Universidade Estadual de Maringá - UEM
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Mauro Antonio de Moraes

O Conceito de Densidade em Múltiplos Contextos

Maringá

2016

Universidade Estadual de Maringá - UEM
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O Conceito de Densidade em Múltiplos Contextos

Mauro Antonio de Moraes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins

2016

Dedico essa dissertação de mestrado a minha avó, Alice Ferreira Pedrezini, que me ensinou a contar, a ler e a escrever. A meus pais, Mauro Leite de Moraes e Sandra Maria de Moraes, a minha irmã, Suelen Leite de Moraes e sobrinho, Erick Gustavo de Oliveira, que sempre me apoiaram, dando-me motivação.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, e a todos os professores que contribuiram com a minha formação, em especial os do PROFMAT.

Quero agradecer também o Coordenador do Programa de Mestrado Profissional na Universidade Estadual de Maringá, Laerte Bemm, que tão bem tem desenvolvido a função.

A minha dedicada e talentosa orientadora, Claudete Matilde Webler Martins, que sem medir esforços me conduziu até aqui.

Ao meu grande amigo Silvio Boss, que me auxiliou na digitação desse trabalho, e aos colegas de turma com os quais vivi bons momentos.

Resumo

Estudamos o conceito de densidade em $\mathbb{R}$, em espaços métricos, em espaços topológicos e apresentamos uma sugestão de como abordá-lo no ensino básico.

Palavras-chave: Números Reais, Espaços Métricos, Densidade.

Abstract

We studied the concept of density in $\mathbb{R}$, in metric spaces, in topological spaces and present a suggestion of how to approach it in basic education .

Keywords: Real Numbers, Metric Spaces, Density.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A palavra densidade aparece em diversos contextos diferentes, na física, na química, na geografia, na música, entre outros. Vejamos alguns exemplos:

1. Densidade demográfica, também conhecida como densidade populacional ou população relativa é um indicador dado através da relação entre a população e a superfície do território, normalmente relativa a seres humanos. A densidade demográfica indica a média de quantos habitantes existem por cada quilômetro quadrado, sendo calculada pela fórmula:
$$d = \frac{n}{A},$$
onde n é o número de habitantes de uma determinada região e A a área da superfície dessa região em km^2.

2. Uma substância pura tem a propriedade fundamental de apresentar massa diretamente proporcional ao respectivo volume, ao fixar a temperatura e a pressão. Sejam m_1, m_2, ..., m_n as massas de porções de substâncias puras em uma mesma temperatura e submetida à mesma pressão. Sendo V_1, V_2, ..., V_n os respectivos volumes, podemos verificar que:
$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} = ... = \frac{m_n}{V_n} = \mu.$$
A constante μ é definida como sendo a Densidade Absoluta, também conhecida como Massa específica. A densidade absoluta, do ferro, $\mu_{Fe} = 7,8g/cm^3$, isto é, um recipente com capacidade de $1cm^3$, comporta até $7,8g$ de ferro. Outro exemplo, é o da água, que tem densidade absoluta igual a $\mu_{H_2O} = 1g/cm^3$, isto é, existe uma paridade entre o número que mede a massa dessa substância em gramas e o número que mede seu volume em centímetros cúbicos.

3. Antes de definirmos a densidade de um corpo, vamos entender a definição de corpo. Corpo é tudo aquilo que ocupa um lugar no espaço, isto é, tem volume externo e possui massa. Dessa forma faz sentido estabelecer uma comparação entre essas duas grandezas, através da razão
$$d = \frac{m}{V_{ext}}$$

e chamamos essa razão d de densidade do corpo.
Agora nos vem a seguinte pergunta: será possível um corpo de ferro ($d_{Fe} = 7,8g$), ser menos denso que a água ($d_{H_2O} = 1g/cm^3$)? A resposta é sim. Para isso, esse corpo deverá ser provido de descontinuidade internas (regiões ocas), de modo que sua massa total seja medida por um número, em gramas, menor que aquele que mede, em cm^3, o volume delimitado por sua superfície externa.

Podemos perceber que mesmo em contextos diferentes, a densidade determina a quantidade de algo em um espaço delimitado, e por se tratar de uma grandeza, a densidade pode variar, por exemplo, a densidade demográfica de duas regiões diferentes. Buscando compreender o conceito de densidade no conjunto dos números reais e uma maneira de abordá-lo no ensino básico, fizemos o estudo de alguns tópicos do conjunto dos números reais para compreendermos em que sentido o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais são ambos densos no conjunto dos números reais.

Além disso, definimos espaços métricos e apresentamos alguns exemplos e proposições a fim de chegarmos à definição de densidade em Espaços Métricos e Espaços Topológicos. Depois de alcançar uma visão mais ampla do conceito de densidade, apresentamos uma sugestão de como abordá-lo no Ensino Básico.

Mais especificamente, nesta dissertação de mestrado, temos o objetivo de compreender a propriedade que alguns subconjuntos possuem de serem densos, e para isso, no capítulo 2 que segue, abordaremos alguns tópicos básicos sobre números reais, definiremos densidade no conjunto dos números reais, e provaremos que o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais são densos no conjunto dos números reais.

No capítulo 3, serão definidos Espaços Métricos, Conjuntos Abertos, Conjuntos Fechados e de forma mais geral, definiremos densidade em Espaços Métricos e em Espaços Topológicos.

Portanto, em consonância com a proposta do PROFMAT, este trabalho visa contribuir para uma qualificação ampla do ensino de matemática na escola básica, indo desde um aprimoramento no processo de formação continuada de professores até mudanças efetivas da prática em sala de aula. Esta dissertação sugere no capítulo 4, uma maneira de abordar o conceito de densidade dos conjuntos dos números racionais e dos números irracionais no conjunto dos números reais, no ensino básico, buscando um aprendizado mais significativo e inserido de forma consistente em uma educação universal de qualidade.

2 Subconjuntos Densos no Conjunto dos Números Reais

O objetivo deste capítulo é estudar as definições e resultados necessários para provarmos que dado um número real a qualquer, podemos encontrar um número racional r e um número irracional s, tão próximos de a quanto queiramos.

A revisão bibliográfica deste capítulo foi feita baseada em [1].

2.1 Conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis

Na busca de caracterizar o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, Giussepe Peano (1858 - 1932) enuncia três fatos básicos que a partir dos quais podemos elaborar toda a teoria desse conjunto, conhecido como conjunto dos números naturais.

Axiomas de Peano:

1. Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o sucessor de n.

2. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ então $X = \mathbb{N}$.

Princípio da Boa Ordenação: Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Para provarmos essa afirmação, para cada $n \in \mathbb{N}$, definiremos por I_n o conjunto dos números naturais menores ou iguais a n, isto é, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$.
Se $1 \in A$ então 1 será o menor elemento de A, pois pelo Axioma 2 de Peano, o número 1 não é sucessor de nenhum outro número natural, consequentemente, ele é o menor número natural. Porém, se $1 \notin A$, então consideremos o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - A\}$ de todos os números naturais n tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Mas como estamos supondo que $1 \notin A$, podemos concluir que $1 \in X$ e como A não é vazio, temos que $X \neq \mathbb{N}$. Dessa forma, pelo Axioma 3, deve existir algum $n_0 \in X$ tal que $1 + n_0 \notin X$, isto significa que todos os elementos de A são maiores que n_0. Além disso, $n_0 \notin A$ e

$n_0+1 \in A$. Como não há números naturais entre n_0 e $1+n_0$, concluímos que $1+n_0 \in A$ e é o menor elemento de A. $\square$

Definição 2.1. *Um conjunto X é finito se é vazio ou se, para algum $n \in \mathbb{N}$, existe uma bijeção $f : I_n \to X$, onde $I_n = \{1, ..., n\}$. No caso em que X não é vazio, dizemos que X tem a cardinalidade n, isto é, $cardX = n$.*

Definição 2.2. *Se um conjunto X não é finito, dizemos que X é infinito.*

Exemplo 2.1. O conjunto $X = \{4, 5, \ldots, k + 3\}$ é finito para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Com efeito, a função $f : I_k \to X$, definida por $f(n) = n + 3$, é injetora. Dados $n_1, n_2 \in I_n$, com $n_1 < n_2$, para $f(n_1) = f(n_2)$ tem-se que $f(n_1) = n_1+3$ e $f(n_2) = n_2+3$, assim $n_1 + 3 = n_2 + 3$ e portanto, $n_1 = n_2$. A função f é sobrejetora, pois para todo $n \in X$ existe $n' = n - 3 \in I_n$ tal que $f(n') = n$. Portanto, f é bijetora.

Exemplo 2.2. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito.

De fato, sejam dados $n \in \mathbb{N}$ e uma função $f : I_n \to \mathbb{N}$ quaisquer. Pondo $s = f(1) + \cdots + f(n)$, e observando que $s \in \mathbb{N}$ pois é a soma finita de números naturais, obtermos que $s > f(x)$, para todo $x \in I_n$. Portanto, $s \notin f(I_n)$ e consequentemente nenhuma função $f : I_n \to \mathbb{N}$ é sobrejetiva. Logo $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito.

Teorema 2.1. *Se X é um conjunto finito, então todo subconjunto de X também é finito.*

Demonstração. Vamos provar incialmente o caso particular em que tiramos exatamente um elemento de um conjunto finito X, o novo conjunto continua finito. Isto é, se X é finito e $a \in X$ então $X - \{a\}$ é finito. Como por hipótese X é finito, existe uma bijeção $f : I_n \to X$, e supondo $f(n) = a$. Se $n = 1$ então $X - \{a\} = \varnothing$ é finito. Se $n > 1$, a restrição de f a I_{n-1} é uma bijeção sobre $X - \{a\}$, logo $X - a$ é finito e tem $n - 1$ elementos. Desta forma, fica provado o caso particular.

Para provarmos o caso geral, usaremos indução matemática sobre o número n, que é o número de elementos de X.

Se $X = \varnothing$ o único subconjunto que X admite é o próprio vazio, que por definição é finito.

Se $X = \{1\}$, os subconjuntos que X admite são o vazio e ele próprio, ambos finitos.

Supondo o teorema verdadeiro para conjuntos com n elementos, seja X um conjunto com $n+1$ elementos e Y um subconjunto de X. Se $X = Y$, nada há que provar pois X é por hipótese finito. Caso contrário, existirá $a \in X$ com $a \notin Y$. Então, na realidade, $Y \subset X - \{a\}$ tem n elementos, segue que Y é finito pela hipótese de indução. $\square$

Definição 2.3. *Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ diz-se limitado quando é vazio ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p$, para todo $x \in X$.*

Corolário 2.1. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.*

Demonstração. Se X é vazio, então por definição X é limitado. Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{N}$ finito, pondo $p = x_1 + \cdots + x_n$, como a adição de números naturais é um número natural, temos que para qualquer $x \in X$ é verdade que $x < p$, logo X é limitado. Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{N}$ é limitado então $X \subset I_p$ para algum $p \in \mathbb{N}$, como I_p é um conjunto finito, segue do Teorema 2.1 que X é finito. □

Teorema 2.2. *Se X é um conjunto infinito, então existe uma aplicação injetiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

Demonstração. Queremos mostrar que existe uma função $f : \mathbb{N} \to X$ onde X é infinito, que é injetiva. Por hipótese temos que X é infinito, então por definição temos que X não é vazio, assim para algum subconjunto não vazio $A \subset X$, tomemos $x_1 \in A$ e definamos que $f(1) = x_1$. Defininamos também que $f(2) = x_2$, para algum $x_2 \in A_2$, sendo que $A_2 = X - \{f(1)\}$, e da mesma forma definamos agora que $f(3) = x_3$, para algum e $x_3 \in A_3$, sendo que $A_3 = X - \{f(1),\, f(2)\}$. Seja $n \in \mathbb{N}$ e supondo definidos $f(1), f(2), \ldots, f(n-1)$, escreveremos $A_n = X - \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}$. Como X é infinito, mesmo tirando $n-1$ elementos, A_n não será vazio. E para completar a definição da função f, basta assumir que $f(n) = x_n$ e $x_n \in A_n$, com $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar agora que a função definida dessa forma é injetiva. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, e digamos que $m < n$. Então $f(m) \in \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}$ e $f(n) \in X - \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}$. Logo $f(m) \neq f(n)$, e portanto f é injetiva. □

Definição 2.4. *Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Neste caso, f chama-se uma enumeração dos elementos de X. Escrevendo $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, $\ldots$, $f(n) = x_n$, $\ldots$ tem-se então $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.*

O Teorema 2.2, acima demonstrado, nos permite concluir que todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito que é enumerável, isto significa que os conjuntos enumeráveis representam um tipo de conjunto infinito "menor" do que os conjuntos infinitos não enumeráveis.

Exemplo 2.3. $\mathbb{N}$ é enumerável. De fato, $\mathbb{N}$ é enumerável, basta considerar a bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(n) = n$.

Teorema 2.3. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Se X é finito, por definição, X é enumerável e nada há a ser demonstrado. Se for infinito, como por hipótese $X \subset \mathbb{N}$, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que X possui um menor elemento, seja x_1 tal elemento. Seja x_2 também pelo Princípio da Boa Ordenação o menor elemento de $A_2 = X - \{x_1\}$. Supondo agora definidos $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$, escrevemos $A_n = X - \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$. O conjunto

A_n é não vazio, pois X é infinto e estamos tirando uma quantidade finita $n-1$ do conjunto X. Como $A_n \subset \mathbb{N}$, A_n também possui um menor elemento, definimos x_n como o menor elemento de A_n. Então $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Com efeito, se existisse algum elemento $x \in X$ com $x \neq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então x seria um número natural maior do que todos os elementos do conjunto infinito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{N}$, contrariando o Corolário 2.1. □

Corolário 2.2. *Seja $f : X \to Y$ injetiva. Se Y é enumerável então X também é.*

Demonstração. Consideremos a função bijetora $g : Y \to \mathbb{N}$, pois por hipótese Y é enumerável. Então $g \circ f : X \to (g \circ f)(X) \subset \mathbb{N}$ é uma bijeção. Pelo Teorema 2.3, $(g \circ f)(X)$ é enumerável, ou seja, existe uma bijeção $h : (g \circ f)(X) \to \mathbb{N}$. Daí $h \circ (g \circ f) : X \to \mathbb{N}$ é bijeção e assim X é enumerável. □

Corolário 2.3. *Seja $f : X \to Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável então Y também é.*

Demonstração. Consideremos $y \in Y$. Como a função f é sobrejetiva existe pelo menos um $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Vamos escolher exatamente um $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Isto define uma aplicação $g : Y \to X$, pondo $g(y) = x$ tal que $f(g(y)) = y$, para todo $y \in Y$. Construída desta forma a função g é injetiva. Logo pelo Corolário 2.2, Y é enumerável. □

Exemplo 2.4. O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Para demonstramos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, definamos a função $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ onde $p(m, n) = 5^m \cdot 7^n$. Se provarmos que tal função é injetora e sabendo que $\mathbb{N}$ é enumerável, teremos pelo Corolário 2.2 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.
Prova da injetividade da função p.
Sejam dados $(m, n), (m', n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ quaisquer. Temos que:
$p(m, n) = p(m', n') \Longrightarrow 5^m \cdot 7^n = 5^{m'} \cdot 7^{n'}$.
Se $m \neq m'$ ou $n \neq n'$ e $5^m \cdot 7^n = x = 5^{m'} \cdot 7^{n'}$, isto quer dizer, que o número $x \in \mathbb{N}$ apresenta duas maneiras distintas de ser decomposto em fatores primos, o que é um absurdo, pois contraria o Teorema Fundamental da Aritmética. Portanto

$$p(m, n) = p(m', n') \Longrightarrow m = m'$$

e

$$n = n' \Longrightarrow (m, n) = (m', n')$$

e assim p é injetiva.

Exemplo 2.5. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, $I_m \times I_n$ é enumerável.

De fato, $I_m = \{1, 2, ..., m\}$ tem m elementos e $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ tem n elementos. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, (para maiores informações consultar [2]), o conjunto $I_m \times I_n$ tem $m\dot{n}$ elementos, ou seja, é finito. Sendo finito, por definição, $I_m \times I_n$ é enumerável.

Corolário 2.4. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Sejam X e Y dois conjuntos enumeráveis. Consideremos os seguintes casos:

i) Sejam X e Y ambos infinitos e enumeráveis, então existem funções bijetivas $f : X \to \mathbb{N}$ e $g : Y \to \mathbb{N}$. Defininamos agora a função $h : X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $h(x, y) = (f(x), g(y))$, a injetividade de h é garantida pela injetividade das funções f e g.
Como $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável, pelo exemplo 2.4, segue que $X\times Y$ também é enumerável pelo Corolário 2.2.

ii) Sejam X e Y ambos finitos. Portanto existem funções bijetoras $f : I_n \to X$ e g: $I_m \to Y$. Podemos definir $h : I_n \cdot I_m \to X \cdot Y$ onde $(r, s) = (f(r), g(s))$. Temos que h é sobrejetora. De fato, dado $(x, y) \in X\dot{Y}$ qualquer, temos $x \in X$ e $y \in Y$. Como f e g são sobrejetoras, existem $r_1 \in I_n$ e $s_1 \in I_m$ tais que $f(r_1) = x$ e $g(s_1) = y$. Assim $h(r_1, s_1) = (f(r_1), g(s_1)) = (x, y)$. Portanto $h : T_m\times I_n \to X\times Y$ é sobrejetora com $I_m \times I_n$ enumerável, pelo exemplo 2.5, o que implica que $X \times Y$ é enumerável.

iii) Suponhamos X e Y são enumeráveis com X finito e Y é infinito. Por definição, existem bijeções $f : I_k \to X$, para algum $k \in \mathbb{N}$, e $g : \mathbb{N} \to Y$. Seja

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$$

$$(m, n) \mapsto h(m, n) = \begin{cases} (f(x), g(n)), & \text{se} \quad x \leq k \\ (f(1), g(n)), & \text{se} \quad m > k \end{cases}.$$

Seja $(x, y) \in X \times Y$, qualquer. Se $x = f(1)$, como g é sobrejetora, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n) = y$ e daí existe $(1, n) \in \mathbb{N}$ tal que $h(1, n) = (f(1), g(n)) = (x, y)$. Se $x \neq f(1)$, como f é sobrejetora, existe $m \leq k$ tal que $f(m) = x$. Como g é sobrejetora, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n) = y$. Daí $h(m, n) = (x, y)$. Portanto h é sobrejetora. Segue do Corolário 2.3 e do Exemplo 2.4 que $X \times Y$ é enumerável. Caso análogo se X infinito e Y é finito.

□

Teorema 2.4. *A união de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Sejam A e B dois conjuntos enumeráveis. Podemos considerar duas possibilidades:

(i) se $A \cap B = \varnothing$;

Consideremos duas funções $f : A \to \mathbb{N}$ e $g : B \to \mathbb{N}$ injetoras, tais funções existem pois A e B são, por hipótese enumeráveis. Definimos também duas outras funções $f_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_p$ e $g_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_i$ tais que $f_p(n) = 2n$ e $g_i(n) = 2n + 1$, onde $\mathbb{N}_p$ é o conjunto dos números naturais pares e $\mathbb{N}_i$ é o conjunto dos números naturais ímpares. Provemos que ambas são injetoras.

Se $f_p(n) = f_p(m) \Leftrightarrow 2n = 2m \Leftrightarrow n = m$.
Se $g_i(n) = g_i(m) \Leftrightarrow 2n + 1 = 2m + 1 \Leftrightarrow 2n = 2m \Leftrightarrow n = m$.
Portanto f_p e g_i são injetoras.
Assim existem funções injetoras $h' = f_p \circ f$ e $h'' = g_i \circ g$.

Por fim definimos uma função $h : (A \cup B) \to \mathbb{N}$ onde

$$h(x) = \begin{cases} h'(x), & \text{se} \quad x \in A \\ h''(x), & \text{se} \quad x \in B \end{cases},$$

a qual é injetora. Como $\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_i = \mathbb{N}$ é enumerável, então pelo Corolário 2.2, $A \cup B$ também é enumerável.

(ii) $se A \cap B \neq \varnothing$;

Seja $C = A - B \subset A$ e portanto enumerável. Temos que $A \cup B = C \cup B$ e temos definidos dessa forma os conjuntos C e B que são disjuntos e enumeráveis. Pelo que provamos em (i) então $A \cup B$ também é enumerável.

□

Exemplo 2.6. Temos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, logo $\mathbb{Z} = [\mathbb{N} \cup (\mathbb{Z}^*_-)] \cup \{0\}$ e $\mathbb{Z}^* = \mathbb{N} \cup (\mathbb{Z}^*_-)$, sendo $\mathbb{Z}^*_- = \{-n; n \in \mathbb{N}\}$ são enumeráveis pelo Teorema 2.4. Assim $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável, pelo Corolário 2.4.

Exemplo 2.7. O conjunto $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^*\}$ dos números racionais é enumerável.
Vamos definir a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ pondo $f(m, n) = \frac{m}{n}$. Seja $x \in \mathbb{Q}$ um elemento qualquer, então $x = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$, assim $f(m, n) = \frac{m}{n}$. Portanto a função f é sobrejetora e pelo Corolário 2.3, o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Teorema 2.5. *Dada uma sequência decrescente* $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$ *de intervalos limitados e fechados* $I_n = [a_n, b_n]$, *existe pelo menos um número real* c *tal que* $c \in I_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Da sequência $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$ podemos concluir que $I_n \supset I_{n+1}$, o que significa que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$. O conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ é limitado superiormente por qualquer elemento da sequência $\{b_n\}$. Consideremos $c = supA$. Da definição de supremo temos que $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso temos que b_n é cota superior do conjunto A, dessa forma $c \leq b_n$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Portanto $a_n \leq c \leq b_n$ e $c \in [a_n, b_n] = I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Lema 2.1. *Dados um intervalo fechado não degenerado $I = [a, b]$, isto é, quando $a < b$, e um número real x_0, existe um intervalo fechado não degenerado $J = [c, d]$ tal que $x_0 \notin J$ e $J \subseteq I$.*

Demonstração. Tomemos o intervalo $I = [a, b]$ com $a < b$, pelo fato de I ser um intervalo não degenerado. Se $x_0 \notin I$, basta considerar o intervalo $J = I$, e o Lema fica provado. Se $x_0 \in I$ então $a \leq x_0$. Caso $x_0 = a$, tomemos $c = \frac{a+b}{2}$ e $d = b$. Caso $a < x_0$, tomemos $c = a$ e $d = \frac{a+x_0}{2}$. Em qualquer dos casos, obtemos $J = [c, d]$ tal que $x_0 \notin J$ e $J \subseteq I$. Como queríamos demonstrar. □

Teorema 2.6. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.*

Demonstração. Seja $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subset \mathbb{R}$ um subconjunto enumerável qualquer. O Teorema 2.2 nos garante que existe pelo menos um subconjunto enumerável $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ de $\mathbb{R}$. Seja I_1 um intervalo fechado e não degenerado, tal que $x_1 \notin I_1$. Pelo Lema 2.1, existe um intervalo não degenerado I_2 tal que $x_2 \notin I_2$ e $I_2 \subseteq I_1$. Suponha, por indução matemática sobre n, obtidos os intervalos fechados e não degenerados $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n$ com $x_i \notin I_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Usando novamente o Lema 2.1, podemos obter $I_{n+1} \subseteq I_n$ com $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Isso nos fornece uma sequência decrescente $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ de intervalos fechados e não degenerados com a propriedade de $x_n \notin I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Pelo Teorema 2.5, existe um número real x que pertence a todos os I_n. Como $x_n \notin I_n$ segue que $x \neq x_n$ para todo e qualquer $n \in \mathbb{N}$. Logo $\mathbb{R} \neq X$, pois $\mathbb{R} \subsetneq X$. Portanto o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável. □

No Exemplo 2.7, verificamos que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável e provamos no Teorema 2.6 que o conjunto dos números reais não é enumerável. Isso nos leva a concluir que existem números reais que não são racionais.

Definição 2.5. *Um número real chama-se irracional quando não é racional.*

Corolário 2.5. *Todo intervalo não degenerado é não-enumerável.*

Demonstração. Com efeito, todo intervalo não degenerado contém um intervalo aberto (a, b). Existe uma função $f : (0, 1) \to (a, b)$, definida por $f(x) = (b - a)x + a$. Vamos mostrar que a função f é bijetora.
Mostraremos primeiramente que a função f é injetora.
Sejam $f(x), f(y) \in (a, b)$ e $f(x) \neq f(y)$, isso implica $(b - a)x + a \neq (b - a)y + a$, então $x \neq y$, pela lei do corte e tendo observado que $a < b$.
Para mostrarmos que f é sobrejetora, tomamos $x = \frac{y-a}{b-a}$, para $y \in (a, b)$ qualquer, e assim $f(x) = y$. Logo f é sobrejetora. Portanto f é bijetora.
Vamos mostrar agora que o intervalo $(0, 1)$ é não enumerável.
Ora, a função $\varphi : (0, 1) \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = cotg(\pi x)$ é uma bijeção cuja inversa é $\mho : \mathbb{R} \to (0, 1)$, definida por $\mho(y) = arc\ cotg(\pi y)$, pois $\varphi(\mho(y)) = y$ e $\mho(\varphi(x)) = x$

para quaisquer $y \in \mathbb{R}$ e $x \in (0,1)$.
Dessa forma podemos concluir, pelo Corolário 2.3 e pelo Teorema 2.6 que o intervalo (a,b) é não enumerável. $\square$

2.2 Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ são Densos no Conjunto dos Números Reais

Lema 2.2. *Seja $J_m = [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$ um intervalo real com $m \in \mathbb{Z}$. Então $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} J_m$ é uma cobertura do conjunto dos números reais.*

Demonstração. Para demonstrarmos que $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} J_m$ é uma cobertura do conjunto dos números reais, precisamos mostrar que $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} J_m = \mathbb{R}$. Tomemos um intervalo $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ e n fixo. Pela definição de intervalo temos que $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}] \subset \mathbb{R}$.
Tomemos agora $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Consideremos o número $n \cdot a \in \mathbb{R}$ onde $n \in \mathbb{Z}_+$ é fixo. Como $\mathbb{Z}$ não é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$, considere m_0 o maior número inteiro tal que $m_0 \leq na$. Como m_0 é o maior com essa propriedade, então $n \cdot a \leq m_0 + 1$. Logo $m_0 \leq n \cdot a \leq m_0 + 1$, ou seja, $\frac{m_0}{n} \leq a \leq \frac{m_0+1}{n}$ e assim $a \in J_{m_0}$.

$\square$

Teorema 2.7. *Todo intervalo $J = [a,b]$ com $a < b$, contém números racionais e irracionais.*

Demonstração. O intervalo J contém números irracionais. Para provarmos isso, vamos supor por absurdo que J contém somente números racionais, então $J \subset \mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, o que contraria o Corolário 2.5. Portanto o intervalo J contém números irracionais. Para provarmos que J contém números racionais, tomamos um intervalo $[c,d] \subset J$, com $c < d$ irracionais. O conjunto dos números naturais não é limitado no conjunto dos números reais, por isso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < d - c$. Pelo Lema 2.2 os intervalos $J_m = [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$ cobrem $\mathbb{R}$. Portanto existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $c \in J_m$. Como c é irracional, temos $\frac{m}{n} < c < \frac{m+1}{n}$. Sendo o comprimento, $\frac{1}{n}$, do intervalo J_m menor que $d - c$, segue-se que $\frac{m+1}{n} < d$. Logo o número racional $\frac{m+1}{n}$ pertence ao intervalo $[c,d]$ e, portanto, ao intervalo J.

$\square$

Corolário 2.6. *Seja $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Para todo $\epsilon > 0$ real, existem $b \in \mathbb{Q}$ e $c \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ tais que $b, c \in (a, a+\epsilon)$.*

Demonstração. Temos pelo Teorema 2.7 que todo intervalo fechado e não degenerado $J = [a;b]$ contém números racionais e irracionais. Temos, pelo Teorema 2.7, que todo intervalo fechado e não-degenerado J contém números racionais e irracionais. Tomando $J = [a+\frac{\epsilon}{3}, a+\frac{\epsilon}{2}] \subset (a, a+\epsilon)$, existe pelo Teorema 2.7, um número racional e irracional em J e portanto em $(a, a+\epsilon)$. Portanto, segue a conclusão do Teorema, ou seja, existem

$b \in \mathbb{Q}$ e $c \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ com $b, c \in (a, a+\epsilon)$. Observe ainda que, variando $n \in \mathbb{N}$ em $J = [a + \frac{\epsilon}{n+2}, a + \frac{\epsilon}{n+1}] \subset (a, a+\epsilon)$ podemos concluir que existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais em $(a, a+\epsilon)$. $\square$

O Teorema 2.7 e seu corolário afirmam o que costumamos chamar de densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ também em $\mathbb{R}$, ou seja, dado qualquer número real, existem números racionais e irracionais suficientemente próximos dele.

3 O Conceito de Densidade em Espaços Métricos e Topológicos

Neste capítulo, nosso objetivo é estudar a topologia métrica para podermos definir o conceito de densidade em espaços métricos em geral. Começaremos trabalhando com métricas, conjunto limitado, conjuntos abertos e conjuntos fechados. Na seção 3.7, definiremos espaços topológicos.

A elaboração desse capítulo foi baseada em [3].

3.1 Definições e exemplos de espaços métricos

Definição 3.1. *Uma métrica num conjunto M, com $M \neq \varnothing$, é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Exemplo 3.1. Seja $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma função tal que:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y; \tag{3.1}$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y), \forall x, y, z \in M. \tag{3.2}$$

Provaremos que d é uma métrica.

Para provarmos que tal função é uma métrica, precisamos mostrar que ambas as condições (3.1) e (3.2) da função d do Exemplo 3.1 implicam nas quatro condições que fazem que uma função seja uma métrica, conforme a Definição 3.1.

d1) Da condição (3.1), temos que se $x = y$, então $d(x, x) = 0$;

d2) Sejam $x, y \in M$ com $x \neq y$.Se na desigualdade de (3.2) assumirmos que $z = x$ teremos que: $d(x, x) \leq d(x, y) + d(x, y) = 2.d(x, y)$. De d1) como já provado, temos que $d(x, x) = 0$. Logo, $2.d(x, y) \geq 0$, ou seja, $d(x, y) \geq 0$. Suponhamos que $d(x, y) = 0$. Daí, pela Definição 3.1, teríamos que $x = y$ o que é uma contradição. Portanto, $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$.

d3) Novamente, assumindo (3.2), se $y = x$ temos que $d(x, z) \leq d(x, x) + d(z, x)$, ou $d(x, z) \leq d(z, x)$, para todo $x, z \in M$. Por outro lado, trocando x por z e z por x temos que $d(z, x) \leq d(x, z)$. Assim $d(z, x) = d(x, z)$ para todo $x, z \in M$.

d4) Usando (d3) na segunda parcela da soma em (3.2), temos que: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y) = d(x, y) + d(y, z)$.

Dessa forma, mostramos que podemos sintetizar as propriedade $d1)$ a $d4)$ em apenas duas. Isto é, quando queremos provar que uma dada função é uma métrica, basta verificar as propriedades do Exemplo 3.1. É natural esperar que nem todas as funções sejam exemplos de métricas, vejamos um exemplo.

Exemplo 3.2. Mostremos que $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x - y)^2$, não é uma métrica.

Para mostramos que d não é uma métrica, usaremos o Exemplo 3.1.

a) Se $f(x, y) = 0$ então $(x - y)^2 = 0$. Portanto $x = y$.
Reciprocamente, se $x = y$ então $f(x, x) = (x - x)^2 = 0^2 = 0$. Portanto é satisfeita a Condição 3.1.

b) Temos que:
$f(1, 5) = (1 - 5)^2 = (-4)^2 = 16$
$f(1, 3) = (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$
$f(5, 3) = (5 - 3)^2 = 2^2 = 4$
Aplicando a propriedade $d(x, z) \leq d(x, x) + d(z, x)$, teremos que: $16 \leq 8$. Apesar de f satisfazer a Condição (3.1), ela não é uma métrica, pois não satisfaz (3.2).

Proposição 3.1. *Se $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma métrica, então para quaisquer $x, y, z, w \in M$ tem-se $\mid d(x, y) - d(z, w) \mid \leq d(x, z) + d(y, w)$.*

Demonstração. Seja $x, y, z, w \in M$, temos que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y)$, aplicando d4) duas vezes. Como $d(w, y) = d(y, w)$ e subtraindo $d(z, w)$ de ambos os lados da desigualdade, obtem-se:

$$d(x, y) - d(z, w) \leq d(x, z) + d(y, w) \tag{3.3}$$

Analogamente, teremos que $d(z,w) \leq d(z,x) + d(x,w) \leq d(z,x) + [d(x,y) + d(y,w)]$ e assim $d(z,w) - d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,w)$, que resulta em:

$$-(d(x,y) - d(z,w)) \leq d(x,z) + d(y,w) \tag{3.4}$$

De (3.3) e (3.4) e da propriedade de módulo então $\mid d(x,y) - d(z,w) \mid \leq d(x,z) + d(y,w)$.

$\square$

Definição 3.2. *Um espaço métrico é um par (M,d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M. Os elementos de um espaço métrico, chamaremos de pontos de M.*

Exemplo 3.3. (A métrica "zero-um") Seja M um conjunto qualquer, onde seus elementos podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Definimos a função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, dada por:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = y, \\ 1, & \text{se} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Vamos mostrar que essa função satisfaz as condições d1) a d4) e por isso é um exemplo de métrica.

Tomando dois elementos quaisquer x e y de M, diretamente da maneira que a função d foi definida, teremos que $d(x,y) = 0$ se $x = y$, isto é, $d(x,x) = 0$ e $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$, isto é, $d(x,y) > 0$. Satisfazendo d1) e d2).

Temos ainda para esses dois elementos x e y de M que:

- Se $x = y$ então $d(x,y) = 0 = d(y,x)$;
- Se $x \neq y$ então $d(x,y) = 1 = d(y,x)$.

Mostrando assim o caráter comutativo da função d, satisfazendo d3).

Tomando agora $x, y, z \in M$:

- Se $x = y = z$ então $d(x,z) = 0 = 0 + 0 = d(x,y) + d(y,z)$;
- Se $x = y$ e $x \neq z$ então $d(x,z) = 1 = 0 + 1 = d(x,y) + d(y,z)$;
- Se $x \neq z$ e $x = y$ e $y \neq z$ então $d(x,z) = 1 = 0 + 1 = d(x,y) + d(y,z)$;
- Se $x \neq y \neq z$ então $d(x,z) = 1 \leq 1 + 1 = d(x,y) + d(y,z)$.

Assim, temos que para quaisquer $x, y, z \in M$ (d4) é válida.

Podemos concluir que a função é uma métrica em M e o par (M,d) é um espaço métrico, e como M é um conjunto qualquer, podemos perceber que qualquer conjunto, não vazio, pode ser espaço métrico se tomada a métrica d.

Exemplo 3.4. (Subespaço: Métrica induzida) Se (M, d), é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado um espaço métrico, basta considerar a restrição de d a $S \times S$, ou seja, usar entre os elementos de S a mesma distância que eles possuiam como elementos de M. Vejamos:

Se $x, y, z \in S$ e $S \subset M$ então $x, y, z \in M$. Pelas propriedades da métrica d em M, segue que:

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Logo, (S, d) é um espaço métrico.

Quando isso é feito, S chama-se subespaço de M e a métrica de S se diz induzida pela de M. Esta ideia nos permite obter uma grande variedade de exemplos de espaços métricos, considerando os diversos subconjuntos de um espaço métrico dado.

Exemplo 3.5. Podemos definir no conjunto dos números reais a função dada por:

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$d(x, y) =\mid x - y \mid,$$

sendo $\mid z \mid= z$, se $z \geq 0$ e $\mid z \mid= -z$, se $z < 0$ (função módulo).

Usando as propriedades de módulo em $\mathbb{R}$, vamos verificar que essa função d é uma métrica.

d1) $d(x, x) =\mid x - x \mid= 0 = 0$;

d2) Se $x > y$ então $d(x, y) =\mid x - y \mid= x - y > 0$;
Se $y > x$ então $d(x, y) =\mid x - y \mid= y - x > 0$;

d3) $d(x, y) =\mid x - y \mid=\mid y - x \mid= d(y, x)$;

d4) $d(x, z) =\mid x - z \mid=\mid x - y + (y - z) \mid\leq\mid x - y \mid + \mid y - z \mid= d(x, y) + d(y, z)$.

Dessa forma a função d é uma métrica e o par $(\mathbb{R}, d)$ é um dos exemplos mais importantes de Espaços Métricos.

Definição 3.3. *Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real $\parallel . \parallel: E \to \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ o número real x, chamado de norma de x, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $x, y \in E$ e λ escalar:*

N1) $\parallel x \parallel\geq 0$ *e* $\parallel x \parallel= 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*

N2) $\parallel \lambda . x \parallel=\mid \lambda \mid . \parallel x \parallel$*;*

N3) $\parallel x + y \parallel\leq\parallel x \parallel + \parallel y \parallel$.

Exemplo 3.6. Vamos mostrar que todo espaço vetorial normado $(E, \| \, . \, \|)$, torna-se um espaço métrico se definirmos a função $d : E \times E \to \mathbb{R}$ onde $d(x, y) = \| x - y \|$. De fato:

d1) $d(x, x) = \| x - x \| = \| 0 \| = 0$, por N1) acima;

d2) $d(x, y) = \| x - y \| \geq 0$ pela definição de norma;
$d(x, y) = \| x - y \| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, novamente por N1).

Portanto, se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$.

d3) $d(x, y) = \| x - y \| = \| (-1).(y - x) \| = | -1 | \, . \, \| y - x \| = \| y - x \| = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) = \| x - z \| = \| x - y + y - z) \| = \| (x - y) + (y - z) \| \leq \| x - y \| + \| y - z \| = d(x, y) + d(y, z)$, por N3).

Logo d é uma métrica e segue portanto, que todo espaço vetorial normado é um espaço métrico, onde $\| x \| = d(x, 0)$, isto é, a norma de um vetor x é a distância de x à origem. A métrica assim definida é dita proveniente da norma $\| \, . \, \|$.

Definição 3.4. *Seja E um espaço vetorial real. Um produto interno em E é uma função $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de vetores $x, y \in E$ um número real x, y, chamado produto interno de x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para $x, x', y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários:*

P1) $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$;

P2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

P3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

P4) Se $x \neq y$ *então* $\langle x, y \rangle > 0$.

Exemplo 3.7. Vamos mostrar que todo espaço vetorial com produto interno $(E, \langle \, \rangle)$, é um espaço métrico. Basta definirmos a norma de um vetor $x \in E$ do seguinte modo:

$$\| \, . \, \| : E \times E \to \mathbb{R} \text{ onde } \| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Diretamente da definição, temos que $\| x \| \geq 0$. Além disso,

N1) $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ por P4) da definição;

N2) $\| \lambda x \| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \langle x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = | \lambda | \sqrt{\langle x, x \rangle} = | \lambda | \, . \, \| x \|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$, e por P2) e P3);

N3) $\| x + y \|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2.\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \| x \|^2 + 2\langle x, y \rangle + \| y \|^2$, e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz $| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \, . \, \| y \|$ teremos que:

$$\| x+y \|^2 \leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2$$

Portanto, $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

O produto interno, a norma e a métrica são funções. Dos Exemplos 3.6 e 3.7 podemos concluir que, a partir de todo espaço vetorial com produto interno podemos obter uma norma, e da norma, uma métrica.

3.2 Bolas e esferas

Definição 3.5. *Dado um ponto a de um espaço métrico M e um número real $r > 0$, definimos bola aberta de centro a e raio r como sendo o conjunto $B(a,r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r. Ou seja, $B(a,r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}$.*

Definição 3.6. *Dado um ponto a de um espaço métrico M e um número real $r > 0$, definimos bola fechada de centro a e raio r como sendo o conjunto $B[a,r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor ou igual a r. Ou seja, $B[a,r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}$.*

Definição 3.7. *Dado um ponto a de um espaço métrico M e um número real $r > 0$, definimos esfera de centro a e raio r como sendo o conjunto $S(a,r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é igual a r. Ou seja, $S(a,r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}$.*

Evidentemente, $B[a,r] = B(a,r) \cup S(a,r)$, reunião disjunta.

As bolas abertas, fechadas e as esferas podem assumir formas muito interessantes dependendo da métrica e também do raio que adotamos. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.8. Seja M um conjunto qualquer, munido da métrica "zero-um", vejamos quem é a bola aberta de centro a e raio r, quando:

- $r > 1$, isto é, quando o raio da bola aberta de centro a for maior que 1. Pela definição de bola aberta, $B(a,r)$ é o conjunto de todos os pontos x de M cuja distância ao centro da bola é menor que o raio. Mas com a métrica do "zero-um", as distâncias assumem apenas dois valores, 0 ou 1. Logo para todos os pontos x de M, $d(x,a) < r$, concluímos assim que $B(a,r) = M$, a bola aberta é o próprio espaço métrico M.

- $0 < r \leq 1$, isto é, quando o raio da bola aberta for um número real entre zero e um. Novamente pela definição de bola aberta teremos que, $B(a,r)$ é o conjunto de todos os pontos x de M cuja distância ao centro da bola for menor que o raio, mas como na métrica do "zero-um", as distâncias assumem apenas dois valores, 0 ou 1, e como o único valor menor que r é o zero, já que $0 < r \leq 1$, a bola aberta será o conjunto um conjunto unitário formado pelo único valor x de M cuja distância até a é igual a zero, que é o próprio a, assim $B(a, r) = \{a\}$, isto é um ponto do espaço métrico M.

Fazendo a mesma análise, vejamos agora quem é a bola fechada de centro a e raio r, em M, quando:

- $r \geq 1$, a bola fechada é o próprio espaço métrico M, pois pela definição $B[a, r]$ é formado por todos os pontos cujas distâncias são menores ou iguais ao raio, mas nenhum valor será igual ao raio, pois o raio é maior ou igual 1, e a maior distância entre dois elementos de M é igual a 1.

- $0 < r < 1$, isto é, quando o raio da bola fechada for um número real entre zero e um. Novamente pela definição de bola fechada teremos que, $B[a, r]$ é o conjunto de todos os pontos x de M cuja distância ao centro da bola for menor ou igual ao raio, mas como na métrica do "zero-um", as distâncias assumem apenas dois valores, 0 ou 1, e como o único valor menor que r é o zero, já que $0 < r < 1$, a bola fechada será o conjunto formado pelo único valor x de M cuja a distância de a é igual a zero, que é o próprio a, assim $B[a, r] = \{a\}$, isto é um ponto do espaço métrico M.

E por final, vamos analisar a esfera de centro a e raio r, em M, quando:

- $r \neq 1$, a esfera $S(a, r) = \varnothing$, pois a distância sempre será diferente do raio.

- $r = 1$ a esfera $S(a, 1) = M - \{a\}$, pois o único ponto de M que não está a uma unidade de a, é o próprio a.

Exemplo 3.9. Para a métrica usual da reta, proveniente do módulo, teremos que para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o intervalo aberto $(a - r; a + r)$, pois a condição $|x - a| < r$ equivale a $a - r < x < a + r$. Analogamente, a bola fechada é intervalo fechado $[a - r; a + r]$ e a "esfera" $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$.

Definição 3.8. *Um ponto a de um espaço métrico M diz-se isolado em M quando existe uma bola aberta de centro a e raio r que consiste unicamente do ponto a. Isto é, $B(a; r) = \{a\}$ para um certo $r > 0$. Um espaço métrico M chama-se discreto quando todos os seus pontos são isolados.*

Exemplo 3.10. Os elementos do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ com a métrica induzida pela métrica usual da reta é são isolados. Para verificarmos isso basta tomar $r = 1$, e $x \in Z$ tal que $B(n, 1) = \{x \in \mathbb{Z}; d(x, n) < 1\} = \{n\}$. Portanto, todos os pontos pertencentes a $\mathbb{Z}$ são isolados e $\mathbb{Z}$ é um espaço métrico discreto.

3.3 Conjuntos limitados

Definição 3.9. *Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se limitado quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x,y) \leq c$, para quaisquer $x, y \in X$.*

Dessa forma, dizer que $x, y \in X \Rightarrow d(x,y) \leq c$ significa afirmar que c é um cota superior para o conjunto das distâncias $d(x,y)$ entre os pontos de X. A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais chama-se o supremo desse conjunto.

Definição 3.10. *Dado um conjunto limitado $X \subset M$ definimos o diâmetro como sendo o número real $diam(X) = sup\{d(x,y) : x, y \in X\}$.*

Exemplo 3.11. Toda bola $B(a;r)$ é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede $2r$.

De fato, dados $x, y \in B(a;r)$ temos por d4) que $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < r + r = 2r$. Portanto, toda bola aberta é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede $2r$. O mesmo raciocínio se aplica a bola fechada $B[a;r]$, e a esfera $S(a;r)$, podendo ser o diâmetro menor que $2r$. Se considerarmos a $B(a;r) = \{a\}$, o diâmetro será igual a 0 para todo $r > 0$.

Exemplo 3.12. Um espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$, com a métrica proveniente da sua norma, não é limitado.

De fato, dado $x \in E$, sendo $x \neq 0$, para todo $c > 0$ podemos encontrar um vetor x_c em E (vetor x dependendo de c) onde $x_c = 2cx / \parallel x \parallel$. Assim, $\parallel x_c \parallel = 2c$, e portanto $d(x_c, 0) > c$.

Proposição 3.2. *Um subconjunto X de um espaço métrico M é limitado se, e somente se, está contido em alguma bola de M.*

Demonstração. Se X é limitado, então tomando arbitrariamente $a \in X$, existirá um $c > 0$ tal que $d(a,x) \leq c$, para todo $x \in X$. Logo $X \subset B[a;c] \subset B(a;2c) \subset B[a;2c]$. Caso $X = \varnothing$, X estará contido em qualquer bola. Reciprocamente, se $X \subset B(a;r) \subset B[a;r]$, então para quaisquer $x, y \in X$ teremos que $d(x,y) \leq 2r$, isto é, X é limitado e tem diâmetro menor ou igual a $2r$.

□

Definição 3.11. *Uma aplicação $f : X \to M$, definida num conjunto arbitrário X e tomando valores num espaço métrico M, chama-se limitada quando sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de M.*

Exemplo 3.13. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = senx$, é uma aplicação limitada porque todo intervalo de $\mathbb{R}$, fechado ou não, terá a imagem contida no intervalo $[-1, 1]$. Inclusive se for todos os números reais, pois $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Por outro lado $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $g(x) = -x^2$, não é uma aplicação limitada pois $g(\mathbb{R}) = (-\infty; 0]$.

3.4 Conjuntos abertos

Definição 3.12. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in X$ diz-se interior a X quando é o centro de uma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que se $d(a, x) < r$ então $x \in X$. Chama-se o interior de X em M ao conjunto $intX$ formado pelos pontos interiores a X.*

Definição 3.13. *A fronteira de X em M é o conjunto ∂X, formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro em b contém pelos menos um ponto de X e um ponto do complementar $M - X$.*

Definição 3.14. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. O conjunto X é um aberto de M se $X = intX$.*

Exemplo 3.14. O interior do intervalo $[0, 1)$ é o intervalo aberto $(0, 1)$ pois para todo $a \in (0, 1)$ e pondo $r = min\{a, 1 - a\}$ temos que $(a - r, a + r) \subset [0, 1) \subset \mathbb{R}$, com a métrica usual de $\mathbb{R}$, logo $a \in int[0, 1)$. A fronteira do intervalo $X = [0, 1)$ é $\partial X = \{0, 1\}$ pois qualquer intervalo centrado em 0 ou centrado em 1, conterá pontos do interior do intervalo e pontos do complementar do intervalo em relação aos reais, já que a noção de interior e fronteira são relativas, isto é, dependem do espaço métrico M. O mesmo intervalo $[0, 1)$ terá interior vazio se considerarmos o espaço métrico como sendo o $\mathbb{R}^2$, pois a bola aberta de raio $r > 0$, centrada em $x \in [0, 1)$, conterá pontos do intervalo e pontos do interior do complementar do intervalo, sendo assim, a sua fronteira é o intervalo fechado $[0, 1]$.

Exemplo 3.15. Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. O interior de $\mathbb{Q}$ em relação a $\mathbb{R}$ é vazio, pois nenhum intervalo aberto de centro $a \in \mathbb{R}$ e raio $r > 0$ conterá apenas números racionais, já que entre dois números reais quaisquer sempre existem números racionais e irracionais. Por outro lado a fronteira de $\mathbb{Q}$ é toda a reta $\mathbb{R}$, porque qualquer intervalo aberto contém números racionais e irracionais.

Proposição 3.3. *Em qualquer espaço métrico M, uma bola aberta $B(a, r)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. Seja $x \in B(a; r)$. Então $d(a, x) < r$ e pondo $s = r - d(a, x)$ é um número positivo. Afirmamos que $B(x; s) \subset B(a; r)$. De fato, se $y \in B(x; s)$ então $d(x, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = r$. Logo $y \in B(a; r)$. □

Corolário 3.1. *Para todo $X \subset M$, $intX$ é aberto em M.*

Demonstração. Se $a \in intX$ então existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset X$. Para todo $x \in B(a; r)$, pela Proposição 3.3, existe $s > 0$ tal que $B(x; s) \subset B(a; r)$. Assim $B(x; s) \subset X$. Dessa forma todo ponto $x \in B(a; r)$ é interior a X, ou seja, $B(a; r) \subset intX$. Logo $intX$ é aberto. □

Exemplo 3.16. Se um espaço métrico M é discreto, por definição seus pontos são isolados, e cada ponto do espaço é uma bola aberta. Podemos concluir disso e da Proposição 3.3 que um espaço métrico é discreto se, e somente se, todos os seus subconjuntos são abertos.

Exemplo 3.17. Um espaço métrico M é um aberto em M, pois $intM = M$.
Vejamos, os conjunto $X_1 = [-1; -1+\varepsilon)$ e $X_2 = (1-\varepsilon, 1]$ são abertos em $M = [-1, 1]$, sempre que $0 < \varepsilon \leq 2$, assim como qualquer outro intervalo de M. Logo, todos os pontos de M são interiores, portanto $M = [-1, 1]$ é aberto em M. Porém a propriedade "X é aberto" é relativa, pois isso depende do espaço M em que se considera o X imerso. O mesmo intervalo $[-1, 1]$ não é aberto em $\mathbb{R}$. Pois $int[-1, 1] = (-1, 1) \neq [-1, 1]$.

Exemplo 3.18. O conjunto $\varnothing$ sempre é aberto em qualquer espaço métrico que o contenha. Pois para provarmos que o vazio não é aberto, deveriamos exibir um ponto $x \in \varnothing$ que não seja interior, o que seria impossível. Logo, $\varnothing$ é aberto.

Exemplo 3.19. Em todo espaço métrico M, o complementar de uma bola fechada $B[a; r]$ é um conjunto aberto $A = M - B[a; r]$.
Com efeito, seja $c \in A$, isto é, $d(a, c) > r$. Tomemos um número $s > 0$ tal que $r + s < d(c, a)$. Sabendo que $B[a; r] \cap B[c; s] = \varnothing$, ou seja, $B[c; s] \subset M - B(a; r)$. Logo todo ponto $c \in A$ é ponto interior.

Exemplo 3.20. Uma bola fechada pode ser um conjunto aberto ou não, conforme o caso. Se $M = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, com a métrica induzida da reta então a bola fechada de centro 0 e raio 1 em M coincide com a bola aberta de mesmo centro e mesmo raio, logo é um conjunto aberto em M. Mas se E é um espaço vetorial normado com $E \neq \{0\}$, então, uma bola fechada $B[a; r]$ nunca é um subconjunto aberto de E.

Proposição 3.4. *Seja $\mathfrak{A}$ a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico M. Então:*

(1) $M \in \mathfrak{A}$ e $\varnothing \in \mathfrak{A}$ (O espaço inteiro e o conjunto vazio são abertos);

(2) Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ então $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathfrak{A}$ (A intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto);

(3) Se $A_\lambda \in \mathfrak{A}$, para todo $\lambda \in L$, então $A = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathfrak{A}$ (A reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto).

Demonstração.

(1) Já foi concluído nos Exemplos 3.17 e 3.18;

(2) Suponhamos que $a \in A_1, \ldots, a \in A_n$, logo $a \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Como $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ são abertos, existem $r_1 > 0, \ldots, r_n > 0$ tais que $B(a, r_1) \subset A_1, \ldots, B(a, r_n) \subset A_n$. Seja $r = min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Então, $B(a, r_1) \subset B(a, r), \ldots, B(a, r_n) \subset B(a, r)$, ou seja, $B(a, r) \subset A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Logo $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto;

(3) Para finalizar, seja $a \in A$. Existe um índice $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Como este conjunto é aberto, há uma bola $B(a, r)$ contida em A_λ. Logo $B(a, r) \subset A$.

□

Corolário 3.2. *Um subconjunto $A \subset M$ é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.*

Demonstração. Se A é aberto, então todos os seus pontos são interiores, isto é, para cada $x \in A$ podemos obter uma bola aberta centrada em x, ou não, que representaremos por B_x, que se escreve também como $\{x\} \subset B_x \subset A$. Tomando a reunião de todas as bolas B_x, teremos $A = \underset{x \in A}{\cup} B_x$. O que mostra que todo aberto é uma reunião de bolas abertas. Reciprocamente, se $A = \cup B_x$ é uma reunião de bolas abertas, então A é aberto em M, em virtude da Proposição 3.3 e do item (3) da Proposição 3.4. □

Exemplo 3.21. Vimos no item (2) da Proposição 3.4 que a intersecção de um número finito de abertos é um conjunto aberto e veremos nesse exemplo que a intersecção de uma família infinita de abertos pode não ser um conjunto aberto.

Seja $x \in B(a; \frac{1}{n_0})$, com $x \neq a$, então $d(x, a) = r > 0$, logo pela propriedade arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{r}$ implica que $d(x, a) > \frac{1}{n}$. Assim sendo, $x \notin B(a, \frac{1}{n})$. Isto mostra que apenas o ponto a pertence a todas as bolas abertas $B(a, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Mas, um ponto só é bola aberta, e consequentemente um aberto, se o ponto for um ponto isolados.

3.5 Relação entre conjuntos abertos e continuidade

Definição 3.15. *Sejam M e N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Diz-se que $f : M \to N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.*

Exemplo 3.22. Sejam $(M, d_M), (N, d_N)$ e $(M \times N, d_{M \times N})$, espaços métricos. As projeções $p_1 : M \times N \to M$ e $p_2 : M \times N \to N$, definidas por $p_1(x, y) = x$ e $p_2(x, y) = y$, são aplicações contínuas.

De fato, seja $(x_0, y_0) \in M \times N$ qualquer. Dado $\varepsilon > 0$. Consideremos $\delta = \varepsilon$ e $d_{M \times N}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = max\{d_M(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$. Se $d_{M \times N}((x, y), (x_0, y_0) < \delta$ então $d_M(p_1(x, y), p_1(x_0, y_0)) = d_M(x, x_0) < \delta = \varepsilon$. Procedendo de maneira análoga para $p_2 : M \times N \to N$, fica provado que as aplicações são contínuas. Esse exemplo pode ser generalizado, e assim, para cada $i = 1, \ldots, n$, a projeção $p_i : M \to M_i$ onde $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ são aplicações contínuas.

Exemplo 3.23. Sejam $f, g : M \to N$ contínuas. A função $\varphi : M \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = d(f(x), g(x))$ é contínua.

Seja $a \in M$ qualquer. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como f e g são contínuas em a, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $x \in B(a, \delta_1)$ então $f(x) \in B(f(a), \frac{\varepsilon}{2})$ e se $x \in B(a, \delta_2)$ então $g(x) \in B(g(a), \frac{\varepsilon}{2})$. Para mostrarmos que $\varphi(x) = d(f(x), g(x))$ é contínua, tomemos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $x \in B(a, \delta)$ então $|\varphi(x) - \varphi(a)| = |d(f(x), g(x)) - d(f(a), g(a))| \leq d(f(x), f(a)) + d(g(x), g(a)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, pela Proposição 3.1. Portanto $\varphi(x)$ é contínua.

Do estudo dos espaços métricos, chegamos ao conceito de bola aberta, e consequentemente, conjunto aberto. A proposição que segue é de grande importância na "Topologia dos Espaços Métricos", pois relaciona o conceito de continuidade, como conhecemos na análise, com conjuntos abertos.

Proposição 3.5. *Sejam M e N espaços métricos. A fim de que uma aplicação $f : M \to N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ seja um subconjunto aberto de M.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que f seja contínua e vamos provar que $f^{-1}(A') \subset M$ é aberto para todo $A' \subset N$. Seja $a \in f^{-1}(A') = \{x \in M; f(x) \in A'\}$, logo $f(a) \in A'$. Temos por hipótese que $A' \subset N$ é aberto, e pela definição de conjunto aberto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B(f(a); \varepsilon_1) \subset A'$. Sendo f contínua no ponto a, tomando $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ existe um $\delta > 0$ tal que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon) \subset A'$. Isto quer dizer que $B(a, \delta) \subset f^{-1}(A')$. Logo $f^{-1}(A')$ é aberto. É interessante enfatizar que a proposição é válida para todo aberto em N, e como não sabemos se f é sobrejetora, existe a possibilidade de tomarmos um aberto $A' \subset N$ que não tem interseção com a imagem, nesse caso $f^{-1}(A') = \varnothing$, que também é um aberto de M. Reciprocamente, suponhamos que a imagem inversa por f de cada aberto em N seja um aberto em M. Seja $a \in M$. Mostraremos que f é contínua no ponto a. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, a bola $A' = B(f(a); \varepsilon)$ é um aberto em N, contendo $f(a)$. Logo sua imagem inversa $A = f^{-1}(A')$ é um aberto em M, contendo a. Assim existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \subset A$, ou seja, $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$. $\square$

Corolário 3.3. *O produto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$ de conjuntos abertos $A_i \subset M_i$ é um subconjunto aberto de $M = M_1 \times \cdots \times M_n$.*

Demonstração. Temos pelo Exemplo 3.22, que a projeção $p_i : M \to M_i$ é contínua para $i = 1, \ldots, n$, e como por hipótese A_i é um aberto em M_i, logo $p_i^{-1}(A_i)$ é um aberto em M. Para cada $i = 1, \ldots, n$. Tendo em vista que $A_1 \times \cdots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(A_n)$ e interseção finita de abertos é um aberto, segue o resultado.

$\square$

Corolário 3.4. *Sejam $f_1, \ldots, f_n : M \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas. O conjunto A, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0$, para todo $x \in B(a; r)$ é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração. Sejam:

$$A_1 = \{x \in M; f_1(x) > 0\} = \{x \in M; f_1(x) \in (0, +\infty)\} = f_1^{-1}(0, +\infty)$$

$$\vdots$$

$$A_i = \{x \in M; f_i(x) > 0\} = \{x \in M; f_i(x) \in (0, +\infty)\} = f_i^{-1}(0, +\infty)$$

$$\vdots$$

$$A_n = \{x \in M; f_n(x) > 0\} = \{x \in M; f_n(x) \in (0, +\infty)\} = f_n^{-1}(0, +\infty).$$

Pela Proposição 3.4, temos que A_i é aberto, $\forall i = 1, \ldots, n$. Assim, $A = \{x \in M; f_1(x) > 0, \ldots, f_i(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}((0, +\infty))$, também é aberto pela parte 2, da Proposição 3.4, já que A é a interseção de um número finito de abertos.

□

Corolário 3.5. *Sejam $f, g : M \to N$ contínuas. O conjunto $A = \{x \in M; f(x) \neq g(x)\}$ é aberto em M.*

Demonstração. Sabemos do Exemplo 3.23 que a função $\varphi : M \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = d(f(x), g(x))$, é contínua. Assim podemos escrever

$$A = \{x \in M; f(x) \neq g(x)\} = \{x \in M; \varphi(x) > 0\}.$$

Logo pelo Corolário 3.4, A é um aberto em M. □

Definição 3.16. *Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se aberta quando para cada $A \subset M$ aberto, sua imagem $f(A)$ é um subconjunto aberto de N.*

Exemplo 3.24. Toda aplicação $f : M \to N$ será aberta, quando N for um espaço métrico discreto. Sabemos que o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ com a métrica induzida pela métrica usual da reta é discreto. Então o subconjunto $N = \{0, 1\} \subset \mathbb{Z}$ também é um espaço métrico discreto com a métrica induzida da reta. Assim:

$$f : M \to \{0, 1\}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se x é par} \\ 1, & \text{se x é ímpar} \end{cases}$$

é uma aplicação aberta.

Exemplo 3.25. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x^2$. Tomando qualquer aberto $A = (-a, a) \subset \mathbb{R}$, teremos que $f(A) = [0; a^2)$ não é um aberto de $\mathbb{R}$. Esse exemplo mostra que o conjunto imagem de um aberto, não necessariamente será um aberto.

Definição 3.17. *Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \to N$ cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua. Neste caso, diz-se que M e N são homeomorfos.*

Exemplo 3.26. Se o espaço métrico N é discreto e $f : M \to N$ é um homeomorfismo, então M também é discreto.

De fato, seja $a \in M$, existe uma bola $B(f(a); \varepsilon) = \{f(a)\}$, pois N é discreto. Temos por hipótese que a aplicação $f : M \to N$ é um homeomorfismo, então existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta) \subset B(f(a); \varepsilon) = \{f(a)\}$, pois por definição f é contínua. Como f é injetiva a bola $B(a; \delta)$ tem um único elemento, o ponto a. Logo a é um ponto isolado. Portanto, M é discreto.

Exemplo 3.27. Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ e $P = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ é facilmente verificado que a aplicação $f : \mathbb{N} \to P$ é um homeomorfismo, ambos com a métrica induzida da reta. Nesse exemplo podemos perceber que ambos são discretos, infinitos e enumeráveis. Mas P é limitado e $\mathbb{N}$ não é.

Proposição 3.6. *Um subconjunto $A \subset M \times N$ é aberto se, e somente se, é reunião de "retângulos" $U \times V$, onde $U \subset M$ e $V \subset N$ são abertos.*

Demonstração. Se $A \subset M \times N$ é aberto, tomemos em $M \times N$ a métrica $\varphi[(x, y), (x', y')] = max\{d(x, x'), d(y, y')\}$, de forma que cada bola aberta seja o produto de uma bola aberta de M por uma bola aberta de N. Então, para cada $k \in A$ existem bolas abertas $U_k \subset M$ e $V_k \subset N$ tais que $k \in U_k \times V_k \subset A$, assim $\{k\} \subset U_k \cup V_k \subset A$. Tomando reuniões, vem:

$$\bigcup_{k \in A} \{k\} \subset \bigcup_{k \in A} (U_k \times V_k) \subset A,$$

Portanto $A = \bigcup_{k \in A} (U_k \times V_k)$, como queríamos mostrar. Reciprocamente, se escrevermos $A = \bigcup_{\lambda \in L} (\cup_\lambda \times V_\lambda)$ com, $U_\lambda \subset M$ e $V_\lambda \subset N$ abertos para todo $\lambda \in L$, então teremos que A é um aberto, pois é a união de abertos, conforme o Corolário 3.3. □

É interessante observar que a palavra "retângulos", do enunciado da Proposição 3.6, faz referência a forma assumida pelos conjuntos do plano obtidos do produto cartesiano de intervalos da reta, considerando a métrica usual, mas que tais conjuntos nada se parecem com retângulos dependendo da métrica adotada.

Corolário 3.6. *As projeções $p_1 : M \times N \to M$ e $p_2 : M \times N \to N$ são aplicações abertas.*

Demonstração. Se $A \subset M \times N$ é um aberto, então A é uma reunião de abertos pela Proposição 3.6, logo podemos escrever que $A = \bigcup_{k \in L} (U_k \times V_k)$ com $U_k \subset M$ e $V_k \subset N$ abertos. Da igualdade $p_1(A) = \bigcup_{k \in L} p_1(U_k \times V_k) = \bigcup_{k \in L} U_k$ segue que $P_1(A)$ é aberto. Analogamente se mostra que $p_2 : M \times N \to N$ é aberta. □

3.6 Subconjuntos fechados e subconjuntos densos de um espaço métrico M

Definição 3.18. *Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ diz-se ponto aderente a um subconjunto $X \subset M$, quando para todo $\epsilon > 0$ dado, tem-se $B(a, \epsilon) \cap X \neq \varnothing$.*

Exemplo 3.28. Seja $M = \mathbb{R}$ um espaço métrico e $X = [-1; 1[$ um subconjunto de M. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X pois $a \in B(a; \epsilon) \cap X$. Um ponto de M mesmo não pertencendo a X pode ser aderente a $X, 1 \notin X$ porém, dado $\epsilon > 0$ temos que $B(1; \epsilon) \cap X = (1 - \epsilon; 1)$ quando $\epsilon \leq 2$ e $B(1; \epsilon) \cap X = [-1; 1[$ quando $\epsilon > 2$, portanto 1 é aderente a X. Para que $a \in M$ não seja aderente a X basta que exista uma bola aberta de centro em a, cuja interseção com X seja vazia. Dessa forma $3 \in M$ não é aderente a X pois $B(3; \epsilon) \cap X = \varnothing$ para $0 < \epsilon \leq 2$.

Definição 3.19. *O fecho de um conjunto X num espaço métrico M é o conjunto $\overline{X}$ de todos os pontos de M que são aderentes a X.*

Exemplo 3.29. Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Escrever que $a \in \overline{X}$ é o mesmo que afirmar que o ponto a é aderente a X em M. Assim, dado $\epsilon > 0$ $B(a; \epsilon) \cap \varnothing = \varnothing$ para qualquer $a \in M$, portanto, nenhum ponto é aderente ao vazio e dessa forma $\overline{\varnothing} = \varnothing$. Temos ainda que $B(a; \epsilon) \cap M = B(a; \epsilon) \neq \varnothing$ para todo $a \in M$, assim $\overline{M} = M$.

Definição 3.20. *Um subconjunto $X \subset M$ diz-se denso em M quando $\overline{X} = M$.*

Exemplo 3.30. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Se $x \in \mathbb{Q}$ então $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Se $x \notin \mathbb{Q}$ então, para todo $\epsilon > 0$ existe um racional r, tal que $r \in B(x; \epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Assim $Q \cap B(x; \epsilon) \neq \varnothing$ e $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Portanto $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Da mesma forma o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$, pois qualquer bola aberta $B(x; \epsilon)$ contém números racionais e também números irracionais, como vimos no Teorema 2.7.

Exemplo 3.31. Seja $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.
De fato, consideremos em $\mathbb{R}^2$ a métrica do máximo:

$$\mathrm{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\ \{|\ x_1 - x_2\ |, |\ y_1 - y_2\ |\}.$$

Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ qualquer que seja $\epsilon > 0$ dado. Sabemos que, pela métrica que escolhemos,

$$B((x_0, y_0); \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x - 0 + \epsilon) \times (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$$

Como $\mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$, existem $r, s \in \mathbb{Q}$ com $r \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ e $s \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$. Assim,

$$(r, s) \in \mathbb{Q}^2 \cap B((x_0, y_0); \epsilon).$$

Portanto, para todo $\epsilon > 0, B((x_0, y_0); \epsilon) \cap \mathbb{Q}^2 \neq \varnothing$.

Como $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ era arbitrário, segue que $\mathbb{Q}^2$ é denso em $\mathbb{R}^2$.

Proposição 3.7. *Sejam M um espaço métrico e X e Y subconjuntos de M, temos que:*

a) Se $X \subset Y$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$;

b) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Demonstração.

a) Se $a \in \overline{X}$ então para qualquer $\epsilon > 0$ tem-se que $B(a, \epsilon) \cap X \neq \varnothing$, logo existe $y \in X$ tal que $y \in B(a, \epsilon)$, e assim $y \in Y$ pela hipótese. Disso segue que $B(a, \epsilon) \cap Y \neq \varnothing$. Portanto a é aderente a Y.

b) Seja $y \in \overline{\overline{X}}$. Seja $\epsilon > 0$ dado. Devemos mostrar que $B(y; \epsilon) \cap X \neq \varnothing$. Como $y \in \overline{\overline{X}}$ então $B(y; \epsilon) \cap \overline{X} \neq \varnothing$. Logo existe $b \in B(y; \epsilon) \cap \overline{X} \neq \varnothing$, ou seja, $b \in \overline{X}$ e $b \in B(y; \epsilon)$. Como $B(y; \epsilon)$ é um aberto, existe $B(b; \epsilon_0)$ tal que $b \in B(b; \epsilon_0) \subset B(y; \epsilon)$. Mas $b \in \overline{X}$ dessa forma $B(b; \epsilon_0) \cap X \neq \varnothing$, assim existe $c \in B(b; \epsilon_0) \subset B(y; \epsilon)$ e $c \in X$, então $c \in B(y; \epsilon) \cap X$, portanto $B(y; \epsilon) \cap X \neq \varnothing$.

□

Definição 3.21. *Diz-se que um subconjunto $F \subset M$ é fechado no espaço métrico M quando o seu complementar $M - F$ é aberto em M.*

Exemplo 3.32. Num espaço métrico M, toda bola fechada $B[a; r]$ é um subconjunto fechado de M.

De fato, para provarmos que a bola fechada $B[a; r]$ é um subconjunto fechado de M, precisamos provar que $A = M - B[a; r]$ é aberto. Seja $x \in A$, isto é, $d(a, x) > r$. Tomemos um número $s > 0$ tal que $r + s < d(a, x)$. Assim $B[a; r] \cap B[x; s] = \varnothing$, isto é, as bolas fechadas $B[a; r]$ e $B[x; s]$ são disjuntas. Portanto $B(x; s) \subset M - B[a; r]$, logo $M - B[a; r]$ é aberto.

Proposição 3.8. *Um subconjunto F num espaço métrico M é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes.*

Demonstração. Se F é fechado então, $M - F$ é aberto. Seja $a \in M - F$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a; r) \cap F = \varnothing$ então $a \notin \overline{F}$. Ou seja, todo ponto aderente a F pertence a F. Reciprocamente, seja $b \in M - F$, então por hipótese, b não é ponto aderente a F. Assim, existe $B(b; \epsilon_0)$ tal que $B(b; \epsilon_0) \cap F = \varnothing$, ou seja, $B(b; \epsilon_0) \subset M - F$. Logo $M - F$ é aberto. □

Corolário 3.7. *Para todo $X \subset M$, seu fecho $\overline{X}$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Como $\overline{X} = \overline{\overline{X}}$, pela Proposição 3.7, logo $\overline{X}$ contém todos os seus pontos aderentes, segue da Proposição 3.8, que $\overline{X}$ é fechado. □

Exemplo 3.33. Todo subconjunto finito $F = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset M$ é fechado em M.

De fato, vamos verificar primeiramente o caso particular do conjunto unitário. Para isso vamos mostrar que o complementar $M - \{a\}$ de um ponto $a \in M$, é um conjunto aberto. Seja $b \in M$, com $b \neq a$. Então $B(b; r)$, com $r = d(a, b)$, só contém pontos em $M - \{a\}$. Portanto $\{a\}$ é fechado. De forma geral, se $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é um subconjunto finito de M, o seu complemento é aberto em M, pois se $b \in M - F$, e considerarmos $r = min\{d(b, a_1), \ldots, d(b, a_n)\}$ então $B(b; r)$ não contém nenhum dos pontos $a_1, \ldots, a_n$, isto é, $B(b; r) \subset M - F$.

Exemplo 3.34. Seja E um espaço vetorial normado e $a \in E$, o fecho de uma bola aberta $B(a; r)$ é a bola fechada $B[a; r]$, isto é $\overline{B(a; r)} = B[a; r]$.

Vamos verificar primeiramente que $B[a; r] \subset \overline{B(a; r)}$. Se $b \in B[a; r]$ então $\| b - a \| \leq r$. Se $\| b - a \| < r$ então $b \in B(a; r)$, logo $b \in \overline{B(a; r)}$. Se $\| b - a \| = r$ então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(b; \epsilon) \cap B(a; r) \neq \varnothing$, dessa forma $b \in \overline{B(a; r)}$. Vamos supor que $\overline{B(a; r)} \not\subset B[a; r]$. Se $d(c, a) > r$ então, pondo $s = d(c, a) - r$, sabemos que $d(x, c) > s$ para todo $x \in B(a; r)$, dessa forma c não é aderente a $B(a; r)$. Logo $\overline{B(a; r)} \subset B[a; r]$. Como $B[a; r] \subset \overline{B(a; r)}$ e $\overline{B(a; r)} \subset B[a; r]$, portanto $\overline{B(a; r)} = B[a; r]$.

Proposição 3.9. *Os subconjuntos fechados de um espaço métrico M gozam das seguintes propriedades:*

1. *O conjunto $\varnothing$ e o espaço inteiro M são fechados;*

2. *A reunião $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ de um número finito de subconjuntos fechados $F_1, \ldots, F_n \subset M$ é um subconjunto fechado de M;*

3. *A interseção $F = \bigcap_{k \in L} F_k$ de família qualquer $(F_k)_{k \in L}$ de subconjuntos fechados $F_k \subset M$ é um subconjunto fechado de M.*

Demonstração.

1. Sabemos que $\varnothing$ e M são abertos, então seus complementares são fechados. E por isso $\varnothing$ e M são fechados.

2. Sejam $A_1 = \complement F_1, \ldots, A_n = \complement F_n$ abertos de M. Desse modo $A_1 \cap \cdots \cap A_n = \complement F_1 \cap \cdots \cap \complement F_n = \complement(F_1 \cup \cdots \cup F_n) = \complement F$ é aberto, portanto $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ é fechado em M.

3. Pondo $A_k = \complement F_k$ para todo $k \in L$. Então cada A_k é aberto e portanto sua reunião $\bigcup_{k \in L} A_k = \bigcup_{k \in L} \complement F_k = \complement(\bigcap_{k \in L} F_k)$ é aberto em M. Segue $\bigcap_{k \in L} F_k$ é fechado.

□

3.7 Espaços topológicos

Nas seções anteriores, definimos conjuntos abertos usando métricas. Podemos chamar a coleção de todos os abertos definidos desta forma de "Topologia Métrica". Nesta seção, vamos definir e ver alguns resultados mais gerais de topologia.

Definição 3.22. *Uma topologia num conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, chamados abertos da topologia, com as seguintes propriedades:*

1. $\varnothing$ e X pertencem a $\mathcal{T}$;

2. Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ então $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{T}$;

3. Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{(\lambda \in L)}$ com $A_\lambda \in \mathcal{T}$ para cada $\lambda \in L$, tem-se $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{T}$.

Um Espaço Topológico é um par $(X, \mathcal{T})$ onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia em X. Diremos que $A \subset X$ é um conjunto aberto do espaço topológico X se, e somente se, $A \in \mathcal{T}$.

Exemplo 3.35. Seja X um conjunto qualquer. Seja também $P(X)$ o conjunto das partes de X. Se considerarmos $\mathcal{T} = P(X)$ então:

1. Se $\varnothing \in P(X)$ e $X \in P(X)$ então $\varnothing \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;

2. Se $A_1 \in P(X), \ldots, A_n \in P(X)$ então $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in P(X)$. Logo $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{T}$;

3. Se $(A_\lambda)_{(\lambda \in L)}$ com $A_\lambda \in P(X)$ então $A_\lambda \in \mathcal{T}$; para todo $\lambda \in L$. Logo temos que $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda \in P(X) = \mathcal{T}$.

Portanto, $\mathcal{T}$ é uma topologia sobre X e é conhecida como Topologia Discreta.

Exemplo 3.36. Seja X um conjunto qualquer. A coleção $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ é uma topologia sobre X, pois:

1. $\varnothing \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;

2. $\varnothing \cap X = \varnothing \in \mathcal{T}$;

3. $\varnothing \cup X = \varnothing \in \mathcal{T}$.

Essa topologia é conhecida como Topologia Caótica.

Exemplo 3.37. Seja $X = \{a, b\}$ e $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$. Temos que:

1. $\varnothing \in \mathcal{T}$ e $\{a, b\} \in \mathcal{T}$;

2. $\varnothing \cap \{a\} = \varnothing \in \mathcal{T}$;
   $\varnothing \cap \{a, b\} = \varnothing \in \mathcal{T}$;
   $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in \mathcal{T}$;
   $\varnothing \cap \{a\} \cap \{a, b\} = \varnothing \in \mathcal{T}$;

3. $\varnothing \cup \{a\} = \{a\} \in \mathcal{T}$;
   $\varnothing \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \mathcal{T}$;
   $\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \mathcal{T}$;

Portanto $\mathcal{T}$ é uma topologia sobre X.

Exemplo 3.38. Seja $X = \{a, b, c, d\}$ e $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$. Temos que $\mathcal{T}$ não satisfaz a terceira condição da Definição 3.22, pois: $\{a\} \cup \{c, d\} = \{a, c, d\} \notin \mathcal{T}$, e $\{b\} \cup \{c, d\} = \{b, c, d\} \notin \mathcal{T}$.

Portanto $\mathcal{T}$ não é uma topologia sobre X.

Como consequência da Proposição 3.4, podemos obter espaços topológicos a partir de qualquer espaço métrico M, no qual a coleção $\mathcal{T}$ é formada pelos subconjuntos abertos de M, satisfazendo as propriedades de um espaço topológico conforme a Definição 3.22.

Definição 3.23. *Uma topologia $\mathcal{T}$ em X se diz metrizável quando existe uma métrica em X em relação à qual os abertos são os elementos de $\mathcal{T}$.*

Definição 3.24. *Um espaço topológico X chama-se um espaço de Hausdorff quando, para cada par de pontos x, y em X, existem abertos U, V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$.*

Das Definições 3.23 e 3.24 e da Desigualdade Triângular da definição de Métrica, podemos concluir que todo espaço topológico metrizável é um espaço de Hausdorff. Mas nem todos os espaços topológicos são metrizáveis, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 3.39. Seja $X = \{a, b\}$ e $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a, b\}\}$. O espaço topológico caótico $(X, \mathcal{T})$ não é de Hausdorff, pois não existem abertos disjuntos U e V tais que $a \in U$ e $b \in V$.

Definição 3.25. *Entre espaços topológicos X e Y, uma aplicação $f : X \to Y$ se diz contínua quando, para cada $A' \subset Y$ aberto, sua imagem inversa $f^{-1}(A')$ é aberto em X.*

Definição 3.26. *Seja X um Espaço Topológico e A um subconjunto de X. Um ponto $x \in X$ é aderente a A se para todo aberto $\mathfrak{A}$, contendo x, temos $\mathfrak{A} \cup A \neq \varnothing$. O conjunto de todos os pontos aderentes a A é denotado por $\overline{A}$ e chamamos de fecho de A.*

Definição 3.27. *Um subconjunto A de um espaço topológico X é chamado de subconjunto denso de X se $\overline{A} = X$.*

Exemplo 3.40. Se $X \subset M$ e $Y \subset N$ são subconjuntos densos, então $X \times Y$ é denso em $M \times N$.

Tomemos um aberto $A \subset M \times N$ não vazio. Sabemos que A contém $U \times V$, onde $U \subset M$ e $V \subset N$ também não vazios. Por hipótese temos que X é denso em M e Y é denso em N, logo existem $x \in U \cap X$ e $y \in V \cap Y$. Assim $x \in U$ e $x \in X$ e $y \in V$ e $y \in Y$. Disso podemos escrever que $(x, y) \in U \times V$ e $(x, y) \in X \times Y$, isto é $(x, y) \in (U \times V) \cap (X \times Y)$. O que mostra $A \cap (X \times Y) \neq \varnothing$. Portanto $X \times Y$ é denso em $M \times N$.

Com esse exemplo finalizamos esse capítulo tendo alcançado o conceito de Densidade em um contexto geral.

4 O Estudo de Subconjuntos Densos no Ensino Básico

4.1 O conceito de densidade no ensino básico

Quando pensamos na Educação Básica, surgem várias dúvidas relacionadas ao conceito de densidade: como e quando começar a falar de alguma forma sobre esse conceito e qual seria a importância disso? O natural seria pensarmos que, para falarmos sobre densidade, os alunos deveriam ter uma familiaridade com os números reais e conhecer o conjunto $\mathbb{R}$, afinal, queremos falar da densidade de subconjuntos em $\mathbb{R}$. Pensando dessa forma, o "momento certo" seria apenas no Ensino Médio.

Mas, fazendo uma pesquisa sobre o assunto, percebemos que alguns livros didáticos do Ensino Básico já abordam esse conceito. Veja no final desse capítulo as figuras retiradas do livro do 8º ano da Coleção Teláris [4], cujo autor é Luiz Roberto Dante, um exemplo de como o conceito de subconjuntos densos em $\mathbb{R}$ é abordado.

Podemos perceber que o autor busca fazer com que o leitor compreenda que nem sempre entre dois números naturais dados, existe outro número natural, e o mesmo acontece com os números inteiros. Porém, de forma intuitiva, e usando a localização dos números racionais na reta numerada, exibe números racionais entre dois racionais diferentes. E em seguida enuncia que:

"Entre dois números racionais diferentes, sempre existe outro número racional."

Podemos perceber, pelo fato dos alunos de 8º ano, ainda não conhecerem o conjunto dos números reais, que não foi possível falar sobre densidade como definido no Capítulo 2, já que o conjunto $\mathbb{Q}$ é o "maior" conjunto estudado por eles, até o momento, e da forma que o conceito de densidade foi dado, faz parecer que um conjunto é denso nele mesmo, o que diminui a beleza desse conceito (Veja Figura 4.1 e Figura 4.2). Não estamos dizendo que o livro, do 8º ano citado, está errado ou que professores não devam trabalhar o conteúdo dessa página. Pelo contrário, quanto mais cedo os alunos conseguirem entender esse conceito, mesmo de forma intuitiva, mais completa será a compreensão do conjunto dos números reais.

Gostaríamos ainda de destacar a importância de o aluno entender bem cada conjunto que ele estuda, seja ele $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, já que um aprendizado deficiente dificulta a compreensão de outros temas relacionados, e o estudo da propriedade da densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ colaboraria de forma positiva e significativa nesse processo. Um exemplo do que estamos falando, acontece no estudo das inequações, que se dá, após a introdução do conjunto dos números racionais. Vejamos a Figura 4.3, retirada do livro do 7º ano também da Coleção Teláris [5].

Os alunos apresentam grande dificuldade para entender quais são os elementos do conjunto solução no universo $\mathbb{Q}$. Eles geralmente citam, quando questionados nas aulas, apenas os números inteiros, 4, 3, 2, 1, 0, $-1, ...$ etc. O que denuncia uma deficiência no aprendizado dos números racionais. E nós professores geralmente perguntamos: mas, e os números racionais que estão entre esses inteiros, não pertencem a solução da inequação? E pra essa pergunta sempre obtemos um enorme silêncio. Silêncio esse justificado, pois a maioria dos livros, não diz claramente que entre dois números racionais diferentes existem outros números racionais, apenas induz a pensar isso quando representa vários números racionais na reta numerada. Porém, Dante em seu livro, já citado, além de enunciar, apresenta um algoritmo para obtermos números racionais entre dois números racionais diferentes. Veja a Figura 4.4.

Na imagem da Figura 4.2, parece ser o professor dizendo, que esta propriedade é chamada de densidade dos números racionais, referindo-se a Figura 4.4. Porém como ela foi enunciada, apenas nos diz que existem infinitos números racionais entre dois quaisquer números racionais dados. Além disso, afirma que o conjunto $\mathbb{Q}$ é um subconjunto infinito de números da reta.

Observamos que no 7º ano geralmente não se fala diretamente sobre números reais, apenas estuda-se os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, explorando muitas vezes de forma superficial as propriedades da adição, subtração, multiplicação e divisão. Além disso, analisa-se quando um número pertence ou não a um certo conjunto e as relações de inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. No entanto, ao estudar a raiz quadrada de números inteiros e também dos números racionais, vemos que a extração da raiz quadrada nem sempre é possível em Q. Veja a Figura 4.5.

Observando a Figura 4.5, uma pergunta que eu faria, se eu fosse aluno, é a seguinte: será que $\sqrt{15}$ é um número? Esse questionamento que fica no ar não é ruim para o aluno, se devidamente trabalhado, faz o aluno perceber que existem mais conjuntos numéricos, que ele ainda não conhece. Que existe um mundo a ser explorado! Talvez esse seja o momento de plantar algumas "sementinhas de curiosidade", se existem números além dos racionais, onde eles estariam na reta numerada, são poucos ou muitos e como encontrá-los? Porém ainda não seria possível abordar o conceito de densidade nesse momento.

Já no 9º ano, depois da retomada do estudo dos conjuntos dos números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, e a propriedade "da densidade dos números racionais", conforme abordado por Dante, e a definição de número irracional, como sendo aquele cuja representação decimal é infinita e não periódica, e a definição do conjunto dos números reais como sendo a união dos números racionais com os números irracionais, e aceitando que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais e a reta (como esse não é o foco da nossa dissertação, sugerimos o livro do PROFMAT, Números e Funções Reais [6]), e o estudo das operações envolvendo irracionais, seria possível avançar nesse assunto? Seria possível "mostrar", de alguma forma, que entre dois números reais quaisquer existe um número racional e também um número irracional?

Primeiramente, na secão 4.2 , daremos uma ideia de como mostrar, intuitivamente, que $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Na seção 4.3, falaremos da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. N seção 4.4, sugerimos uma atividade a ser desenvolvida como os alunos a fim de fazê-los entender o conceito de densidade de maneira ilustrativa.

4.2 A densidade de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$

Para isso, devemos "mostrar" que entre dois números reais distintos dados existe um número irracional. Podemos fazê-lo em etapas:

1. Entre dois números irracionais existe outro número irracional.
   Exemplo:
   Entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ podemos encontrar um número irracional usando a mesma ideia dada por Dante, para números racionais. Basta encontrar a média aritmética desses dois números irracionais:
   $$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}.$$
   Usando calculadora (podemos aproximar os valores), podemos escrever:
   $$1,8251407... \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}.$$
   Isto pode ser feito para dois números irracionais quaisquer, mas caso a média aritmética dos dois números irracionais dê um número racional, tome um dos dois números irracionais e a média aritmética obtida e repita o processo (veja a etapa 3).

2. Entre dois números racionais existe um número irracional.
   Exemplo:
   Entre 3 e 5 podemos encontrar um número irracional usando a média geométrica.
   $$\sqrt{3\cdot 5}=\sqrt{15} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}.$$
   Usando novamente a calculador aqui e nas próximas etapas, temos que:

$$3,8729833... \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Este processo pode ser feito para dois números racionais quaisquer. Caso o número obtido não seja irracional, repita o processo, usando a média geométrica e um dos racionais dados.Vejamos:
Entre 2 e 8 a média geométrica é um número racional.

$$\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q},$$

Repetindo o processo (média geométrica) com o número racional 4 , e respectivamente com os números 2 e o número 8 temos:

$$\sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{8} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

e

$$\sqrt{4 \cdot 8} = \sqrt{32},$$

usando a calculadora novamente, obtemos as respectivas aproximações:

$$2,8284271... \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

e

$$5,6568542... \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},$$

em ambos os casos, os números encontrados estão entre 2 e 8.

3. Entre um número racional e um número irracional, existe outro número irracional.
   Exemplo:
   Entre 2 e $\sqrt{15}$ podemos encontrar um número irracional usando novamente a média aritmética. Pois, a adição de um número racional com um número irracional é irracional.

$$\frac{2 + \sqrt{15}}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

e

$$\frac{2 + 3,8729833...}{2} = 2,9364916... \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

4. Entre um número irracional e um número racional, existe um número racional.
   Exemplo:
   Entre $\sqrt{3}$ e 7 podemos encontrar um número irracional repetindo o processo do

item anterior.

$$\frac{\sqrt{3}+7}{2} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

e

$$\frac{1,7320508...+7}{2} = 8,7320508... \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}.$$

4.3 A densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$

Agora, daremos uma forma de como "mostrar" que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Para isso, devemos "mostrar"que entre dois números reais distintos dados existe um número racional. E também faremos em etapas:

1. Entre dois números racionais existe outro número número racional.

   Essa propriedade já é explorada por Dante como vimos na Figura 4.4.

2. Entre dois números irracionais dados existe um número racional.
   Exemplo:
   Entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ podemos encontrar um número racional da seguinte forma. Basta encontrar a média aritmética desses dois números irracionais, porém, como esses dois números não são opostos, o número obtido ao fazer isso, é um número irracional.

   $$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

   e

   $$\frac{1,41422135...+2,2360679...}{2} = 1,8251407... \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}.$$

   Ao pegarmos uma quantidade finita de casas decimais do número $1,8251407...$, tal como $1,825 \in \mathbb{Q}$, obtemos um número racional entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$.

3. Entre um número racional e um número irracional dados, existe um número racional.
   Exemplo:
   Entre 2 e $\sqrt{15}$ podemos encontrar um número racional usando novamente a média aritmética. Porém, como a adição de um número racional com um número irracional é irracional,

   $$\frac{2+\sqrt{15}}{2} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q},$$

e

$$\frac{2 + 3,8729833...}{2} = 2,9364916... \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Devemos pegar uma quantidade finita de casas decimais do número $2,9364916...$, tal como $2,936$ obtemos um número racional entre 2 e $\sqrt{15}$.

4. Entre um número irracional e um número racional, existe um número racional. Exemplo: Entre $\sqrt{3}$ e 7 podemos encontrar um número racional usando novamente a média aritmética dos mesmos. Porém, como a adição de um número racional com um número irracional é irracional.

$$\frac{\sqrt{3} + 7}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},$$

e

$$\frac{1,7320508... + 7}{2} = 4,3660254... \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Novamente devemos pegar uma quantidade finita de casas decimais do número $4,3660254...$, tal como $4,366 \in \mathbb{Q}$, obtemos um número racional entre $\sqrt{3}$ e 7.

Buscando uma abordagem mais ampla do conceito de densidade, do que o encontrado nos livros do Ensino Básico, enunciaremos assim:

Entre dois números reais diferentes, sempre existe um número racional e um número irracional.

Essa propriedade é chamada de densidade do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais no conjunto dos números reais. Portanto dizemos que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são ambos densos em $\mathbb{R}$.

4.4 Assimilando o conceito de densidade sem falar em números

Uma ideia para fazer os alunos assimilarem o conceito de densidade, sem falar em números é: o professor pode pegar um pote de vidro grande e enchê-lo com pedras grandes. Em seguida, "preencher"os espaços entre as pedras grandes com pedras menores (pedregulho). Em ambos os casos, o vaso "parece estar cheio". No entanto, podemos jogar areia de modo a "preencher"os espaços restantes.

Podemos dizer que o "conjunto dos grãos de areia é denso no conjunto de pedras grandes, união com pedras pequenas, união com os grãos de areia". E aí, o vidro está cheio? Essa atividade pode melhorar a compreensão de densidade.

4.5 Considerações Finais

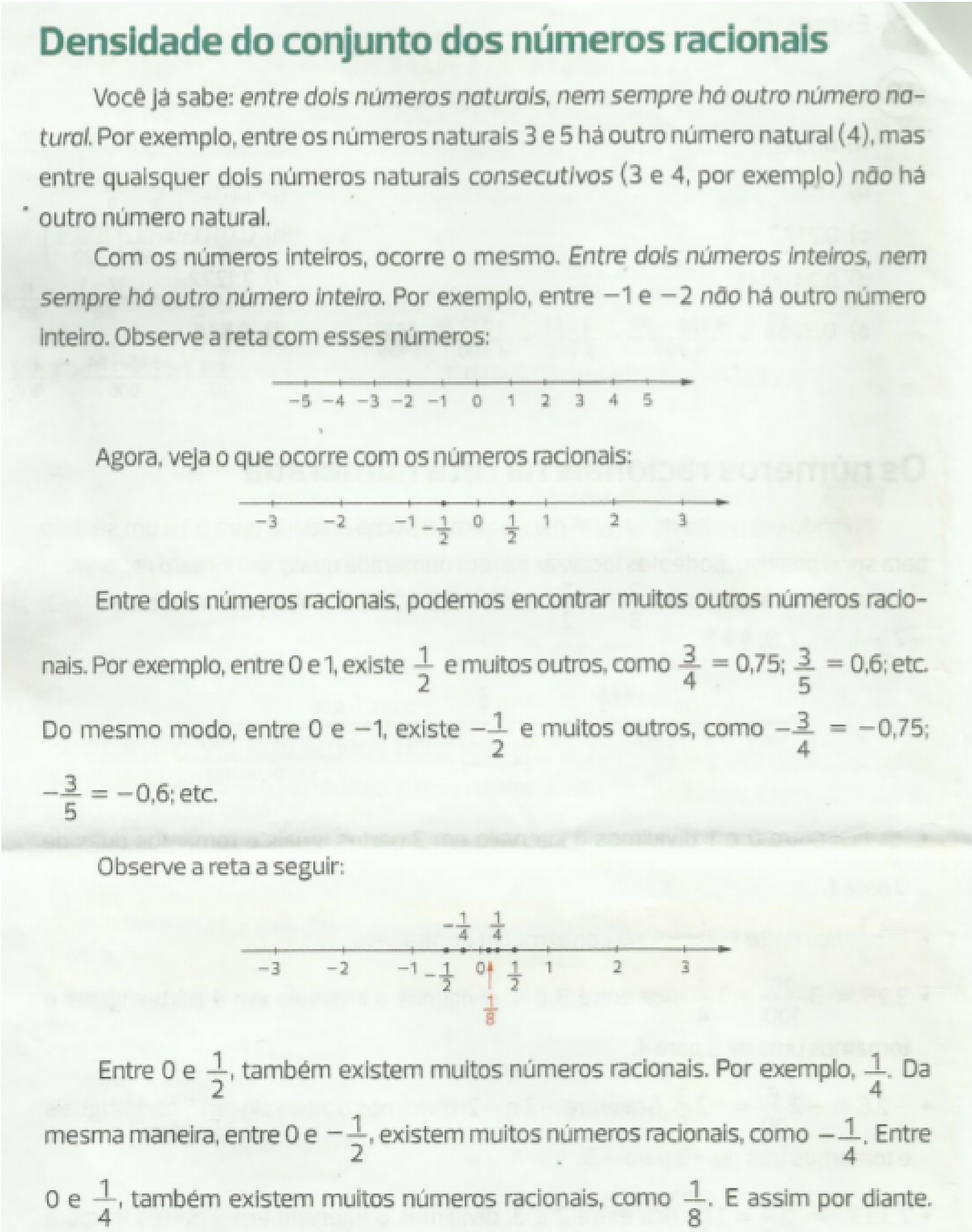
Para finalizar, em resposta às perguntas feitas sobre quando e como falar do conceito de densidade, dizemos agora que no 8º ano não é possível falar em densidade, como é feito na Coleção Teláris, já citada, porém somente no 9º ano após o estudo do conjunto dos números irracionais e suas propriedades, que o conceito de densidade seria absorvido com maior clareza e sua importância se dá por contribuir com um melhor entendimento do conjunto dos números reais e na aplicação disso na resolução de problemas.

Sobre as Figuras 4.1 e 4.2, quando mostramos que entre dois números racionais sempre existe outro número racional, estamos mostrando que o conjunto dos números racionais é infinito, que entre dois números racionais existem infinitos números racionais. Como trabalhar a ideia de infinito é tão importante quanto o conceito de densidade, sugerimos que no 8º ano seja enfatizado tal característica: "Entre dois números racionais, existem infinitos números racionais."

Na Figura 4.3, o autor afirma que não é possível enumerar todos os números menores ou iguais a 4. Vimos nesse trabalho que o conjunto $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, assim qualquer subconjunto de $\mathbb{Q}$ também é enumerável. Destacamos a importância do professor do Ensino Básico usar corretamente os conceitos de matemática, mesmo que alguns não sejam de total compreensão por parte dos alunos. O autor poderia simplesmente escrever:

$$S = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq 4\},$$

e sugerir alguns exemplos de números que estão em S tais como: $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{3}$, etc. Poderia inclusive, mostrar que tais números satisfazem a equação que foi estudada.



Densidade do conjunto dos números racionais

Você já sabe: *entre dois números naturais, nem sempre há outro número natural.* Por exemplo, entre os números naturais 3 e 5 há outro número natural (4), mas entre quaisquer dois números naturais *consecutivos* (3 e 4, por exemplo) *não* há outro número natural.

Com os números inteiros, ocorre o mesmo. *Entre dois números inteiros, nem sempre há outro número inteiro.* Por exemplo, entre -1 e -2 *não* há outro número inteiro. Observe a reta com esses números:

Agora, veja o que ocorre com os números racionais:

Entre dois números racionais, podemos encontrar muitos outros números racionais. Por exemplo, entre 0 e 1, existe $\frac{1}{2}$ e muitos outros, como $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{3}{5} = 0{,}6$; etc. Do mesmo modo, entre 0 e -1, existe $-\frac{1}{2}$ e muitos outros, como $-\frac{3}{4} = -0{,}75$; $-\frac{3}{5} = -0{,}6$; etc.

Observe a reta a seguir:

Entre 0 e $\frac{1}{2}$, também existem muitos números racionais. Por exemplo, $\frac{1}{4}$. Da mesma maneira, entre 0 e $-\frac{1}{2}$, existem muitos números racionais, como $-\frac{1}{4}$. Entre 0 e $\frac{1}{4}$, também existem muitos números racionais, como $\frac{1}{8}$. E assim por diante.

Figura 4.1: Representando um número racional entre dois números racionais na reta numérica.

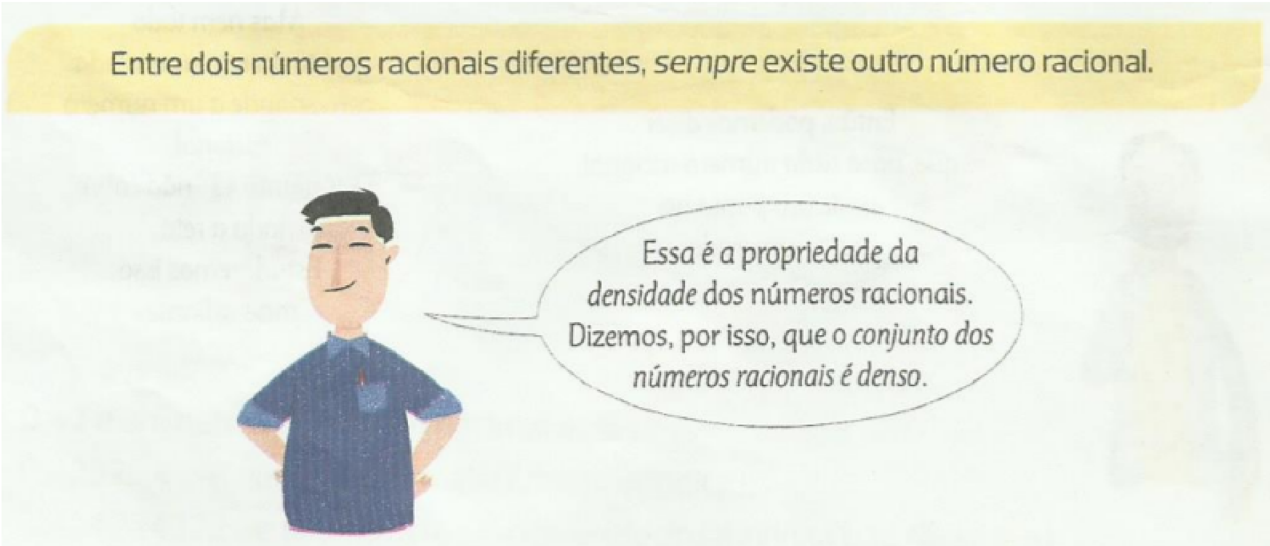


Figura 4.2: Enunciando o conceito de densidade.

Vamos resolver, por exemplo, a inequação $x \leqslant 4$ no conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$. Nesse caso, o *conjunto solução* **S** é:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

No conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, essa mesma inequação $x \leqslant 4$ teria como conjunto solução:

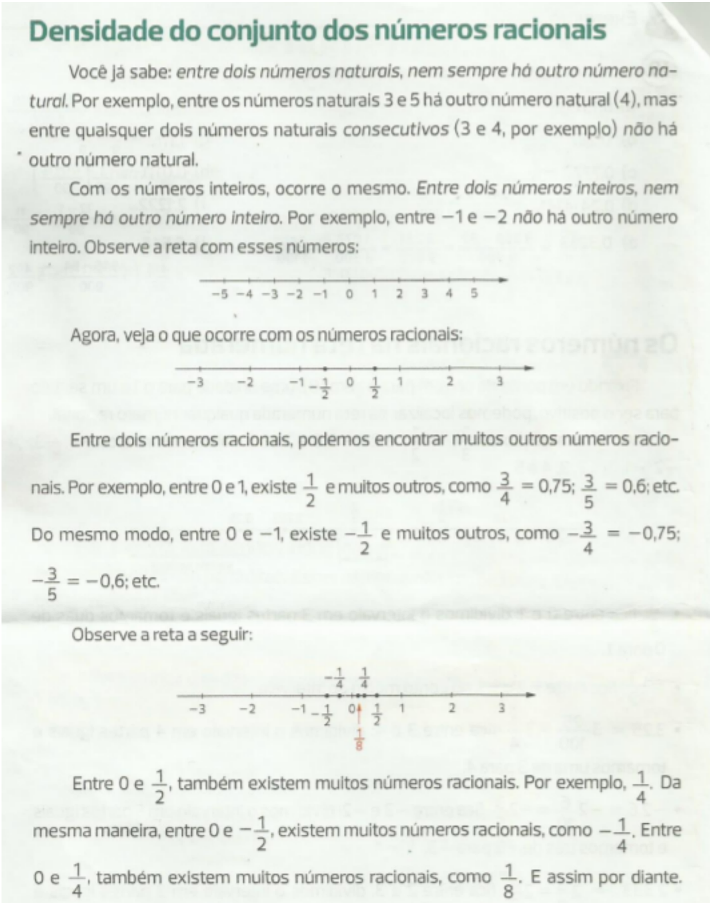
$$S = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Já no conjunto dos números racionais, o conjunto solução seria escrito assim:

$$S = \{\mathbf{x} \text{ racional, tal que } x \leqslant 4\},$$

pois não é possível enumerar *todos* os números racionais menores ou iguais a 4.

Figura 4.3: Conjunto solução de uma inequação em conjuntos universos diferentes.



Densidade do conjunto dos números racionais

Você já sabe: *entre dois números naturais, nem sempre há outro número natural.* Por exemplo, entre os números naturais 3 e 5 há outro número natural (4), mas entre quaisquer dois números naturais *consecutivos* (3 e 4, por exemplo) *não* há outro número natural.

Com os números inteiros, ocorre o mesmo. *Entre dois números inteiros, nem sempre há outro número inteiro.* Por exemplo, entre -1 e -2 *não* há outro número inteiro. Observe a reta com esses números:

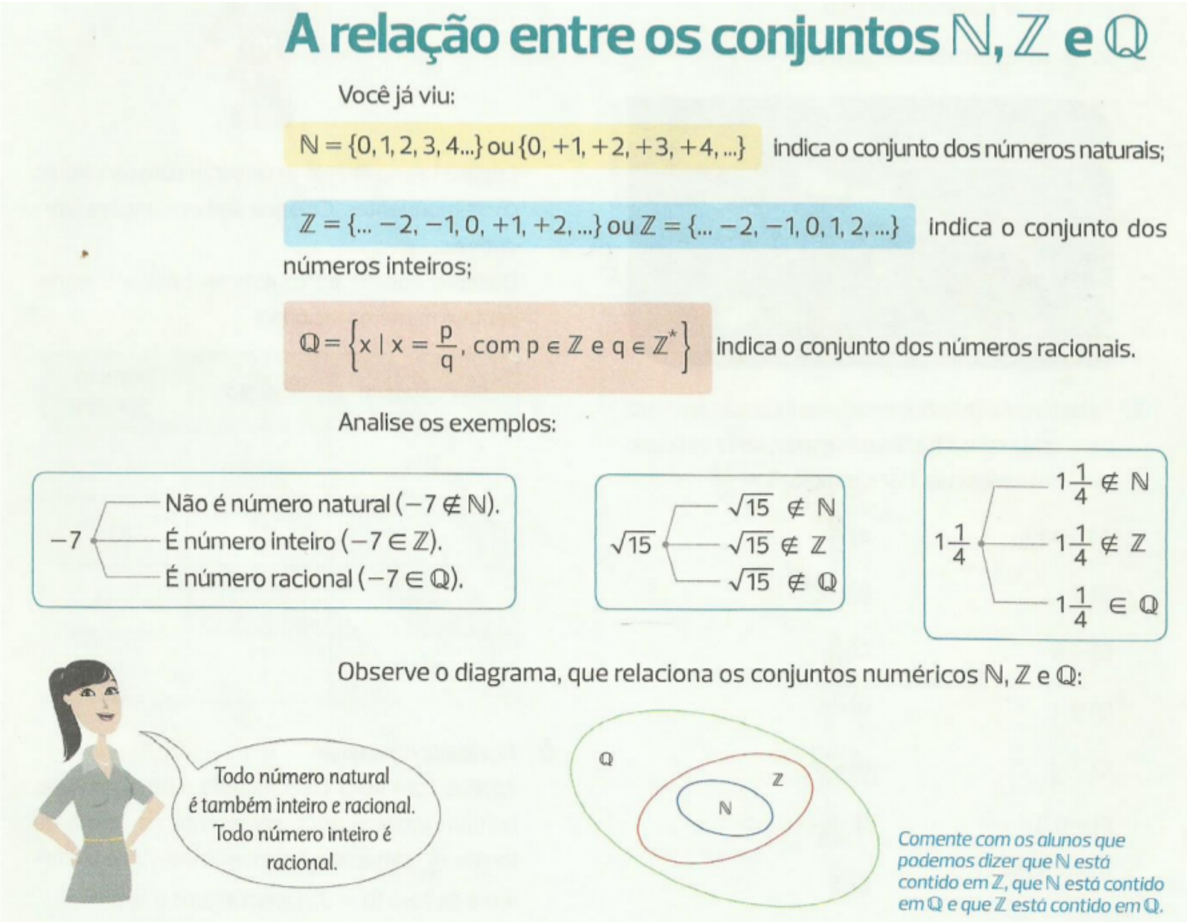
Agora, veja o que ocorre com os números racionais:

Entre dois números racionais, podemos encontrar muitos outros números racionais. Por exemplo, entre 0 e 1, existe $\frac{1}{2}$ e muitos outros, como $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{3}{5} = 0{,}6$; etc. Do mesmo modo, entre 0 e -1, existe $-\frac{1}{2}$ e muitos outros, como $-\frac{3}{4} = -0{,}75$; $-\frac{3}{5} = -0{,}6$; etc.

Observe a reta a seguir:

Entre 0 e $\frac{1}{2}$, também existem muitos números racionais. Por exemplo, $\frac{1}{4}$. Da mesma maneira, entre 0 e $-\frac{1}{2}$, existem muitos números racionais, como $-\frac{1}{4}$. Entre 0 e $\frac{1}{4}$, também existem muitos números racionais, como $\frac{1}{8}$. E assim por diante.

Figura 4.4: Encontrando um número racional entre dois números racionais.



A relação entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

Você já viu:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$ ou $\{0, +1, +2, +3, +4, ...\}$ indica o conjunto dos números naturais;

$\mathbb{Z} = \{... -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$ ou $\mathbb{Z} = \{... -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ indica o conjunto dos números inteiros;

$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q}, \text{ com } p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$ indica o conjunto dos números racionais.

Analise os exemplos:

-7 — Não é número natural ($-7 \notin \mathbb{N}$). É número inteiro ($-7 \in \mathbb{Z}$). É número racional ($-7 \in \mathbb{Q}$).

$\sqrt{15}$ — $\sqrt{15} \notin \mathbb{N}$, $\sqrt{15} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$

$1\frac{1}{4}$ — $1\frac{1}{4} \notin \mathbb{N}$, $1\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$, $1\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$

Observe o diagrama, que relaciona os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$:

Comente com os alunos que podemos dizer que $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$, que $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Q}$ e que $\mathbb{Z}$ está contido em $\mathbb{Q}$.

Figura 4.5: Descobrindo a existência de números não racionais.

Referências

[1] LIMA, E. L. *Análise real*. 10. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro, RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009. (Matemática Universitária).

[2] LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. [S.l.]: Rio de Janeiro:SBM, 2006.

[3] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 3. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Projeto Euclides).

[4] DANTE, L. R. *Projeto Telaris Matemática 8º Ano - Ensino Fundamental II*. [S.l.: s.n.]. (Coleção: Projeto Teláris).

[5] DANTE, L. R. *Projeto Telaris Matemática 7º Ano - Ensino Fundamental II*. [S.l.: s.n.]. (Coleção: Projeto Teláris).

[6] LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.: s.n.]. (Coleção PROFMAT).