Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Algoritmos utilizados para as Quatro Operações Elementares

Gracielly da Silva Santana

Goiânia

2016

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Gracielly da Silva Santana

Título do trabalho: Algoritmos utilizados para as Quatro Operações Elementares

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Gracielly da Silva Santana

Assinatura do (a) autor (a) [2]

Data: 20 / 10 / 2016

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Gracielly da Silva Santana

Algoritmos utilizados para as Quatro Operações Elementares

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza

Goiânia

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santana, Gracielly da Silva
Algoritmos utilizados para as Quatro Operações Elementares [manuscrito] / Gracielly da Silva Santana. - 2016.
iv, 54 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2016.
Bibliografia.

1. Números Naturais. . 2. Sistema de Numeração Decimal.. 3. Algoritmo.. I. Souza, Mário José de, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás-UFG
Instituto de Matemática e Estatística-IME
Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso da aluna Gracielly da Silva Santana – Aos vinte e seis dias do mês de setembro do ano de dois mil e dezesseis (26/09/2016), às 09:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Mário José de Souza – Orientador; Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias e José Eder Salvador de Vasconcelos, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"Algoritmos Utilizados para as Quatro Operações Elementares"**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Gracielly da Silva Santana discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da banca, Prof. Dr. Mário José de Souza, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida a autora do TCC que, em 30 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do IME da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 10:00 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Sonia Maria de Oliveira, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Mário José de Souza
Presidente – IME/UFG

Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos
Membro – IFG/GOIÂNIA

Gracielly da Silva Santana

"Algoritmos Utilizados para as Quatro Operações Elementares"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 26 de setembro de 2016, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Mário José de Souza

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof[a]. Dr[a]. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos
Membro Externo – IFG/GOIÂNIA

Gracielly da Silva Santana graduou-se em Processamento de Dados pela Sociedade Objetivo de Ensino Superior (1997), especializou-se em Administração Gerencial pela Faculdade Anhanguera de Ciências Humanas (1999), graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, Campus em Goiânia (2001), especializou-se em Métodos e Técnicas de Ensino pela Universidade Salgado de Oliveira (2007), atualmente é professora da Rede Municipal de Educação de Goiânia.

Aos meus pais, pela minha formação, aos meus filhos, Ana e Luiz, que mesmo ainda não tendo conhecimento da importância desse mestrado, na minha vida, me deram forças para buscar mais esta conquista. Em especial ao meu esposo Raisson, pela sua bondosa compreensão e imensa ajuda.

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, por ter proporcionado as condições necessárias para que eu pudesse avançar mais esse degrau.

Ao meu esposo, Raisson Alves da Silva, por ter acreditado, desde o momento da inscrição no exame de acesso à conclusão deste trabalho, que esse sonho seria possível.

Aos meus familiares, em especial ao Tio Jairo Bastos, por acreditarem que eu seria capaz de alcançar mais esse objetivo e por terem feito, cada um dentro de suas possibilidades, algo para me ajudar a concretizar esse sonho.

Aos meus pais por terem feito eu acreditar que o conhecimento é a maior riqueza, em especial ao meu Pai, Antônio Bento, que proporcionando aos filhos condições para angariar conhecimento, concluiu muito bem sua missão junto de nós.

Ao meu Professor Orientador Prof. Dr. Mário José de Souza, pela paciência, compreensão e sugestões.

A CAPES pela bolsa de estudos concedida.

A todos vocês meu muito obrigada.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos algumas propriedades das quatro operações elementares no Conjunto dos Números Naturais. Verificaremos alguns aspectos pertinentes ao Sistema de Numeração Decimal, bem como a expansão de um número nesse sistema. Aproveitaremos para mostrar um pouco da utilização do Material Dourado que é um recurso pedagógico muito útil, quando se trata de compreender o Sistema de Numeração Decimal e até mesmo para efetuarmos uma das operações elementares. A partir daí mostraremos alguns algoritmos que podem ser utilizados para resolvermos cada uma das quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Palavras-chave

Números Naturais. Sistema de Numeração Decimal. Algoritmo.

Abstract

This work is meant to study some properties of the four elementary operations on the set of natural numbers. Some relevant aspects to Decimal Numbering System will be verified as well as the expansion of a number on that system. It will also demonstrate the usage of the "Golden Beads", a very useful pedagogical resource when it comes to understanding the Decimal Numbering System and even its usage to solve one of the elementary operations. Therefore, some of the algorithms that can be used to solve each of the four operations: addition, subtraction, multiplication and division.

Keywords

Natural Numbers. Decimal Numbering System. Algorithm.

Sumário

Introdução **1**

1 Os Números Naturais **3**

1.1 Adição e Multiplicação 3

1.2 Subtração 7

1.3 Axioma de Indução 8

1.4 Divisão nos Naturais 10

1.4.1 Divisibilidade 11

1.4.2 Divisão Euclidiana 13

1.5 Sistema de Numeração Decimal 14

2 Material Dourado **19**

3 Algoritmos para as quatro operações elementares **21**

3.1 Algoritmo da adição 21

3.1.1 Algoritmo da adição usando expansão na base 10 24

3.1.2 Método das somas parciais 26

3.1.3 Método da gelosia 27

3.1.4 Algoritmo convecional da adição 28

3.2 Algoritmo da subtração 30

3.2.1 Algoritmo convecional da subtração 32

3.2.2 Algoritmo de igualdade de adições ou algoritmo de compensação 33

3.2.3 Algoritmo de diferenças parciais 34

3.2.4 Algoritmo Adding up 35

3.2.5 Algoritmo da subtração da esquerda para direita 36

3.3 Algoritmo da multiplicação 37

3.3.1 Algoritmo da decomposição para a multiplicação 39
3.3.2 Algoritmo usual da multiplicação 41
3.3.3 Algoritmo de gelosia 43
3.4 Algoritmo da divisão 45
3.4.1 Algoritmo convencional da divisão 46
3.4.2 Algoritmo de divisões sucessivas 47
3.4.3 Algoritmo de decomposição 49

Considerações Finais **51**

Referências Bibliográficas **53**

Introdução

Muitos são os nossos conflitos quando nos deparamos com a rotina de um ambiente escolar. Vivenciamos situações que nos incomodam e nos fazem buscar alternativas para minimizar esse incômodo. Uma delas é o fato de que nas séries iniciais os professores que irão "alfabetizar matematicamente" os alunos em sua grande maioria são pedagogos, ou seja, não matemáticos. Em sua formação acadêmica matemática foi uma disciplina estudada em poucos semestres. Com isso, ele irá ensinar os conteúdos às crianças contando com o pouco que aprendeu na graduação aliada ao pré-conhecimento que ele adquiriu durante a vida. Não é difícil também encontrarmos, em uma escola, uma sala de aula que tenha alunos em diferentes momentos de conhecimento, principalmente em escolas públicas. Nesses ambientes os alunos são, em sua maioria, agrupados por idade e não pelo conhecimento que o aluno venha a possuir. Com isso, nós professores, lidamos com uma sala muito heterogênea, em que temos alunos que já se apoderaram do conhecimento para àquela série em questão, outros nem tanto e aqueles que se encontram em um nível muito inferior ao esperado.

Com relação à disciplina de Matemática especificamente, pois é nela que iremos focar nosso trabalho, temos estudantes em uma determinada série da última etapa do ensino fundamental prestes a ingressar no ensino médio que não dominam nem a operação de adição, quiçá a divisão. Com isso temos a necessidade dentro da nossa possibilidade de sala de aula realizarmos momentos de reforço com os alunos que apresentam falhas no conteúdo. Normalmente a quantidade de estudantes que possuem limitações é grande, necessitando do auxílio de todo o grupo de professores, para sanar o máximo de dificuldades. Percebemos que o mínimo que o aluno deve dominar, nesta etapa do ensino, são as quatro operações elementares e técnicas para conseguir efetuá-las. Tais técnicas também são conhecidas como algoritmos, que de acordo com o dicionário Aurélio, é definida como "o processo de cálculo, ou de resolução de um grupo de problemas semelhantes, em que se estipulam, com generalidade e sem restrições, regras formais para a obtenção do resultado, ou da solução do problema".

Como os professores que trabalharão com estes alunos que apresentam dificuldades com relação à matemática básica não serão apenas os de matemática, pois o número de alunos é grande, surge neste momento um problema. Nem todos os professores se sentem confortáveis para trabalhar com as quatro operações. Alguns porque já possuem aquele estigma de que matemática é difícil de ser ensinada e outros porque, dedicando-se apenas à disciplina para qual ele foi efetivado, muito tempo se passou desde o último contato com tais conteúdos da matemática, não recordando dos algoritmos utilizados para se ensinar as quatro operações.

Diante a insegurança, os professores das outras disciplinas precisam recordar a melhor forma para se ensinar o conteúdo escolhido para o seu grupo de alunos. É neste momento que entra o nosso trabalho em questão, "Algoritmos utilizados para as quatro operações". Recordar com os colegas as formas de se ensinar a adição, por exemplo, garante a eles segurança e consequentemente um melhor aprendizado por parte do aluno. E como se trata de ensinar um aluno que está atrasado em seu conteúdo, não podemos correr o risco de ensinar errado ou mesmo repassar dúvidas que são nossas, aos alunos.

Com várias técnicas ao seu dispor e analisando a realidade de seus alunos, bastaria escolher qual garantiria melhor o aprendizado. Para cada operação, encontramos diversas formas de tentar fazer com que o aluno elabore um raciocínio lógico para resolvê-la. No contexto de que estamos trabalhando com alunos a nível de reforço temos que considerar o pré-conhecimento que o mesmo carrega para podermos aproveitar seu conhecimento informal acerca do assunto em questão. Somando tudo isto, as chances de sucesso no reforço aumentam.

Primeiramente, mostraremos as quatro operações, dentro do conjunto dos números naturais de uma maneira formal e teórica. Apresentaremos as propriedades, proposições, corolários e teoremas que consolidam esta teoria, fechando esse capítulo com um pequeno histórico do sistema de numeração decimal.

Continuaremos nosso trabalho apresentando um breve capítulo sobre o surgimento do Material Dourado e sua proposta de utilização, bem como seus componentes.

Por fim, iremos apresentar situações problemas que envolvam as quatro operações elementares e suas resoluções seja por uma maneira lúdica, por vezes com a utilização do Material Dourado, ou utilizando algum algoritmo (técnica) específica.

Capítulo 1

Os Números Naturais

Os números naturais formam um dos conceitos mais antigos concebidos pelo ser humano. Entretanto, a sua evolução de uma noção intuitiva para um conceito mais elaborado foi muito lenta. Só no final do século 19, quando os fundamentos de toda a matemática foram questionados e intensamente repensados, é que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos, considerados mais primitivos.

Neste capítulo não nos ateremos à questão histórica e sim mostraremos algumas propriedades que circundam tal conjunto.

Partiremos do princípio que o conjunto dos números naturais será:

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$$

e que as operações de adição e multiplicação entre a e b serão representados por $a+b$ e $a.b$, respectivamente.

Neste capítulo serão apresentados conceitos preliminares, necessários, para o desenvolvimento desse trabalho. Observamos que algumas demonstrações, no decorrer deste capítulo serão omitidas. Para mais detalhes a respeito do assunto aqui desenvolvido indicamos [5] e [6].

1.1 Adição e Multiplicação

1) A adição e a multiplicação são bem definidas:

$$\forall\ a,b,a',b' \in \mathbb{N},\ a=a' \text{ e } b=b' \Longrightarrow a+b=a'+b' \text{ e } a.b=a'.b'.$$

2) A adição e a multiplicação são comutativas:

$$\forall\ a,b \in \mathbb{N},\ a+b=b+a \text{ e } a.b=b.a.$$

3) A adição e a multiplicação são associativas:

$$\forall\ a,b,c \in \mathbb{N},\ (a+b)+c=a+(b+c) \text{ e } (a.b).c=a.(b.c).$$

4) A adição e a multiplicação possuem elementos neutros:

$$\forall\ a \in \mathbb{N},\ a+0=a \text{ e } a.1=a.$$

5) A multiplicação é distributiva com relação à adição:

$$\forall\ a,b,c \in \mathbb{N},\ a.(b+c)=a.b+a.c.$$

A Propriedade 1) é que permite somar, a ambos os lados de uma igualdade, um dado número, ou multiplicar ambos os membros por um mesmo número.

Algumas vezes trabalharemos com outros conjuntos, diferentes dos naturais, munidos de operações de adição e multiplicação que possuem as propriedades de 1) a 5) acima. Neste caso, diremos que os elementos de tais conjuntos, juntamente com as duas operações, estão sujeitos às leis básicas da aritmética. Por exemplo, sabemos que os números inteiros relativos, os números racionais, os números reais e os números complexos estão sujeitos às leis básicas da aritmética. Alertamos o leitor quanto ao fato de que estes números só serão utilizados nos exemplos e problemas; nunca, porém, em lugar essencial para o desenvolvimento da teoria.

Usaremos a notação

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$$

Vamos admitir, também, que os números naturais possuam as propriedades a seguir:

6) Integridade: Dados $a,b \in \mathbb{N}^*$ tem-se que $a.b \in \mathbb{N}^*$.

Equivalentemente, pela formulação contrapositiva:

$$\forall\ a,b \in \mathbb{N},\ a.b=0 \Longleftrightarrow a=0 \text{ ou } b=0.$$

7) Tricotomia: Dados $a,b \in \mathbb{N}$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:

$$\text{i) } a = b$$
$$\text{ii)} \exists\ c \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } b = a + c$$
$$\text{iii)} \exists\ c \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } a = b + c.$$

Diremos que *a é menor que b*, simbolizado por $a{<}b$, toda vez que a propriedade (ii) acima é verificada.

Com esta difinição, temos que a propriedade (iii) acima equivale a afirmar que $b{<}a$. Assim, a tricotomia nos diz que, dados $a, b \in \mathbb{N}$ uma, e somente uma, das seguintes condições é verificada:

$$\text{i) } a = b$$
$$\text{ii) } a < b$$
$$\text{iii) } b < a$$

Utilizaremos a notação $b{>}a$, que se lê *b é maior do que a*, para representar $a{<}b$.

Decorre das definições que $0{<}a$, para todo $a \in \mathbb{N}^*$. De fato, para todo $a \in \mathbb{N}^*$ temos que $0{+}a{=}a$, o que implica $0{<}a$.

Temos também que $a + b = 0$, então $a = b = 0$. De fato, se $a \neq 0$ teríamos $b{<}0$, o que é absurdo, logo $a{=}0$. Analogamente, mostra-se que $b{=}0$. Portanto, se $a \in \mathbb{N}^*$ ou $b \in \mathbb{N}^*$, então $a + b \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 1.1.1. *Para todo $a \in \mathbb{N}$, $a.0 = 0$.*

Demonstração. Temos que

$$a.0 = a(0 + 0) = a.0 + a.0.$$

Se $a.0 \neq 0$, teríamos que $a.0 \in \mathbb{N}^*$ e, portanto, seguiria, da igualdade acima, que $a.0 > a.0$, o que é absurdo. Logo $a.0 = 0$. □

Proposição 1.1.2. *A relação "menor do que" é transitiva*

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{N},\ a{<}b \text{ e } b{<}c \Longrightarrow a{<}c.$$

Demonstração. Supondo $a{<}b$ e $b{<}c$, temos que existem $d, f \in \mathbb{N}^*$ tais que $b = a + d$ e $c = b + f$. Logo, usando a associatividade da adição, temos que

$$c = b + f = (a + d) + f = a + (d + f),$$

com $d + f \in \mathbb{N}^*$, o que implica que $a{<}c$. □

Proposição 1.1.3. *A adição é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor do que"*

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{N},\ a<b \iff a+c<b+c.$$

Demonstração. Suponha que $a<b$. Logo, existe $d \in \mathbb{N}^*$ tal que $b = a + d$. Somando c a ambos os lados desta última igualdade, pela comutatividade e associatividade da adição, temos

$$b + c = c + b = c + (a + d) = (c + a) + d = (a + c) + d,$$

o que mostra que $a + c<b + c$.

Reciprocamente, suponha que $a+c<b+c$. Pela tricotomia, temos três possibilidades: (i) $a = b$. Isto acarretaria $a + c = b + c$, portanto falso. (ii) $b<a$. Isso acarretaria, pela primeira parte da demonstração, que $b + c<a + c$; também é falso. (iii) $a<b$. Esta é a única possibilidade que resta. □

Proposição 1.1.4. *A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor do que", ou seja,*

$$\forall\ a, b \in \mathbb{N},\ e\ c \in \mathbb{N}^*,\ a<b \iff a.c<b.c.$$

Demonstração. Suponha que $a<b$. Logo, existe $d \in \mathbb{N}^*$, tal que $b = a + d$. Multiplicando por c a ambos os lados dessa última igualdade, pelas propriedades comutativa e distributiva da multiplicação, decorre

$$b.c = c.b = c.(a + d) = c.a + c.d = a.c + c.d,$$

o que mostra que $a.c<b.c$, pois, pela integridade, $c.d \in \mathbb{N}^*$.

Reciprocamente, suponha que $a.c<b.c$. Pela tricotomia, temos três possibilidades: (i) $a = b$. Isso acarretaria $a.c = b.c$, portanto falso. (ii) $b<a$. Isso acarretaria, pela primeira parte da demonstração, que $b.c<a.c$; também é falso. (iii) $a<b$. Esta é a única possibilidade que resta. □

Proposição 1.1.5. *A adição é compatível e cancelativa com respeito à igualdade*

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{N},\ a=b \iff a+c=b+c.$$

Demonstração. A implicação $a{=}b \Longrightarrow a+c{=}b+c$ é consequência do fato da adição ser bem definida (Propriedade 1).

Suponha agora que $a+c=b+c$. Temos três possibilidades:

(i) $a{<}b$. Pela Proposição 1.1.3, temos que $a+c{<}b+c$, o que é um absurdo.

(ii) $b{<}a$. Pelo mesmo argumento acima, $b+c{<}a+c$, o que também é um absurdo.

(iii) $a=b$. Esta é a única alternativa válida. $\square$

Proposição 1.1.6. *A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à igualdade*

$$\forall\ a,b \in \mathbb{N},\ \forall\ c \in \mathbb{N}^*,\ a{=}b \Longleftrightarrow a.c{=}b.c.$$

Demonstração. A implicação $a{=}b \Longrightarrow a.c{=}b.c$ é consequência imediata do fato da multiplicação ser bem definida (Propriedade 1).

Suponha agora que $a.c=b.c$. Temos três possibilidades:

(i) $a{<}b$. Pela Proposição 1.1.4, temos que $a.c{<}b.c$, o que é um absurdo.

(ii) $b{<}a$. Pelo mesmo argumento acima, $b.c{<}a.c$, o que também é um absurdo.

(iii) $a=b$. Esta é a única alternativa válida. $\square$

Note que a relação $<$ não é uma relação de ordem, pois não é reflexiva, nem antisimétrica. Podemos, entretanto, através dela, obter uma relação de ordem. A ideia intuitiva que trazemos desde a escola, de que 0 é menor que 1, que é menor que 2 e assim sucessivamente, vem da relação de ordem que existe nos naturais, que nos permite comparar os números deste conjunto, formalizando a ideia intuitiva. Descrevemos a seguir a relação de ordem.

Diremos que a é menor ou igual do que b, ou que b é maior ou igual do que a, escrevendo $a \leq b$ ou $b \geq a$ se $a{<}b$ ou $a=b$.

Note que $a \leq b$ se, e somente se, existe $c \in \mathbb{N}$, tal que $b=a+c$. Com isto, é fácil verificar que esta nova relação é efetivamente uma relação de ordem, pois possui as seguintes propriedades:

1) É reflexiva: $\forall\ a, a \leq a$.

2) É anti-simétrica: $\forall\ a,b,\ a \leq b$ e $b \leq a \Longrightarrow a=b$.

3) É transitiva: $\forall\ a,b,c,\ a \leq b$ e $b \leq c \Longrightarrow a \leq c$.

1.2 Subtração

Dados dois números naturais a e b com $a \leq b$, sabemos que existe um número natural c tal que $b=a+c$. Neste caso, definimos o número b *menos* a, denotado por

b - a, como sendo o número c. Em símbolos:

$$b - a = c.$$

Dizemos que c é o resultado da *subtração* de a de b.

Portanto, temos por definição

$$c = b - a \Longleftrightarrow b = a + c.$$

No universo dos números naturais, nem sempre existe a subtração de dois números; só existe $b - a$ quando $a \leq b$.

Note que $a - a = 0$ para todo $a \in \mathbb{N}$, e que, por definição, $(b - a) + a = b$.

Proposição 1.2.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Se $a \leq b$, então*

$$c.(b - a) = c.b - c.a.$$

Demonstração. Note que, se $b \geq a$, então $c.b \geq c.a$, o que nos diz que $c.b - c.a$ está bem definido.

Suponha agora que $b - a = d$, logo $b = a + d$. Multiplicando por c ambos os membros desta última igualdade, obtemos $c.b = c.(a + d) = c.a + c.d$, o que implica

$$c.d = c.b - c.a.$$

Substituindo d por $b - a$ na igualdade acima, obtemos

$$c.(b - a) = c.b - c.a.$$

□

1.3 Axioma de Indução

As propriedades dos números naturais e de suas operações que descrevemos até o momento não bastam para caracterizá-los. Por exemplo, os números racionais não negativos, assim como os números reais não negativos possuem todas a propriedades acima. No entanto, há uma propriedade adicional que só os naturais possuem, que é o *Axioma de Indução* que passamos a descrever.

Axioma 1 (Axioma de Indução). *Seja* S *um subconjunto de* $\mathbb{N}$ *tal que*

i) $0 \in S$.

ii) S *é fechado com respeito à operação de "somar 1" a seus elementos, ou seja,*

$$\forall\ n \in S \Longrightarrow n+1 \in S.$$

Então, S=$\mathbb{N}$.

Se $A \subset \mathbb{N}$ *e* $a \in \mathbb{N}$, *usaremos a seguir a seguinte notação:*

$$a + A = \{a + x; x \in A\}.$$

É imediato verificar que

$$a + \mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N}; m \geq a\}.$$

Segue-se, do Axioma de Indução, o seguinte importante instrumento para provar teoremas:

Teorema 1.3.1 (Princípio de Indução Matemática). *Seja* $a \in \mathbb{N}$ *e seja* $p(n)$ *uma sentença aberta em* n. *Suponha que*

(i) $p(a)$ *é verdade, e que*

(ii) $\forall\ n \geq a$, $p(n) \Longrightarrow p(n+1)$ *é verdade, então,* $p(n)$ *é verdade para todo* $n \geq a$.

Demonstração. Seja $V = \{n \in \mathbb{N}; p(n)\}$; ou seja, V é o subconjunto dos elementos de $\mathbb{N}$ para os quais $p(n)$ é verdade.

Considere o conjunto

$$S = \{m \in \mathbb{N}; a + m \in V\},$$

que verifica trivialmente $a + S \subset V$.

Como pela condição (i), temos que $a + 0 = a \in V$, segue-se que $0 \in S$.

Por outro lado, se $m \in S$, então $a + m \in V$ e, por (ii), temos que $a + m + 1 \in V$; logo $m + 1 \in S$. Assim, pelo Axioma de Indução, temos que $S = \mathbb{N}$. Portanto,

$$\{m \in \mathbb{N}; m \geq a\} = a + \mathbb{N} \subset V,$$

o que prova o resultado. $\square$

Corolário 1. *Não existe nenhum número natural* n *tal que* $0 < n < 1$.

Demonstração. O enunciado acima é equivalente a dizer que

$$p(n)\colon\ n > 0 \Longrightarrow n \geq 1$$

é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sendo 0>0 falso, segue-se que *p(0)*: 0>0 $\Longrightarrow$ 0>1 não é verdade.

Por outro lado, note que *p(n+1)*: n+1 > 0 $\Longrightarrow$ n+1 $\geq$ 1 é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, $n + 1 \geq 1$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$, pois é equivalente, por cancelamento, a $n \geq 0$, o que é sempre verdade.

Logo, sendo *p(n+1)* verdade para todo n, segue-se que *p(n)* $\Longrightarrow$ *p(n+1)* é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, o resultado decorre do Princípio de Indução Matemática. □

Corolário 2. *Dado um número natural n qualquer, não existe nenhum número natural m tal que $n < m < n + 1$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista um número natural m com $n < m < n + 1$. Logo, existiria um número $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $n + k = m < n + 1$, que, pela Proposição 1.1.3, implicaria que 0<k<1, o que é uma contradição, tendo em vista o Corolário 1 acima.

□

Corolário 3. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Se $a.b = 1$, então $a = b = 1$.*

Demonstração. Inicialmente, note que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pois, caso contrário, $a.b = 0$.

Agora, se $a \neq 1$ e $b \neq 1$, então, pelo Corolário 1, segue-se que $a > 1$ e $b > 1$. Logo, $a.b > b > 1$; contradição. Portanto, $a = 1$ ou $b = 1$. Qualquer uma dessas possibilidades implica $a = b = 1$.

□

1.4 Divisão nos Naturais

Como a divisão de um número natural por outro nem sempre é possível, expressa-se esta possibilidade através da relação de divisibilidade. Quando não existir uma relação de divisibilidade entre dois números, veremos que, ainda assim, será possível efetuar uma divisão chamada de *divisão euclidiana*. O fato de sempre ser possível efetuar tal divisão é responsável por propriedades dos naturais que exploraremos nesta seção.

1.4.1 Divisibilidade

Dados dois números naturais a e b com $a \neq 0$, diremos que *a divide b*, escrevendo $a \mid b$, quando existir $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a.c$. Neste caso, diremos também que a é um *divisor* ou um *fator* de b ou, ainda, que b é um *múltiplo* de a. Observaremos que a notação $a \mid b$ não representa nenhuma operação em $\mathbb{N}$, nem uma fração. A negação dessa sentença é representada por $a \nmid b$.

Proposição 1.4.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $c \in \mathbb{N}$. Tem-se que*

i) $1 \mid c$, $a \mid a$ e $a \mid 0$.

ii) se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

Demonstração. (i) Isto decorre das igualdades $c = 1.c$, $a = a.1$ e $a.0 = 0$. (ii) $a \mid b$ e $b \mid c$ implica que existem $f, g \in \mathbb{N}$, tais que $b = a.f$ e $c = b.g$. Substituindo o valor de b da primeira equação na outra, obtemos

$$c = b.g = (a.f).g = a.(f.g),$$

o que nos mostra que $a \mid c$.

□

O item (i) da proposição acima nos diz que todo número natural é divisível por 1 e, se não nulo, por si mesmo.

Proposição 1.4.2. *Se $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, então*

$$a \mid b \text{ e } c \mid d \Longrightarrow a.c \mid b.d.$$

Demonstração. se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $\exists f, g \in \mathbb{N}, b = a.f$ e $d = c.g$. Portanto, $b.d = (a.c)(f.g)$, logo, $a.c \mid b.d$. □

Em particular, se $a \mid b$, então $a.c \mid b.c$, para todo $c \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 1.4.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, tais que $a \mid (b + c)$. Então*

$$a \mid b \Longleftrightarrow a \mid c.$$

Demonstração. Como $a \mid (b + c)$, existe $f \in \mathbb{N}$ tal que $b + c = f.a$.

Agora, se $a \mid b$, temos que existe $g \in \mathbb{N}$ tal que $b = a.g$. Juntando as duas igualdades acima, temos

$$a.g + c = f.a = a.f,$$

donde segue-se que $a.f > a.g$, e, consequetemente, $f > g$. Portanto, da igualdade acima e da Proposição 1.2.1, obtemos

$$c = a.f - a.g = a.(f - g),$$

o que implica qu $a \mid c$, já que $f - g \in \mathbb{N}$. □

A prova da outra implicação é totalmente análoga.

Proposição 1.4.4. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, e $b \geq c$, tais que $a \mid (b - c)$. Então*

$$a \mid b \iff a \mid c.$$

Proposição 1.4.5. *Se $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, e $x, y \in \mathbb{N}$, são tais que $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (xb + yc)$; e se $xb \geq yc$, então $a \mid (xb - yc)$.*

Demonstração. $a \mid b$ e $a \mid c$ implicam que existem $f, g \in \mathbb{N}$ tais que $b = af$ e $c = ag$. Logo

$$xb \pm yc = x(af) \pm y(ag) = a(xf \pm yg),$$

o que prova o resultado, pois, nas condições dadas, $xf \pm yg \in \mathbb{N}$. □

Proposição 1.4.6. *Dados $a, b \in \mathbb{N}^*$, temos que*

$$a \mid b \Longrightarrow a \leq b.$$

Demonstração. De fato, se $a \mid b$, existe $c \in \mathbb{N}^*$ tal que $b = ac$. Como do Corolário 1 do Teorema 1.3.1, $c \geq 1$, segue-se que $a \leq ac = b$. □

Note que a relação de divisibilidade em $\mathbb{N}^*$ é uma relação de ordem, pois

i) é reflexiva: $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a \mid a$. (Proposição 1.4.1.1(i)),

ii) é transitiva: se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$. (Proposição 1.4.1.1(ii)),

iii) é anti-simétrica: se $a \mid b$ e $b \mid a$, então $a = b$. (Proposição 1.4.1.6)

Proposição 1.4.7. *Sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$, com $a > b > 0$. Temos que $a - b$ divide $a^n - b^n$.*

Demonstração. Vamos provar isto por indução sobre n.

É obvio que a afirmação é verdade para $n = 0$, pois $a - b$ divide $a^0 - b^0 = 0$.

Suponhamos, agora, que $a - b \mid a^n - b^n$. Escrevamos

$$a^{n+1} - b^{n+1} = aa^n - ba^n + ba^n - bb^n = (a-b)a^n + b(a^n - b^n).$$

Como $a - b \mid a - b$ e, por hipótese, $a - b \mid a^n - b^n$, decorre da igualdade acima e da Proposição 1.4.1.5 que $a - b \mid a^{n+1} - b^{n+1}$. Estabelecendo o resultado para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 1.4.8. *Sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$, com $a + b \neq 0$. Temos que $a + b$ divide $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.*

Demonstração. Vamos provar isto por indução sobre n.

É obvio que a afirmação é verdade para $n = 0$, pois $a + b$ divide $a^1 + b^1 = a + b$.

Suponhamos, agora, que $a + b \mid a^{2n+1} + b^{2n+1}$. Escrevamos

$$a^{2(n+1)+1} + b^{2(n+1)+1} = a^2a^{2n+1} - b^2a^{2n+1} + b^2a^{2n+1} + b^2b^{2n+1} =$$
$$(a^2 - b^2)a^{2n+1} + b^2a^{2n+1} + b^{2n+1}.$$

Como $a+b \mid a^2-b^2$ e, por hipótese, $a+b \mid a^{2n+1}+b^{2n+1}$, decorre da igualdade acima e da Proposição 1.4.1.5 que $a+b \mid a^{2(n+1)+1}+b^{2(n+1)+1}$. Estabelecendo o resultado para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 1.4.9. *Sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$, com $a \geq b > 0$. Temos que $a+b$ divide $a^{2n}-b^{2n}$.*

Demonstração. Vamos provar isto por indução sobre n.

A afirmação é verdade para $n = 0$, pois $a + b$ divide $a^0 - b^0 = 0$.

Suponhamos, agora, que $a + b \mid a^{2n} - b^{2n}$. Escrevamos

$$a^{2(n+1)} - b^{2(n+1)} = a^2a^{2n} - b^2a^{2n} + b^2a^{2n} - b^2b^{2n} = (a^2 - b^2)a^{2n} + b^2(a^{2n} - b^{2n}).$$

Como $a + b \mid a^2 - b^2$ e, por hipótese, $a + b \mid a^{2n} - b^{2n}$, decorre das igualdades acima e da Proposição 1.4.1.5 que $a + b \mid a^{2(n+1)} - b^{2(n+1)}$. Estabelecendo o resultado para todo $n \in \mathbb{N}$. □

1.4.2 Divisão Euclidiana

Teorema 1.4.1 (Divisão Euclidiana)**.** *Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que*

$$b = a.q + r, \text{ com } r < a.$$

Demonstração. Suponha que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido, os números

$$b, b-a, b-2a, ..., b-n.a, ...$$

Pela Propriedade da Boa Ordem, que afirma que todo subconjunto dos naturais possui um menor elemento, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - q.a$. Vamos provar que r tem a propriedade requerida, ou seja, que $r < a$.

Se $a \mid b$, então $r = 0$ e nada mais temos que provar. Se, por outro lado, $a \nmid b$, então $r \neq a$, e, portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Consequentemente, sendo $r = c + a = b - q.a$, teríamos

$$c = b - (q+1).a \in S, \text{ com } c < r,$$

contradição com o fato de r ser o menor elemento de S.

Portanto, temos que $b = a.q + r$ com $r < a$, o que prova a existência de q e r.

Agora, vamos provar a unicidade. Note que, dados dois elementos distintos de S, a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo um múltiplo de a, é pelo menos a. Logo, se $r = b - a.q$ e $r' = b - a.q'$, com $r < r' < a$, teríamos $r' - r \geq a$, o que acarretaria $r' \geq r + a \geq a$, absurdo. Portanto, $r = r'$.

Daí segue-se que $b - a.q = b - a.q'$, o que implica que $a.q = a.q'$ e, portanto, $q = q'$.

Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e de *resto* da divisão de b e a. Se a divide b, o resto da divisão de b por a é zero. □

Corolário 4. *Dados dois números a e b com $1 < a \leq b$, existe um número natural n tal que*

$$na \leq b < (n+1)a.$$

Demonstração. Pela divisão euclidiana, temos que existem $q, r \in \mathbb{N}$ com $r < a$, univocamente determinados, tais que $b = a.q + r$. Basta agora tomar $n = q$. □

1.5 Sistema de Numeração Decimal

É comum pensarmos que os homens tiveram a necessidade de criar os números para a contagem de seus bens, porém, descobertas nos revelam que a noção de quantidade existe desde à época dos homens das cavernas, os quais não plantavam nem possuiam bens.

Segundo [4], os primeiros seres humanos viviam da coleta do que já existia na natureza e da caça. Posteriormente, seus descendentes desenvolveram a agricultura e técnicas de domesticação de animais e passaram a comercializar aquilo que lhes sobravam ou não tinham. Com isso ficou complicado registrar o que possuíam ou deviam através de cortes em ossos, madeiras, pedras ou riscos em paredes. Surgiu aí a necessidade de criar modos adequados para registrar quantidades principalmente aquelas maiores.

Várias civilizações desenvolveram diferentes sistemas para representar os números. Um deles, o Sistema de Numeração Decimal (SND) o qual utilizamos, foi desenvolvido na Ásia no vale do rio Indo pelos indianos. Os povos árabes que construíram o Império Islâmico o adotaram levando-o para a Europa substituindo os que ali existiam, como por exemplo o Sistema de Numeração Romano. Por esse motivo ele ficou conhecido como sistema de numeração indo-arábico.

O sistema de numeração decimal apresentava várias vantagens em relação a outros sistemas da época. Ele foi estruturado a partir da base dez (10). Devemos ter em mente que a leitura, escrita, comparação, composição e todas as operações são realizadas a partir de agrupamentos de 10 em 10, o que fica claro que o SND possui uma estrutura que deve ser compreendida para melhor ser utilizada.

Na sua estrutura vale ressaltar a utilização de dez símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9), os quais serão utilizados para a construção de qualquer número. Dentre estes símbolos vale ressaltar o zero (0) que representa a ausência de valor, o qual não existia em outros sistemas da época. Outro aspecto importante é que os símbolos acima listados possuem valores distintos, segundo a sua posição no número, ou seja, ele é posicional. Um exemplo que nos esclarece esse ponto da posição do algarismo no número são os números 12 e 21. Apesar destes dois números serem formados pelos algarismos 1 e 2, estes, em cada um dos números citados, ocupam uma posição diferente, ora nas unidades, ora nas dezenas. O símbolo 2, no primeiro vale duas unidades e no segundo já valerá duas dezenas ou 20 unidades.

Precisamos ressaltar que a partir do agrupamento de 10 em 10 surgem nomenclaturas e definições importantes, como as citadas no parágrafo anterior. A definição de que o grupo de 10 unidades recebe o nome de dezena, o grupo de 10 dezenas é nomeado como centena, o grupo de 10 centenas equivale a 1 unidade de milhar e assim por diante. Tais nomenclaturas nos remete ao fato de que na construção do número no Sistema de

Numeração Decimal qualquer um dos dez símbolos que for utilizado pertencerá a uma ordem e classe. Começamos a enumerar as ordens da direita para a esquerda e a cada três ordens temos uma classe, a qual é separada uma da outra por um ponto (.).

As três ordens de cada classe recebem o nome de unidades, dezenas e centenas seguidas pelo nome da classe que elas estão, também nomeadas da direita para a equerda. Vale lembrar que tanto a leitura como a escrita do número se faz da esquerda para a direita.

Vejamos um exemplo da classificação do número em ordens e classes. Seja o número 4.372.104, teremos então sete ordens e três classes, como mostra a tabela abaixo:

9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
		4	3	7	2	1	0	4
3ª classe			2ª classe			1ª classe		

Outra característica relevante do SND é que ele obedece aos princípios aditivos e multiplicativos. O princípio aditivo se deve ao fato de obtermos o valor de um número pela adição dos valores posicionais de cada algarismo. Um exemplo que podemos fornecer é o número 147, ele equivale a 100+40+7, ou seja, o algarismo 1 está na 3^a ordem da 1^a classe (centena simples), vale 100; o valor 4 está na 2^a ordem da 1^a classe (dezena simples), vale 40; e o 7 está na 1^a ordem da 1^a classe (unidade simples), vale 7, o que adicionados resulta no valor de 147 que é o número proposto como exemplo. Já o princípio multiplicativo nos garante que o valor do algarismo é multiplicado pelo valor da posição ocupada. Utilizaremos novamente o 147 como exemplo. Temos que 147 = 1x100 + 4x10 + 7x1, admitindo as mesmas explicações usadas para o princípio aditivo.

Os princípios aditivo e multiplicativo geram a decomposição dos números. Voltando ao número 147, temos que utilizando o princípio multiplicativo e posteriormente o aditivo terminamos por decompor este número, ou seja, 147 = 1x100 + 4x10 + 7x1 = 100 + 40 + 7. A decomposição de um número nada mais é do que "desmanchar" esse número em pedaços. Podemos decompor o número em ordens ou em classes. Se utilizarmos a primeira estaremos mostrando quantas unidades terá cada ordem, já a segunda nos dará quantas unidades tem em cada classe. Peguemos o número 745.258 (setecentos e quarenta e cinco mil, duzentos e cinquenta e oito). Fazendo a decomposição em ordens teremos: 745.258 = 700.000 + 40.000 + 5.000 + 200 + 50 + 8, nos fornecendo, portanto, quantas unidades o número terá em cada uma das suas seis ordens. Já se fizermos por classes ficará: 745.258 = 745.000 + 258, o que nos dá quantas unidades o número terá em cada uma das suas duas classes. Vale lembrar que quando decompomos em classes, o número fica da forma como o lemos.

De acordo com [5], os sistemas de numeração posicionais baseiam-se no seguinte resultado, que é uma aplicação da divisão euclediana.

Teorema 1.5.1. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais $c_0, c_1, ..., c_n$ menores do que b, univocamente determinados, tais que $a = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + ... + c_n b^n$.*

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema usando a segunda forma do Princípio de Indução Matemática sobre a. Se $a = 0$, ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$.

Supondo o resultado válido para todo natural menor do que a, vamos prová-lo para a. Pela divisão euclidiana, existem q e r únicos tais que

$$a = bq + r \text{ com } r < b.$$

Como $q < a$ (verifique), pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais n' e $d_0, d_1, ..., d_{n'}$, com $d_j < b$, para todo j, tais que

$$q = d_0 + d_1 b + ... + d_{n'} b^{n'}.$$

Levando em conta as igualdades acima destacadas, temos que

$$a = bq + r = b(d_0 + d_1 b + ... + d_{n'} b^{n'}) + r,$$

donde o resultado segue-se pondo $c_0 = r$, $n = n' + 1$ e $c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, ..., n$.

A unicidade segue-se facilmente das unicidades anteriormente estabelecidas. □

A representação dada no teorema acima é chamada de expansão relativa à base b. Quando b=10, essa expansão é chamada *expansão decimal*.

Após observarmos a decomposição/composição dos números fica claro a sua relação com as operações, principalmente a adição e multiplicação. Ensinar e fazer-se compreender as características do sistema decimal é fundamental para avançar no entendimento das operações matemáticas. Na matemática, operação é qualquer tipo de procedimento que é realizado sobre certa quantidade de elementos, e que obedece sempre a uma mesma lógica (regra). Consideramos quatro, as operações elementares ou fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão.

A adição é o ato de juntar, ou seja, pegamos os objetos de dois ou mais conjuntos, formando um novo, com todos os objetos. Ela é representada pelo sinal de mais (+), tendo seus termos nomeados parcelas e seu resultado de soma ou total. A subtração é a operação matemática oposta a adição, a empregamos quando temos que verificar quantos elementos restaram em um determinado conjunto, depois de retirarmos dele uma certa quantidade destes elementos. Representamos a subtração pelo sinal de menos (-) e nomeamos seus termos por minuendo e subtraendo, respectivamente, e seu resultado por resto ou diferença. No momento em que surge a necessidade de adicionarmos agrupamentos de números iguais, utilizamos a multiplicação que é indicada pelos sinais de vezes (. ou x). Seus termos recebem o nome de fatores e seu resultado produto. Por fim, temos a divisão, operação oposta à multiplicação, representada pelo sinal dividido (:), que é usada quando necessitamos repartir uma determinada quantidade em partes iguais. Dividendo e divisor são seus termos, quociente seu resultado e o que sobra recebe o nome de resto.

Em se tratando das operações fundamentais é interessante nos atentarmos que elas podem ser realizadas em qualquer conjunto numérico, porém por conveniência, em relação a nossa proposta, neste trabalho, vamos focar no conjunto dos números naturais.

Capítulo 2

Material Dourado

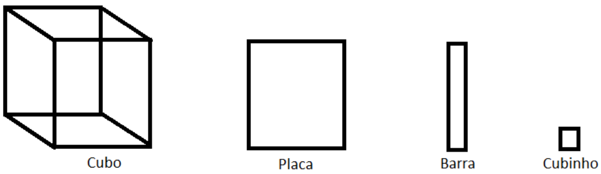
O Material Dourado foi criado por Maria Montessori (1870 - 1952), primeira mulher na Itália a formar-se em medicina. Ela teve como um de seus trabalhos atender crianças com problemas de aprendizagem e foi nesse momento que percebeu que tais crianças aprendiam mais através de ações lúdicas do que pelo pensamento. Com esse propósito idealizou um conjunto de métodos e materiais direcionados ao ensino obtendo sucesso em suas aplicações práticas. Percebeu que método semelhante poderia ser utilizado com crianças sem dificuldades.

O ensino tradicional da época, em Roma, fazia com que os alunos repetissem várias vezes um determinado algoritmo matemático, sem ocorrer compreensão no que faziam, tudo era mecânico. Ela propôs um ensino com mais liberdade, no qual os alunos poderiam utilizar materiais didáticos, entre eles o material dourado, que possibilitassem o aprendizado de forma lúdica e prazerosa. Dessa forma, as relações numéricas abstratas passariam a ter mais sentido, sem levar em conta que se percebia um grande desenvolvimento no raciocínio dos alunos.

O Material Dourado também conhecido, inicialmente, como "Material das Contas Douradas", pois suas partes eram amarelas, pode ser utilizado para trabalhar conceitos geométricos, cálculo de raizes quadradas e operações com os decimais. No entanto, a nossa ênfase, aqui, nesse trabalho, é sua colaboração para o desenvolvimento de atividades que auxiliam o processo ensino-aprendizagem, por parte dos professores e alunos, do sistema de numeração decimal e dos métodos ou algoritmos para efetuar as operações elementares, dando relevância aos procedimentos de agrupamentos. Em [3], temos a justificativa para se utilizar materiais lúdicos no ensino, a educação sensorial, como podemos observar:

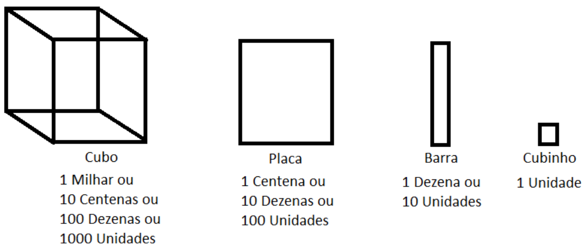
> Embora especialmente elaborado para o trabalho com aritmética, a idealização deste material seguiu os mesmos princípios montessorianos para a criação de qualquer um dos seus materiais, a educação sensorial:
> desenvolver na criança a independência, confiança em si mesma, a concentração, a coordenação e a ordem; gerar e desenvolver experiências concretas estruturadas para conduzir, gradualmente, a abstrações cada vez maiores; fazer a criança, por ela mesma, perceber os possíveis erros que comete ao realizar uma determinada ação com o material; trabalhar com os sentidos da criança.
> [2, DALTOÉ]

No início, o material era feito em papel ou barras com arames e tinha suas imprecisões com relação às medidas e a dificuldade em se construir o cubo, por isso o seguidor de Maria Montessori, Lubienska de Lenval, construiu O Material Dourado em madeira, como conhecemos hoje. Ele é constituído basicamente de quatro peças fundamentais: o cubinho, a barra, a placa e o cubo maior, conforme abaixo:



Os cubinhos, barras, placas e cubos representam respectivamente, as unidades, as dezenas, as centenas e as unidades de milhar. Vale lembrar que 10 cubinhos juntos formam uma barra, 10 barras juntas formam uma placa e por fim 10 placas juntas formam um cubo.

Vamos melhorar o desenho anterior:



Sua utilização será abordada no decorrer do nosso trabalho através de exemplos colocados para elucidar as operações, sem a utilização de técnicas ou algoritmos específicos.

Capítulo 3

Algoritmos para as quatro operações elementares

Para efetuarmos qualquer uma das quatro operações fundamentais nos disposmos de técnicas, também conhecidas como algoritmos. Para cada operação, poderá haver mais de uma técnica que nos fornecerá o resultado que queremos encontrar, porém qual usar, vai ao encontro com a facilidade ou mesmo com o conhecimento prévio de cada um, como é observado em [2]:

> As crianças (...) trazem consigo uma bagagem de noções informais sobre numeração, medida, espaço e forma, construídas em sua vivência cotidiana. Essas noções matemáticas funcionarão como elementos de referência para o professor na organização das formas de aprendizagem. [1, MEC]

Tais algoritmos serão elucidados nas seções seguintes.

3.1 Algoritmo da adição

A adição é uma das quatro operações elementares no conjunto dos números naturais. Como já foi dito anteriormente, ela é o ato de juntar elementos de dois ou mais conjuntos em um novo conjunto, o qual conterá todos os elementos dessa junção. Para obtermos o resultado desta operação, ou seja, a soma, dispomos de algumas técnicas ou algoritmos que nos auxiliam e nesta seção iremos analisá-los.

Porém, antes de pautarmos cada um destes algoritmos, vamos ressaltar dois detalhes. O primeiro é o fato de que não podemos desconsiderar que cada indivíduo, partindo do principio que ele possui sua própria vivência, carrega consigo processos diferentes para alcançar a soma, ou seja, ele consegue criar sua própria técnica, e muitas vezes ela se torna mais eficiente que o algoritmo em si. Uma criança quando entende o que é adicionar, utiliza de meios primários para chegar ao resultado, como os dedos das mãos e pés e até mesmo riscos em papéis. O outro detalhe, que vem de encontro ao exemplo citado da criança, é que muitos professores, por não terem a preparação adequada para o ensino da matemática, não favorecem à criança o amadurecimento necessário para a compreensão do algoritmo em si. Ele já direciona o aluno para a mecanização da técnica a ser utilizada, fazendo com que o mesmo naquele momento inicie uma dificuldade matemática.

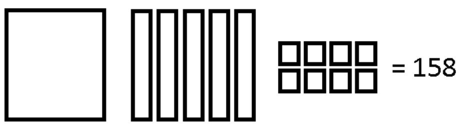
Para se chegar na utilização e compreensão dos algoritmos, que é o final do estudo de qualquer operação, o aluno necessita, aos poucos, amadurecer seu conhecimento em relação a operação, através de situações palpáveis e mais didáticas como o uso do material dourado, que faz a elucidação da operação sem mecanizar o processo.

Vejamos um exemplo do que podemos fazer antes de resolvermos uma situação que envolva adição, utilizando um algoritmo. Vamos partir de uma problematização corriqueira do aluno, isso o motivará.

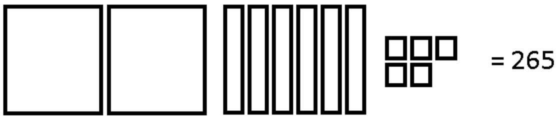
"O aluno A possui cento e cinquenta e oito (158) figurinhas do campeonato brasileiro de futebol, e encontrou seu colega, o aluno B que tem 265 figurinhas do mesmo campeonato. Ambos decidiram juntar suas figurinhas em um único lugar. Quantas figurinhas eles terão agora?" Neste caso podemos utilizar o material dourado, contando que o aluno já se apoderou do estudo do sistema dos números decimais.

Com isso teremos:

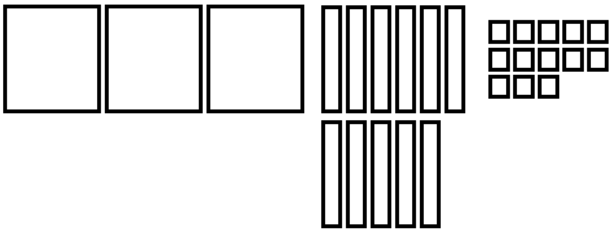
Quantidade do aluno A



Quantidade do aluno B

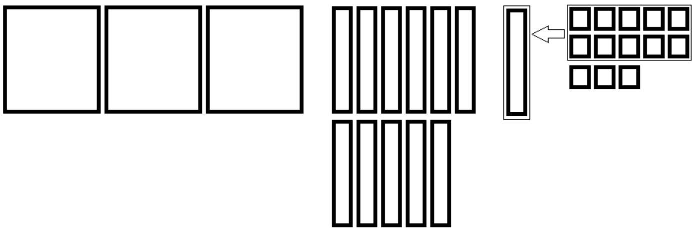


Quantidade dos dois juntos:

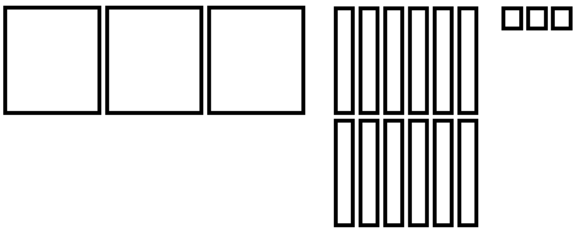


Porém, se foi trabalhado com o aluno, de forma satisfatória, o sistema de numeração decimal, fica fácil remetê-lo à situação de que 10 unidades equivale a uma dezena e que 10 dezenas à uma centena. Com isso nosso resultado, após os reagrupamentos necessários, realizados abaixo, será que o aluno A e B terão juntos 423 figurinhas.

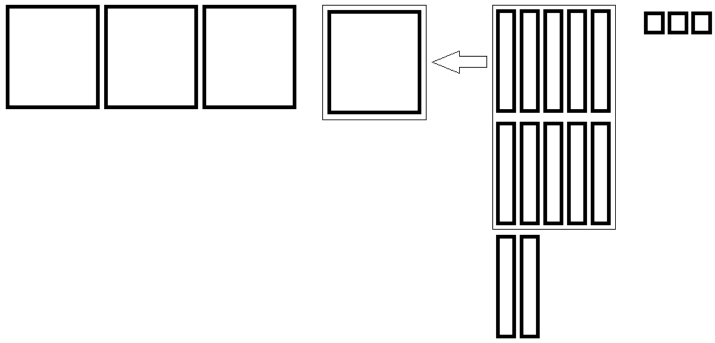
Primeiramente reagruparemos as unidades:



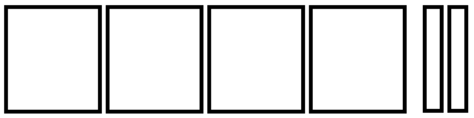
Resultando em:



Reagruparemos agora as dezenas:



Teremos, agora, o resultado final:



No momento em que o aluno consegue compreender todo o significado da operação de adição de forma mais paupável, o professor já terá a tranquilidade de iniciar a apresentação dos algoritmos. Estes fornecerão a soma de forma mais rápida, e mesmo sendo mecânicos o aluno conseguirá entender os seus significados.

Aproveitando a idéia do material dourado, a primeira técnia que iremos trabalhar será o algoritmo da adição usando a expansão na base 10, posteriormente passaremos pelo método das somas parciais. Veremos também o método da gelosia e finalizaremos com o algoritmo convencional da adição.

3.1.1 Algoritmo da adição usando expansão na base 10

Para elucidarmos este método, utilizaremos o mesmo exemplo anterior, o qual o resolvemos com o auxílio do material dourado.

Sejam as parcelas, 158 e 265, o número de figurinhas do aluno A e B respectivamente. Nesse processo precisamos, primeiramente, expandir tais quantidades na base 10. Então teremos:

$158 = 1 \text{ x } 10^2 + 5 \text{ x } 10^1 + 8 \text{ x } 10^0$

$265 = 2 \text{ x } 10^2 + 6 \text{ x } 10^1 + 5 \text{ x } 10^0$

Que também poderá ser escrito da seguinte forma:

$158 = 1 \text{ x } 10^2 + 5 \text{ x } 10^1 + 8 \text{ x } 10^0 = 1 \text{ x } 100 + 5 \text{ x } 10 + 8$

$265 = 2 \text{ x } 10^2 + 6 \text{ x } 10^1 + 5 \text{ x } 10^0 = 2 \text{ x } 100 + 6 \text{ x } 10 + 5$

Estas últimas igualdades fornecem facilidades para aqueles que possuem dificuldades em trabalhar com potências, ou até mesmo não as tenham estudado, pois não se trata de um conteúdo das séries iniciais.

Adicionando os dois números obtemos:

$158 + 265 = 1 \text{ x } 10^2 + 5 \text{ x } 10^1 + 8 \text{ x } 10^0 + 2 \text{ x } 10^2 + 6 \text{ x } 10^1 + 5 \text{ x } 10^0$

$158 + 265 = 1 \text{ x } 100 + 5 \text{ x } 10 + 8 + 2 \text{ x } 100 + 6 \text{ x } 10 + 5$

$158 + 265 = 1 \text{ x } 100 + 2 \text{ x } 100 + 5 \text{ x } 10 + 6 \text{ x } 10 + 8 + 5$

Neste momento da resolução, teremos que fazer uso da propriedade distributiva, que nos fornecerá:

$158 + 265 = (1 + 2) \text{ x } 100 + (5 + 6) \text{ x } 10 + (8 + 5)$

Resolvendo as adições acima teremos:

$158 + 265 = 3 \text{ x } 100 + 11 \text{ x } 10 + 13$

$158 + 265 = 3 \text{ x } 10^2 + 11 \text{ x } 10^1 + 13 \text{ x } 10^0$

Tal resultado é a soma desejada. Porém, se formos compor esse número para obtermos o decimal correspondente, ele seria:

$3 \text{ x } 10^2 + 11 \text{ x } 10^1 + 13 \text{ x } 10^0 = \underline{3}\ \underline{11}\ \underline{13}$

Aqui teríamos uma contradição, pois no sistema decimal não podemos ter uma ordem representada por dois algarismos, o que ocorreu, nesse caso, tanto na posição das unidades quanto das dezenas. Para que isso não ocorra teremos que observar o resultado antes de compô-lo. Voltemos ao resultado:

$158 + 265 = 3 \text{ x } 100 + 11 \text{ x } 10 + 13$

Percebendo que os números obtidos ultrapassaram 9 teremos que novamente decompô-lo da seguinte maneira:

$158 + 265 = 3 \text{ x } 100 + 11 \text{ x } 10 + 13$

$158 + 265 = 3 \text{ x } 100 + (10 + 1) \text{ x } 10 + (10 + 3)$

Usando novamente a propriedade distributiva teremos:

$158 + 265 = 3 \text{ x } 100 + 10 \text{ x } 10 + 1 \text{ x } 10 + 10 + 3$

$158 + 265 = 3 \text{ x } 100 + 100 + 1 \text{ x } 10 + 10 + 3$

$158 + 265 = (3 + 1) \text{ x } 100 + (1 + 1) \text{ x } 10 + 3$

$158 + 265 = 4 \text{ x } 100 + 2 \text{ x } 10 + 3$

$158 + 265 = 423$

Que será o resultado correto encontrado.

Percebemos, contudo, que o aluno que não dominar os detalhes que norteiam o sistema posicional decimal, terá dificuldades em desenvolver esse algoritmo, que não o torna menos eficiente que os demais.

3.1.2 Método das somas parciais

O método das somas parciais se assemelha ao anteriormente estudado, pois ambos se dão da esquerda para a direita, o que faz com que tenhamos uma estimativa do valor da soma. Também evidenciam o sentido numérico (sentido do número e da operação) deixando de lado a mecanização que ocorre no processo tradicional, de acordo com [8]:

> O aspecto mais significativo que importa evidenciar neste algoritmo é que o sentido numérico, que inclui o sentido dos números e o sentido da operação, não se perde na mecanização, como aconteceu com o algoritmo dominante. [7, LOUREIRO]

No cálculo das somas parciais iremos usar, primeiramente, o processo da decomposição. Peguemos 158 + 265 e sobreponhamos um ao outro tomando o cuidado de posicionar ordens correspondentes, uma embaixo da outra, por exemplo, dezena embaixo de dezena e assim por diante. Em seguida decompomos cada um desses números, com o intuito de percebermos a quantidade de cada ordem.

$$\begin{array}{rl} \scriptstyle C\,D\,U & \\ 158 & (100+50+8) \\ +\underline{265} & (200+60+5) \end{array}$$

Agora adicionaremos, como já dito, da esquerda para direita, o que vem ao encontro com o nosso processo de escrita, sempre observando a decomposição ao lado. Além disso, iremos seguir o seguinte esquema: adicionaremos as centenas e seu resultado colocaremos na 1ª linha, depois faremos o mesmo com as dezenas colocando o resultado na linha debaixo, tendo o cuidado de novamente posicionar ordens correspondentes uma embaixo da outra, e por último adicionaremos as unidades, colocando o resultado na 3ª linha, com os mesmos critérios. A seguir adicionaremos, agora da direita para esquerda, este resultado, obtendo a soma que estávamos procurando. Veja abaixo:

$$\begin{array}{rl} \scriptstyle C\,D\,U & \\ 158 & (100+50+8) \\ +\underline{265} & (200+60+5) \\ 300 & \\ +110 & \\ \underline{13} & \\ 423 & \end{array}$$

Vamos fazer uma análise mais detalhada do que está acontecendo. Peguemos agora a estrutura anterior e a analisaremos.

$$
\begin{array}{rl}
\text{C D U} & \\
158 & \\
+\,265 & \\
\hline
300 & (3) \\
+\,110 & (2) \\
13 & (1) \\
\hline
423 &
\end{array}
$$

Acompanhando a numeração de baixo para cima temos: em (1), 13 unidades, que é 1 dezena e 3 unidades, deixaremos aí 3 unidades e passaremos 1 dezena para se juntar com (2), onde temos 11 dezenas que com mais 1 dezena que veio de (1), 12 dezenas, que corresponde a 1 centena e 2 dezenas; agora passaremos esta centena para (3), que junto com 3 centenas, ali existentes, darão 4 centenas. Percebemos que pegando o que sobrou em (3), (2) e (1) dará 423 que também é o resultado procurado.

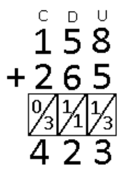
Conseguimos trabalhar ordem a ordem, tendo consciência e domínio em cada soma parcial, da ordem de grandeza que estava sendo operada.

3.1.3 Método da gelosia

O método da gelosia é mais utilizado na multiplicação, porém podemos encontrar sua citação sendo utilizada na adição, em atividade desenvolvida pelo INSTITUTO POLITÉCNICO DO PORTO, na Escola Superior de Educação, em um Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo. No caso da adição sobrepomos as parcelas a serem adicionadas, colocando ordens respectivas uma debaixo da outra. Abaixo das parcelas será criada uma rede retangular com uma linha e quantas colunas forem o número de ordens da maior parcela envolvida. Como a adição de dois números resultará em um número de um a dois algarismos, cada célula será dividida em duas partes.

Agora, registramos, em cada célula, a soma correspondente a cada ordem, sem nos preocuparmos se ela dará um número de um ou dois algarismos.

Vejamos o mesmo exemplo em que temos que encontrar a quantidade de figurinhas do aluno A e B juntos.



Neste exemplo teremos uma rede retangular com uma linha e três colunas, pois a maior parcela possui três ordens. Adicionamos cada ordem, colocando o resultado em cada célula que já estava dividida. Observemos que a soma de cada ordem foi colocada na célula correspondente e aquela que o resultado é de apenas um algarismo podemos colocar um 0 (zero) na parte superior da célula. Notemos que não há cálculos escondidos nem são realizados reagrupamentos. Nesse momento adicionaremos os números que estão em diagonal, da direita para a esquerda, fazendo os reagrupamentos, quando necessário, obtendo a soma procurada, 423.

Este algoritmo diminui as possibilidades de reagrupamento, que faz parte da maior dificuldade que os alunos encontram no método usual da adição, mas não o descarta de ocorrer algumas vezes.

3.1.4 Algoritmo convecional da adição

O algoritmo convencional da adição também é conhecido como "adição sem transporte" e "adição com transporte". Sem transporte pois, o resultado da adição de cada ordem das parcelas dará um número de um algarismo; com transporte pois, este resultado dará um número de dois algarismos necessitando reagrupá-lo. Porém, a forma de resolvê-lo é a mesma.

A técnica usual da adição, colocada em [8] , como era de se esperar, também exige a compreensão do sistema de numeração decimal. Para entender o processo "vai um" devemos ter a idéia de agrupamento, do valor posicional de um algarismo no número e utiliza dos princípios aditivos e multiplicativos do nosso sistema, fatos estes já discutidos no capítulo 1.

A técnica usual da adição é realizada da direita para esquerda. Quando a soma de alguma ordem for números de dois algarismos, necessitamos fazer os devidos reagrupamentos.

No exemplo das figurinhas de B e A, o problema nos remete à necessidade de adicionar 158 + 265 para encontrarmos o total de figurinhas que os dois possuem juntos. Utilizando o método convencional, assim como na maioria das técnicas, colocaremos as parcelas uma embaixo da outra, nos atentando para que ordens respectivas se alinhem.

$$\begin{array}{rccc} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & 1 & 5 & 8 \\ + & 2 & 6 & 5 \\ \hline & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

O processo se inicia pela ordem das unidades, adicionando o 8 e o 5, que resulta 13. Porém, o valor posicional não aceita tal resultado para compor a ordem das unidades. Faremos então a decomposição do 13 em 10 + 3. Como é de nosso conhecimento, o 10 representa 1 dezena, necessitando ser transportado para a ordem imediatamente superior, a das dezenas, deixando nas unidades o 3. O próximo passo será adicionarmos as dezenas, inclusive o 1 transportado. Teremos 1 + 5 + 6 (valores esses que na verdade valem 10, 50 e 60 respectivamente), o que resulta 12 (120 na verdade). Novamente o valor posicional não permite que 12 represente a ordem das dezenas, deveremos, portanto, decompor o 120 em 100 + 20, ou seja, 1 centena e 2 dezenas, deixaremos o 2 para compor a ordem das dezenas e transportaremos o 1 para o ordem das centenas. Por último, adicionaremos o 1 " transportado", o 1 e o 2, algarismos que compõe a ordem das centenas. A soma dessa ordem resultará em 4, ficando 423 como resultado final.

Identificamos que esse algoritmo envolve um total domínio do sistema de numeração decimal, sendo cansativo explicar o que acontece durante o seu desenvolvimento, porém, como é a técnica mais comentada e ensinada entre os docentes, os alunos estão familiarizados com ela, mesmo não entendendo o que realmente está acontecendo. Eles simplesmente sabem que quando o resultado de cada coluna (ordem) ultrapassa 9, ou seja, é 10 ou mais, deixa-se o segundo algarismo do número embaixo da referida coluna e "vai um" para a próxima coluna da esquerda.

3.2 Algoritmo da subtração

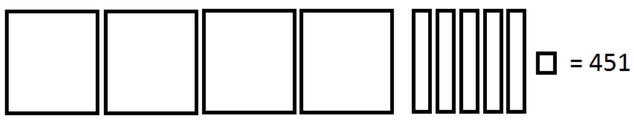
A subtração é também uma das quatro operações elementares no conjunto dos números naturais. Como já foi dito no primeiro capítulo, ela é a operação oposta à adição. É utilizada quando temos que verificar quantos elementos restaram de um determinado conjunto, quando dele foi retirada uma certa quantidade destes elementos. Todas ressalvas colocadas para adição também serão consideradas para a subtração, tanto com relação ao sistema de numeração decimal como para a forma como esta operação é ensinada aos alunos.

A subtração, assim como ocorre com as outras operações, é ensinada de uma forma mecânica, sem se pensar que a pessoa que a está aprendendo deveria compreender o significado de alguns termos utilizados frequentemente nessa operação, como por exemplo, "tomar emprestado".

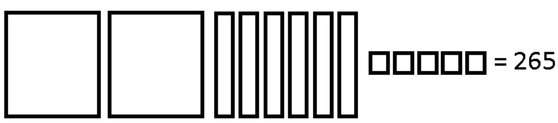
Uma das formas de tornar esse ensino mais lúdico seria proceder como foi sugerido na adição, utilizar materiais palpáveis, através do qual o aluno possa compreender o universo da subtração. A partir daí poderíamos ensinar um dos algoritmos empregados para encontrarmos a diferença que ele já seria mais significativo. A manipulação do material dourado seria um caminho para isso. Vejamos um exemplo do que pode ser feito antes de resolvermos uma situação que envolva subtração, através de uma técnica. Tentando motivar quem está aprendendo, problematizaremos uma situação corriqueira.

"O aluno B, colega do aluno A, tinha 451 reais de economias, resolveu dar ao seu colega 265 reais para que ele comprasse um patins que tanto sonhava. Com quantos reais B ficará?"

Consideraremos que o conteúdo de sistema de numeração decimal tenha sido trabalhado de forma satisfatória. Pegaremos a quantidade que B possuia de economias e a visualizaremos no material dourado.

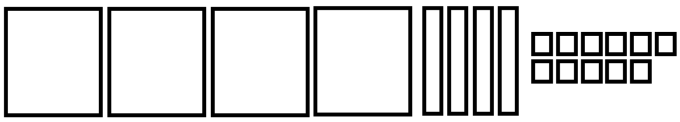


Teremos, agora, que retirar 265 reais, que foi dado a A, dessa quantidade.



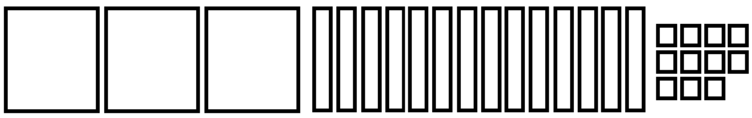
Podemos verificar que os bloquinhos que representam as unidades são em maior quantidade do que B possui, ou seja não conseguiremos tirar 5 de 1. Neste caso, é necessário que o aluno compreenda bem o sistema de numeração decimal, como insistentemente dizemos, para que ele possa desagrupar uma dezena e transformá-la em dez unidades, ficando assim:

Quantidade de B

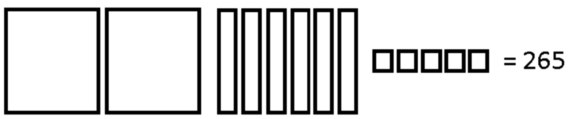


Agora tiraremos a quantidade dada a A. Na ordem das unidades conseguiremos tirar 5 de 11, restando 6, porém as dezenas de B ficaram menores do que as que serão repassadas a A, necessitando novamente desagrupar, só que agora, uma centena em dez dezenas, ficando assim:

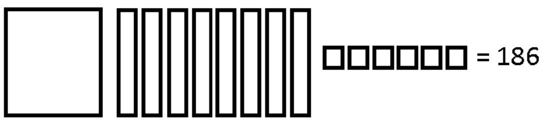
Quantidade de B



Pegaremos de B aquilo que foi dado a A.



Ficando B portanto com:



Que é o resto ou diferença entre 451 e 265.

Com a compreensão desse processo fica fácil trabalharmos com os algoritmos da subtração sem torná-los mecânicos, pois sempre estaremos agrupando e desagrupando ordens para que a operação seja passível de compreensão.

Passaremos pelos métodos mais conhecidos como o algoritmo convencional da subtração, algoritmo de igualdade de adições (ou também conhecido por compensação), algoritmo de diferenças parciais, algoritmo adding up e finalizaremos com o algoritmo de subtração da esquerda para direita.

3.2.1 Algoritmo convecional da subtração

Vamos desvendar este algoritmo utilizando o exemplo feito anteriormente com material dourado. B irá dar a A parte de suas economias para que ele compre seu tão sonhado patins. Para essa técnica os números devem ser posicionados um embaixo do outro, fazendo com que respectivas ordens se alinhem. No caso da adição, como ela é comutativa, no conjunto dos números naturais, a sequência que esses números serão pegos para armarmos a operação não interferiria no resultado, já na subtração isso não é válido. Para a operação em questão, devemos primeiramente pegar o maior, para depois, embaixo deste, posicionarmos o menor, para garantirmos que a diferença pertença ao conjunto dos números naturais. A subtração não é comutativa.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle C\ D\ U \\ 451 \\ \underline{-265} \end{array}$$

Após posicionarmos os números, começaremos a efetuar da direita para a esquerda. Trabalhando com a ordem das unidades, não é possível tirarmos 5 de 1 no conjunto dos números naturais. Neste ponto teremos que decompor uma das 5 dezenas existentes na ordem imediatamente superior e a reagruparmos com a unidade existente, ficando assim 11 unidades, nos permitindo, agora, tirarmos desta, 5 unidades, restanto portanto 6 unidades.

Partiremos para a ordem das dezenas. Ela tinha 5 dezenas, como utilizamos uma para decompormos em unidades, restaram 4, das quais também não conseguiremos subtrair 6. Teremos que novamente recorrer a ordem seguinte, a das centenas e decompormos 1 das 4 centenas existentes em dezenas. Neste momento teremos 14 dezenas, o que torna possível retirarmos 6, restando, portanto 8 dezenas.

Em seguida, iremos para a ordem das centenas, a qual depois de decompormos uma delas em dezenas restaram 3. Nesse caso já será possível tirarmos 2 centenas das 3 existentes, não necessitando de reagrupamentos, mesmo porque não existem mais ordens superiores a esta. Restará então 1 centena, portanto a diferença final será 186.

Percebemos que esse tipo de raciocínio prolonga-se, se necessário, por todas as ordens, da direita para a esquerda, até chegar à ordem de maior valor. Esta sequência de procedimentos nos garante um resultado final escrito no sistema de numeração decimal.

$$\begin{array}{rccc} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & & 14 & \\ & 3 & \cancel{4} & 11 \\ & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{1} \\ - & 2 & 6 & 5 \\ \hline & 1 & 8 & 6 \end{array}$$

Nota-se que não utilizamos a expressão "tomar emprestado", tão comumente falada durante o desenvolvimento do algoritmo convencional, deixando claro que isto não se faz necessário para o entendimento do algoritmo por parte do aluno, basta que, tanto o aluno como quem vai ensinar, compreenda bem o sistema de numeração decimal e suas consequências, de acordo com [8].

3.2.2 Algoritmo de igualdade de adições ou algoritmo de compensação

A técnica de igualdade de adições baseia-se na propriedade da invariância do resto, que nos afirma que se mantém a diferença quando adicionamos o mesmo número aos dois termos da subtração. Por facilidade, no que diz respeito aos agrupamentos no Sistema de Numeração Decimal, adicionaremos 10, 100, 1000 ..., o que corresponde a 1 dezena, 1 centena, 1 unidade de milhar..., respectivamente.

Para elucidar esta técnica utilizaremos novamente o exemplo da generosidade do colega B para com o colega A. Os números se posicionarão, com respectivas ordens, uma embaixo da outra, como no convencional.

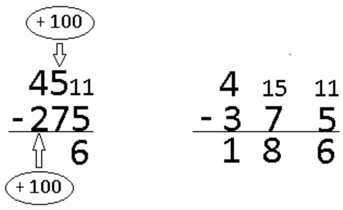
$$\begin{array}{rccc} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & 4 & 5 & 1 \\ - & 2 & 6 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Tal como no algoritmo convencional, não podemos subtrair 5 de 1, então adicionamos 10 ao 1 do minuendo e o mesmo faremos ao 6 do subtraendo, ficando portanto assim:

$$\begin{array}{rl} & 451 \leftarrow (+10) \\ - & 265 \\ \hline & \uparrow \\ & (+10) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & 4 & 5 & 11 \\ - & 2 & 7 & 5 \\ \hline & & & 6 \end{array}$$

Fazendo a subtração restará 6 para a ordem das unidades. Note que mesmo a adição de 10 unidades ter sido feita tanto no minuendo quanto no subtraendo, no primeiro ela foi feita na ordem das unidades e no segundo na das dezenas, lembrando que 10 unidades equivale a 1 dezena.

Partindo para a ordem das dezenas, novamente não conseguiremos retirar 7 de 5, ou seja, 70 de 50, logo adicionaremos 100, que corresponde a 10 dezenas ao 5 do minuendo e o mesmo faremos com o 2 do subtraendo, ficando assim:



Restando, após a subtração, 8 para a ordem das dezenas. Prosseguindo a subtração podemos operar a ordem das centenas que nos restará 1, encontrando, portanto, 186 para a diferença entre 451 e 275, mesma obtida no algoritmo convencional. Tal processo poderia se estender se tivesse mais ordens à esquerda, somente atentando para a propriedade da invariância do resto.

Muitos professores, apresentando dificuldades em explicar tal processo, fazem uso de macetes para que os alunos decorem os procedimentos do algoritmo. Alguns dizem: "tudo que fazemos em cima tem que ser feito embaixo". Novamente o aluno irá mecanizar um processo, sem compreender seu desenvolvimento, como confirma [8], em:

> Começo por registar que em Portugal quase toda a gente aprendeu, e aprende ainda, um algoritmo da subtracção que recorre a uma propriedade pouco intuitiva da subtracção, a propriedade da invariância do resto. Incapazes de explicar este facto inexplicável às crianças, os professores arranjam menmónicas mais ou menos tolas para as crianças decorarem os procedimentos do algoritmo. [7, LOUREIRO]

3.2.3 Algoritmo de diferenças parciais

No algoritmo de diferenças parciais, seu processo, se dará da esquerda para a direita, diferentemente dos anteriores, mas igualmente ao das somas parciais. Ele começará operando pela ordem mais elevada até chegar à ordem das unidades. Vamos ilustrá-lo com o mesmo exemplo anterior onde B repassa a A parte de suas economias.

C D U	
451	(400 + 50 + 1)
-265	(200 + 60 + 5)
200	(de 4 centenas, tira 2 e fica com 2 centenas)
-10	(falta 1 dezena, pois precisa tirar 6 e só tenho 5)
-4	(faltam 4 unidades, pois preciso tirar 5 e só tenho 1)

Neste momento reagruparemos e teremos o seguinte registro final.

$$\begin{array}{rll} \text{C D U} & & \\ 451 & & \\ -265 & & \\ \hline 200 & \Rightarrow 190 & \\ -10 & & \Rightarrow 186 \\ -4 & & \\ \hline 186 & & \end{array}$$

Como neste algoritmo não é necessário fazer reagrupamentos das unidades de cada uma das ordens, não necessitamos fazer alterações nos algarismos do número de partida. Isso o faz um algoritmo significativo e pouco mecanizado, em consoante com [8]. Porém, para o aluno de séries iniciais, o fato de faltar dezenas ou unidades representando isto pelo sinal negativo (-), para depois fazermos as operações que encontrará a diferença final, pode não ser tão acessível.

3.2.4 Algoritmo Adding up

Há outro algoritmo alternativo para a subtração, muito interessante, porém pouco utilizado. É o Método Adding up, que podemos traduzir por adição de baixo para cima. Ele fundamenta na subtração como operação inversa da adição e é um procedimento bastante utilizado mentalmente para obtermos troco, como discutido em [8].

Vamos exemplificá-lo com os mesmos valores já utilizados nas técnicas passadas.

$$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 451 \\ -265 \\ \hline \end{array}$$

Para esta técnica não procederemos como as anteriores, armando a continha como fizemos acima. A idéia é que devemos obter o número que somado a 265 chega a 451. Então partiremos do maior deles que é 451 e iremos fazendo subtrações para obtermos centenas, dezenas exatas, quando possível, até chegarmos no menor número, e ao lado iremos anotando estes valores que irão sendo subtraídos. Vejamos:

$$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 451 \\ 400 \\ 300 \\ 270 \\ 265 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{C D U} \\ 51 \\ 100 \\ 30 \\ +\quad 5 \\ \hline 186 \end{array}$$

Quando chegarmos ao menor número, ou seja, o subtraendo, adicionaremos os valores que foram anotados ao lado, obtidos das sucessivas subtrações. Este total será justamente a diferença que estávamos procurando.

3.2.5 Algoritmo da subtração da esquerda para direita

Nesse algoritmo, assim como no de diferenças parciais, operamos da esquerda para a direita, ou seja, começamos a subtrair pela ordem mais elevada até chegar à ordem das unidades. Essa técnica também é conhecida como método de "riscar", motivo desta denominação, mostraremos abaixo utilizando a subtração entre os números já conhecidos, 451 e 265.

$$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 451 \\ -265 \\ \hline \end{array}$$

O que faremos neste método será o seguinte:

1º) Subtrairemos 451 de 200 (quantidade de unidades de centenas que possuimos no subtraendo), restando portanto 251 para o minuendo e 65 para o subtraendo.

$$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 251 \\ \sout{451} \\ -\cancel{2}65 \\ \hline \end{array}$$

2º) Nesse momento subtrairemos 251 de 60 (quantidade de unidades de dezenas que possuimos no subtraendo), restando portanto 191 para o minuendo e 5 para o subtraendo.

$$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 191 \\ \sout{251} \\ \sout{451} \\ \cancel{2}\cancel{6}5 \\ \hline \end{array}$$

3º) Por último subtrairemos 191 de 5 (quantidade de unidades que possuimos no subtraendo), restando 186 que é a diferença a ser encontrada.

$$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ \cancel{191} \\ \cancel{451} \\ \underline{\cancel{2}\cancel{6}\cancel{5}} \\ 186 \end{array}$$

Tal algoritmo se faz interessante para cálculos mentais, pois os valores a serem subtraídos, como são manipulados da esquerda para a direita, não necessitam de serem reagrupados.

3.3 Algoritmo da multiplicação

A multiplicação é outra operação elementar no conjunto dos números naturais. Quando queremos adicionar várias vezes números iguais, para que este processo se torne mais curto, utilizamos a multiplicação.

Grande parte das pessoas que dizem saber multiplicar, executam bem o algoritmo, mas não o compreende. Nessa operação, a realização da conta é um ato mecânico, sem raciocínio matemático. Muitos professores que a ensinam exigem que os alunos decorem a tabuada de multiplicação do 1 até o 10 e lhes repassam as ações que deverão ser seguidas para se garantir a resposta correta. Não se tem a preocupação de explicar os porquês de cada passo, talvez eles nem saibam o porquê, só também memorizaram aquilo que estão a cobrar.

Vamos, nesta seção, trabalhar algumas técnicas utilizadas para se encontrar o produto, tentando mostrar as entrelinhas do que está acontecendo em cada ação. Vale lembrar que as considerações feitas nos capítulos anteriores, principalmente em relação ao sistema de numeração decimal, serão levadas em consideração.

Antes de pautarmos cada algoritmo, vamos tentar vislumbrar a multiplicação de uma forma mais acessível, como fizemos nas duas operações anteriores, utilizando o material dourado. Iremos fornecer ao aprendiz problema que estimule seu raciocínio. A partir do momento que ele entender como funciona a operação através desta situação, acreditamos, que ele será capaz de melhor compreender o algoritmo que lhe será apresentado.

Imaginemos a seguinte situação do nosso dia-a-dia:

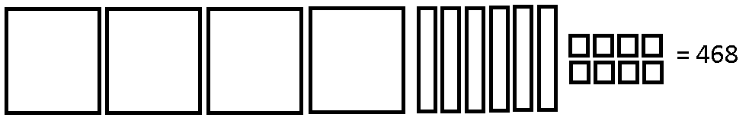
“Os colegas A e B ganharam juntos, durante três meses, 468 reais. Qual o valor que eles receberam no final de três meses?”

Como serão três valores iguais a 468, poderemos utilizar a multiplicação, ou seja, teremos que operar:

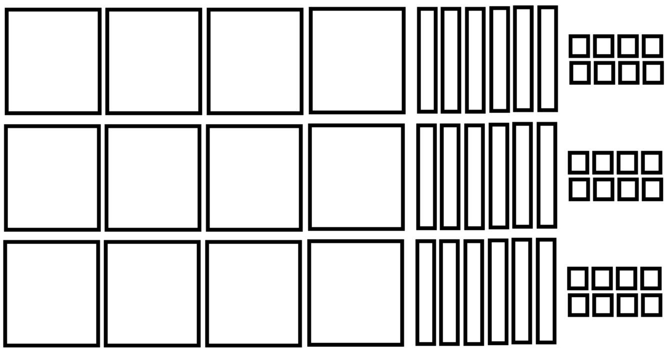
468 x 3

Utilizando o material dourado, iremos adicionar 468, por ele mesmo, três vezes.

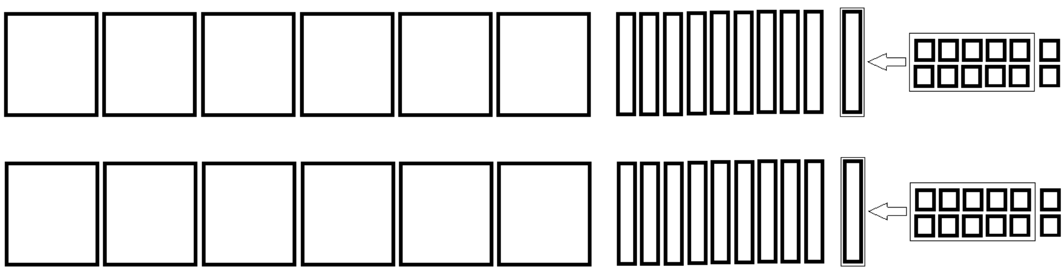
A representação do 468 com o material dourado é a seguinte:



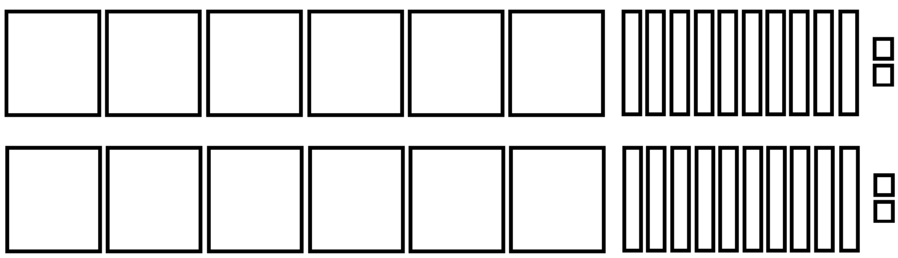
Agora iremos adicioná-lo com ele mesmo, três vezes.



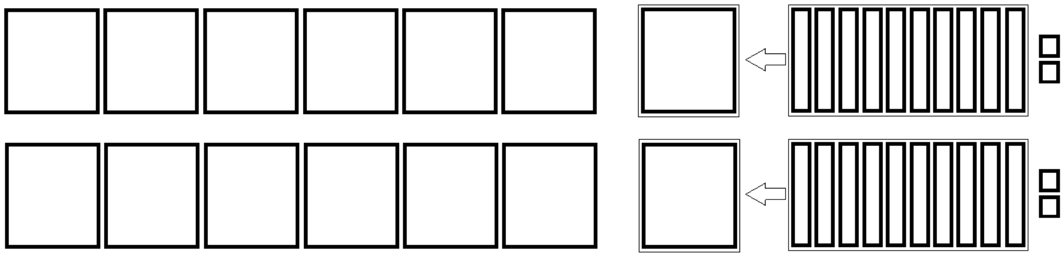
Primeiramente, vamos fazer os reagrupamentos devidos, começando primeiro pelas unidades:



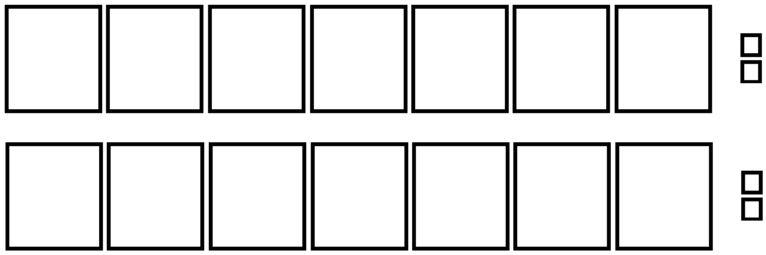
Tal procedimento resultará em:



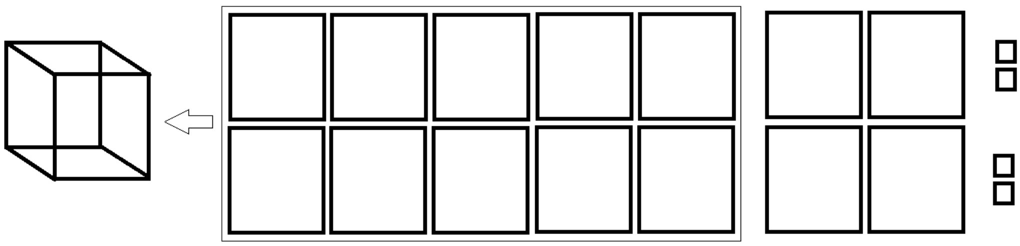
Continuando, iremos reagrupar as dezenas:



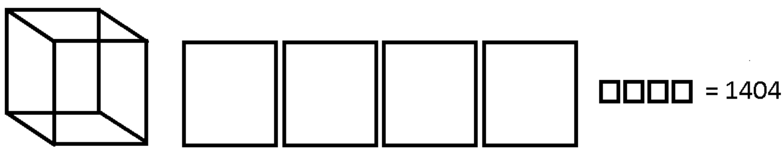
O que resultará em:



Finalmente agruparemos as centenas:



Feito os reagrupamentos necessários ficaremos assim:



Agora passaremos para as técnicas de multiplicação. Existem vários algoritmos para a multiplicação, porém, ressaltaremos três deles, acreditando que sejam mais didáticos para nossa realidade escolar, alunos de séries iniciais e professores que em sua maioria não são matemáticos. Passaremos pelo algoritmo da decomposição, o algoritmo usual e o de gelosia.

3.3.1 Algoritmo da decomposição para a multiplicação

O algoritmo que iremos trabalhar vai ser fundamentado na decomposição dos números no sistema de numeração decimal. Pegaremos os fatores envolvidos na operação e faremos a sua decomposição, em encontro ao discutido em [10] e [8]. Ele também é conhecido com algoritmo de produtos parciais e era o método de multiplicação utilizado pelos gregos.

Vejamos uma situação corriqueira que envolva a multiplicação.

"Todos os dias, durante 35 dias, os colegas A e B ganharão 127 reais de seus pais, para que eles possam comprar o video game e jogos que tanto sonham. Quantos reais eles conseguirão juntar no final de 35 dias?"

Poderíamos, nesse exemplo, somar 127 + 127 + ... + 127, 35 vezes, que é o número de dias em que eles ganharão o dinheiro. No entanto, sabemos que a multiplicação é usada, justamente para simplificar o cálculo de adição de finitos números iguais, portanto teremos que efetuar a seguinte conta:

$$\begin{array}{r} 127 \\ \underline{\times 35} \end{array}$$

Como sabemos os fatores envolvidos vamos decompô-los.

$$\begin{array}{r} 127 \\ \underline{\times 35} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 100 + 20 + 7 \\ \underline{\times\ 30 + 5} \end{array}$$

Depois de decompostos, pegaremos as unidades do multiplicador e multiplicaremos com todas as parcelas que compõe o multiplicando, sobrepondo os produtos um embaixo do outro, obedecendo a sobreposição de ordens respectivas. Terminando a multiplicação das unidades, passaremos para as dezenas e faremos o mesmo, lembrando que tais produtos deverão ser colocados embaixo dos resultados obtidos com a multiplicação das unidades. Se houver ordens superiores a estas nas parcelas do multiplicador, deveremos continuar o processo até que não reste mais nenhuma. Concluído as multiplicações adicionaremos os resultados obtidos gerando o produto desejado. Percebe-se que esse processo se dá da direita para a esquerda, mas nada impede que ele ocorra da esquerda para a direita sem interferir no produto.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
100 + 20 + 7 & & & & & & \\
\underline{\times\ 30 + 5} & & & & & & \\
35 & \Rightarrow & 5 & \times & 7 & = & 35 \\
100 & \Rightarrow & 5 & \times & 20 & = & 100 \\
500 & \Rightarrow & 5 & \times & 100 & = & 500 \\
+\ \ 210 & \Rightarrow & 30 & \times & 7 & = & 210 \\
600 & \Rightarrow & 30 & \times & 20 & = & 600 \\
\underline{3000} & \Rightarrow & 30 & \times & 100 & = & 3000 \\
4.445 & & & & & &
\end{array}$$

No método por decomposição fica evidente a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação. No caso trabalhado temos:

127 x 35 = (100 + 20 + 7) x (30 + 5)

127 x 35 = (100 x 30) + (100 x 5) + (20 x 30) + (20 x 5) + (7 x 30) + (7 x 5)

127 x 35 = 3000 + 500 + 600 + 100 + 210 + 35

127 x 35 = 4445

Também podemos verificar que cada produto parcial obtido tem um forte sentido numérico relacionados aos produtos por potências de 10. Deixamos de lado a mecanização da operação para uma melhor compreensão do sentido numérico envolvido.

3.3.2 Algoritmo usual da multiplicação

Nesse método de multiplicação não faremos a decomposição dos fatores, como no anterior. Aqui a operação é realizada de uma forma mecânica, no entanto, tentaremos explicar o que acontece em cada passo. Vejamos como ela ocorre utilizando a mesma situação corriqueira exposta no algoritmo anterior. O exemplo nos fornece dois números, fatores, a serem multiplicados o 127 e o 35. Aqui devemos posicioná-los um embaixo do outro, alinhando as unidades, dezenas e as ordens superiores que existirem. A ordem com que esses números serão colocados, não interfere no resultado, pois como já falamos, a multiplicação é comutativa, porém se faz conveniente colocar primeiro aquele que mais ordens possuir.

Após armada a operação, procederemos da direita para esquerda, ou seja, começaremos pela ordem das unidades do multiplicador. Multiplicaremos este algarismo pelo algarismo das unidades do multiplicando, depois pelas dezenas, e assim até acabar os algarismos do multiplicando. Nessa técnica teremos que realizar reagrupamentos, caso o resultado obtido nas multiplicações forem números de dois algarismos. Vejamos:

$$\begin{array}{r} {}^{1\;3\;\;} \\ 127 \\ \times 35 \\ \hline 635 \end{array}$$

O que acontece aqui tem a mesma idéia da adição com transporte. Quando multiplicamos 5 x 7 obtemos 35 como produto, entretanto o valor posicional não aceita tal resultado para compor a ordem das unidades. Com isso, faremos a decomposição do 35 (30 + 5), onde o 30 corresponde a 3 dezenas, transportando-as para a ordem das dezenas, deixando o 5 para compor as unidades. O próximo passo é multiplicarmos o

5 por 2 que resulta 10, nesse momento devemos lembrar as 3 dezenas que foram transportadas da ação anterior e adicioná-las com 10, resultando 13. Novamente temos um resultado com mais de um algarismo, devendo portanto decompô-lo, pois não podemos ocupar a ordem das dezenas com número de dois algarismos. Precisamos recordar que o 13 obtido na verdade vale 130, pois ele ocupa a posição das dezena, que decomposto dará 100 + 30, ou seja, 1 centena + 3 dezenas. Deixaremos o 3 na casa das dezenas e transportaremos o 1 junto a ordem das centenas a serem multiplicada. Agora, nos resta multiplicar o 5 pelo 1 que resulta 5, não podemos esquecer que essas 5 centenas serão acrescidas de 1 centena que foi transportada da etapa anterior, resultando 6 centenas, que nesse caso, como possui um algarismo pode ser colocada sem necessitar de agrupamentos.

Não termina por aí, agora passaremos para o 3, algarismo da ordem das dezenas, no multiplicador, o qual será multiplicado novamente pelas unidades, dezenas e centenas do número que está posicionado acima.

$$\begin{array}{r} 1\overset{2}{2}7 \\ \times 35 \\ \hline 635 \\ 381 \end{array}$$

Seguiremos os mesmos detalhes da multiplicação feita pelo 5 na ordem das unidades, fazendo os transportes e agrupamentos devidos. Nessa etapa a multiplicação acontece com o número que está na ordem das dezenas, já na primeira multiplicação obteremos um número formado por, no mínimo dezenas, devendo ser alinhado embaixo das dezenas do produto obtido da multiplicação pelo 5, ficando então, uma lacuna embaixo das unidades do resultado anterior.

Para não restar dúvidas, vamos multiplicar o 3, que na verdade é 30, por 7. Teremos 21 como resultado que na realidade é 210, ou seja, 21 dezenas que decompostas dará 200 + 10, que corresponde a duas centenas e 1 dezena, necessitando que esta dezena seja alinhada à ordem das dezenas do produto anterior, transportando as 2 centenas. Repetiremos estas ações até multiplicarmos por todos os números no multiplicando. Como não temos mais nenhum algarismo no multiplicador, basta adicionarmos os dois produtos encontrados que teremos o resultado para 127 x 35.

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\,\overset{2}{3}} \\
127 \\
\times 35 \\
\hline
1\,635 \\
+\,381 \\
\hline
4445
\end{array}
$$

Percebemos que se trata de um algoritmo bastante mecânico e que se não tivermos a devida atenção, suas etapas acontecem sem nenhum sentido numérico, principalmente para aqueles que carregam dúvidas pertinentes em relação ao sistema de numeração decimal, o que afirma [8]:

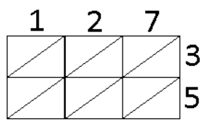
> Na utilização deste algoritmo está totalmente ausente o sentido da multiplicação. Trabalha-se com os dois factores decompostos, calculam-se produtos sem qualquer significado e vai-se reagrupando as unidades de cada ordem obtida. Estas três acções, de natureza totalmente diferente, devem ser realizadas em cadeia e alternadamente, de modo análogo ao que vimos nos algoritmos dominantes anteriores. Não há qualquer apelo ao sentido numérico, nem controle ou avaliação dos vários cálculos intermédios que são realizados. A parcialidade dos registos dos resultados intermédios é uma dificuldade acrescida [7, LOUREIRO]

3.3.3 Algoritmo de gelosia

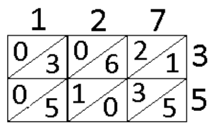
O método de gelosia, como discutido em [10], era a técnica utilizada pelos árabes para se multiplicar. O nome gelosia significa grade de madeira, feita de ripas finas que se cruzam e que antigamente eram usadas nas janelas. Para trabalharmos, iremos novamente utilizar o exemplo dos 127 reais que os colegas A e B ganham diariamente por 35 dias.

Inicialmente construiremos um retângulo, como os números a serem multiplicados possuem três e dois algarismos respectivamente, dividiremos esse retângulo em seis retângulos menores e iguais

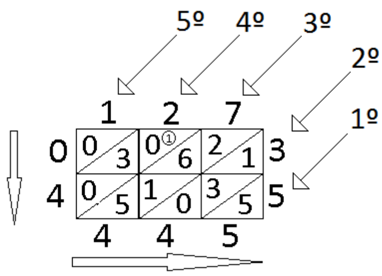
Inicialmente construiremos um retângulo, dividindo-o em 3 colunas, pois temos 3 algarismos para o multiplicando, e 2 linhas, pois temos 2 algarismos para o multiplicador, ou seja, o retângulo terá 6 retângulos menores iguais. Cada um desses retângulos menores serão divididos diagonalmente ao meio, como vemos abaixo.



Multiplicaremos os algarismos que interseptam cada retângulo menor, colocando o produto dentro do mesmo, caso o resultado for um número de um algarismo acrescentaremos um zero a esquerda do número, o que não altera seu valor, como ocorre abaixo:



Percebemos que as dezenas já se separam das unidades pela diagonal que divide o retângulo, adquirindo assim os produtos parciais sem a necessidade de reagrupamentos. Observaremos estes números de acordo com a orientação das setas (inclinadas), da direita para a esquerda começando pela imediatamente inferior. Adicionaremos os números que estiverem alinhados a cada seta, dentro do retângulo, fazendo reagrupamentos quando necessários. As somas obtidas serão colocadas no final do alinhamento das setas, fora do retângulo maior e serão o valor de cada ordem do resultado final que estamos procurando. A adição da primeira resultará no algorismo das unidades, a da segunda o algarismo das dezenas e assim sucessivamente, até adicionarmos todas as diagonais.



Seguindo as setas vertical e depois horizontal teremos o número 4.445 que é o produto procurado.

3.4 Algoritmo da divisão

A divisão é a última operação elementar, no conjunto dos números naturais, que trabalharemos aqui. Ela é a operação oposta à multiplicação, e para que o aluno tenha o sucesso esperado, ele precisa ter compreendido bem a multiplicação.

Ela será usada no momento em que uma determinada situação exija a necessidade de repartirmos uma quantidade em partes iguais. É considerada a operação na qual os alunos do ensino fundamental apresentam maior dificuldade. Muitos concluem essa etapa do ensino sem saber efetuar algum tipo de algoritmo ou o fazem, porém não entendem a lógica do processo, de acordo com a discussão em [9].

Em uma sala de aula, antes de partirmos para o ensino de algum algoritmo devemos apresentar a divisão através de situações que façam os alunos investigarem e compreenderem o que acontece em uma divisão, chegando, até mesmo, a criarem seu próprio algoritmo. Desta vez deixaremos o material dourado de lado e partiremos para outras situações.

Vejamos um exemplo corriqueiro qu irá estimular e envolver o aluno neste processo investigativo.

"Dois colegas A e B possuem 220 figurinhas e gostariam de distribuí-las entre 20 coleguinhas da escola. Quantas figurinhas caberá a cada colega?"

Nesse exemplo poderemos sugerir aos alunos que adicionem de 20 em 20 até obterem um número igual ou pouco menor a 220. Quantas parcelas iguais a 20 forem adicionadas será a quantidade de figurinhas que cada coleguinha receberá. Se o número obtido for menor que 220, aquilo que faltar para chegar em 220 será o resto de figurinhas que não dará para serem divididas entre os colegas, pois não caberá 1 figurinha para cada um.

Vejamos o que acontecerá:

$220 = 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 11$ x 20

Portanto teremos 11 como quociente da divisão de 220 por 20.

Isso é apenas uma maneira de apresentarmos a divisão. Cada aluno poderá dentro de seus limites e conhecimentos criar seu próprio método para se chegar a solução.

Abordaremos técnicas que poderão ser compreendidas por professores que não são matemáticos e por alunos do ensino fundamental. Iniciaremos pela divisão convencional, passaremos pela divisão sucessiva e fecharemos com o algoritmo de decomposição.

3.4.1 Algoritmo convencional da divisão

O algoritmo convencional, como qualquer outro, não abre mão do bom entendimento em relação ao sistema de numeração decimal, principalmente em relação ao valor posicional. No caso deste método também necessitaremos de um pré conhecimento, bem fundamentado da multiplicação e subtração, como discutido em [7].

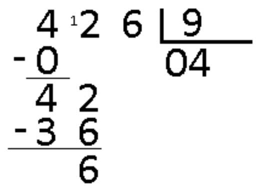
A forma em que armaremos a operação para resolvê-la será através das chaves. Colocaremos o dividendo, valor a ser dividido, e na sua frente, dentro das chaves, o divisor, valor pelo qual iremos dividir.

Utilizaremos a divisão entre 426 e 9. Temos aqui 426 como dividendo e 9 como divisor, o que nos fornecerá o seguinte formato para a operação.

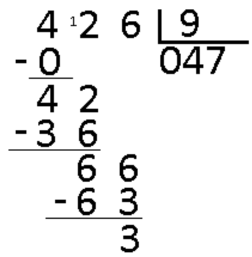
$$426 \; \underline{|9 \qquad}$$

Nesse momento, olharemos para o dividendo, da esquerda para a direita. Selecionaremos, primeiro, o 4 (4 centenas). Será que conseguiríamos dividir 4 centena entre 9? A resposta é não. Não teríamos uma centena para cada um dos nove, tendo eles recebido 0 centenas. Caberá aqui a multiplicação. Sabemos que 9 x 0 = 0, portanto cabem 0 partes iguais a 9 em 4. O número de partes iguais a 9 ficará embaixo das chaves, no quociente, e o produto deste número com 9 será posicionado embaixo do valor selecionado no dividendo, fazendo agora a subtração entre estes dois números, obtendo 4. Desceremos para junto das 4 centenas as 2 dezenas, ficando então 42 dezenas. Conseguiremos dividir 42 dezenas entre 9 de tal forma a garantir pelo ao menos 1 dezena para cada um? A resposta é sim e teremos que buscar auxílio na multiplicação.

Podemos perceber que 9 cabe em 42, restando descobrir quantas partes iguais a 9 cabe em 42 dezenas. sabemos que 9 x 5 = 45, o que dá além de 42, portanto será 9 x 4 = 36. Novamente colocaremos ao aluno que o valor a ser encontrado após a multiplicação deverá ser menor ou igual ao valor selecionado no dividendo. Obtido o valor de partes iguais a 9 que caberá em 42, o deixaremos embaixo das chaves, ao lado do zero já encontrado. Esse valor será multiplicado pelo divisor e o produto posicionado embaixo do número 42 abaixo do dividendo. Obteremos 4 para o quociente e 36 para colocarmos embaixo do 42, não esquecendo de posicioná-lo de acordo com a ordem. Agora é a hora da subtração. Subtrairemos 42 de 36 e verificaremos que 6 dezenas não foram divididas. Veja o esquema como está ficando.



Desceremos as 6 unidades do dividendo junto às 6 dezenas que restaram, tendo então 66 unidades (6 dezenas + 6 unidades). Conseguiremos dividir 66 unidades entre 9 de tal forma a garantir pelo menos 1 unidade para cada um? A resposta é sim. sabemos que 9 x 7 = 63, ou seja, em 66 cabem 7 partes iguais a 9. Novamente deixaremos o 7 no quociente e posicionaremos o 63 embaixo do 66 para subtrairmos. Obteremos aqui resto 3 (3 unidades), que não podem ser divididas entre 9. Como não há mais ordens no dividendo, o 3 será o nosso resto, ficando assim:

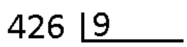


O que nos fornece 47 como quociente, pois zero à esquerda do número não possui valor, e 3 como resto. Isso significa dizer que em 426 cabem 47 partes iguais a 9, sobrando 3 que não podem ser repartidas por ser menor que 9.

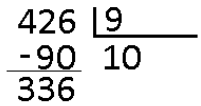
3.4.2 Algoritmo de divisões sucessivas

Também conhecido por método americano ou divisão por estimativa, ele irá trabalhar a capacidade de estimarmos os possíveis resultados para o quociente. Iremos desenvolvendo aos poucos a divisão e as respectivas explicações que se fazem pertinentes.

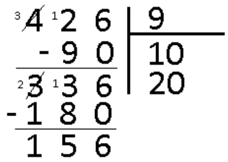
Suponhamos a divisão entre 426 e 9. Primeiramente armaremos a operação, então nos questionaremos quantas partes iguais a 9 caberá em 426, que na verdade é o fundamento da divisão.



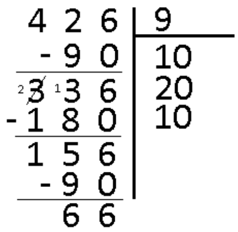
Como sabemos que trabalhar com múltiplos de 10 é mais conveniente, começaremos em verificar se 10 partes iguais a 9 cabem em 426. Teremos que 9 x 10 = 90, este produto será colocado embaixo de 426, para fazermos a subtração, como no método tradicional. Então teremos:



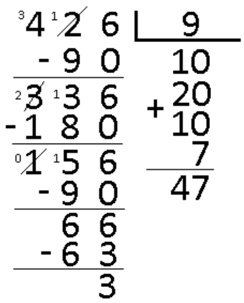
Notamos que cabem mais partes iguais a 9, todavia vimos que 10 partes pouco diminuiu o dividendo. Estimemos agora 20 partes. Teremos 20 x 9 =180, este produto novamente será colocado embaixo do que restou ao dividendo, ficando assim:



Ainda cabem mais partes iguais a 9, entretanto 20 partes já ultrapassarão o que temos como resto, faremos novamente 9 x 10 = 90, colocando embaixo de 156.



Continuaremos o processo, só que agora nos remetendo a tabuada do 9, onde temos que 9 x 7 = 63, o que ficará dessa forma:



Nesse estágio do processo da divisão, verificaremos que não cabe nenhuma parte igual a 9 no resto 3, ele é menor que 9, garantindo então que ele seja o resto da divisão. Adicionaremos os sucessivos quocientes para encontrarmos o que estávamos procurando, 426 : 9 = 47 e deixa resto 3, ou seja, não é uma divisão exata.

À medida que o aprendiz vai se familiarizando com o processo de divisão, ele poderá diminuir o número de divisões a serem feitas, podendo, por exemplo, na divisão acima estimar 40 partes iguais a 9 como primeira tentativa, fazendo portanto apenas duas divisões.

Percebemos que o conhecimento da multiplicação facilita todo o processo, tornando a divisão mais acessível.

3.4.3 Algoritmo de decomposição

A decomposição no sistema de numeração decimal consiste em quebrar um determinado número em partes que indicarão quantas unidades possue cada ordem. Geralmente, as partes que compõem a decomposição são múltiplos de 10, o que para a multiplicação é um facilitador. Partindo do princípio que a divisão é a operação oposta à multiplicação ela também se beneficiará.

O algoritmo de decomposição para a divisão pegará o dividendo e fará sua decomposição, garantindo partes menores e mais fáceis de serem divididas. Desse modo faremos a divisão de cada parte, individualmente, pelo divisor, guardando o que foi obtido. Posteriormente adicionaremos os quocientes encontrados em cada uma das divisões e teremos o quociente principal, resultado procurado antes da decomposição. Vejamos o exemplo anterior resolvido pelo método da decomposição.

$220 : 20 = (200 + 20) : 20$

$220 : 20 = (200 : 20) + (20 : 20)$

$220 : 20 = 10 + 1$

$220 : 20 = 11$

Nesse exemplo, as divisões realizadas em cada parte do número decomposto foram exatas, ou seja , não sobraram restos, contudo nem sempre isso acontecerá. Por vezes elas serão não exatas, e os restos encontrados também serão adicionados para resultar no resto principal. Tal resto também poderá ser um número maior ou igual ao divisor, necessitando de uma outra divisão . Veja o exemplo:

$4254 : 3 = (4000 + 200 + 50 + 4) : 3$

$4254 : 3 = (4000 : 3) + (200 : 3) + (50 : 3) + (4 : 3)$

$4254 : 3 = 1333 + 66 + 16 + 1$

$4254 : 3 = 1416$

Nesse resultado final adicionamos os quocientes encontrados pela divisão de cada parte pelo divisor 3. No entanto na 1ª divisão teve resto 1, na 2ª resto 2, na 3ª resto 2 e na 4ª resto 1 o que resulta num resto total 6 $(1 + 2 + 2 + 1)$, que é maior que o divisor. Então faremos a divisão dele pelo divisor 3 e obteremos outro quociente, 2, que deverá ser adicionado ao resultado final anterior, para enfim encontrarmos o quociente entre $4254 : 3 = 1416 + 2 = 1418$.

Percebemos que este algoritmo pode se tornar trabalhoso e cheio de detalhes, que para um aluno que possui dificuldades e desatenção poderá não ser eficaz, além de trabalhar, apesar que com números menores e mais exatos, com o algoritmo usual da divisão ou divisões sucessivas para encontrarmos os resultados anteriores.

Considerações Finais

O estudo das quatro operações elementares e a forma como operá-las deve ocupar um papel importante no ensino fundamental. Através deste conteúdo o aluno terá alicerce para construir seu conhecimento matemático. Nas séries iniciais, quando a criança começa a ter contato com a matemática, o professor poderá utilizar materiais lúdicos, como jogos, o material dourado e outros. Isso, fará com que a criança tenha uma idéia sobre cada operação e em qual momento usá-las. Posteriormente, aos poucos, o professor irá formalizando cada operação e apresentando técnicas para que o aluno consiga resolver cada uma delas com mais formalidade.

Os algoritmos, como são conhecidas estas técnicas, são vários, e cada um com sua facilidade/dificuldade específica. Neste sentido o educador deve escolher aquele que mais se enquadra à realidade da turma e apresentá-lo aos alunos, porém o professor poderá perceber que alguns deles não conseguem efetuar a operação através do algoritmo ensinado, necessitando outro para apresentar ao aluno. Tal situação também poderá ocorrer em séries mais avançadas do ensino fundamental, no momento em que se percebe que existem alunos, que mesmo estando em séries avançadas, devido a sua idade, carregaram consigo dificuldades em operar as quatro operações básicas, necessitando de reforço para continuar sua jornada ao conhecimento. Não podemos esquecer que cobrar dos alunos que eles memorizem um determinado algoritmo e o utilize mecanicamente não é a forma correta de se ensinar, de acordo com [7]. Como já citamos anteriormente até mesmo os próprios professores necessitarão de um reforço para poderem ensinar.

Os professores responsáveis pelo aprendizado no ensino fundamental, devem se despir de preconceitos e buscar, a todo momento, seja através da formação continuada ou de pesquisas, artifícios para ensinar melhor conteúdos tão importantes para a vida escolar das crianças, como é o caso das quatro operações básicas. Não é difícil encontrarmos educadores que não dominam o conteúdo matemático que irão ensinar.

Muitos dizem que a matemática sempre foi o seu pesadelo de infância, e agora estarão ensinando, ou transmitindo aquele medo de infância aos seus alunos. De repente essa busca contínua por aprender minimizaria tantas dificuldades e “traumas” matemáticos que muitos carregam ou virão a carregar. O medo da matemática nada mais é do que a falta de domínio com relação à disciplina em questão, pois matemática exige alicerce consolidado para haver a construção do conhecimento. Uma vez com dúvida em um determinado contéudo, todos os demais conteúdos que virão, ligados a este, se atropelarão pelas dificuldades, e o gosto pela matemática só tende a diminuir.

Nesse momento, nosso trabalho poderá ser um grande aliado. Pouco se tem reunido sobre algoritmos para as quatro operações elementares. A maioria do material é encontrada em artigos publicados, e mesmo assim não reunem, em sua grande maioria, as quatro operações, pelo que percebemos eles trabalham no máximo com duas operações. Procuramos reunir, em um só lugar, diferentes técnicas para cada operação, com uma linguagem acessível aos não matemáticos, porém não deixamos de lado as propriedades e suas demontrações que as quatro operações, dentro do conjunto dos números naturais exige, de forma que não atrapalhasse a compreensão daqueles que não tem o costume de acessar essas formalidades matemáticas.

Nesse contexto, não podemos desistir de buscar formas que proporcione a propagação do ensino da matemática de forma consolidada. Crianças e jovens matematicamente seguros conseguem ultrapassar as dificuldades que a vida lhe propõe de forma mais fácil. Preparar materiais que auxiliarão, tanto professores como alunos, nessa jornada, continuará sendo nosso objetivo.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. MEC., *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*, Secretaria de Educação Fundamental, Ministério da Educação, Brasília, 1997, Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>, acesso em 15 de fevereiro de 2016.

[2] DALTOÉ, Daren; STREBOU, Sueli. *Trabalhando com Material Dourado e Blocos Lógicos nas séries iniciais*, artigo, pp 1 e 2. Só Matemática, Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/artigos/a14/index.php> acesso em 25 de agosto de 2016.

[3] IMENES, Luiz Marcio; LELLIS, Marcelo. *Matemática Imenes & Lellis*, Editora Moderna, 2ª edição, São Paulo 2012.

[4] HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética*, Textos Universitários, SBM, Editora, Rio de Janeiro 2005.

[5] HEFEZ, Abramo. *Aritmética*,Coleção PROFMAT, SBM, 1ª Edição, Rio de Janeiro 2013.

[6] DANTE, Luiz Roberto. *Os Algoritmos e suas implicações educativas*, artigo, Revista de Ensino de Ciências nº 12, Março 1985, pp 29 à 34, Disponível em: <http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?> acesso 20 de março de 2016.

[7] LOUREIRO, Cristina. *Em defesa da utilização da calculadora: algoritmos com sentido numérico*, artigo, Educação e Matemática, nº 77, março/abril de 2004, ESE Lisboa, pp 22 à 29, Disponível em: <http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/Texto%20Calculadora.pdf> acesso 22 de março de 2016.

[8] FERNANDES, Diana R. G.; MARTINS, Fernando M. L.. *Reflexão acerca do ensino do algoritmo da divisão inteira: proposta didática*, artigo, Educação e Formação, Exedra Revista Científica, ESEC, nº 9 de 2014,pp 173 a 197, Disponível em: <http://www.exedrajournal.com/wp-content/uploads/2015/04/n9-C5.pdf> acesso em 05 de julho de 2016

[9] OLIVEIRA, Guilherme Saramargo de.. *História da matemática: algoritmos da multiplicação*, Artigo, Ensino em Revista, 8 (1): pp 173 à 183, jul 99 / jun 00, Disponível em: <www.seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/viewFile/7870/4975> acesso 18 de abril de 2016.