados "*"</th><th rowspan="7">Soma dos números escolhidos
164
656
+ 2624
____
3444
Que representa o produto: 42 x 82</th></tr>
<tr><td>1</td><td>82</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>164</td><td>*</td></tr>
<tr><td>4</td><td>328</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>656</td><td>*</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1312</td><td></td></tr>
<tr><td>32</td><td>2624</td><td>*</td></tr>
</table>

FONTE: Autor

Nesse produto (42×82), escolhemos o número 82 para duplicarmos (essa escolha foi feita pelo simples fato de que 42 é menor que 82, o que facilitará na hora de duplicarmos o número 1 que aparece na primeira coluna; essa duplicação do "1" é cessada no momento em que for possível a soma de alguns desses números (ou todos) formando o número 42). Observe que sempre começaremos com o número 1 na primeira coluna. (A demonstração desse processo de soma está presente na revista Fibonacci, Lucas e os egípcios, por S. La Barbera, em The Fibonacci Quarterly , V. 9, 1971, páginas 177-187).

Dentro desse contexto, inserimos a versão que nos permitirá o uso da sequência de Fibonacci, para multiplicarmos números inteiros usando um procedimento semelhante, visto que o nosso objeto de estudo são as aplicações utilizando a sequência de Fibonacci.

Vamos considerar esse mesmo exemplo (42×82) e multiplicaremos conforme a tabela representada pela Figura 70 a seguir.

Figura 70 – Multiplicação utilizando a sequência de Fibonacci

<table>
<tr><th>Números da sequência de Fibonacci</th><th>Números que serão produzidos pela soma dos termos que antecedem o próximo (a partir do terceiro), o primeiro número é de escolha individual e o segundo será o dobro do primeiro</th><th>Escolha dos números que serão somados "*"</th><th rowspan="7">Soma dos números escolhidos

656
1066
+1722
3444

Que representa o produto: 42 x 82</th></tr>
<tr><td>1</td><td>82</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>164</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>246</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>410</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>656</td><td>*</td></tr>
<tr><td>13</td><td>1066</td><td>*</td></tr>
<tr><td>21</td><td>1722</td><td>*</td><td></td></tr>
</table>

FONTE: Autor

Desta vez, escolheremos o primeiro número (por exemplo, 82) como representante da coluna do lado direito; na coluna do lado esquerda, começaremos com 1. A segunda linha tem 2; a terceira, 3; a quarta, 5; 8, e assim sucessivamente, seguindo a sequência de Fibonacci. Para a da direita, usaremos, inicialmente, 82, duplicando-o na segunda linha. A partir da terceira, somaremos sempre os dois imediatamente anteriores, como na sequência de Fibonacci, porém modificada.

Esse cálculo cessará quando, do lado esquerdo, a soma de alguns números de Fibonacci produzir o número menor (no caso, 42). Para concluir a multiplicação, somaremos os números que corresponderem aos números da esquerda que, somados, formaram o menor número da multiplicação.

4.2.4.1 Atividade: Multiplicar números utilizando a sequência de Fibonacci

Esta é uma atividade interessante, tanto pelo processo (aplicação da sequência de Fibonacci), quanto pelo fato histórico (de onde surgiu). Para aplicação dessa atividade, serão necessários:

1º apresentação da sequência de Fibonacci (caso os alunos ainda não a conheçam);

2º formação de grupos para discussão do processo de multiplicação;

3º transformação de números em soma de números da sequência de Fibonacci;

4º Vários produtos entre dois elementos, para que os discentes possam aplicar o procedimento;

5º Debate com alunos para averiguação de aprendizagem.

4.2.5 Um truque utilizando os números de Fibonacci

Esta atividade tem como objetivo trabalhar a soma e a multiplicação de maneira prática e divertida, pois levará o discente a indagar sobre o que está envolvido por trás de um cálculo relativamente extenso sem o uso da calculadora, mas que, no entanto, se tem a resposta de imediato.

Pede-se, inicialmente, ao discente que escolha dois números. Após a escolha, pede-se que o aluno faça a soma do primeiro (1º) com o segundo (2º) números escolhido. O resultado será o terceiro (3º) número, e esse será somado ao segundo, formando, assim, o quarto (4º) número, e, dessa forma, segue-se até o décimo número, como na tabela representada pela Figura 71 a seguir.

Nessa tabela, efetuaremos a soma: $78+38$.

Figura 71 – Soma de valores utilizando a sequência de Fibonacci

78 38 116 154 270 424 **694** * 1118 1812 + 2930 7634	**Modo prático para se obter o resultado** Basta considerar o 4º (quarto número, de baixo para cima) ou o 7º (sétimo número, de cima para baixo) e multiplica-lo por 11. Logo, temos **11 x 694 = 7634** Lembrando que 11 = 10 + 1, então **10 x 694 + 694 = 6940 + 694**

FONTE: Autor

Como mostrado na figura acima, o aluno deverá dispor os números de maneira a facilitar ao docente obter o 4º número, de baixo para cima, pois esse será multiplicado por 11, fornecendo o resultado da soma de todos os termos.

Para que essa mágica matemática provoque surpresa aos discentes, peça que algum aluno, ao mesmo tempo em que o docente, faça a soma utilizando uma calculadora. É interessante ressaltar, ainda, que o professor olhe para o quarto número uma única vez, de modo a aumentar a curiosidade dos alunos.

Essa mágica matemática dá certo e está na revista Fibonacci Quarterly V. 23 (1985), páginas 221-231, e, abaixo, mostraremos por que ela funciona.

Ela funciona, pois, usando álgebra e começando com A e B como sendo os dois números que serão escolhidos pelo aluno, o terceiro número será a soma $A+B$ na forma algébrica. A próxima soma será $A+2B$. Os outros números na coluna são $2A+3B, 3A+5B, \ldots$, até $21A+34B$, como veremos na tabela representada pela Figura 72 a seguir.

Figura 72 – Soma de valores utilizando a sequência de Fibonacci

A B A + B A + 2B 2A + 3B 3A + 5B **5A + 8B** * 8A + 13B 13A + 21B + 21A + 34B **55A + 88B**	**Modo prático para se obter o resultado** Observe que o resultado final é **55A + 88B = 11 x (5A + 8B),** ou seja, 11 x (4º número, de baixo para cima).

FONTE: Autor

Observe que o resultado dessa soma é $55A+88B = 11 \cdot (5A+8B)$, e esses números pertencem à sequência de Fibonacci, logo estão com ela relacionados.

4.2.5.1 Atividades: Um truque utilizando os números de Fibonacci

Para uma abordagem em sala de aula sobre esse assunto, sugerimos a seguinte sequência didática:

1º comece apresentando, caso ainda não seja do domínio da sala, Fibonacci e sua sequência;

2º escolha um aluno para que este possa ter em mãos uma calculadora;

3º peça a um segundo aluno que escolha os dois números para que possamos montar a coluna da soma (exemplifique, se for o caso, para que o aluno produza de forma clara e correta essa coluna, pois será dela extraída o valor que será multiplicado por 11);

4º produza a coluna com os dez números;

5º diga à classe que você irá ver a sequência apenas uma vez;

6º Peça ao aluno que está com a calculadora para que some o resultado (nesse momento, é interessante que o professor consiga, por meio do procedimento apresentado nas tabelas representadas pelas Figuras 70 e 71 acima, apresentar o resultado de imediato, pois, certamente, os alunos ficarão surpresos).

Apresentar aos alunos o real motivo de que o resultado dá certo poderá ser feito de várias maneiras cabendo tão somente ao docente escolher a melhor delas.

4.2.6 Cartões Mágicos de Fibonacci

Uma atividade interessantíssima para ser abordada em sala de aula, relacionando sequência de Fibonacci, é a dos cartões mágicos de Fibonacci, por se tratar de uma "mágica", na qual o discente escolherá um número dentro de uma sequência, e esse número será descoberto pelo docente, dando a impressão de que o professor é, de fato, mágico.

Esse truque de mágica envolvendo cartas funciona da seguinte maneira: o mágico (professor) pede ao aluno que pense em um número de um subconjunto dos números naturais, e o mago (professor) dirá qual é esse número. O mágico (professor) entregará um conjunto de cartas ao aluno pedindo-lhe que escolha aquelas em que o seu número aparece.

Desde já é importante ressaltar que há muitos números em cada cartão, o que, aparentemente, torna difícil a descoberta por parte do discente, mas, no entanto, o mago (professor) imediatamente anuncia o número pensado.

Para exemplificar o que será feito, mostraremos a seguir a tabela representada pela Figura 73 (observe que aqui temos um conjunto de 5 cartas, de modo que o número a ser pensado está entre 1 e 12).

Figura 73 – Mágica Fibonacci/Cartões Mágicos

A:	B:	C:	D:	E:
1- 4- 6- 9- 12	2- 7- 10	3- 4- 11- 12	5- 6- 7	8- 9-10 -11 -12

FONTE: Autor

O segredo para o truque dar certo é somar o primeiro número em cada cartão que é entregue de volta a você, os quis contêm o número pensado.

Então, suponha que eu pense no nº 9. Eu entregaria de volta a você os cartões que começam com 1 e um cartão que comece com 8. Você irá adicioná-los e anunciar que o nº 9 foi o número que eu havia pensado.

O truque funciona devido à utilização do Teorema de Zeckendorf, mencionado na Atividade 4.3 (segundo o qual, qualquer número natural pode ser escrito com uma composição de números de Fibonacci não adjacentes), de modo que $9 = 1 + 8$.

4.2.6.1 Atividades: Cartões Mágicos de Fibonacci

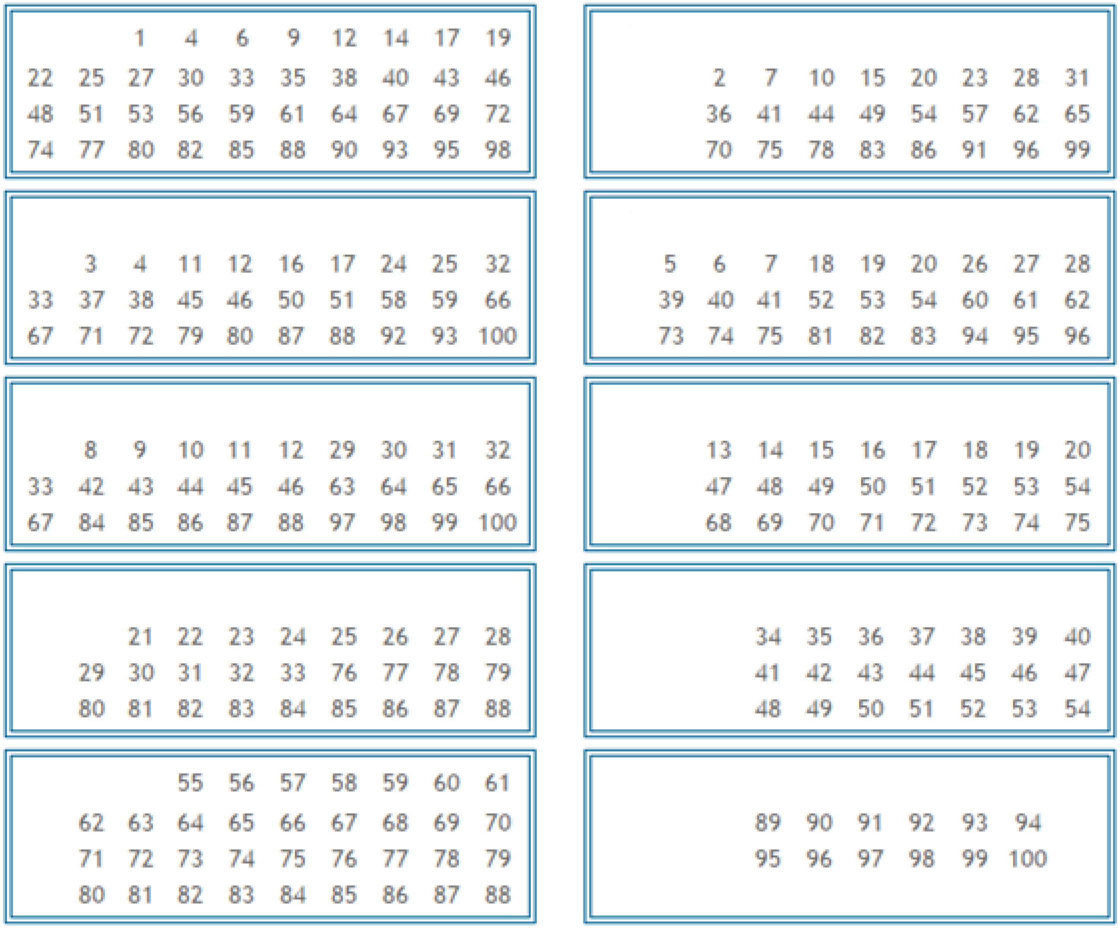
Esta atividade poderá ser bem explorada pelo docente, uma vez que se trata de uma mágica. Assim, sugerimos que o professor crie uma sequência com uma quantidade elevada de números, provocando a curiosidade do discente. Abaixo, segue um roteiro sugestivo para esta atividade.

1º apresente ao aluno uma sequência com 100 números naturais, $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots)$;

2º peça a ele que escolha um dentre esses 100 números;

3º apresente a ele a seguinte sequência de cartas (tabela representada na Figura 74 a seguir);

Figura 74 – Mágica Fibonacci/Cartões Mágicos



FONTE: Autor

4º peça a ele que escolha, dentre esses cartões, aqueles que contenham o número escolhido por ele e lho devolva;

5º forneça a resposta somando os números que apareçam na primeira posição de cada cartão escolhido e devolvido pelo aluno.

Variações podem ocorrer para tornarem ainda mais interessante o truque, como a quantidade de números para serem escolhidos pelo discente, a permutação das posições dos números no próprio cartão, dificultando a percepção, por parte do discente, sobre os números de Fibonacci que aparecem nos cartões na primeira posição.

Ao término dessa atividade, o professor poderá ainda apresentar o segredo para os alunos, mostrando, mais uma vez, a utilização dos números da sequência de Fibonacci, de modo que a Matemática é, de fato, uma ciência viva e presente em várias situações.

4.2.7 Jogo de Nim ou "Fibonacci Nim"

O jogo de Nim se refere a um jogo de um contra um, no qual os jogadores se revezam na remoção de objetos.

Existem numerosas versões desse jogo. A versão aqui apresentada é comumente referida como “Fibonacci Nim”, devido à ligação curiosa entre a estratégia ideal para o jogo e os números de Fibonacci. Esses números, em particular, fazem brotar uma estratégia vencedora, conduzindo um determinado jogador sempre à vitória.

Esse jogo foi concebido por Robert E. Gaskell, colaborador da revista americana “The Fibonacci Quarterly” (fundada em 1963 e dedicada às inúmeras e surpreendentes propriedades da sequência de Fibonacci, já mencionada anteriormente).

Material necessário para o jogo.

Obter uma quantidade razoável de pequenos itens, todos do mesmo tipo (por exemplo, moedas, pedras, palitos, varas, conchas, etc.). Na ausência de tal material, também é possível fazer o jogo simplesmente desenhando traços, pontos ou círculos em uma folha de papel (recomendado para sala de aula).

Regras do jogo “Fibonacci Nim”.

As regras do jogo “Fibonacci Nim” são as seguintes:

1ª - no início, coloca-se sobre a mesa certa quantidade de objetos, ou simplesmente uma folha de papel e canetas (preferencialmente coloridas);

2ª - são dois oponentes (jogadores), alternando-se em movimentos;

3ª - o jogador que faz o primeiro movimento pode tirar vários itens, desde que nem todos sejam retirados;

4ª - o próximo jogador pode retirar até o dobro da quantidade retirada pelo oponente anterior (por exemplo, se um jogador retira três objetos, o outro poderá retirar, no máximo, 6 objetos);

5ª - em qualquer situação, nenhum dos jogadores poderá se negar a remover ou a retirar “zero” objeto;

6ª quando não mais restar objeto algum a ser retirado, o jogo termina, e o jogador que conseguiu fazer o último movimento vence.

4.3 Aplicação, em sala de aula, da sequência de Fibonacci e da Razão Áurea

Como professor da Educação Básica em Matemática, já há alguns bons anos, tenho percebido que o discente tem cada vez mais se afastado do processo aprender/gostar matemático. Os motivos desse fato são inúmeros: desde as dificuldades clássicas da disciplina (que envolvem as famosas decorebas de fórmulas), passando pela invasão tecnológica (que torna a vida fora da escola muita mais atraente e dinâmica), até a aplicabilidade dos conteúdos de Matemática nas suas vidas futuras (para que serve esse conteúdo professor?).

Tentando resolver e competir com tantas adversidades, realizei, junto aos alunos do Ensino Fundamental II (8º e 9º anos) e Ensino Médio (1ª série) da Escola Dr. Joaquim Pereira da Costa, Gurupi-TO, algumas atividades que não comprometessem a já tão imensa matriz curricular da Educação Básica, a fim de averiguar o envolvimento ou não, por parte dos discentes. Ao fim dessas atividades, realizei uma atividade avaliativa, confrontando o assunto estudado com o assimilado pelos estudantes. As atividades aqui desenvolvidas foram escolhidas de forma a promover o aprendizado, de maneira interativa, construtiva e dinâmica.

Inicialmente, propus aos discentes que realizassem uma pesquisa sobre personalidades da Matemática. O objetivo era apresentar a disciplina de forma viva e correlacioná-la com acontecimentos históricos da sociedade ao longo dos séculos. Dentre as personalidades estudadas, impunha-se a de Leonardo Fibonacci, que, mais tarde, no final de junho e início de agosto, viria a ser o nosso foco de estudo. Este trabalho promoveu, dentre os estudantes, a euforia pela descoberta, cujo clímax se deu no dia 14 maio, em uma apresentação em comemoração ao dia da Matemática.

Posteriormente, iniciei a abordagem, em sala, sobre o assunto: Fibonacci e a Razão Áurea. Foram abordadas 10 atividades, na seguinte ordem: 1ª Apresentação histórica sobre a vida e a obra de Fibonacci; 2ª Árvore genealógica do coelho e do zangão e o crescimento de uma árvore; 3ª Em quase “Tudo” Fibonacci; 4ª Propriedades da sequência de Fibonacci; 5ª Fibonacci e o número de Ouro; 6ª Apresentação dos Teoremas de Zeckendorf e de Binet; 7ª Truque da soma utilizando Fibonacci; 8ª Jogo “Nim” Fibonacci; 9ª Mágica Fibonacci; 10ª Miss e Mister Áureo.

Todas as atividades aplicadas tiveram como principal objetivo a aprendizagem significativa dos discentes, aguçando sua curiosidade e promovendo uma forma diferente de ensinar, fugindo um pouco do tradicional. À medida que as atividades eram desenvolvidas e assimiladas, nova atividade era introduzida, culminando, assim, com uma atividade avaliativa final, para obtenção de dados para análise da validade ou não dessa metodologia de ensino.

Abaixo, segue descrito, de forma organizada e cronológica, o desenvolvimento de cada atividade citada acima, para cada qual delas foram necessárias algumas adaptações de horários visto que cada turma do ensino médio tem apenas 3 horas aulas semanais.

Atividade 1: Apresentação histórica sobre a vida e a obra de Fibonacci.

Utilizado: material impresso sobre a vida de Fibonacci, quadro e pincel.(Obras utilizadas: Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente (Mario Livio) e Fibonacci and Lucas Numbers with Applications (Thomas Koshy).)

Objetivo: apresentar aos discentes um pouco mais sobre a vida de Leonardo Fibonacci, sua história, seus livros, os números indo-arábicos e o famoso problema dos coelhos.

Metodologia: aula expositiva.

Público-alvo: Alunos da 1ª Série do Ensino Médio; 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Tempo para aplicação: Aula de 60 minutos, sendo 40 minutos de aula expositiva e leitura, e 20 minutos para socialização das observações feitas pelos discentes.

Período de aplicação: 24/06/2016.

Atividade 2: Árvore genealógica do coelho e do zangão e o crescimento de uma árvore.

Material: folha de papel A4, régua, lápis de cor, quadro e pincel.

Objetivo: desenvolver conceitos de sequência numérica, trabalhar os números naturais, utilizar as quatro operações e trabalhar o raciocínio lógico dos discentes.

Metodologia: aula expositiva, formação de grupos, confecção de tabelas para a representação da árvore genealógica da reprodução de coelhos e do zangão, e a produção do desenho representativo do crescimento dos galhos de uma árvore.

Público-alvo: Alunos da 1ª Série do Ensino Médio; 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Tempo para aplicação: Aula de 60 minutos, sendo 40 minutos para produção da árvore genealógica do coelho e do zagão e o crescimento de uma árvore, e 20 minutos para socialização com os discentes.

Período de aplicação: 27/06/2016.

Atividade 3: Em quase "Tudo" Fibonacci.

Material: vídeos, fotos impressas de flores, radiografia das mãos, os planetas da Via Láctea, formação dos furacões, O Sacramento da Última Ceia (Dali) e o Modulor (Le Corbusier).

Objetivo: mostrar uma Matemática presente em vários outros segmentos da sociedade, Natureza, corpo humano, Astronomia, Arte, dentre outros.

Metodologia: aula expositiva, vídeos, quadro e pincel.

Público-alvo: Alunos da 1ª Série do Ensino Médio; 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Tempo para aplicação: Aula de 60 minutos, sendo 40 minutos para visualização das imagens e dos vídeos e 20 minutos para socialização com os discentes.

Período de aplicação: 28/06/2016.

Atividade 4: Propriedades da sequência de Fibonacci.

Material: folha A4, caderno, lápis, caneta e borracha.

Objetivo: apresentar novamente conceito de sequência numérica e desenvolver algumas propriedades relacionadas à sequência de Fibonacci (por meio de conjecturas e demonstrações).

Metodologia: aula expositiva instigando o discente a conjecturar, por si só, algumas propriedades, e logo depois ensiná-los a demonstrar tais conjecturas, tornando-as realmente válidas.

Público-alvo: Alunos da 1ª Série do Ensino Médio; 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Tempo para aplicação: Aula de 60 minutos, com a apresentação de algumas conjecturas sobre a sequência de Fibonacci e a demonstração de algumas dessas conjecturas.

Período de aplicação: 29/06/2016.

Atividade 5: Fibonacci e o número de Ouro.

Material: folha A4, caderno, lápis, lápis de cor, régua, caneta e borracha.

Objetivo: resolver equações do segundo grau, reconhecer números irracionais, construir segmento áureo e relacionar a sequência de Fibonacci com o número de ouro.

Metodologia: aula expositiva, construção de segmentos de retas representando o número de ouro, retângulos áureos, noções de limite, divisão dos termos sucessivos da sequência de Fibonacci, relacionando a razão áurea com a divisão dos termos da sequência de Fibonacci quando esses tendem ao infinito.

Público-alvo: Alunos da 1ª Série do Ensino Médio; 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Tempo para aplicação: Aula de 60 minutos, com a representação da sequência de Fibonacci e Lucas e a apresentação do número de ouro, e, por fim, a relação existente entre essas sequências e o número de ouro.

Período de aplicação: 01/08/2016.

Atividade 6: Apresentação do Teorema de Zeckendorf e o Teorema de Binet

Material: material impresso sobre as histórias de Zeckendorf e Binet, folha A4, caderno, lápis, caneta e borracha.

Objetivo: desenvolver o conhecimento histórico sobre esses grandes matemáticos e suas contribuições, conhecer a fórmula que propicia o cálculo direto de quaisquer termos da sequência de Fibonacci e representar qualquer número como soma apenas de números da sequência de Fibonacci sem que estes não sejam adjacentes.

Metodologia: aula expositiva (exposição sobre a vida e as contribuições de Zeckendorf e Binet para a Matemática), cálculo de termos da sequência da Fibonacci utilizando a fórmula de Binet, e a decomposição de números utilizando o Teorema de Zeckendorf.

Público-alvo: Alunos da 1ª Série do Ensino Médio; 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Tempo para aplicação: Aula de 60 minutos, para o estudo e conhecimento de personalidades da Matemática, suas contribuições e aplicações de fórmulas e teoremas apresentadas por eles.

Período de aplicação: 02/08/2016.

Atividade 7: Truque da soma utilizando Fibonacci.

Material: quadro, pincel, calculadora, folha A4, caneta, lápis e borracha.

Objetivo: instigar a curiosidade do discente em relação à Matemática, promover o processo investigativo por parte do alunado e tornar a Matemática aplicável aos olhos dos alunos.

Metodologia: aula expositiva, com a escolha de vários alunos, sendo um por vez, desafiando-os com relação a um tipo básico de operação (a soma).

Público-alvo: Alunos da 1ª Série do Ensino Médio; 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Tempo para aplicação: Aula de 60 minutos, para o estudo e conhecimento de personalidades da Matemática, suas contribuições e aplicações de fórmulas e teoremas apresentadas por eles.

Período de aplicação: 02/08/2016.

Atividade 8: Jogo "Fibonacci Nim".

Material: quadro, pincel, folha A4 já preparada para o jogo e canetas coloridas.

Objetivo: trabalhar a Matemática por meio de jogos, apresentar estratégias de jogos utilizando conhecimentos matemáticos, interação entres alunos, professor e a disciplina.

Metodologia: aula expositiva, apresentação do jogo "Fibonacci Nim", desafio ao aluno, promover a curiosidade sobre a estratégia de vitória adotada e a competição entre discentes.

Público-alvo: Alunos da 1ª Série do Ensino Médio; 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Tempo para aplicação: Aula de 60 minutos, sendo 20 minutos para a abordagem e desafios aos discentes, 20 minutos de interação aluno x aluno, e 20 minutos para a discussão sobre a estratégia de vitória utilizada e sua relação com a sequência de Fibonacci.

Período de aplicação: 04/08/2016.

Atividade 9: Mágica Fibonacci.

Material: quadro, pincel, cartões preparados e lápis.

Objetivo: instigar a curiosidade do aluno, mostrar a Matemática em diferentes situações (mágica), interação entres alunos, professor e a disciplina.

Metodologia: aula expositiva, apresentação da Mágica Fibonacci, desafio ao aluno, promover a curiosidade do discente com relação ao descobrimento feito pelo professor sobre os números.

Público-alvo: Alunos da 1ª Série do Ensino Médio; 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Tempo para aplicação: Aula de 60 minutos, sendo 20 minutos para a abordagem e desafios aos discentes, 20 minutos de interação aluno x aluno, e 20 minutos para a discussão sobre a estratégia de vitória utilizada e sua relação com a sequência de Fibonacci.

Período de aplicação: 05/08/2016.

Atividade 10: Miss e Mister Áureo.

Material: quadro, pincel, ficha preparadas para atividade, calculadora, lápis, borracha e caneta.

Objetivo: trabalhar conceitos de números racionais e irracionais (razão, médias e medidas de comprimento) de forma interativa correlacionando-as com a Razão Áurea.

Metodologia: aula expositiva, formação de grupos para averiguação de medidas e divisão destas, apresentação dos resultados elegendo a garota e o garoto de ouro.

Público-alvo: Alunos da 1ª Série do Ensino Médio; 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Tempo para aplicação: Aula de 60 minutos, sendo 40 minutos para explanação, formação de grupos e medições, e 20 minutos para a apresentação e socialização dos resultados.

Período de aplicação: 08/08/2016.

4.3.1 Resultados e Discussões

É evidente que a Matemática é uma disciplina que apresenta, para o discente, certo grau de dificuldade, fazendo com que o professor seja desafiado a lidar com essa complexidade. Cabe a este, além de motivar seus alunos, buscar metodologias que despertem interesse pelos problemas matemáticos.

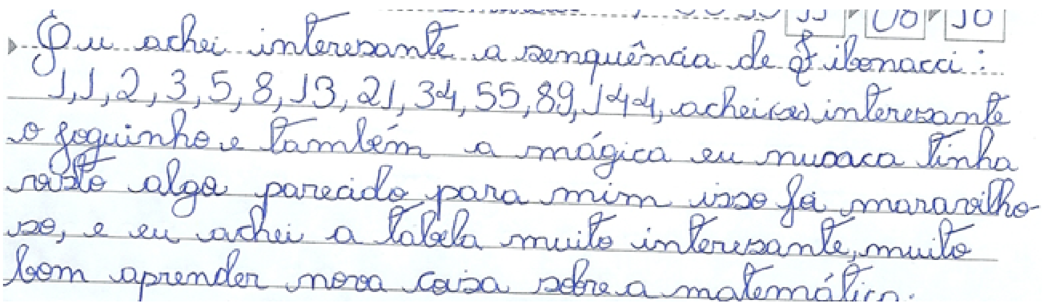
Para OLIVEIRA (2013), cabe ao professor deixar de lado os exercícios rotineiros, repetitivos e enfadonhos, que, muitas vezes, aborrecem o aluno, e programar atividades bem planejadas que desenvolvam, no aluno, capacidades para interpretar, discutir e criar suas resoluções possibilitando uma aprendizagem significativa.

A partir do momento em que propusemos essa metodologia para trabalhar o ensino da Matemática, buscamos despertar os alunos para a aprendizagem de um conteúdo muitas vezes considerado por eles complexo. Pudemos constatar tal situação ao questionarmos os estudantes sobre gostar ou não de Matemática. Dentre os relatos que se destacaram, podemos mencionar o fato de gostar "mais ou menos", e tal fato justifica-se em virtude da disciplina ser complicada.

Atividades em grupo, jogos e outros recursos tecnológicos foram extremamente importantes para que os alunos pudessem assimilar o conteúdo proposto. Outro recurso empregado foi trabalhar os aspectos históricos do conteúdo abordado.

No decorrer das atividades, pudemos perceber que os alunos fizeram buscas interessantes, descobriram temas agradáveis e curiosos, foram motivados a aprender assuntos que, muitas vezes, pareciam tediosos e chatos. Os relatos a seguir demostram a percepção dos alunos sobre as estratégias adotadas.

Figura 75 – Aluno 1


Eu achei interesante a senquência de Fibonacci:
1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144, achei(as) interesante
o joguinho e também a mágica eu nunca tinha
visto algo parecido para mim isso foi maravilho-
so, e eu achei a tabela muito interesante, muito
bom aprender nossa coisa sobre a matemática.

FONTE: Autor

Figura 76 – Aluno 2

Eu gosto de descobrir coisas novas, eu gostei do trabalho da matéria, gostei mais ainda porque eu descobri a origem dos números Fibonacci, a explicação ajudou bastante também a compreender e entender as formas de calcular as medidas áureas.
Ficou super mais legal com os jogos e a mágica, despertou curiosidade e mais vontade ainda de saber.

FONTE: Autor

Figura 77 – Aluno 3

Eu gostei muito de ter aprendido a sequência de Fibonacci e também achei interessante pois ele criou aqueles números e desenvolveu muita coisa. E foi uma aula muito ótima porque foi diferente aprendi muitas coisas sobre o Fibonacci.

FONTE: Autor

Figura 78 – Aluno 4

A sequência de Fibonacci é fantástica além de ter me encantado muito, eu descupri que muitas coisas giram em torno desta sequência.
Além das tarefas as esplicações me axuliaram num melhor entindimento sobre a matemática.

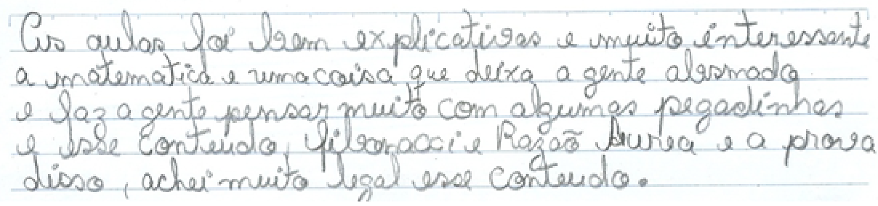
FONTE: Autor

Figura 79 – Aluno 5

Achei muito interesante, deveria colocar mais sobre esse assunto de Filonacci, isso só ajuda nós ainda mais a pensar sobre o núm-ero de ouro ou ~~numero áurea~~ medida áurea acho que deveria ~~colocar~~ Trazer mais para a sala de aula.

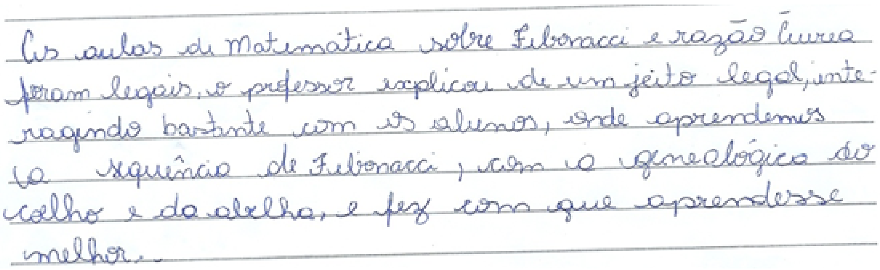
FONTE: Autor

Figura 80 – Aluno 6


As aulas foi bem explicativas e muito interessante a matemática e uma coisa que deixa a gente alesmada e faz a gente pensar muito com algumas pegadinhas e esse Conteúdo, fibonacci e Razão Aurea e a prova disso, achei muito legal esse conteúdo.

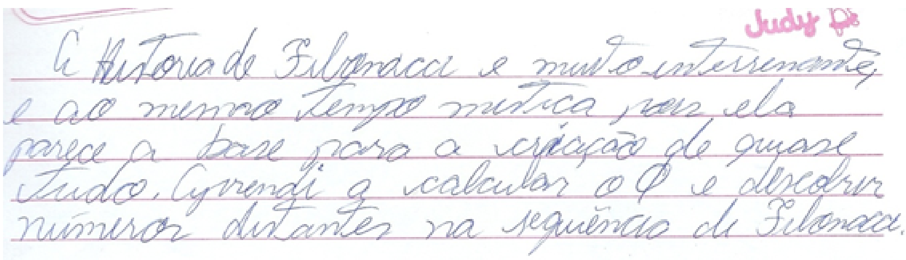
FONTE: Autor

Figura 81 – Aluno 7


As aulas de Matemática sobre Fibonacci e razão Aurea foram legais, o professor explicou de um jeito legal, interagindo bastante com os alunos, onde aprendemos a sequência de Fibonacci, com a genealógica do coelho e da abelha, e fez com que aprendesse melhor.

FONTE: Autor

Figura 82 – Aluno 8


Judy

A Historia de Fibonacci e muito interessante e ao mesmo tempo mística, pois ela parece a base para a criação de quase tudo. Aprendi a calcular o Φ e descobrir números distantes na sequência de Fibonacci.

FONTE: Autor

Evidenciamos que ocorreu o despertar do interesse dos alunos pela Matemática e, consequentemente, a aprendizagem. Comprovamos tal situação por meio de uma avaliação (em anexo - Apêndice A) aplicada aos alunos da 1ª Série do Ensino Médio da escola Dr. Joaquim Pereira da Costa, Gurupi-TO, conforme dados que apresentaremos a seguir, descritos turma a turma.

4.3.2 Descrição da atividade avaliativa e suas possíveis soluções

A atividade avaliativa está composta de 10 questões, sendo estas relacionadas com as atividades apresentadas em sala de aula (a 1ª questão se relaciona com a atividade 2, visto que são abordados conceitos de sequência; no entanto, ela também poderia ser resolvida aplicando diretamente a fórmula de Binet (atividade 6)).

A solução da 2ª questão está relacionada com a atividade 1, uma vez que são abordados os conceitos históricos de Fibonacci.

A 3ª questão tem como solução direta a atividade 5, pois se trata da relação entre sequência de Fibonacci e número de ouro.

A 4ª questão está intimamente relacionada à atividade 10, visto que é trabalhada a razão áurea.

A 5ª questão aborda, novamente, conceitos de sequência da atividade 2.

A 6ª questão trata da fórmula de Binet.

A 7ª questão trata do Teorema de Zeckendorf (atividade 6).

A 8ª questão utiliza-se de duas atividades aplicadas em sala: a primeira é a atividade 6, na qual é abordada a fórmula de Binet, e a segunda, a atividade 4, pois se faz uso da propriedade da soma dos termos da sequência de Fibonacci.

A 9ª questão aborda, novamente, a atividade 4, pois se trata de um problema cuja solução necessita da soma de termos de uma sequência.

A última questão, a 10ª, seria facilmente resolvida lembrando-se dos conceitos abordados na atividade 3, na qual são apresentadas as teorias de Le Corbusier (O Modulor).

A clara intenção dessa avaliação nos remete à busca pela absorção ou não dos conceitos abordados em sala de aula por parte dos discentes. No entanto, a Matemática nos cria e apresenta diversas e ricas opções de soluções para determinados problemas, o que, por si só, já nos valeria da pesquisa, pois o objetivo deste trabalho é encorajar e transformar o aprender/gostar matemático do educando.

4.3.3 Resultados apresentados pelas turmas da 1ª série do ensino médio da escola estadual Doutor Joaquim Pereira da Costa

A atividade avaliativa foi realizada com duas turmas do período vespertino (turmas 13.03 e 13.04) e uma turma do período noturno (13.05), totalizando 90 alunos presentes no dia da avaliação, sendo 29 alunos da turma 13.03, 30 alunos da turma 13.04 e 31 alunos da turma 13.05. A turma 13.03 apresentou como resultados da avaliação alguns pontos interessantes representados na Figura 83 a seguir. Nas questões 2 e 3 obtiveram 100% (cem por cento) de acerto, e na questão 10, o percentual de acerto foi de 96,5%, o que nos permite concluir que o entendimento por parte dos discentes em relação às atividades 1, 3 e 5, aplicadas em sala de aula, foi plenamente satisfatório, uma vez que essas atividades serviam como base para a resolução das questões 2, 3 e 10.

Já na 9ª questão, o índice de acerto foi de 34,4%, o que nos induz a concluir que as propriedades trabalhadas referentes à sequência de Fibonacci deixam algum tipo de lacuna em seu entendimento. No entanto, a 7ª questão, com índice de acerto de 89,9%, mostra-nos que o provável baixo índice de acerto da 9ª questão pode ter tido um fator externo às propriedade de Fibonacci, como, por exemplo, o envolvimento de uma sequência numérica diferente da sequência trabalhada em sala de aula.

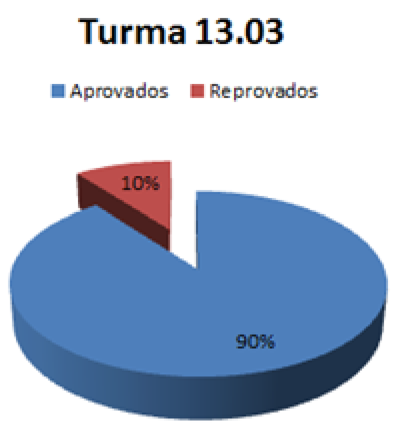
Figura 83 – Turma 13.03

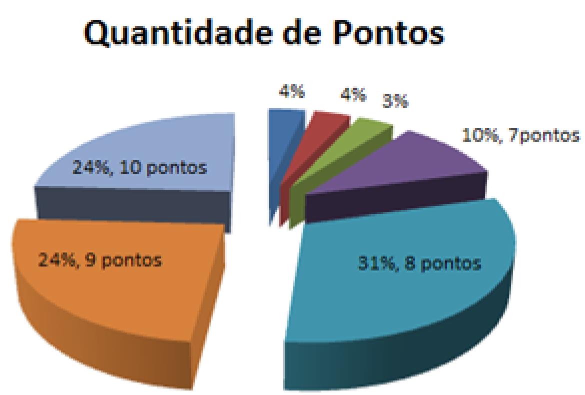
Turma 13.03 – Escola Estadual Doutor Joaquim Pereira da Costa										
Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Atividade associada à resolução	A2/A6	A1	A5	A10	A2	A6	A4/A6	A6	A4	A3
Índice de Acerto	89.6%	100%	100%	62%	79.3%	89.6%	89.6%	68.9%	34.4%	96.5%
Índice de Erro	10.4%	0%	0%	38%	29.7%	10.4%	10.4%	31.1%	65.6%	3.5%

FONTE: Autor

Contudo, o resultado final da avaliação na turma 13.03 nos deixa uma certeza de que o trabalho bem planejado e abordado em sala de aula trará frutos positivos, atingindo, de forma satisfatória, os anseios dos docentes. Na Figura 84 a seguir, apresentamos esses resultados.

Figura 84 – Turma 13.03





FONTE: Autor

Em relação à turma 13.04, podemos observar, na Figura 85, que o destaque negativo fica por conta da 8ª questão, já que o índice de acerto é de apenas 33,3%, em comparação com a turma 13.03, que obteve o dobro de acertos nessa questão, a qual tinha como base para sua resolução a atividade 6 trabalhada em sala de aula, referente ao Teorema de Zeckendorf. Outra constatação negativa refere-se à questão 9, na qual obtiveram um índice de acerto de apenas 30%, fato já comentado acima.

Novamente, os pontos positivos se concentram nas questões 2, 3 e 10, mas com a companhia da questão 1, que obtiveram índices iguais ou superiores a 80% (oitenta por cento) de acerto, fazendo valer a reflexão sobre a importância da introdução de conceitos históricos nas aulas de Matemática.

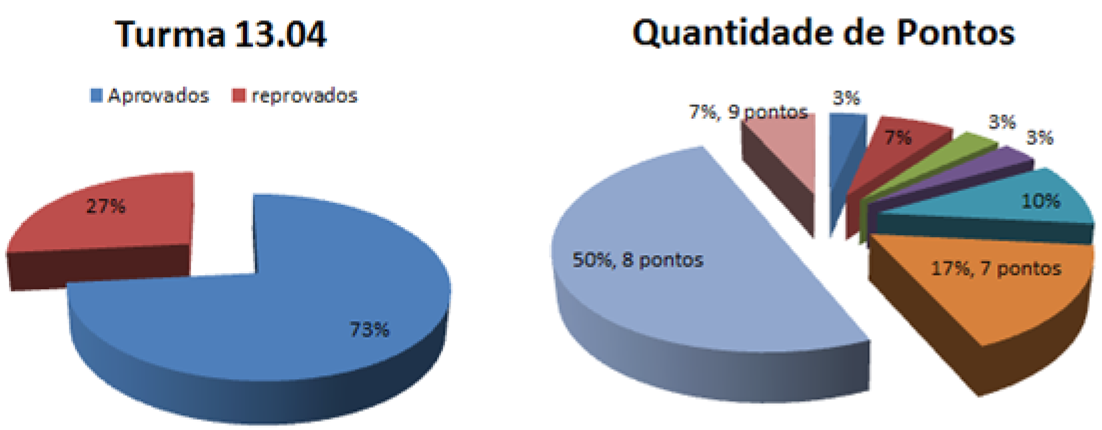
Figura 85 – Turma 13.04

Turma 13.04 – Escola Estadual Doutor Joaquim Pereira da Costa										
Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Atividade associada à resolução	A2/A6	A1	A5	A10	A2	A6	A4/A6	A6	A4	A3
Índice de Acerto	90%	100%	96.6%	50%	60%	76.6%	63.3%	33.3%	30%	80%
Índice de Erro	10%	0%	3.4%	50%	40%	23.4%	36.7%	66.7%	70%	20%

FONTE: Autor

No entanto, mesmo com algumas quedas no índice de acerto de algumas questões, podemos observar que o quantitativo de alunos com média igual ou superior a 70% (setenta por cento) é plenamente satisfatório, como apresentado na Figura 86 a seguir.

Figura 86 – Turma 13.04



FONTE: Autor

No que se refere à turma 13.05, embora seja uma turma do período noturno, pudemos observar, na Figura 87, que, no quesito desempenho, tal turma demonstrou uma melhor desenvoltura em relação à turma 13.04, alcançando índices superiores de acertos em questões criticas, como é o caso da questão 9, na qual a referida turma obteve 48,4% de acerto.

Manteve-se o índice superior a 90% (noventa por cento) de acerto nas questões 2 e 3, confirmando a importância da aplicação de conceitos históricos em Matemática, e nas questões 1 e 6, obtiveram, respectivamente, índices de acerto de 90% e 87%, demonstrando, assim, a compreensão e aplicabilidade de conceitos, tais como a fórmula de Binet.

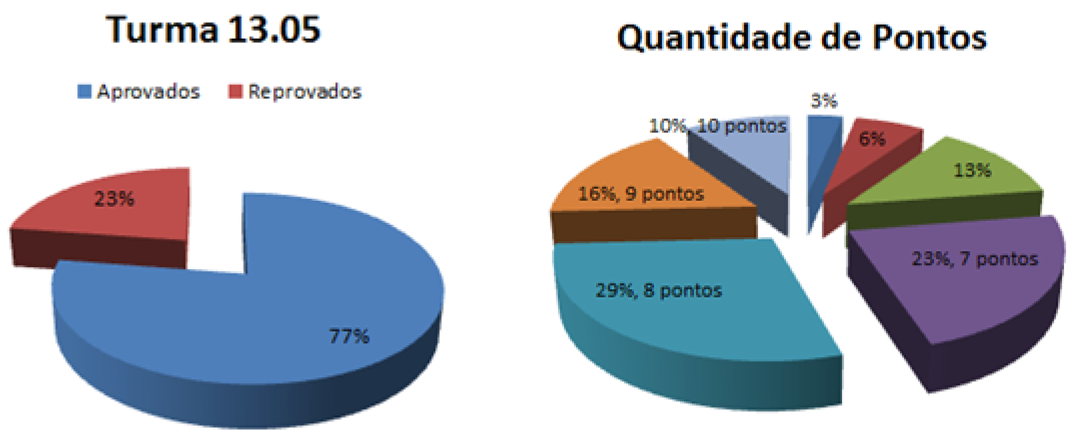
Figura 87 – Turma 13.05

Turma 13.05 – Escola Estadual Doutor Joaquim Pereira da Costa										
Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Atividade associada à resolução	A2/A6	A1	A5	A10	A2	A6	A4/A6	A6	A4	A3
Índice de Acerto	90%	100%	96.7%	61.3%	64.5%	87%	70.9%	48.4%	48.4%	77.4%
Índice de Erro	10%	0%	3.3%	38.7%	35.5%	13%	29.1%	51.6%	51.6%	22.6%

FONTE: Autor

Entretanto, o que de fato deve ser destacado é que a turma conseguiu um quantitativo de aprovação superior a 77% (setenta e sete por cento), o que nos leva à conclusão de que o trabalho, da forma que foi apresentado, atingiu seus objetivos, despertando o interesse dos discentes, como mostra a Figura 88 a seguir.

Figura 88 – Turma 13.05



FONTE: Autor

Como forma de condensar os dados acima, apresentamos a Figura 89 a seguir, que traz, de forma conclusiva, os resultados alcançados nas três turmas, resultados estes que servem como fonte de inspiração para reflexões a cerca de novos métodos e formas de ensinar a Matemática.

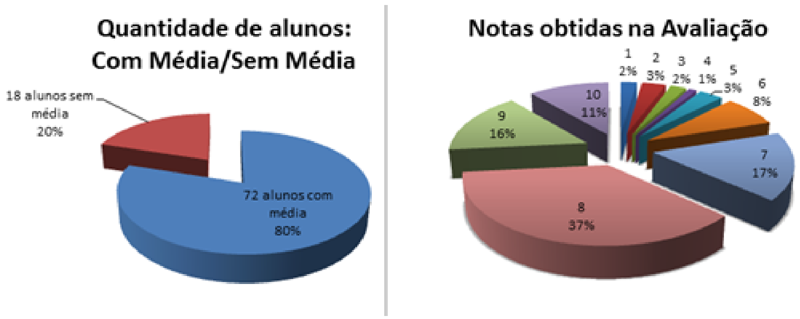
Figura 89 – Quantidade: Alunos presentes x Alunos ausentes

Quantidade de Alunos Matriculados	Quantidade de Alunos Matriculados (Presentes no dia da avaliação)	Quantidade de Alunos Matriculados (Ausentes no dia da avaliação)
102	**90**	**12**

FONTE: Autor

Figura 90 – Resulatdo da Avaliação

Notas	Quantidade de Alunos
1	2
2	3
3	2
4	1
5	3
6	7
7	15
8	33
9	14
10	10
Total de Alunos	90



FONTE: Autor

Por fim, é de extrema importância que o professor conduza as atividades com metodologias adequadas, planejando-as e preparando-as refletindo sobre as possíveis estratégias que possam de fato envolver os alunos e que façam sentido para eles. Dessa forma, o professor contribui diretamente para o processo de aprendizagem do aluno.

5 CONCLUSÃO

Com este estudo foi possível comprovar que realmente muitas coisas do nosso cotidiano contêm Matemática, desde a Arte até grandiosas construções.

É fascinante se ter algo em mãos e a partir de determinado trecho encantar-se e dai em diante pormenorizá-lo e descobrir tão quão fantástico é o mundo agregado ao nosso redor, pois somos detentores de infinitas riquezas e às vezes não damos conta disso. Felizmente, o trabalho sobre Fibonacci agregou novos valores, foi surpreendente, maravilhoso e muito mais proporcionou frutos de forma didática suave, prazerosa e feliz em querer aprender e estar na natureza onde a matemática impera e coordena nosso cotidiano como forma viva e constante não só de números, mas de verdades e alegrias.

A Razão Áurea é, sem dúvida, um conteúdo interessantíssimo que aviva e glorifica os que dizem estar com a mente bloqueada para a Matemática. No entanto, isso deixou de ser fato e passou a ser mito em nossa escola-campo, uma vez que a aplicabilidade da Matemática fora corroborado com a realidade do aluno bem como a maneira simples de aplicá-la.

Razão Áurea é interdisciplinar. Há possibilidade de desenvolver um trabalho dentro do conteúdo de Matemática que envolva noções de medida, razões e estimativas, números irracionais e operações com radicais, além de construções geométricas e cálculos. O trabalho com Razão Áurea é uma oportunidade de aprendizagem mais significativa, atraente, diferenciada e aplicada.

É imprescindível que ela seja exercitada no Ensino Fundamental e Médio pelos professores, a fim de que possa atuar na abstração de conhecimentos matemáticos, físicos, históricos, artísticos, literatos, geográficos e tantos outros tornando a aplicabilidade do conteúdo interdisciplinar.

Especificamente, na área da Matemática, pretende-se desenvolver novos trabalhos que englobem a Sequência de Fibonacci, que envolvam noções de medidas, razões e estimativas, números irracionais e operações com radicais, além de construções geométricas e cálculos. Tais trabalhos, em sua essência básica, constituem uma oportunidade de aprendizagem mais significativa, atraente, diferenciada e salutar.

Durante a aplicabilidade e a alegria demonstrada em desmembrar os “segredos da Matemática”, propusemos que o planejamento do professor possa ser flexível à medida que novos caminhos sejam descobertos e agregados às turmas. No entanto, a escolha deva ser efetuada de acordo com os interesses do professor e da turma. A Matemática é universal, eterna e algo que existe independente de nós, seres humanos. É como se ela já existisse e, a cada etapa de nossas vidas, fôssemos descobrindo cada vez mais algo surpreendente em si. Logo, isso tudo faz sentido ao analisarmos a Razão Áurea, uma vez que seria possível encontrar o número Φ ("Fi") em diversas relações diferentes, desde o corpo humano, o crescimento das folhas de alface, até uma harmonia musical.

Portanto, com este trabalho pretendemos incentivar os professores a explorarem a modelagem matemática por meio da Sequência de Fibonacci e a Razão Áurea, para que os alunos passem a observar e relacionar as diferentes formas existentes na natureza. Em suma, este trabalho tem por objetivo mostrar como a Matemática está presente na Natureza de uma forma simples e atrativa.

REFERÊNCIAS

AMARAL, J. V. d. **A Razão Áurea e a sequência de Fibonacci**. Dissertação de Mestrado-Profmat. São João Del Rei-MG. 2014.

ARIAS, S. **Sucesiones de Fibonacci y "Φ" en la Música**. 2012. Disponível em: <http://matematicadelamusica-armoniamusical.blogspot.com.br/2011/12/sucesiones-de-fibonacci-y-en-la-musica.html>. Acesso em: 14 jul. 2016.

ASSOCIATION, T. F. **The Fibonacci Association**. Fundada em 1963. Disponível em: <http:http://www.mathstat.dal.ca/fibonacci/>. Acesso em: 12 jul. 2016.

BEZ, E. T. **Relacionando padrões entre seqüência de Fibonacci, Secção áurea e ternos pitagóricos**. Monografia - Florianópolis-SC. 1997.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Edgar blucher. São Paulo: [s.n.], 1974.

BRASIL, P. C. N. Matemática. **Secretaria de Educação Fundamental Brasília**, 1998.

CARDOSO, L. V. de M.; QUARESMA, O. M. **Buriti: relação entre seqüência de Fibonacci, razão áurea e a geometria fractal**. Revista WEB-MAT. v. 1, n. 1, p. 87, 2014.

CARVALHO, L. S. d. **Número Áureo e o ensino básico**. Dissertação de Mestrado-Profmat. Ilhéus-BA. 2013.

CAVALCANTI, F. A. D. Curso de física. **A alfabetização científica e tecnolǿgica de condutores e os espelhos retrovisores.** Monografia - Brasilia-DF. 2009.

CICCO, L. H. S. D. **Abelha–Como nascem as abelhas**. 2000. Disponível em: <http://www.saudeanimal.com.br/202/especiais/cursos/apicultura/como-nascem-as-abelhas>. Acesso em: 20 jul. 2016.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática. 2005.

DAVIS, T. A.; ALTEVOGT, R. **Golden mean of the human body**. Fibonacci Quarterly. v. 17, n. 4, p. 340–344, 1979.

DEVLIN, K. **O instinto matemático**. Rio de Janeiro: Record, 2011.

DIENES, Z. P. **O poder da matemática: um estudo da transição da fase construtiva para a analítica do pensamento matemático da criança**. [S.l.]: Editora Pedagógica e Universitária, 1985.

EVES, H. **Introdução a Historia da Matemática**. Campinas - SP: UNICAMP, 2008.

FERREIRA, R. A. **Sequência de Fibonacci**. Osasco-SP. 2007.

FERRER, J. V. **O número de ouro na arte, arquitetura e natureza: beleza e harmonia**. Monografia. Brasilia-DF. 2005.

FRANCI, R. **Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci 1202-2002**. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 2002.

HUNTLEY, H. **A Divina proporção um ensaio sobre a beleza na matematica**. [S.l.]: Universidade de Brasilia, 1985.

KIMBERLING, C. **Edouard Zeckendorf**. 1998. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/36-5/kimberling.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2016.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. 1. ed. New York: Wiley, 2001.

LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais**. São Paulo: Rêspel. 2003.

LIVIO, M. **Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente**. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2015.

MEISNER, G. **Golden Ratio in Art Composition and Design**. 2014. Disponível em: <http://www.goldennumber.net/art-composition-design>. Acesso em: 14 jul. 2016.

NOIZE, R. **Música e natureza: uma relação matemática**. 2014. Disponível em: <http:http://noize.com.br/fibonacci-na-musica-e-na-natureza/>. Acesso em: 15 jul. 2016.

OLIVEIRA, J. J. de. **Sequências de Fibonacci: Possibilidades de Aplicações no Ensino Básico**. Dissertação de Mestrado-Profmat. Salvador-BA. 2013.

PARVEEN, N. **Golden Ratio in Art and Architecture**. 2010. Disponível em: <http://jwilson.coe.uga.edu/emat6680/parveen/nikhat.html>. Acesso em: 12 jul. 2016.

QUEIROZ, R. M. **Razão áurea: a beleza de uma razão surpreendente**. Londrina-PR: Uel. 2007.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Dissertação de Mestrado-Profmat. Ilheus-BA. 2013.

SERRA, D. da S. Aplicações de números irracionais: um número famoso, outro instigante. **Revista Liberato**, v. 16, n. 25, 2015.

SILKA, P. **MOST MEMORABLE GOLDEN RATIO EXAMPLES IN MODERN ART**. 2015. Disponível em: <http:http://www.widewalls.ch/golden-ratio-examples-art-architecture-music/>. Acesso em: 10 jul. 2016.

SORANDO, J. M. **Números de Fibonacci en la Naturaleza**. 2011. Disponível em: <http:http://mateselaios3.blogspot.com.br/2011/11/numeros-de-fibonacci-en-la-naturaleza.html>. Acesso em: 15 jul. 2016.

SOUZA, L. G. S.; ABDOUNUR, O. J. **A Razão Áurea x Mozart, Villa Lobos e Bartók**. São Paulo-SP. 2010.

TANURE, A. C. **Proporção Áurea e Sequência de Fibonacci**. 2012. Disponível em: <http://pegasus.portal.nom.br/proporcao-aurea-e-sequencia-de-fibonacci/>. Acesso em: 10 jul. 2016.

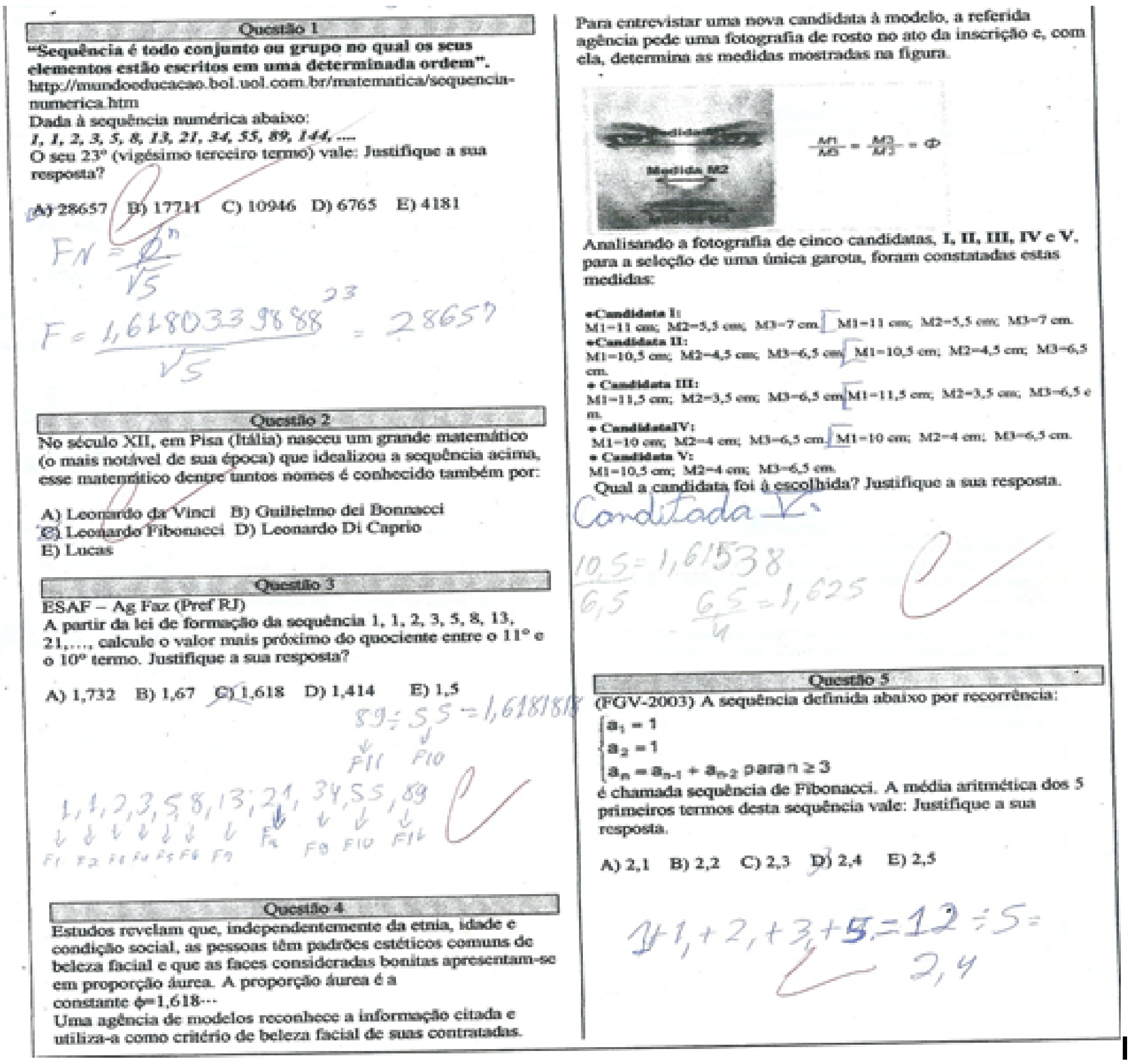
VENTURA, F. **Um relógio de Fibonacci é a forma mais nerd (e difícil) de mostrar as horas**. 2015. Disponível em: <http://gizmodo.uol.com.br/relogio-de-fibonacci/>. Acesso em: 14 jul. 2016.

VOROBIOV, N. N. **Números de Fibonacci**. Espanha: Editora MIR, 1974.

XAVIER, T. **O Segredo das Árvores e a Série de Fibonacci**. 2012. Disponível em: <http:http://www.blogdaciencia.com/o-segredo-das-arvores-e-a-serie-de-fibonacci/>. Acesso em: 12 jul. 2016.

6 APÊNDICE A - AVALIAÇÃO - RAZÃO ÁUREA E SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Figura 91 – Modelo de Avaliação - Frente



Questão 1

"Sequência é todo conjunto ou grupo no qual os seus elementos estão escritos em uma determinada ordem".
http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sequencia-numerica.htm
Dada à sequência numérica abaixo:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...
O seu 23º (vigésimo terceiro termo) vale: Justifique a sua resposta?

A) 28657 B) 17711 C) 10946 D) 6765 E) 4181

$F_N = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$

$F = \frac{1,6180339888^{23}}{\sqrt{5}} = 28657$

Questão 2

No século XII, em Pisa (Itália) nasceu um grande matemático (o mais notável de sua época) que idealizou a sequência acima, esse matemático dentre tantos nomes é conhecido também por:

A) Leonardo da Vinci B) Guilielmo dei Bonnacci
C) Leonardo Fibonacci D) Leonardo Di Caprio
E) Lucas

Questão 3

ESAF – Ag Faz (Pref RJ)
A partir da lei de formação da sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,..., calcule o valor mais próximo do quociente entre o 11º e o 10º termo. Justifique a sua resposta?

A) 1,732 B) 1,67 C) 1,618 D) 1,414 E) 1,5

$89 \div 55 = 1,6181818$

F_{11} F_{10}

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89

F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_7 F_8 F_9 F_{10} F_{11}

Questão 4

Estudos revelam que, independentemente da etnia, idade e condição social, as pessoas têm padrões estéticos comuns de beleza facial e que as faces consideradas bonitas apresentam-se em proporção áurea. A proporção áurea é a constante ϕ=1,618···
Uma agência de modelos reconhece a informação citada e utiliza-a como critério de beleza facial de suas contratadas.

Para entrevistar uma nova candidata à modelo, a referida agência pede uma fotografia de rosto no ato da inscrição e, com ela, determina as medidas mostradas na figura.

Medida M2

$\frac{M1}{M3} = \frac{M3}{M2} = \Phi$

Analisando a fotografia de cinco candidatas, **I, II, III, IV e V**, para a seleção de uma única garota, foram constatadas estas medidas:

- **Candidata I:**
M1=11 cm; M2=5,5 cm; M3=7 cm. M1=11 cm; M2=5,5 cm; M3=7 cm.
- **Candidata II:**
M1=10,5 cm; M2=4,5 cm; M3=6,5 cm. M1=10,5 cm; M2=4,5 cm; M3=6,5 cm.
- **Candidata III:**
M1=11,5 cm; M2=3,5 cm; M3=6,5 cm. M1=11,5 cm; M2=3,5 cm; M3=6,5 cm.
- **CandidataIV:**
M1=10 cm; M2=4 cm; M3=6,5 cm. M1=10 cm; M2=4 cm; M3=6,5 cm.
- **Candidata V:**
M1=10,5 cm; M2=4 cm; M3=6,5 cm.

Qual a candidata foi à escolhida? Justifique a sua resposta.

Canditada V.

$\frac{10,5}{6,5} = 1,61538$ $\frac{6,5}{4} = 1,625$

Questão 5

(FGV-2003) A sequência definida abaixo por recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para } n \geq 3 \end{cases}$$

é chamada sequência de Fibonacci. A média aritmética dos 5 primeiros termos desta sequência vale: Justifique a sua resposta.

A) 2,1 B) 2,2 C) 2,3 D) 2,4 E) 2,5

$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12 \div 5 = 2,4$

Figura 92 – Modelo de Avaliação - Verso

Questão 6

Usando a fórmula de Binet, calcule:

F_{28}

$\frac{1,6180339888^{28}}{\sqrt{5}} =$

317811.

Questão 7

Calcule a soma dos 30 primeiros termos da sequência de Fibonacci

$\frac{1,6180339858^{30}}{\sqrt{5}}$

832040 − 1 =

832039

Questão 8

O Teorema de Zeckendorff , é uma homenagem ao médico e matemático belga Edouard Zeckendorf , é um teorema sobre a representação de números inteiros como somas de números de Fibonacci .

"Todo inteiro positivo pode ser representado como a soma de um ou mais números de Fibonacci não consecutivos, de uma e somente uma maneira."

Obtenha a decomposição de 85 e 2016, conforme o teorema de Zeckendorf.

Questão 9

Um "Viajante Fibonacci" pede 20 dias de hospedagem a um avarento. O Avarento cobra R$ 50,00 pelo o primeiro dia de hospedagem, R$ 60,00 pelo o segundo dia, R$ 70,00 pelo o terceiro, e assim por diante, todos os dias R$ 10,00 a mais do que o dia anterior. O "Viajante Fibonacci" aceita com a condição de que o avarento lhe devolva 1real no primeiro dia, 1 real no segundo dia, 2 reais no terceiro, 3 reais no quarto dia e assim por diante, a cada dia somando sempre o valor dos dois dias anteriores. Qual será o resultado após vinte dias? Quem se deu melhor nessa negociação? Justifique a sua resposta.

2900 pago viajante

10945 Total

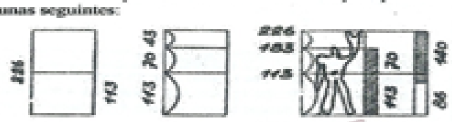
− 2900 desconto

8045

Viajante receberá de lucro ele se sai melhor muito

Questão 10

Analise atentamente a figura abaixo. Ela resume as idéias de Le Corbusier a respeito do seu Modulor. E depois preencha as lacunas seguintes:



O homem tem 183 cm altura.

O homem com o braço levantado tem 226 cm altura.

A altura do umbigo do homem é 113 cm

A razão entre a altura do homem e do umbigo é 1,61946...

Justificativa:

$\frac{183}{113} = 1,619469$

Esta relação é chamada de razão aurea.

7 APÊNDICE B - ATIVIDADE 10 - RAZÃO ÁUREA E SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Figura 93 – Modelo da Atividade - 10

Emanuelle Chatone

Escolha da Miss Beleza Áurea e do Mister Beleza Áurea

	MEDIDAS	Alunos					
		Emanuel	Marcelo	Jonatã	Vitor	[illegible]	
01	Altura do aluno	1,63	1,84	1,77	1,71	1,69	
02	Comprimento do umbigo até o chão	100	115	105	105	1,04	
03	Razão entre as medidas 01 e 02	1,63	1,6	1,6857...	1,6285	1,625	
04	Comprimento do braço: do ombro até a extremidade do dedo médio	71	81	75	69	71	
05	Medida do cotovelo até a extremidade do dedo médio	45	50	48	48	44	
06	Razão entre as medidas 04 e 05	1,5777...	1,62	1,5625	1,4375	1,6136...	
07	Comprimento da perna	91	101	91	92	80	
08	Medida do joelho até o chão	49	60	51	51	55	
09	Razão entre as medidas 07 e 08	1,8571...	1,7833	1,7843...	1,8039...	1,4545...	
10	Média aritmética das razões 03, 06 e 09	1,6882...	1,6677	1,6233	1,6233	1,5699...	

Bruno Aquino

Escolha da Miss Beleza Áurea e do Mister Beleza Áurea

a. 02

	MEDIDAS	Alunos					
		[illegible]	[illegible]	Bruno	[illegible]	[illegible]	
01	Altura do aluno	1,65	1,51	1,76	1,65	1,66	
02	Comprimento do umbigo até o chão	105	93	110	102	103	
03	Razão entre as medidas 01 e 02	[illegible]	1,62	1,6	1,61	[illegible]	
04	Comprimento do braço: do ombro até a extremidade do dedo médio	[illegible]	64	76	73	74	
05	Medida do cotovelo até a extremidade do dedo médio	[illegible]	41	49	43	45,5	
06	Razão entre as medidas 04 e 05	[illegible]	1,56	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
07	Comprimento da perna	[illegible]	80	96cm	95	88cm	
08	Medida do joelho até o chão	[illegible]	47	55cm	50	52cm	
09	Razão entre as medidas 07 e 08	[illegible]	1,70	[illegible]	1,9	1,69	
10	Média aritmética das razões 03, 06 e 09	1,42	1,62	1,63	1,66	1,63	

8 APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO - RAZÃO ÁUREA E SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Figura 94 – Modelo do Questionário

E.E.Dr.Joaquim Pereira da Costa

Sol Nascente Gurupi - TO, 77425-170/ (63) 3313-1288

Matemática
José Eurípedes Possebon

Questionário: FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA: Uma abordagem para o ensino básico

Aluno(s): Sexo: ( ) Feminino ( ) Masculino/ /Idade________anos

Questão 1

Para você, aprender Matemática é importante? Por quê?

SIM	NAO

Questão 2

Você gosta de estudar matemática? Por quê?

SIM	NAO	MAIS OU MENOS

Questão 3

Qual a maneira em que você assimila melhor a Matemática? Por quê?

Através da explicação do professor	
Através das atividades individuais	
Através das atividades em grupos	
Através de jogos	
Outras maneiras	

Questão 4

Quanto tempo, por dia, você dedica ao estudo da Matemática? Por quê?

Entre 0 e 1 hora	
Entre 1 e 2 horas	
Entre 3 e 4 horas	
Entre 4 a 5 horas	
Acima de 5 horas	
Não estudo	

Questão 5

Na disciplina de matemática você se considera um aluno? Por quê?

Ótimo	
Bom	
Regular	
Péssimo	

Questão 6

Na aula de Matemática você demonstra interesse? Por quê?

Sempre	
Quase sempre	
Algumas vezes	
Muito poucas vezes	
Nunca	

Questão 7

Já reprovou alguma vez? ( ) Sim ( ) Não

Questão 8

Para você a matemática é: (Marcar no máximo 3 alternativas)

Uma disciplina que gosto	
Uma disciplina como outra qualquer	
Uma disciplina importante	
Uma disciplina impossível de aprender	
Uma disciplina Complicada	
Uma disciplina que exige muito	

Questão 9

Como você acha que deveriam ser as aulas de matemática?

Questão 10

Qual a sua expectativa em relação ao conteúdo: FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA

9 APÊNDICE D - DESEMPENHO DOS ALUNOS DA ESCOLA ESTADUAL DR. JOAQUIM PEREIRA DA COSTA - 1.º E 2.º BIMESTRE

Figura 95 – Turma 13.03

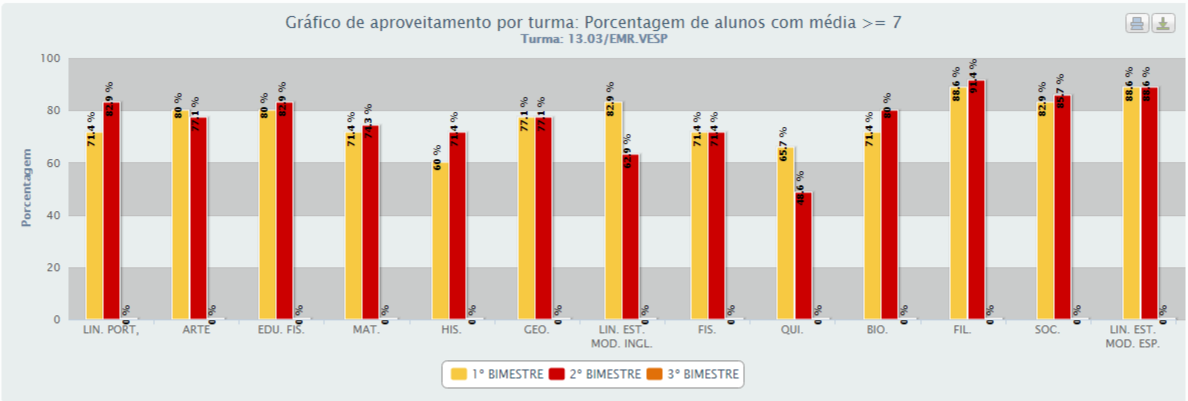


Figura 96 – Turma 13.04

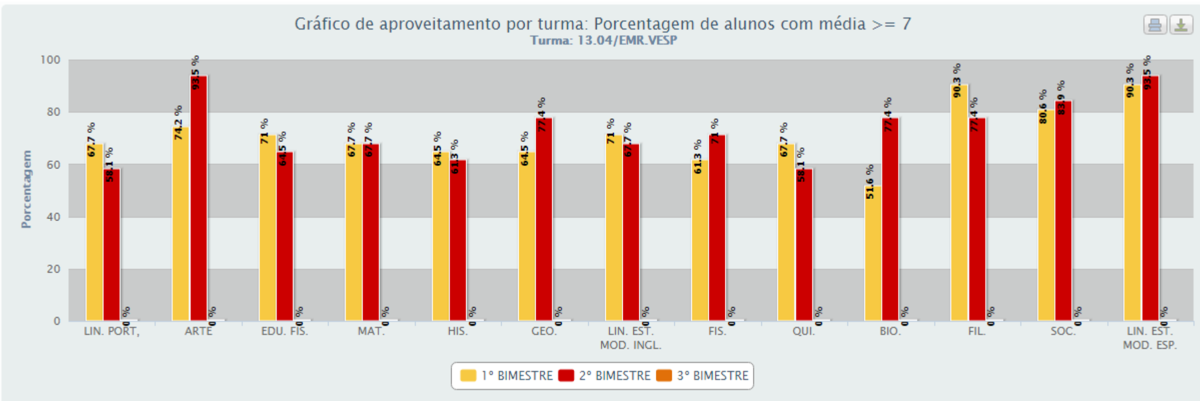
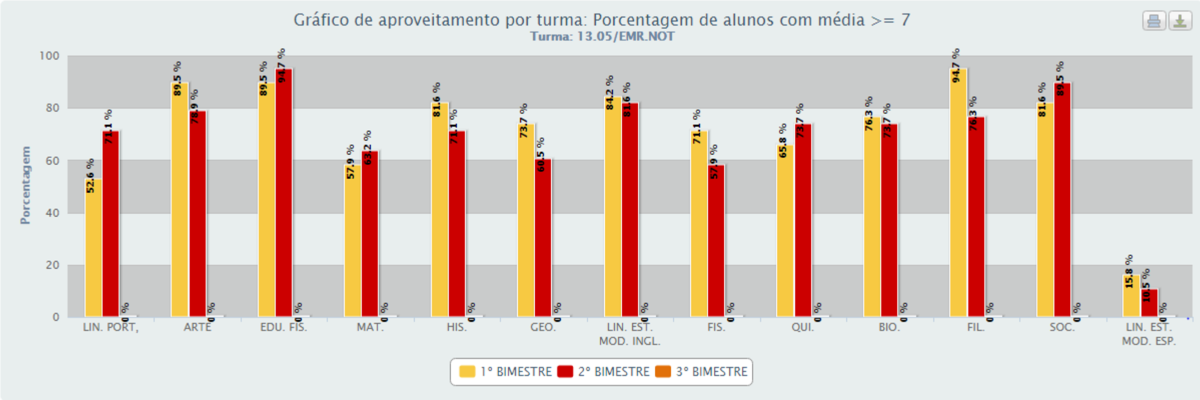


Figura 97 – Turma 13.05



10 APÊNDICE E - AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E RAZÃO ÁUREA

Figura 98 – Gráfico de Desempenho das Turmas: 13.03/13.04/13.05