Mário Cesar Martins de Lima

Função exponencial natural e^{x} e número e: uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades

Rio de Janeiro

2016

Mário Cesar Martins de Lima

Função exponencial natural e^{x} e número e: uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática (PROFMAT - Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional) da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Universidade Federal do Estado de Rio de Janeiro

Escola de Matemática

PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Dr Ronaldo da Silva Busse

Rio de Janeiro

2016

Mário Cesar Martins de Lima

Função exponencial natural e^{x} e número e: uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades/ Mário Cesar Martins de Lima. – Rio de Janeiro, 2016-

95 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dr Ronaldo da Silva Busse

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Estado de Rio de Janeiro
Escola de Matemática
PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

1. Funções Exponenciais. 2. Ensino Médio. 3. Contextualização. 4. Aplicações. 5. Sequência Didática. I. Ronaldo da Silva Busse. II. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. III. Escola de Matemática. IV. Função Exponencial Natural e^x e Número e: uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades

Mário Cesar Martins de Lima

Função exponencial natural e^{x} e número e: uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática (PROFMAT - Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional) da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Trabalho aprovado. Rio de Janeiro, 23 de Julho de 2016.

Dr Ronaldo da Silva Busse- UNIRIO
Orientador

Dr Michel Cambrainha de Paula - UNIRIO
Membro

Dr Orlando dos Santos Pereira - UFRRJ
Membro

Rio de Janeiro
2016

Aos meus maiores incentivadores e professores, Mário Luiz e Celia, meus pais,
pelo apoio incondicional e por me ensinarem a
lição mais importante da vida: ter humildade e nunca desistir dos objetivos.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por proporcionar clareza de espírito e sabedoria, fatores essenciais para que pudesse alcançar meus objetivos. Quando falta a razão, nos seguramos apenas na fé incondicional.

Aos meus pais, Mário Luiz e Celia, por não medirem esforços em educar seus filhos conforme os padrões de ética e caráter, tão ausentes em nossa sociedade. A eles, dedico este trabalho.

À minha amada esposa Nathalia Sá, pela compreensão nos momentos de ausência e pelo apoio irrestrito para que pudesse chegar ao final do curso.

Aos meus filhos gêmeos Daniel e Bernardo que, mesmo sem saber, me ensinaram o que é um amor incondicional.

À minha querida irmã Marina Martins e Bruno Neves, por toda paciência em rever trabalhos e abidcar de horas de sono e lazer para contribuir com este momento.

Aos meus professores, em especial ao meu orientador Ronaldo Busse, pelas inúmeras orientações e correções deste trabalho, tornando-o digno de apresentação e defesa.

Por fim, aos meus colegas de mestrado, que me fizeram enxergar a Matemática e o magistério sob uma perspectiva ainda mais apaixonada.

"Se quiser triunfar na vida, faça da sua perseverança a sua melhor amiga;
da experiência, seu conselheiro;
da prudência, seu irmão mais velho;
e da esperança, o seu anjo da guarda".
(Joseph Addison)

Resumo

O trabalho possui o objetivo de apresentar uma proposta diferente e inovadora da abordagem dos conteúdos de funções exponenciais, bem como as funções exponenciais naturais para o Ensino Médio. Através de uma sequência didática de aulas, motivadas por contextualizações e aplicações interessantes e desafiadoras, procura-se proporcionar ao leitor um novo parâmetro de transmissão de ensinamentos, tendo a intenção de despertar o interesse do discente, fugindo dos conceitos puros e abstratos e, por consequência, melhorar o processo de ensino-aprendizagem, sem deixar o rigor e formalismo matemático em plano secundário.

Palavras-chave: funções exponenciais, Ensino Médio, sequência didática, contextualizações, aplicações.

Abstract

This paper aims to present a different and innovative proposition on the approach of exponential functions, as well as natural exponential functions for High School. With a didactic sequence of lessons, motivated by contextualization and interesting and challenging applications, the objective is to provide the reader a new parameter of knowledge transmission, keeping the intention to arouse the students attention, by fleeing from the pure and abstract concepts and, in consequence, improving the teaching and learning process, not leaving the rigor and mathematical formalism in secondary plan.

Keywords: exponential functions, High School, didactic sequence, contextualization, applications.

Résumé

Ce travail a pour but présenter une approche différente et innovante des contenus de fonctions exponentielles, aussi bien que des fonctions exponentielles naturelles pour le Lycée. À partir d'une séquence didactique de cours, motivées par des contextualisation et applications intéressantes et stimulantes, on vise à fournir au lecteur un nouveau paramètre de transmission de renseignements, avec l'intention de susciter l'intérêt de l'élève, fuyant des concepts purs et abstraits, et par conséquence, améliorer le processus d'enseignement-apprentissage, sans laisser le rigueur et formalisme mathématique dans le plan secondaire.

Mots-clés : fonctions exponentielles, Lycée, séquence didactique, contextualisations, applications.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Valor de 1 libra no decurso de um ano a juros anuais de 100%, com composição bianual, mensal e contínua 31
Figura 2 – Curvas de $y = e^x$ e $y = (e^x)'$ 36
Figura 3 – Hipérbole equilátera e área H_a^b 40
Figura 4 – Transformação $T : H_a^b \to H_{ak}^{bk}$ 40
Figura 5 – Área sob a hipérbole equilátera compreendida entre $x = 1$ e $x = e$ . . . 41
Figura 6 – Comparação de capitalização composta e simples 48
Figura 7 – Diferença de montante mês a mês 49
Figura 8 – Atingimento da velocidade limite v_∞ do salto de paraquedas 53
Figura 9 – Notas musicais separadas em intervalos iguais correspondem a frequências em uma progressão geométrica 55
Figura 10 – Gráfico de e^x, e^{-x}, e da catenária para $a = 1$ 56
Figura 11 – Gráfico de $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 57

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados de $S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ 30

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio

Sumário

Introdução 15

1 POR QUE CONTEXTUALIZAR? 20

2 FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL E O NÚMERO e 27
2.1 As funções exponencial e logarítmica naturais 29
2.1.1 O Número e 29
2.1.2 A Função Exponencial Natural 33
2.1.3 A Função Logarítmica Natural 38
2.2 Modelo Afim X Modelo Exponencial 42
2.2.1 Modelo Linear 43
2.2.2 Modelo Exponencial 45
2.2.3 Comparativos 47
2.3 Aplicações e Curiosidades 49
2.3.1 Aplicação de capital a juros fixos 50
2.3.2 O caso do paraquedas 51
2.3.3 Percepções a estímulos físicos - Experiência sonora 53
2.3.4 A corrente suspensa 55

3 UMA CONVERSA COM OS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA 58

4 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA E CONCLUSÕES 67
4.1 Aula 1 - Compreendendo a operação de potenciação 67
4.2 Aula 2 - Introdução à função exponencial e resolução de equações e inequações exponenciais 69
4.3 Aula 3 - Funções exponenciais - aprofundamento e aplicações 71
4.4 Aula 4 - Número e e a função e^x 72

Considerações Finais 75

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DISTRIBUÍDO AOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO 77

APÊNDICE B – TABULAÇÃO, POR PERGUNTA, DAS RESPOSTAS OBTIDAS DO QUESTIONÁRIO DISTRIBUÍDO AOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO 82

Referências 95

Introdução

A motivação para o estudo dos modelos exponenciais reside na aplicabilidade de inúmeros fenômenos que se pode observar. Diante da observação, percebeu-se que a forma como a matéria é ministrada nas escolas de Ensino Médio não apresenta uma recepção adequada pelos discentes. É tida como bastante abstrata e pura, fazendo com que o aluno, de forma geral, não perceba a importância do assunto para a sua formação como cidadão e para o seu futuro profissional.

Apesar da constatação dos métodos de ensino, os documentos educacionais já previam um ensino mais contextualizado, adequado às realidades do público-alvo. Corroborando, cita-se os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Médio, na área de Matemática:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.(BRASIL, 1998, pág. 41)

Assim, fica claro que é necessário abordar os conteúdos matemáticos de forma mais aplicada possível à realidade do discente. Infelizmente, o ensino da Matemática tem se mostrado cada vez mais abstrato, fazendo com que o aluno se desinteresse cada vez mais pelos assuntos ensinados, resultando em reprovações e ojeriza aos conteúdos.

Ainda, conforme os PCN:

> De fato, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (BRASIL, 1998, pág. 43)

Assim, combate-se o ensino puramente pragmático e totalmente desconexo da realidade que cerca o aluno. Deve-se buscar, incessantemente, as aplicações atinentes ao conteúdo ministrado, sempre que possível. Desta forma, possivelmente haverá uma recepção melhor do aluno aos ensinamentos transmitidos.

No ensino brasileiro, já está consagrada a preocupação com a contextualização e a interdisciplinariedade. Novamente, nos PCN, em sua página 43, tem-se:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 1998, pág. 43)

Tratando-se de funções exponenciais, é importante contextualizar o seu ensino. Conforme Bassanezi (2002), a modelagem deste tipo de função surgiu ante a necessidade de solucionar um problema ainda sem resposta. A modelagem da função afim já era conhecida, porém com o surgimento de uma nova demanda, houve a procura de um novo modelo teórico. Assim, ressalta-se a importância:

> O objetivo fundamental do "uso" da matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância.

Portanto, acredita-se que, através de uma adequada contextualização, se consiga atingir melhores resultados quanto à assimilação dos conteúdos. É importante ressaltar que, em nenhuma hipótese, se deseja deixar o formalismo matemático em detrimento da realidade do assunto. Ambos são importantes para a construção do saber do nosso aluno. O que se pretende evitar é o exagero de qualquer uma das ferramentas. Caberá ao docente, no momento adequado, formalizar os conceitos, fornecendo o embasamento necessário e oportuno, tendo em vista que é um dos objetivos do ensino da Matemática.

Explicar a origem do assunto e o seu motivo de surgimento, através de exemplos, também podem ser ótimos caminhos para motivar o estudo da Matemática e, especificamente, de funções exponenciais. Um ótimo exemplo é a famosa história (porém pouco conhecida, infelizmente) de um rei persa que, ao perceber que o seu reino se encontrava entendiado com a rotina diária, recompensaria quem criasse algum jogo para entretenimento da corte.

A notícia, rapidamente, se espalhou por todo o domínio real, até que um dos súditos apresentou uma espécie de jogo de xadrez. Vale ressaltar que não se sabe ao certo se o jogo era inédito. Relatos afirmam que foi uma adaptação de um jogo de tabuleiro já experimentado pelos gregos.

O jogo possuía 32 peças e 64 casas quadradas com um dinâmica bem interessante. O rei ficou maravilhado e o passatempo foi um sucesso. Diante disso, mandou que chamassem o súdito imediatamente para uma conversa. Perguntou-lhe o que queria como recompensa, já que o objetivo havia sido atingido em sua plenitude. Ofereceu-lhe ouro, jóiais, posses e até um casamento com uma de suas filhas.

Porém, para a surpresa do governante, a resposta do súdito foi que queria grãos de arroz, distribuídos da seguinte forma: 1 grão na primeira casa, 2 na segunda, 4 na terceira, 8 na quarta e assim sucessivamente, sempre duplicando a quantidade de grãos da casa anterior, até que as 64 casas estivessem completas.

O rei, maravilhado e boquiaberto com a humildade do súdito, mandou que trouxessem imediamente os grãos de arroz. Ao iniciar a empreitada, percebeu que todo o seu reino não possuía quantidade de grãos suficiente para arcar com o compromisso. Desesperado, mandou chamar um matemático da corte. Este falou-lhe que nem todos os grãos do mundo seriam suficientes para cumprir o trato realizado.

Este é o primeiro relato de noções exponenciais que se conhece. É sabido que havia outros povos que já conheciam o modelo, mas o conto é o registro mais antigo conhecido.

Trata-se de uma simples história que poderia ser abordada para motivar o ensino do assunto. Decerto, a aluno ficaria muito mais curioso e atento às explicações, já que estaria ouvindo uma narrativa ocorrida no passado, englobando o assunto que será estudado logo a seguir.

Há outros vários exemplos para contextualizar e facilitar o entendimento de funções exponenciais e funções exponenciais naturais. Como mostrou-se uma motivação para o assunto exponencial, segue, retirado de Maor (2003), um pouco da origem do número e, intimamente ligado às funções exponenciais naturais.

> Ao longo da minha pesquisa, um fato ficou imediatamente claro: o número e era conhecido dos matemáticos pelo menos meio século antes da invenção do cálculo. (...) Como foi isso possível? Um explicação virtual é a de que o número e teria aparecido primeiro ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos. Alguém - não se sabe quem ou quando - deve ter notado o fato curioso de que se um capital P é composto n vezes por ano, durante t anos, a uma taxa anual de juros r e se permitimos que n aumente sem limites, a soma de dinheiro S, obtida a partir da fórmula $S = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$, parece aroximar-se de um certo limite. O limite, para $P = 1, r = 1$ e $t = 1$, é aproximadamente 2,718. Esta descoberta - provalvemente mais uma observação experimental do que uma dedução matemática rigorosa - deve ter assombrado os matemáticos do início do século XVII, para quem o conceito de limite não era ainda conhecido. Assim, as origens do número e e da função exponencial e^x podem estar muito bem ligadas a um problema mundano: o modo como o dinehiro aumenta com o passar do tempo (...). O papel bem mais familiar do e como uma "base natural"dos logaritmos teve que esperar até o trabalho de Leonhard Euler, na primeira metade do século XVIII, que deu à função exponencial o papel central que ela desempenha no cálculo.

Com esta motivação, almeja-se atingir os objetivos propostos para o trabalho, a saber:

1. **Reconhecer e verificar que o ensino de funções exponenciais através de aplicações cotidianas e de modelos consagrados da Física, Química e Biologia resulta em melhor compreensão e maior receptividade por parte dos discentes;** e

2. **Organizar e utilizar uma sequência didática de ensino de funções exponenciais, englobando a função exponencial natural e um breve histórico do número e sob uma perspectiva aplicada, baseando-se em modelos consagrados e curiosidades que usam modelos exponenciais.**

Por fim, para atingir os objetivos delimitados, procurou-se estruturar o trabalho em quatro grandes capítulos, excetuando-se o corrente tópico introdutório e as considerações finais. Primeiramente, temos um capítulo destinado à motivaçào e à contextualização do estudo dos modelos exponenciais. Aqui, pretende-se revisar a bibliografia dos documentos que amparam o ensino de Matemática no Ensino Médio quanto ao assunto em pauta, bem como pesquisar outras publicações que tratem, de maneira ampla, do tema exponencial e, mais especificamente, de modelos exponenciais naturais. O foco é, ao final desta parte, ter um embasamento sólido que justifique a necessidade da constante procura de motivar o ensino da Matemática.

Na sequência, tem-se um capítulo teórico sobre função exponencial natural e o número e. Trata-se da parte matemática do trabalho, procurando apresentar os assuntos com o formalismo necessário e adequado ao ensino que se propõe. Nesta parte, procura-se mostrar toda a construção teórica necessária à correta contextualização dos assuntos. Finalizando, ainda haverá um tópico destinado às principais aplicações de modelos exponenciais, bem como curiosidades julgadas interessantes para a abordagem no Ensino Médio.

Após, há o desenvolvimento de mais um capítulo, este contendo uma tabulação de resultados obtidos, frutos de uma pesquisa destinada aos professores que lecionam no Ensino Médio. Tal compilação é qualitativa, onde está exposto um resumo com as respostas mais adequadas e interessantes ao trabalho. Esta pesquisa teve como finalidade precípua levantar os principais pontos acerca do ensino de funções exponenciais, bem como as maiores dificuldades encontradas e a coleta de sugestões e oportunidades de melhoria no seu ensino. Vale destacar que a pesquisa se encontra, na íntegra, como apêndice ao trabalho.

Por fim, atendendo a um dos objetivos deste projeto, tem-se a elaboração de uma sequência didática para a abordagem dos conteúdos de funções exponenciais, exponencial natural e número e. Trata-se de uma proposta de quatro aulas, com algumas motivações para o estudo e sequências de abordagem dos assuntos atinentes à matéria, diferentes das usuais. Com isso, pretende-se propor algo distinto do que é praticado corriqueiramente nas nossas escolas, visando à melhoria de assimilação e entendimento dos alunos. A intenção não é revolucionar o ensino, mas sim propor algo que apresente resultados melhores no processo de ensino-aprendizagem.

Faz-se mister deixar explícito que esta pesquisa complementa outro trabalho de conclusão de curso do PROFMAT, intitulado *Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações*, de autoria do colega Igor Alvarenga da Silva Nascimento. Há muitos embasamentos comuns porém, quando associados, consegue-se ter um panorama completo do ensino de modelos e funções exponenciais. A divisão da abordagem do assunto em, para um trabalho, funções exponenciais e, para outro, o número e e função exponencial natural, tem por objetivo facilitar a compreensão e cobrir, ao máximo, o conteúdo, que é bem extenso. Entretanto, a intenção é a mesma: contribuir, de alguma forma, para a melhoria das práticas de ensino adotadas.

1 Por que contextualizar?

A Matemática, na maior parte das observações, é tida como a disciplina mais difícil e mais abstrata para o jovem aluno do Ensino Médio brasileiro. Discentes que não pretendem seguir a carreira profissional na área de Ciências Exatas possuem verdadeiro "pavor"de estudar os conteúdos matemáticos.

É bem verdade que, por uma predisposição natural, prefere-se estudar aquilo que mais se tem afinidade. Um aluno que gosta muito de ler romances, provavelmente, terá uma aptidão maior ao estudo de Língua Portuguesa. Já aquele que gosta de fatos históricos e culturas de civilizações passadas preferirá o ensino de História e Geografia. Certo é que, naturalmente, se estuda com mais afinco aquilo que mais se gosta.

Na Matemática, não é diferente. Porém, por sua imensidão de conteúdos e áreas, algumas partes se tornam difíceis e desconexas, mesmo para aqueles que tem alguma habilidade para a disciplina. E um dos principais motivos repousa na falta ou na ineficiência de se mostrar a aplicabilidade daquilo que se ensina.

Focando no Ensino Médio, constata-se que uma dessas matérias ensinadas abstratamente é o conteúdo de funções exponenciais. Daí, a escolha pelo tema. Não só pelo desafio de tentar propor, com toda modéstia e humildade, alguma mudança significativa, mas por entender que se trata de uma parte da Matemática que é importante ao extremo para a formação do cidadão em geral, e não apenas para aqueles que enveredarem pelo "caminho das Exatas".

Corroborando o que se descreveu acima, cita-se Julianelli, em *Ensinar Matemática - Dificuldades e Perspectivas* (2015):

> Mesmo antes do advento da Matemática Moderna, o ensino dessa matéria já incomodava alguns educadores de várias partes do mundo, que, a partir de então, intensificaram movimentos no sentido de transformar o ensino da Matemática, que se mostrava inadequado, desinteressante e apresentava resultados muito ruins com relação ao aproveitamento dos estudantes (JULIANELLI, 2015).

Ainda como motivação para o aprofundamento do estudo de ensino de modelos exponenciais, tem-se a sua aplicabilidade em vários segmentos profissionais e no cotidiano. Pode-se citar: decaimento radioativo, cálculo de juros compostos, crescimento exponencial, cultivo e cultura de bactérias, velocidade de pouso de um paraquedas de asa, entre inúmeras outras aplicações. Por isso que deseja-se ressaltar a importância do ensino deste conteúdo no Ensino Médio, propondo um modelo mais palatável ao jovem aluno, prestes à ingressar no ensino superior.

Cabe ressaltar que este resgate de importância em mostrar a aplicabilidade do que é ensinado não é inédito. Vários documentos governamentais já fazem referências e ressaltam a importância em se contextualizar ao máximo o ensino de Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), na área de Ciências Exatas e da Terra, deixam bem claro os rumos e direções que o ensino no Brasil deve trilhar. Novamente, expõe-se:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.(BRASIL, 1998, p. 41)

Ainda, conforme os Parâmetros, percebe-se a preocupação em contextualizar o ensino da Matemática. Os conteúdos devem permitir o *link* do mundo escolar com o mundo real. Os assuntos abordados não podem estar desconexos da realidade do discente, sob o risco de perda de interesse na disciplina e, em cenário mais trágico, ocorrência de evasão escolar. A Matemática deve ser uma ferramenta útil na inferência de conclusões acerca de uma temática e na modelagem de problemas. E umas das partes passíveis de interligação são as funções, em espectro amplo. Desta feita:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao Ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito e função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando o seu conhecimento sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1998, p. 43 e 44)

Vale ressaltar que a contextualização dos temas deve ser sutil e lógica. Não se deve buscar integrar todo e qualquer conteúdo. O educador deve saber que há tópicos que carecem de aplicações, mas possuem extrema importância no desenvolvimento de outras competências. O que não se pode deixar de realizar é a interdisciplinariedade dos tópicos que são de fácil compreensão. A contextualização forçada pode, inclusive, prejudicar o processo de ensino-aprendizagem, deixando o discente mais confuso e mais desconexo de sua realidade.

Há uma passagem interessante que confirma o exposto acima:

> Em Matemática, a contextualização é um instrumento bastante útil, desde que interpretada numa abordagem mais ampla e não empregada de modo artificial e forçado, e que não se restrinja apenas ao cotidiano do aluno.

> Defende-se a idéia de que a contextualização estimula a criatividade, o espírito inventivo e a curiosidade do aluno. (FERNANDES, 2011)

É bem verdade que houve um progresso quanto ao processo de ensino-aprendizagem e suas relações com a sociedade. Cada vez mais, nota-se a preocupação em ensinar conforme as demandas do mundo em que se vive. É claro que não se deve lecionar sem objetivos. Porém, o que se observa é uma procura pela adequação dos objetivos emanados pelos órgãos competentes às atividades profissionais e ao cotidiano social.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é uma prova cabal deste processo. Todas as questões (ou quase a sua totalidade) são bem contextualizadas, mostrando aplicações aos ensinamentos que estão sendo cobrados. Notícias de periódicos, trechos de clássicos literários, manchetes históricas e exemplos profissionais são alguns dos mecanismos utilizados para trazer a realidade do mundo que nos cerca para a avaliação que decidirá o ingresso em curso superior.

A prova é diferente dos processos de avaliações tradicionais: é contextualizada e interdisciplinar. Enquanto os antigos vestibulares promoviam uma excessiva valorização da memória e dos conteúdos em si, o ENEM procura colocar o estudante diante de situações-problemas, exigindo mais que a assimilação de conceitos, mas sim a sua aplicação.

O grande problema é que o ensino das escolas, apesar da preocupação, ainda está longe do ideal. A mobilização em avaliar e quantificar conhecimento ainda é maior que a preocupação em aprender e alicerçar ensinamentos. De fato, deve haver uma forma de avaliação e o objetivo do presente trabalho não é discutir qual seria o melhor formato. Todavia, o modelo de ensino, pautado em transmissão de conhecimentos puros e prontos, sem que haja a construção do raciocínio e a motivação para o estudo, que se questiona. E quando se fala de Matemática, isso fica mais latente e ressaltado.

Com a evolução tecnológica que o mundo presencia e atravessa, a informação tornou-se muito volátil e fácil de ser obtida. Com um *smartphone*, obtem-se, sem maiores dificuldades, uma ampla bibliografia dos mais variados assuntos. Estudar está mais fácil, porém ensinar tornou-se mais complicado. Qual é o incentivo que um aluno pode ter em presenciar uma aula de um docente baseada puramente em conceitos abstratos, puros e desconexos? A resposta clássica é: este tipo de aula é obtido na internet. Portanto, o saber docente deverá fazer a diferença nos bancos escolares. O professor tem a missão de proporcionar ao aluno algo que não se é obtido eletronicamente. Ainda, tem como objetivo precípuo construir o conhecimento de forma espontânea, clara, precisa, embasada e aplicada. E mais: deve usar todo recurso tecnológico disponível em prol da construção do conhecimento. Atualmente, não há mais espaços para simples memorizações em quadro branco e canetas.

É claro que o docente deve buscar o seu constante aperfeiçoamento. Sabe-se que, por vezes, torna-se difícil pelo volume de atividades que desempenha. Entretanto, é algo que precisa ser perseguido incessantemente. O educador necessita se preparar para um novo mundo desconhecido e desafiador. Conforme o renomado Prof Elon Lages Lima, o docente, por não ter o tempo adequado de planejar aulas, acaba por utilizar simples reproduções de conteúdos. Conforme Lima (2007a, p. 149):

> Os professores do ensino básico, quer por formação quer por hábito, acham-se envolvidos numa rotina de trabalho onde os assuntos abordados são aqueles em que se sentem seguros de tratar e os exercícios propostos são quase sempre aqueles mesmos que eles já sabem resolver.

Ainda, na mesma vertente, corroborando o professor Elon Lages Lima, transcreve-se Daniel Cordeiro, em publicação versando sobre análise de contextualização de funções exponenciais e logarítmicas no Ensino Médio:

> Uma ferramenta importantíssima para o professor, a fim de também ajudá-lo nesses desafios é a contextualização, pois sua utilização dá o sentido e o significado tão desejado à aprendizagem. Uma boa contextualização motiva e estimula a construção do saber. Entretanto, muitas vezes, o professor, sobrecarregado com suas atividades, não tem tempo de procurar boas contextualizações para usar em sala de aula e nem algum livro-texto que escolheu o ajuda nesse sentido (FILHO, 2014, p. 1).

Assim, há a urgência em reavaliar os cursos de formação de professores. A sociedade não precisa do mesmo profissional que precisava nos anos 90. Os alunos dos cursos de licenciatura, especificamente em Matemática, precisam ser preparados para enfrentar os desafios da educação do século XXI. Conforme Julianelli (2015, p. 37), temos:

> Ora, sabemos que o modo como as pessoas aprendem e lidam com a informação mudou, devido principalmente às novas tecnologias que avançam com grande rapidez. E se o modo de aprender mudou, não é possível sustentar um modelo de escola e de aulas que tentam ensinar da mesma maneira de sempre. Mas o professor, que é peça importante nesse processo, também precisa mudar. Logo, falar em uma nova maneira de ensinar Matemática é totalmente inócuo. É preciso, portanto, remodelar os cursos de Licenciatura, dando ênfase exatamente na formação do professor, na sua maneira de atuar em sala de aula.

A passagem acima corrobora a necessidade de se formar o docente conforme os parâmetros que se deseja para o ensino de base. É bastante penoso ensinar algo aplicadamente quando se tem a formação estritamente pura. E isso vem acontecendo nos cursos de licenciatura em Matemática. Vale a reflexão sobre o assunto. Certamente, contribuirá muito para se alcançar o ensino que se deseja. Para ilustrar melhor:

> (...)O saber matemático, teórico e formal parece estar razoavelmente sedimentado nos estudantes dos cursos de licenciatura, porém, há pouco

> investimeto na reflexão sobre a prática docente, isto é, acerca de como esse profissional recém-formado atuará em sala de aula. É muito importante que as universidades comecem a repensar, urgentemente, a formação desses profissionais que atuarão na escola básica. O que observamos em nossa prática docente com alunos dos cursos de licenciatura em Matemática é que, em vários casos, estão entrando no mercado de trabalho muitos profissionais despreparados para exercer sua profissão de forma qualificada e com a eficiência esperada (JULIANELLI, 2015, p. 60 e 61).

Sabendo da importância de um ensino interdisciplinar e contextualizado e de um professor cada vez mais preparado e motivado para exercer o seu papel de educador e de docente, ressalta-se a necessidade desta aplicação e empenho nos modelos exponenciais, por ser um teor de grande importância na formação do aluno. Trata-se de um conteúdo que "possui papel formativo de possibilitar o desenvolvimento do processo estrutural do pensamento e a aquisição de atitudes", conforme Filho (2014, p. 5).

A necessidade de se estudar padrões exponenciais se deu através do surgimento de problemas sociais e naturais, tais como: crescimento populacional, a meia-vida de substâncias, mensuração de pressão atmosférica, sistemática de juros compostos, perícia de resfriamento de corpos mortos, entre outros. Assim, repara-se que há uma ligação íntima entre a Matemática e as outras disciplinas ministradas para o aluno do Ensino Médio. Sem dúvidas, é uma das partes da Matemática onde a interdisciplinariedade pode ser mais explorada. Com isso, mostra-se ao discente que o modelo é imperativo para que se resolva problemas reais, cotidianos e aplicados às disciplinas que aprendem.

Utilizando como exemplo o crescimento populacional, observou-se padrões exponenciais que corroboraram leis de formação para o cálculo do número de seres vivos em dado momento e determinado lugar. Algumas teorias, inclusive a mais famosa delas, a teoria malthusiana[1], afirmam que determinadas populações podem crescer a taxas exponenciais quando alguns critérios são observados. Ambientes favoráveis e baixo crescimento populacional inicial são fatores que contribuem para que esse modelo se desenvolva. Na Biologia, exemplificando, as culturas de bactérias preenchem tais requisistos.

Os problemas decorrentes de crescimento populacional, devido à importância singular que possuem, são abordados de incontáveis formas, seja em livros técnicos, de ficcão, romances ou em filmes consagrados. O *Best Seller* de Dan Brown *Inferno* aborda o problema de crescimento exponencial populacional vinculado a um suspense relacionado às grandes doenças que assolaram a humanidade. Em linhas bem gerais, a trama aborda a solução para conter o aumento populacional atráves de manipulação de grandes pestes ou

[1] Em linha gerais, a Teoria Malthusiana afirmava que, enquanto a população crescia geometricamente (ou exponencialmente), a produção alimentar aumentava em progressão aritmética, o que geraria um colapso social, desencadeando fome e miséria. Afirmava ainda que deveria haver um controle populacional rígido e que guerras, fome e pestes (doenças e epidemias) atuariam como mecanismos de retração demográfica. Denomina-se Malthusiana porque foi concebida pelo inglês Thomas Malthus (1766-1834)

doenças, ocasionando mortes e colapsos sociais.

Albert Allen Bartlett (1923 - 2013) foi professor emérito da cadeira de Física da *University of Colorado at Boulder*, nos Estados Unidos da América, tendo lecionado mais de 1.700 vezes a palestra "*Arithmetic, Population and Energy*", em tradução livre, "Aritmética, População e Energia". Conforme Bellos (2015, p.155):

> Bartlett, que é alto e de compleição física robusta encimada por uma imponente cabeça, usava uma gravata do Velho Oeste do tipo de cordão, presa por um clipe com um enfeite em forma de planeta e estrelas. Em sua famosa palestra, ele proclama como um sinistro agouro que a maior deficiência da raça humana é nossa incapacidade de entender o crescimento exponencial. A mensagem, simples mas poderosa, projetou-o nos anos recentes a um estrelato na internet: uma gravação de sua fala no YouTube, intitulada *O mais IMPORTANTE vídeo que você já viu*, registrou mais de 5 milhões de acessos.

O tema é polêmico e preocupante. Mas, sem sombra de dúvidas, é uma excepcional forma de contextualizar o tema em questão. Prosseguindo:

> O interesse de Albert Bartlett em exponenciais logo se estendeu para além de questões de superpopulação, poluição e trânsito em Boulder, uma vez que os argumentos que apresentou ao conselho da cidade também se aplicavam ao mundo como um todo. A Terra não pode sustentar uma população que cresce proporcionalmente a cada ano, pelo menos não por muito tempo. As ideias de Bartlett fizeram dele uma versão contemporânea de Thomas Malthus, o clérigo inglês que há duzentos anos argumentou que o crescimento da população levaria à fome e à doença, já que o crescimento exponencial não pode ser alcançado por um correspondente crescimento na produção de alimentos. "Malthus tinha razão!", afirmou Bartlett. "Ele não previu o petróleo e a mecanização, mas suas ideias estavam corretas. Ele compreendeu a relação do crescimento exponencial versus crescimento linear. A população tem a capacidade de crescer mais rapidamente do que podemos fazer crescer os recursos dos quais necessitamos para sobreviver."E acrescentou: "Não importa quais sejam as premissas, a população entre em colapso em meados deste século, dentro de quarenta anos". (BELLOS, 2015, p.175)

Fazendo uma pausa: não se pretende aterrorizar a classe! É importante que se deixe isso claro aos alunos. A temática é importante porém, as teorias e conclusões de Malthus e Bartlett não são frias como aparentam: há um complexo estudo de variáveis que fogem do escopo do trabalho. Não se deseja que o jovem retorne ao seu lar dizendo aos pais que o mundo entrará em colapso no prazo máximo de meia década! Certamente, a direção da escola não ficará contente com as possiveis indagações dos familiares.

Uma outra abordagem que aguçará a curiosidade dos alunos é a dobradura de papel. Sabe-se que os números, sob um modelo exponencial, à medida que se tornam maiores, mais rapidamente crescerão. Alex Bellos também nos fornece esse exemplo, de forma bastante clara e feliz:

> Quando um número aumenta exponencialmente, quanto maior ele fica, mais depressa aumenta, e depois de apenas um punhado de repetições pode atingir um tamanho surpreendente. Considere o que acontece com uma folha de papel ao ser dobrada. Cada dobra duplica sua espessura. Como o papel tem cerca de 0,1 milímetro de espessura, as espessuras depois de cada dobra são 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; 3,2; 6,4; ... Como o papel está ficando mais grosso, cada dobra requer mais força, e na sétima já é fisicamente impossível continuar. A espessura do papel nesse ponto é 128 vezes a de uma simples folha, o que a faz ter a grossura de um livro de 256 páginas.
>
> Mas continuemos, para ver - ao menos na teoria - a espessura que esse pedaço de papel vai ter. Após mais seis dobras o papel já tem quase um metro de altura. Seis dobras depois, tem a altura do Arco de Triunfo, e com mais seis será uma torre de três quilômetros projetando-se no céu. Por mais ordinária que seja uma duplicação, quando realizamos esse procedimento repetidas vezes, não leva muito tempo para que os resultados sejam extraordinários. Nosso papel vai ultrpassar a Lua depois de 42 dobras, e o número total de dobras necessário para que atinja o limite do universo observável é apenas 92. (BELLOS, 2015, p.156)

Com estes exemplos, procurou-se amparar e motivar, ainda mais, o estudo das funções exponenciais. Na sequência do trabalho, pode-se observar uma seção dedicada a uma seleção de aplicações e algumas curiosidades que envolvem esse tipo de modelo. Desta feita, não se pretende esgotar o assunto no atual capítulo, servindo apenas para ilustrar o porquê da contextualização com um problema passado, mas que ainda alcança e intriga o presente.

A seguir, apresenta-se um capítulo dedicado à construção matemática da teoria de função exponencial natural e a sua inversa, a função logarítmica natural, bem como um breve histórico do número e. Pretende-se, assim, fornecer os subsídios matemáticos necessários à correta assimilação dos conceitos. Vale lembrar que se trata de um estudo dedicado aos professores, de forma a revisar conteúdos e, se possível, agregar conhecimentos aos leitores. É importante que o docente tenha uma base sólida da matéria que ministrará. Isso faz com que ele esteja mais seguro para transmitir aquilo que se deseja. Por fim, vale frisar que formalismo apresentado, por vezes, não será interessante ao aluno de Ensino Médio, contudo poderá ser bastante útil ao graduando dos cursos de Licenciatura em Matemática.

2 Função Exponencial Natural e o Número e

Como introdução desta parte, começa-se a analisar e a entender alguns conceitos das funções exponenciais em base qualquer. Como praxe na Matemática, partiremos do caso geral para, após algumas conclusões, chegarmos ao caso mais específico, que para o presente trabalho são as funções exponenciais naturais. Assim, vamos a algumas considerações:

Tome a um número real positivo e diferente de 1[1]. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, denotada por $f(x) = a^x$ é definida para que tenha as seguintes propriedades para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

(1) $a^x.a^y = a^{x+y}$;

(2) $a^1 = a$; e

(3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$, quando $0 < a < 1$.

Antes de seguir adiante com o raciocínio, faz-se necessário estabelecer algumas observações que serão importantes na construção proposta no trabalho:

1. A função f não poderá assumir o valor 0 (caso assuma, ela será identicamente nula). Pode-se observar que, caso haja algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0).f(x - x_0) = 0.f(x - x_0) = 0.$$

Assim, f será identicamente nula.

2. A função $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

Uma nota importante à observação é ressaltar que não faz diferença em tomar $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ como contradomínio de f. A vantagem óbvia em adotar-se $\mathbb{R}^+$ é que a função, desta forma, será sobrejetiva.

3. Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedades (1) e (2) elencadas na definição, então, para $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$f(n) = f(1 + 1 + 1 + \ldots + 1) = f(1).f(1).\ldots.f(1) = a.a.\ldots.a = a^n$$

[1] É fácil observar e constatar a restrição do valor de a para diferente de 1: pelas propriedades de potência de um número inteiro, qualquer valor assumido para a variável no expoente, resulta no valor 1, ou seja, a função f seria constante

Assim, usando a propriedade (1) da definição acima e as propriedades de potência de um número, vale que, para todo número racional $r = \dfrac{k}{l}$, com $l \in \mathbb{N}$, teremos $f(r) = a^r = \sqrt[l]{a^k}$. Então, $f(r) = a^r$ é a única função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r).f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

4. Existe uma única forma de definir o valor $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Supondo $a > 1$, a^x tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s$$

Isto significa que o número a^x é o número real que possui aproximações por falta e por excesso iguais a a^x e a^s, respectivamente, com $r, s \in \mathbb{R}$. Prosseguindo com a sequência de raciocínio, cita-se o seguinte lema, que não será demosntrado, podendo ser consultado na publicação da Sociedade Brasileira de Matemática intitulada *Matemática para o Ensino Médio, volume 1*:

Lema 2.0.1. *Dado um número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$, existe uma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Ora, não pode haver dois números reais diferentes, digamos $K < L$, com a propriedade de estar entre duas potências de expoente racional pois, se isso ocorresse, o intervalo $[K, L]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o lema enunciado.

Assim, consegue-se concluir que, quando x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com $r \in \mathbb{Q}$ e $r < x$ e, cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com $s \in \mathbb{Q}$ e $s > x$.

Portanto, definimos a^x para todo $x \in \mathbb{R}$ e verificamos que as propriedades da definição são válidas.

5. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente. Tal afirmação é apoiada pelo Lema 2.0.1, pois todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$. De forma mais simplista, pode-se inferir que, se $a > 1$, então a^x cresce ilimitadamente quando $x > 0$ é grande e, se $0 < x < 1$, então a^x torna-se tão grande quanto se deseja para $x < 0$ possuindo valor absoluto grande.

6. Pode-se dizer que a função exponencial é contínua, pois toma-se a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se almeje, colocando os valores de x suficientemente próximos de x_0. Aqui, deixa-se registrado uma notação mais rebuscada, devendo-se ter muito cuidado ao abordá-la com o discente do Ensino Médio: o limite de a^x quando x tente a x_0 é igual a a^{x_0}, isto é:

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$

Agora, como tem-se uma definição rigorosa da Função Exponencial, passa-se às considerações acerca da Função Exponencial Natural, a sua inversa, a Função Logarítmica Natural e o número e.

2.1 As funções exponencial e logarítmica naturais

2.1.1 O Número e

Começamos a seção com uma observação sobre a noção de números irracionais sob a ótica dos alunos do Ensino Médio. É normal, ao questionar uma classe do segmento médio, quais exemplos comuns de números irracionais. As respostas com maiores incidências são $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π. Dificilmente ouvimos algo do tipo: $4+\sqrt{3}$, $6.\sqrt{10}$ ou e. O conhecimento sobre este último número é bem restrito. Quando há algum apontamento, é relacionado com a base do logaritmo natural. No entanto, a intenção desta seção, mais especificamente, é fornecer subsidios para elucidar fatos sobre a história deste número importante para a Matemática.

Para o número π, tradicionalmente, é definido como a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmentro. Assim, para uma circunferência de raio r, π será:

$$\pi = \frac{2\pi.r}{2r}$$

Acrescenta-se ao fato do fácil entendimento, a larga abordagem do conteúdo de trigonometria no Ensino Médio. Desta forma, o número π é gradualmente introduzido no vocabulário do discente, tornando a experiência pouco estranha ou traumática. Todos os conteúdos relacionados à circunferência e ao círculo empregam o número π de algumas maneiras: áreas, comprimentos, arcos, relações trigonométricas, entre outros.

Quando ao nosso "primo pobre do π", o que podemos afirmar? Os grandes questionamentos são: o que dizer sobre o número e? Como ele surgiu? Ele também é obtido através de uma razão da circunferência? Por que é irracional?

Ao final desta parte, almeja-se responder algumas destas perguntas. Veremos que a história deste número é tão bela quanto importante para a Matemática e para inúmeras áreas do conhecimento. A intenção é, através de uma pesquisa bibliográfica, levantar os principais pontos da história da Matemática em que o número e foi empregado ou cogitado. Veremos que são várias as passagens onde encontramos o famoso número de Euler. Ainda, tentar-se-á pautar algumas considerações sobre o número.

Iniciando a nossa pesquisa, voltamos a citar uma passagem do livro *e: a história de um número*, de Eli Maor:

> Ao longo da minha pesquisa, um fato ficou imediatamente claro: o número e era conhecido pelos matemáticos pelo menos meio século antes

> da invenção do cálculo (ele já era mencionado na tradução inglesa de Edward Wright do trabalho de John Napier sobre logaritmos, publicado em 1618). Como foi isso possível? Uma explicação virtual é a de que o número e teria aparecido primeiro ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos. Alguém - não se sabe quem ou quando - deve ter notado o fato curioso de que se um capital P é composto n vezes por ano, durante t anos, a uma taxa anual de r e se permitirmos que n aumente sem limites, a soma de dinheiro S, obtida a partir da fórmula $S = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$, parece aproximar-se de um certo limite. O limite, para $P = 1$, $r = 1$ e $t = 1$, é aproximadamente 2,718.(...) Assim, as origens do número e e da função exponencial e^x podem muito bem estar ligadas a um problema mundano: o modo como o dinheiro aumenta com o passar do tempo.

Tentando ilustrar melhor, vamos observar a tabela seguinte:

Tabela 1: Resultados de $S = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$

Capital (P)	Nr de vezes (n)	Tempo (t)	Juros (r)	Soma (S)
1	45	1	1	2,688681171
1	90	1	1	2,703332461
1	135	1	1	2,708282000
1	180	1	1	2,710769298
1	225	1	1	2,712265705
1	325	1	1	2,714111620
1	425	1	1	2,715090736
1	625	1	1	2,716110388
1	1625	1	1	2,717445926
1	4625	1	1	2,717980066
1	5625	1	1	2,718040277
1	10625	1	1	2,718154005
1	20625	1	1	2,718216019
1	1000625	1	1	2,718293008
1	100000625	1	1	2,718298804
1	10000000625	1	1	2,718281997

Fica nítido que, ao aumentarmos o valor de n, o valor de S se aproxima de um determinado número, a saber, e. Em termos matemáticos, o limite parece que se aproxima de $2,718$. O fato causou um forte impacto nos matemáticos da época, já que a noção de limite não era conhecida e desenvolvida como temos na atualidade.

Em Bellos (2015), há um gráfico que retrata muito bem o que tenta-se explicar: faz-se um depósito no valor de uma libra durante um ano com uma taxa de 100% ao ano, com composições proporcionais em intervalos diferentes. A linha tracejada expressa uma composição bianual, enquanto a "escada"representa juros mensais. À medida que os intervalos são infinitamente pequenos, a linha se aproxima da curva $y = e^x$.

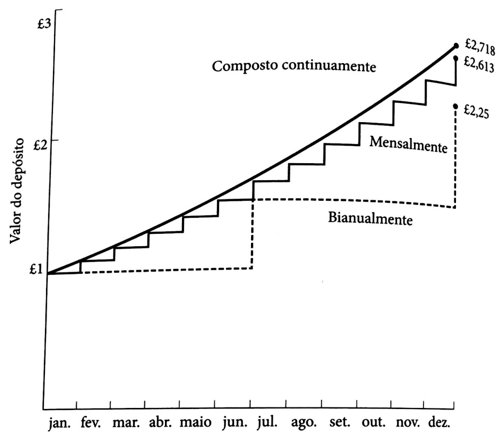

Figura 1: Valor de 1 libra no decurso de um ano a juros anuais de 100%, com composição bianual, mensal e contínua

Um pouco mais desta história, voltemos a Maor (2003)[pág. 43 e 44]:

> Na comunidade bancária podemos encontrar todos os tipos de composição de juros - anual, semestral, trimestral, semanal e mesmo diário. Suponha que a composição é feita n vezes ao ano. Para cada "período de conversão"o banco usa a taxa de juros anual *dividida* por n, que é $\frac{r}{n}$. E como em t anos existem (nt) períodos de conversão, um principal P, após t anos renderá $S = P\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}$.

Para ilustrar melhor o que não era conhecido na época desta descoberta, procuraremos mostrar a existência do $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ e estimaremos o seu valor. Ressaltamos, mais uma vez, a necessidade de se selecionar os conteúdos a serem abordados nas classes de Ensino Médio. A demosntração a seguir servirá apenas como motivação para o estudo do número e, não devendo ficar presa a formalismos matemáticos.

Primeiramente, deve-se considerar a seguinte sequência:

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Mostraremos que ela converge para um limite conforme o valor de n cresce indefinidamente.

Como esta soma aumenta com o acréscimo do termo subsequente, vale dizer que $S_n < S_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, S_n aumenta monotonamente.

Para $n = 3$, vale dizer que $n! = 1.2.3.\ldots.n > 1.2.2.\ldots.2 = 2^{n-1}$. Então:

$$S_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}},\ n = 3, 4, 5, \ldots \tag{2.1}$$

Observando o lado direito da desigualde 2.1, a partir do segundo termo, constata-se uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$. Logo, a soma será igual a $\dfrac{(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-\dfrac{1}{2^n}) < 2$.

Ora, então pode-se inferir que $S_n < 1 + 2 = 3$, permitindo concluir que a sequência é limitada superiormente por 3, ou seja: os valores de S_n não excedem 3. Como toda sequência monótona crescente e limitada tende para um limite quando n tende ao infinito, afirma-se que S_n converge para um limite S, que se encontra entre 2 e 3.

Consideremos a sequência $T_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Procuraremos demonstrar que ela converge para o mesmo limite de S_n, isto é, S. Conforme a expansão binomial, pode-se listar:

$$T_n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots .1}{n!}.\frac{1}{n^n} \tag{2.2}$$

$$= 1 + 1 + (1 - \frac{1}{n}).\frac{1}{2!} + \ldots + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\ldots(1 - \frac{n-1}{n}).\frac{1}{n!} \tag{2.3}$$

Observando atentamente as igualdades 2.2 e 2.3, percebemos que as expressões dentro dos parênteses em 2.3 é menor que 1. Assim, fica claro observar que $T_n \leq S_n$, tendo também um limite superior.

T_n também é monótona crescente (basta reparar que, substituindo n por $n+1$, a soma aumenta). Logo, T_n também converge para um limite quando $n \to \infty$. Assim, vamos denominá-lo T.

Já mostramos que $S_n \geq T_n$, para todo n. Então, $S \geq T$. Nos resta mostrar que, concomitantemente, $S \leq T$. Para isso, considere um número inteiro fixo m tal que $m < n$. Os primeiros $m - 1$ termos de T_n serão:

$$1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right).\frac{1}{2!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right).\frac{1}{m!} \tag{2.4}$$

Como $m < n$ e todos os termos são positivos, a soma 2.4 é menor do que a soma T_n. Fixando m e aumentando n indefinidamente, a soma tenderá para S_m, enquanto T_n tenderá para T. Portanto, vale afirmar que $S_m \leq T$ e, por consequência, $S \leq T$.

Ora, se mostramos que $S \geq T$ e que $S \leq T$, é correto dizer que $S = T$. Concluindo: os limites são iguais e $T = e$.

Concentremos neste ponto em mostrar ao leitor a prova da irracionalidade do número e. Para isso, vamos defini-lo na sua apresentação canônica, como séries infinitas:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \tag{2.5}$$

A prova é obtida por contradição, poderosa ferramenta em demonstrações matemáticas. Como já foi visto, o número e está compreendido entre dois números inteiros e, portanto, não pode ser um outro inteiro. Supondo e um número racional, podemos escrevê-lo como $e = \dfrac{m}{n}$, com $n > 1$.

Separando 2.5 em duas séries:

$$e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + \ldots \tag{2.6}$$

Ainda:

$$n!e = n!\frac{m}{n} = (n-1)!m = (n! + \frac{n!}{1} + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \ldots + \frac{n!}{n!}) + \ldots + R \tag{2.7}$$

com $R \neq 0$ sendo a diferença entre dois números inteiros e, por consequência, sendo inteiro.

Todavia:

$$R = n!\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots \tag{2.8}$$

E deve-se observar que:

$$R < \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots$$

se trata de uma soma de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{(n+1)}$. Esta soma é dada por:

$$\frac{(\frac{1}{n+1})}{(1 - \frac{1}{n+1})} = \frac{1}{n}$$

e

$$\frac{1}{n} < 1$$

Portanto, como $R < 1$ é estritamente positivo, temos uma contradição. Portanto, e é irracional.

De forma semelhante, podemos mostrar a prova da irracionalidade de e^2. Porém, para o leitor mais interessado, sugere-se a leitura do livro Π*he Irrati*Φ*nals: a story of numbers you can't count on* de Julian Havil. Em uma tradução livre: *Os Irracionais: a história dos números que não se pode contar.*

2.1.2 A Função Exponencial Natural

A função exponencial natural é uma das funções mais importantes dentre aquelas que devem ser ensinadas nos bancos escolares. Ela apresenta inúmeras aplicações na Matemática, Estatística, Ciências Naturais e Economia. Apesar do seu largo emprego e vasta importância, docentes, por vezes, ainda carecem de domínio pleno dos conceitos e definições.

A exponencial natural é a mais elegante das funções exponenciais. Qualquer que seja a base da função exponencial (com base positiva, claro), podemos reformulá-la, de forma a deixá-la como $y = e^{kx}$, para algum k positivo. Conforme (BELLOS, 2015):

> Por exemplo, a curva da sequência de dobros tem a equação $y = 2^x$, mas também pode ser escrita como $y = e^{0,693x}$. Do mesmo modo, a curva da sequência de triplos $y = 3^x$ tem forma equivalente $y = e^{1,099x}$. Os matemáticos preferem converter a equação $y = a^x$ numa equação $y = e^{kx}$ porque e representa crescimento em sua forma mais pura. Ele simplifica a equação, facilita os cálculos e é mais elegante. A constante exponencial e é o elemento essencial da matemática do crescimento.

A definição de função exponencial natural pode ser aprendida de várias formas. Aqui, nos valeremos, como forma de curiosidade, de cinco delas, ressaltando que o nosso objetivo é embasar o aprendizado responsável e atento do professor que ministrará os conteúdos acerca do assunto em questão para os alunos do Ensino Médio. Reforçamos que as abordagens fogem do escopo de ensino de tal segmento. Todavia, julga-se imperioso que o docente domine as ferramentas, podendo ser usadas em diversas explicações, desde que adaptadas para a realidade do público alvo. Assim, seguem as definições:

1ª Definição: $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$

2ª Definição: e^x é a inversa de $ln(x)$, onde $ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{s}ds$

3ª Definição: $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

4ª Definição: e^x é a única função contínua $f(x)$ que satisfaz a condição $f(a+b) = f(a).f(b)$ para $a, b \in \mathbb{R}$ e $f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

5ª Definição: e^x é a solução da equação diferencial $y' = y$, satisfazendo $y(0) = 1$

Analisando a 1ª definição, percebe-se que ela possui termos adequados a um curso de Cálculo. A função exponencial natural, através desta definição, poderia ser ensinada bem cedo, nas primeiras aulas da graduação. Porém, haveria alguns problemas decorrentes da construção da demonstração, esbarrando em conteúdos mais avançados.

A 2ª definição é usada nas cadeiras de Cálculo com mais frequência. A grande desvantagem é o requisito de se delinear o conceito de integral definida, que ocorre, geralmente, após os conceitos de limite e derivada.

Já a terceira é encontrada em cursos de Análise Real. É a mais universal das definições, sendo usada para definir outros tipos de funções, tais como a função seno,

$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e função cosseno, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. O entrave desta abordagem é o forte embasamento do estudo de séries, por vezes pouco abordado nas licenciaturas em Matemática.

A 4ª definição é a mais importante para o presente trabalho. Ela é uma das razões da grande importância das funções exponenciais e, mais especificamente, da função exponencial natural. Provavelmente, a afirmação é a mais abstrata dentre as cinco listadas, embora seja a mais bonita encontrada e com a grande vantagem de ter a possibilidade de ser abordada nas classes de Ensino Médio.

Porém, vamos fazer uma ressalva neste ponto para expressar uma importante característica desta função. Uma curva, ao se elevar exponencialmente, à medida que ela se torna mais alta, mais íngrime ela fica. Isso é um resultado direto da afirmação que diz: quanto mais subimos numa curva exponencial, mais rápido ela cresce. Desta forma, introduz-se o conceito de gradiente, que nada mais é que o nome matemático para a ingrimidade. Para exemplificar melhor, citamos (BELLOS, 2015, p.162):

> O gradiente de uma inclinação deve ser familiar a qualquer pessoa que alguma vez dirigiu um carro ou andou numa estrada acima. Se uma estrada sobe cem metros enquanto se cobrem quatrocentos metros horizontalmente, então o gradiente é $\frac{100}{400}$, ou, $\frac{1}{4}$, que um sinal de estrada bastante comum vai mostrar como 25%. A definição tem sentido intuitivo, pois isso significa que estradas mais íngrimes têm gradientes maiores, embora tenhamos de ser cautelosos. Uma estrada que tem um gradiente de 100% sobe em altura a mesma medida que percorre horizontalmente, o que quer dizer que ascende num ângulo de 45 graus. Em teoria é possível que uma estrada tenha um gradiente de mais de 100%, até mesmo ter um gradiente infinito, que seria o de um aclive totalmente vertical.

Assim, mediante análise da citação, conclui-se que curvas possuem gradientes variaveis. O gradiente em dado ponto é obtido através da tangente a este ponto, o qual será a razão entre a altura com a mudança horizontal, ou seja, a variação no eixo y e a variação no eixo x. Em última análise, é a tangente deste exato ponto.

Para as curvas exponenciais, quanto mais a curva "sobe", mais íngrime ela se torna, ou seja, maior o seu gradiente. Tomando sempre a variação horizontal como 1 (para que fique mais fácil visualizar), conclui-se que o gradiente, para as curvas exponenciais, sempre será um percentual da altura.

Ora, desta forma e neste momento, cabe a pergunta óbvia: que curva possui o gradiente e altura iguais? Como já se suspeita, esta curva é $y = e^x$, onde a cada ponto da curva, o seu gradiente é igual à sua altura. Mais uma observação:

> No entanto, a beleza geométrica da curva contrasta com sua feia prole: em espocar de dígitos decimais que começam com 2,718 e continuam indefinidamente sem se repetir. Por conveniência, representamos esse

> número com a letra e, e o chamamos de "constante exponencial". É a segunda mais famosa constante na matemática, depois de pi, mas, ao contrário de pi, que foi objeto de interesse durante milênios, e é um atrasadinho.

Por fim, a 5ª definição define a propriedade que coloca a função no centro das discussões em Cálculo. Embora seja apresentada como uma equação diferencial, conteúdo este visto nos períodos mais avançados das licenciaturas em Matemática, tem-se a vantagem de explicitar que se trata da função cuja função derivada é exatamente a própria função.

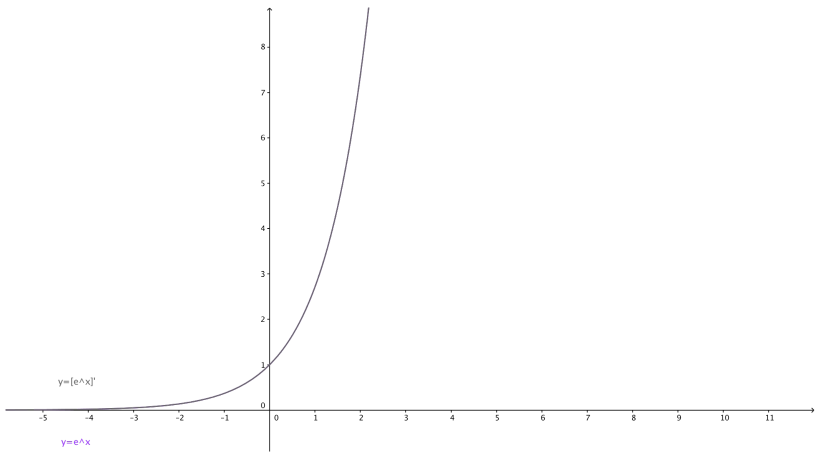

Figura 2: Curvas de $y = e^x$ e $y = (e^x)'$

O escopo do trabalho não é demonstrar as inúmeras definições da função com uso de "artifícios algébricos pesados". Pretende-se apenas fornecer subsídios adequados aos docentes para que se tenha condições de melhor entender e ensinar o assunto em pauta, o qual é tão importante ao desenvolvimento da capacidade de raciocínio do jovem estudante.

Assim, nos concentraremos na 4ª definição, que é a mais apropriada ao presente trabalho. Entretanto, observando o Teorema da Caracterização da Função Exponencial, contida no trabalho *Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicação*, do autor Igor Alvarenga da Silva Nascimento, percebemos que uma das equivalências demonstradas é, exatamente, a da definição em voga. Ora, se estamos diante do estudo da função exponencial natural e realizou-se uma caracterização da função exponencial em geral, nada mais adequado que afirmar que também é válida para a natural. Respalda-se no argumento de "partir do geral para o particular". Desta forma, utlizaremos um exemplo para mostrar e corroborar o que se tem citado.

Exemplo 1. Considera-se um experimento acerca do crescimento indefinido de células. Inicialmente, tem-se uma colônia c_0 de células crescendo por um tempo $t = a$. No tempo $t = a$, a colônia possuirá $c_0.e^x$ células.

Dividindo esta colônia em e^x colônia menores, cada uma possuíra um número de c_0 células.

Por fim, deixando a cada uma dessas colônias crescendo durante um tempo $t = b$ tem-se, para cada uma, um número de $c_0.e^x$ células.

Juntas, após o tempo $t = a + b$, ter-se-á o número de $c_0.e^x.e^y$ células.

Por outro lado, respeitando o que foi assumido sobre o crescimento celular, a divisão da colônia em um tempo $t = a$ não interfere nas células individuais. Então, após um tempo $t = a + b$, teremos $c_0.e^{a+b}$ células.

Confrontando, encontra-se:

$$c_0.e^{a+b} = c_0.e^a.e^b$$

exatamente o que se pretendia mostrar.

Em tempo, ainda temos como uma possível abordagem geométrica para o estudante do Ensino Médio o fato de que $y = e^x$ é o único número real positivo de modo que a faixa da hipérbole H_1^x seja igual a x. Para mostrar tal fato, faz-se necessária a apresentação de alguns teoremas e definições. Organizando melhor as ideias, comecemos pela seguinte:

Definição 1. A função $g : Y \to X$ é denominada *função inversa* da função $f : X \to Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(x)) = y$, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Obviamente, g é a função inversa de f se, e somente se, f for a função inversa de g.

Demonstração. Começando com ($\Rightarrow$):

Quando g é a função inversa de f, temos que $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$.

Se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, então a função f é injetiva, pois $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Na sequência, a igualdade $f(g(x)) = y$, válida para todo $y \in Y$, implica que f é sobrejetiva pois, dado $y \in Y$ arbitrário, toma-se $x = g(y) \in X$ e temos $f(x) = y$.

Ora, se a função $f : X \to Y$ possui inversa, então f é injetiva e sobrejetiva, isto é, fica-se diante de uma correspondência biunívoca entre X e Y.

Fazendo ($\Leftarrow$):

Se $f : X \to Y$ é uma correspondência biunívoca entre X e Y, então f possui uma função inversa $g : Y \to X$.

Definindo g, nota-se que, sendo f uma função sobrejetiva, para todo $y \in Y$, há algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Ainda, como f é injetiva, tal x é único. Pode-se, então, afirmar que $g(y) = x$.

Portanto, $g : Y \to X$ é a função a qual associa a cada $y \in Y$ o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Logo, constatamos que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, para $x \in X$ e $y \in Y$ quaisquer.

□

Continuemos a construção do raciocínio da abordagem geométrica para a função exponencial natural na subseção seguinte, dedicada a continuar com a apresentação da função logarítimica natural.

2.1.3 A Função Logarítmica Natural

De posse do conhecimento da definição enunciada na subseção anterior, passemos à definição de função logarítimica e à enunciação do seu teorema de caracterização. Vale lembrar que a definição 1 é importante para definir quais são as possíveis funções que admitem inversa, definidos os seus domínios e contradomínios. Não há nenhuma técnica elaborada na construção do passo-a-passo de sua demosntração, porém é algo pouquíssimo abordado nas escolas. Sob um primeiro olhar, é provável que a abordagem em sala seja dispensável, limitando-se apenas ao uso de seu resultado.

Definição 2. A inversa da função exponencial de base a é a função

$$log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

que associa a cada número real positivo x o número real $log_a x$, denominado logaritmo de x na base a. Pela definição 1, tem-se:

$$a^{log_a x} = x \;\text{ e }\; log_a(a^x) = x$$

Em última análise, $log_a x$ é o expoente ao qual devemos elevar a base a para obter o número x, a saber:

$$y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

O nosso alvo de estudo não são as funções logarítmicas. Entretanto, não podemos deixar de mencioná-la, mesmo que de maneira breve. Assim, ressaltaremos a propriedade de transformar produtos em somas. Tal característica faz com que tais funções sejam importantes e populares nos meios acadêmicos.

Proposição 2.1.1. $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$

Demonstração. Fazendo $k = log_a(x)$ e $l = log_a(y)$, então é certo dizer que $a^k = x$ e $a^l = y$. Portanto:

$$xy = a^k.a^l = a^{k+l}$$

ou seja,

$$log_a(xy) = k + l = log_a(x) + log_a(y)$$

□

Todo esse "aparato teórico"que envolve o estudo da função exponencial natural é necessário, já que desejamos mostrar uma motivação geométrica para a definição, além daquelas já explicitadas. Todavia, procurou-se uma construção gradual, com a finalidade de proporcionar o embasamento teórico adequado à construção do conhecimento. Basicamente, precisa-se definir:

1. O que é uma função inversa com suas condições de existência;
2. Tratar a função logarítmica como a função inversa da função exponencial;
3. Abordar geometricamente a função logarítmica natural, ln; e
4. Valendo-se da existência da função inversa, definir a função exponencial natural, e^x.

Até este ponto, conseguiu-se definir os dois primeiros tópicos, inclusive com a subseção anterior. Os dois seguintes e finais são os mais importantes para que se compreenda inequivocamente a teoria da função exponencial natural e suas características. Para isso, debruçaremos em Lima et al. (2006), que trata este tópico de forma bem clara e elucidativa. Portanto, eis os pontos:

Definição 3. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que associa cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $T(x, y) = \left(kx, \dfrac{y}{k}\right)$, alcançado de (x, y) com a multiplicação da abcissa por k e dividindo a ordenada também por k.

Através de uma interpretação bem atenta, conclui-se que T transforma toda figura H do plano em uma figura $H' = T(H)$, cujas dimensões em relação à figura H são alteradas pelo fator k nas dimensões paralelas ao eixo OX e pelo fator $\dfrac{1}{k}$ nas dimensões paralelas ao eixo OY. Para chegar a esta conclusão, deve-se, inicialmente, pensar em polígonos simples, como o retângulo, por exemplo. Concluindo a assertiva para tal polígono, podemos generalizar, através da decomposição de um polígino qualquer em tantos outros retangulares, fazendo os ajustes necessários e oportunos. Deixa-se como uma ótima fonte para consultas acerca do tema acima a publicação *Medida e Forma em Geometria*, do ilustre Elon Lages Lima.

Concentraremos, particularmente, nos efeitos da transformação T na hipérbole equilatéra. Tendo:

$$H = \left(x, \frac{1}{x}\right); x > 0$$

o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$. Desta feita, H é o gráfico da função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

Vamos considerar $m, n \in \mathbb{R}^+$. O conjunto H_m^n dos pontos (x, y) do plano tais que $a < x < b$ e $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$ denominamos *faixa da hipérbole*. Assim, H_m^n é o conjunto do plano limitado lateralmente pelas retas $x = m$, $x = n$, ambas retas verticais, pelo eixo das abcissas e pelo próprio ramo da hipérbole H. Aplicando a transformação $T = T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na faixa H_m^n obtém-se H_{km}^{kn}. Porém, como visto, T conserva áreas. Então, como conlusão, chegamos que:

$$\text{ÁREA } H_m^n = \text{ÁREA } H_{km}^{kn}$$

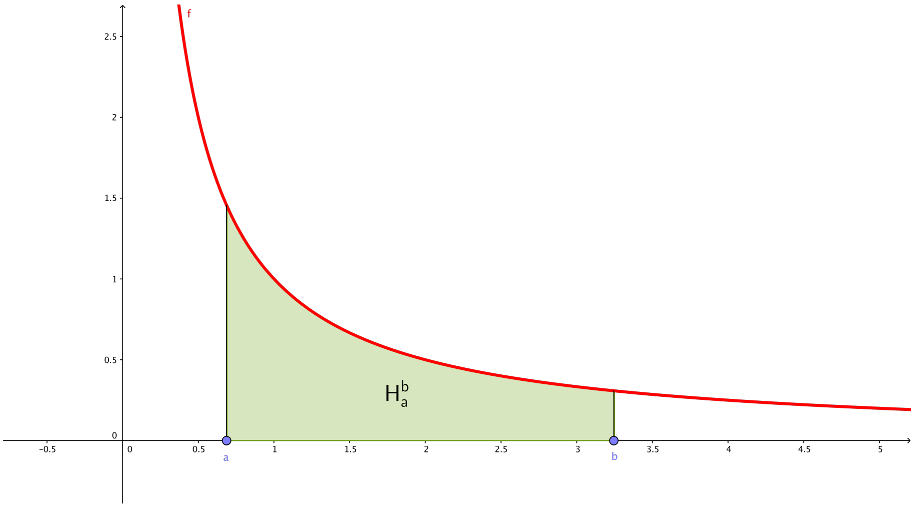

Figura 3: Hipérbole equilátera e área H_a^b

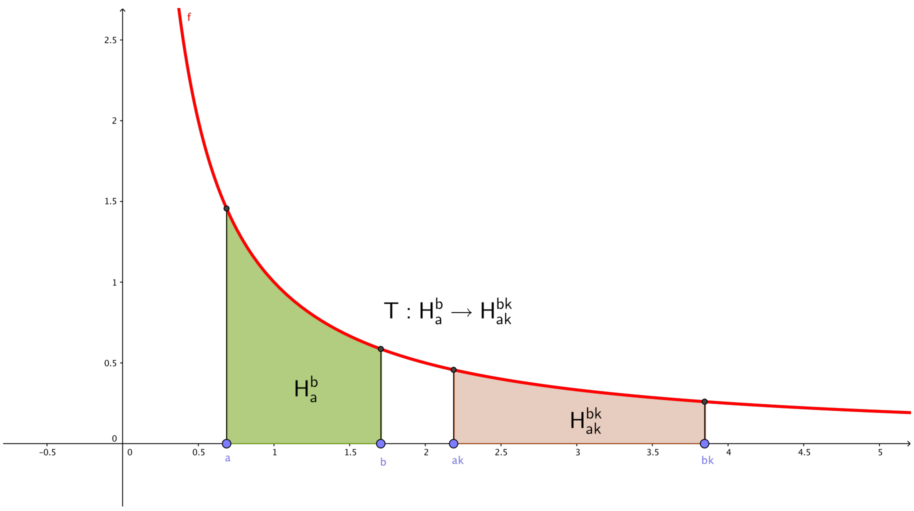

Figura 4: Transformação $T : H_a^b \to H_{ak}^{bk}$

Vamos definir uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pondo, para cada número real $x > 0$, $f(x) = \text{ÁREA } H_1^x$.

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$ tem-se:

$$f(xy) = \text{ÁREA } H_1^{xy} = \text{ÁREA } H_1^x \ + \ \text{ÁREA } H_x^{xy}$$[2]

Todavia, ÁREA H_x^{xy} = ÁREA H_1^y. Assim:

$$f(xy) = \text{ÁREA } H_1^x \ + \ \text{ÁREA } H_1^y$$

isto é,

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Portanto, para se obter algumas conclusões, deve-se apoiar no Teorema de Caracterização da Função Logarítmica (citado e esmiúcado no trabalho *Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações*, de autoria do colega Igor Alvarenga da Silva Nascimento) cujo enunciado é:

Teorema 2.1.2 (Caracterização da Função Logarítmica)**.** *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva, ou seja, crescente ou decrescente, tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então, existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Assim, existe um número real positivo, doravante denominado e, de tal forma que $f(x) = \log_e x$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Ainda, convenciona-se $\log_e x = \ln x$, denominado *logaritmo natural* de x.

Mas por que e? Tal número é a base dos logaritmos naturais, assim chamado pelo fato de seu logaritmo natural ser igual a 1, isto é, ÁREA $H_1^e = 1$.

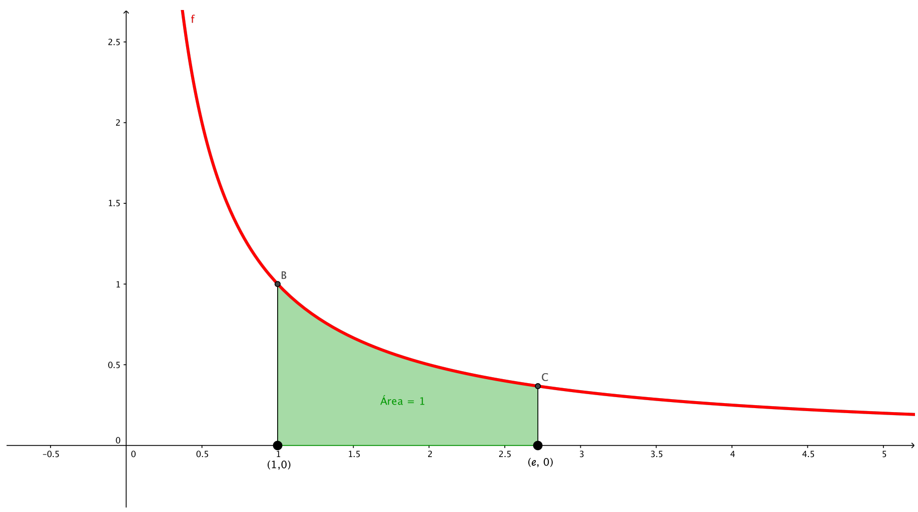

Figura 5: Área sob a hipérbole equilátera compreendida entre $x = 1$ e $x = e$

[2] É fácil visualizar, através do gráfico da hipérbole equilátera, que, dado um intervalo no eixo das abcissas, a área sob a hipérbole poderá ser decomposta em tantas áreas quanto se queira, tomando valores dentro deste mesmo intervalo real.

Com a utilização da Definição 1, da definição da Função Logarítmica Natural e da sua caracterização, fica um pouco mais elementar, desta forma, definir a função exponencial natural.

Definição 4. A função exponencial natural, ou seja, a função exponencial de base e é a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

que associa a cada número real x o número real positivo e^x, tal que $f(x) = e^x$. Pela definição 1, tem-se:

$$\ln e^x = x$$

2.2 Modelo Afim X Modelo Exponencial

Para iniciar esta seção, cita-se novamente o ilustre Prof. Elon Lages Lima, autor de inúmeras publicações matemáticas e detentor de vários prêmios nacionais e internacionais. Ao analisar os modelos afim e exponencial, escreveu em um de seus incontáveis artigos, este de título *Crescimento linear e crescimento exponencial*:

> Dos dois modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares são o modelo linear, representado por funções do tipo $y = ax + b$, e o modelo exponencial, no qual se empregam funções do tipo $y = be^{ax}$. O modelo linear ocorre em praticamente todos os problemas durante os oito primeiros anos da escola e, com menos exclusividade porém ainda com grande destaque, nos três anos finais. Por outro lado, o modelo exponencial só aparece nesses três últimos anos, embora a sua importância seja considerável na universidade, bem como nas aplicações da Matemática em atividades científicas e profissionais. (LIMA, 2011)

O grande problema notado em alunos é a dificuldade em se escolher o instrumento mais adequado ao problema enfrentado. Definir qual é o método a ser adotado é o grande dilema para quem trabalha com modelagem de problemas. Novamente:

> As dúvidas que possam surgir acontecem antes, na escolha do instrumento matemátco apropriado para o problema que se estuda. Os alunos, muitas vezes não sabem qual modelo a empregar; os professores, frequentemente, conhecem a resposta por experiência mas nem sempre são capazes de justificá-la, mesmo no caso linear. (LIMA, 2007b)

Assim, pretende-se apenas delinear algumas diferenças entre os crescimentos ou descrescimentos nos modelos lineares e exponenciais. Sem dúvidas, é importante que o aluno possua a noção de qual forma seguir. Percebe-se no Ensino Médio que esta abordagem é bastante limitada. Aqui, estabeleceremos algumas definições e teoremas visando a facilitar a compreensão dos principais pontos de cada padrão a seguir.

2.2.1 Modelo Linear

A principal característica do modelo linear é a proposta de *proporcionalidade*. Conforme Lima (2007b) "diz-se que y é *proporcional* a x quando os valores de y dependem dos valores de x de tal maneira que $(\dots)$ tomar n vezes a grandeza x, o valor correspondente de y fica $(\dots)$ multiplicado por n".

Ora, fica bastante evidente comprovar que a função $y = f(x)$ possui a característica de $f(nx) = n.f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e tal relação modela o problema linear.

Vamos estabelecer algumas lemas e teoremas que se aplicam aos moldes lineares.

Lema 2.2.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(nx) = n.f(x)$, para todo x real e todo n inteiro. Então, $f(kx) = k.f(x)$ para todo k racional e todo x real. Particularmente, fazendo $f(1) = a$, temos $f(k) = ak$, para todo $k \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Com $k \in \mathbb{Q}$, temos que $k = \dfrac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, vale dizer que:

$$nf(kx) = f(nkx) = f(mx) = m.f(x) \Rightarrow f(kx) = \frac{m}{n}f(x) = k.f(x)$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Fazendo $x = 1$, temos que $f(k) = f(k.1) = k.f(1) = ka$.

□

Definição 5. Uma função f é *crescente* quando $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ e *descrescente* quando $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Teorema 2.2.2. *As seguintes afirmações sobre uma função crescente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são equivalentes:*

(1) $f(nx) = nf(x)$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = ax$ para qualquer x real com $a = f(1)$; e

(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Provando (1) $\to$ (2):

- Vamos supor, por absurdo, que haja algum número real x tal que $f(x) < ax$ e, portanto, $\dfrac{f(x)}{a} < x$.

- Toma-se um número racional k, com $\dfrac{f(x)}{a} < k < x$, onde $f(x) < ak = f(k)$, pelo lema anterior e fazendo $a = f(1)$.

- Como f é crescente, $k < a \to f(k) < f(x)$, o que é uma contradição.

- O caso $f(x) > ax$ é completamente análogo.
- Portanto, $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) $\rightarrow$ (3):

- Como $f(x) = ax$, temos que $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

(3) $\rightarrow$ (1):

- Supondo (3), é claro notar que $f(nx) = n.f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.
- Ainda, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$. Logo, $f(0) = 0$.
- Então, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, vale que $0 = f(-nx+nx) = f(-nx)+f(nx) = -nf(x) + f(nx)$. Logo, $f(-nx) = -nf(x)$.
- Ora, segue que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo x real.

□

Antes de passarmos ao próximo teorema, faz-se mister pontuar algumas observações:

1. O teorema 2.2.2 também é válido para f decrescente. Para isso, basta que $f(1) = a$ seja negativo;
2. Chama-se a de constante de proporcionalidade; e
3. Um corolário do teorema 2.2.2 é: para f crescente ou decrescente, $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$ implica $f(cx) = cf(x)$, para quaiquer c, x reais.

Teorema 2.2.3. *São equivalentes as afirmações a seguir sobre uma função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$:*

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$;

(2) f é crescente e $f(nx) = nf(x)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^+$; e

(3) $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ onde $a = f(1)$.

Demonstração. As implicações (1) $\rightarrow$ (2) e (3) $\rightarrow$ (1) são imediatas. Para provar a implicação (2) $\rightarrow$ (3), basta observar que toda função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que atenda (2) se estende a uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente que satisfaz o item (1) do teorema 2.2.2, tomando $F(0) = 0$ e $F(-x) = -F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$. □

Os teoremas anteriormente enunciados determinam condições em que é adequado o uso do modelo linear **reduzido**, $f(x) = ax$, sendo necessário verifcar se f é crescente e se cumpre que $f(nx) = nf(x)$ para $n \in \mathbb{N}$, conforme cada caso.

Finalizando o apanhado matemático desta subseção , finalizamos com um teorema que remete a uma característica importante dos modelos lineares:

Teorema 2.2.4. *São equivalentes as afirmações sobre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

(1) Para todo $h \in \mathbb{R}^+$, o acréscimo $\phi(h) = f(x + h) - f(x)$ depende apenas de h, e não de $x \in \mathbb{R}$; e

(2) Fazendo $a = f(1) - f(0)$ e $b = f(0)$, tem-se $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Ancorando-se na hipótese de (1), define-se a função $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como $\phi(h) = f(x + h) - f(x)$ para todo $h \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$. Para $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\phi(h_1+h_2) = f(x+h_1+h_2)-f(x) = f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)+f(x+h_1)-f(x) = \phi(h_2)+\phi(h_1)$$

Ora, pelo Teorema 2.2.3, temos que $\phi(h) = ah$ para todo $h \in \mathbb{R}^+$, com $a = \phi(1) = f(1) - f(0)$. Por consequência, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(x) = f(0 + x) = f(0 + x) - f(0) + f(0) = \phi(x) + f(0) = ax + b$$

com $a = f(1) - f(0)$ e $b = f(0)$.

Portanto, (1) $\to$ (2). A volta é imediata, bastando tomar dois valores distintos de x e montar a função ϕ.

□

Com o enunciado acima, constatamos que, se f é crescente (para o caso em que f decrescente é análogo, bastando apenas tomar $f(x) = ax + b$, com $a < 0$), o acréscimo $f(x+h)-f(x)$ depende apenas de h, não dependendo de x. Ainda, o quociente $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ não depende de x, tampouco de h.

2.2.2 Modelo Exponencial

Vamos considerar uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente que modela uma situação de aplicação de capital a juros compostos com capitalização contínua, ou seja, o rendimento será obtido sempre sobre o montante no instante anterior.

Se $f(t_1)$ é a quantia existente no instante t_1, para $t_1 < t_2$, o rendimento $f(t_2 + h) - f(t_2)$ no intervalo de tempo h é maior que o rendimento $f(t_1 + h) - f(t_1)$, no mesmo intervalo mas em época anterior, já que o capital acumulado $f(t_2)$ é maior que o capital acumulado $f(t_1)$.

Portanto, na hipótese descrita acima, não há a aplicação do modelo linear, pois não se atende a proporcionalidade entre x e $f(x)$. Entretanto, analisando o acréscimo relativo

$$\varphi(h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{f(t)}$$

é válido e certo afirmar que só dependa de h, desde que ocorra certa estabilidade e/ou permanência das condições de capitalização.

O fato de o acréscimo relativo $\dfrac{f(t+h) - f(t)}{f(t)}$ depender apenas de h é a definição para a Matemática Financeira de juros fixos, isto é, as condições do acordo permanecem as mesmas ao longo do tempo. Ainda, o lucro obtido após um período de capitalização h é proporcional ao capital inicial $f(t)$, o qual constitui a aplicação inicial, dado por:

$$\varphi(h).f(t) = f(t+h) - f(t)$$

Não menos importante é observar que $\varphi(h) = \dfrac{f(t+h) - f(t)}{f(t)}$ depender apenas de h significa que, por exemplo, se $\varphi(h) = 2$, isto é, se h é o tempo necessário, a partir do instante t, para que o capital duplique, então, em qualquer momento, será necessário o mesmo tempo h para que este capital também duplique, lembrando que é necessário que as condições iniciais permaneçam inalteradas.

Portanto, para esses tipos de funções que se tem o enunciado do seguinte teorema:

Teorema 2.2.5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente com crescimento relativo $\varphi(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}$ no intervalo $[x, x+h]$ dependendo apenas do comprimento h desse intervalo, não tendo interferência do ponto inicial. Assim, fazendo $b = f(0)$ e $a = \ln \dfrac{f(1)}{f(0)}$, temos $a > 0$ e $f(x) = b.e^{ax}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Caso f seja decrescente, tem-se, da mesma forma, $f(x) = b.e^{ax}$, porém, neste caso, $a < 0$.*

Demonstração. A saber:

- Temos que $\varphi(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = \dfrac{f(x+h)}{f(x)} - 1$ depende apenas de h. Portanto, segue que $\tau(h) = \dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ também dependerá apenas de h.
- Agora, consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln f(x)$. Percebemos que g é crescente e que o acréscimo $g(x+h) - g(x) = \ln f(x+h) - \ln f(x) = \ln \dfrac{f(x+h)}{f(x)} = \ln \tau(h)$ depende apenas de h.
- Pelo Teorema 2.2.4, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $g(x) = ax + c$, onde $c = g(0)$ e $a = g(1) - g(0)$. Isso significa que $f(x) = b.e^{ax}$, onde $b = e^c = e^{g(0)} = f(0)$ e $a = \ln f(1) - \ln f(0) = \ln \dfrac{f(1)}{f(0)}$.

- Para f decrescente, g também o é, com $g(1) < g(0)$ e $a = g(1) - g(0)$.

$\square$

2.2.3 Comparativos

De posse de todo referencial teórico que envolve os dois modelos, optou-se por realizar uma espécie de "resumo", com o objetivo de apresentar ao leitor aquilo que é mais importante acerca da comparação realizada.

Não nos restam dúvidas de as taxas de crescimento dos dois modelos são os pontos-chave, os quais devem ser abordados com o aluno do Ensino Médio. Para isso, estabelecemos um exemplo prático, que pode ser introduzido em sala como uma "conversa informal", introduzindo as principais diferenças, bem como o assunto de funções exponenciais.

Neste ponto do trabalho não vamos fugir do óbvio: usaremos o consagrado exemplo da matemática financeira de juros simples e compostos. Opta-se por este viés pela simples justificativa de que, como estamos introduzindo o assunto, não é interessante a elaboração de um caso que não seja tão prático. Desta forma, vamos ao exemplo:

Supondo que um cliente deseja tomar um capital de R$ 10.000,00 emprestado junto a um banco a uma taxa de juros compostos de 4,0% ao mês, desejando saldar a dívida ao final de 2 anos. Todavia, ao conversar com um amigo, este lhe ofereceu o mesmo capital, a mesma taxa e o mesmo prazo, porém com uma capitalização simples. Desconfiado, não sabia o que fazer: o que seria mais vantajoso e por qual motivo isso ocorreria.

Então, analisando, primeiramente, a opção bancária:

- Para a capitalização composta, temos que o montante a ser pago ao final do empréstimo é de $M = C_0(1+i)^n$, onde M é o montante, C_0 é o capital inicial que foi emprestado, i é a taxa de juros mensal e n é o tempo de empréstimo, em meses.
- Realizando os cálculos (com o auxílio de uma calculadora científica) temos que:
$$M = C_0(1+i)^n \Rightarrow M = 10000(1+0,04)^{24} \Rightarrow M = 10000(1,04)^{24} = 25633,04$$
- Portanto, o valor a ser pago ao banco ao término do empréstimo será de R$ 25.633,04.

Prosseguindo com a análise da opção "amigável":

- Para a capitalização simples, é certo afirmar que o montante a ser pago ao final do empréstimo é dado por $M = C_0(1+in)$, onde M é o montante, C_0 é o capital inicial que foi emprestado, i é a taxa de juros mensal e n é o tempo de empréstimo, em meses.

- Realizando os cálculos (sem necessidade do auxílio de uma calculadora científica) temos que:

$$M = C_0(1 + in) \Rightarrow M = 10000(1 + 0,04.24) \Rightarrow M = 10000(1,96) = 19600$$

- Portanto, o valor a ser pago ao amigo ao término do empréstimo será de R$ 19.600,00

Acreditamos que isso já fosse esperado pelo nosso aluno afinal, tomar dinheiro junto a bancos quase sempre não é uma boa opção. Todavia, graficamente, vamos observar o que ocorre. Analisando as expressões que fornecem os montantes a serem pagos, fica claro que bancos seguem padrões exponenciais, enquanto o amigo pratica um modelo linear, quando se considere o prazo para o pagamento como a variável da questão. Assim, vejamos os gráficos que foram construídos com o auxílio do seguinte endereço de internet: *http://www.ticsnamatematica.com*. Vale uma pausa para indicar o endereço citado como um ótimo meio auxiliar de aprendizado em sala de aula, pois contém inúmeras ferramentas lúdicas e bem interessantes para o ensino de diversos tópicos de Matemática.

Figura 6: Comparação de capitalização composta e simples

Para ilustrar ainda melhor, veremos a diferença de valor a ser pago tanto ao banco quanto ao amigo mês a mês, até o 24º mês:

Meses	Simples	Composto
1	10400	10400
2	10800	10816
3	11200	11248,64
4	11600	11698,586
5	12000	12166,529
6	12400	12653,19
7	12800	13159,318
8	13200	13685,691
9	13600	14233,118
10	14000	14802,443
11	14400	15394,541
12	14800	16010,322
13	15200	16650,735
14	15600	17316,764
15	16000	18009,435
16	16400	18729,812
17	16800	19479,005
18	17200	20258,165
19	17600	21068,492
20	18000	21911,231
21	18400	22787,681
22	18800	23699,188
23	19200	24647,155
24	19600	25633,042

Figura 7: Diferença de montante mês a mês

Com estas ferramentas, é fácil mostrar que, à medida que o tempo passa, a diferença entre montantes a serem pagos aumenta cada vez mais. E tal fato se dá pelo acréscimo ou incremento relativo que, no modelo exponencial, varia conforme o tempo de empréstimo e, no modelo linear, não depende do tempo, tampouco da taxa de juros.

2.3 Aplicações e Curiosidades

Nesta parte do presente trabalho deseja-se retratar a importância do conteúdo matemático exposto através de aplicações cotidianas e curiosidades rotineiras. Sem dúvidas, a apresentação do conteúdo de funções exponenciais é uma das tarefas mais importantes para o sucesso da aprendizagem. Como já abordamos anteriormente, a contextualização reveste-se de uma importância singular no processo de aquisição de conhecimento, amadurecimento e tomada de consciência social por parte do discente. Assim, no vigente capítulo, procura-se mostrar algumas das principais aplicações e curiosidades que envolvem o assunto em voga. Vale relembrar que nem todas poderão ser usadas em sala devido a conhecimentos mais avançados, aprendidos nos cursos superiores de Ciências Exatas. Entretanto, será de extrema valia para o professor, embasando e sedimentando o conhecimento sobre a temática, bem como sugerindo novas abordagens em sala de aula.

No capítulo anterior, abordamos o cálculo do valor de um montante aplicado ao longo de um certo tempo a juros fixos, capitalizados continuamente. Além desta, existem inúmeras outras aplicações bem interessantes da teoria de funções exponenciais que podem ser aplicadas no Ensino Médio, inclusive referenciando outras disciplinas além da Matemática. Algumas expostas são clássicas, todavia outras não são tão comuns de serem abordadas em sala de aula do Ensino Médio.

2.3.1 Aplicação de capital a juros fixos

Como já foi citado no início deste capítulo, a função que expressa a variação do capital, quando aplicado por um período do tempo é do tipo exponencial, isto é, é da forma da forma $c(t) = c_0.a^t$, onde $c(t)$ expressa o capital no instante t e c_0 é considerado o fator de aumento do capital. Neste caso, o fator de aumento a é igual a $(1 + i)$, onde i é chamado de taxa de juros. Para exemplificar, considere um capital inicial de R$2000,00 aplicado a uma taxa fixa de juros de 2% ao mês. Portanto, a função que representa o capital no instante t, em meses, é dada por:

$$c_0.(1 + i)^t = 2000.(1 + 0,02)^t = 2000.(1,02)^t$$

Para um quadrimentre, isto é, para um $t = 4$, a título de exemplo, temos:

$$c_0.(1 + i)^4 = 2000.(1 + 0,02)^4 = 2000.(1,02)^4 \approx 2164,86$$

Antes de passarmos à próxima aplicação, tentaremos realizar uma distinção entre juros simples e juros compostos. Em vez de procurarmos difinições rígidas e financeiras, vamos à citação do livro de (BELLOS, 2015):

> Juro é a remuneração que se paga por tomar dinheiro emprestado, ou que se recebe por emprestá-lo. Usualmente é um percentual do dinheiro que se tomou ou emprestou. Juro simples é o dinheiro pago ou recebido pela quantia original, e que permanece o mesmo em cada prestação, ou seja, se um banco cobra 20% ao ano de juros simples sobre um empréstimo de cem libras, então, um ano depois, a dívida é de 120 libras, depois de dois anos é de 140 libras, depois de três anos é de 160 libras e assim por diante. Com juro composto, no entanto, cada pagamento é uma proporção do total *composto*, ou acumulado. O dinheiro que se deve dos juros vai alimentar o "pote". Assim, se um banco cobra 20% de juros compostos, um dívida de 100 libras será de 120 libras após um ano, de 144 libras depois de dois, de 172,80 libras depois de três.

Como o trabalho destina-se a motivar o estudo das funções exponenciais e, em sentido mais *stricto*, a funções exponencial natural, deixa-se uma citação bem interessante, que explica muito sobre o mundo que vivemos:

> Quem empresta dinheiro tem preferido os juros compostos aos simples ao longo de toda a história conhecida. Inclusive, num dos primeiros problemas da literatura matemática, numa tabuleta de barro mesopotâmica de 1700 a.C., a pergunta é quanto tempo levaria para que uma quantia

> dobrasse de valor a um juro composto de 20% ao ano. Um dos motivos que fazem a atividade bancária ser tão lucrativa é que o juro composto faz crescer a dívida, ou o empréstimo, exponencialmente, o que vale dizer que você pode acabar pagando, ou ganhando, quantias exorbitantes em pouco tempo. Os romanos condenaram o juro composto como a pior forma de usura. No Alcorão, é declarado um pecado. Não obstante, o sistema financeiro moderno baseia-se nessa prática. É como os nossos saldos devedores, faturas de cartão de crédito e pagamentos de hipotecas são calculados. O juro composto tem sido o principal catalisador do crescimento econômico desde o início da civilização.

Infelizmente, no nosso Ensino Básico, não se tem a devida preocupação com Educação Financeira. O assunto está intimamente ligado aos modelos exponenciais abordados no presente trabalho. Conforme citado acima, instituições financeiras praticam o emprego de composições exponenciais, por serem mais lucrativas ao sistema. Ensina-se porcentagem, função afim, função logaritmica, função exponencial e outros assuntos sem relacioná-los com a realidade financeira que nos cerca. Atualmente, falar-se em ser educado finaceiramente resume-se apenas a ter um consumo responsável, controlar gastos e caderneta de poupança. A matéria é muito mais abrangente que isso.

Assim, novamente com o intuito de despertar a completa atenção do discente, vamos a um exemplo, o qual é imperioso que seja tratado em sala de aula. Refere-se como o sistema financeiro britânico se comporta ao oferecer serviços aos seus consumidores. Certamente, muitos consumidores ficam bastante confusos quando observam determinados financiamentos com as mais variadas modalidade de capitalização. Vejamos como a Inglaterra tenta ser um pouco mais clara, neste ponto:

> Isso porque as instituições financeiras britânicas são obrigadas por lei a declarar a taxa de juro composto contínua em cada produto que vendem, qualquer que seja a sua opção de creditar mensalmente, bianualmente, anualmente ou o que for. Digamos que um banco ofereça uma conta de depósito que remunera 15% ao ano, composto em um crédito anual, o que significa que depois de um ano um depósito de cem libras terá aumentado para 115 libras. Se esses 15% forem compostos continuamente, após mais um ano aumentará para $£100.e^{\frac{15}{100}}$, o que resulta em 116,18 libras, revelando uma taxa de juros de 16,18%. O banco é obrigado por lei a declarar que essa conta de depósito rende 16,18%. Embora pareça estranho que um banco declare um valor não usado na prática, isso foi intorduzido para que os clientes possam comparar coisa com coisa. Uma conta que credita mensalmente e uma que credita anualmente serão avaliadas por sua taxa composta contínua. Como quase todo produto financeiro envolve juros compostos, e cada cálculo de composição contínua vai dar num e, a constante exponencial é o número do qual depende todo o sistema financeiro. (BELLOS, 2015, p.169)

2.3.2 O caso do paraquedas

Esta aplicação deve ser abordada com bastante cuidado pelo professor, pois apesar de interdisciplinar (envolve Matemática e Física), ela também engloba conhecimentos que fogem ao conteúdo do Ensino Médio. Todavia, se usada adequadamente, agregará ao aluno algumas noções de força, de resistência do ar e de como ocorre a redução de velocidade do paraquedista.

Analisemos, então, o caso de um homem que salta de paraquedas. As forças que atuam sobre ele são: a força peso, na direção vertical com sentido para baixo e a força de resistência do ar, que é proporcional à velocidade do corpo, também vertical e com sentido contrário ao da força peso. De acordo com a Segunda Lei de Newton, o somatório das forças é igual ao produto da massa pela aceleração. Logo, sendo m a massa do paraquedista, a sua aceleração, v a sua velocidade, k a constante de proporcionalidade da força de resistência do ar ($F_{ar} = kv$) e g a aceleração da gravidade, temos:

$$ma = mg - kv$$

Como a função aceleração é a função derivada da função velocidade em relação ao tempo, podemos resolver essa equação diferencial ordinária e encontrar uma expressão para a velocidade. Obviamente, este assunto foge ao escopo do Ensino Médio e, por isso, o professor deve se ater a analisar a equação do balanço de forças e, em seguida, exibir o resultado final, a fim de mostrar aos alunos que a velocidade cai exponencialmente quando o corpo sofre a resistência do ar. A expressão final da velocidade em função do tempo é:

$$v(t) = \frac{mg}{k} + C.e^{-\frac{kt}{m}}$$

onde C é uma constante e e é a constante neperiana. Ainda, com uma manipulação álgebrica para não ter a massa do saltador na expressão, vale dizer:

$$v = \frac{g}{a}(1 - e^{-at}) + v_0 e^{-at} \tag{2.9}$$

com $a = \dfrac{k}{m}$. [3]

Observando a equação 2.9, pode-se ter conclusões interessantes e importantes: se o paraquedista comandar (termo utilizado para o acionamento do paraquedas, quando isso é possível, já que existem paraquedas que são acionados pela ação da gravidade quando a pessoa salta do aerotransporte) o seu equipamento assim que sair do avião, pode-se dizer que $v_0 = 0$, fazendo com que o último termo da equação 2.9 seja eliminado.

Ainda, se ele cair livremente, ou em linguagem técnica, entrar em queda-livre, antes de comandar o seu paraquedas, sua velocidade v_0 aumentará bastante, porém o seu efeito diminui exponencialmente conforme o avançar do tempo. Isso é fato pois, se $t \to \infty$, a expressão e^{-at} tende a zero e a velocidade limite, chamada, por exemplo, de v_∞ será igual a $\dfrac{g}{a}$ ou ainda, $v_\infty = \dfrac{mg}{k}$ será atingida.

[3] A demonstração detalhada poderá ser obtida na obra *e: a história de um número*, de Eli Maor.

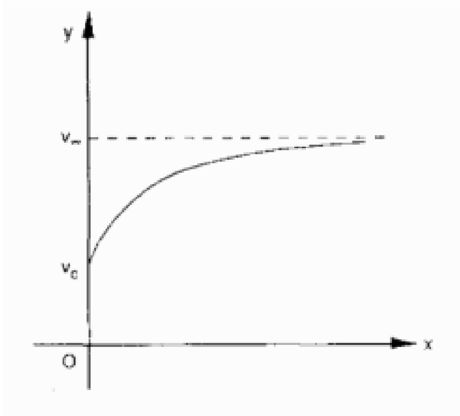

Figura 8: Atingimento da velocidade limite v_∞ do salto de paraquedas

Fonte: Maor (2003, p.147).

E isso é o mais interessante: se a velocidade limite é atingida independente do v_0 inicial do acionamento do paraquedas, dependendo apenas do peso do saltador e do coeficiente de resistência, podemos concluir que tal fato é o que permite que o pouso seja seguro, chegando ao solo com uma velocidade compatível. Mas é claro: deve-se acionar o paraquedas!

2.3.3 Percepções a estímulos físicos - Experiência sonora

Assim como a anterior, a aplicação deve ser usada com muito cuidado. Alguns conceitos mais avançados podem confundir a construção do raciocínio e do conhecimento do estudante do Ensino Médio. Todavia, trata-se de algo muito interessante de ser levado ao conhecimento.

O fisiologista alemão Ernst Heinrich Weber (1975-1878) [4] desenvolveu um teste, obtido por intermédio de vários experimentos, que seria capaz de quantificar a resposta humana a diversos estímulos físicos recebidos ou aplicados. A generalização deste teste para todos os sentidos foi recepcionada pelo médico alemão Gustav Theodor Fechner (1801-1887) e ficou conhecida como a lei de Weber-Fechner. Para ilustrar melhor, um dos experimentos foi aplicado em um homem totalmente vendado que segurava um determinado peso. Assim, outros pesos menores eram acrescentados gradativamente e a cobaia humana deveria responder quando percebia uma alteração de peso pela primeira vez (MAOR, 2003).

Após inúmeros experimentos desta natureza e em todos os sentidos sensoriais, Weber pode concluir que a resposta ao estímulo era proporcional ao aumento relativo, e não ao aumento absoluto. Explicando melhor: se um homem estivesse segurando um peso de 20 quilogramas e pudesse sentir um aumento de peso quando fosse introduzido um peso de 2 quilogramas, quando ele estivesse com um peso de 40 quilogramas, só sentiria o

[4] Ernst Heinrich Weber (Wittenberg, 24 de junho de 1795 — 26 de janeiro de 1878) foi um médico alemão e é considerado fundador da psicologia experimental.

aumento a partir de 4 quilogramas, que corresponde a 10% de aumento do peso em ambos os casos.

Conforme Maor (2003), em modo matemático, se pode escrever:

$$ds = k\frac{dW}{W}, \tag{2.10}$$

onde ds é o aumento perceptível (seria a condição limite, o menor aumento de peso que pudesse ser percebido), dW é o aumento de peso correspondente, W o peso já usado com a cobaia e k uma constante de proporcionalidade.

A lei de Weber-Fechner, como está em 2.10, é uma equação diferencial. Devemos ter muito cuidado ao apresentar tal conteúdo no Ensino Médio: aqui, não se deve adentrar em explicações detalhadas sobre como obter a função derivada ou a antiderivada, bastando apenas informar o que foi feito. Isso não prejudicará o aprendizado, tampouco o exemplo trazido.

Então, integrando 2.10, tem-se:

$$s = k \ln W + C, \tag{2.11}$$

com C sendo uma constante de integração. Conforme Maor (2003), fazendo W_0 o mais baixo nível de estímulo físico, isto é, o nível limite, teremos, $s = 0$ quando $W = W_0$, obtendo $C = -k \ln W_0$. Colocando na equação 2.11 e usando as propriedades de logaritmos, tem-se:

$$s = k \ln \frac{W}{W_0}, \tag{2.12}$$

mostrando que a resposta segue um padrão logarítmico (função inversa da exponencial). Trocando em míudos: se o estímulo aumentar em taxa constante, isto é, em progressão geométrica, a resposta ao estímulo aumentará em proporções iguais.

Apesar da constestação dos experimentos, já que a receptividade humana é uma questão subjetiva, os testes se aplicam muito bem à sensação de volume, dada a capacidade de percepção da audição humana.

> Quando a lei de Weber-Fechner é aplicada à tonalidade, ela diz que intervalos musicais iguais (aumentos de tonalidade) correspondem a aumentos *fracionais* iguais na frequência. Daí os intervalos musicais corresponderem a *relações* de frequência. Por exemplo, uma oitava corresponde à proporção 2:1 na frequência, uma quinta à proporção 3:2, uma quarta a 4:3 e assim por diante. Quando ouvimos uma série de notas separadas por oitavas, sua frequência na verdade aumenta em uma progressão 1, 2, 4, 8, e assim por diante. (MAOR, 2003)

Figura 9: Notas musicais separadas em intervalos iguais correspondem a frequências em uma progressão geométrica

Fonte: Maor (2003, p.150).

Isso nos permite concluir que as pautas onde as notas musicais são escritas é, na verdade, uma escala logarítmica, na qual a distância vertical, chamada de tom, é proporcional ao logaritmo da frequência (MAOR, 2003).

2.3.4 A corrente suspensa

O problema da corrente suspensa envolve o número e e a função $f(x) = e^x$. Trata-se da seguinte indagação: *qual é a curva formada por um fio pendente, livremente suspenso por dois pontos fixos, assumindo que o fio é flexível em toda a sua extensão e possui uma espessura constante?* (entende-se como densidade linear uniforme). Tal problemática foi exposta por Jakob Bernoulli em maio de 1690 na *Acta eruditorum*, revista esta que o próprio havia fundado oito anos antes.

Acerca das respostas a este questionamento, citamos (MAOR, 2003):

> A história desse famoso problema é bem semelhante à da braquistócrona e quase os mesmos personagens tomaram parte nela. Galileu já tinha demonstrado interesse e imaginara que a curva era uma parábola. Aos olhos, a corrente suspensa certamente se parece com uma parábola. Mas Christian Huygens, o prolífico cientista holandês, cujo papel na história tem sido um tanto subestimado (sem dúvidas porque viveu entre as eras de Kepler e Galileu antes dele, e Newton e Leibniz depois), provou que a catenária não podia ser uma parábola.

Houve outras respostas para o problema evidenciado. Em 1691, a publicação *Acta* expôs três soluções corretas para a questão: uma por Leibniz; outra por Huygens; e por Johann Bernoulli.

Fazendo uma nota histórica, na verdade, uma curiosidade acerca da família Bernoulli. Jakob e Johann eram rivais acirrados. Mesmo sendo irmãos, a competição pelas descobertas matemáticas eram muito maiores que a afeição familiar. Rivalizaram por toda a vida pelas respostas e soluções dos principais desafios matemáticos da época, a ponto de ficarem sem se falar durante um longo período de tempo. Comprovando o exposto, ainda em (MAOR, 2003):

> Johann acrescentou que, das duas curvas, a parábola é algébrica enquanto a catenária é transcendental. Impetuoso como sempre, concluiu: "O senhor conhece a disposição do meu irmão. Ele não hesitaria, se pudesse fazê-lo honestamente, em tirar-me a honra de ser o primeiro a resolvê-lo, em vez de me deixar tomar parte - e muito menos me cederia o lugar, se já fosse meu". A notoriedade dos Bernoullis de brigarem entre si - e com os outros - não diminuíra nada com a passagem do tempo.

A catenária é a curva cuja equação é dada por:

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} \tag{2.13}$$

para a uma constante cujo valor é relacionado aos parâmetros físicos da corrente, como densidade linear e tensão com a qual ela é segurada.

Quanto à equação 2.13 vale expressar:

> Devemos mencionar que a equação da catenária não foi apresentada originalmente na forma acima. O número e ainda não tinha um símbolo especial, e a função exponencial não era considerada função independente e sim um inverso da função logarítmica. (...) Leibniz até mesmo sugeriu que a catenária poderia ser usada como um engenho para o cálculo de logaritmos, uma espécie de tabela de logaritmos "analógica". Isso poderá ajudar", ele disse, "pois em viagens longas podemos perder nossas tabelas de logaritmos". Estaria ele sugerindo que se carregasse uma correntinha no bolso, como sobressalente de uma tabela de logaritmos?

Para $a = 1$, podemos construir o gráfico por intermédio dos gráficos de e^x e de e^{-x} no mesmo sistema de coordenadas: trata-se de realizar, para cada ponto x do domínio, a soma $e^x + e^{-x}$ e, na sequência, dividir o resultado por 2. Esse será a ordenada de cada ponto x do domínio.

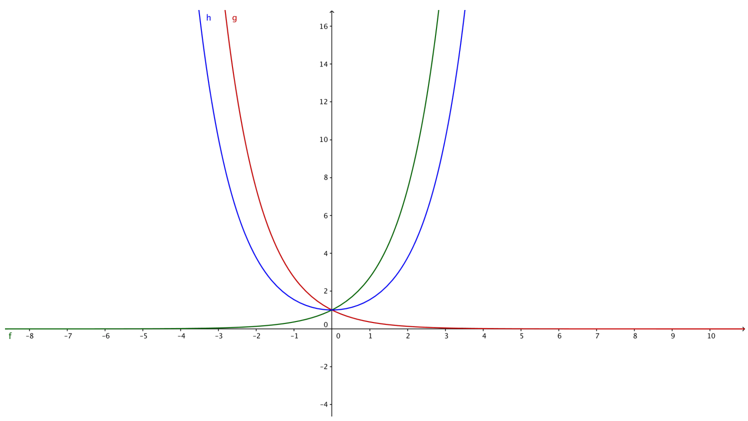

Figura 10: Gráfico de e^x, e^{-x}, e da catenária para $a = 1$

Considerando as equações dos dois gráficos plotados acima, quando em função de x, são muito semelhantes às equações das funções circulares cosseno e seno (sen e cos).

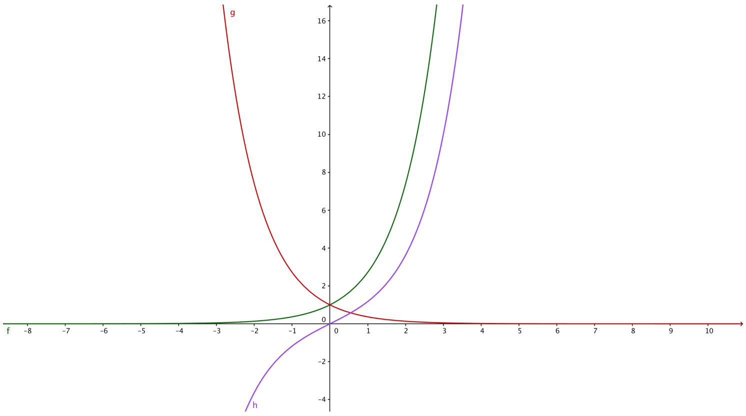

Figura 11: Gráfico de $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Essas similaridades foram notadas por Vincenzo Ricatti (1707-1775) [5] que introduziu as notações de seno e cosseno hiperbólicos (sinh e cosh), a saber:

$$\sinh \phi = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \cosh \phi = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{2.14}$$

O italiano demonstrou que é válida a igualdade

$$\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1 \tag{2.15}$$

que, excetuando-se pelo sinal negativo, é igual à identidade trigonométrica consagrada no Ensino Médio:

$$\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi = 1 \tag{2.16}$$

Vale aqui uma analogia importante a ser trabalhada com os alunos do Ensino Médio: comparar a identidade trigonométrica consagrada, representada pela equação 2.16 e a igualdade hiperbólica da equação 2.15 com as equações de um círculo de raio unitário centrado na origem e de uma hipérbola equilátera de equação $x^2 - y^2 = 1$, respectivamente.

A notação de Rivatto ficou consagrada para $\cosh \phi$ como cosseno hiperbólico de ϕ e seno hiperbólico de ϕ como $\sinh \phi$. Através das propriedades especiais das funções e^x e e^{-x}, a identidade da equação 2.15 pode ser demonstrada elevando-se ao quadrado ambos os lados das equações 2.14 e usando as identidades $e^x . e^y = e^{x+y}$ e $e^0 = 1$.

[5] Vincenzo Riccati (Castelfranco Veneto, 11 de janeiro de 1707 — Treviso, 17 de janeiro de 1775) foi um matemático e físico italiano. Irmão de Giordano Riccati, foi o segundo filho de Jacopo Francesco Riccati. Riccati continuou a obra de seu pai em análise matemática, especialmente no campo das equações diferenciais e física. A equação de Riccati é denominada em memória de seu pai.

3 Uma conversa com os professores de Matemática da Educação Básica

No momento em que foi definido o tema deste trabalho, julgou-se conveniente fazer um levantamento geral sobre a metodologia aplicada no ensino de funções exponenciais nas escolas brasileiras, a fim de se obter um melhor direcionamento para a elaboração do presente trabalho, de forma que o mesmo pudesse contribuir com a tarefa dos docentes em sala de aula. A forma mais direta de se obter essas informações foi através da elaboração de um questionário com 13 perguntas destinado a professores de Matemática do Ensino Médio. Inicialmente, este questionário foi distribuído em vias impressas para professores que cursavam o PROFMAT. Posteriormente, o questionário foi disponibilizado na Internet através de uma rede social, onde professores de Matemática de todo o Brasil puderam ter acesso a ele.

Os professores tiveram mais de um mês para responder os questionários. O questionário foi respondido por 25 professores. Esperávamos um número maior de respostas, visto que, com a disponibilização do questionário pela Internet, o alcance foi bem amplo. Dentre os professores que responderam à pesquisa, alguns lecionam em escolas públicas (rede municipal e estadual) e outros lecionam em escolas particulares. Alguns, inclusive, lecionam em cursos pré-vestibulares. Acreditamos que essa diversidade contribuiu de forma positiva para a nossa pesquisa.

As perguntas abordam, em geral, a forma como os professores explicam diversos itens do conteúdo de funções exponenciais. Ao longo do questionário, o professor é levado a "pensar fora da caixa", ou seja, o próprio docente é conduzido a uma reflexão sobre a forma como eles explicam o assunto em sala de aula. Existem alguns pontos sobre o tópico de funções exponenciais que não costumam ser abordados nas escolas brasileiras, citando a definição da função exponencial para números irracionais. Além disso, métodos mecânicos, como a resolução de equações exponenciais através do "corte de bases iguais", apenas são apresentados aos alunos como "receitas de bolo", sem que uma justificativa matemática formal seja exposta. Este questionário procura trazer aos docentes essas questões. Paralelamente, outras perguntas serviram para testar algumas hipóteses levantadas neste trabalho sobre a apresentação deste conteúdo. Tabulou-se, qualitativamente, as respostas obtidas.

Segue uma análise judiciosa das respostas coletadas para cada uma das perguntas elaboradas. O questionário, na íntegra, se encontra nos anexos do presente trabalho.

1) A função exponencial tem como domínio o conjunto dos números reais. É

intuitivo para o aluno que um expoente pode ser um número natural, inteiro e racional. Mas, e se um aluno lhe perguntar o sentido da expressão $2^{\sqrt{2}}$? Como você explica ao aluno que os números irracionais também fazem parte do domínio da função exponencial?

De fato, a preocupação exposta na pergunta se justifica pelo fato de que os alunos podem imaginar que simplesmente não existe $2^{\sqrt{2}}$ ou mais genericamente, não existe a^x, sendo x um número irracional. Isso ocorre devido ao fato de que os alunos são ensinados a aplicar métodos prontos na matemática, como os de calcular uma potência com expoente natural, inteiro e racional e, quando não existe nenhum método, eles podem supor que simplesmente não existe. Da mesma forma, antes de aprender exponenciação com expoentes inteiros negativos ou racionais não-inteiros, um aluno poderia supor que não seria possível tal operação. Outrossim, um aluno de mestrado em matemática pode ter dificuldades em entender operações de exponenciação com expoente complexo não-real. Enfim, percebe-se que é um assunto complicado de explicar, principalmente porque não existe um método para calcular $2^{\sqrt{2}}$, mas o aluno precisa entender que os números irracionais fazem parte do domínio da função exponencial e que $2^{\sqrt{2}}$, por exemplo, faz parte da imagem.

Praticamente todos os professores responderam que explicariam aos seus alunos o sentido do valor $2^{\sqrt{2}}$ usando a aproximação por números racionais do expoente $\sqrt{2}$. Ou seja, eles dizem que o valor desta potência é aproximadamente igual ao valor de uma potência de 2 com um expoente racional muito próximo de $\sqrt{2}$. Alguns citaram o fato de a função exponencial ser contínua no seu domínio. Houve também a referência ao conceito de limite para explicar o motivo da aproximação.

Vale ressaltar que os conceitos de limite e de continuidade de funções só são devidamente explorados hoje na disciplina de Cálculo, no ensino superior. Portanto, deve-se tomar muito cuidado ao trazer esses assuntos para uma sala de Ensino Médio e, caso seja necessário, deve-se realizar uma abordagem mais sutil possível.

2) De que forma você define e explica os valores possíveis para a base "a" de uma função $f(x) = a^x$?

Após o aluno compreender que o valor da variável x varia no conjunto dos reais, ele deve entender quais os valores que a constante a pode assumir. Houve uma citação interessante de um professor entrevistado: referiu-se aos "valores de a que tornam a função bem comportada", ou seja, aquela cujo gráfico seja representativo para o aluno (contínuo, crescente/decrescente).

A maioria dos professores afirmou que, primeiramente, eles analisam os valores que a não pode assumir. O valor 1, por exemplo, não pode ser usado pois, senão, a função seria constante e igual a 1. A explicação é análoga para o valor 0 (lembrando o caso de zero elevado a um expoente negativo ainda temos a ocorrência de indeterminação).

Em seguida, os professores precisam explicar porque o valor de a também não pode ser negativo. Houve uma resposta que pode fazer bastante sentido para o aluno: um dos professores explica que as potências pares de números negativos são positivas e as potências ímpares são negativas, o que causaria uma provável descontinuidade no gráfico, o que não é interessante.

Essa resposta acima consegue convencer alguns alunos, mas existem respostas mais completas e convincentes, como a de um docente que diz que a função não ficaria definida em casos como $a^{\frac{1}{n}}$ quando $a < 0$ e n par já que teríamos uma raiz de índice par com argumento negativo. Ou seja, ele usou o fato de que o expoente pode ser do tipo $\frac{1}{n}$, com n natural. Nesse caso, se n for par, teremos uma raiz de índice par de um número negativo, o que não existe no conjunto dos reais. Dessa forma, ele mostra ao aluno que pode ocorrer um grave problema no caso de a ser negativo. E assim, o aluno consegue compreender que a, definitivamente, não pode ser negativo e nem assumir os valores 0 ou 1. A maioria dos professores segue essa linha, citando o caso da raiz quadrada de número negativo, mas apenas fez a generalização exposta logo acima.

3) Você apresenta em sala possíveis aplicações para funções exponenciais? Caso positivo, cite alguns exemplos.

Nesta pergunta, todos os professores citaram os casos clássicos como: matemática financeira (juros compostos), crescimento populacional, decaimento radioativo, ingestão de medicações. Casos menos convencionais também foram citados: distribuição de Poisson (aplicações em teoria das filas; filas de banco; filas de buffer de um roteador; filas de paginação de um sistema operacional, entre outros), ruído gaussiano branco, curvas $PV^{(\alpha)}$ do gás ideal. Isso demonstra a preocupação desses professores em conectar a realidade à teoria, o que é fundamental para auxiliar num melhor processo de aprendizagem por parte do discente.

4) Você costuma comparar em sala as taxas de variação da função exponencial com as funções de primeiro e segundo grau?

Nessa pergunta, os professores se dividiram. A maioria não faz essa comparação em sala de aula, justificando que só faz sentido se for em uma turma preparatória para vestibular de exatas ou que só se deve explorar o assunto na disciplina de Cálculo, já na graduação. Outros chegam a falar em sala que a função exponencial tem uma taxa de variação bem maior que as outras e usam a ferramenta de gráficos para mostrar isso aos alunos.

Uma resposta que se destacou foi a de comparação entre juros simples e juros compostos, respectivamente, uma função afim e uma função exponencial, efetuando a sobreposição dos gráficos de crescimento e mostrando a diferença entre eles.

O que vale destacar em sala é que quanto mais os valores do domínio crescem, maior fica a diferença da função exponencial para outras funções. Os alunos devem entender o seu potencial de crescimento acima das demais funções. Assim, a função exponencial deve passar a ser “respeitada” por eles, pois ao mesmo tempo em que o crescimento exponencial “descontrolado” pode ser algo bom, como no caso dos retornos de uma aplicação financeira, também pode ser algo ruim, quando se tem que pagar juros de cartão de crédito, por exemplo.

5) Você explora com seus alunos o comportamento da função exponencial no $\pm\infty$?

A maioria dos professores ou não abordam o assunto no Ensino Médio, por julgá-lo desnecessário, ou o exploram minimamente. Um deles cita que o assunto deve ser abordado de com bastante cautela, para que não vire uma discussão filosófica sobre o infinito. Poucos citam que realizam a abordagem gráfica.

A resposta mais interessante foi a de que se abordam, utilizam os casos $0 < a < 1$ e $a > 1$, pois são justamente estes que se diferenciam no comportamento no infinito.

É de senso comum que este conteúdo deve ser detalhadamente explorado apenas no ensino superior. Entretanto, uma abordagem inicial no Ensino Médio, sem a utilização dos termos "limite", convergente"e "divergente", serve para que o aluno se familiarize melhor com esse tipo de função.

6) Como você explica para seus alunos que um número elevado a 0 é igual a 1? E como explica que, para obter o resultado de um número elevado a -1, basta escrevê-lo como fração e inverter o numerador com seu denominador?

Ensinar não é apenas definir, mas também explicar. Quando o aluno realmente entende o porquê de uma definição, consegue absorver melhor o assunto. Não basta simplesmente definir que um número elevado a 0 é igual a 1 e que quando se eleva um número a -1 basta inverter numerador e denominador. Isso são definições que possuem explicações simples e não é adequado e prudente omiti-las dos alunos.

Quase unanimemente, os professores explicaram essas definições usando a propriedade de multiplicação de potências (soma de expoentes). Essa propriedade já é bastante conhecida dos alunos desde o Ensino Fundamental. De fato, para explicar que $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$, basta fazer $a^0 = \frac{a^k}{a^k} = 1$, onde k é um expoente qualquer. Já no caso do inverso de um número, basta explicar que $a^{-1} = \frac{a^k}{a^{k+1}} = \frac{1}{a}$. De uma forma mais particular, podemos fazer $a^{-1} = \frac{a^0}{a^1} = \frac{1}{a}$. Note que são explicações bem simples e rápidas.

Um professor elaborou a explicação usando o seguinte exemplo. Se $3^4 = 81$, $3^3 = \frac{81}{3} = 27$, $3^2 = \frac{27}{3} = 9$, $3^1 = \frac{9}{3} = 3$, então $3^0 = 1 = \frac{3}{3}$. É uma maneira mais informal de explicar o conteúdo, todavia, na nossa opinião, só deve ser usado quando o aluno não compreender a explicação do parágrafo anterior, que apresenta um rigor matemático suficiente e adequado à demonstração, apesar da simplicidade.

7) Você já demonstrou aos seus alunos que uma função exponencial pode levar uma sequência em progressão aritmética em uma sequência em progressão geométrica? Qual foi a reação dos alunos? Ajudou no entendimento do assunto de progressões?

A interligação entre assuntos na matemática pode ser bastante vantajosa, pois fornece uma revisão de um assunto já aprendido e uma abordagem mais prática do novo assunto. O aluno do Ensino Médio precisa se acostumar a resolver problemas que englobam diversos conteúdos aprendidos em diferentes épocas, já que encontrará tal sistemática no vestibular e na graduação. Na matéria de Cálculo, por exemplo, terá que usar boa parte de seu vasto conhecimento adquirido nas três séries do Ensino Médio.

Essa pergunta faz mais sentido para professores que trabalham em escolas que, no conteúdo programático, abordam, primeiramente, as progressões aritméticas e geométricas. Porém nada impede de o professor aproveitar para introduzir esse assunto aos alunos. Tudo dependerá do interesse da classe.

As respostas dos professores variaram muito. Alguns acham que não é o caso fazer essa abordagem; outros já acham interessante. Em geral, a reação dos alunos foi de surpresa, porém, em alguns casos, não surtiu o efeito desejado, apenas em poucos alunos.

Um dos professores citou que, no currículo da Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro, o conteúdo de funções exponenciais é dado no 1º ano do ensino médio, enquanto as progressões são vistas no 2º ano do mesmo segmento. Nesse caso, podemos propor uma outra abordagem: no segundo ano, após aprender progressões aritméticas e progressões geométricas, o aluno pode ver como aplicar esse novo conhecimento não só em funções exponenciais, como também em funções logarítmicas.

A essência da pergunta não foi totalmente captada pela maioria dos docentes. Pela análise das respostas, percebeu-se que a maioria deles apenas comenta que funções exponenciais são progressões aritméticas. Mas não detalharam que uma sequência pertencente ao domínio da função tem que estar em progressão aritmética para que a imagem dessa sequência pela função exponencial esteja progredindo geometricamente. Vale também citar que a função logarítmica, que é a inversa da função exponencial, faz o contrário: leva uma sequência em progressão geométrica numa sequência em progressão aritmética.

8) Na maioria dos materiais didáticos (possivelmente todos), o ensino de equação exponencial é anterior ao de função exponencial. Qual é a sua opinião a respeito? Por quê? Haveria vantagens em trocar a ordem com que esses assuntos são abordados? Se sim, quais?

Essa é provavelmente a questão mais polêmica do questionário, pois propõe uma ruptura de paradigma. De fato, praticamente na totalidade dos casos, o conteúdo de equação exponencial é visto antes de função exponencial, o que também ocorre para os outros tipos de funções. Pensamos nesta troca da ordem de exposição dos conteúdos pelo seguinte motivo: quando o aluno aprende a resolver uma equação exponencial, ele apenas aprende o mecanismo, sem entender o porquê da possibilidade de "cortar as bases". Se o aluno primeiramente compreender o conceito da função exponencial, ele irá entender o motivo do emprego desse mecanismo. A resolução de equações exponenciais em si acaba na maioria das vezes se reduzindo à resolução de equações de outro tipo (equação linear, quadrática, trigonométrica). Então, o aluno apenas absorve a regra de "cortar as bases" e realiza operações básicas e manipulações algébricas de potenciação para fazer com que haja a mesma base em ambos os lados da igualdade. Acaba que o aluno aprende a resolver algo que ainda não compreende totalmente.

Como era de se esperar, os professores se dividiram nas respostas. Alguns concordam com o modelo atual: argumentam que estudar equação antes é melhor por se tratar de um caso particular e de mais simples compreensão. Também dizem que o aluno ganha mais confiança no conceito de expoentes para, depois, aplicá-lo em funções.

Por outro lado, alguns professores dizem que é melhor o aluno ter uma visão mais ampla do que ele está fazendo, para depois resolver as equações. Um deles cita que o aluno teria mais facilidade em compreender as soluções de determinadas equações observando que a função é injetora, o que é justamente um dos principais motivos que enxergamos para justificar a troca de ordem dos assuntos.

9) Durante a sua aula sobre equação exponencial você resolve a equação $2^x = 8$ escrevendo $8 = 2^3$, "cortando"as bases comuns e obtendo $x = 3$. Um aluno pergunta por que é possível cortar a base. O que você responde? Você saberia justificar formalmente esse "corte"?

Deve ser estimulado nos alunos o questionamento sobre os métodos matemáticos. Por que ao "passarmos" um número que está sendo somado ou diminuído para o outro lado de uma equação mudamos o sinal? E na multiplicação: por que "passa" para o outro lado dividindo (e vice-versa)? No caso da resolução de equações exponenciais, o aluno não deve se restringir ao processo mecânico de "cortar"as bases. Ele deve entender o que justifica esse "corte".

Um dos professores sugeriu um método bem interessante pra fazer esse corte. Ele, simplesmente, dividiu ambos os lados da equação por 2^3:

$$\frac{2^x}{2^3} = \frac{2^3}{2^3}$$

$$2^{x-3} = 1$$

$$2^{x-3} = 2^0$$

$$x - 3 = 0 \to x = 3$$

Neste caso, ele usou o fato de que o número 0 (zero) é o único número possível no expoente para que a potência seja igual a 1.

Uma resposta mais completa também foi citada. Relembrando o conceito de função injetora:

Uma função $f : D \to I$ é injetora se, e somente se, para todo $x, y \in D$, temos $f(x) = f(y) \to x = y$.

Como $2^x = 2^3$, então $f(x) = f(3)$, onde $f(x) = 2^x$. Logo, a injetividade da função garante que $x = 3$. Na verdade, pelo método anterior, exposto logo acima, foi também utilizada a propriedade da injetividade pois, de $f(x-3) = f(0)$, se concluiu que $x - 3 = 0$, ou seja, $x = 3$.

Alguns professores também citaram a utilização de gráficos para ilustrar ao aluno que só pode haver uma solução possível para a equação exponencial.

10) Você costuma utilizar logaritmos para resolver equações exponenciais?

Esta pergunta traz à tona mais um questionamento: quando o aluno aprende equações exponenciais pela primeira vez, normalmente antes de aprender o conteúdo de logaritmos, ele se limita às equações com a mesma base. Na pior das hipóteses, ele se depara com duas bases diferentes, sendo uma potência da outra, o que pode ser resolvido com uma simples manipulação algébrica dos números. Depois de ensinar logaritmos, além de introduzir as equações logarítmicas, o professor acaba tendo que revisitar as equações exponenciais para mostrar os casos que só podem ser resolvidos através de logaritmos. Por isso, pode ser interessante ensinar logaritmos juntamente com os métodos de resolução de equações exponenciais, para que não seja necessário ensinar o método mais simples (bases iguais) e depois ter que retornar ao assunto. Mas é algo que, se for feito, exigiria bastante cautela por parte do docente, visto que o aluno pode acabar misturando os conceitos. O mais importante é que os conceitos sejam abordados sequencialmente, ou seja, que não haja um tempo muito grande entre a aprendizagem de métodos de resolução de equações exponenciais e logaritmos.

No geral, os professores responderam que apenas usam logaritmos para resolver equações exponenciais depois que os alunos já sabem como utilizá-los, isto é, eles não antecipam o assunto de logaritmos na primeira vez que abordam as equações exponenciais.

11) Se um aluno perguntasse como resolver a equação $2^x = 3^x$, o que você responderia?

Alguns professores responderam que usariam gráficos para mostrar que o único ponto que satisfaz a equação é $x = 0$. Todavia, alguns deram uma resposta bem mais convincente ao aluno, que é mostrada a seguir:

Podemos dividir por 3^x ambos os lados da equação, pois 3^x é diferente de zero para qualquer x. Logo, teremos:

$$\left(\frac{2^x}{3^x}\right) = \left(\frac{3^x}{3^x}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

12) Você apresenta a função exponencial natural $f(x) = e^x$ em suas turmas de Ensino Médio? Qual é sua opinião a respeito?

A maioria dos professores não apresenta essa função em sala de aula, seja devido ao tempo escasso para ministrar a matéria, seja pelo fato de não achar necessário introduzir tal assunto no Ensino Médio. Um deles citou que não vê vantagens em apresentar, a não ser que ele possa dar um sentido prático.

Alguns professores citam a função exponencial natural rapidamente em sala de aula, mas não aprofundam o assunto pela falta de tempo. Um deles diz que mostra aos alunos que as propriedades são as mesmas e seu objetivo é que, no futuro, eles não se assustem quando precisarem usar a base e. Um professor citou que só exibe essa função para turmas destinadas aos vestibulares para Ciências Exatas.

13) Você já abordou em sala de aula a representação de Euler para números complexos $(e^{ix} = \cos x + i\,\mathbf{sen}x)$**?**

A maioria dos professores não aborda a representação de Euler em sala. Um deles apresenta aos alunos esta representação quando explora o conteúdo de números complexos. Um professor citou que só exibe essa função para turmas destinadas a concursos de admissão a escolas militares. Outro, apenas aborda o assunto como curiosidade.

Os dois grandes objetivos da aplicação desse questionário aos professores de Matemática foram alcançados. Primeiramente, considerando que este foi aplicado antes de se iniciar a escrita do trabalho, as respostas serviram como um pontapé inicial, fornecendo uma visão detalhada sobre o ensino de funções exponenciais. Houve respostas bastante interessantes e surpreendentes, como por exemplo a forma como os professores explicam os valores possíveis para a base da função exponencial (pergunta nº 2), a variedade de aplicações práticas que eles exibem para os alunos (pergunta nº 3), a explicação matemática dos casos de potenciação abordados na pergunta nº 6, dentre outras. Nas respostas da pergunta nº 8 podemos perceber que alguns professores são simpáticos à idéia apresentada de inverter a ordem dos conteúdos apresentados (funções exponenciais antes de equeações exponenciais).

Além disso, observou-se que as perguntas levaram os docentes a refletirem sobre a forma como eles ensinam o conteúdo em sala de aula, e esse também era um objetivo do questionário. Apenas com a reflexão contínua sobre as metodologias de ensino será possível detectar as oportunidades de melhoria, e é isso que nosso trabalho almeja no fim das contas: dar sua pequena parcela de contribuição com o aperfeiçoamento do ensino de Matemática nas escolas do Brasil.

4 Proposta de Sequência Didática e Conclusões

A proposta deste capítulo, conforme já exposto na introdução, é a de apresentar uma sequência didática de ensino de funções exponenciais, baseando-se em modelos consagrados e curiosidades que usam modelos exponenciais, mantendo o rigor matemático necessário. Tomando como base a necessidade da contextualização no ensino de Matemática, o embasamento teórico de funções exponenciais e a resposta dos professores ao questionário elaborado, todos já expostos aqui neste trabalho, escrevemos um roteiro detalhado de quatro aulas que poderão aperfeiçoar o ensino de funções exponenciais em sala.

Vale ressaltar que as aulas foram elaboradas tendo em vista uma exposição completa do conteúdo a alunos do Ensino Médio. Cada aula foi planejada para 2 tempos de 50 minutos para exposição da teoria, e mais um tempo de 50 minutos para aplicação de exercícios. É claro que, dependendo do nível e do objetivo da turma para a qual se está lecionando, algumas alterações adequadas podem ser feitas. Se for uma turma focada em preparação para o ENEM e vestibulares, por exemplo, algumas revisitações de conceitos básicos (como as presentes na primeira aula) podem ser suprimidas, pressupondo que os alunos já possuem uma melhor base matemática. Nesse caso, o nível dos exercícios também pode ser mais elevado. Se for uma turma de educação de jovens e adultos, é possível que seja necessário relembrar alguns conceitos do Ensino Fundamental, devido ao tempo que os discentes ficaram sem contato com a Matemática. Nossa intenção não é apresentar uma sequência fixa de aulas, mas sim um ponto de partida com sugestões interessantes para o ensino de funções exponenciais nas escolas brasileiras.

4.1 Aula 1 - Compreendendo a operação de potenciação

Antes de o professor introduzir em sala de aula o assunto sobre funções exponenciais, é necessário assegurar que seus alunos compreendam o que é de fato exponenciação. Afinal, sabe-se que, infelizmente, muitos alunos chegam ao Ensino Médio com deficiências nas 4 operações básicas, então é de se esperar que muitos deles não dominem a operação de potenciação (ou exponenciação). É válido, portanto, investir o tempo de uma aula apenas para relembrar (ou ensinar) esses conceitos aos alunos.

Um roteiro adequado para esta aula será apresentado a seguir:

1) O conceito de potenciação: O professor deve começar a aula explicando de maneira bem didática o conceito de potenciação, levando os alunos a pensarem inicialmente em expoentes naturais e bases naturais. A idéia é que o discente compreenda o que é base e expoente, e que a potência é igual a base multiplicada por ela mesmo um número de vezes igual ao expoente.

2) Bases inteiras e expoentes naturais: O docente deve agora relembrar que a base também pode ser um número inteiro negativo e que a regra é a mesma usada nos exercícios anteriores. O que os alunos devem perceber e compreender é que um número negativo elevado a uma potência ímpar dá resultado negativo, e se elevado a uma potência par o resultado é positivo. Nesse ponto poderá ser necessário que o professor relembre os conceitos de multiplicação onde pelo menos um dos fatores é um número negativo.

3) Multiplicação e divisão de potências: Nesse passo da aula, o professor deve introduzir o conceito de multiplicação e divisão de potências com a mesma base. É importante que o aluno compreenda o motivo de se somar os expoentes na multiplicação e de subtraí-los na divisão. Principalmente na divisão, o aluno deve se habituar à idéia de cortar fatores comuns no numerador e denominador (muitos deles possuem dificuldade com essa técnica bem simples e útil), para que ele entenda o motivo da subtração dos expoentes. O docente também deve relembrar aqui o conceito de potência de potência, e explicar o motivo de se multiplicar os expoentes. Essas explicações estão na **subseção 2.1.1** do trabalho do colega Igor Alvarenga da Silva Nascimento intitulado *Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações.*

4) Expoentes não-positivos: Aproveitando o conceito de divisão de potências com a mesma base, deve ser introduzido e compreendido pelos alunos o conceito de expoentes negativos e expoente zero, de acordo com a **subseção 2.1.1** do trabalho do colega Igor Alvarenga da Silva Nascimento intitulado *Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações* e a pergunta nº 6 do questionário do **capítulo 3**. Para explicar que $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$, basta fazer $a^0 = a^{k-k} = \frac{a^k}{a^k} = 1$, onde k é um expoente qualquer. Já no caso do inverso de um número, basta explicar que $a^{-k} = \frac{a^0}{a^k} = \frac{1}{a^k}$. Quando $k = 1$, temos um conceito particular, que é o inverso de um número: $a^{-1} = \frac{a^0}{a^1} = \frac{1}{a}$. Dessa forma, o aluno irá entender, e não simplesmente decorar, como calcular potência com expoente negativo ou igual a zero.

5) Bases e expoentes racionais Até agora se trabalhou com bases inteiras e expoentes inteiros. Nesse ponto o professor deve introduzir o conceito de bases e expoentes racionais. Primeiro, deve se lembrar que um número racional q é todo aquele que pode ser escrito da forma $q = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$. Quando a base é racional, temos que $q^k = (\frac{a}{b})^k = \frac{a^k}{b^k}$. Uma demonstração menos formal porém bem prática para os alunos seria utilizar um exemplo de um número racional representado em fração elevado a um expoente natural.

Quando o expoente é racional, a demonstração poderá ser obtida na **seção 2.1.1** do trabalho já citado acima. O docente deve ter bastante cautela ao explicar esse ponto da matéria aos seus alunos visto que não é nem um pouco intuitivo aceitar que $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. É interessante o professor mostrar aos alunos que essa regra vale para qualquer número racional, incluindo os naturais e os inteiros, isto é, nos casos em que m é múltiplo de n. Nesse ponto, o aluno deve compreender que todas os conceitos expostos até aqui, como o da multiplicação e divisão de potências e o de expoentes negativos também são igualmente aplicados quando a base e o expoente forem racionais não-inteiros.

6) Bases e expoentes reais: Todas as propriedades de exponenciação expostas até agora também serão válidas para bases e expoentes irracionais, ou seja, aqueles que não podem ser escritos da forma $q = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$. Em sala de aula, um aluno pode questionar o professor sobre como calcular, por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$. A grande dificuldade nesse ponto é explicar ao aluno que não existe uma maneira de calcular uma potência com um expoente irracional, todavia, mesmo assim, essa potência representa um número real. O professor nesse caso pode pedir ao aluno que ele aproxime o valor de $\sqrt{2}$ por falta e excesso até a terceira casa decimal para verificar que o valor de $2^{\sqrt{2}}$ converge e, logo em seguida, explicar ao aluno como definimos a função exponencial para números irracionais dessa maneira, conforme exposto na **seção 2.1.2** do trabalho do colega Igor e abordado na pergunta nº 1 do questionário do **capítulo 3**.

4.2 Aula 2 - Introdução à função exponencial e resolução de equações e inequações exponenciais

Após a primeira aula, se espera que o aluno tenha a noção completa da operação de exponenciação. Sem essa noção ele não terá uma boa compreensão do que representa a função exponencial. Antes de o professor introduzir o conceito de função exponencial, recomenda-se que ele relembre aos alunos a teoria de função. O discente deve estar bem confortável com os conceitos de domínio, contradominio, imagem, bem como de função injetiva, sobrejetiva, contínua e outros. Um roteiro básico para esta aula é:

1) Definir matematicamente a função exponencial: O professor deve escrever a definição matemática para que os alunos se acostumem com a notação matemática ($f : \Re \to \Re^+$, sendo $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$). Nesse ponto, o professor deve explicar aos alunos a restrição nos valores da base a. As diretrizes para essa explicação estão na pergunta nº 2 do questionário do **capítulo 3**. Deve-se destacar também que o domínio da função exponencial é o conjunto dos números reais e o contradomínio é o conjunto dos números reais positivos. A explicação do domínio passa pela explicação de que potências de expoentes irracionais, embora não possam ser calculadas com exatidão, representam um número irracional, conforme a aula anterior. A explicação do contradomínio é a demonstração de que $f(x) > 0$, para qualquer x do domínio, e está exposta na **seção 2.1.2** do trabalho *Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações*

2) Analisar as propriedades da função exponencial: Há algumas características da função exponencial que a tornam única, e os alunos precisam desenvolver essa sensibilidade quanto a esse tipo de função. Primeiramente, ela sempre assume valores positivos, que já está explícito na definição desta função. Outro fato interessante é que o ponto (0,1) pertencerá ao gráfico de qualquer função exponencial, pois $a^0 = 1$ para todo a.

Faz-se necessário também analisar a monotonicidade da função exponencial. O professor deverá explicar aos alunos por que ela é sempre crescente (para $a > 1$) ou sempre decrescente (para $0 < a < 1$) ao longo de todo o seu domínio. Com isso, ele poderá também justificar o fato de a função exponencial ser injetiva.

A sobrejetividade da função também deve ser apresentada, bem como a bijetividade decorrente. Seu comportamento quando x assume valores muito grandes em módulo também é bem interessante de ser abordado. Vale ressaltar que, para ilustrar essas propriedades, é bem adequada a exibição de gráficos desta função e comparação destes com os gráficos de outros tipos de função conhecidas, como as lineares e quadráticas. Idéias interessantes sobre a análise em sala de aula das propriedades estão nas perguntas nº 4 e 5 do questionário do **capítulo 3**.

3) Equações e inequações exponenciais: Essa abordagem de equações e inequações exponenciais depois de apresentar a função exponencial é diferente da ordem normalmente apresentada no Ensino Médio. A justificativa é a mesma apresentada na pergunta nº 8 do questionário da **seção 3**. Embora tenha dividido a opinião dos professores, resolvemos seguir esta indicação. São dois motivos bem relevantes que corroboram para isso. O primeiro é que, tendo noção de que a função exponencial é injetiva, o aluno poderá entender por qual motivo podemos cancelar as bases e igualar os expoentes numa equação exponencial simples (em que as bases são iguais), conforme é citado na pergunta nº 9 do questionário. Através do próprio gráfico da função, ele podera enxergar que o valor que a função assume é diferente para cada elemento do domínio. O segundo motivo é que, sabendo os valores da base para os quais a função é crescente e decrescente, o aluno terá mais facilidade em compreender por qual motivo, na resolução de inequações exponenciais simples (com bases iguais), o sinal de desigualdade se mantém (para bases maiores que 1) ou é invertido (para bases entre 0 e 1). Dessa forma, o aluno não se limitará a decorar e empregar métodos prontos de resolução de equações, mas entenderá o que está por trás desses métodos, que são justamente as propriedades de funções exponenciais que ele viu anteriormente.

Existem outros tipos de equações exponenciais, em que as bases não são iguais. Primeiramente, há os casos em que elas não sao iguais, mas uma é potência da outra. Por exemplo, $3^x = 81^5$. Esses casos devem ser direcionados como exercício aos alunos para que eles tenham uma visão mais ampla e possam exercitar os artifícios matemáticos para fazer com que as bases fiquem iguais. Um outro caso interessante que pode servir para consolidar o conceito é o exposto na pergunta nº 11 do questionário. Há também as equações que só podem ser resolvida por logaritmos (lembrando que logaritmo é a função inversa da função exponencial, conforme já visto no presente trabalho). Se um aluno perguntar sobre como resolver a equação $3^x = 5$, o professor pode comentar rapidamente que existe um conceito matemático que possibilitará aos alunos resolverem esse tipo de equação. Ele poderá também propor ensinar logaritmos junto às equações exponenciais, mas conforme foi dito na pergunta nº 11 do questionário do **capítulo 3**, que trata desse assunto, essa proposta exige bastante cautela do docente para que o aluno não confunda os conceitos.

4.3 Aula 3 - Funções exponenciais - aprofundamento e aplicações

Após a aula anterior, é esperado que o aluno se sinta mais à vontade com o conceito de funções exponenciais, já compreendendo todas as suas características peculiares. Neste trabalho, estamos comprometidos não apenas com uma proposta didática desse tópico da Matemática no Ensino Médio, mas também com a excelência. Acreditamos que, em sala de aula, o professor pode ir além do que está estabelecido no planejamento, dependendo do grau de interesse da turma. Se os alunos querem ir além, por que travá-los? O que foi visto até agora já cumpre o conteúdo didático do Ensino Médio. Essa aula procurará aprofundar um pouco mais a parte teórica desse assunto e apresentar aplicações interessantes da função exponencial que fazem interseção com outras disciplinas. Eis o roteiro a seguir:

1) O problema antes da fórmula: Inicialmente, o docente pode introduzir um exemplo. O que o aluno precisa compreender é que os problemas matemáticos surgem antes da sua modelagem, e não o contrário. Existem situações em que se observa que uma função satisfaz sempre à seguinte igualdade: $f(t_1 + t_2) = f(t_1).f(t_2)$. Qual seria a "cara"dessa função? Há também o caso da aplicação de capital a juros fixos que motivaram os matemáticos a buscarem uma fórmula para $c(t)$, sabendo que a sua variação relativa $[c(t+h)-c(t)]/c(t)$ depende apenas de h mas não de t. Essas respostas vieram com o modelo de função exponencial. Da mesma forma, os matemáticos propuseram a função linear, a função quadrática, a função trigonométrica. Eles apenas queriam modelar situações que eles observavam.

2) Caracterização da função exponencial: Os teoremas de caracterização da função exponencial e da função de tipo exponencial, apresentados na **seção 2.1.3** do trabalho do colega Igor Alvarenga da Silva Nascimento intitulado *Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações* fogem ao escopo do Ensino Médio, principalmente por suas demonstrações não serem triviais. Contudo, é válido que o professor procure explicar aos alunos as peculiaridades dessas funções descritas nesses teoremas e destaque que somente esse tipo de função atende às características do teorema. Isso provocará no aluno uma visão mais ampla da Matemática, como uma ferramenta para modelagem de situações reais, e não como uma ciência que inventa fórmulas para serem aplicadas em problemas fictícios, os quais nunca ocorrerão. O estudante compreenderá, portanto, que a Matemática é uma ciência viva e em evolução, e que ele mesmo poderá, um dia se assim desejar, propor a sua própria modelagem.

3) Aplicações práticas: O professor deverá também expor aos alunos nesta aula as aplicações práticas de funções exponenciais, visto que agora ele sabe que elas é que provocaram o "surgimento"desse tipo de função. Conforme as respostas à pergunta nº 3 do questionário do **capítulo 3**, felizmente, hoje, há uma preocupação dos docentes em abordar tal assunto em sala. A importância de se contextualizar o ensino da Matemática já foi plenamente justificada através do **capítulo 1** deste trabalho. Alguns exemplos já expostos podem ser passados como exercício aos alunos. Uma aplicação bastante interessante, que relaciona o conteúdo de funções exponenciais e progressões aritméticas e geométricas, é mencionada na pergunta nº 7 do questionário do **capítulo 3**.

O professor pode, por exemplo, propor que os alunos analisem a aplicação de um valor inicial de capital (regida por uma função exponencial) e verifiquem numericamente se os valores do capital em instantes t diferentes formam uma progressão geométrica, desde que esses instantes estejam em progressão aritmética. Claro que, nesse caso, deve-se decidir com cautela se essa abordagem será feita, pois não será muito eficaz, caso os alunos ainda não tenham visto o conteúdo de progressões. Caso eles já tenham aprendido esse assunto, é uma ótima oportunidade de interligar conceitos matemáticos, fazendo com que os alunos revisem um conteúdo e aprendam outro, ao mesmo tempo.

4.4 Aula 4 - Número e e a função e^x

Finalizando a sequência didática proposta no presente trabalho, abordaremos alguns conceitos sobre o número e e a função exponencial natural, isto é, aquele que possui como base exatamente o mágico número e.

É de extrema importância deixar claro ao discente que esta função se comporta exatamente da mesma forma que todas as outras funções exponenciais já estudadas. O número e, apesar de ser irracional, como já foi visto no trabalho, como base de uma função exponencial aglutina as mesmas propriedades de uma exponencial que tem como base um número natural, por exemplo. Percebe-se que, por vezes, a aparição da função $f(x) = e^x$ faz com que alunos tenham um bloqueio de raciocínio, achando que tal função é de difícil compreensão e destinada à Matemática Superior.

Como sugestão de abordagem ao nosso leitor professor, orientamos que se comece com um breve histórico do número e, seguido de uma analogia com o irracional mais famoso que conhecemos: π, conforme apresentado no presente trabalho. Explicar a Matemática através da História da Matemática é uma excelente alternativa para despertar o interesse do aluno. Assim, é importante abordar o surgimento do número e, ressaltando um problema de ordem financeira da capitalização composta, conforme já abordado também neste trabalho. Deixamos o embasamento teórico nos capítulos anteriores com a exata intenção de permitir ao professor que use-o de forma ilimitada. Ainda, julgamos interessante convencer o aluno de que o número e é irracional, o que é um passo importante para a compreensão do comportamento da função exponencial natural.

Feita a introdução com um pouco da história do número e, pode-se passar ao estudo da função exponencial natural propriamente dita, $f(x) = e^x$. Neste ponto de conhecimento do aluno, é bem provável que muitos se perguntem: por que estudar, especialmente, este tipo de função exponencial? Por que ela tem essa importância tamanha, a ponto de ter uma aula inteira dedicada ao seu estudo? Os docentes devem estar preparados para responder a este tipo de questionamento. Assim, uma boa resposta é mostrar que todas as outras funções exponenciais já estudadas podem ser colocadas, através de artifícios matemáticos, na mesma base e. Assim, $f(x) = 2^x$ pode ser reescrita como, aproximadamente, $f(x) = e^{0,693x}$.

Outra resposta que deve ser abordada é que esta função possui inúmeras aplicações em fenômenos do nosso cotidiano por possuir uma característica importante: a sua taxa de crescimento (o que pode ser abordado como gradiente, para que não se introduza a noção de derivada) é exatamente igual à sua ordenada ou imagem na função. Numa primeira análise, pode não parecer fantástico, mas através dos gráficos das funções exponenciais, é possível passar ao aluno a importância do seu estudo. Desta forma, recomendamos também, fortemente, o uso de gráficos nesta parte das aulas, principalmente para mostrar a continuidade das funções, mesmo com bases irracionais. Ainda, registra-se que a curva que tem como gradiente e altura sempre iguais é conhecida como *curva perfeita* ou $y = (2,7182818284...)^x$, ou ainda, $y = e^x$.

Por fim, após o estudo puro da função, recomenda-se, mais uma vez, mostrar aplicações desta função específica, o que deixamos a critério do nosso leitor, já que há um vasto leque de casos práticos, inclusive com alguns esmiuçados neste trabalho. Como sugestão, aplicações financeiras sempre são interessantes e possuem um caráter educativo e pouco ensinado nos bancos escolares. Vale ressaltar que o assunto dessa aula foi abordado nas perguntas nº 12 e 13 do questionário do **capítulo 3**.

A partir da aplicação desta sequência didática, espera-se que o aluno obtenha um conhecimento sólido do assunto de funções exponenciais. Com as aulas 1 e 2, o aluno já terá aprendido o que se espera de um aluno de Ensino Médio. A **aula 1** revisa conceitos importantes para o assunto e a **aula 2** introduz o conceito da função exponencial, ensinando ao aluno resolver equações e inequações exponenciais, o que é uma proposta diferente do comum nas escolas. Neste caso, caberá uma avaliação do docente se essa proposta teve ou não um efeito positivo. A **aula 3** procura contextualizar o assunto, mostrando aplicações diferentes do que é apresentado corriqueiramente e aprofundar a teoria, o que poderá despertar um maior interesse dos alunos pela Matemática ao perceberem como surge um conceito matemático através das demandas de situações cotidianas que precisam ser explicadas de modo convincente. A **aula 4** é praticamente uma interseção da Matemática do Ensino Médio com a Matemática do Ensino Superior, e pode servir para aguçar ainda mais a curosidade dos alunos e identificar aqueles que, desde o Ensino Básico, já demonstram aptidão para a área.

Como já foi citado no início do capítulo, caberá ao docente saber como aplicar cada uma dessas aulas. Há contextos em que apenas as aulas 1 e 2 são aplicáveis e outros em que as aulas 3 e 4 podem ser perfeitamente utilizadas. Reitera-se que a intenção aqui é apenas dar um direcionamento para o ensino de funções exponenciais com um comprometimento com a excelência, que deve ser sempre priorizada.

Considerações Finais

Procurou-se com este trabalho, sob um enfoque mais amplo, mostrar que o ensino através de uma perspectiva aplicada pode obter melhores resultados quanto ao processo de ensino-aprendizagem do aluno. Através de uma minuciosa revisão de literatura, tentou-se corroborar o que foi defendido ao longo desta jornada. Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram os norteadores deste estudo, confirmando que já há um preocupação antiga em se ensinar Matemática de forma mais natural e aplicada, sem abandonar o formalismo necessário à ciência. Várias outras obras foram lidas e citadas, sempre procurando confirmar a tese defendida na introdução apresentada.

Restringindo um pouco mais o espectro, almejou-se deixar claro que o ensino de funções exponenciais sob uma ótica modelada, com algumas sugestões cronológicas de abordagens de conteúdos, pode tornar a compreensão mais efetiva e despertar o interesse e o gosto do discente pela matéria, realçando a sua importância no mundo onde está inserido. Ainda, ressalta-se que os modelos exponenciais foram escolhidos por possuírem relativo destaque na aplicabilidade no cotidiano social e em várias áreas afins.

Através de capítulos pedagógicos e matemáticos, se é que pode-se assim dividir, a construção lógica da teoria permitiu que fosse montado um roteiro que permita ao leitor professor se preparar em ótimas condições para ministrar aulas sobre o assunto tratado. É claro que não há a pretensão em se mudar estilos ou impor métodos e formas de ensino, mas sim contribuir, de forma impactante e significativa com a melhoria da educação das nossas escolas. Pretendeu-se trazer pontos que não são abordados com clareza nas obras publicadas. É importante destacar que muitos desses pontos foram sugestões de colegas docentes que, por meio de uma pesquisa/questionário distribuída, apresentaram pareceres e sugestões extremamente valiosas para o andamento deste estudo. Desta forma, o trabalho é dedicado aos professores do Ensino Médio e alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática que, em algum momento de suas trajetórias profissionais, se depararão com o desafio de ensinar conteúdos relativos aos conceitos exponenciais.

Em especial atenção às aplicações, construiu-se um seção no Capítulo 3, intitulada *Aplicações e Curiosidades*, trazendo exemplos corriqueiros e elaborados para o estudo da matéria em voga. Sempre agindo sob uma égide de inovação, paradigmas pouco conhecidos foram trazidos ao leitor, tudo com o intuito de despertar sempre o interesse do aluno, fazendo com que tome gosto pelos estudos das áreas matemáticas, quebrando assim mitos e mentiras sobre a disciplina. Deixando como exemplo de inovação, a abertura de paraquedas modelada por uma função tipo exponencial natural, permitindo concluir que o saltador sempre chegará com uma velocidade de pouso compatível, impedindo acidentes.

Coroando e corroborando a hipótese defendida, planejou-se uma sequência simples de quatro aulas, abordando os principais pontos dos assuntos estudados. Lembrando, novamente, que a vontade expressada não é de revolução em forma de ensino, mas sim de contribuição significativa. No planejamento, constatou-se que muito poderia ser feito diferente do que se pratica hoje na maior parte das escolas frequentadas. Assim, as aulas estão sob um enfoque diferente, com alterações na ordem dos conteúdos ensinados. Como exemplo, na sequência proposta, o ensino de funções exponencias não é precedido do ensino de equações exponenciais. Com isso, evitamos a mecanização do ensino, fazendo com que o aluno não seja um mero reprodutor de artifícios matemáticos, sem entender o que de fato está fazendo.

Por fim, através da análise dos questionários, pode-se dizer que é necessário quebrar a estrutura rígida que se instalou nas escolas, no que diz respeito ao ensino da Matemática: muitos docentes, por diversos aspectos, não aperfeiçoam os métodos de abordagem dos conteúdos. Seja por medo ou comodismo, seja por falta de tempo para aperfeiçoamento ou pouco incentivo por parte do próprio sistema escolar, é claro e notório que há uma resistência muito grande em fazer algo diferente: as avaliações são sempre unilaterais, onde o fracasso do ensino é quase sempre atribuído do discente; o tradicionalismo de ensino, com o docente expositor e aluno apenas ouvinte e não participante do processo de ensino; e mitificação do ensino de Matemática, como a detentora do posto de disciplina mais difícil da vida escolar são alguns exemplos de paradigmas que necessitam ser quebrados para a evolução da educação no país.

Desta feita, espera-se que o trabalho possa servir como estopim para o estudo com este viés modelador, inclusivo e inovador em outras áreas, tanto da Matemática, como em outras disciplinas, se assim se encaixar. Caso se consiga algo nesta direção, pode-se dizer que o esforço foi válido. Ainda, registra-se que o trabalho não é fechado e está sempre sujeito a correções e aperfeiçoamentos por parte do leitor. Com isso, o objetivo de contribuir para a melhoria do ensino será atingido em sua plenitude, na mais breve lacuna de tempo.

APÊNDICE A – Questionário distribuído aos professores de Matemática do Ensino Médio

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Motivação

Prezados companheiros professores de matemática, somos Igor Nascimento e Mário Lima. Estamos cursando o último período do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na UNIRIO. Decidimos abordar em nossa dissertação o ensino e aplicação de funções exponenciais no Ensino Médio. Com o intuito de direcionar o nosso trabalho, elaboramos um questionário aos docentes de Matemática buscando compreender melhor como é o ensino desse tópico nas escolas.

Portanto, gostaríamos de contar com a colaboração de vocês no preenchimento deste questionário. Essa ajuda será de muita valia para o nosso trabalho que ora se inicia. Desde já, o nosso muito obrigado.

Questionário: Funções exponenciais

1) A função exponencial tem como domínio o conjunto dos números reais. É intuitivo para o aluno que um expoente pode ser um número natural, inteiro e racional. Mas e se um aluno lhe perguntar o sentido da expressão: $2^{\sqrt{2}}$? Como você explica ao aluno que os números irracionais também fazem parte do domínio da função exponencial?

2) De que forma você define e explica os valores possíveis para a base "a" de uma função f(x) = a^x ?

3) Você apresenta em sala possíveis aplicações para funções exponenciais? Caso positivo, cite alguns exemplos.

4) Você costuma comparar em sala as taxas de variação da função exponencial com as funções de primeiro e segundo grau?

5) Você explora com seus alunos o comportamento da função exponencial no $\pm\infty$?

6) Como você explica para seus alunos que um número elevado a 0 é igual a 1? E como explica que para obter o resultado de um número elevado a -1 basta escrevê-lo como fração e inverter o numerador com seu denominador?

7) Você já demonstrou aos seus alunos que uma função exponencial pode levar uma sequência em PA numa sequência em PG? Qual foi a reação dos alunos? Ajudou no entendimento do assunto de PA e PG?

8) Na maioria dos materiais didáticos (possivelmente todos), o ensino de equação exponencial é anterior ao de função exponencial. Qual é a sua opinião a respeito? Por quê? Haveria vantagens em trocar a ordem com que esses assuntos são abordados? Se sim, quais?

9) Durante a sua aula sobre equação exponencial você resolve a equação $2^x = 8$ escrevendo $8 = 2^3$, cortando as bases comuns e obtendo x=3. Um aluno pergunta porque é possível cortar a base. O que você responde? Você saberia justificar formalmente esse"corte"?

10) Você costuma utilizar logaritmos para resolver equações exponenciais?

11) Se um aluno perguntasse como resolver a equação $2^x = 3^x$, o que você responderia?

12) Você apresenta a função exponencial natural, f(x)= e^x, em suas turmas de Ensino Médio? Qual é sua opinião a respeito?

13) Você já abordou em sala de aula a representação de Euler para números complexos (e^{ix} = cos x + i.sen x) ?

APÊNDICE B – Tabulação, por pergunta, das respostas obtidas do questionário distribuído aos professores de Matemática do Ensino Médio

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Motivação

Prezados companheiros professores de matemática, somos Igor e Mario. Estamos cursando o último período do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na Unirio. Decidimos abordar em nossa dissertação o ensino e aplicação de funções exponenciais no Ensino Médio. Com o intuito de direcionar o nosso trabalho, elaboramos um questionário aos docentes de Matemática buscando compreender melhor como é o ensino desse tópico nas escolas.

Portanto, gostaríamos de contar com a colaboração de vocês no preenchimento deste questionário. Essa ajuda será de muita valia para o nosso trabalho que ora se inicia. Desde já, o nosso muito obrigado.

Questionário: Funções exponenciais

1) A função exponencial tem como domínio o conjunto dos números reais. É intuitivo para o aluno que um expoente pode ser um número natural, inteiro e racional. Mas e se um aluno lhe perguntar o sentido da expressão: $2^{\sqrt{2}}$? Como você explica ao aluno que os números irracionais também fazem parte do domínio da função exponencial?

Mostraria que trabalhando com uma aproximação racional de √2 obteríamos uma aproximação de 2^√2 assim podemos obter um resultado tão preciso quanto necessário.
Primeiro daria uma noção dos números reais, abordando de uma forma genérica os números irracionais. Há várias formas de se definir os irracionais: - a definição formal, como o limite de uma sequencia de racionais; - ou uma definição mais paupável pro aluno do ensino médio: números que não apresentam fim depois da vírgula. Por isso, acho muito interessante você abordar os números reais primeiro.
Para justificar os números irracionais, incluindo os transcendentes (ex e, pi ..) usaria tabelas com expoentes fracionários até chegar a um "limite". Posteriormente usaria o raiz de 2 na forma de expoente também ao explicar as propriedades.

Pela densidade dos irracionais nos reais. Utilizo a geometria, em particular a diagonal do quadrado de lado 1.

Acredito ser intuitivo para o aluno o fato dos números naturais, inteiros e racionais poderem ser colocados no expoente de um outro número pelo fato de esses conjuntos representarem os números do nosso cotidiano. Ao apresentar para o aluno que a função exponencial está definida no domínio dos reais e é contínua, apresento a ele o fato de que o conjunto dos reais é composto tanto por números racionais como por números irracionais. Isso nos leva a apontar que expoentes com números irracionais, apesar de menos usuais, são possíveis.

O sentido da expressão é ver isto como a área sob a curva 2^x desde do ponto zero ao ponto 2^(1/2). Partindo disso, é fácil mostrar que essa área pode crescer de forma contínua, sendo assim, essa continuidade inseriria naturalmente os números irracionais entre os racionais.

A melhor explicação seria gráfica, ou seja, sendo a função exponencial contínua nos reais, ela assume um valor bem definido para $x=\sqrt{2}$.

Antes de tudo, a melhor resposta sempre depende do aluno. Não digo que seja intuitivo para a maioria de meus alunos! Nem mesmo o caso dos números naturais. Depende muito de como ele fez o Ensino Fundamental dele.

De qualquer forma é uma pergunta sempre pertinente. Via de regra os bons alunos fazem esse tipo de pergunta. A maioria não se interessa e simplesmente não se questiona esse fato.

Se ele é de ensino médio, é preciso garantir que ele entendeu os seguintes passos:

1) Tento deixar claro para o aluno que qualquer potência b, natural de 2, possui um inteiro a tal que 2^a=b.

2) Quando ele entende isso bem, eu explico que isso pode ser extendido para os inteiros, fazendo-se 1/2^a=b.

3) Então eu verifico se o aluno sabe o que é uma raiz enésima.

4) Feito isso o aluno vai conseguir conceber um expoente racional.

5) A partir daí eu tento esboçar um gráfico da função na reta real. Mas eu só posso fazer isso se conhecer os valores dos números reais. Traçando o esboço do gráfico apenas para os racionais, vemos que os iracionais podem ser encontrados no esboço.

6) Então eu digo que qualquer número real positivo pode ser expresso como uma potência de dois. Em alguns casos, "fatalmente", o expoente terá que ser irracional

Usaria o conceito de limite.
Apresentaria as sequencias 2^(sqrt(2) - 1/n) e 2^ (sqrt(2) +1/n),aplicaria o limite para as duas, com n ->oo e mostraria que as duas convergem para o mesmo valor.

Usaria também o software Geogebra para mostrar o comportamento da função f(x) = 2^x e mostrar visualmente o que fiz quando apliquei o conceito de limite.

O calculo de 2^sqrt(2) pode ser explicado através de aproximações por valores menores e maiores que sqrt(2).

Usando uma calculadora, uso expoentes próximos de $\sqrt{2}$ para mostrar a convergência do

resultado
Através do gráfico, mostrando que não há intervalos abertos na construção dessa função
Não saberia explicar, pois nunca ensinei potência com expoente irracional
A partir do gráfico
É uma expressão onde o resultado pode ser aproximado pois $\sqrt{2}$ é um número irracional, ou seja, mostraria que 2^1,4 < 2^$\sqrt{2}$ < 2^1,5 ou 2^1,41 < 2$\sqrt{2}$ $<$ 2^1,42 e assim sucessivamente, ou seja, todo número irracional pode ser aproximado por números racionais pois entre dois números racionais existe um número irracional
Dando uma idéia de como caracterizar, tomando aproximações racionais do número irracional $\sqrt{2}$ (1; 1,4; 1,41; 1,414; obtendo assim a potência a^x, com 'x' irracional e 'a' real positivo

2) De que forma você define e explica os valores possíveis para a base "a" de uma função f(x) = a^x ?

Como podemos incluir valores racionais em X e utilizando as propriedades para transformar a^x em uma raiz concluiríamos que a não pode ser negativo para todos os valores de X uma vez que não não temos raiz de números negativos nos reais. Supondo que X é irracional para algumas aproximações "a" poderia ser negativo e por outras não, como as aproximações são uma ferramenta para encontrar o valor na precisão necessária seria bom que todas fossem validas assim simplesmente definiria como não existindo a^x com x irracional e a<0
Iria com ajuda dos alunos perguntando quais valores achariam possíveis para a. No fim chegaria o a conclusão que apenas valores negativos, o zero e o 1 não fariam sentido. Número negativo daria exemplo de 2^(-1/2). Chegando nos números imaginários. 0 e 1 chegaria a conclusão que não poderia ser considerado uma função.
Utilizo como referência os valores abaixo e acima de 1 para ilustrar o comportamento crescente e decrescente. Utilizo esse recurso para falar sobre o que é uma assíntota de modo superficial.
Ao apresentar os valores possíveis da base 'a' na função exponencial, relembro onde a função exponencial está definida, para que valores de 'a' a função está definida. Uma vez sabendo que esta função guarda uma relação muito próxima com a função logarítmica (inversa) desenvolvo os casos particulares de 'a': o porque de não poder assumir o valor 1, o porque de não assumir valores negativos, o porque de não assumir o valor 0, o comportamento da função quando 'a' está no intervalo de 0 a 1 e o comportamento da função quando 'a' é maior do que 1.
tem que ser maior que zero. Se for zero a função se torna a função constante. Se for negativo a função torna-se infinitamente descontínua.
Talvez a melhor maneira seja levar o aluno a refletir sobre os valores de "a" que tornam f(x) "bem comportada" (Contínua, crescente/decrescente).
Primeiro eu mostro que 1 elevado a qualquer coisa é 1. O contradomínio de 1^x é {1}. Não é injetora, não possui inversa. Então eu falo que o 1 não fornece nada prático. Depois eu discuto sobre o fato da multiplicação de números negativos por negativos ser positiva. As potências pares de números negativos são positivas e as potências ímpares são negativas. Isso não é interessante. Então eu questiono: E se um número negativo for elevado a uma fração não inteira e negativa.

Não parece fazer sentido com os números que temos. Para evitar todos esses casos estranhos, define-se o a da forma mais abrangente possível, escolhendo apenas os números positivos e retirando o um, para que talvez seja possível definir uma inversa depois.
Seja um número real a, a > 0 e a diferente de 1. Definimos função exponencial de base a à função f de R em R que associa a cada x real o número real a^x. Simbolicamente: f:R ->R x -> a^x Observações: Para a = 1, não teríamos uma função exponencial, pois 1^x é sempre 1 para qualquer x real.(a função seria uma função constante) Para a<0 teríamos valores da imagem da função que não estariam dentro do contradomínio . Exemplo : a = -7 e x = 1/2 f(1/2) = (-7)^1/2 (não pertence a R.) Para a = 0 teríamos um elemento do domínio que não apresentaria imagem , pois 0^0 é indeterminado. Assim, devemos ter a>0 e a diferente de 1.
a>0 pois se atribuirmos valores negativos para a, a função nao ficaria definida em casos como a^(1/n) quando a<0 e n par já que teríamos uma raiz de índice par com argumento negativo

3) Você apresenta em sala possíveis aplicações para funções exponenciais? Caso positivo, cite alguns exemplos.

sim, mostro que elas representam uma progressão geométrica e juros compostos em matemática financeira, conteúdos os quais possuem diversas aplicações na literatura
1. Ruído gaussiano branco, através da função exponencial de Gauss 2. Probabilidade, através da Distribuição de Poisson (aplicações em teoria das filas: filas de banco, filas de buffer de um roteador, filas de paginação de um sistema operacional...) 3. Na física, mostraria as curvas PVˆ(alpha) do gás ideal. 4. Na quimica há também, mas não lembro...
Sim. Juros compostos é o principal exemplo.
Sim. Crescimento populacional e matemática financeira.
Normalmente já contextualizadas em questões práticas. São exemplos: proliferação bacteriana e decaimento radioativo.
decaimento radiotivis.
É fundamental a apresentação de aplicações práticas, tais como juros compostos ou taxa de crescimento/decrescimento populacional, etc
Sim, sempre é bom mostrar exemplos. Costumo falar de crescimento de populações na ausência de predadores naturais (como em algumas bactérias). Esse aqui também, da população mundial. https://gailtheactuary.files.wordpress.com/2013/05/world-population-0-to-2011.png?w=640&h=385

Se der tempo falo de poupança também: http://www.minhaseconomias.com.br/wp-content/uploads/2013/07/2013-07-31-11.11.09.jpg?c6cd9e
Sim. O sistema de juros compostos A decomposição de determinadas substâncias. O crescimento de determinados seres vivos microscópicos, como as bactérias.
Sim, decaimento radioativo e a escala Richter para intensidade de terremotos

4) Você costuma comparar em sala as taxas de variação da função exponencial com as funções de primeiro e segundo grau?

sim, incluo essa comparação gráfica e numérica quando comparo juros simples com juros compostos sobrepondo os gráficos de crescimento de cada um e associando também a PG e PA
Sim. Eu sempre mostro a função do primeiro grau, do segundo grau e depois vou construindo as de grau maior. Dou uma ideia de como ela cresce mais ou menos, dependendo do expoente.
Sim.
Sempre. Principalmente com a função afim que é o ponto de partida do estudo das funções.
Dificilmente, sendo mais aplicável em problemas específicos envolvendo esse conhecimento. Mas são raros.
A taxa de variação da função exponencial é muito maior.
Não. Infelizmente, essa abordagem é mais comum em disciplinas de cálculo, em cursos de nível superior
Depende da turma. Para Ensino Médio, só se for em uma turma de exatas. Para os outros, costumo fazer isso brevemente.
Sim
Não.

5) Você explora com seus alunos o comportamento da função exponencial no $\pm\infty$?

apenas se surgir o interesse, o conceito de infinito nem sempre é compreendido pelos alunos (e pelos professores) explora-lo tem que ser feito com muita cautela para que a aula não vire uma discussão filosófica sobre infinito e fuja do planejamento, mas se o professor dispuser de tempo para isso é sempre interessante.

Sim. Na verdade, mostro pra eles que determinadas funções se comportam da forma que queremos, isto é, atinge o valor que queremos através da continuidade. É sempre bom o aluno ter noção de comportamento da função, de variação, porque aí ele entenderá melhor o conceito de derivada.
Sim.
Muito pouco, acredito não ser objeto principal para o ensino médio.
Até hoje foi um assunto muito pouco explorado.
Não, não os exploro.
Sim. Isso é fundamental
Comento que em alguns casos dá para dizer para onde caminha a função, como quando o expoente é positivo menor que 1. Falo das assíntotas.
Sim.Usando o software Geogebra.
Sim

6) Como você explica para seus alunos que um número elevado a 0 é igual a 1? E como explica que para obter o resultado de um número elevado a -1 basta escrevê-lo como fração e inverter o numerador com seu denominador?

elevado a zero: x^b = x^(0 + b) = x^0 x^b => x^0 =1 elevado a negativo: definindo o que é inverso multiplicativo ou seja b é inverso de a se: a x b = 1 e denotamos b como a^-1
aˆ(0) = ak / ak = 1 aˆ(-1) = aˆ(k) / aˆ(k+1) = 1/a
Elevado a 0 igual a 1 - definição para as propriedades de soma do expoente estenderem-se aos expoentes negativos. elevado a -1 - definição para as propriedades de multiplicação estenderem-se aos expoentes negativos,
Uso a propriedade das potências de mesma base.
1o caso: se estivermos estudando as funções exponencial e logarítmica juntas, identifico o ponto em que a função logarítmica secciona o eixo 'x'. Caso contrário, basta fazer o "truque" intuitivo de: a^0 = a^(1-1) = a^1/a^1 = a/a = 1; 2o caso: novamente, se estivermos estudando as funções exponenciais e logarítmicas juntas, identifico a situação na função inversa. Caso contrário, aplico o "truque" de: a^(-1) = a^(0-1) = a^0/a^1, mas a^0 calculamos no caso anterior, portanto, a^(-1) = 1/a^1
A resposta quanto a 0 é fácil. Como a^x/a^y = a^(x-y) ->a^x/a^x = 1 = a^0.
a^p/a^q= a^(p-q). Partindo dessa premissa. Se p=q temos a^p/a^p=1=a^(p-p)=a^0; a^0/a^p=1/a^p=a^(0-p)=a^(-p)
Vou andando de trás para frente; 3^3=3*3*3 3^2=3^3/3=3*3*3/3=3*3 3^1=3^2/3=3*3/3=3 3^0=3^1/3=3/3=1 3^(-1)=3^0/3=1/3=1/(3^1)
Primeiro apresento as propriedades da multiplicação e divisão de potências com a mesma base.

Seja a^n não nulo. Temos que: a^n/a^n = 1 Aplicando as propriedades de potência no primeiro membro da igualdade temos : a^(n-n) = 1 a^0=1   a^n/a^(n+1) = 1/a Aplicando as propriedades de potência no primeiro membro da igualdade: a^(n-n-1) = 1/a a^(-1)=1/a
Podemos explicar que, por exemplo a^0 vem de uma divisão de a^n por a^n e utilizando a propriedade de divisão, repete-se a base e subtrai os expoentes, logo a^0 = a^n/a^n = 1

7) Você já demonstrou aos seus alunos que uma função exponencial pode levar uma sequência em PA numa sequência em PG? Qual foi a reação dos alunos? Ajudou no entendimento do assunto de PA e PG?

sim, eles perceberam que estavam estudando "a mesma coisa" com uma roupagem diferente, não sei dizer se ajudou.
Nao recordo disso.
Não.
Uso sempre a P.A. comparada à função afim e a P.G. com a exponencial, os alunos ficam supresos. Acredito que ajuda.
Já demonstrei. Muitos ficam impressionados. Alguns chegaram a achar que era magia negra. :) Por vezes, a explicação leva ao que chamo de "ampliação de horizontes", que seria o aluno ter o contato com mais uma forma em que os diversos assuntos da matemática se inter-relacionam, neste caso, como a função exponencial ou logarítmica se relacionam com PA e PG.
A reação foi espanto.
Não, nunca fiz isso.
Nunca fiz isso. PA e PG costuma vir depois de funções. Eu comento que PGs são funções exponenciais e demonstro. Talvez ajude sim! =)
Sim.Alguns gostam e outros não demonstram interesse.Acredito que ajudou somente para um grupo reduzido de alunos,não sendo muito produtivo para a maioria da turma.
Não

8) Na maioria dos materiais didáticos (possivelmente todos), o ensino de equação exponencial é anterior ao de função exponencial. Qual é a sua opinião a respeito? Por quê? Haveria vantagens em trocar a ordem com que esses assuntos são abordados? Se sim, quais?

<table>
<tr><td>acredito que pelo trabalho que se teria em adiantar todo o conteúdo de função não seria prático mudar a ordem</td></tr>
<tr><td>SIm.

Melhor explicar o comportamento individual pra depois resolver equações envolvendo as funcoes.</td></tr>
<tr><td>Para mim um aluno não pode ver uma equação exponencial antes de saber o que é uma função exponencial. Eles precisam conhecer com o que estão tratando. É como ensinar multiplicação antes de ensinar soma.</td></tr>
<tr><td>Creio que toda equação deve ser tratada antes da função. Por se tratar de caso particular e ser mais simples de compreensão, assim podemos usar o estudo das funções como extensão do estudo das equações.</td></tr>
<tr><td>Acho que essa abordagem funciona como uma introdução. Ao meu ver, funciona aos mesmos moldes com outras funções, por exemplo a de 1° grau: aprendemos a resolver equações de primeiro grau utilizando o "quadrado" para então tomarmos conhecimento do que representa uma função do 1° grau; ou mesmo da de 2° grau, aprendendo a resolução por Baskara para só então sermos introduzidos à equação do 2° grau. Acredito que é a forma como o assunto de funções é explicado. O formalismo por detrás dos conceitos de domínio, contradomínio e imagem por vezes confunde os alunos. Até aprenderem funções, todas as equações tem solução. Quando se deparam com o formalismo dos conceitos anteriores parecem "perdidos" e não entendem porque determinadas "equações" não podem ser resolvidas da "maneira que eu sempre resolvi".</td></tr>
<tr><td>Isso se deve ao fato para que os alunos compreendam que a^0 = 1 e que números irracionais fazem parte do domínio.</td></tr>
<tr><td>Para mim, não há vantagens em trocar esta ordem, pois também aprendemos a multiplicar e a somar antes de lidarmos com funções lineares.</td></tr>
<tr><td>Acho que faz sentido equações exponenciais vir antes de funções exponencias porque o aluno precisa ganhar confiança no conceito de expoente para podê-lo aplicar nas funções.

Não vejo como vantagem trocar essa ordem. De fato, é uma alternativa válida, mas ao meu ver não tão eficiente. O aluno ia se questionar, "como faço contas com esses expoentes?" antes de fazer um gráfico com eles.</td></tr>
<tr><td>Seria mais vantagem para o aluno aprender primeiro função exponencial.

Acho que o aluno teria mais facilidade de compreender as soluções de determinadas equações observando que a função é injetora.</td></tr>
<tr><td>Com funções e equações do 1° e 2° graus, a ordem geralmente é resolver a equação e depois falar da função. Resolver a equação exponencial primeiro pode ser importante pois revisita o conceito de propriedades de potenciação e ai depois entra-se num tópico novo.</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

9) Durante a sua aula sobre equação exponencial você resolve a equação $2^x = 8$ escrevendo $8 = 2^3$, cortando as bases comuns e obtendo x=3. Um aluno pergunta porque é possível cortar a base. O que você responde? Você saberia justificar formalmente esse"corte"?

partindo de 2^x = 2^3 lembraria que o ato de cortar é realizar a mesma operação dos dois lados da igualdade assim dividiria os dois lados por 2^3 (2^x)/(2^3) = (2^3)/(2^3) (2^x)/(2^3) = 1 2^(x-3) = 1 x-3 = 0 x = 3
Eu sempre sou bem formal nas demonstrações. E acredito que todos professores deveriam também ser rigorosos matematicamente. Eu faria o mesmo na segunda questao abaixo dessa.
Não explico que "corta" a base. Mostro que 3 é uma solução e faço os pensar por que não pode haver outra. Depois explico através do gráfico da função exponencial, e lembro sobre sobrejetividade e injetividade.
Não uso o termo cortar, eliminei do meu vocabulário, junto com o "passa pra lá", a ideia de comparação é a ideal, simplifica e responde de forma correta e convincente. O uso de logaritmos também ajuda nessa solução, para estender às bases diferentes e utilizar a ideia de função inversa.
Respondo que o no segundo membro da equação, temos um número que é composto somente por fatores 2, isto é, se escrevemos que 8 = 2^3 estamos afirmando que o número oito é composto por 3 fatores 2 multiplicados. Se o primeiro membro afirma que um número 'x' de fatores 2 é igual a 3 fatores 2 multiplicados, isto é porque o número de fatores que é uma incógnita, deve ser o mesmo. Portanto, 3 fatores.
Fatoração.
Jamais resolveria uma equação exponencial cortando as bases. Isso dá uma impressão errada do processo de resolução da equação.
A justificativa é que a função exponencial é injetora. Ele só vai aprender isso depois de terminar o estudo dos gráficos. Entendo seu ponto de vista, concordo que há uma quebra no processo de construção do conhecimento. Mas isso é intrínseco do conhecimento. Quebramos em partes para facilitar a aprendizagem, por mais que nem sempre todos os passos fiquem claros. Um outro exemplo disso é o ensino de cálculo. Primeiro aprendemos a calcular as integrais mais simples e depois vamos ver com detalhes os teoremas importantes.
Não cortou as bases.Potências com a mesma base igualadas possuem expoentes iguais.
Você pode realizar esse corte porque a função é injetiva, então se 2^x = 2^3, pela injetividade o

único resultado possível é x= 3

10) Você costuma utilizar logaritmos para resolver equações exponenciais?

não
Sim.
Sim.
Somente quando não é possível fazer de outra forma.
Depende se o aluno já domina ou não o conteúdo de logaritmos. Caso já tenha o conhecimento de logaritmos, passo a incorporar às soluções o emprego dos logaritmos.
Sempre.
Não.
Depois de ensinar logaritmos, caso haja uma revisão, isso pode acontecer. Mas não é o esperado.
Sim
Não

11) Se um aluno perguntasse como resolver a equação $2^x = 3^x$, o que você responderia?

3^x = (2+1)^x (2+1)^x = (2+1)(2+1)...(2+1) fazendo x = 2 obteríamos 2^2 + 4 +1 = 2^2 +5 com x = 3 (2^2 +4 +1)(2+1) = 2^3 +8 +2 +2^2 +4 +1 = 2^3 + 19 com x = 4 2^4 + 65 assim mostraria que qualquer x escolhido sempre teríamos 3^x = 2^x + alguma coisa
Uma forma mais aceitável para ele seria por gráfico, entretanto, nao correto. Poderiamos resolver: 0=(3/2)ˆ(x) -> x=0
Mostrando no gráfico. Uma "cresce" para x positivo e "diminui" para x negativo mais rápido que a outra. Então único lugar onde se encontram é para x = 0.
Usaria a representação no plano. http://www.wolframalpha.com/input/?i=2%5Ex%3D3%5Ex.
Como os dois membros são funções exponenciais com bases positivas, podemos admitir que ambos são positivos e diferentes de zero. Divide um membro pelo outro e aplica-se o logaritmo

numa base conveniente.
Responderia que existe apenas um valor de x que qualquer número elevado exibe sempre esse valor. Sendo assim levaria o aluno a lembrar que qualquer número real maior que zero elevado a zero é igual a 1.
No nível médio, uma abordagem gráfica seria interessante.
3^x >0 para todo x real 2^x/3^x=1 -> (2/3)^x=1 -> x=0
Divida o primeiro e o segundo membro da igualdade por 3^x 2^x/3^x =3^x/3^x 2^x/3^x =1 (2/3)^x = 1 (2/3)^x = (2/3)^0 x=0
Simplifique por 3^x obtendo 2^x/3^x = 1. Utilizando as propriedades de potenciação temos (2/3)^x = 1, logo x = 0

12) Você apresenta a função exponencial natural, f(x)= e^x, em suas turmas de Ensino Médio? Qual é sua opinião a respeito?

ainda não apresentei dessa forma
SIm. Nao entendi a pergunta.
Apenas como exemplo quando usamos número irracional na base, porém não entro em nenhum detalhe extra sobre a função. Não vejo vantagem nenhuma nesse primeiro contato com a função exponencial.
Apresento de modo discreto. Creio ser importante falar a respeito, mas com pouco tempo não aprofundo o estudo da base e.
Sim. Acho que não foge muito ao tema. Ao meu ver, representa a mesma função exponencial, na qual estamos empregando uma base "fixa" e menos convencional aos conteúdos do Ensino médio. Normalmente explico para os alunos que as propriedades continuam as mesmas como se a base fosse 2 ou 10. Acredito que essa explicação torna a função exponencial natural menos "traumática".
Não.
Não. Se não pudermos dar um sentido prático à referida função não vejo grandes vantagens.
Não. Só vale a pena para as turmas de exatas.
Não.
Sim, explica que a constante e como o pi está presente na matemática e que alguns resultados importantes na matemática utilizam esse número, trata-se o "e" como uma base comum

13) Você já abordou em sala de aula a representação de Euler para números complexos (e^{ix} = cos x + i.sen x) ?

ainda não
Sim.
Não quando abordamos função exponencial, apenas quando introduz números complexos.
não.
Somente a título de curiosidade.
Sim.
Não
Só para turmas militares.
Não.
Não

Referências

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. [S.l.]: Editora Contexto, 2002. Citado na página 16.

BELLOS, A. *Alex através do espenho: como a vida reflete os números e como os números refletem a vida*. [S.l.]: Companhia das Letras, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 25, 26, 30, 34, 35, 50 e 51.

BRASIL, M. da Educação e C. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio. 1998. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 21.

FERNANDES, S. da S. A Contextualização no Ensino de Matemática–um estudo com alunos e professores do Ensino Fundamental da rede particular de ensino do Distrito Federal. 2011. Citado na página 22.

FILHO, D. C. d. M. Análise da Contextualização da Função Exponencial e da Função Logarítmica nos Livros Didáticos do Ensino Médio. III Colóquio de Matemática da Região Nordeste, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

JULIANELLI, J. R. *Ensinar Matemática - Dificuldades e Perspectivas*. [S.l.]: Editora Ciência Moderna, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 20, 23 e 24.

LIMA, E. L. *Matemática e ensino: Coleção do Professor de Matemática*. 3ª. ed. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. Citado na página 23.

LIMA, E. L. *Matemática e Ensino*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

LIMA, E. L. Crescimento Linear e Crescimento Exponencial. Revista do Professor de Matemática, nº33, 2011. Citado na página 42.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: Volume, 2006. Citado na página 39.

MAOR, E. *e: A História de um Número*. 4ª. ed. [S.l.: s.n.], 2003. Citado 5 vezes nas páginas 17, 31, 53, 54 e 55.