UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

VIVIANE MAGIONI LEMOS

ANÁLISE COMBINATÓRIA:UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PALMAS - TO
2016

VIVIANE MAGIONI LEMOS

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes

PALMAS - TO

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

L557a Lemos, Viviane Magioni.

Análise Combinatória: Uma Abordagem Através da Resolução de Problemas. / Viviane Magioni Lemos. – Palmas, TO, 2016.

103 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2016.

Orientador: Gilmar Pires Novaes

1. Análise Combinatória. 2. Resolução de Problemas. 3. Matemática e Arte. 4. Metodologia. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

VIVIANE MAGIONI LEMOS

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Msc. Gilmar Pires Novaes.

Aprovada em 30 / 08 / 2016

BANCA EXAMINADORA

Andrés Barraza

Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz (Presidente-UFT)

Hellena Apolinário

Profa. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

Prof. Dr. Claudio de Castro Monteiro (IFTO).

Ao meu esposo.
Aos meus pais.
Aos professores.
Ao meu orientador.

AGRADECIMENTOS

À Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação deste importante programa de mestrado.

À Universidade Federal do Tocantins pela oportunidade de fazer curso.

À Professora Doutora Helga Midori Iwamotto pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

Ao Professor Mestre Gilmar Pires Novaes pelo comprometimento em colaborar com a conclusão do processo.

Agradeço a todos os professores por me proporcionarem conhecimento, não apenas racional, mas também manifestação de caráter, afetividade de educação no processo de formação profissional.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Aos meus familiares, pelo apoio e acolhimento durante toda a minha caminhada.

Em especial, agradeço ao meu esposo, Rógers, que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

A todos que, diretamente ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, meu muito obrigada.

"A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo".
(Albert Einstein)

RESUMO

Neste trabalho se apresenta um estudo dos processos de resolução de problemas combinatórios simples. Os dados foram obtidos mediante atividades contextualizadas. Os resultados mostram a capacidade de compreensão, identificação e relevância dos enunciados dos problemas; a capacidade e recursos para generalização da operação combinatória adequada, ou de operações aritméticas equivalentes. As principais causas de fracasso dos alunos tem sido a confusão sobre a relevância da ordem ou a repetição, confusão sobre o tipo de elementos que se combinam, falta de capacidade de enumeração e falhas aritméticas.

Palavras-chave: Resolução de problemas, combinatória, aprendizagem colaborativa, trabalho colaborativo.

ABSTRACT

This paper presents a study of simple combinatorial problem solving processes. Data were obtained through contextualized activities. The results show the ability of understanding, identification and relevance of the statements of the problems; the ability and resources to generalization of appropriate combinatorial operation, or equivalent arithmetic operations. The main causes of failure of students has been confusion about the relevance of order or repetition, confusion about the kind of elements that combine, lack of enumeration capacity and arithmetic failures.

Keywords: Troubleshooting, combinatorial, collaborative learning, collaborative work.

english

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Quadrado construído por 14 peças 23
Figura 2 – George Polya 32
Figura 3 – Francis Guthrie 35
Figura 4 – Mosaico colorido com apenas quatro cores 36
Figura 5 – Mosaico para colorir 37
Figura 6 – Lourdes de la Rosa Onuchic 37
Figura 7 – O Nascimento de Vênus 43
Figura 8 – Estação Central do Brasil 44
Figura 9 – Vaso de Dipylon 46
Figura 10 – Mosaico Italiano 47
Figura 11 – Peixes - Mosaico feito por Escher 48
Figura 12 – Mosaicos de figuras regulares 48
Figura 13 – Estrelas 49
Figura 14 – Ordem e caos 50
Figura 15 – Escher em Roma, Itália - 1930 51
Figura 16 – Metamorfose I 52
Figura 17 – Relatividade 52
Figura 18 – Ascendentes e Descendentes 52
Figura 19 – Céu e Água I 53
Figura 20 – Mapa das Regiões do Estado da Bahia 57
Figura 21 – Tabela de cores quentes e frias 58
Figura 22 – Mosaico Flor 59
Figura 23 – Mosaico de Escher 60
Figura 24 – Mosaico Geométrico 61
Figura 25 – Títulos dos Filmes indicados ao Oscar 2016 62
Figura 26 – Wallpapers 63
Figura 27 – Dados dos visitantes de Museus 63
Figura 28 – Questão 1 67
Figura 29 – Questão 2 68
Figura 30 – Questão 3 69
Figura 31 – Questão 4 70
Figura 32 – Questão 5 71
Figura 33 – Questão 6 72
Figura 34 – Questão 7 73
Figura 35 – Questão 8 74

Figura 36 – Questão 9 75
Figura 37 – Questão 10 76
Figura 38 – Questão 11 77
Figura 39 – Questão 12 78
Figura 40 – Questão 1 83
Figura 41 – Questão 2 84
Figura 42 – Questão 3 85
Figura 43 – Questão 4 86
Figura 44 – Questão 5 87
Figura 45 – Questão 6 88
Figura 46 – Questão 7 89
Figura 47 – Questão 8 90
Figura 48 – Questão 9 91
Figura 49 – 99
Figura 50 – Mosaico pintado com cores quentes 102
Figura 51 – Alunos desenvolvendo as atividades. 102
Figura 52 – Alunos desenvolvendo as atividades. 103
Figura 53 – Alunos desenvolvendo as atividades. 103

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
NBR	Norma Brasileira
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SI	Sistema Internacional
UFT	Universidade Federal do Tocantins

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14
1.1 Objetivos 16
1.1.1 Objetivo Geral 16
1.1.2 Objetivos Específicos 16
1.2 Justificativa 17

2 REFERENCIAL TEÓRICO 19
2.1 Análise Combinatória 19
2.2 Conceito 19
2.3 Histórico 23

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 25
3.1 conceito 25
3.2 Histórico 28
3.3 PRINCIPAIS AUTORES 32

4 MATEMÁTICA E ARTE 42
4.1 Conceito 42
4.2 Histórico 45
4.3 Maurits Cornelis Escher 51

5 METODOLOGIA 55
5.0.1 Desenvolvimento das Oficinas 55
5.0.2 Atividades para Aplicação 56

6 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS . . . 65
6.0.3 Resultado das Oficinas 67

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 92

REFERÊNCIAS 95

APÊNDICES 98

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PRÉ-APLICAÇÃO . . . 99

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO PÓS-APLICAÇÃO . . . 100

APÊNDICE C – FOTOS DA APLICAÇÃO 102

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo analisar a eficácia da Metodologia de Resolução de Problemas no ensino de Estatística para alunos do segundo ano do Ensino Médio.

O trabalho se concentrou no estudo da elaboração e interpretação de problemas com base em situações cotidianas e interdisciplinares.

A Metodologia da Resolução de Problemas, de (ONUCHIC L. R.; ALLEVATO, 2009), foi utilizada para o desenvolvimento das atividades em sala de aula. Esta metodologia foi concebida considerando-se sólidos conhecimentos teóricos e projetos práticos em sala de aula. As autoras defendem que o problema é ponto de partida para se alcançar o conhecimento, e posiciona o professor como guia e o aluno como co-construtor nos processos de ensino-aprendizagem.

Após esta introdução, o Capítulo 2 traz o Referencial Teórico, dividido em conteúdos sobre Análise Combinatória; o Capítulo 3 fala sobre Resolução de Problemas. Também neste capítulo, são apresentados alguns autores que são referência no trabalho apresentado. A seguir, o Capítulo 4, relata a relção entre matemática e arte; no Capítulo 5, os Procedimentos Metodológicos, explica pontos importantes do projeto, como o problema de pesquisa, os objetivos e a metodologia da pesquisa e do ensino. No Capítulo 6 são feitas as análises dos resultados obtidos a luz do referencial teórico. Por último são apresentadas as considerações sobre o trabalho realizado.

A Matemática é uma das ciências mais antigas e, ao longo dos anos, tem sido utilizada com fins diversos. Esta ciência é extraordinariamente dinâmica, a tal ponto que seus conceitos primários sofrem transformações relativamente rápida e basta sua própria concepção, ainda que mais lento, experimenta mudanças tangíveis. A Matemática é um fenômeno cultural universal, pois qualquer civilização cria uma Matemática. Imaginar um mundo, no qual as mudanças e a complexidade subsistentes não podem ser organizadas mentalmente em relações, dependências e modelos, é certamente difícil.

Sem dúvida, a Matemática tem experimentado um crescimento exponencial, pleiteando novos métodos para ensiná-la e aprendê-la. No final do século XX, com a denominada "Revolução Científico-Técnica", a correspondente evolução didática alcançou uma velocidade sem precedentes, assim que a abordagem da realidade atual não é tarefa simples.

No que se refere ao ensino-aprendizagem da Matemática, são diferentes os temas que hoje constituem objeto de estudo. Por exemplo, é de peculiar interesse a formação de conceitos, as crenças e concepções, a aplicação das ferramentas computacionais, a formação dos professores, o desenrolar de pensamentos (em seus múltiplos enfoques: lógico-formal, geométrico-espacial, combinatório,...), a resolução de problemas, e muitas outras. Justamente o último campo mencionado constitui um amplo objeto de análises, ao qual se dedicará integralmente o presente trabalho.

A resolução de problemas constitui um verdadeiro desafio para se ensinar Matemática. Quando se fala de problemas não deve referir-se a versão comum dos exercícios com texto. Pelo contrário, aqui o termo se refere a situações completas, capazes de potencializar o desenrolar do pensamento, e de proporcionar modos de atuação para enfrentar os desafios da ciência e a técnica. Situações assim são difíceis de encontrar na prática educativa.

Atualmente, alguns investigadores vão ampliando a busca de tais situações exclusivamente em contextos práticos. Com efeito, muitas vezes se espera que ensinar a Matemática se baseia em problemas contextualizados, ou seja, aplicável diretamente às necessidades objetivas ou subjetivas do estudante. Isto se apoia em fundamentos de natureza psicológica, principalmente de ordem afetivo e motivacional, passando por alto outros aspectos de natureza epistemológica e matemática.

A pesquisa sobre Resolução de Problemas e as iniciativas de considerar como uma forma de ensinar Matemática recebeu atenção a partir de (POLYA,) , considerado o pai da Resolução de Problemas. Em seu trabalho, Polya preocupou-se em descobrir como resolver problemas e como ensinar artifícios que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas. Com o movimento de reforma chamado Matemática Moderna, utilizada nos anos sessenta e setenta do século XX, o mundo foi influenciado por recomendações de ensinar Matemática apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos. O tratamento bastante abstrato, o despreparo dos professores para este trabalho, assim como a falta de participação dos pais de alunos, nesse movimento, levou-o ao fracasso.

Nos EUA, houve uma tentativa de retornar às práticas anteriores à Matemática Moderna, na fase que foi chamada Volta às Bases. Porém, não teve grandes efeitos e tampouco conseguiu adeptos em outros países. Assim, durante a década de 1980, educadores matemáticos que não desistiram de ideais preconizados anteriormente, que acreditavam no potencial da resolução de problemas e visavam a um ensino e aprendizagem com compreensão e significado, continuaram trabalhando nessa busca. Exatamente em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publica um documento intitulado An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's, com a indicação de que a "resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar" (MATHEMATICS, 1980).

Começa, então, a fase da Resolução de Problemas, cujas ideias apoiavam-se, especialmente, nos fundamentos do construtivismo. O objetivo esteve sobre os processos de pensamento matemático e de aprendizagem por descoberta, no contexto da resolução de problemas. Nessa fase, muitos recursos foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividade e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, sempre visando ao trabalho em sala de aula. Muito desse material contribuiu para que os professores fizessem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho.

1.1 Objetivos

Ao apresentar o problema a ser resolvido, deve-se explorar ao máximo qual o entendimento dos estudantes a respeito do assunto. Feito isto, começar a resolução do problema de maneira intuitiva, fazendo com que a iniciativa seja dos discentes.

Durante a resolução, deve-se evitar ao máximo o uso das fórmulas, pois elas podem confundir o raciocínio dos alunos nos próximos exercícios. Por isso, a nossa proposta é que as resoluções sejam baseadas somente no Princípio Fundamental da Contagem.

Portanto, sugerimos que a abordagem dos arranjos, permutações e combinações simples seja feita a partir do Princípio Fundamental da Contagem. Propomos que este princípio seja trabalhado de maneira intuitiva, fazendo com que o discente desenvolva ainda mais o seu raciocínio lógico-dedutivo.

1.1.1 Objetivo Geral

Melhorar metodologias para ensino de resolução de problemas de análise combinatória e tornar claros os conceitos e a manipulação das contagens por parte dos alunos do segundo ano do ensino médio.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Apontar convergências entre a matemática e as obras de arte;
- Apresentar problemas de análise combinatória que envolvam a utilização de artes plásticas e cultura regional como meio de contextualização;
- Avaliar como foi o desenvolvimento da dinâmica de sala de aula com a utilização destes problemas;
- Compreender e aplicar o princípio multiplicativo;
- Identificar a natureza dos problemas de contagem;
- Compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas na resolução de problemas.

1.2 Justificativa

Entende-se que quando se trabalha estimulando o aluno a pensar e encontrar seus próprios caminhos, o aprendizado, além de significativo se torna parte de seu cotidiano ao associar matemática com realidade. Dessa forma, a resolução de problemas é uma ferramenta muito útil para introduzir os conteúdos de uma maneira que seja atrativo.

Assim, quando o aluno sair da escola, ele poderá utilizar conceitos aprendidos em sala de aula nas atividades cotidianas, melhorando seu relacionamento com o trabalho ou com situações que lhe possam ser apresentadas. Quando é possível aplicar conceitos que antes seriam vistos como banais ou muito abstratos no dia a dia, há um diferencial que pode ser decisivo em certas ocasiões, como por exemplo, na busca por um lugar no mercado de trabalho.

Ao dar significado ao estudo, o professor de matemática pode ter resultados significativos com a maioria dos alunos logo de inicio. Fazer o aluno se interessar pelo conteúdo, é parte do trabalho árduo do professor e este modelo de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas, é um meio mais fácil de atingir o objetivo além de mostrar que a matemática tem relação com tudo ao seu redor. Sendo uma forma diferenciada e bastante ampla, a resolução de problemas pode ser levada a um nível superior de ensino e aprendizagem já que se adapta facilmente a qualquer conteúdo a ser trabalhado.

Associar resolução de problemas ao conteúdo de análise combinatória, tem-se uma relação em que situações cotidianas são utilizadas para dar sentido e importância ao que se pretende ensinar. Deixar que o aluno descubra os meios para resolver problemas os faz capazes de tomarem decisões usando raciocínio lógico, como também, levar a utilizar exemplos ou situações semelhantes já vistas.

A análise combinatória se ocupa, como nos tempos de sua origem, com a resolução de problemas vinculados a jogos de azar, mas isso deixou de ser sua preocupação exclusiva. Hoje em dia, ela atua em diversos outros domínios e fornece fundamentação para a contagem de possibilidades de eventos do cotidiano. (TROTTA, 1988).

Muitos alunos elegem tal parte da matemática como sendo a que menos gostam e uma das mais difíceis de serem entendidas. Acreditamos que isso aconteça devido à abordagem desvinculada da realidade com que os conceitos da análise combinatória são apresentados aos alunos. Sabemos que a matemática é uma ciência que exige abstrações, ou seja, ela conduz a uma exploração e conservação de conceitos na estrutura cognitiva sem a necessidade de uma representação concreta.

Contudo, podem-se adequar ao máximo os conceitos matemáticos que serão ensinados a realidade do estudante. A Análise Combinatória por meio da Resolução de Problemas propõe um ensino baseado na construção, desenvolvimento e aplicação de ideias e conceitos matemáticos, sempre compreendendo e atribuindo significado ao que o aluno está fazendo, evitando a simples memorização e mecanização. O sucesso deste método é atingido a partir de situações-problema contextualizadas e, posteriormente, aplicando os conceitos em situações cotidianas ou em outras áreas do conhecimento. Atualmente se faz necessário que haja uma reforma no ensino de matemática, de modo que ele se adapte as necessidades de uma sociedade moderna. Os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação recomendam um ensino de matemática necessário à formação do cidadão, que aumenta à proporção que a sociedade se torna mais complexa. Segundo (FREIRE, 1996) ensinar não é transmitir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou sua construção. Assim, quando um aluno reconhece situações do seu cotidiano em uma questão matemática, eles podem interagir com os outros alunos e expor suas próprias experiências semelhantes àquelas que são apresentadas nas atividades. Dessa forma, as aplicações da análise combinatória se tornam mais prazerosas de serem resolvidas.

Este projeto pode servir de material de consulta para investigadores de todos os níveis, principalmente para aqueles que têm interesse pelo campo da resolução de problemas, também pode ser utilizado para os professores de Matemática.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Análise Combinatória

2.2 Conceito

A análise combinatória é um ramo da matemática que estuda coleções finitas de objetos que satisfazem critérios específicos determinados, e se preocupa, em particular, com a "contagem"de objetos nessas coleções.

A humanidade há muito tempo vem transformando a natureza com objetivo único e exclusivo de sobrevivência. Para isto criou-se ferramentas adequando-as às suas necessidades. Dessas necessidades e experimentos surgiram às ciências, dentre tantas a MATEMÁTICA. A matemática é uma ferramenta desenvolvida pelo homem que auxilia nas mais variadas tarefas do seu cotidiano. Pode-se perceber a sua utilização em perguntas como:

Qual a quantidade máxima de números de telefone de uma cidade que podem ser formados com prefixo 3613, utilizando além do prefixo, quatro outros algarismos?

Quais as chances de se acertar as seis dezenas da Mega Sena, apostando com um único cartão com seis dezenas?

No lançamento de dois dados não viciados, quantos são os resultados possíveis? Destes resultados, quantos apresentam faces iguais?

Quais são as possibilidades no lançamento sucessivo de três moedas comuns?

Desse tipo de questionamento, surgiu a necessidade do estudo de problemas de contagem. Estas perguntas podem ser respondidas usando conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade. Nos livros didáticos, percebe-se a priorização do estudo de fórmulas, tais como arranjos, combinações e permutações. Procura-se aqui além dessas discussões, principalmente mostrar aplicabilidade destes conceitos levando-se em conta o uso do princípio fundamental de contagem.

O principal objetivo da matemática não deveria estar em se encontrar a solução dos problemas propostos. O seu papel seria um caminho de aquisição para novos conhecimentos, ou seja, compreender deveria ser o principal foco do ensino, para adquirir um novo conhecimento ou um processo no qual pode ser aplicado tudo aquilo que previamente havia sido construído. (ONUCHIC, 1999)

O problema mais antigo relacionado com a teoria dos números e com a Análise

Combinatória, é o da formação dos quadrados mágicos. São chamados de quadrados mágicos (de ordem n) um arranjo de números 1, 2, 3, ..., n em um quadrado nxn de forma que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma. Como vemos abaixo:

O primeiro quadrado mágico conhecido é o Lo Shu, que segundo Needham (1959) data do século I d.C., mas que pode ser tão antigo a ponto de ter sido escrito por volta de 2000 a.C. (BERGE, 1971): Este diagrama está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang, onde vários ritos eram realizados, sendo que a substituição destes símbolos por números inteiros determina o famoso quadrado mágico denominado Saturn. Este quadrado causava uma grande fascinação para a maioria das pessoas, pois nesta época, mesmo a mais simples aritmética era algo espantoso.

Embora não se tivesse encontrado muita dificuldade para decifrar e então interpretar a maioria dos problemas do papiro Rhind há um, o de número 79, cuja interpretação não é tão precisa. Nesse problema figura o seguinte conjunto de dados:

Bens

Casas 7

Gatos 49

Ratos 343

Espigas de trigo 2401

Hectares de grãos 16807

19607

Facilmente os números como as cinco primeiras potências de 7, juntamente com sua soma. Devido a isso inicialmente pensou-se que o escriba talvez estivesse introduzindo a terminologia simbólica casas, gatos, etc. para representar primeira potência, segunda potência e assim por diante.

Acredita-se que a ideia dos quadrados mágicos foi transmitida pelos chineses para os árabes, que fizeram grandes contribuições e construíram quadrados maiores que o antigo Lo Shu. Há ainda, uma poesia infantil que parece ter sobrevivido em várias culturas e que serve para introduzir o campo de problemas combinatórios (BIGGS, 1979):

Quando eu estava indo para St. Ives,

Eu encontrei um homem com sete mulheres,

Cada mulher tem sete sacos,

Cada saco tem sete gatos,

Cada gato tem sete caixas,

Caixas, gatos, sacos e mulheres,

Quantos estavam indo para St. Ives?

Esta poesia data, pelo menos de 1730 e é usualmente interpretada como uma brincadeira, entretanto, poderia se imaginar que por trás dela existiriam propósitos bem mais sérios, pois existe um problema similar no Líber Abaci,

“Sete mulheres velhas estão indo para Roma;

cada uma delas têm sete mulas;

cada mula carrega sete sacos;

cada saco contém sete pães;

cada pão tem sete facas;

e cada faca tem sete bainhas.

Qual é o número total de coisas?”

Escrito por Leonardo de Pisa que dificilmente negaria uma conexão entre este problema e a poesia infantil. As duas citações mostram aspectos artificiais do problema envolvendo a adição e a repetição do número sete, reforçando a memorização do mesmo. Alguns quadrados mágicos maiores que o Lo Shu foram encontrados por um grupo de estudantes árabes conhecido como os Ikhwan-al-Safa, que apresentaram os quadrados de ordem 4, 5 e 6 e afirmaram existir os de ordem 7, 8 e 9.

Segundo (WILSON R. J.; LLOYD, 1990), as regras básicas de contar e suas aplicações têm sido enfatizadas, desde as civilizações mais antigas por exemplos absurdos onde era destacada a elusiva propriedade da memorização, como o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.) que segue:

Há sete casas,

cada uma com sete gatos,

cada gato mata sete ratos,

cada rato teria comido sete safras de trigo,

cada qual teria produzido sete hekat de grãos;

quantos itens têm ao todo?

Ou também o problema da construção de quadrados mágicos. De acordo com (EVES, 2008) a preocupação em resolver problemas é bem antiga, já que em aproximadamente 1650 a.C. o papiro de Rhind (ou Ahames) foi escrito. O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; é um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas, descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para a determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas prático.

Segundo pesquisadores, por tempo considerável, a Análise Combinatória foi apenas uma ferramenta para efetuar alguns cálculos, sendo que em civilizações antigas suas aplicações eram dadas por regras básicas de contar, construção de quadrados mágicos, mistura de ingredientes, entre outros. A combinatória era identificada como uma simples "contagem", ou seja, sua função era encontrar o número de caminhos existentes com algumas operações pré-definidas. Tal afirmação é confirmada por (BERGE, 1971) que diz que a preocupação mais antiga da combinatória eram os problemas de contagem. (BERGE, 1971) também coloca que uma definição de combinatória depende de muitos conceitos precisos de "configurações". Para ele, uma configuração surge sempre que um determinado número de objetos é distribuído de acordo com leis pré-fixadas. Podemos pensar como um exemplo de configuração o simples fato de "colocar vários pacotes misturados dentro de uma gaveta".

Leibniz descreveu em 1666 a combinatória como sendo "o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos" enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como "o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si".

A notoriedade só veio após a publicação de "Análise Combinatória"por Percy Alexander MacMahon em 1915. Um dos destacados combinatorialistas foi Gian-Carlo Rota, que ajudou a formalizar o assunto a partir da década de 1960.

Conforme (BERGE, 1971) a definição de combinatória depende de conceitos de "configurações", pois instintivamente os matemáticos acreditam que certos problemas são de natureza combinatória e que os métodos para resolvê-los devem ser estudados. Há, em geral, quatro aspectos da combinatória moderna: listar, contar, estimar e existir – muitos dos quais podem ser ilustrados pelo problema de dispor n distinguíveis objetos em uma fileira.

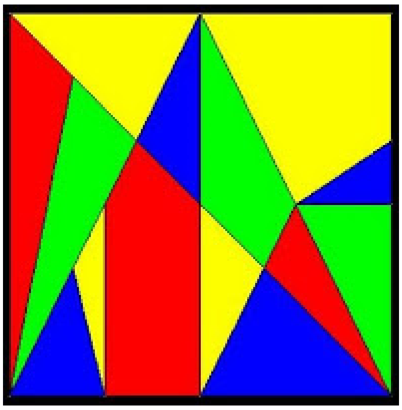
Para (BIGGS, 1979) há dois princípios de contagem que são a base da maioria da aritmética e que podem também ser considerados como a pedra fundamental da combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação, sendo que o 1º diz que se queremos contar um conjunto de objetos, podemos dividir isso em duas partes, contar as partes separadamente, e somar os resultados. Isso é fato da experiência do dia a dia. Já no 2º princípio temos que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis será a multiplicação entre x e y, ou seja, x.y.

Durante muito tempo a Análise Combinatória ou Cálculo Combinatório foi considerado completamente desligado do cálculo aritmético, segundo (PASTOR, 1939) “o conceito moderno do número é, porém uma das provas do papel preponderante que a noção de ordem desempenha nas diversas teorias matemáticas”.

2.3 Histórico

Dados de que a análise combinatória tenha se originado ainda na antiguidade, aparecem em relatos do matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.c. – 212 a.c.) que propôs um problema geométrico o qual se tornou famoso, chamado Stomachion (palavra derivada do grego stomachos, em português, estômago), que consistia em determinar de quantos modos diferentes poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado.

Figura 1 – Quadrado construído por 14 peças



Já outros afirmam que seu início ocorreu no século XVI com o matemático italiano Nicollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Além dele, outros matemáticos, como os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662), também contribuíram para o estudo desse assunto.

A Análise Combinatória teve sua origem no estudo dos jogos de azar, como o lançamento de dados e os jogos de cartas. Mas, ao longo do tempo, esse conceito matemático sofreu intenso desenvolvimento.

A partir do século XVII, a Análise Combinatória passa a ser tratada como um ramo da Ciência, uma teoria que começa a se desenvolver, se organizar e se sistematizar em vários trabalhos, assim como, suas aplicações na estatística, no cálculo de probabilidades e em vários outros campos das ciências, tanto que, dentro de poucos anos três notáveis livros surgiram: Traité du triangle arithmétique (escrito em 1654 e publicado em 1665 em Paris) de Pascal, Dissertatio de arte combinatória (Leipzig, 1666) de Leibniz, Ars magna sciendi sive combinatoria (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Frénicle de

Bessy, Abrége des combinaisons (Paris, 1693) e de J. Bernoulli, Ars Conjectandi (Basiléia, 1713) e De Moivre, Doctrineof chances (Londres, 1718).

Hoje, a Análise Combinatória é definida como um ramo da Matemática que permite resolver problemas em que, é necessário “escolher”, “arrumar” e, principalmente, “contar” os objetos de um conjunto. Tal conteúdo quando explorado em forma de problemas traz certa dificuldade em relação à formulação e interpretação de seus enunciados, pois exige flexibilidade de pensamento, ou seja, para resolvê-los é necessário parar, concentrar, discutir e pensar.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

3.1 conceito

A resolução de problemas consiste no uso de métodos, de uma forma ordenada, para encontrar soluções de problemas específicos. Algumas técnicas para resolução de problemas são desenvolvidas e utilizadas na inteligência artificial, ciência da computação, engenharia, matemática, medicina, etc., estão relacionadas com processos mentais de resolução de problemas estudados no campo da psicologia.(WIKIPEDIA, 2016)

Para muitos matemáticos é permitir que os alunos utilizem seus conhecimentos e desenvolvam a capacidade de administrar as informações ao seu redor. A partir disso, os alunos adquirem a oportunidade de ampliar seu conhecimento, desenvolver seu raciocínio lógico, enfrentar novas situações e conhecer as aplicações da matemática. O mesmo sucede para o professor, pois trabalhar com a resolução de problemas permite atingir os objetivos de aprendizagem definidos, além de tornar a aula mais interessante e motivadora. No entanto, ensinar matemática por meio da resolução de problemas é uma forma de ensino que ainda enfrenta muitas dificuldades que precisam ser superadas.

A forma mais utilizada para a aplicação da Resolução de Problemas consiste em ensinar um conceito, um procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com números do enunciado ou aplicar algo que aprendam nas aulas.

A resolução de problemas tem sido, de forma geral, mundialmente enfatizada como um recurso metodológico para proporcionar um aprendizado de matemática de melhor qualidade. Acredita-se, e algumas pesquisas têm dado suporte a esse método, que a construção de conceitos matemáticos pelos alunos se torna mais significativa e duradoura quando é proporcionada por meio de situações contextualizadas e pela exploração de novos conceitos e que estimulem a curiosidade do educando. Embora o processo de formalização em uma ação educativa baseada nessa concepção seja mais lento, consegue-se um maior envolvimento do aluno de modo a levantar hipóteses e conjecturas para então, investiga-las e testa-las visando a solução do problema proposto (D'AMBROSIO, 2008).

Do fato de que um conceito não se constrói por acaso, haja vista que é fruto de uma operação mental a serviço da atividade prática, da resolução de problemas, convém destacar que um dos principais objetivos da resolução de problemas matemáticos é procurar fazer com que o aluno raciocine na busca de possíveis caminhos para a sua resolução e, para que isso aconteça, o ideal é propor situações-problema contextualizadas que o envolva, o desafie e o motive a querer resolvê-las. Assim, estarão sendo conduzidos a gerar os processos de pensamento, e dessa forma à formação de novos conceitos matemáticos que, por sua vez, não se formam simplesmente por meio de regras e treino de algoritmos. A evolução da formação desses conceitos se torna um ato complexo do pensamento que não pode ser ensinado por meio de repetição, pois pressupõe o desenvolvimento de muitas funções cognitivas: comparação, diferenciação, abstração, raciocínio lógico, atenção e memória.

Embora tendo cautela sobre a complexidade do ato de resolver problemas, os seguidores de Polya têm esperado que o ensino dos pressupostos procedimentos dos especialistas aos aprendizes direcione os aprendizes “a imitarem” (POLYA,) as formas que teriam conduzido os matemáticos ao sucesso.

Espera-se que, dessa forma, as barreiras da aprendizagem da resolução de problemas possam ser removidas. Ao que parece, dessa maneira, as características específicas de diferentes contextos nos quais certos problemas estão inseridos estão sendo subestimadas tais como as características peculiares dos tópicos envolvidos e a estrutura interna de cada problema como um todo individual. O que está, principalmente, sendo desconsiderado é o esforço educacional necessário de se adentrar nas experiências dos sujeitos.

Mesmo tendo grande aceitabilidade, essa proposta educacional, depende do sucesso do processo de transmissão de habilidades, que tem sido limitado. Dúvidas têm surgido sobre a produtividade da adoção de procedimentos gerais, embora, ao que parece, em menor intensidade do que a defesa de sua adoção.

> As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística.(BRASIL,).

Por conseguinte, tanto o PCNEM como o trabalho de (SABO, 2007) orientam a trabalhar a Análise Combinatória, tendo como foco a resolução de problemas e as fórmulas como consequência do raciocínio combinatório. Algumas pesquisas como a de (STURM, 1999), (ESTEVES, 2001) e (SOUZA, 2010), têm trabalhado abordagens alternativas à usualmente praticada, tendo como foco a resolução de situações-problema. (ESTEVES, 2001), em sua pesquisa, elaborou uma averiguação com dois grupos, um experimental e outro de referência, os quais estudaram a introdução de Análise Combinatória com abordagens diferentes. Para o primeiro grupo, foi utilizada uma proposta, elaborada por ela, em que as fórmulas não foram apresentadas, assim como as definições e nomenclaturas também só foram apresentadas no último encontro da sequência:

> Isto é, acreditamos na necessidade de o aluno iniciar trabalhando com situações-problema, usando um caminho intuitivo e, aos poucos, introduzirmos situações mais complexas, onde poderemos institucionalizar o conceito introduzindo, ou não, as fórmulas.(ESTEVES, 2001)

Esse procedimento consiste em iniciar o trabalho com situações-problema e explorá-las, buscando a formação conceitual por meio dos problemas, o que implica uma mudança no padrão comumente usado.

> Embora o processo de formalização em uma ação educativa baseada nessa concepção seja mais lento, consegue-se um maior envolvimento do aluno com o "fazer" matemático de modo a levantar hipóteses e conjecturas para então, investigá-las e testá-las visando à solução do problema proposto.(D'AMBROSIO, 2003)

Sobre isso, (DANTE, 1998) diz que [...] Um dos principais objetivos do ensino de matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações-problemas que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las.

> Por sua vez, Pozo entende que, ensinar os alunos a resolver problemas é dotá-los da capacidade de aprender a aprender no sentido de habituá-los a encontrar por si mesmos respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros e transmitida pelo livro- texto ou pelo professor (...).(POZO, 1998)

Muitas pesquisas já foram realizadas sobre a Metodologia de Resolução de Problemas no ensino da Matemática, porém no cotidiano dos professores da área ainda surgem muitas indagações a respeito do assunto. Segundo os PCN's de Matemática (BRASIL, 1998), a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

A atividade de resolver problemas está presente na vida das pessoas, exigindo soluções que muitas vezes requerem estratégias de enfrentamento. O aprendizado de estratégias auxilia o aluno a enfrentar novas situações em outras áreas do conhecimento. Sendo assim, é de suma importância que os professores compreendam como trabalhar esta metodologia, a fim de desenvolver no aluno a capacidade de resolver situações desafiadoras, interagir entre os pares, desenvolver a comunicação, a criatividade e o senso crítico. Dante (1998), afirma que embora tão valorizada, a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula. Deve-se possibilitar ao aluno desenvolver estratégias, buscar vários caminhos para solucioná-lo à sua maneira, de acordo com sua realidade e raciocínio. Dante (1998) também faz esta diferenciação onde exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo e problema é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não temos previamente nenhum algoritmo que garanta a solução. Para este mesmo autor, a resolução de um problema exige certa dose de iniciativa e criatividade, aliada ao conhecimento de algumas estratégias. Os exercícios e os problemas têm seu valor, cabe ao professor manter um equilíbrio entre eles.

Para (DANTE, 1998) os objetivos da resolução de problemas são:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática;
- Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base matemática às pessoas.

A partir da leitura e interpretação dos problemas, é possível o envolvimento do aluno na busca por estratégias de resolução, na persistência em encontrar uma solução, na ampliação e na ressignificação de conceitos e ideias que ele já conhece. Segundo (ONUCHIC, 1999), o problema não deve ser tratado como um caso isolado, mas como um passo para alcançar a natureza intrínseca da Matemática, assim como seus usos e aplicações. Define-se como problema tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver.

3.2 Histórico

Problemas nos currículos remontam pelo menos aos antigos egípcios, chineses e gregos e citam, como exemplos, o Papiro de Ahmes copiado pelo escriba Ahmes, em 1650 A. C., de um documento mais antigo ainda, um manuscrito matemático egípcio que contém uma coleção de problemas e outro que é um documento chinês de cerca de 1000 A.C. Esses problemas, dizem eles, eram criados por alguém que os apresentava a outros que passavam a conhecê-lo e conseguiam chegar à solução. Os séculos passaram e problemas com tratamento semelhante são encontrados até em livros de matemática dos séculos XIX e XX. Mas, o que transparece nesses exemplos é uma visão muito estreita da aprendizagem da resolução de problemas. Até tempos bastante recentes, ensinar resolução de problemas significava apresentar problemas e, talvez, incluir uma técnica de resolução específica. Uma atenção mais moderna ao desenvolvimento de habilidades nos alunos em resolução de problemas, nos livros-texto, apresenta-se colorida, com desenhos, chamando a atenção para fatos da vida real, mas sempre com alguém resolvendo o problema e deixando-se uma lista com problemas semelhantes para serem resolvidos.

No século passado, a matemática era ensinada baseada em memorização e repetição, a chamada decoreba, de exercícios. O conteúdo era apresentado pelo professor e o aluno memorizava e repetia a técnica através de exercícios rotineiros. Segundo (ONUCHIC, 1999), "nessa época, o currículo de matemática ainda não estava bem definido, embora houvesse um caminho de trabalho: aritmética, álgebra e geometria." Surgiu uma nova orientação, com o passar dos anos, que substitui a matemática por meio da repetição, fazendo com que os alunos aprendessem matemática por compreensão. Esta forma de ensino de matemática baseava-se no treino de técnicas e habilidades para a resolução de problemas formais ou para aprender um novo conteúdo. "Essas duas formas de ensino não lograram sucesso quanto à aprendizagem dos alunos. Na verdade, alguns alunos aprendiam, mas a maioria não." (ONUCHIC, 1999).

Desde então, as discussões entre professores de Matemática vêm se intensificando e apontando para uma necessidade de compreensão no ensino da Matemática, as diretrizes curriculares descrevem a possibilidade dos estudantes realizarem análises, discussões, apropriação de conceitos e formulação de ideias. Através disso, professores procuram trazer para a educação matemática escolar um ensino diferenciado daquele tradicionalista, com métodos puramente sintéticos e com rígidas demonstrações. Esse processo é lento e difícil, pois, os professores que atuam em sala, em sua maioria, também receberam uma educação matemática tradicional, baseada em teoremas, regras e exercícios sem muita aplicação e pouca ligação com seu cotidiano. Cabe ao docente empenhar-se neste processo de transformação, partindo da necessidade que ele venha a encontrar em seus alunos de entender os porquês dos conteúdos propostos.

Educadores matemáticos tentavam ajustar-se às ideias e aos tempos de mudança, abraçando as ideias dos críticos, mas o conflito resultante das tradições em disputa levou a uma crise na educação matemática dos anos 1930. Uma crise que, em 1989, no entender desses autores, ainda não fora resolvida. Eles continuam dizendo que é especialmente irônico que, parcialmente, por causa desse ataque ao lugar da Matemática no currículo escolar, muitos dos nossos antecessores, embora advogando os benefícios da matemática para o desenvolvimento humano, não se sentiam à vontade com a ideia de dar aos problemas um papel tão grande no currículo. Esses acontecimentos podem ter preparado o terreno para que os educadores matemáticos começassem a pôr ênfase mais específica no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, mas o confronto das ideias básicas sobre a inteligência humana, da educação e do currículo escolar, ainda hoje permeia as discussões sobre resolução de problemas.

Nos anos 90, muitos consideravam que a resolução de problemas requeria uma mente polivalente, mas sem um conhecimento médio de técnicas e métodos de descoberta fica difícil atingir esse objetivo. Dessa forma, é interessante averiguar se embora tal treinamento em estratégias de resolução de problemas possa ter uma recompensa considerável, com todos os perigos inerentes a aprendizagem. Em muitos livros que oferecem algumas estruturações para a construção de modelos matemáticos, a estruturação é comumente usada apenas para rotular estágios, ao invés de propiciar a entrada na experiência. Não surpreende que os alunos vão embora com uma abordagem da matemática algorítmica e mecânica.(MASON, 1988, p. 211)

Preocupados com a aprendizagem em relação à matemática, começaram as discussões a respeito da resolução de problemas para se aprender matemática. Na década de 1960, iniciou um movimento de renovação educacional denominado Matemática Moderna. Esse movimento deixava de lado todas as reformas anteriores e procurava aproximar a matemática que era estudada na escola, com aquela estudada pelos pesquisadores, provocando várias discussões e amplas mudanças no currículo matemático. A Matemática Moderna apresentava uma matemática com abstrações excessivas, utilização exagerada de símbolos e complexidade na abordagem dos conceitos matemáticos.

O excesso de formalização também se distanciava de questões de relevância social e cultural. Os educadores matemáticos passaram a dar a devida importância à resolução de problemas no final da década de 1970. Em 1980 foi editada nos Estados Unidos uma publicação do NCTM–National Council of Teachers of Mathematics, intitulado "Agenda para a Ação", que descreve recomendações para o ensino de matemática sendo a resolução de problemas apontada como o principal foco do ensino da Matemática. (ONUCHIC, 1999). Para Onuchic,

> [...] este fato ocorreu devido às grandes diferenças entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado da "resolução de problemas como foco da matemática escolar". [...] os estudos da década de 80 deram muita atenção ao processo de resolução de problemas, não se limitando simplesmente à busca da solução do problema. Mesmo assim, o processo continuou atrelado à busca da solução do problema.(ONUCHIC, 1999)

Não havia consenso sobre como se entender à primeira recomendação do documento "Uma Agenda para a Ação": a resolução de problemas devia ser o foco da Matemática escolar na década de 1980. Neste sentido, o ensino de matemática por meio da resolução de problemas era uma concepção relevante dentre os vários tipos de concepções já existentes, pois o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas, como aprende matemática para resolvê-los. Essa orientação para o ensino de matemática considera que o ensino-aprendizagem de um conteúdo matemático ocorra a partir de uma situação-problema, podendo este ser advindo de uma situação contextualizada ou ser um problema puramente matemático. Além disso, utiliza o que foi considerado satisfatório nas orientações curriculares anteriores.

> [...] busca-se usar tudo o que havia de bom nas reformas anteriores: repetição, compreensão, a linguagem matemática da teoria dos conjuntos, técnicas de resolução de problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional."(ONUCHIC, 1999)

Ensinar matemática através da resolução de problemas é a abordagem mais significativa e fundamentada com as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, pois conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto da resolução de problemas.

Segundo Onuchic,

> "nessa época, o currículo de matemática ainda não estava bem definido, embora houvesse um caminho de trabalho: aritmética, álgebra e geometria." Com o passar dos anos, surge uma nova orientação que substitui a matemática por meio da repetição, sendo que os alunos deveriam aprender matemática com compreensão. Esta forma de ensino de matemática baseava-se no treino de técnicas e habilidades para a resolução de problemas formais ou para aprender um novo conteúdo. "Essas duas formas de ensino não lograram sucesso quanto à aprendizagem dos alunos. Na verdade, alguns alunos aprendiam, mas a maioria não." (ONUCHIC, 1999).

Essa nova orientação apresentava uma matemática com muitas abstrações, excesso de símbolos e complexidade na abordagem dos conceitos matemáticos. Porém, esse exagero de formalização também se distanciava de questões de relevância social e cultural. O excesso de preocupação com a formalização e o afastamento de questões práticas fez essa orientação fracassar. O movimento da Matemática Moderna refluiu por se constatar a inadequação de alguns de seus princípios básicos, e das distorções ocorridas. "[...] Buscavam elas ensinar Matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exige conhecimento matemático?" (BRASIL,).

Os professores receberam vários recursos a fim de colaborar com o seu trabalho didático e passaram a fazer da resolução de problemas o foco de seu trabalho. Mas, o resultado esperado não foi satisfatório devido às discordâncias entre as concepções existentes sobre a resolução de problemas.

Podemos encontrar nos PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio -, uma recomendação para o ensino de Análise Combinatória que não tem as fórmulas como eixo principal, mas que, por meio da resolução de problemas, constrói o raciocínio combinatório: A contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada de raciocínio combinatório.

Se prestar atenção para a resolução de problemas nos currículos de matemática nas escolas, desde o antigo Egito até o presente, três diferentes temas gerais caracterizamna: resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como habilidade e resolução de problemas como arte.

3.3 PRINCIPAIS AUTORES

George Polya

Figura 2 – George Polya

FONTE:wikipedia.org

No início de sua carreira, Pólya escreveu, juntamente com Gábor Szegő, dois livros que trabalhavam a resolução de problemas: Problemas e Teoremas de Análise. Posteriormente, começou a pesquisar sobre métodos de resolução de problemas. Em How to Solve It, Polya dá uma ideia geral da heuristica de problemas matemáticos e não-matemáticos.

Polya formulou as quatro etapas essenciais para a resolução de problemas: 1ª etapa - Compreender o problema; 2ª etapa - Traçar um plano; 3ª etapa - Colocar o plano em prática; 4ª etapa - Comprovar os resultados.

George Polya foi um grande matemático do sec. XX que se dedicou muito especialmente à arte de resolução de problemas de matemática. Entre os seus maiores legados está a sua tentativa de caracterizar o modo como a maioria das pessoas resolve problemas de matemática, e de descrever como pode ser ensinada a "Arte de Resolução de Problemas".

Polya descreve como se deve induzir quem resolve problemas de todos os tipos, mesmo os que não são de matemática. O livro “How to Solve It” inclui conselhos para professores de matemática e uma mini enciclopédia de estratégias heurísticas. Os interesses de Polya cruzaram a matemática com outras áreas do saber, tais como as ciências da natureza e a psicologia cognitiva, entre outras. Em 1976, a Associação de Matemática dos E.U.A., criou o Prémio George Polya.

A obra de George Polya é bem conhecida por todos os matemáticos, quer sejam investigadores ou professores que se limitem a seu trabalho docente. É um dos homens míticos na história moderna da matemática e sua essência, sobre tudo através dos problemas.

Polya nasceu em Budapeste em 13 de dezembro de 1887. No princípio não se sentiu especialmente atraído pela matemática, sim pela literatura e a filosofia. Seu professor desta última lhe sugeriu que seguiria cursos de física e matemática para melhorar sua formação filosófica. Este conselho marcou para sempre sua carreira. As magnificas lições de Física de Loránd Eötvvös, e as não menos excelentes de Matemáticas de Lipót Fejér influenciaram decisivamente na vida e obra de Polya.

Em 1940 Polya e sua esposa suíça, Stella V. Weber, mudaram para os Estados Unidos. Polya falava, segundo ele, além de húngaro, alemão, francês e inglês, e podia ler e interpretar algumas outras. Instalaram-se em Palo Alto, Califórnia, e obteve trabalho na Universidade de Stanford. Durante sua longa vida, acadêmica e profissional, Póolya recebeu numerosos prêmios por seu excepcional trabalho sobre a essência das matemáticas e sua importantíssima obra investigadora.

Quando lhe perguntavam como havia chegado a ser matemático, dizia, meio em tom de brincadeira, meio sério: Não era suficientemente inteligente para ser físico, e muito para ser filósofo, assim que escolhi matemáticas, que é uma coisa intermediária.

George Polya foi um grande matemático do sec. XX que se dedicou muito especialmente à arte de resolução de problemas de matemática. Entre os seus maiores legados está a sua tentativa de caracterizar o modo como a maioria das pessoas resolve problemas de matemática, e de descrever como pode ser ensinada a "Arte de Resolução de Problemas".

Polya escreveu, juntamente com Gábor Szegő, dois livros que trabalhavam a resolução de problemas: Problemas e Teoremas de Análise. Posteriormente, começou a pesquisar sobre métodos de resolução de problemas. Em How to Solve It, Polya dá uma ideia geral da heuristica de problemas matemáticos e não-matemáticos.

Os dez mandamentos do professor, segundo Polya:

1. Demonstre interesse por sua matéria. Se o professor se entedia, toda a classe se entediará.

2. Domine sua matéria. Se um tema lhe interessa pessoalmente, não lhe ensine, porque não será verdadeiramente capaz de ensiná-lo adequadamente. O interesse é uma condição necessária, mas não suficiente. Quaisquer que sejam os métodos pedagógicos utilizados, não conseguirão explicar algo claramente a vossos estudantes sem antes não tê-lo entendido perfeitamente. Daí este segundo mandamento. Ele é de primeiro interesse, porque, com alguns conhecimentos junto com uma falta de interesse, pode-se converter em um professor excepcionalmente mau.

3. Seja instruído nas vias do conhecimento: o melhor meio para aprender algo é descobri-lo por si mesmo. Pode-se obter grande proveito da leitura de um bom livro ou da audição de uma boa conferência sobre a psicologia do ato de aprender. Mas ler e escutar

não são absolutamente necessários e em todo caso não são suficientes: tem que conhecer as vias do conhecimento, estar familiarizado com o processo que conduz da experiência ao saber, graças à experiência de seus próprios estudos e a observação de seus estudantes.

4. Trate de ler em frente aos estudantes, tente adivinhar suas esperanças e suas dificuldades; ponha-se em seu lugar. Ainda que um se interesse pelo tema, o conheça bem, se compreendam os processos de aquisição dos conhecimentos, se pode ser um mal professor. É raro, mas muitos professores que conhecemos, mesmo sendo perfeitamente competentes, não são capazes de estabelecer contato com sua classe. Já que a essência de um deve acompanhar-se pelo aprendizado do outro, tem que existir um contato entre o Professor e o Estudante. A reação do estudante a sua forma de ensinar depende de seu passado, de suas perspectivas e de seus interesses. Portanto, tem-se em consideração o que sabem e o que não sabem; o que lhes gostaria de saber e o que não lhes importa; o que devem conhecer e o que não importa que não saibam.

5. Não lhes dê unicamente "saber", sim "saber fazer", atitudes intelectuais, o hábito de um trabalho metódico. O conhecimento consiste, parte em informação e parte em saber fazer. O saber fazer é o talento, é a habilidade em fazer uso da informação para um fim determinado; se pode descrever como um conjunto de atitudes intelectuais; é a capacidade para trabalhar metodicamente. Em Matemáticas, o saber fazer se traduz em uma atitude para resolver problemas, construir demonstrações, examinar com espírito crítico soluções e provas. Por isso, em Matemáticas, a maneira como se ensina é tão importante como o que se ensina.

6. Ensinando a conjecturar. Primeiro imaginar, depois provar. Assim é como se procede ao descobrimento, na maior parte dos casos. O professor de Matemática tem excelentes ocasiões para mostrar o papel da conjectura no campo do descobrimento e fazer assim que os estudantes adquiram uma atitude intelectual fundamental. A conjectura razoável deve estar fundada na utilização ajuizada da evidência indutiva e da analogia, e encerra todos os conhecimentos plausíveis que podem intervir no método científico.

7. Ensinar a demonstrar. As Matemáticas são uma boa escola de raciocínio demonstrativo. Isto feito, a verdade vai mais além: as matemáticas podem estender-se ao raciocínio demonstrativo, que se infiltram em todas as ciências desde que alcancem um nível matemático e lógico suficientemente abstrato e definido.

8. No problema que estiver tratando, distinguir o que pode servir, mais tarde, para resolver outros problemas – tentar revelar o modelo geral subjacente no fundo da situação concreta que afrontarás. Quando apresentar a solução de um problema, destacar seus traços instrutivos. Uma particularidade de um problema é instrutiva se merece ser imitada. Um aspecto bem assinalado, em um problema, e sua solução pode transformar-se em um modelo de resolução, em um esquema tal que, imitando-o, o estudante possa

resolver outros problemas.

9. Não revelar de pronto a solução: deixar que os estudantes façam suposições, deixar eles descobrir por si mesmos sempre que possível. Eis aqui uma pequena astucia fácil de aprender: quando se começa a discutir a solução de um problema, deixar que os estudantes adivinhem sua solução. Quem tem uma ideia ou o resultado, se já está comprometido: deve seguir o desenrolar da solução para ver se o que já está conjecturado é exato ou não, com o que se pode despistar. Voltaire dizia: “o segredo para ser entediante é dizê-lo todo”.

10. Não calcular pela força, sugerir. Trata-se de deixar aos estudantes tanta liberdade e iniciativa como for possível, tendo em conta as condições existentes da aprendizagem. Deixar que os estudantes façam perguntas; ou bem planejadas questões que eles mesmos sejam capazes de propor. Deixar que os estudantes deem respostas; ou bem dadas respostas que eles mesmos sejam capazes de dar.

Estes dez mandamentos do professor de matemática são as bases para que se tenha um resultado melhor ao ensinar. Seguir essas “regras” é uma forma de elevar a capacidade de entendimento de nossos estudantes. Aliadas ao processo de Resolução de Problemas, se torna uma ferramenta a mais para que os alunos produzam seus próprios resultados e conceitos, desenvolvendo a capacidade intelectual e dando sentido ao que estão fazendo, levando-os a utilizar a mesma forma de calcular para outras situações semelhantes.

Francis Guthrie

Figura 3 – Francis Guthrie

FONTE:www.datuopinion.com

Francis Guthrie nasceu em Londres no ano de 1831, foi um matemático e botánico sul-africano. Foi o primeiro a enunciar o Teorema das Quatro Cores, em 1852. Nessa época, Guthrie era aluno de Augustus De Morgam na University College de Londres.

Como tantos outros problemas matemáticos, este começou de uma maneira casual. Em 1850 um inglês estudante de leis, Francis Guthrie se entretia tentando colorir um mapa da Inglaterra utilizando a menor quantidade de cores possível e tentou fazê-lo com somente quatro cores sem conseguir, mas tinha a intuição de que se podia fazer.

Contou a seu irmão Frederick o problema. Frederick havia estudado com um prestigiado matemático inglês da época chamado De Morgan, que não solucionou o problema. De Morgan enviou uma carta a Hamilton, outro matemático inglês importante, que não abordou o problema.

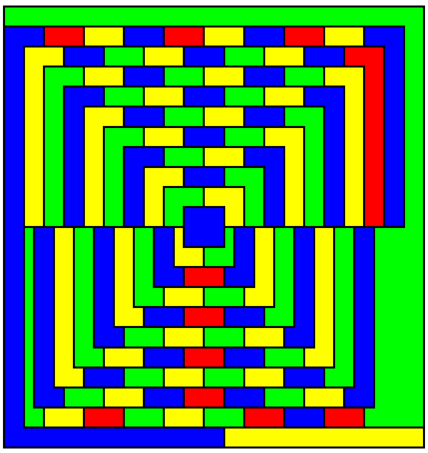
O caso é que o problema das quatro cores começou a adquirir fama de tal forma que em 1878 o professor Cayley o propôs oficialmente à London Mathematical Society, uma das mais importantes sociedades de matemática do mundo, como um problema a resolver.

Guthrie emigra a África do Sul em 1861, obtendo o posto de matemático master no Colégio Graaff-Reinet. Enquanto toma um curso de conferências em Botânica em 1862, e logo constrói uma forte amizade com o residente Harry Bolus. E aconselha a Bolus que encare estudos botánicos para aliviar a pena pela norte de seu filho de seis anos. Quando Bolus deixa a Cidade do Cabo uns anos mais tarde, persuade Guthrie para mudar-se, em 1875. Ele se muda em 1898, e se instala em sua granja de Raapenberg.

Teorema do mapa de quatro cores

O teorema do mapa de quatro cores diz que não são necessárias mais de quatro cores para pintar qualquer mapa plano concebível, de países reais ou imaginários, de tal modo que dois países vizinhos não tenham a mesma cor.

Figura 4 – Mosaico colorido com apenas quatro cores



FONTE:http://terraquegira.blogspot.com.br/2007/10/teorema-do-mapa-de-quatro-cores.html

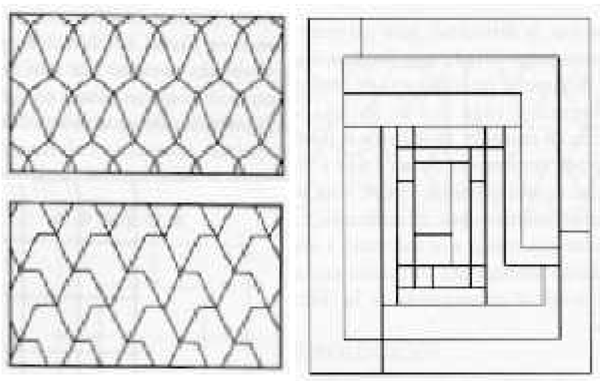
A demonstração deste teorema é considerada um dos maiores feitos da matemática moderna. Este foi um dos primeiros grandes teoremas a ser provado usando um computador, no entanto esta prova não é ainda aceita por todos os matemáticos visto ninguém o ter conseguido demonstrar usando apenas papel e caneta.

Em meado do século XIX os matemáticos pensavam que este teorema era verdadeiro, tendo sido proposto como conjectura em 1852 por Francis Guthrie. Durante mais de 100 anos matemáticos de todo o mundo atacaram o problema com unhas e dentes tendo sempre falhado na sua demonstração.

Foi apenas em 1976 que a conjectura foi finalmente demonstrada por Kenneth Appel e Wolfgang Haken na Universidade de Illinois. Quando isto aconteceu reza a história que muitos professores de matemática terim interrompido as sua aulas para abrir uma garrafa de champanhe. No entanto muitos matemáticos não ficaram contentes, pois a descoberta tinha sido feita usando 3 supercomputadores durante mais de 1000 horas.

Proposta de alguns exercícios Pense que, como já visto, todo mapa plano se pode colorir com só quatro cores, a coisa não é fácil. Pode-se tentar com os seguintes mapas.

Figura 5 – Mosaico para colorir



FONTE:https://www.um.es/docencia/pherrero/mathis/colores/4colores.htm

Lourdes de la Rosa Onuchic

Figura 6 – Lourdes de la Rosa Onuchic

FONTE:www.icmc.usp.br

No Brasil temos Lourdes de la Rosa Onuchic, que é uma representante muito engajada na introdução da Resolução de Problemas nas escolas públicas brasileiras. Doutora em Matemática pela USP - São Carlos/SP. Professora e Pesquisadora Voluntária da

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho/UNESP - Rio Claro/SP. Coordenadora do GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas.

O Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas e seu Trabalho

O grupo de trabalho tem suas origens no início da década de 1990. No final de 1989, Onuchic conhece Judith e Larry Sowder, um casal de educadores matemáticos da SUSD (State University of San Diego) na California – USA. Larry trabalhando em Álgebra e ela principalmente com Formação de Professores de Matemática. Recebeu de suas mãos o documento que ela acabara de editar "Setting a Research Agenda – a Research Agenda for Mathematics Education", do National Council of Teachers of Mathematics. Durante alguns anos passou várias semanas nessa Universidade e Resolução de Problemas passou a ser sua área de trabalho. Pode entender que, durante a década de 1980, muitos recursos em resolução de problemas haviam sido desenvolvidos visando ao trabalho de sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Muito desse material ajudou os professores a fazerem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho. Nessa importante década, também as dificuldades encontradas por professores para "ensinar" e as dos alunos para "aprender" passaram a ser consideradas como objetos de estudo e de reconceitualização por educadores e pesquisadores na Educação Matemática. Entretanto, havia diferentes linhas de pesquisa por eles defendidas.

Segundo Onuchic e Allevato (2004), ao final da década de 1980, o NCTM, em busca de uma nova reforma para a Educação Matemática, publicou: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, em 1989 Professional Standards for Teaching Mathematics, em 1991 Assessment Standards for School Mathematics, em 1995, esses Standards não pretendiam dizer, passo a passo, como trabalhar esses documentos. Ao contrário, queriam apresentar objetivos e princípios em defesa de que práticas curriculares, de ensino e de avaliação pudessem ser examinadas. Eles queriam estimular políticos educacionais, pais, professores, administradores, comunidades locais e conselhos escolares a melhorar os programas de matemática em todos os níveis educacionais.

Em 1990, o NSF (National Science Foundation) financiou uma coleção, em larga escala, de projetos de materiais instrucionais para todos os níveis de ensino: elementar, médio e secundário. Surgiu uma nova geração de currículos alinhados com os Standards. Para dar conta dessas novas ideias foi preciso que novo enfoque fosse dado às salas de aula e que se tivesse uma visão expandida dos algoritmos. Outra característica encontrada nesses currículos é o uso de contextos na resolução de problemas como um meio de desenvolver os conteúdos matemáticos e fazer conexões com outras áreas. Estes currículos retratam a matemática como uma disciplina unificada por tópicos coerentemente integrados. A partir de 1995 começou, nos Estados Unidos, uma verdadeira "guerra matemática". Houve uma série de críticas à reforma proposta pelos Standards, mas a luta continuou.

O NCTM, então, após uma década de aplicação das ideias defendidas nos Standards, trabalhou sobre críticas e sugestões recebidas e produziu a publicação Principles and Standards for School Mathematics, que foi lançada em abril de 2000 e é conhecida como os Standards 2000. Os Standards sugeriram profundas mudanças em quase todos os aspectos do ensino e da aprendizagem de matemática. Os Standards 2000 refinam e elaboram as mensagens dos documentos originais dos Standards conservando intacta sua visão básica.

No Brasil, apoiados em ideias dos Standards do NCTM, foram criados os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais: PCN-Matemática – 1º e 2º ciclos - 1ª a 4ª séries - 1997 PCN-Matemática – 3º e 4º ciclos - 5ª a 8ª séries - 1998 PCN-Matemática - Ensino Médio - 1999 Onuchic e Allevato (2004) continuam dizendo, em seu artigo, que os objetivos gerais da área de matemática, nos PCN, buscam contemplar várias linhas para trabalhar o ensino de matemática. Esses objetivos têm como propósito fazer com que os alunos possam pensar matematicamente, levantar ideias matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar e escrever sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e de fora da matemática e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles. (ONUCHIC L. R.; ALLEVATO, 2004).

Como enfrentar as mudanças preconizadas pelos PCN? Quantos professores estão preparados para utilizar suas recomendações e levar aos seus alunos, em suas salas de aula, um conteúdo que pode se encaixar dentro de determinados padrões de conteúdo, suportados por padrões de procedimento bem estruturados? Especificamente no que se refere à matemática, os PCN indicam a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas e discutem caminhos para se fazer matemática na sala de aula. Nesse contexto, há diferentes caminhos propostos para se chegar a processos de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática.

No grupo GTERP, foi trabalhado em Resolução de Problemas com a "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas", onde o ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual de avaliação. Ela, a avaliação, é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando sua aprendizagem e reorientando as práticas em salas de aula quando for necessário.

A maioria dos trabalhos, quer Dissertações de Mestrado, quer Teses de Doutorado, fazem uso dessa metodologia ao trabalhar diferentes tópicos matemáticos, num trabalho de sala de aula que, visando ao processo de ensino-aprendizagem-avaliação, se apresenta ao professor numa forma prescritiva, ou seja, professor e alunos juntos desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo coparticipativo e colaborativo em sala de aula. No GTERP faz-se uso de um roteiro de atividades destinado à orientação de professores para a condução de suas aulas:

1) Preparação do problema - Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema proposto não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula;

2) Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura;

3) Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos; Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo e levando-os a interpretar o problema. Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode- se, com os alunos, consultar um dicionário;

4) Resolução do problema - De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da "matemática nova" que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos na construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula;

5) Observar e incentivar – Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda aos alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados; e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho;

6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam;

7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem

as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca, como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem;

8) Busca de consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor incentiva toda a classe a chegar a um consenso sobre o resultado correto;

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.(ONUCHIC L. R.; ALLEVATO, 2009)

O grupo GTERP realizou dois seminários em Resolução de Problemas: Seminário 1 (2008) e Seminário 2 (2011). A intenção desses encontros foi a de reunir educadores matemáticos com variadas visões sobre Resolução de Problemas, visando à possibilidade de encontrar um caminho para o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas que possibilite uma intervenção na escola pública.

4 MATEMÁTICA E ARTE

4.1 Conceito

Matemática e Arte são utilizadas para registrar a evolução da vida e do universo. Sendo privilegiados leitores da natureza, matemáticos e artistas valem-se dessa característica, que lhes é peculiar, e com a linguagem visual e a linguagem formal que complementam essa leitura, realizam novas descobertas, encontrando formas geométricas bem definidas e inspiradoras.

A arte é uma das formas mais genuína de representar as coisas do mundo. Através dela os sonhos passam a se tornar reais, os desejos são expostos e atingíveis, a realidade se faz presente. O artista transforma o vazio, o pálido e o branco em misturas perfeitas de cores e de formas, tornando-se muitas vezes impossível não se encantar ou até mesmo se encontrar na maioria de suas obras.

Matemática e Arte são disciplinas que podem ser trabalhadas em consonância de maneira a tornar o estudo do espaço e da forma assim como propiciar através de atividades, em que é utilizada a arte, um desenvolvimento do aluno que faça com que ele veja as diversas relações da matemática com outras disciplinas e, em particular com a Arte, mostrando que elas sempre caminharam juntas ao longo da história e como têm sido essenciais à evolução dos povos.

Além de estarem cada vez mais presentes nas mais diferentes etapas da evolução humana, a matemática ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Dessa forma:

> a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.(BRASIL, 2000, p. 40)

Quando se integra arte e matemática, pode-se ter um melhor entendimento e consequente absorção de seus conceitos. Ao desenhar desenvolve-se um raciocínio ao ligar, pela experiência pessoal que se possui aquilo que se acaba de aprender com o conhecimento já adquirido, de tal modo que, dessa forma, se aprende o que era antes desconhecido e aparentemente difícil de entender.

A Matemática está presente em praticamente todas as áreas do conhecimento e faz parte de nosso dia a dia, mas apesar disso, nem sempre é fácil mostrar aos educandos aplicações práticas e realistas em sala de aula. Uma forma de mostrar a presença, por exemplo, da geometria, na vida prática, é observando os vários tipos de revestimentos existentes e os padrões geométricos que aparecem em suas composições. Com ela, é possível aplicarmos os conceitos matemáticos na criação de composições modulares de padronagens onde a dependência entre os elementos correlacionados é fundamental e precisa. Ela está presentes na natureza, na arquitetura e nas artes. O estudo das formas é um dos mais importantes ramos da Matemática. Explorando imagens, pode-se aprender a ler e explorar geometria.

A matemática, assim como a arte, procura elucidar e explicar as coisas do mundo. Através de suas formas, sua estrutura, ele pode ser traduzido e representado. (LOURO, 2008) nos diz que "no decorrer dos séculos os artistas (neste caso, pintores) constataram que a geometria era de vital importância na obtenção da perspectiva óptica, que lhe conferiam o efeito tridimensional (...)." Isso é tão comum, que facilmente encontramos situações em que as pinturas foram produzidas tendo como influência a matemática. A figura 14 é uma obra de Sandro Botticelle, pintada em 1483 e intitulada de "O nascimento de Vênus". Nela, além da concepção, o artista representa Afrodite tendo suas medidas com base na proporção áurea descrevendo assim a perfeição da beleza.

Figura 7 – O Nascimento de Vênus

FONTE:https://pt.wikipedia.org/wiki

Mosaico é um ornamento ilimitado no plano. A simetria fundamental é a translação em duas direções. Para compor um mosaico é necessária uma rede. Existem cinco tipos fundamentais de redes: quadrados, retângulos, paralelogramos, triângulos equiláteros e losangos. Combinando uma ou mais simetrias é possível obter outros tipos de mosaicos.

Ao tomar como exemplo a repetição de um polígono regular em torno de um ponto, sem sobreposição, à exceção da existência de lados comuns, e a sua representação no papel, que conduzirá os estudantes a perceber se esse polígono pode ou não ser usado para preencher o plano. A divisão regular de uma superfície é, segundo (ESCHER, 1994):

> A fonte mais rica de inspiração, de onde eu alguma vez bebi e ela não está ainda seca. Os desenhos simétricos aqui representados mostram como uma superfície pode ser dividida regularmente em figuras iguais, respetivamente, preenchida com elas. As figuras devem confinar umas com as outras sem que resultem áreas livres.(ESCHER, 1994, p. 9)

Pesquisando, os exemplos da matemática na arte são incontáveis, pois os artistas acreditavam que ao utilizarem os conceitos matemáticos poderiam tornar suas obras cada vez mais fiéis ao modelo original. Conforme (FLORES, 2007), temos que "isso levou os pintores ao estudo de técnicas que podiam servir de instrumento, ou melhor, de base para realizar a representação realista do indivíduo, do homem". Analisemos o cubismo, cuja inspiração se deu através da obra de Cézanne. Neste período as pinturas se caracterizavam por apresentar as três dimensões no mesmo plano, sem perspectiva, convertendo os elementos naturais em formas geométricas, predominando a linha reta. Proença (2005, p. 174) destaca que Cézanne procurou as linhas e as formas com que podia interpretar a natureza, buscando assim, representar o que não muda, o que permanece. Na figura 15 podemos ver uma pintura de 1924, no estilo cubista da artista brasileira, Tarsila do Amaral.

Figura 8 – Estação Central do Brasil

FONTE:http://virusdaarte.net/tarsila-estrada-de-ferro-central-do-brasil/

4.2 Histórico

Desde a Antiguidade a Matemática surgia associada à Arte. Sempre houve uma preocupação de estabelecer um ideal harmônico. Como descreve (MARTINHO, 1996), a "Arte e a Ciência caminharam juntas durante muitos séculos, não sendo difícil reconhecer que comportam um fator comum essencial: a criatividade como motor gerador de formas e ideias". O mundo matemático e o mundo da arte estão peculiarmente relacionados.

Observamos também, diversos outros momentos em que a Geometria foi empregada pelos povos considerados primitivos: na construção de objetos de decoração, de utensílios, de enfeites e na criação de desenhos para a pintura corporal. Formas geométricas, com grande riqueza e variedade, aparecem em cerâmicas, cestarias e pinturas de diversas culturas. Nestas manifestações artísticas já apareciam formas como triângulos, quadrados e círculos, além de outras mais complexas.

Em diferentes contextos, a matemática tem estado presente na pintura no passar do tempo. Segundo (SERINATO, 2007), "basta um olhar pela História da Arte para percebemos que a matemática está presente desde a pré-história até os dias de hoje, sendo utilizada por muitos artistas e como característica de vários movimentos artísticos".

Observa-se na Antiguidade que a arquitetura grega seguia normas rígidas de simetria e proporcionalidade, utilizando-se da matemática, na busca da harmonia das formas. Este pode ser o caso do Partenon, construído em torno do ano 440 a.C., com a utilização do retângulo áureo. Na pintura, normalmente aplicada sobre cerâmica, a Grécia Antiga passou por cinco estilos distintos. O mais antigo é o chamado estilo geométrico, e no qual eram possíveis ainda duas variantes: ou as peças eram decoradas apenas com figuras geométricas, como é o caso do jarro ateniense, ou havia a inserção de figuras humanas e de animais no interior de uma concepção geométrica. Este é o caso do Vaso de Dipylon, pertencente a um grupo de vasos usados como monumentos em túmulos.

Figura 9 – Vaso de Dipylon

FONTE:romodo7.blogspot.com

Já na arte romana antiga, uma das suas maiores contribuições encontra-se na arquitetura, campo este onde também percebemos muitos exemplos em que a utilização da geometria é visível. Com sua grande população, Roma precisava de prédios públicos e locais de lazer que abrigassem um maior número de pessoas, o que obrigou arquitetos e engenheiros a desenvolver "materiais mais baratos e métodos mais rápidos" (JANSON H.W. E JANSON, 2007) de construção. Dentre seus feitos encontram-se o aprimoramento das técnicas construtivas, notadamente geométricas, dos arcos e das abóbadas. Isto, aliado a utilização de uma espécie de concreto, permitiu que se cobrissem grandes áreas sem a necessidade de pilares internos, proporcionando amplos vãos livres. Com a ascensão do Cristianismo como religião oficial do Estado, na Idade Média, ocorreu um florescimento da arquitetura voltada para a construção de Igrejas. E é aqui que também vemos nítidas as contribuições da matemática na arte, com o uso mais habilidoso da construção com colunas e arcos.

Além disso, o mosaico, embora já presente nas atividades artísticas dos romanos, gregos e povos pré colombianos (maias e astecas), atingiu, neste período, sua mais perfeita realização. Com a função de propagar o novo credo, tendo em geral temas religiosos, a técnica consistia na colocação de pedras coloridas de formatos geométricos, lado a lado, sobre uma superfície, de acordo com um desenho pré-determinado. A seguir preenchia-se os espaços com uma solução de cal, areia e óleo, proporcionando um resultado semelhante à pintura. Contudo, foi no Renascimento que arte e ciência estiveram mais próximas, sendo que posteriormente estudiosos teorizaram esta relação. Em (ARGAN G E FAGIOLO, 1992), por exemplo, encontramos que a atividade artística sempre se confrontou com o campo da ciência e da técnica: o exemplo mais imediato é a maneira de trabalhar de Leonardo, que utiliza a arte como instrumento de conhecimento científico da natureza. (...). É Alberti quem põe o problema de uma arte como ciência, individualizando na matemática o terreno comum a artistas e cientistas: é Leonardo, com o seu experimentalismo, quem inicia a arte como investigação operativa. (ARGAN G E FAGIOLO, 1992)

Figura 10 – Mosaico Italiano

FONTE:www.mosaico.arq.br

A representação da realidade tridimensional em superfícies planas está presente nos desenhos do homem desde sempre, mas atingiu um marco importante no século XV com a descoberta da perspetiva. Pois bem, Escher decidiu explorar em profundidade as leis da perspetiva. Podemos mesmo dizer que algumas das suas obras mais conhecidas são talvez os Mundos impossíveis, em que ele desenhou figuras aparentemente tridimensionais mas impossíveis de serem construídas. Ele misturou o impossível com um cenário aparentemente real, traduzindo-se numa harmonia e estimulando a imaginação matemática. (SAMPAIO, 2012)

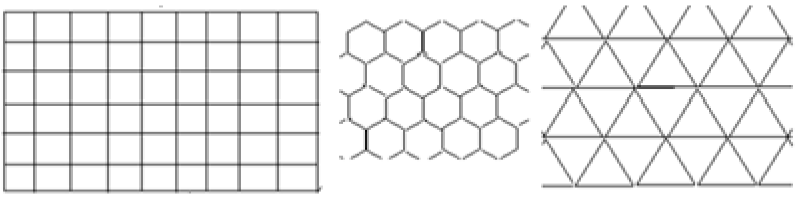
Adereços como os mosaicos são sinônimos de beleza e harmonia, e estão presentes em nossas vidas desde a antiguidade, isso pode ser observado em obras arquitetônicas, paramentos indígenas, revestimentos (pisos e azulejos), vitrais de igreja, artesanato, dentre outros. A partir deles é possível desenvolver a geometria plana e a simetria, estimulando a criatividade dos educandos.

Figura 11 – Peixes - Mosaico feito por Escher

FONTE:profmat12.blogspot.com

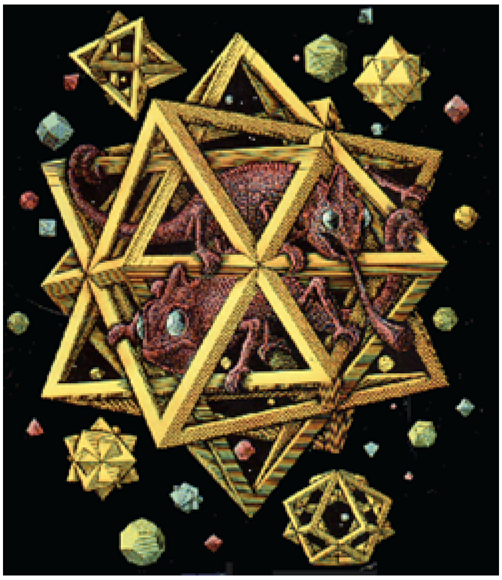
Pode-se ver ainda as formas elementares usadas como padrão para simetria. Percebemos na Matemática, que as únicas formas utilizadas são os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares, somente nelas é possível realizar divisões regulares do plano com estes três polígonos regulares.

Figura 12 – Mosaicos de figuras regulares



Um dos principais elementos matemáticos presentes na obra de Escher é a representação de poliedros regulares: o tetraedro (quatro faces triangulares regulares), o cubo (seis faces quadradas), o octaedro (oito faces triangulares regulares), o dodecaedro (doze faces pentagonais regulares) e o icosaedro (vinte faces triangulares regulares). Pode-se perceber nos três octaedros regulares no centro da obra intitulada Estrelas (1948) e os inúmeros poliedros regulares simples, duplos ou triplos que pairam no ar, quase flutuando como estrelas, daí o uso do fundo negro, para anunciar uma noite estrelada.

Figura 13 – Estrelas



FONTE:http://artecomentada.blogspot.com.br/

O uso de cores contrastantes para colorir o preenchimento de superfícies de uma forma sistemática é essencial para acentuar a individualidade dos motivos adjacentes. Para ele o uso da cor é imprescindível, assim como para (DONDIS, 1997):

As cores são cheias de informações e é uma das experiências visuais mais intensas que todos temos em comum. Portanto, constitui uma valiosíssima fonte de comunicações visuais. (...) Também conhecemos a cor englobada numa ampla categoria de significados simbólicos. (...) Cada cor tem numerosos significados associativos e simbólicos. Por exemplo, a cor oferece-nos um enorme vocabulário de grande utilidade no alfabeto visual. (...) Há três cores primárias ou elementares: amarelo, vermelho, azul. Cada uma representa qualidades fundamentais. O amarelo é a cor que se considera mais próxima da luz e do calor; o vermelho é a mais emotiva e ativa; o azul é passivo e suave.

De acordo com (ARNHEIM, 2002), nos últimos anos, o pensamento visual surpreendentemente se propaga como uma forma de conhecimento. Para este autor o conhecimento não ocorre somente de forma verbal, ou pensamento, mas também, através da percepção e raciocínio visual, que, embora estejam em posições diferenciadas, são necessários um ao outro.

> A percepção e o pensamento precisam um do outro. Completam mutuamente suas funções. Supõe-se que a tarefa da percepção se limite a reunir a matéria-prima necessária ao conhecimento. Uma vez que o material tenha sido agrupado, o pensamento entra em cena, num nível cognitivo supostamente superior, e faz o processamento. A percepção seria inútil sem o pensamento; este, sem a percepção, não teria nada sobre o que pensar. (ARNHEIM, 2002)

Para Escher, essa forma é vantajosa no momento de pensar, quando o lograr das suas obras, ao compreendê-las, apreende as propriedades matemáticas que estão aí implícitas. A forma geométrica dodecaedro foi utilizada por Escher para compor a obra “Ordem e caos”.

Ordem e caos, litografia, 1950, 28 x 28 cm. No centro, colocou-se um dodecaedro em estrela, cercado por uma esfera transparente, como uma bola de sabão. Neste símbolo da ordem e da beleza, espelha-se o caos: uma aglomeração heterogênea de toda a espécie de coisas inúteis, estragadas e amarrotadas. (ESCHER, 1994).

Da mesma forma que as ideias de Einstein mudaram as formas de pensamento sobre o tempo e o espaço, o caos pode trazer à vida de um ser humano tendências à redução do conhecimento. A obra “Ordem e caos”, como um perfeito cristal, sugere no centro, a ordem do pensamento, da vida, da observação, etc.; à volta há representadas coisas indiferentes, verdadeiros entulhos. Mais que um contraste formal, há, portanto, um contraste social. É possível que Escher tendesse a transmitir uma aparente ordem e beleza do mundo, e criticou a aglomeração heterogênea de coisas, amarrotadas e estragadas, que o homem insiste em deixá-las ao seu redor.

Figura 14 – Ordem e caos

FONTE:http://instabilidadesveladas.blogspot.com.br/

A arte, por mobilizar sentidos e capacidades essenciais para o desenvolvimento humano, como criatividade, imaginação, observação, etc., constitui uma faceta essencial para o aproveitamento do aluno nas demais disciplinas.

Didaticamente falando, pensar em conexões nas aulas de matemática significa assumir que os alunos aprendem tecer os significados, o que acontece quando podem estabelecer relações entre uma noção, conceito ou procedimento matemático, com outra noção, conceito ou procedimento em matemática.

4.3 Maurits Cornelis Escher

Figura 15 – Escher em Roma, Itália - 1930

FONTE:www.mcescher.com

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) é um dos artistas gráficos mais famosos do mundo. Sua arte é apreciada por milhões de pessoas em todo o mundo.

Ele nasceu em Leeuwarden, Holanda, como o quarto e mais jovem filho de um engenheiro civil. Após 5 anos, a família mudou-se para Arnhem onde Escher passou a maior parte de sua juventude. Depois de fracassar nos exames do ensino médio, Maurits em última análise, foi matriculado na Escola de Arquitetura e Artes Decorativas em Haarlem.

Depois de apenas uma semana, informou seu pai que preferia estudar arte gráfica em vez de arquitetura, como ele tinha mostrado seus desenhos e cortes de linóleo ao seu professor gráfico Samuel Jessurun de Mesquita, que o encorajou a continuar com artes gráficas.

Depois de terminar a escola, ele viajou pela Itália, onde conheceu sua esposa Jetta Umiker, com quem se casou em 1924. Eles se estabeleceram em Roma, onde permaneceu até 1935. Durante estes 11 anos, Escher iria viajar a cada ano em toda a Itália, se inspirando para criar desenhos e esboço para as várias impressões que ele faria ao voltar para casa.

Escher, que tinha sido obrigado a se mudar para a Suiça, por questões políticas, retorna para a Itália anos mais tarde. Muito afeiçoado e inspirado pelas paisagens da Itália, era decididamente infeliz na Suíça. Em 1937, a família mudou-se novamente, para Uccle, um subúrbio de Bruxelas, na Bélgica. A Segunda Guerra Mundial os obrigou a se mudar em janeiro de 1941, desta vez para Baarn, Países Baixos, onde Escher viveu até

1970. O tempo às vezes nublado, frio e úmido dos Países Baixos lhe permitiu concentrar intensamente em seu trabalho. Por um tempo após ter sido operado, o ano de 1962 foi o único período em que Escher não trabalhou em novas peças.

Maurits Cornelis Escher morreu no Hospital Hilversum quando ainda não tinha completado 74 anos.

Ele é mais famoso por suas chamadas construções impossíveis, como o Ascendente e Descendente, Relatividade, suas gravuras de transformação, tais como Metamorfose I, Metamorfose II e Metamorfose III, Céu e Água I ou Répteis.

Figura 16 – Metamorfose I

FONTE:www.mcescher.com

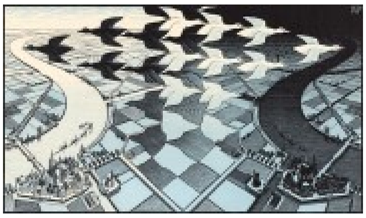
Figura 17 – Relatividade

FONTE:www.mcescher.com

Figura 18 – Ascendentes e Descendentes

FONTE:www.mcescher.com

Figura 19 – Céu e Água I



FONTE:www.mcescher.com

Uma das principais contribuições da obra deste artista está em sua capacidade de gerar imagens com efeitos de ilusões de ótica.

Escher ficou fascinado pela divisão regular do plano, quando ele primeiro visitou o Alhambra, um castelo mouro do século quatorze em Granada, Espanha, em 1922. Achou muito interessante as formas como cada figura se entrelaçava a outra e se repetia, formando belos padrões geométricos. Este foi o ponto de partida para os seus trabalhos mais famosos, que consistiam no preenchimento regular do plano, normalmente utilizando imagens geométricas e não figurativas, como os árabes faziam por causa da sua religião muçulmana, que proíbe tais representações.

A partir de uma malha de polígonos, regulares ou não, Escher fazia mudanças, mas sem alterar a área do polígono original. Assim surgiam figuras de homens, peixes, aves, lagartos, todos envolvidos de tal forma que nenhum poderia mais se mexer. Tudo representado num plano bidimensional. Escher brincava com o fato de ter que representar o espaço, que é tridimensional, num plano bidimensional, como a folha de papel. Com isto ele criava figuras impossíveis, representações distorcidas e paradoxais. Posteriormente foi considerado um grande matemático geométrico. Escher utilizou quatro tipos de transformações geométricas que são: translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes.

Castrovalva, por exemplo, onde já se pode ver a fascinação de Escher em alta e baixa, perto e longe. A litografia Atrani, uma pequena cidade na Costa Amalfitana foi feita em 1931, mas volta por exemplo, em sua obra-prima Metamorphosis I e II . Escher, durante sua vida, fez 448 litografias, xilogravuras e gravuras de madeira e mais de 2000 desenhos e esboços. Como alguns dos seus antecessores famosos, - Michelangelo, Leonardo da Vinci, Dürer e Holbein -, Escher era canhoto.

Muitos destes esboços que ele iria usar mais tarde para várias outras litografias e/ou xilogravuras e gravuras de madeira, por exemplo, o plano de fundo na litografia Cachoeira decorre de sua período italiano, nem as árvores, refletindo na xilogravura Puddle, que são as mesmas árvores Escher usados em sua xilogravura "Pineta de Calvi ", o que ele fez em 1932.

Durante os anos na Suíça e em toda a Segunda Guerra Mundial, ele vigorosamente perseguidos seu hobby, desenhando 62 do total de 137. Desenhos de divisão regular que ele iria fazer em sua vida. Ele iria alargar a sua paixão para a divisão regular do plano, usando alguns de seus desenhos como base para mais um passatempo, esculpir esferas de madeira de faia.

Escher jogou com a arquitetura, perspectiva e espaços impossíveis. Sua arte continua a surpreender milhões de pessoas em todo o mundo. Em seu trabalho, reconhecer a sua observação afiada do mundo que nos rodeia e as expressões de suas próprias fantasias. Escher mostra que a realidade é maravilhoso, compreensível e fascinante.

5 METODOLOGIA

Neste caso específico, serão aplicadas oficinas utilizando problemas envolvendo análise combinatória. Nestas oficinas serão abordadas técnicas de resolução de problemas. De maneira complementar, serão utilizadas obras de arte e cultura regional como formas de mediação e contextualização.

Baseados em todas as orientações citadas no referencial teórico, a aplicação do projeto "Análise Combinatória: Uma Abordagem Através da Resolução de Problemas" será feita seguindo os métodos estudados para um melhor entendimento do aluno.

Esta aplicação contará com 14 (catorze) oficinas distribuídas nas aulas semanais de Matemática de uma turma do 2º ano "D" matutino do Ensino Médio do Colégio Estadual Mimoso do Oeste, na cidade de Luis Eduardo Magalhães – BA, com 40 alunos na faixa etária média de 15 anos, sendo provenientes de diversos bairros e de diferentes condições econômicas, com uma variedade grande de origem cultural, devido à realidade do município. O período de aplicação será entre fevereiro e março de 2016, com duração de aproximadamente 04 (quatro) semanas. Como início da aplicação, será dado um questionário para levantamento de dados em relação ao estudo da Matemática de forma geral. Ao final da aplicação, será aplicado novamente um questionário para que seja analisado o aprendizado com o método As atividades elaboradas e desenvolvidas em sala de aula estão apresentadas a seguir. Os questionários aplicados antes e após o término da totalidade das oficinas estão nos apêndices 1 e 2.

5.0.1 Desenvolvimento das Oficinas

O método utilizado será baseado no roteiro de atividades destinado à orientação de professores para a condução de suas aulas usado pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), desenvolvido por Lourdes de La Rosa Onuchic. (ONUCHIC L. R.; ALLEVATO, 2009).

1) Preparação do problema: selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. No caso será abordado um conteúdo já visto pelos alunos anteriormente.

2) Leitura individual: entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto: formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos:

- se houver dificuldade na leitura do texto, o professor irá auxiliar os alunos, lendo e levando-os a interpretar o problema;

• se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. O Professor deverá orientar seus alunos uma forma de esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se consultar um dicionário.

4) Resolução do problema: de posse do problema, com as dúvidas já sanadas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores do conteúdo que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, os conduzirá na construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5) Observar e incentivar: nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto buscam resolver o problema, os alunos, em grupos, serão observados e analisados pelo professor, que estimulará o trabalho colaborativo, pois, como mediador, leva-os a pensar, dando-lhes tempo para isso, e incentiva a troca de ideias.

6) Registro das resoluções no quadro: representantes dos grupos são convidados a registrar, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam sobre elas.

7) Plenária: para esta etapa, todos os alunos são convidados a discutir as diferentes resoluções registradas pelos colegas, para defender seus pontos de vista e esclarecer suas dúvidas. O professor coloca-se como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Esse é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca de consenso: após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor incentiva toda a classe a chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo: neste momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática –, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos por meio da resolução do problema, de modo a destacar as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto (ONUCHIC, 2008, p. 83-85).

A metodologia de aplicação se baseia, também, na Teoria das Quatro Cores de Guthrie. São problemas que envolvem mosaicos, figuras planas e questões com contexto cotidiano inclusive um mosaico de Escher com figuras de pássaros.

5.0.2 Atividades para Aplicação

Oficina 1: Problemas

1. Questionário pré-aplicação (Apêndice A)

2. É possível colorir estas regiões do mapa utilizando apenas quatro cores, mas respeitando a condição de que regiões que possuem linhas de fronteiras comuns tenham cores diferentes?

3. O conceito usado para este caso pode ser estendido a outros mapas?

4. Quantas seriam as possibilidades de pintar o mapa escolhendo apenas quatro cores dentre as cores que você dispõe, sendo que a cor que for escolhida não pode ser repetida?

Figura 20 – Mapa das Regiões do Estado da Bahia

FONTE:www.bahia.ws

Oficina 2: Relato

Descreva como você fez para escolher as cores para preencher o mapa.

Cores quentes e frias são cores que transmitem a sensação de calor ou de frio. Exemplos de cores quentes são o vermelho e laranja e de cores frias o azul e o verde.

As cores quentes e frias são muitas vezes usadas para causar sensações diferentes nas pessoas que as visualizam. Vários estudos comprovam que as cores têm um efeito psicológico nas pessoas e por esse motivo, diferentes cores são usadas para despertar sentimentos e estados de espírito.

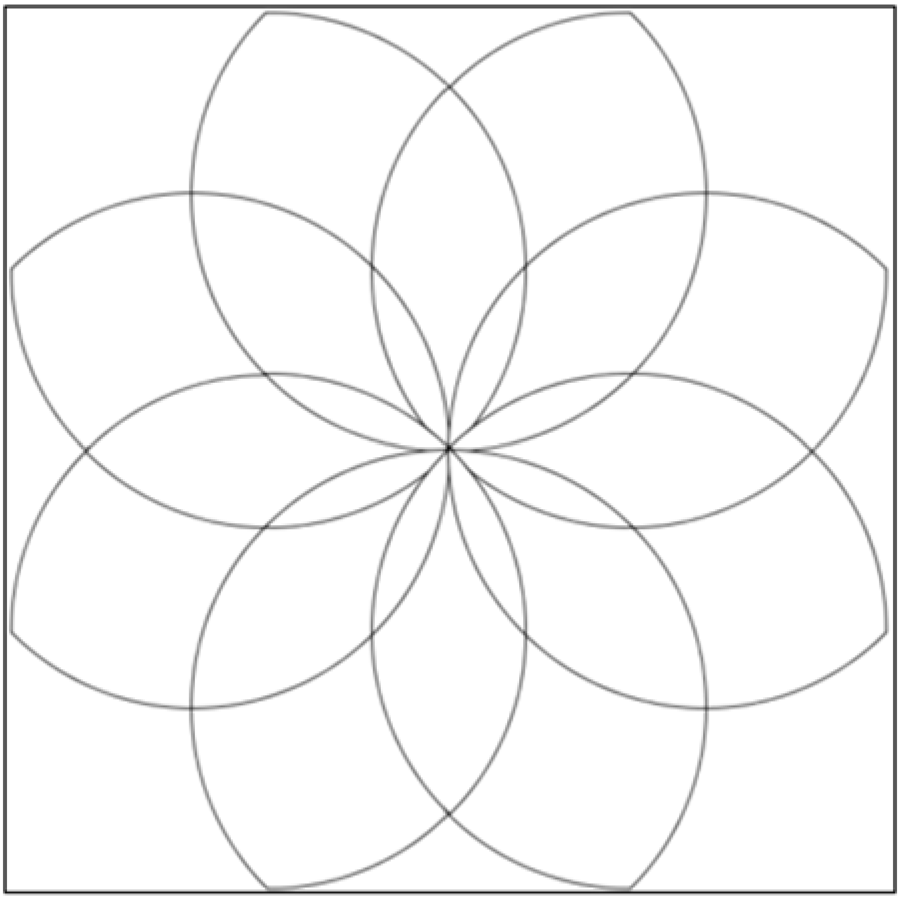
Figura 21 – Tabela de cores quentes e frias

Oficina 3: Problemas

5. As cores quentes são associadas ao sol e ao fogo: amarelo, laranja e vermelho. São aquelas que nos transmitem a sensação de calor. As cores frias são associadas à água, ao gelo, ao céu, e às arvores: violeta, azul e verde. São aquelas que nos transmitem a sensação de frio.

6. É possível colorir este mosaico utilizando apenas quatro cores escolhendo entre as cores quentes, mas respeitando a condição de que regiões que possuem linhas de fronteiras comuns tenham cores diferentes? Quantas seriam as possibilidades de pintar o mosaico escolhendo apenas quatro cores dentre as cores que você dispõe, sendo que a cor que for escolhida não pode ser repetida?

Figura 22 – Mosaico Flor



FONTE:Copyright 2009 http://scrapcoloring.com

Oficina 4: Relato

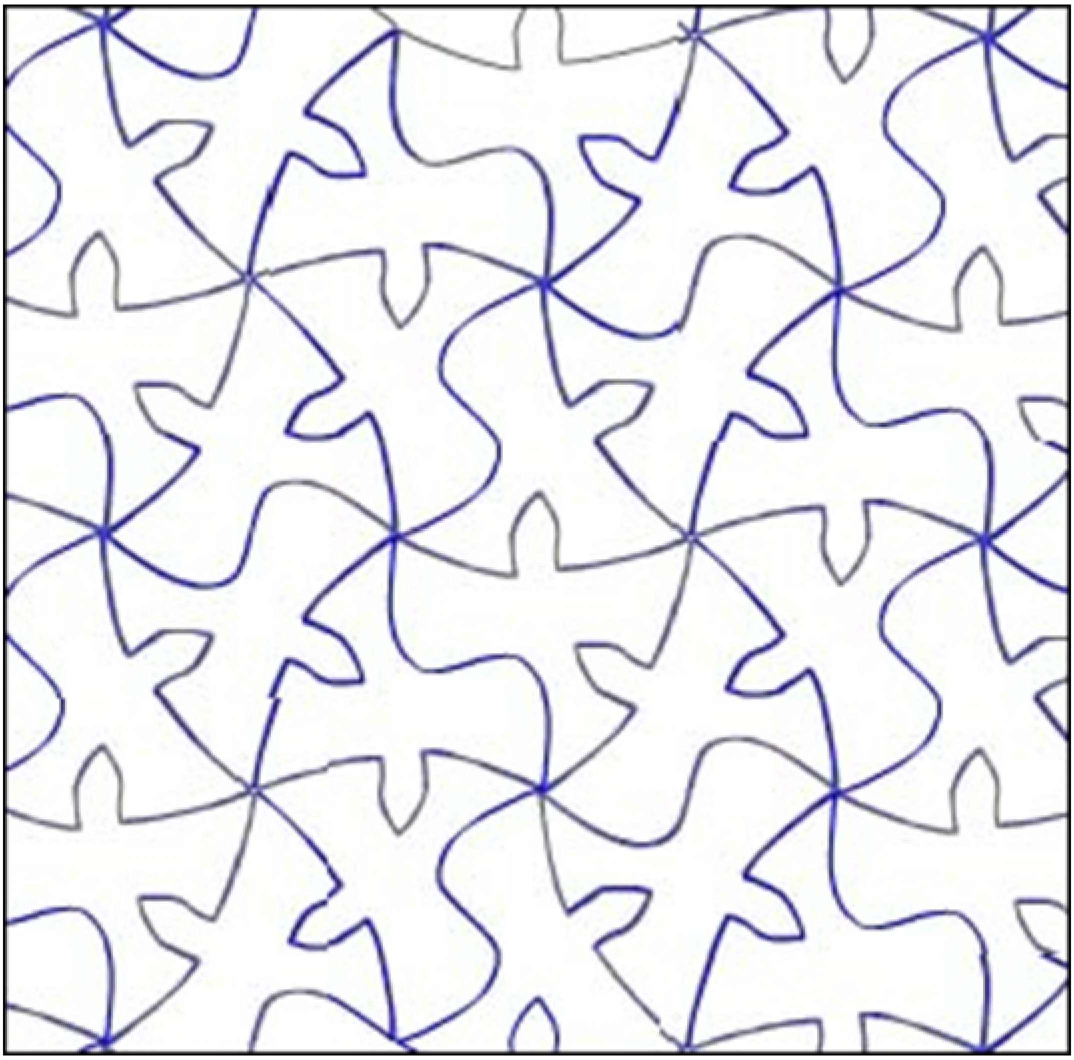
Descreva como você fez para escolher 4 cores dentre as cores quentes para colorir o mosaico.

Oficina 5: Problemas

7. As cores quentes são associadas ao sol e ao fogo: amarelo, laranja e vermelho. São aquelas que nos transmitem a sensação de calor. As cores frias são associadas à água, ao gelo, ao céu, e às arvores: violeta, azul e verde. São aquelas que nos transmitem a sensação de frio.

8. É possível colorir este mosaico utilizando apenas quatro cores escolhendo entre as cores frias, mas respeitando a condição de que regiões que possuem linhas de fronteiras comuns tenham cores diferentes? 9. Quantas seriam as possibilidades de pintar o mosaico escolhendo apenas quatro cores dentre as cores que você dispõe, sendo que a cor que for escolhida não pode ser repetida?

Figura 23 – Mosaico de Escher



FONTE:http://www.acorral.es/deriva/hpracticas3.htm

Oficina 6: Relato

Descreva como você fez para escolher 4 cores dentre as cores frias para colorir o mosaico.

Oficina 7: Problemas

10. Temos aqui um mosaico formado por figuras geométricas. As cores quentes, são associadas ao sol e ao fogo: amarelo, laranja e vermelho. São aquelas que nos transmitem a sensação de calor. As cores frias, são associadas à água, ao gelo, ao céu, e às arvores: violeta, azul e verde. São aquelas que nos transmitem a sensação de frio.

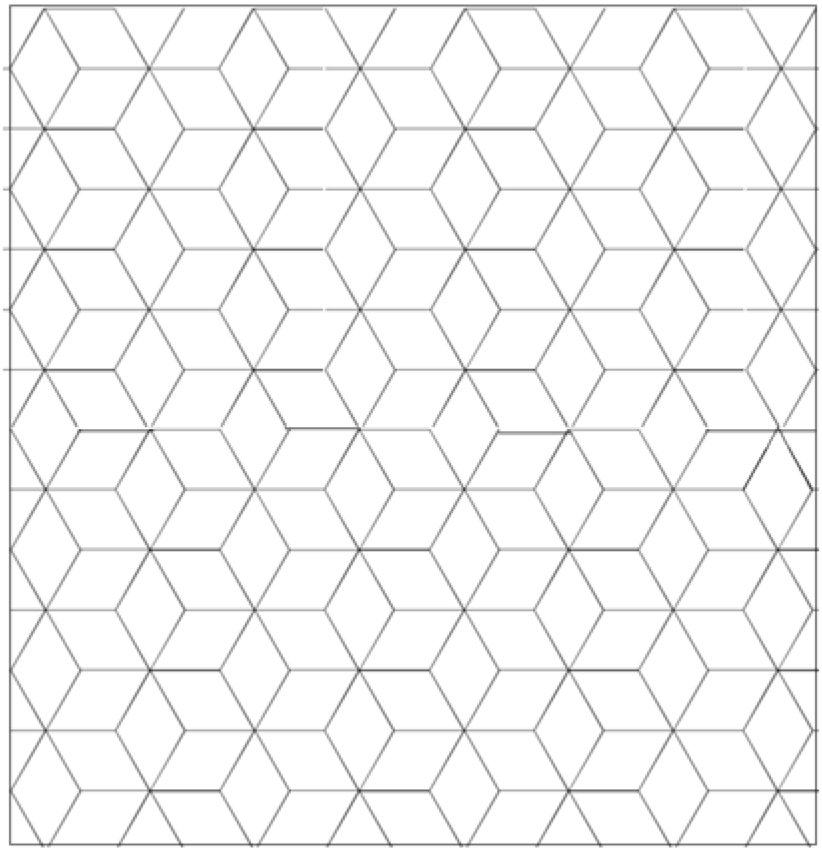
11. É possível colorir este mosaico utilizando apenas quatro cores escolhendo entre as cores quentes e frias, mas respeitando a condição de que regiões que possuem linhas de fronteiras comuns tenham cores diferentes? Quantas seriam as possibilidades de pintar o mosaico escolhendo apenas quatro cores dentre as cores que você dispõe, sendo que a cor

que for escolhida não pode ser repetida?

12. Identifique quantas figuras geométricas formam esse mosaico.

13. Você sabe identificar o nome dessas figuras? Cite os nomes.

Figura 24 – Mosaico Geométrico



Oficina 9: Relato

Descreva como você fez para escolher 4 cores dentre as cores quentes e frias para colorir o mosaico. Ficou mais fácil escolher as cores? Por quê?

Oficina 10: Problemas

14. A cerimônia, marcada para 28 de fevereiro de 2016, será realizada no Teatro Dolby, em Los Angeles, Califórnia e será transmitida ao vivo pela emissora de televisão estadunidense ABC e com sinal que chegará a outras emissoras de outros países. O anfitrião será o comediante Chris Rock, que já havia sido na cerimônia de 2005. As indicações para melhor filme, são:

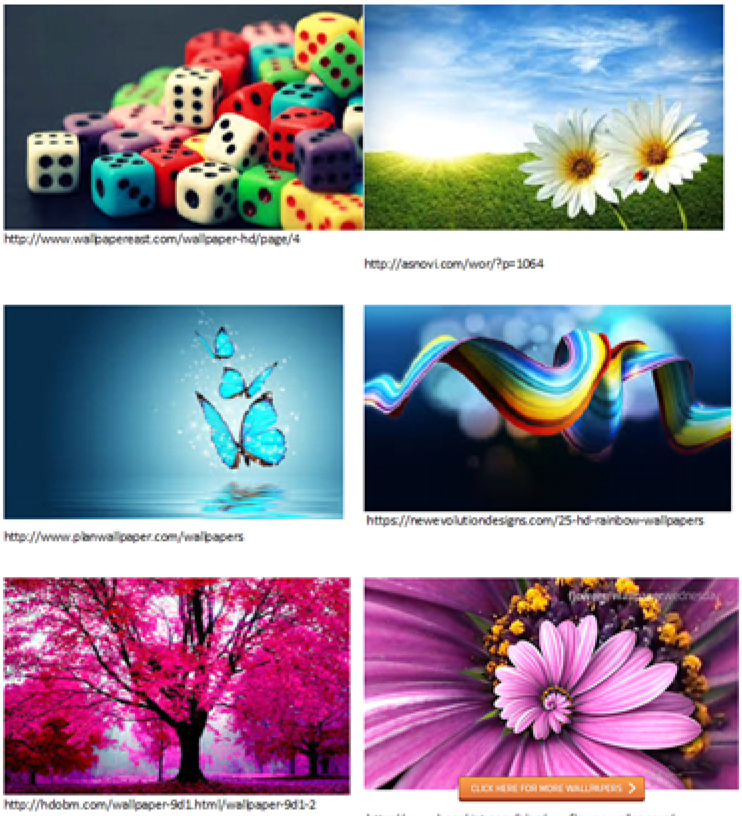
Figura 25 – Títulos dos Filmes indicados ao Oscar 2016

FONTE:https://pt.wikipedia.org/wiki/Oscar$_2$016

15. Se você pudesse escolher para premiar dois desses filmes que concorrem à estatueta de melhor filme, de quantas maneiras diferentes sua escolha poderia ser feita?

A possibilidade de consultar e pesquisar em quase todas as áreas do conhecimento humano é uma das melhores utilizações da Internet. Mas também a internet é muito utilizada para diversão e lazer: através de bate – papo e para baixar músicas e wallpapers (papéis de parede para a área de trabalho do computador). Uma pessoa estava pesquisando em um site e achou vários wallpapers interessantes. Gostou de seis deles (veja abaixo), porém resolveu que iria baixar apenas três. De quantas maneiras diferentes esta pessoa pode escolher estes três?

Figura 26 – Wallpapers



16. Analise o quadro abaixo e responda:

Figura 27 – Dados dos visitantes de Museus

MAIS DINHEIRO PARA OS MUSEUS

Museu do Ipiranga: o mais visitado do país

O governo acha que os museus nacionais têm pouco público. Para aumentar as visitas, dobrou o orçamento dessas instituições para 43 milhões de reais. O Brasil está na contramão do mundo. No exterior, os museus têm cada vez menos recursos oficiais e mais dinheiro privado

NÚMERO DE VISITANTES POR ANO	
Louvre, Paris	6 milhões
Metropolitan, Nova York	5 milhões
British Museum, Londres	5 milhões
MoMA, Nova York	3 milhões
Prado, Madri	2 milhões

NÚMERO DE VISITANTES POR ANO	
Ipiranga, São Paulo	350 000
Imperial, Petrópolis	270 000
Masp, São Paulo	230 000
MAM, São Paulo	210 000
Inconfidência, Ouro Preto	100 000

Fontes: Ministério da Cultura e museus

FONTE:revista Veja, 23/02/2005

Uma pessoa que gosta muito de arte resolveu visitar vários museus no Brasil e pelo mundo. Decidiu que primeiramente iria a 3 museus nacionais (dentre os da figura acima) e 2 museus fora do Brasil, dos que aparecem no quadro. De quantas maneiras diferentes ela pode escolher os 5 museus que quer conhecer?

Oficina 11: Relato

Como você fez para resolver os problemas apresentados? Descreva seu passo a passo:

Oficina 12: Discussão

Cada grupo relatará como resolveu as atividades. Conduzir a um senso comum.

Oficina 13: Reformulação do conteúdo no quadro

Depois da discussão, chegar às fórmulas e teoria do conteúdo apresentado

Oficina 14: Questionário pós (Apêndice B)

6 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este trabalho teve como objetivo principal mostrar quão eficaz se apresenta o ensino da Análise Combinatória através do princípio fundamental da contagem, utilizando a metodologia da resolução de problemas como ponto de partida junto aos alunos do segundo ano do Ensino Médio. Esses alunos ainda não tiveram contato direto com o conteúdo de Análise Combinatória, o que, a princípio, é o ideal, pois o aluno encontra seu próprio caminho para a resolução dos problemas apresentados no decorrer das oficinas. Os meios encontrados por eles não são convencionais, baseados em fórmulas prontas, cada um trilha a sua forma de resolver, podendo chegar ou não no resultado esperado.

A hipótese levantada no início da pesquisa foi a de que alunos que aprendem os conceitos de análise combinatória quase que exclusivamente pela metodologia de fórmulas, tem maior dificuldade de resolver problemas de contagem com segurança e muitas vezes não apresentam um raciocínio combinatório satisfatório para solucionar tais questões. Logo, esta pesquisa procurou mostrar que questões do conteúdo abordado acima podem ser resolvidas, quase que exclusivamente, pelo princípio multiplicativo.

A aplicação do projeto teve início com o preenchimento de um questionário para levantamento de dados antes da aplicação, que tem como objetivo investigar o interesse do aluno em aprender matemática, bem como, se este tem argumentação matemática para entender com maior facilidade os conteúdos que lhe são apresentados.

Notou-se que, durante a aplicação das atividades da pesquisa de campo, quanto mais facilidade e domínio matemático o aluno apresenta, mais tranquilidade ele tem para resolver problemas de combinatória empregando apenas conhecimentos do princípio fundamental da contagem.

Também se pode notar que alguns alunos tiveram dificuldade em entender sobre o que se tratava e encaminhar-se para a solução do problema. Diante disso, foi necessária a intervenção para orientar na direção que precisavam para solucionar problemas. Mesmo assim, anda foi preciso um auxilio a um aluno com necessidades especiais leves, para que conseguisse realizar a atividade dentro dos limites pessoais, mas com coerência ao que se pedia.

Com essa intervenção ao aluno especial, também ficou claro que atividades com determinada ludicidade facilitam o entendimento desses alunos. Mesmo tendo uma certa limitação, ele conseguiu acompanhar o raciocínio das atividades propostas, porém dentro de seu tempo.

No geral, o resultado foi bom. Ao fazer os relatos de cada grupo, pode-se notar que eles perceberam as possibilidades de interligação com outras disciplinas, como Arte (desenhos e cores), Geografia (mapa, bandeira), Geometria (figuras planas) e Língua Portuguesa (interpretação).

Utilizar as cores quentes e frias para a resolução das atividades, também foi um desafio. Ao terem que escolher apenas quatro cores, baseadas na teoria de Guthrie, dentre as cores quentes ou frias, as possibilidades de combinação ficaram baixas, mas o desafio era grande. Ao modificar a atividade onde pede-se para usar tanto cores quentes como frias, os resultados foram mais visíveis, as possibilidades ficaram maiores e a combinação de cores, distinta.

A Resolução de Problema além de outras potencialidades pode colaborar para diminuir a aversão dos alunos em relação a esta disciplina. Constata-se a real necessidade de situações problemas na rotina escolar, bem como, a compreensão desta metodologia por parte dos professores. A Resolução de Problemas viabiliza o processo de ensino e aprendizagem. Esta abordagem valoriza as práticas pedagógicas favorecendo o rendimento escolar e contribuindo para com as questões disciplinares.

Concluiu-se que para poder trabalhar de forma que o aluno compreenda melhor e internalize o conteúdo proposto, uma das maneiras que torna isso viável é através da Metodologia da Resolução de Problemas, onde o aluno é quem protagoniza sua própria descoberta, buscando por meio de seus conhecimentos prévios e de seu raciocínio lógico solucionar o problema apresentado.

Fazendo uma análise do problema e comparando-o a situações pré-existentes de seu cotidiano, o aluno consegue encontrar uma saída, ou mais, para o desafio dado. Quando se faz essa associação, fica mais fácil absorver e entender a aplicabilidade de conteúdos que são, muitas vezes, ignorados tanto pelos professores como pelos alunos, não percebendo sua utilização e seu valor fora da sala de aula.

Quando essa relação da matemática com o que é real acontece, muda o sentido e a importância que são dados àquele conteúdo trabalhado. Consegue-se melhores resultados dessa maneira porque a matemática deixa de ser abstrata e passa a ter sentido e aplicação.

A que se pode atribuir esses bons resultados? Atribui-se ao fato de o aluno raciocinar sozinho sem "muletas", conseguindo compreender o sentido real do problema e, com isso, solucioná-lo por seus próprios meios. Tendo esse entendimento sido realizado, podem-se introduzir fórmulas que já não serão "muletas", mas serão ferramentas auxiliares para a resolução do problema. Assim, entende-se que o resultado final da aprendizagem tem significado para o aluno.

O esperado nesta pesquisa não era simplesmente mostrar como podem ser apresentados os conceitos da Análise Combinatória através de outra abordagem pedagógica, mas mostrar que essa metodologia de ensino pode trazer aos alunos um desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático melhor. Fazer com que o aluno chegue a um resultado correto não é o mais importante. O que realmente é significante é verificar que, com o auxílio da ferramenta de resolução de problemas, o discente se torna capaz de analisar, criticar e defender suas ideias até que ele consiga, por si só, compreender que sua solução está correta ou não. E ainda, mesmo chegando a resultados equivocados, ele é capaz de analisar seus erros e iniciar uma nova investigação para encontrar a solução correta dos problemas.

6.0.3 Resultado das Oficinas

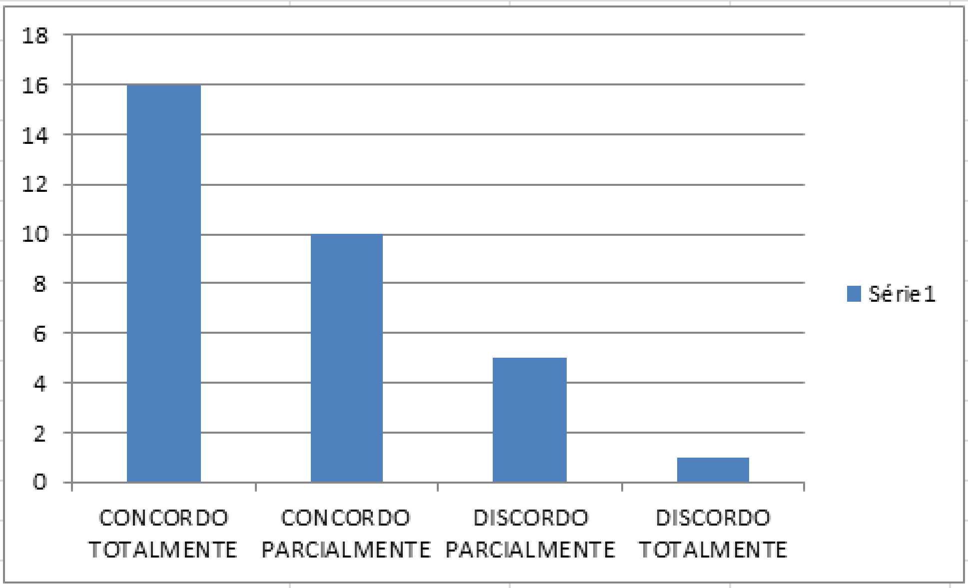
Oficina 1:

Aplicação do questionário pré-aplicação (apêndice A). Durante aplicação do questionário, alguns alunos tiveram dificuldade para entender como deveriam preencher, fazendo com que se perceba a falta de experiência com situações semelhantes. Foi preciso orientá-los para conseguirem concluir o questionário.

Análise do Questionário Pré Aplicação

Figura 28 – Questão 1

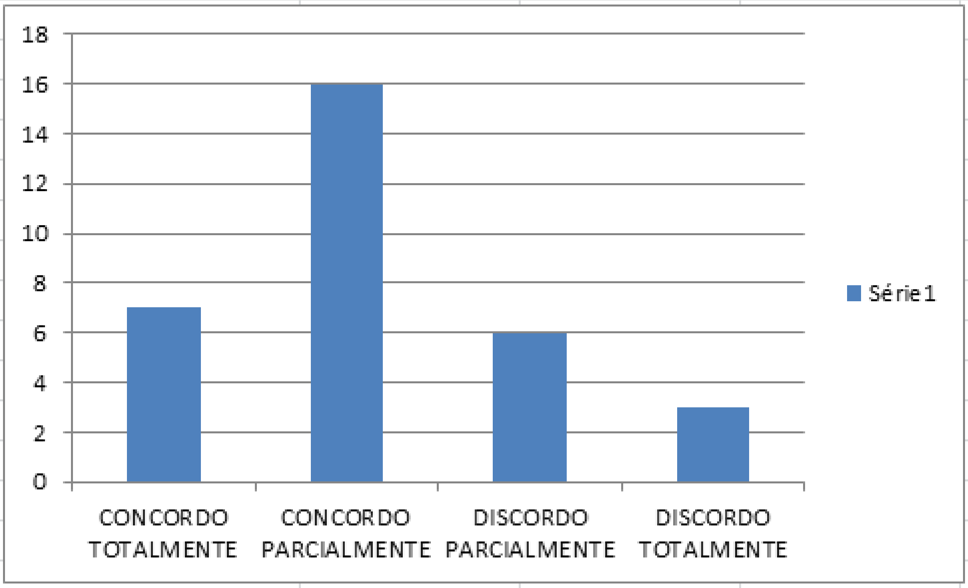
	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
1. Eu gosto de estudar Matemática.	16	10	5	1



Pode-se perceber que a maioria gosta de estudar matemática.

Figura 29 – Questão 2

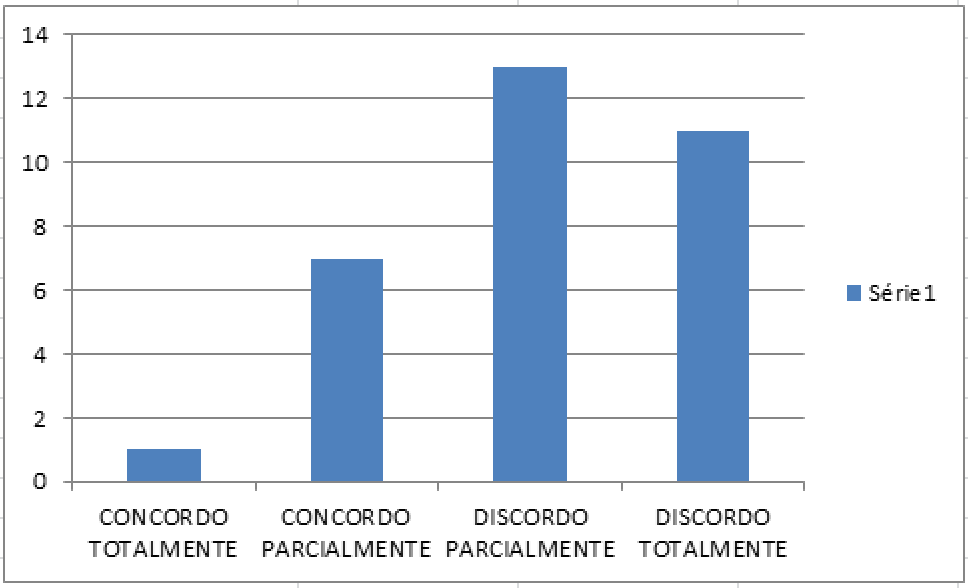
	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
2. Eu tenho dificuldades em aprender Matemática.	7	16	6	3



Também observa-se que os alunos tem uma certa dificuldade em entender e aprender matemática.

Figura 30 – Questão 3

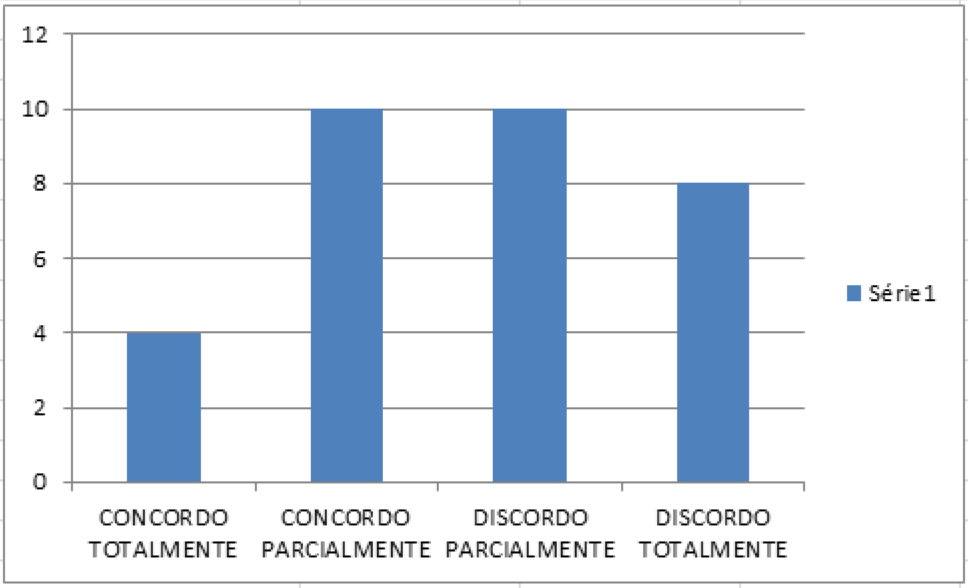
	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
3. Eu NÃO gosto da maneira como se ensina Matemática.	1	7	13	11



Observou-se que a maioria concorda com a forma que se ensina matemática hoje nas salas de aula.

Figura 31 – Questão 4

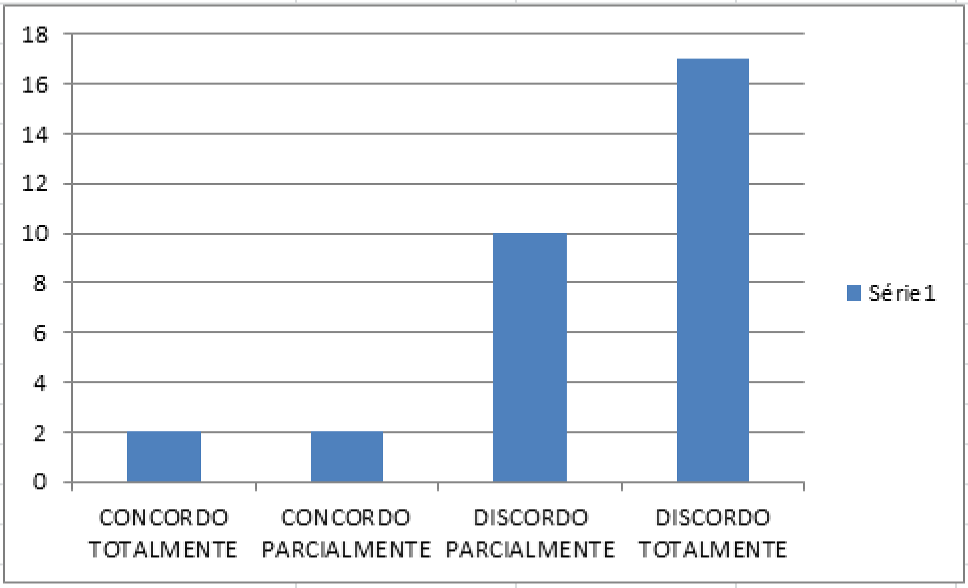
	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
4. Eu estudo Matemática em casa.	4	10	10	8



Aqui pode-se perceber que há um equilíbrio entre os alunos que estudam em casa e os que não tem o mesmo hábito.

Figura 32 – Questão 5

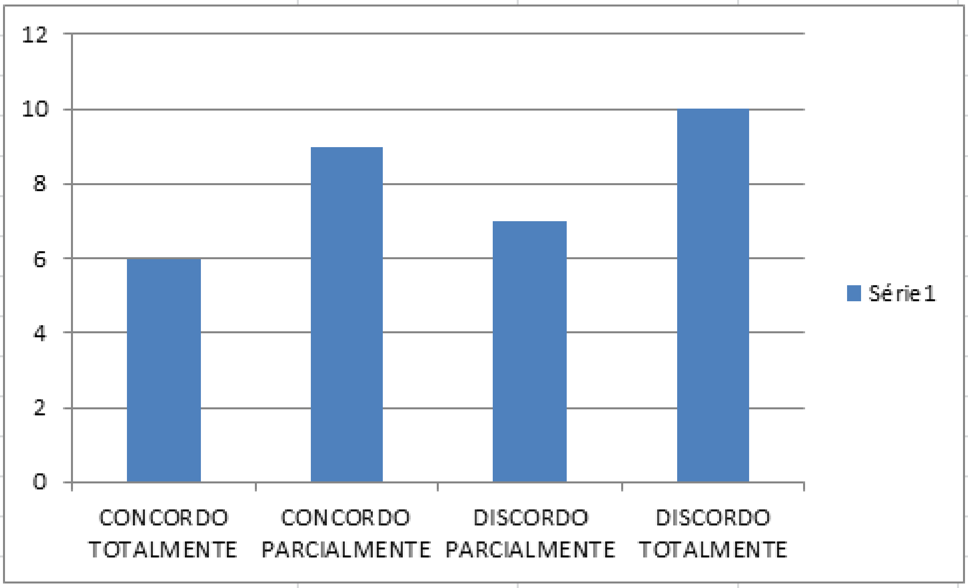
	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
5. Eu NUNCA gostei de Matemática, me dá medo.	2	2	10	17



Outro ponto que se observa é que os alunos em sua maioria gostam de matemática e não tem medo dela.

Figura 33 – Questão 6

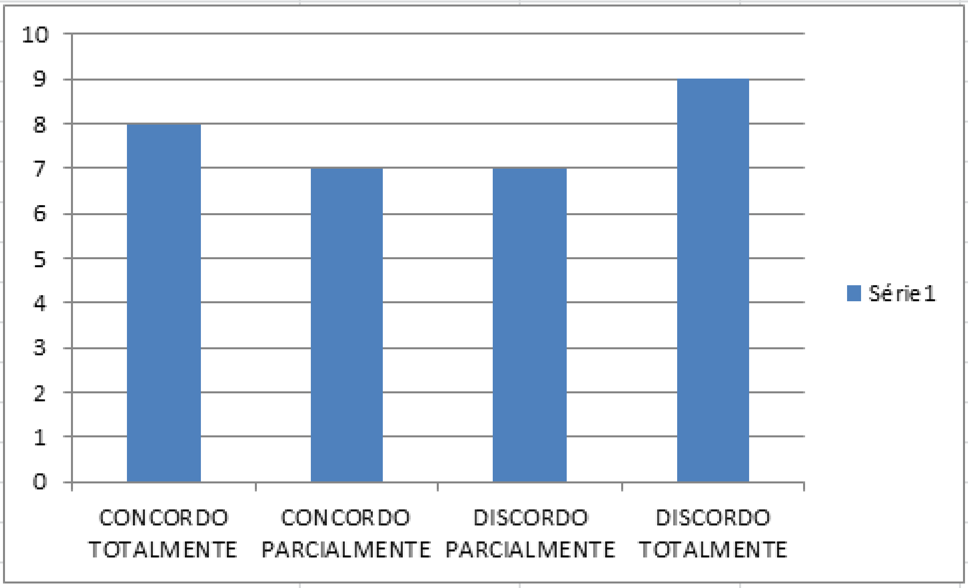
	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
6. Eu tenho dificuldades em entender as explicações do professor.	6	9	7	10



Com uma diferença muito pequena, mas importante, percebe-se que a forma como o professor ensina matemática faz com que a maioria consiga entender as explicações.

Figura 34 – Questão 7

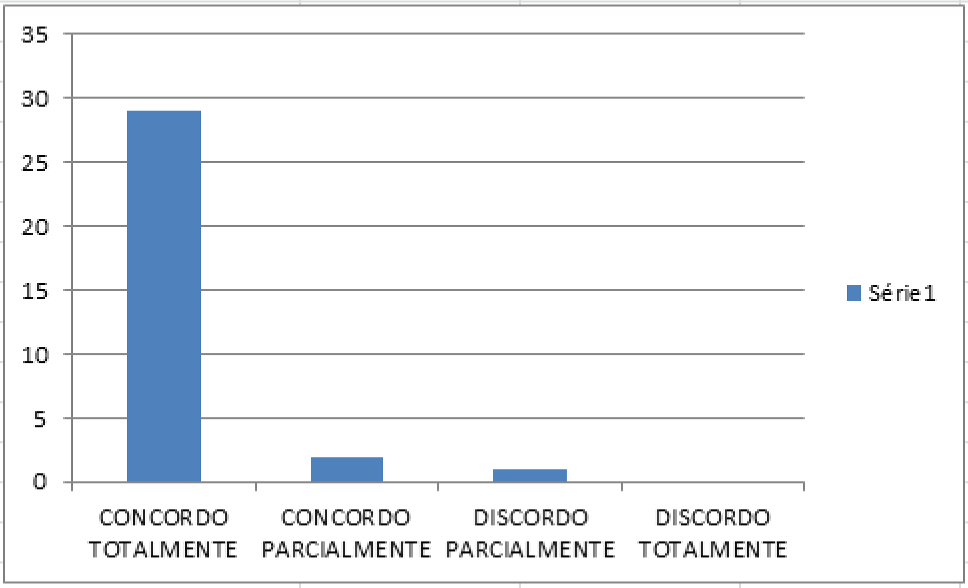
	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
7. Eu sinto falta de alguns conhecimentos, “falta de base”.	8	7	7	9



O fato de a maioria dos alunos serem oriundos de escola pública, eles sentem dificuldades em compreender melhor os conteúdos de matemática por entenderem que falta base matemática.

Figura 35 – Questão 8

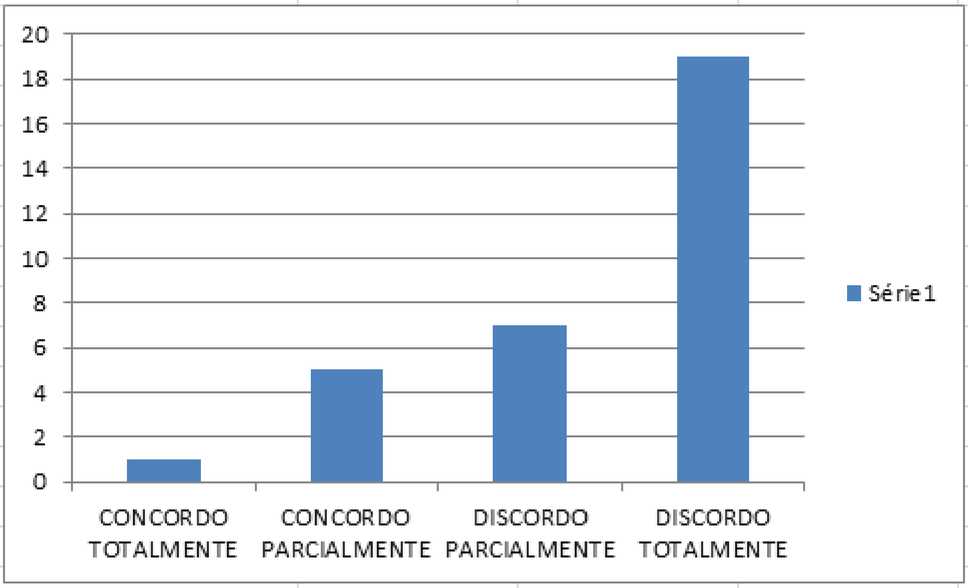
	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
8. Eu considero que a Matemática é um conhecimento importante para minha vida.	29	2	1	



Nota-se que a matemática é considerada um conhecimento importante para quase todos os alunos.

Figura 36 – Questão 9

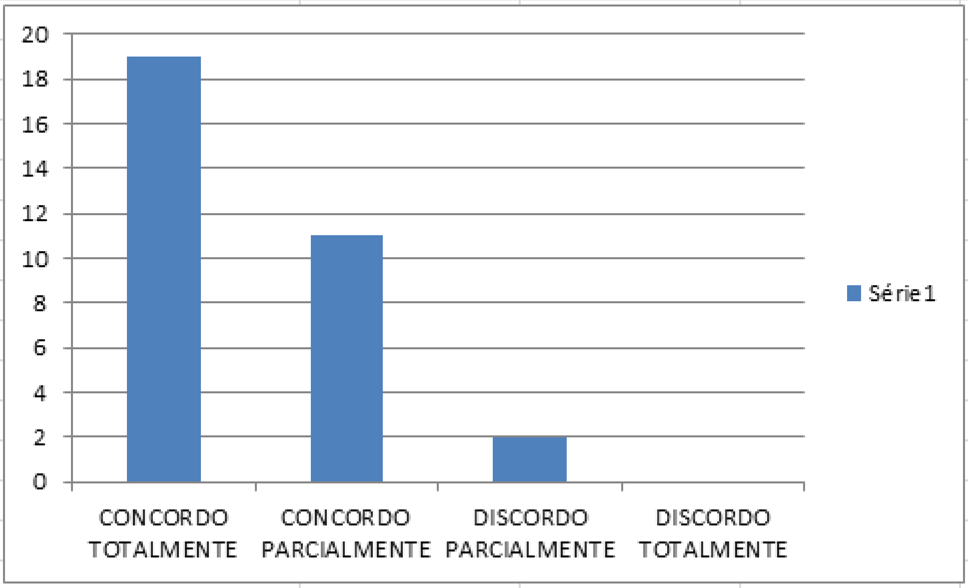
	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
9. Eu NÃO me sinto capaz de aprender Matemática.	1	5	7	19



Entender que é capaz de aprender matemática foi a resposta de grande parte dos alunos.

Figura 37 – Questão 10

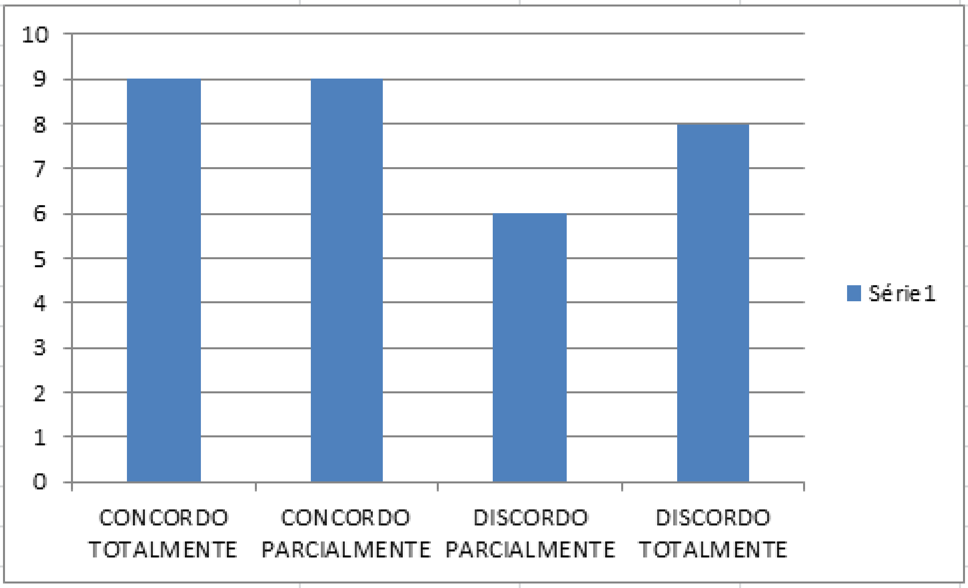
	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
10. A Matemática é estimulante e desafiadora.	19	11	2	



A matemática é estimulante e desafiadora? Sim! Essa foi a resposta de mais da metade da turma.

Figura 38 – Questão 11

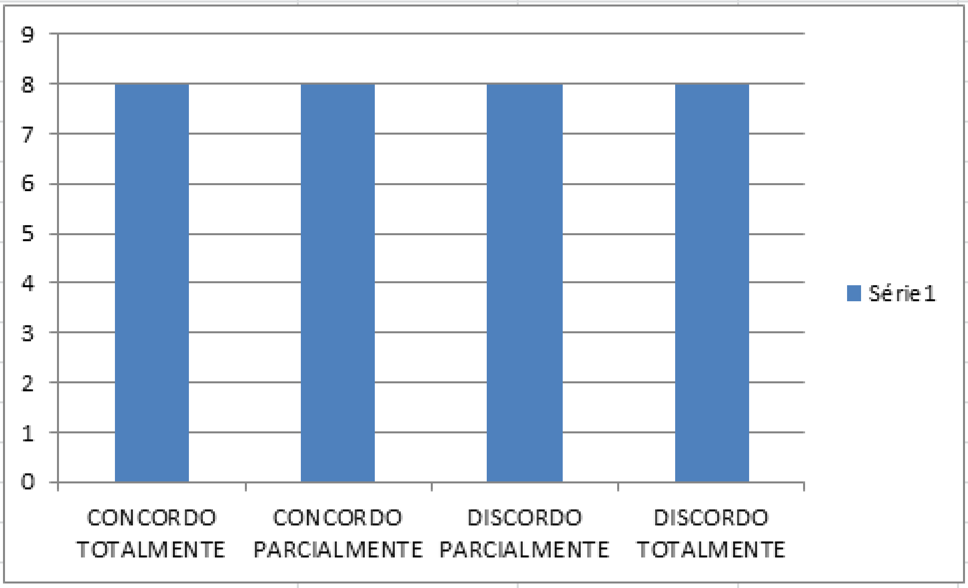
	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
11. Resolver problemas de Matemática me deixa nervoso.	9	9	6	8



Ficar nervoso ao resolver problemas matemáticos não é considerada uma dificuldade para uma parcela grande de alunos.

Figura 39 – Questão 12

	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
12. Eu me divirto aprendendo Matemática.	8	8	8	8



Divertir-se aprendendo matemática não é prazer para metade da turma, mas percebe-se que para a outra metade, é prazeroso.

Com essa análise, observa-se que muitas vezes a forma como se tenta ensinar matemática não é a mais adequada, podendo causar alguns traumas e contribuir com bloqueios matemáticos que dificultam a sequência de aprendizagem do indivíduo. Uma parcela, ainda ainda que pequena, tem afinidade e não encontra tantas barreiras para aprender. Mesmo assim, a maioria dos alunos pesquisados se sentem capazes e interessados em aprender matemática, o que é gratificante, apesar das adversidades encontradas em sala de aula.

Oficina 2:

A primeira parte da oficina foi entregar uma folha com o problema para cada aluno fazer a leitura individual. Após alguns minutos, foram agrupados em duplas para uma leitura. Passados mais alguns minutos, foi solicitado que cada grupo tentasse resolver o problema e que compartilhassem entre si as possibilidades de resolução. Como a atividade envolvia pintura, foram distribuídos lápis de cor para cada grupo. Nenhum grupo solicitou a participação da pesquisadora. Os alunos estavam envolvidos na resolução da questão, discutiam e conversavam entre eles. Todos resolveram de forma correta.

Ao terminarem de resolver o problema, deveriam relatar as estratégias utilizadas para a resolução. A maioria dos grupos não teve dificuldade para interpretar e solucionar a primeira atividade, mas alguns grupos precisaram de intervenção para encontrar o caminho. No final, todos conseguiram perceber que a quantidade mínima de cores pra pintar o mapa da Bahia era de 4 cores.

Nesta oficina o objetivo é pintar o mapa da Bahia, utilizando apenas 4 cores, conforme a teoria de Guthrie, em que bastam 4 cores diferentes para colorir um mapa, e analisar se é possível aplicá-la para qualquer mapa. Todos os alunos entenderam que é possível pintar o mapa da Bahia utilizando apenas 4 cores e que isso se estende para qualquer outro mapa. Alguns tiveram dificuldade em interpretar e resolver os cálculos apresentados, por não interpretarem corretamente o enunciado.

Oficina 3:

Ao relatar o procedimento de resolução do problema da oficina 2, todos os alunos conseguiram entender que usar apenas quatro cores para colorir um mapa sem que regiões de fronteira tivessem cores iguais. Quanto ao fato de essa condição poder ser estendido para outros mapas, todos conseguiram entender que seria possível.

Em relação ao cálculo do problema 3, a maioria conseguiu resolver e entender o processo de resolução, alguns necessitam de orientação e outros começaram de forma equivocada, mas foi corrigido pelo aluno.

Oficina 4:

Nesta oficina, foi entregue uma tabela coma as cores quentes e frias para ser utilizada na solução dos problemas. A atividade foi distribuída e cada grupo mostrou-se interessado em encontrar uma solução para a atividade proposta, conversando e discutindo. Durante o processo, a pesquisadora circulava entre as classes auxiliando os grupos na compreensão e interpretação da atividade. A ajuda se dava com questionamentos e estímulos adequados à construção do conhecimento, que resultaria da generalização de conceitos a partir dos desafios propostos na atividade.

Os alunos encontraram dificuldade para interpretar o problema. Sendo resolvida a situação de interpretação, concluíram a atividade. No decorrer do desenvolvimento da atividade com relação a escolha das cores quentes que deveriam ser usadas nesse problema, ainda houve uma confusão em relação à áreas de fronteira que não poderiam ter a mesma cor. Alguns alunos precisaram refazer a pintura do mosaico.

Oficina 5:

Após terem feito o relato do desenvolvimento da atividade da oficina 4, foi feita uma discussão sobre o tema trabalhado. A interpretação do problema já foi mais fácil, a resolução da atividade usando apenas cores frias foi entendida e resolvida sem maiores dificuldades.

Oficina 6:

Após receberem a tabela com a classificação das cores quentes e frias, os alunos precisaram resolver a situação problema em que poderiam utilizar apenas as cores quentes para colorir o mosaico, seguindo a orientação de utilizar apenas quatro cores e tendo as regiões de fronteira com cores diferentes. Todos os alunos conseguiram pintar o mosaico e resolver a questão 6, que envolve cálculos das possibilidades de utilizar as cores.

Oficina 7:

Ao terminarem a atividade da oficina 6, os alunos relataram os caminhos utilizados para resolver o problema apresentado. Mesmo tendo dificuldade no início para entender, a grande maioria não teve dificuldade para relatar seus passos e resolver os cálculos pedidos. Isso reforçou na pesquisadora uma percepção presente em outras etapas do trabalho: a dificuldade de muitos alunos nem sempre é a resolução do problema, mas a sua leitura. Esta constatação é relevante porque vai além da simples capacidade de entender um enunciado de uma atividade em sala de aula. Remete ao que (D'AMBROSIO, 2003) aponta como a necessidade de se investir na educação para a cidadania, "um dos grandes objetivos da educação de hoje". Todos conseguiram perceber a relação entre matemática e arte, através das figuras em formato de mosaico e da classificação das cores para utilização nas oficinas.

Oficina 8:

Observou-se que nesta oficina a maior dificuldade ainda foi a interpretação do enunciado por alguns alunos. Ao realizar esta atividade, percebeu-se que alguns alunos esqueceram de efetuar os cálculos pedidos, sendo preciso refazer. A utilização das cores quentes foi respeitada por todos ao usarem apenas quatro cores, conforme a teoria de Guthrie, que são suficientes para colorir o mosaico sem que regiões de fronteira tenham cores iguais.

Oficina 9:

No desenvolvimento da oficina 8, os alunos conseguiram entender com mais facilidade o procedimento de colorir o mosaico com as cores quentes e frias. A mistura de formas geométricas na composição do mosaico facilitou a visualização e resolução da atividade. A identificação das formas geométricas utilizadas no mosaico também foi feita sem problemas, por se tratar de figuras conhecidas. As combinações de cores foram mais amplas e com mais opções, já que poderiam usar cores quentes e frias.

Após a pintura, os alunos identificaram quais as formas geométricas que compunham o mosaico, relatando os nomes das mesmas, além de informar a quantidade de figuras que formam o mosaico. Como esta atividade ofereceu uma gama maior de cores para serem escolhidas, ficou ainda mais fácil concluí-la.

Oficina 10:

Foram apresentados três situações problema, envolvendo contextos reais. Para a resolução destes problemas, foi preciso analisar cada dado oferecido no enunciado e relacioná-los com o Princípio Fundamental da Contagem. Pode-se perceber que, na análise feita pelos alunos em cada questão, eles conseguiram interpretar e solucionar cada uma das atividades apresentadas, pois já possuiam uma base de entendimento sobre o assunto. Houve uma discussão durante a resolução em relação à compreensão do enunciado, se haveriam agrupamentos iguais ou não. Como não havia referência no enunciado sobre se deveriam ser grupos distintos, entendeu-se que poderiam ser repetidos. Isso mostra a capacidade de identificar as diferentes situações que podem vir a desafiá-los futuramente.

Oficina 11:

Para a resolução dos problemas 1, 2 e 3 da oficina 10, os alunos precisaram analisar cada uma, ler e interpretar os enunciados. Na questão 1, na escolha de dois filmes da premiação do Oscar, a maioria dos alunos entendeu e resolveu, mas alguns tiveram dificuldade para iniciar a atividade, porém depois de esclarecidas as dúvidas de como se pode escolher, todos conseguiram concluir os cálculos do problema.

Para a questão 2, que é semelhante à questão 1, não houve muitas dúvidas, pois o caminho para a resolução era o mesmo do anterior, facilitando o cálculo.

Já na questão 3, que envolve duas tabelas, no início foi necessário uma orientação para que os alunos entendessem que deveriam integrar os dois cálculos para que conseguissem resolver. Tendo sido esclarecida a relação entre as duas tabelas, todos conseguiram concluir a atividade.

Oficina 12:

Após o término das resoluções, foi feita uma plenária para discutir as formas de se chegar às respostas. Como a maioria conseguiu entender a essência das questões, alguns alunos questionaram o fato de que na questão 1, da oficina 10, poderia se entender que há a possibilidade de combinações repetidas, pois não estaria sendo levado em conta a ordem, mas sim apenas a escolha de dois filmes. Foi preciso lembrar que, neste caso, ficam implícitas as posições de primeiro e segundo lugar, já que se trata de premiação.

Oficina 13:

Neste momento, concluídas as resoluções das situações problema, foram apresentadas as fórmulas de Arranjo, Combinação, Permutação e Fatorial, exemplificando com os problemas que já foram resolvidos pelo Princípio Fundamental da Contagem, mostrando que é possível resolver por fórmulas e também pelo Princípio Multiplicativo e Aditivo, o qual foi adotado pelos alunos na resolução dos problemas apresentados nas oficinas.

A análise do comportamento, das anotações, do envolvimento e das respostas dos grupos a esta situação-problema permitiu algumas conclusões relevantes, tais como:

a) interpretar enunciados é um grande obstáculo aos alunos;

b) expressar-se usando a linguagem escrita é outra barreira;

c) trabalho em equipe, solidariedade e compartilhamento de informações são atributos que os alunos precisam desenvolver;

d) o debate de dados da vida real gera um "aquecimento" no debate e no envolvimento dos alunos com o que está se passando em aula;

e) parte das informações, nem sempre organizadas e elaboradas, que os alunos têm, vem da experiência deles com informações e situações da vida real, e não são conhecimentos postos à disposição em sala de aula;

f) diante de formulações mais extensas, desdobradas em itens e explorando conhecimentos diversos, os alunos enfrentam dificuldade, o que sugere que podem ter problemas no Ensino Médio e em desafios como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), fundamental para o acesso a universidades, a retomada dos estudos, a obtenção de bolsas e outras situações.

Com isso, foi possível a colocação dos conceitos de Arranjo e Combinação foi de forma a diferenciar uma da outra, exemplificando os casos em que a ordem é importante (arranjo) e quando a essência do elemento e do agrupamento é que deve ser considerado, que neste caso a ordem não é relevante (combinação).

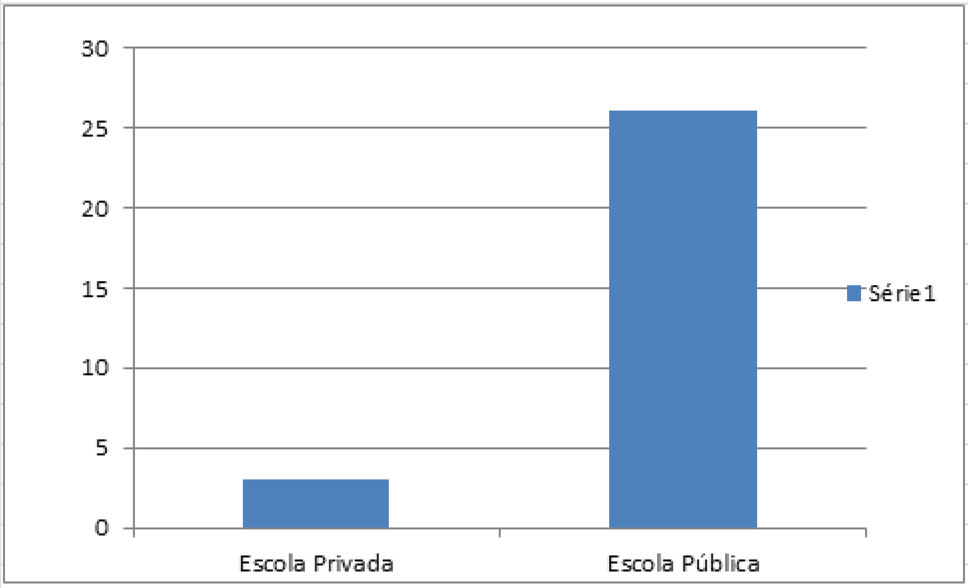
Oficina 14:

Após o término das oficinas em que foram resolvidos os problemas apresentados, os alunos preencheram o questionário pós aplicação, o qual foi realizado sem maiores dificuldades, conforme relatado acima.

Análise do Questionário Pós Aplicação

Figura 40 – Questão 1

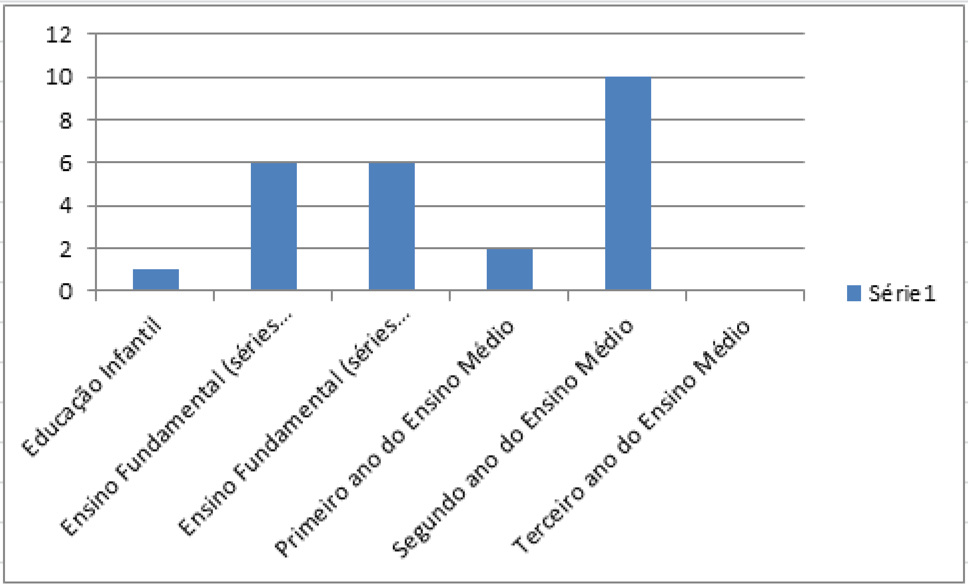
1. Formação acadêmica (em sua maioria):	
Escola Privada	3
Escola Pública	26



Grande parte dos alunos da turma do 2º ano D matutino são oriundos de escola pública, fazendo com que cheguem a essa etapa da vida escolar com algumas defasagens em relação aos conhecimentos de matemática básica, que é de fundamental importância para o desenvolvimento matemático do aluno

Figura 41 – Questão 2

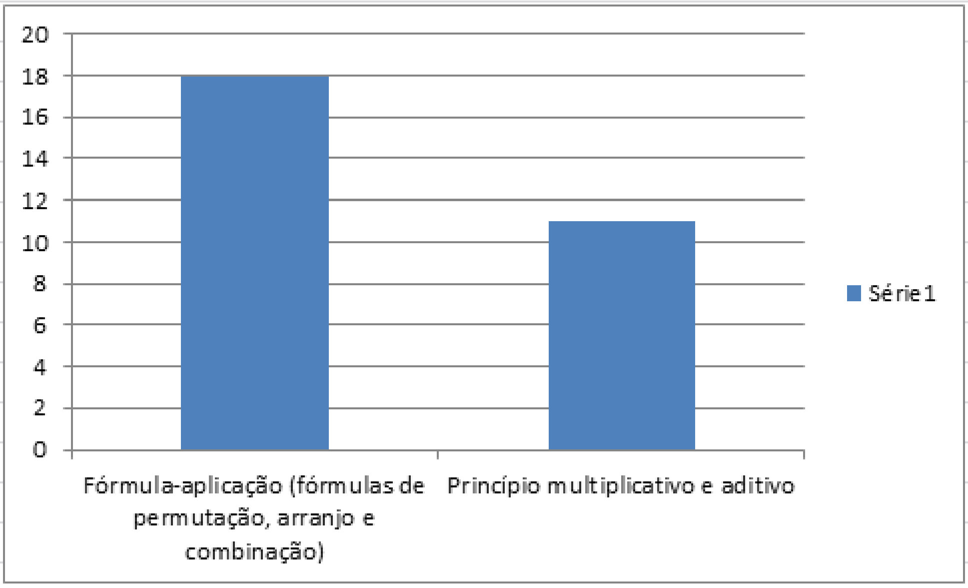
2. Primeiro contato com questões de análise combinatória:	
Educação Infantil	1
Ensino Fundamental (séries iniciais)	6
Ensino Fundamental (séries finais)	6
Primeiro ano do Ensino Médio	2
Segundo ano do Ensino Médio	10
Terceiro ano do Ensino Médio	0



No currículo escolar de escola pública, ainda no ensino fundamental das séries finais, o aluno deve ter contato com combinações. Mas ao analisar a questão, percebe-se que a maioria está tendo o primeiro contato apenas agora, no ensino médio.

Figura 42 – Questão 3

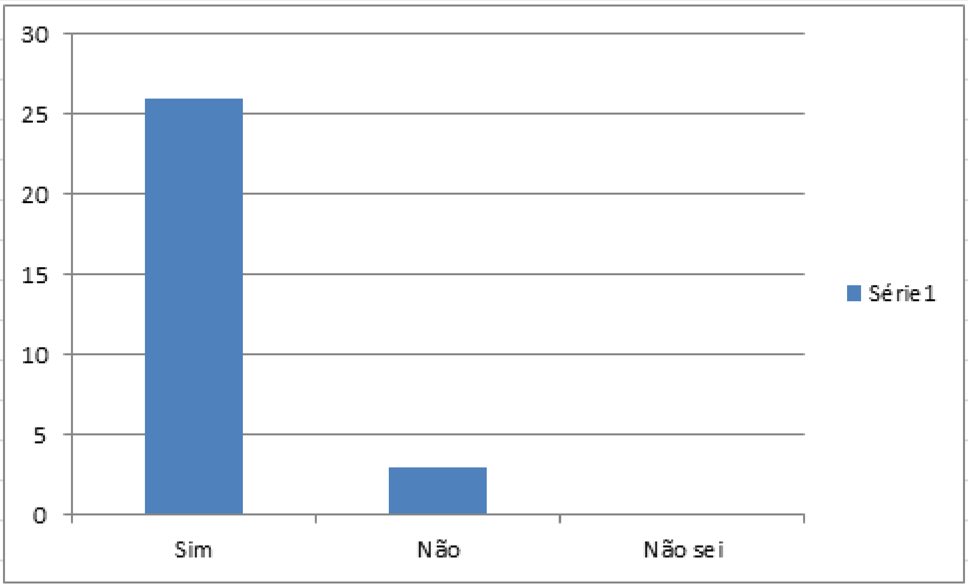
3. Metodologia de ensino utilizada pelo seu professor (maior parte do tempo)	
Fórmula-aplicação (fórmulas de permutação, arranjo e combinação)	18
Princípio multiplicativo e aditivo	11



Ainda se trabalha muito em sala de aula com a aplicação de fórmulas para resolução de exercícios, fazendo com que o aluno não utilize seu próprio raciocínio para encontrar a solução dos problemas, deixando as resoluções de forma mecânica.

Figura 43 – Questão 4

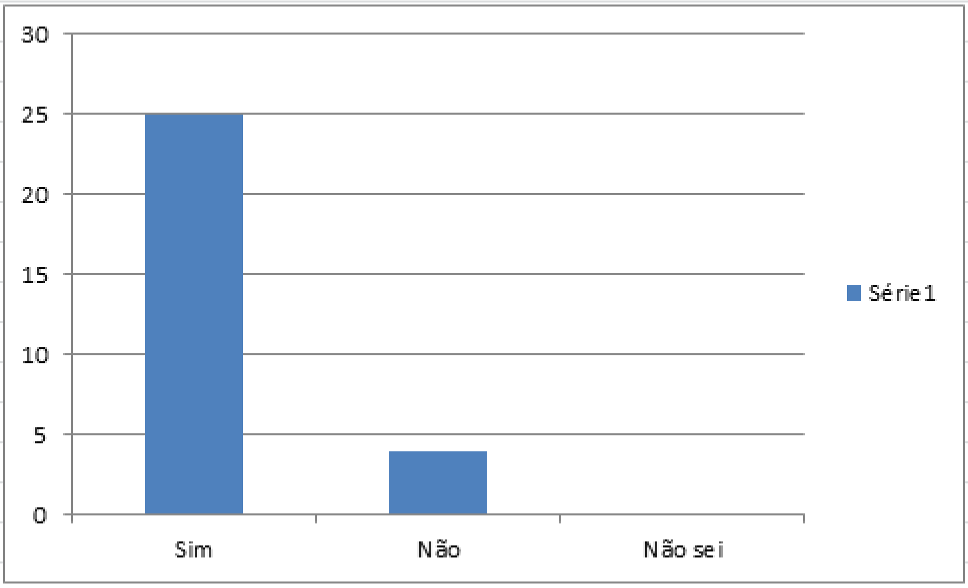
4. Você entendeu os experimentos?	
Sim	26
Não	3
Não sei	0



O que se percebe é que a forma como o conteúdo foi apresentado para os alunos durante a aplicação do projeto, fez com que grande parte entendesse o processo do Princípio Fundamental da Contagem..

Figura 44 – Questão 5

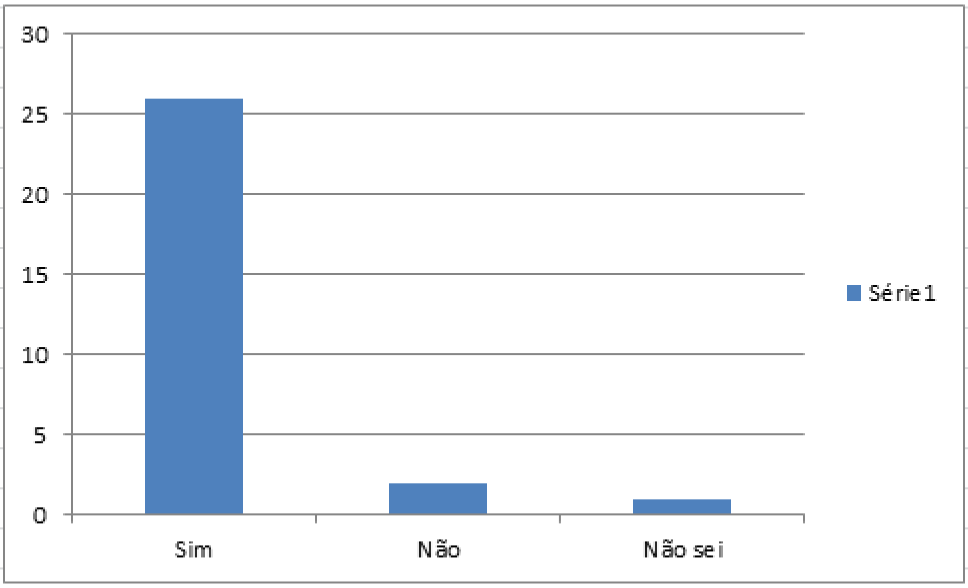
5. Em sua opinião ficou mais fácil entender a teoria com os novos experimentos realizados?	
Sim	25
Não	4
Não sei	0



Utilizar problemas contextualizados para introduzir conteúdos faz com que haja maior interesse e melhor compreensão por parte dos alunos.

Figura 45 – Questão 6

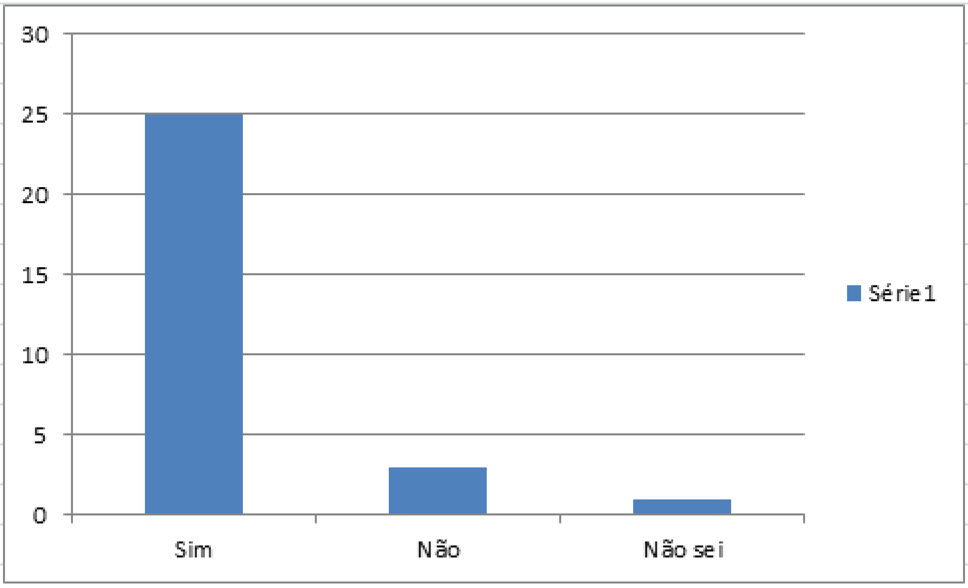
6. Se os professores utilizassem exemplos do cotidiano ou exemplos que serão aplicados na sua vida profissional, isto facilitaria a compreensão dos temas em estudo?	
Sim	26
Não	2
Não sei	1



Quase com unanimidade, os alunos gostariam que mais vezes os conteúdos fossem apresentados de maneira contextualizada e com aplicações reais, facilitando o entendimento e fazendo com que seja mais atrativo para eles.

Figura 46 – Questão 7

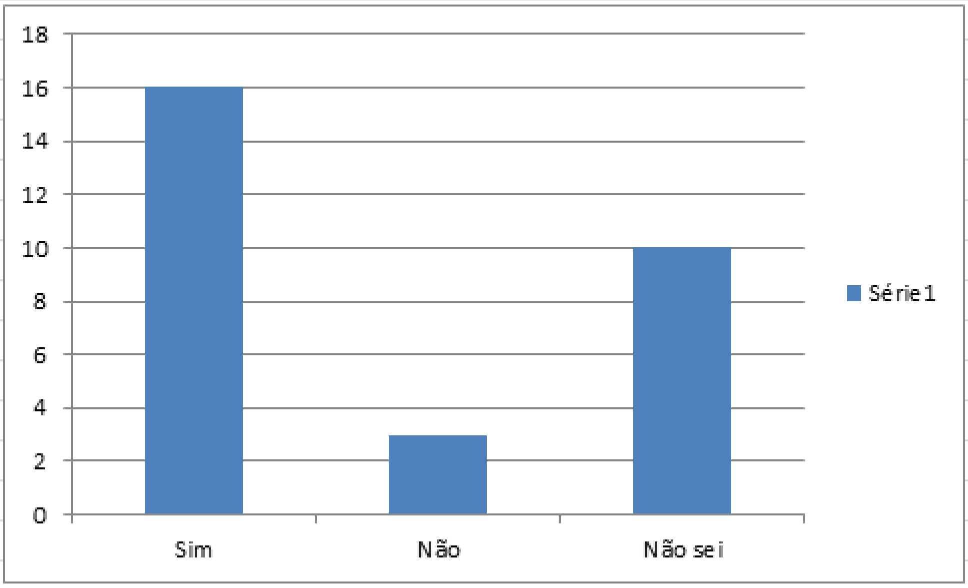
7. Dentre as disciplinas previamente estudadas (Matemática, Geometria e Arte) você conseguiria associar o tema combinação, a partir dos experimentos realizados?	
Sim	25
Não	3
Não sei	1



De certa forma, os alunos conseguiram perceber relações entre a matemática e outras disciplinas, como arte e geometria, que apareceram no desenvolvimento do projeto.

Figura 47 – Questão 8

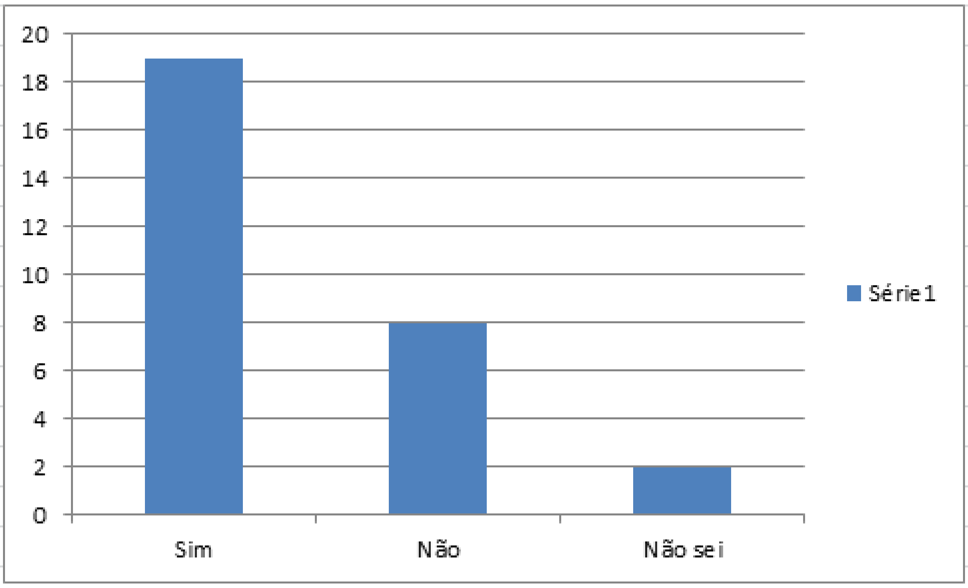
8. Os novos experimentos são adequados às necessidades da escola onde estuda?	
Sim	16
Não	3
Não sei	10



Aproximadamente metade dos alunos acharam que esta forma de ensinar é adequada e poderia ser adotado pela escola por atender às necessidades de aprendizagem dos alunos.

Figura 48 – Questão 9

9. Tem segurança em resolver questões de análise combinatória?	
Sim	19
Não	8
Não sei	2



Para concluir, a maioria dos alunos conseguiu entender e assimilar o conteúdo de Análise Combinatória através do Princípio Fundamental da contagem, sentindo-se com segurança para resolver outras questões semellhantes.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo será apresentada a descrição da aplicação da sequência didática e as análises das respostas dos alunos às situações-problema propostas em sala de aula. A turma do 2º D matutino, com 40 alunos. Eles foram divididos em duplas. A escolha das duplas ficou a critério dos alunos. A pesquisa foi aplicada em encontros durante as aulas regulares. No primeiro contato para a aplicação das situações-problema, fez-se um breve comentário sobre do que se tratava a pesquisa e interrogou-se o que os alunos sabiam sobre Análise Combinatória. Algumas respostas obtidas:

- É uma forma de fazer combinações de coisas.

- É como se faz para analisar possibilidades.

Os demais grupos não souberam responder.

As respostas revelaram um nível de informação sobre Análise Combinatória abaixo do que os alunos deveriam ter no segundo ano, reflexo, entre outras coisas, do fato de pouco terem estudado o tema na vida escolar. No momento seguinte, as atividades foram entregues, uma a uma, aos grupos, que deveriam tentar ler e resolver, sempre explicando o que estavam fazendo para que fosse possível observar e analisar as resoluções e o raciocínio. Durante as explicações das atividades, enquanto os alunos discutiam as questões com os colegas, foi preciso orientar os grupos, caso surgissem dúvidas, e verificar como se comportavam diante das questões. Foram 15 oficinas, divididas em 9 encontros, sendo 3 aulas semanais, totalizando 27 horas/aula. Antes da série de encontros em que foram trabalhadas as situações-problema, foi realizada, em sala de aula, a aplicação do questionário que recolheu dados sobre como os alunos veem a matemática.

Procurou-se uma abordagem de ensino diferenciada da tradicional, isto é, buscou-se não se basear nas definições, fórmulas e exercícios de aplicação. A proposta desta pesquisa foi guiada na relação contextual dos problemas de combinatória na turma do 2º ano D do Ensino Médio do Colégio Estadual Mimoso do Oeste, mediante a análise de acertos e erros dos alunos nos problemas contextualizados. Devido à característica de sondagem presente neste trabalho, pudemos constatar através de análises algumas situações peculiares ao nosso objeto de estudo, dentre as quais umas positivas e outras negativas, baseado naquilo que se propôs analisar em combinatória.

A solução de problemas é um tema que atrai a atenção de muitos e é levado a um grande acúmulo de investigações. Está valorizada como a primeira área ou linha de investigação em educação matemática. O conhecimento das etapas da solução de problemas é de muita importância para o êxito dessa atividade, daí que diferentes autores recomendam que os alunos devam dominá-las e tenderem a ser objeto de ensino. O papel da motivação na solução de problemas é uma condição necessária para que o aluno queira resolver o problema.

Com a intenção de justificar que o ensino seja pautado no Princípio Fundamental da Contagem, pois acredita-se que quando se trabalha com ele, fugindo da apresentação tradicional, os discentes desenvolvem seu raciocínio lógico-dedutivo. Entende-se que quando o professor, em sua aula, apresenta a definição, fórmula e exemplos práticos, os discentes não desenvolvem o raciocínio lógico-dedutivo, apenas memorizam os tipos de exercícios e tentam aplicar a fórmula.

Supõe-se que uma aula ministrada visando apresentar um problema matemático em que o discente deverá descobrir qual a tarefa proposta e buscar uma técnica para resolvê-lo. Feito isso, uma proposta é que o professor instigue o raciocínio lógico-dedutivo dos discentes, e trabalhar com a resolução do problema a partir do Princípio Fundamental da Contagem de forma intuitiva, apresentando a formalização posteriormente.

A utilização da Metodologia de Resolução de Problemas proposta por (**??**) revelou-se eficiente ao longo dos encontros em sala de aula. Esta metodologia tem atributos como instigar e desafiar os alunos diante de questões que levam a novos conceitos, organizar a discussão e a construção do conhecimento, provocar a participação dos alunos nos debates em grupo, à plenária sobre as respostas, posicionar o professor como indutor da busca do conhecimento e levar os alunos de um estranhamento inicial a uma atitude participativa, que gera satisfação à medida que os conceitos são consolidados.

Entre outros atributos, o professor precisa estar pronto a não desanimar diante de uma atitude inicial de estranhamento, indiferença e até rejeição por parte dos alunos, quando lhes é proposto um modelo de trabalho fora do que costumam ter em sala de aula. É uma atitude normal, que precisa ser trabalhada e transformada. O aluno deve ser convencido de que há benefícios em participar e se empenhar acima do que convencionalmente faz, e o papel do professor é fundamental neste momento.

A resolução de problemas, como metodologia, contribuiu para a aprendizagem matemática dos alunos mesmo diante das limitações do curto tempo da pesquisa. Consideramos positivos os resultados alcançados, sabendo que não foram os melhores, mas após as intervenções realizadas os alunos conseguiram entender o procedimento da pesquisa. A maior dificuldade encontrada foi a interpretação dos processos que os alunos deveriam utilizar para resolver problemas.

Apesar de ser muito difundida e defendida entre vários pesquisadores da Educação Matemática, a Metodologia da Resolução de Problemas ainda é uma prática pouco utilizada nas salas de aula. Nem sempre é de forma adequada, deixando de atingir ao máximo as capacidades dos alunos. Com isso, percebe-se que os alunos estão “viciados” em receber tudo pronto, explicado e orientado para somente executar o cálculo. Quando recebem uma situação-problema, onde não há orientação por parte do professor, quando o próprio aluno precisa descobrir o caminho para a resolução eles sentem dificuldade.

O processo de ensinar e de aprender Análise Combinatória através da resolução de problemas está fundamentado na concepção de que a razão mais importante para utilizar esse tipo de metodologia de ensino é ajudar os estudantes a compreenderem efetivamente os conceitos, princípios e procedimentos matemáticos. Dessa forma, a matemática não é somente um caminho para resolver problemas, mas é um caminho para pensar, organizar e modelar experiências, descobrir padrões, estabelecer conexões. Portanto, a presença da resolução de problemas nas aulas de matemática é importante tanto por ser um meio de adquirir conhecimento novo como por ser um processo de aplicação do que havia sido elaborado previamente. "A matemática precisa ser concebida pelo estudante como um conhecimento que favorece o desenvolvimento e aperfeiçoamento de seu raciocínio, sua capacidade expressiva, sua sensibilidade e sua imaginação." (ROMANATTO, 2012)

Estabelecer relações de equivalência entre diferentes formas de apresentação dos problemas, como foi proposto neste projeto de intervenção como a integração com arte, tendo o cuidado de variar as informações nos diferentes problemas, pode ser uma maneira de o professor levar o aluno a aprender que o comportamento ou estratégia de resolução apresentado em uma situação pode ser usado em situações que são semelhantes e aprender que quando temos essa ligação entre disciplinas é interessante, pois na realidade temos diversas relações interdisciplinares.

O trabalho desenvolvido permitiu a compreensão da Análise Combinatória na forma mais básica. A abordagem exploratória, em que os alunos são colocados perante tarefas que têm que resolver recorrendo a processos por eles inventados, tornou-se positiva no desenvolvimento da sua compreensão e da semelhança entre as atividades. A aposta no raciocínio lógico próprio de cada aluno teve momentos de dúvida e dificuldade de interpretação, o que trouxe certa preocupação em saber se realmente havia acontecido a aprendizagem proposta através das representações pictórica e verbal, permitindo que os alunos construíssem com compreensão um procedimento natural de escolhas aleatórias.

Ao mesmo tempo, pelo uso da metodologia de Resolução de Problemas, os alunos se sentiram protagonistas na construção do conhecimento, pois tiveram espaço para debater, posicionar-se, compartilhar informações e se expor nas discussões dentro dos grupos e nas plenárias finais.

Por fim, conscientes de que há ainda muito a ser observado, parcialmente mostram que há a necessidade de mais estudos dessa natureza, com este efetivo objeto: o de conhecer a realidade da educação matemática em combinatória e adequação da legalidade vigente em nosso país.

REFERÊNCIAS

ARGAN G E FAGIOLO, M. **Guia de História da Arte**. Lisboa: Editorial Estampa, 1992.

ARNHEIM, R. **Arte e percepção visual: uma psicologia da visão criadora**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

BERGE, C. **Principles of Combinatorics. Tradução de John Sheehan.** New York: Academic Press, 1971.

BIGGS, N. L. **The roots of combinatorics.** 6. ed. São Paulo-SP: Revista Historia Mathematica., 1979.

BRASIL. **Ensino Médio. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília, DF: Ministério da Educação e Cultura, 2000.

BRASIL, M. d. E. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. [S.l.: s.n.].

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de matemática: 1º a 5º séries para estudantes do curso de magistério e professores do 1º grau.** 10. ed. São Paulo: Ática, 1998.

DONDIS, D. **La sintaxis de la imagen – introducción al alfabeto visual**. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, S. A., 1997.

D'AMBROSIO, B. S. A evolução da resolução de problemas no currículo matemático. in: Seminário de resolução de problemas. 2008. Disponível em: <<http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo1.pdf>>. Acesso em: 20 de agosto de 2016.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 10. ed. Campinas-SP: Papirus, 2003.

ESCHER, M. Gravura e desenhos. **Revista Electrônica en Educación en Ciencias, Buenos Aires**, Evergreen, Buenos Aires, ARG, 1994.

ESTEVES, I. Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental. **Dissertação de Mestrado**, PUC – São Paulo, 2001.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** 3. ed. Campinas-SP: Unicamp, 2008.

FLORES, C. **Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva**. Musa: Musa, 2007.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à pratica educativa.** 26. ed. São Paulo-SP: Paz e Terra, 1996.

JANSON H.W. E JANSON, A. **Iniciação à História da Arte**. São Paulo-SP: Martins Fontes, 2007.

LOURO, D. F. A pedagogia geométrica da imagem. 2008. Disponível em: <www.ima.mat.br/paper/Don/d_a_00.htm>. Acesso em: 20/08/2015.

MARTINHO, M. **O infinito através da obra de M. C. Escher – Uma experiência sobre as concepções acerca do infinito numa turma de Métodos Quantitativos**. Portugal: Universidade do Minho, 1996.

MASON, J. Modelling: what do we really want pupils to learn? **Mathematics, Teachers and Children**, Great Britain: The Open University, 1988.

MATHEMATICS, N. . C. of Teachers of. An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s. **Dissertação de Mestrado.**, Reston, VA-USA, 1980.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Orgs). Pesquisa em movimento.** São Paulo-SP: UNESP, 1999.

______. Uma história da resolução de problemas no brasil e no mundo. in: Seminário de resolução de problemas, 1., 2008, rio claro. anais eletrônicos... rio claro: Gterp. 2008. Disponível em: <<http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo3.pdf>>. Acesso em: 20 de agosto de 2016.

ONUCHIC L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Bicudo, M. A. V.; BORBA, M. (Org.). Educação matemática: Pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, 2004.

______. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM. Rio de Janeiro**, v. 55, p. 1 – 19, 2009.

PASTOR, J. R. **Elementos de análisis algebraico**. 5. ed. Madrid: Talleres Lusy, 1939.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro, RJ: Interciência. 196 p.

POZO, J. I. **A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.** Porto Alegre, RS: Artmed, 1998.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, Revista Eletrônica de Educação,São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, n. 1, p. 309, 2012.

SABO, R. D. Análise de livros didáticos do ensino médio: um estudo dos conteúdos referentes à combinatória. monografia de especialização em educação matemática, centro universitario fundação santo andré, sp. 2007.

SAMPAIO, P. A matemática através da arte de m. c. escher. **Dissertação de Mestrado.**, Millenium, p. 49–58, 2012.

SERINATO, L. J. **Matemática e arte: histórias que se entrecruzam**. Paraná: EBRAPEM, 2007.

SOUZA, A. L. C. P. d. Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. **Dissertação de Mestrado.**, RIO CLARO: IGCE, UNESP, 2010.

STURM, W. As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa. **Dissertação Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas - SP**, 1999.

TROTTA, F. **Matemática por assunto**. 4. ed. São Paulo: Editora Scipione, 1988.

WIKIPEDIA. **Resolução de Problemas**. 2016. Disponível em: <http://www.wikipedia.org/>. Acesso em: 22 Ago. 2015.

WILSON R. J.; LLOYD, E. K. **Combinatorics**. [S.l.: s.n.], 1990.

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PRÉ-APLICAÇÃO

Dadas as afirmativas abaixo, marque com um X aquelas em que você mais se identifica.

Figura 49

Opções / Afirmativas	CONCORDO TOTALMENTE	CONCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO PARCIALMENTE	DISCORDO TOTALMENTE
1. Eu gosto de estudar Matemática.				
2. Eu tenho dificuldades em aprender Matemática.				
3. Eu NÃO gosto da maneira como se ensina Matemática.				
4. Eu estudo Matemática em casa.				
5. Eu NUNCA gostei de Matemática, me dá medo.				
6. Eu tenho dificuldades em entender as explicações do professor.				
7. Eu sinto falta de alguns conhecimentos, “falta de base”.				
8. Eu considero que a Matemática é um conhecimento importante para minha vida.				
9. Eu NÃO me sinto capaz de aprender Matemática.				
10. A Matemática é estimulante e desafiadora.				
11. Resolver problemas de Matemática me deixa nervoso.				
12. Eu me divirto aprendendo Matemática.				

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO PÓS-APLICAÇÃO

Dadas as questões abaixo, marque um X na alternativa que você considera mais adequada.

1. Formação acadêmica (em sua maioria):

( ) Escola privada

( ) Escola pública

2. Primeiro contato com questões de análise combinatória:

( ) Educação Infantil

( ) Ensino Fundamental (séries iniciais)

( ) Ensino Fundamental (séries finais)

( ) Primeiro ano do Ensino Médio

( ) Segundo ano do Ensino Médio

( ) Terceiro ano do Ensino Médio

3. Metodologia de ensino utilizada pelo seu professor (maior parte do tempo)

( ) Fórmula-aplicação (fórmulas de permutação, arranjo e combinação)

( ) Princípio multiplicativo e aditivo

4. Você entendeu os experimentos?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

5. Em sua opinião ficou mais fácil entender a teoria com os novos experimentos realizados?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

6. Se os professores utilizassem exemplos do cotidiano ou exemplos que serão aplicados na sua vida profissional, isto facilitaria a compreensão dos temas em estudo?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

7. Dentre as disciplinas previamente estudadas (Matemática, Geometria e Arte) você conseguiria associar o tema combinação, a partir dos experimentos realizados?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

8. Os novos experimentos são adequados às necessidades da escola onde estuda?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

9. Tem segurança em resolver questões de análise combinatória?

( ) sim ( ) não ( ) não sei

APÊNDICE C – FOTOS DA APLICAÇÃO

Figura 50 – Mosaico pintado com cores quentes

Figura 51 – Alunos desenvolvendo as atividades.

Figura 52 – Alunos desenvolvendo as atividades.

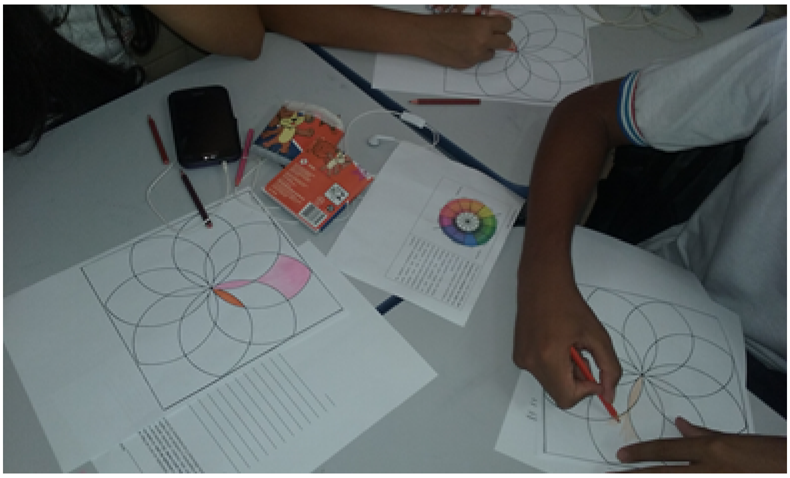


Figura 53 – Alunos desenvolvendo as atividades.