Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Da solubilidade por meio de radicais à métodos alternativos - Determinando as raízes polinomiais

Henrique Semensato Holgado

Catalão

2016

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Henrique Semensato Holgado

Título do trabalho: Da solubilidade por meio de radicais à métodos alternativos – Determinando as raízes polinomiais

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Henrique Semensato Holgado
Assinatura do (a) autor (a) [2]

Data: 22 / 09 / 2016

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

[2]A assinatura deve ser escaneada.

Henrique Semensato Holgado

Da solubilidade por meio de radicais à métodos alternativos - Determinando as raízes polinomiais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro

Catalão

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Semensato Holgado, Henrique
Da solubilidade por meio de radicais à métodos alternativos - Determinando as raízes polinomiais [manuscrito] / Henrique Semensato Holgado. - 2016.
XCIII, 93 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Catalão, 2016.
Bibliografia.
Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras.

1. Equações. 2. Solubilidade. 3. Polinômios . 4. Raízes. I. Roberto Rocha Ribeiro, Márcio, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás-UFG
Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática

UFG

PROFMAT

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Henrique Semensato Holgado. Aos vinte e cinco dias do mês de agosto do ano de dois mil e dezesseis, (25/08/2016), às 13h30min, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora, **Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro – Orientador, Prof. Dr. Glen Cézar Lemos e Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior** para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Laboratório de Controle Operacional, Bloco J, do Câmpus I da Regional Catalão, procederem a avaliação da defesa do trabalho intitulado: **"Da Solubilidade por Meios de Radicais à Métodos Alternativos – Determinando as Raízes Polinomiais"**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Henrique Semensato Holgado, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela Presidente da banca, Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em quarenta e três minutos, procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o trabalho de conclusão foi APROVADO por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 3h40min a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu Elizângela Maria Marques Nahas, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Glen Cézar Lemos
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias de Goiás – IFG

Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Henrique Semensato Holgado graduou-se em Matemática pela FAJESU - Faculdade Jesus Maria José - DF em 2006. Especializou-se em Educação Matemática pela FAJESU. Atualmente está professor da Rede Pública de Ensino do DF onde ministra matemática para o Ensino Fundamental II.

Dedicatória

À Deus.

Agradecimentos

Aos meus pais que sempre incentivaram e presenciaram minhas conquistas.

À minha adorável esposa pela compreensão.

Um agradecimento especial ao "Amado Mestre David Lima Nascimento" pela companhia nesta jornada.

Ao professor Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro pela orientação e incentivo.

À CAPES pelo suporte financeiro concedido, pois possibilitou a aquisição de excelentes materiais de pesquisa, cujo alguns fizeram parte deste trabalho.

E por fim, à turma do PROFMAT do ano de 2014 pela companhia e troca de experiências.

Resumo

O estudo da álgebra, dentro da educação básica, se tornou uma ferramenta extremamente importante para o discente neste segmento pois permite que inúmeros problemas podem ser solucionados através da criação de simples equações. Infelizmente, esta área da matemática não tem recebido a devida importância que a história nos revela e, portanto, sua compreensão não passa de uma simples "fórmula matemática". Assim, este trabalho contempla uma pequena parte da história da matemática dando o devido crédito aos colaboradores desta área expondo suas demonstrações geniais para encontrar, algebricamente, as raízes de uma equação de grau $n \leq 4$ por meio de operações com radicais e, além disso, outros métodos que também permitam encontrar as soluções das equações de uma maneira não algébrica.

Palavras-chave

Equações, solubilidade, polinômios, raízes.

Abstract

The study of algebra, within the basic education, has become a very important tool for the students in this segment because it allows many problems can be solved through the creation of simple equations. Unfortunately, this area of mathematics has not received the due importance to the story reveals to us and, therefore, their understanding is nothing more than a simple " mathematical formula ". Thus, this work covers a small part of the history of mathematics giving proper credit to employees this area exposing their genius to find statements, algebraically, the roots of an equation of degree $n \leq 4$ through operations with radicals and, in addition, other methods that also allow to find the solutions of the equations of a algebraic way.

Keywords

Equation, solubility, polynomials, roots.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Determinar as raízes de uma equação por meio de radicais, foi durante séculos, o objeto de maior interesse e estudo dentro da álgebra até a geração de Abel e Galois. Até a época destes dois gênios, os esforços matemáticos eram o de encontrar uma "fórmula" que determinasse as soluções da equação utilizando apenas as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação. Durante anos, este pensamento regeu todo o estudo da álgebra, quanto à determinação das raízes.

Assim, as equações do 2º ao 4º grau, com *Bháskara*, *Cardano* e *Ferrari*, tiveram seus métodos gerais descobertos e publicados, o que não ocorreu com as equações de grau $n \geq 5$. Neste ponto, a resolução das equações do 5º grau, por meio de radicais, tornaria o grande desafio da época. Abel foi o primeiro a tentar desvendar este mistério. Houve um momento em que ele acreditou ter encontrado o mecanismo procurado mas percebeu que havia um erro em seus estudos e a partir deste momento aceitou a ideia de que as equações quínticas não poderiam ser resolvidas por meio de radicais. Galois surge e revoluciona a álgebra ao responder este enigma. Galois se torna o precursor da Álgebra Moderna criando novos conceitos e mostrando a todos uma nova perspectiva da álgebra e sobre a solubilidade das equações por meio de radicais.

Durante a evolução da álgebra, alguns matemáticos merecem reconhecimento por suas contribuições. Bombelli teve sua grande participação na álgebra partindo das equações de 3º grau no livro ***L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica***. Observando a resolução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, pelo método de Cardano, teríamos os resultados $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Este modelo de raiz quadrada de um valor negativo, até este momento "estranha", é responsável pela criação de um novo conjunto chamado de Teoria dos números complexos. Este conjunto de números com infindáveis aplicações práticas, como por exemplo na eletrônica, foi fundamental para a evolução da álgebra.

Crédito também deve ser dado para outros dois colaboradores. Hiparco de Alexandria criador da trigonometria e Abraham de Moivre que conseguiu vincular números complexos e trigonometria. A contribuição de Moivre permitiu, enfim, concatenar o grau da equação com a quantidade de raízes, relação esta que Cardano em sua publicação sobre as cúbicas não conseguiu justificar.

Assim, resgatar a história da matemática como foco de aprendizagem mostrando seus colaboradores e suas genialidades quanto a resolução de uma equação é o que motiva este trabalho.

2 Resultados Preliminares

3.2.1.1 Fórmula de Moivre[1]

[•] $\sqrt[n]{z} = z_j = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2j\Pi}{n}) + isen(\frac{\theta}{n} + \frac{2j\Pi}{n})\right]$, onde $j \in \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$

3.2.1.1 Simetria das funções trigonométricas[2]

[•] $cos\left(-\frac{\theta}{3}\right) = cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$

[•] $sen\left(-\frac{\theta}{3}\right) = -sen\left(\frac{\theta}{3}\right)$

[•] $cos\left(-\frac{\theta}{3} + \frac{2\Pi}{3}\right) = cos\left(-\frac{\theta}{3} - \frac{4\Pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\Pi}{3}\right)$

[•] $sen\left(-\frac{\theta}{3} + \frac{2\Pi}{3}\right) = sen\left(-\frac{\theta}{3} - \frac{4\Pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\Pi}{3}\right)$

[•] $cos\left(-\frac{\theta}{3} + \frac{4\Pi}{3}\right) = cos\left(-\frac{\theta}{3} - \frac{2\Pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\Pi}{3}\right)$

[•] $sen\left(-\frac{\theta}{3} + \frac{4\Pi}{3}\right) = sen\left(-\frac{\theta}{3} - \frac{2\Pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\Pi}{3}\right)$

3.2.1.1 Soma/subtração de arcos[3]

[•] $cos\,(a \pm b) = cos\,(a)\,cos\,(b) \mp sen\,(a)\,sen\,(b)$[8]

[•] $sen\,(a \pm b) = sen\,(a)\,cos\,(b) \pm sen\,(b)\,cos\,(a)$[9]

3.3 Teorema de Bolzano[4]

Teorema 1. *Seja f:*$[a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se f(a)* $\cdot$ *f(b)* ≤ 0*, então existe* $c \in (a, b)$ *tal que f(c)* $= 0$.

3.1.2 Teorema das cordas e potência de ponto[5]

Teorema 2. *Se A, B, C e P são pontos distintos no plano, com* $B \in \overline{AP}$ *e* $C \notin \overleftrightarrow{AB}$*, então* $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$ *se, e só se, o círculo que passa pelos pontos A, B e C for tangente à reta* $\overleftrightarrow{PC}$ *em C.*

3.1.2 Distância entre pontos[6]

[•] $d\left(A,B\right)=\sqrt{\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2}$

3 As Equações Algébricas

Constará neste tópico, breves narrativas sobre as contribuições de grandes matemáticos no avanço da álgebra juntamente com as demonstrações de seus métodos para a determinação das raízes de uma equação, de grau $n \leq 4$, por meio de radicais.

3.1 As Equações do 1º e 2º graus

Neste sub-tópico consta uma breve história da evolução da álgebra e sua estrutura, juntamente com as contribuições de Tales de Mileto e Euclides desde a resolução da equação do 1º grau até a resolução da equação do 2º grau fornecida pelos hindus.

Cotidianamente passamos por inúmeras situações que requerem nossa capacidade matemática para solucioná-las. Indo ao mercado, usando financiamentos, se orientando pelo tempo (horas, dias, meses, anos), a maioria das coisas que fazemos ou usamos, necessitam, de alguma forma, do conhecimento matemático. Veja esta situação hipotética: "Imagine que você vá ao posto de gasolina para abastecer o veículo. Chegando lá, nota que o preço do combustível por litro é de R$ $3,64$ reais e que você possui R$ $80,00$ reais. Quantos litros, aproximadamente, será colocado no tanque do veículo?" Perceba que a situação descrita não exige a construção de um modelo matemático para determinar a quantidade de litros que seria colocado no tanque, bastaria uma divisão simples (conhecimento matemático) de 80 por 3,64 para se determinar esta quantidade porém, não seria tão complexo criar um modelo que solucionasse o problema! Note a equação $l \cdot 3,64 = 80$, onde "l" é a quantidade de litros que o tanque receberá, também determina a quantidade de litros que será colocado no tanque. Assim, de situações simples como a citada anteriormente, a álgebra foi se modernizando e as equações acabaram por tornar-se importantes ferramentas na resolução de problemas.

No Antigo Egito, para resolver problemas matemáticos, os egípcios usavam uma técnica chamada *"Regra da Falsa Posição"*. Esta técnica consistia em determinar a resposta através de outro resultado obtido, buscando uma conexão entre eles. Veja o exemplo: *Qual número somado com sua quinta parte resulta em 6?*.

Escolhendo aleatoriamente um número, por exemplo 10 e somado com sua quinta parte, 2, obtemos o resultado 12. Comparando os resultados obtidos, verificava-se que a resposta encontrada 12 é o dobro da resposta sugerida pelo problema. Basta então dividir o resultado do número aleatoriamente escolhido por 2, obtendo o resultado 5, encontrando a solução do problema.

Para problemas mais simples, a técnica era satisfatória, porém, a técnica não se mostrava tão eficiente em problemas mais complexos. Observe o fragmento a seguir: "Uma quantidade, somada a seus $\frac{2}{3}$, mais sua metade e mais a sua sétima parte perfaz 33. Qual é essa quantidade?" (GARBI, 2007, p. 12). Este problema surgiu em 1650 a.C em um dos mais famosos trabalhos egípcios chamado *Papiro de Ahmes* (*ou de Rhind*). Note que para aplicarmos o método egípcio neste problema, não seria tão simples assim. Perceba que a quantidade inicialmente escolhida deve ser múltipla de 3 (por conta dos $\frac{2}{3}$), deve múltipla de 2 (por conta da metade) e múltipla de 7 (por conta da sétima parte). Assim, após esta análise inicial do problema, poderíamos escolher, por exemplo, o número 42. Logo, teríamos a seguinte expressão $42 + 28 + 21 + 6 = 97$. Note que a resolução do problema através da técnica egípcia não se torna tão simples pois, entre os números 33 e 97 não há uma proporcionalidade inteira entre eles, logo, a conclusão se torna um pouco complexa sobre a real solução do problema. Por sorte, a Babilônia não só dominava a aritmética como também já possuía conhecimento de álgebra avançada, fato este que tornava a Babilônia como o celeiro da mais sofisticada matemática existente na época.

Nesta época as disputas territoriais acentuavam-se e as trocas de conhecimento entre as culturas era constante. Com isso, uma relação que evoluiu e foi marcante para a matemática foi a do comércio. O Mundo grego que chegara às terras Babilônicas, admirava-se ao ver tanta tecnologia empregada por aquela sociedade. Casas, ferramentas, escritos, tudo que alcançava os olhos era surpreendente. Então, eis que surge o primeiro grande matemático grego. Um comerciante que adorava Astronomia, Filosofia e Matemática. Tales de Mileto (640 a.C - 564 a.C), despende seu tempo descobrindo o Egito e a Babilônia e se encanta pelo magnífico acervo que encontra. Quando retorna à Grécia, Tales revoluciona a matemática com uma frase que sacode os estudiosos, " *Suas verdades devem ser justificadas, demonstradas, provadas por meio do raciocínio*". Com isto, as demonstrações dos teoremas começam a surgir, iniciando aqui uma formalização matemática surpreendente. Tales produz muitos trabalhos com este novo e revolucionário pensamento, dentre elas: *ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, feixes de retas paralelas cortadas por transversais produzem segmentos proporcionais, etc.* Anos depois surge outro matemático, provavelmente pupilo de Tales, na Escola de Mileto chamado Pitágoras(586 a.C - 500 a.C). Nascido em Samos, viveu boa parte de sua vida em Crotona. Ele demonstrou um dos teoremas mais famosos já publicados em obras matemáticas, a dos triângulos retângulos, uma relação interessante entre a hipotenusa e seus catetos. Vale ressaltar, que os babilônicos e os chineses já conheciam tal relação, porém, foi Pitágoras que apresentou a relação na seguinte forma $a^2 = b^2 + c^2$, onde $\boldsymbol{a}$ representa a hipotenusa e $\boldsymbol{b,c}$ representam os catetos do triângulo retângulo.

Nesta época, o Império Persa que dominava a Ásia, travava constantes batalhas com os Europeus e que mais sofria com estes ataques era a Grécia. Depois de um período longo de apenas sobrevivência, entre em 490 a.C e 480 a.C, os gregos alcançaram vitórias memoráveis contra os Persas. Essas vitórias fizeram com que os estudos avançassem tanto em geometria quanto em álgebra. Surgiram então grandes matemáticos que ajudaram a Grécia a evoluir cientificamente, o mais importante, *Platão* (427 a.C 347 a.C) que, depois de Atenas quase sucumbir à guerra do Peloponeso (432 a.C - 404 a.C), faz com que a Grécia ressurja gloriosamente no âmbito cultural.

Em 338 a.C, a Grécia vê um Macedônio governar a maior parte de seu território. Mas em 336 a.C, com apenas 20 anos, surge o rei Alexandre que em uma grande jornada, recupera o território grego e faz com que seu império ganhe terras até o norte da Índia. Ao conquistar o Egito, Alexandre funda às margens do Rio Nilo, a cidade de Alexandria, que posteriormente assumiria uma papel importante como centro de pesquisa. Com a morte de Alexandre, seu império fica dividido e cabe à seu amigo *Ptolomeu I* comandar o Egito.

Em Alexandria, Ptolomeu I funda a *Universidade de Alexandria*, constituída de um enorme museu e uma biblioteca monumental onde guardou todos os trabalhos produzidos no mundo grego. Graças a esta atitude de Ptolomeu, os escritos produzidos pelos Egípcios puderam ser guardados e conservados, para que posteriormente, promovesse outro grande matemático a este incrível cenário. Eis que surge um gênio que se dedica a organizar todos os trabalhos matemáticos que se encontrava em Alexandria. Uma lenda chamada Euclides.

Euclides, ao considerar que a célebre frase de Tales de Mileto era verdadeira porém incompleta, assim acrescenta: "*Nem todas as verdades podem ser provadas; algumas delas, as mais elementares, devem ser admitidas sem demonstração*". Euclides produz um fantástico material chamado *Os Elementos*. Livro este que reúne uma coleção de axioma, teoremas, construções e provas matemáticas. Deste riquíssimo material, citaremos 5 axiomas que são de extrema importância para o trabalho. Estes axiomas são conhecidos como "Os 5 Postulados de Euclides". São eles:

1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.
3. Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais.
4. Coisas coincidentes são iguais entre si.
5. O todo é maior do que a parte. (GARBI,2007,p. 19)

Graças à estes postulados, tornou-se possível encontrar a solução $x = -\frac{b}{a}$ para a equação do 1º grau na forma $ax + b = 0$. Esta demonstração é bastante trivial para merecer um destaque. As contribuições gregas não cessaram aí, depois de Euclides, Alexandria recebeu um rico e célebre grupo de matemáticos como *Aristarco*(310 a.C - 230 a.C), *Arquimedes*(287a.C - 212 a.C), *Apolônio*(262 a.C - 190 a.C) e *Hiparco*(180 a.C - 125 a.C) com contribuições em secções cônicas e a invenção da *Trigonometria*. Esta última contribuição, será extremamente útil na descoberta das raízes da equação de 3º grau.

Em 31 a.C, Alexandria passa por um período de improdutividade e somente séculos mais tarde algumas notáveis figuras dão, novamente, vida à Grécia. Uma das mais expressivas foi *Hipácia*(370 d.C - 415 d.C), com contribuições sobre a "Álgebra de Diofanto ", a "Geometria de Euclides " e no estudo das cônicas. Infelizmente, ao ser assassinada, coloca um ponto final na maravilhosa caminhada grega, estagnando a evolução tão acentuada que a matemática adquirira. Anos mais tarde, em 476 d.C, quando Roma é conquistada pelos Godos, a Europa como um todo sucumbe numa profunda infertilidade científica que somente séculos mais tarde ressurgiria. Neste período, os árabes e os hindus revolucionam todo o conhecimento existente fazendo com que a matemática atinja patamares antes inimagináveis.

A matemática ainda era uma ciência em expansão. Filósofos da época se empenhavam em aprendê-la e aperfeiçoá-la para que fosse utilizada na solução de inúmeros problemas que as civilizações possuíam. O trecho a seguir retrata uma situação muito intrigante da época, observe:

> No código judaico de lei civil e canônica - o Tamulde - encontramos a narrativa de um príncipe a quem tinha sido imposta uma imensa multa. Ele tinha de encher um celeiro de 40 por 40 de trigo. O homem aflito foi até o rabino Huna (c. 212 - 97d.C), chefe da Academia de Sura na Babilônia, em busca de um conselho. O Sábio lhe disse: "Convença-os a receber de você [duas prestações]: agora uma superfície de 20 por 20 e depois de algum tempo outra prestação de 20 por 20 e você lucrará a metade ". (LIVIO, 2008, p. 72)

Este problema mostra um erro comum quando relacionamos perímetro e área. Estudos mostram que muitos Sábios da época usavam dessa "esperteza" para dividir as terras de maneira injusta fazendo com que as pessoas acreditassem que lotes de maior perímetro possuíam maiores áreas. Porém, deve-se "crédito" à esta injustiça, pois coube aos pensadores babilônicos uma árdua tarefa de tentar proteger seu povo destes enganadores. Atente ao seguinte problema: "Subtraí o lado da área de um quadrado. 870."(LIVIO, 2008, p. 73) Transpondo esta linguagem complexa para os dias atuais, teríamos a seguinte equação quadrática $x^2 - x = 870$. Note que este é um problema da Era Babilônica onde já se manifestavam as formas quadráticas das equações. Outro problema que também resulta numa equação quadrática e os babilônicos já conheciam e resolviam é: "O perímetro da área retangular é 100 e sua área é 624. Quais as medidas do terreno?" Presentemente, poderíamos criar um sistema de equações como:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ xy = 624 \end{cases}$$

Assim, é notório que a civilização Babilônica era uma cultura avançada comparada às outras civilizações, contudo a falta de formalismo tornou-se um grande óbice para os registros babilônicos, diferentemente do que ocorreu com os hindus e os árabes, que agora assumem o papel fundamental nesta etapa.

Alastrando-se pela Europa, os hindus e os árabes se tornam uma civilização temerosa. O Califa *Omar*, determina que todos os manuscritos que pertenciam à biblioteca de Alexandria, fossem destruídos, pois iam contra as crenças árabes. Viu-se por séculos, materiais belíssimos ardendo em chamas por princípios religiosos. Neste momento, os árabes se mostravam ao mundo como uma civilização extremamente egoísta e que poderia conduzir o mundo à obscuridade intelectual. Mas não foi exatamente o que aconteceu. O califa *al Mansur* em seu reinado, decide criar em Bagdá uma nova Alexandria e, da mesma forma que ocorreu em Alexandria, repete-se em Bagdá. Inúmeros estudiosos de várias culturas se propõem a participar deste ressurgimento científico. O fato mais importante da época talvez seja a apresentação do sistema indiano de numeração apresentado pelos hindus, que é imediatamente inserido na cultura árabe. Em meio há tantos cientistas, surge *Abu-Abdullah-Muhamed ibn-Musa al-Kwarizmi*(783 - 850 d.C.). Seus conhecimentos matemáticos e astronômicos o faz escrever sua grande obra chamada *Al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalah* que pode ser traduzido como *"O Livro da Restauração e do Balanceamento"*. Princípios estes que foram apresentados por

Euclides séculos atrás. Neste primeiro milênio da Era Cristã, alguns ilustres gênios mostram-se à Índia, dentre eles *Varahamihira*(505 d.C.), *Brahmagupta*(630 d.C.) e o mais relevante *Bhaskara*(1.114 - 1.185 d.C.), que tem seu nome ligado à fórmula geral das equações do segundo grau. Por curiosidade, a famosa "Fórmula de Bhaskara" não foi descoberta por ele e sim por outro matemático hindu chamado *Sridhara*(991 - d.C.?) um século antes. Infelizmente esta obra, assim como muitas outras não chegaram até nós. A ideia que fomentou a curiosidade para se determinar uma fórmula que encontrasse as raízes da equação do 2º grau era a de conseguir reduzir para uma do 1º grau através da extração de raízes quadradas. Esta demonstração terá uma seção destinada à ela devida a elegância e riqueza de detalhes em cada passo.
Portanto, para encontrar a solução dos problemas na forma

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

as raízes seriam dadas por

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

e

$$y = \frac{s \mp \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

onde s e p representam respectivamente a soma e o produto dos números reais x e y.

3.1.1 Resolução da equação quadrática - 2º grau

Nesta seção será demonstrada a resolução da equação quadrática por meio de radicais e exemplos.

Seja a equação do 2º grau na variável x em sua forma canônica

$$ax^2 + bx + c = 0$$

com a, b, c números reais quaisquer e $a \neq 0$.

Adicionando o termo $-c$ em ambos os lados da equação, obtemos

$$ax^2 + bx = -c$$

Como $a \neq 0$, podemos dividir toda a equação por a tornando-a

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Note que neste ponto, deseja-se obter um quadrado perfeito para que posteriormente haja a possibilidade de extrair a raiz quadrada. Adicionemos o termo $\frac{b^2}{4a^2}$ em ambos os lados da equação. Assim:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

Note que o primeiro membro é um termo quadrático, o que possibilita a extração da raiz quadrada. Extraindo a raiz quadrada nos dois membros da equação, temos

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Vale lembrar que $\sqrt{x^2} = |x| = \pm x$. Assim

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Neste ponto, os Babilônicos foram quase perfeitos, pois quando é extraída a raiz quadrada há de se considerar tanto o valor positivo quanto o negativo. Eles não se atentaram à este pequeno detalhe, diferentemente do que ocorreu na resolução hindu apresentada por *Brahmagupta*(598 - 670 d.C). Ele considerava "fortuna" como sendo o valor positivo e "débito" como o negativo, fazendo referência à movimentação financeira comercial.

Isolando x no primeiro membro, chegamos a solução da equação do 2^o grau que será

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para todo x real.

Para estudos futuros usaremos o termo *DISCRIMINANTE* para a expressão $b^2 - 4ac$.

Observe os exemplos:

3.1.1.1 $x^2 + 2x - 7 = 0$ (Resolução Completa)

Adicionamos 8 em cada membro da equação, logo

$$x^2 + 2x - 7 + 8 = 0 + 8$$

$$x^2 + 2x + 1 = 8$$

$$(x + 1)^2 = 8$$

Note que o primeiro é um termo quadrático, possibilitando a extração da raiz quadrada. Assim:

$$x + 1 = \pm\sqrt{8}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{8}$$

Portanto, as soluções são

$$x_1 = -1 + 2\sqrt{2}$$

e

$$x_2 = -1 - 2\sqrt{2}$$

3.1.1.2 $3x^2 - 28x + 32 = 0$ (Aplicação direta da fórmula de Bháskara)

Temos que $a = 3$, $b = -28$, $c = 32$

Aplicando a fórmula de Bháskara temos

$$x = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4(3)(32)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 384}}{6}$$

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{400}}{6}$$

$$x = \frac{28 \pm 20}{6}$$

Concluímos que as soluções procuradas são

$$x_1 = \frac{28 - 20}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

e

$$x_2 = \frac{28 + 20}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

3.1.2 Resolução Geométrica da equação do 2º grau

Nesta seção mostraremos como determinar a solução de uma equação do 2º grau por construção geométrica.

Sabe-se que a resolução algébrica feita por Bháskara não é o único mecanismo que pode ser usado para se determinar as raízes de uma equação do 2º grau. Observe através da construção, com régua e compasso, como encontrar a solução geometricamente.

Tome a equação $x^2 + bx + c = 0$, onde b e c representam, respectivamente, a soma e o produto das raízes x_1 e x_2 da equação. Admita $c \neq 0$, caso contrário, as soluções da equação seriam 0 (zero) e $-b$. Logo, analisaremos $c > 0$ e $c < 0$.

1º caso: $c > 0$ Quando $c > 0$ as raízes x_1 e x_2 da equação tem o mesmo sinal e portanto, basta que encontrar dois segmentos de reta que satisfaça

$$\begin{cases} |x_1| + |x_2| = |b| \\ |x_1| \cdot |x_2| = c \end{cases}$$

Observe passo a passo a construção a seguir:

(1) Trace uma reta suporte r e sobre ela marque os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{NO}$, $\overline{OP}$ de comprimentos c, 1, $|b|$, respectivamente.

(2) Determine o ponto médio E do segmento $\overline{MO}$ e trace uma semicircunferência de centro em E e raio $\overline{EM}$.

(3) Determine o ponto médio I do segmento $\overline{OP}$ e trace uma semicircunferência de centro em I e raio $\overline{IO}$.

(4) Por N, trace uma reta s perpendicular a r, determinando o ponto Q na interseção da reta s com a semicircunferência de raio $\overline{EM}$.

(5) Por Q, trace uma reta t paralela a r, determinando o ponto U na interseção da reta t com a semicircunferência de raio $\overline{IO}$.

(6) Por U, trace uma reta v paralela a s, determinando o ponto G na interseção da reta v com a reta r.

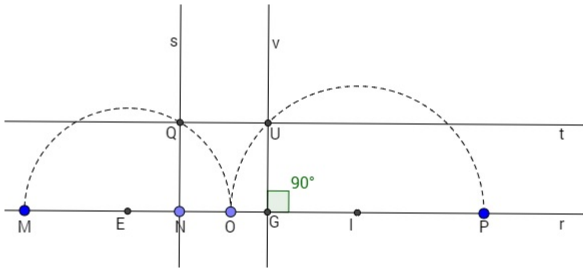


Figura 1: Construção completa do caso 1

Note que o triângulo $M\hat{Q}O$ é retângulo em Q, com $\overline{QN}$ sendo a altura relativa à hipotenusa e os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NO}$ como projeções. Assim, aplicando a relação métrica $h^2 = m \cdot n$ temos

$$\overline{NQ}^2 = \overline{MN} \cdot \overline{NO} = c \cdot 1 = c$$

Perceba que o triângulo $O\hat{U}P$ é retângulo em U, com $\overline{UG}$ sendo a altura relativa à hipotenusa e os segmentos $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ como projeções. Assim, aplicando a relação métrica $h^2 = m \cdot n$ temos

$$\overline{GU}^2 = \overline{OG} \cdot \overline{GP}$$

Como

$$\overline{NQ} = \overline{GU} \quad \Rightarrow \quad \overline{NQ}^2 = \overline{GU}^2 \quad \Rightarrow \quad c = \overline{OG} \cdot \overline{GP}$$

Note que os segmentos de reta $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ satisfazem o sistema de equações citado anteriormente pois

$$\overline{OG} \cdot \overline{GP} = c$$

$$\overline{OG} + \overline{GP} = |b|$$

Portanto, as raízes x_1 e x_2 procuradas serão os segmentos $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$.

Para sabermos quais os sinais das raízes x_1 e x_2 basta analisarmos o sinal de b, assim:

Se $b < 0$ então $x_1 = \overline{OG}$ e $x_2 = \overline{GP}$.
Se $b > 0$ então $x_1 = -\overline{OG}$ e $x_2 = -\overline{GP}$.

Observação Importante:

Faremos um pequeno adendo neste ponto para explicarmos o caso em que a reta t não intersecta a semicircunferência de raio $\overline{IO}$.

(1) Demonstração.

Queremos mostrar que se $\overline{NQ} > \overline{IU}$ então não há raízes reais.

Como sabemos, o discriminante de uma equação do 2º grau é quem determina se há ou não raízes reais. Para que isso ocorra, o discriminante (chamaremos de D) deve ser maior ou igual a zero, caso contrário, não teremos raízes reais. Assim, partindo da equação

$$x^2 + bx + c = 0$$

onde $a = 1$, $b = b$ e $c = c$ temos o seguinte discriminante

$$D = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot c$$

Para raízes reais é necessário e suficiente obtermos $D \geq 0$, logo

$$b^2 - 4 \cdot 1 \cdot c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 \geq 4c \quad \Rightarrow \quad b \geq 2\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{2} \geq \sqrt{c}$$

Portanto, para que não haja raízes reais basta que

$$\frac{b}{2} < \sqrt{c}$$

Lembrando que $\sqrt{c} = \overline{NQ}$ e $\frac{b}{2} = \overline{IU}$ temos que

$$\overline{IU} < \overline{NQ}$$

Concluindo assim a demonstração.

(2) Se $b = 0$ e $c > 0$ então não será possível determinar as raízes da equação por meio da construção pois teremos raízes complexas na forma $x = \pm\sqrt{-c}$.

(2º caso:) $c < 0$

Quando $c < 0$ as raízes x_1 e x_2 da equação tem sinais opostos e portanto basta que

$$\begin{cases} |x_1| - |x_2| = |b| \\ |x_1| \cdot |x_2| = |c| \end{cases}$$

Observe passo a passo a construção a seguir:

(1) Trace uma reta suporte r e sobre ela marque os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{NO}$, $\overline{OP}$ de comprimentos $|c|$, 1, $|b|$, respectivamente.

(2) Determine o ponto médio E do segmento $\overline{MO}$ e trace uma semicircunferência de raio $\overline{EM}$.

(3) Determine o ponto médio I do segmento $\overline{OP}$ e trace uma circunferência de raio $\overline{IO}$

(4) Transladamos o segmento $\overline{NQ}$, perpendicular à reta r, para o ponto O determinando o segmento $\overline{OU}$.

(5) Por fim, trace uma reta s que passe pelos pontos U e I determinando na circunferência os pontos G e H.

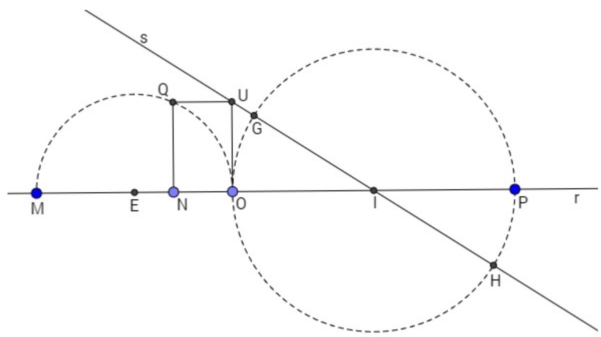


Figura 2: Construção completa do caso 2

Utilizando o teorema das cordas[5] nos segmentos $\overline{OU}$ e $\overline{UH}$ temos que

$$\overline{OU}^2 = \overline{UG} \cdot \overline{UH}$$

Como $\overline{NQ}^2 = c$ (demonstração feita no tópico anterior) e $\overline{NQ} = \overline{OU}$ obtemos

$$\overline{OU}^2 = \overline{NQ}^2 = |c|$$

Portanto temos que

$$|c| = \overline{UG} \cdot \overline{UH}$$

Note também que

$$\overline{UH} - \overline{UG} = |b|$$

Note que os segmentos de reta $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ satisfazem o sistema de equações citado anteriormente pois

$$\overline{UH} - \overline{UG} = |b|$$
$$\overline{UG} \cdot \overline{UH} = |c|$$

Concluímos que as raízes serão os segmentos $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$. Assim, para sabermos quais serão sinais das raízes x_1 e x_2 basta analisarmos o sinal de b, assim:

Se $b < 0$ então $x_1 = \overline{UH}$ e $x_2 = -\overline{UG}$
Se $b > 0$ então $x_1 = -\overline{UH}$ e $x_2 = \overline{UG}$

Observação Importante: Neste caso sempre haverá solução! No caso degenerado de $b = 0$ teremos que os pontos I, O, G, H serão coincidentes como mostra a figura

Assim, o sistema de equações que teremos será

$$\begin{cases} |x_1| - |x_2| = 0 \\ |x_1| \cdot |x_2| = |c| \end{cases}$$

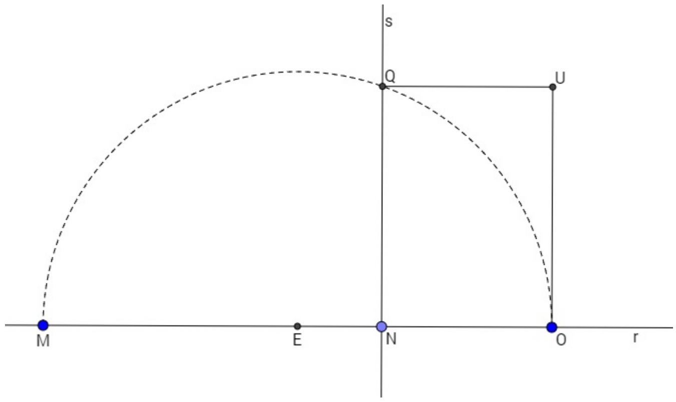


Figura 3: Construção no caso $b = 0$

Como $\overline{NQ}^2 = |c|$ e $\overline{NQ} = \overline{OU}$, logo

$$\overline{OU}^2 = |c|$$

Portanto, o segmento $\overline{OU}$ satisfaz o sistema citado anteriormente pois

$$\overline{OU} - \overline{OU} = 0$$

$$\overline{OU} \cdot \overline{OU} = |c|$$

Assim, teremos $x_1 = \overline{OU}$ e $x_2 = -\overline{OU}$.

No próximo tópico, mostraremos como é possível resolver uma equação do segundo grau utilizando o plano cartesiano.

3.1.3 Resolução da equação do 2º grau - Método de Carlyle

Neste tópico mostraremos o método de Thomas Carlyle para encontrar as raízes de uma equação do 2º grau.

O método de Thomas Carlyle (1795-1881) consiste em aplicar a construção geométrica no plano cartesiano. Para as equações de 2º grau na forma $x^2 + bx + c = 0$, onde b e c são coeficientes reais, é possível, encontrar uma solução geométrica no plano cartesiano. Observe a construção a seguir:

1. Num plano cartesiano XOY marque dois pontos $A(0, 1)$ e $B(-b, c)$.

2. Marque o ponto C no segmento $\overline{AB}$ de coordenadas $C(-\frac{b}{2}, \frac{c+1}{2})$, sendo C o ponto médio deste segmento.

3. Construa uma circunferência de centro C e raio $\overline{AC}$.

Como sabemos, a equação do 2º grau pode admitir duas raízes reais distintas, uma raiz dupla ou duas raízes complexas. Mas como isso se dá nesta construção? Para compreender melhor, faremos a demonstração do método de Thomas Carlyle e posteriormente mostraremos as construções que representam cada caso.

Demonstração

Sabe-se que para que uma equação do 2º grau possuir raízes reais basta que o Discriminante seja maior ou igual a zero ($D \geq 0$). Portanto, seja a equação do 2º grau na forma

$$x^2 + bx + c = 0$$

com $a = 1$, $b = b$ e $c = c$.

Como $D = b^2 - 4c$ e temos que $D \geq 0$, logo, queremos que

$$b^2 - 4c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 \geq 4c \quad \Rightarrow \quad b \geq 2\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{2} \geq \sqrt{c}$$

Assim, queremos provar que se $\frac{b}{2} \geq \sqrt{c}$ então a equação de 2º grau terá raízes reais. Para isso, tome o ponto $A\,(0,1)$ e o ponto $C\left(-\frac{b}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$ e um ponto $E\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$.

Como C é ponto médio do segmento $\overline{AB}$, então $\overline{AC}$ é raio da circunferência de centro C, logo $d\,(A,C) = r$.

Determinaremos a *distância entre os pontos*[6] A e C, assim

$$d\,(A,C)^2 = \left(-\frac{b}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2} - 1\right)^2$$
$$d\,(A,C)^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2 - 2c + 1}{4}$$
$$d\,(A,C) = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2 - 2c + 1}{4}}$$

Agora, determinaremos a *distância entre os pontos*[6] C e E, assim

$$d\,(C,E) = \frac{c+1}{2}$$

Suponha que $d\,(A,C) = d\,(C,E)$ então temos que $d\,(C,E) = r$. Logo

$$d\,(A, C) = d\,(C, E)$$

$$\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2 - 2c + 1}{4}} = \frac{c+1}{2}$$

$$\frac{b^2}{4} + \frac{c^2 - 2c + 1}{4} = \left(\frac{c+1}{2}\right)^2$$

$$\frac{b^2}{4} + \frac{c^2 - 2c + 1}{4} = \frac{c^{2-2c+1}}{4}$$

$$\frac{b^2}{4} = \frac{4c}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2}{4} = c \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{2} = \sqrt{c}$$

Concluímos que se $d\left(\overline{AC}\right) = d\left(\overline{CE}\right)$, então a circunferência será tangente ao eixo x determinando uma única raiz real.

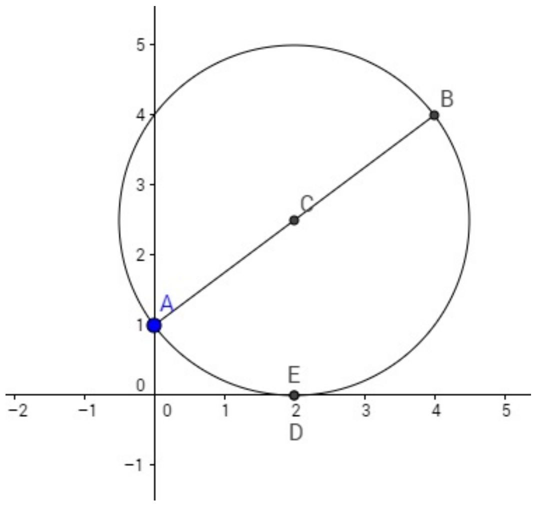


Figura 4: Circunferência Tangente ao eixo x

Se $d\left(\overline{AC}\right) > d\left(\overline{CE}\right)$, então a circunferência será secante ao eixo x determinando duas raízes reais.

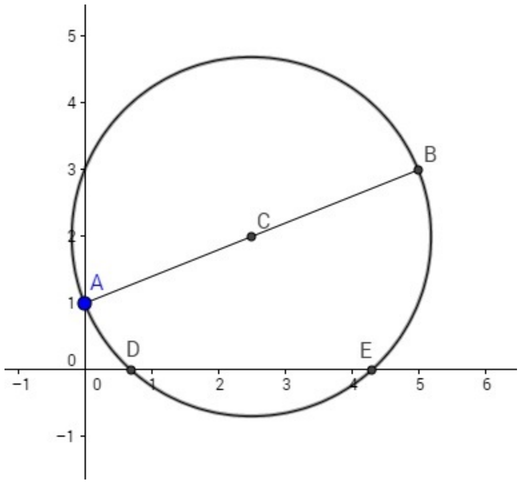


Figura 5: Circunferência Secante ao eixo x

Se $d\left(\overline{AC}\right) < d\left(\overline{CE}\right)$, então a circunferência não corta o eixo x e portanto não terá raízes reais.

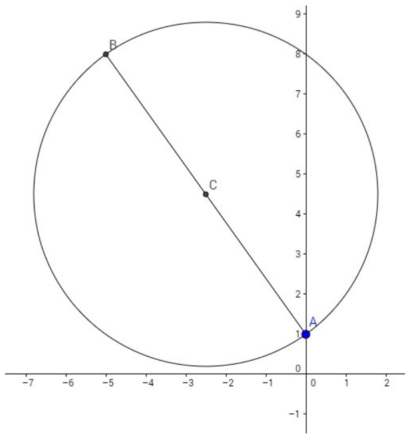


Figura 6: Circunferência e eixo x sem ponto de interseção

Observação: Caso a equação do 2º grau esteja na forma $ax^2 + bx + c = 0$, basta dividir toda a equação por a e encontrar outra na forma $x^2 + b'x + c' = 0$, onde $b' = \frac{b}{a}$ e $c' = \frac{c}{a}$.

Para melhor compreensão do método, observe o exemplo a seguir:

3.1.3.1 Tome a equação $x^2 + 5x + 6 = 0$ com $b = 5$ e $c = 6$.

(1) Marcamos os pontos $A(0, 1)$ e $B(-5, 6)$.

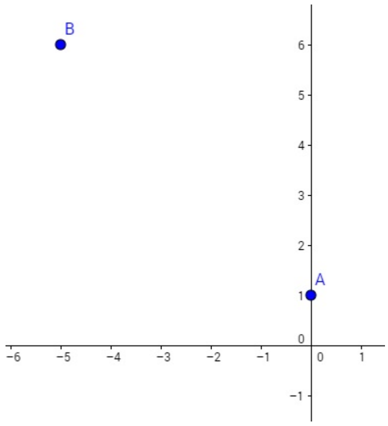


Figura 7: Pontos A e B

(2) Determinemos o ponto médio C do segmento $\overline{AB}$ com coordenadas $C(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

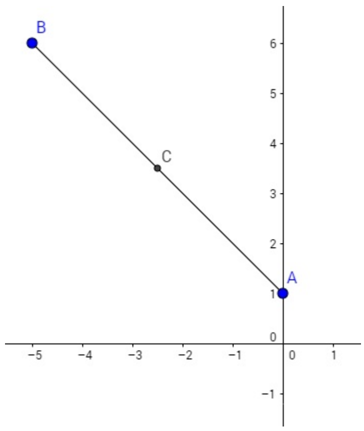


Figura 8: Marcação do Ponto Médio C

(3) Construímos a circunferência de centro C e raio $\overline{AC}$.

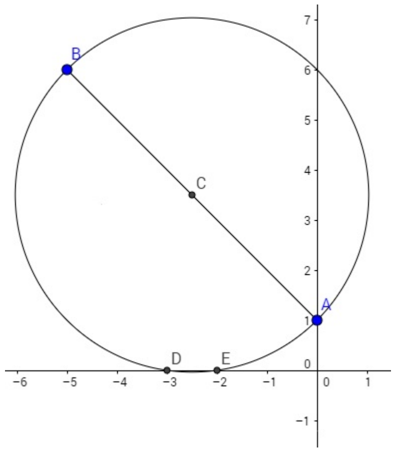


Figura 9: Circunferência de Centro em C de raio $\overline{AC}$

Note que a circunferência é secante ao eixo x nos pontos $D(-3,0)$ e $E(-2,0)$. Portanto as raízes da equação $x^2+5x+6=0$ são $x_1=-3$ e $x_2=-2$.

Após a conquista nas resoluções das equações do 2º grau, iniciava uma nova era de pesquisas para as equações do 3º grau. O Grande profeta *Omar Khayyam*(1.044 - 1.123) até conseguiu resolver alguns problemas que apareceram à época, porém geometricamente. Do ponto de vista algébrico, nada evoluiu. Restou, após séculos, à Itália avivar os estudos incompletos deixados pelos árabes, e assim, começar uma longa e desleal disputa entre dois magníficos matemáticos, Tartáglia e Cardano.

3.2 A equação do 3ª grau - Uma questão de honra

Neste capítulo, será contada uma breve história sobre o surgimento das equações do 3º grau, juntamente com as contribuições de Tartaglia e Cardano sobre a resolução da equação do 3º grau por meio de radicais.

Bolonha é a esperança de dias melhores para a matemática. Encontrar a solução geral para as equações de 3º grau, era o maior desafio enfrentado pelos estudiosos. Naquele tempo, muitos matemáticos já haviam conseguido resolver problemas envolvendo as cúbicas, quando estas não se encontravam na forma canônica. Os próprios babilônicos, como *Omar Khayyam*, já possuíam trabalhos divulgando algumas soluções para as cúbicas, mas nenhuma publicação na forma geral. Alguns matemáticos italianos também se dispuseram ao estudo das cúbicas, entre eles, *Maestro Benedetto*, *Maestro Biaggio*, *Antonio Mazzinghi*, *Luca Pacioli*, estudaram por quase 2 séculos para tentar encontrar a solução das cúbicas na forma geral. Pacioli, após exauridos os esforços para tentar descobrir a estrutura que revolucionaria as equações do 3º grau, publica *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*, e este artigo se torna referência na Itália, principalmente por que cita em um trecho, a dor do fracasso em relação aos estudos das equações cúbicas: "*P*ara as cúbicas e quádricas, [que envolvem x^4], não foi possível até agora formar regras gerais"(LIVIO, 2008, p. 81). Depois desta declaração, encontrar a solução geral para as cúbicas não era somente uma questão de finalidade ou prática mas de honra. Eis que surge *Scipione dal Ferro*(1465 d.C. - 1526 d.C.).

Pouco se sabe sobre sua juventude mas provavelmente estudou e se formou na Universidade de Bolonha, umas das mais respeitadas na Europa onde mais tarde se tornou um dos professores a comandar a cadeira de matemática da Universidade. Em um dos congressos de matemática apresentados em Bolonha, Pacioli conhece Scipione e o incentiva a tentar encontrar a solução para a forma geral para as cúbicas. Considerado um grande algebrista, Scipione consegue um grande avanço descobrindo uma solução para as equações na forma $x^3+px+q=0$. Como naquela época, desafios matemáticos eram propostos no intuito de assegurar emprego ou humilhar oponentes, Scipione prefere esconder por mais um tempo tal engenhosa solução, revelando-a apenas há duas pessoas, seu genro Annibale della Nave e seu pupilo, Antonio Maria de Fiore.

Após a morte de Scipione, Fiore em posse do material fornecido por seu mestre, vê ali uma generosa oportunidade que bate à sua porta. Como Bolonha ardia em disputas entre os intelectuais da época, Fiore decidiu aproveitar da situação e se promover como um gênio matemático. Relatos históricos mostram o quão importante eram esses confrontos, pois, todos

> defendiam não apenas sua reputação na cidade ou na universidade, mas também o contrato de estabilidade do cargo e aumento de salário. Os debates aconteciam em praças públicas, igrejas e nas cortes mantidas por nobres e príncipes, que consideravam uma honra contar em seu séquito com estudiosos qualificados não apenas em fazer previsões astrológicas, mas também em fazer debates sobre os problemas matemáticos difíceis e raros. (LIVIO, 2008, p. 83)

Fiore se prepara e em 1535 escolhe Niccòlo Tartaglia como seu oponente. Fiore entra para a história como farsante e medíocre matemático pois, usa da descoberta de seu mestre para se promover e ainda sofre terrível humilhação de Tartaglia quando ocorre a disputa. Coube a cada um, elaborar trinta problemas. Fiore, escreveu 30 envolvendo equações na forma $x^3 + px + q = 0$ e Tartaglia diversificou sua lista. Duas horas depois de iniciada a batalha, Tartaglia termina seus desafios enquanto Fiore, nenhum resolve. Tartaglia explica assim seu êxito:

> A razão de eu ter sido capaz de resolver seus trinta [problemas] em tão curto espaço de tempo é que todos os trinta diziam respeito ao trabalho que envolve álgebra das incógnitas e cubos iguais a números [equações da forma $x^3 + px + q = 0$]. [Ele fez isso] na crença de que eu seria incapaz de resolver qualquer um deles porque Fra Luca [Pacioli] afirma em seu tratado que é impossível resolver tais problemas por qualquer regra geral. Entretanto, pela obra do acaso, apenas oito dias antes da data fixada para retirar do tabelião os dois conjuntos de trinta problemas lacrados, eu tinha descoberto a regra geral para tais expressões.(LIVIO, 2008, p. 85)

Niccòlo Fontana (Tartaglia) nasceu em Bréscia, em 1499. Vindo de família paupérrima, passou muitas dificuldades na vida principalmente após a morte de seu pai. Por um período, Tartaglia estudou acompanhado por um tutor, porém, como a pobreza batia insistentemente à sua porta, foi obrigado a estudar sozinho, o que não foi empecilho para se tornasse uma das maiores mentes do século. Atingiu o ápice do que mais se tinha conhecimento nas áreas da matemática, mecânica, artilharia e agrimensura. Em 1530 realiza um feito que lhe dá grande destaque, descobre a solução para a equação $x^3 + 3x^2 = 5$, provavelmente através de um desafio de um de seus colegas bresciense Zuanne de Tonini da Coi. É através desta descoberta que Fiore o descobre e o desafia. Tartaglia vai além das equações propostas por Fiore. Ele também consegue determinar as soluções para as equações no tipo $ax^3 + bx^2 + c = 0$. Assim, Tartaglia não era mais um mero professor de matemática, havia se tornado um célebre matemático e profundo conhecedor das soluções das equações algébricas de 3º grau.

Notícias correm pela Europa e encontra os ouvidos de um matemático ambicioso, Cardano. *Girolamo [Jerônimo] Cardano* (1501 - 1576) tem uma história completamente diferente de Tartaglia. Filho ilegítimo de um advogado milanês, estudou nas universidades de Pávia e Pádua. Físico, matemático, astrólogo, jogador e filósofo, Cardano ainda estudou medicina. Como era viciado em jogo, acabou por escrever um grande trabalho chamado *Liber de ludo aleae*(*O livro dos jogos de azar*). Cardano tinha uma postura ríspida, mas atrelada à uma mente brilhante. Em 1534, sob influência de seu pai, consegue ser nomeado palestrante na Fundação Piatti. Mesmo com a carreira de matemático na Fundação Piatti, Cardano não deixou de estudar medicina, uma de suas paixões. Infelizmente, não consegue ser diplomado, mas como era muito determinado, continua, porém de maneira ilícita, seus estudos médicos, e divulga resultados surpreendentes. Anos depois, ele finalmente consegue reconhecimento na área de médica, perdendo apenas para o anatomista André Vesálio.

Obcecado por sucesso, Cardano, que na época escrevia seu segundo livro matemático chamado *Practica arithmeticae generalis et mensurandi singularis*(*A prática da aritmética e mensuração simples*), fica sabendo da disputa que ocorrera em Bolonha envolvendo Tartaglia e Fiore sobre as equações cúbicas e acredita que seria uma ideia fantástica publicá-la em seu novo material. Assim, entra em contato com Tartaglia e muito cortês pede à ele que lhe envie suas descobertas sobre as cúbicas para que sejam publicadas em seu novo livro. Obviamente que Tartaglia rejeitaria esta proposta, e que se algum dia fosse publicado, que este seria em uma publicação de sua autoria. Cardano, que não concebia da ideia de desistir, começa um longo período de "namoro" à distância com Tartaglia até que consegue atraí-lo para Milão. Sabendo que Tartaglia realizara estudos em tiros e fortificações, onde desejava muito receber uma recompensa do comandante militar de Milão, Cardano usa disto para convencer o nobre a visitá-lo na capital. Tartaglia aceita o convite imaginando que Cardano o ajudaria em um possível encontro com o comandante. Ao chegar em Milão, Tartaglia encontra com

Cardano e neste banquete de boas vindas o segredo tão bem guardado por Tartaglia é revelado. A história nos conta com duas versões. A primeira é de que houve um juramento entre os dois, citado assim:

> Juro a você pelo Sagrado Evangelho e por meu credo de cavalheiro, não apenas nunca publicar suas descobertas, se me forem reveladas por você, mas também prometo e penhoro minha fé como cristão verdadeiro de as colocar cifradas para que, depois de minhas morte, ninguém seja capaz de compreender. (LIVIO, 2008. p. 89)

A segunda versão, é a de que não houve nenhuma promessa feita e que Tartaglia revelou tais segredos em forma de agradecimento à hospitalidade fornecida por Cardano, relatada por Ludovico Ferrari, secretário da família de Cardano. Infelizmente, não há como comprovar tais fatos. Mas a verdade é que Tartaglia e Cardano a partir deste momento, estabeleceram uma relação de ódio por todo o resto de suas vidas. Cardano então publica as resoluções de Tartaglia em seu novo material titulado *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*(*A grande Arte ou as regras da álgebra, livro um*). Neste material explora ainda mais as cúbicas mostrando que as soluções podem ser negativas, irracionais e em alguns casos podem até ser raízes quadradas de números negativos, que a nomeia como "sofísticas". Tartaglia surta ao ver este material publicado e imediatamente lança cartas de repúdio ao possível "plagiador" e declara dentro de sua obra, como conseguiu referências para seu trabalho.

> Em nosso próprio tempo, Scipione dal Ferro de Bolonha resolveu o caso do cubo e da primeira potência igual a uma constante, uma proeza bem, elegante e admirável. Já que esta arte ultrapassa toda a astúcia humana e a lucidez do talento mortal e já que é um talento verdadeiramente celestial e um teste bem claro da capacidade das mentes dos homens, quem quer que se dedique a esta arte acreditará que não existe nada que não seja capaz de entender. Em emulação a ele, meu amigo Niccolò Tartaglia de Bréscia, não querendo ser superado, resolveu o mesmo caso quando entrou em uma competição com seu [de Scipione] pupilo, Antonio Maria Fiore, e, comovido pelas minhas muitas súplicas, deu-a a mim. Pois eu tinha iludido pelas palavras de Luca Pacioli, que negou que qualquer regra mais geral que a sua própria pudesse ser descoberta. Em que pesem as muitas coisas que já descobri, como

> é bem sabido, eu tinha me desesperado e não tinha tentado estudar em maior profundidade. Depois, porém, de ter recebido a solução de Tartaglia e procurando pela demonstração dela, vim a compreender que haviam muitíssimas outras coisas que ainda poderiam ser conseguidas. Seguindo este pensamento e mais confiante, descobri estas outras, em parte sozinho e em parte através de Ludovico Ferrari, meu ex-aluno. (apud LIVIO, 2008, p.91)

Cardano consegue esta demonstração porque se procura Della Nave em Bolonha, e este lhe revela os estudos feitos por dal Ferro. Portanto, Cardano publica o trabalho sem a preocupação de ser considerado plagiador, pois, suas referências vinham do trabalho de del Ferro e não de Tartaglia como este o acusava. Para entendermos a grande manobra para a resolução da equação do 3º grau, a demonstração completa estará na próxima seção.

3.2.1 Resolução da equação cúbica - 3º grau

Nesta seção será demonstrada a resolução da equação cúbica por meio de radicais e exemplo

Tome a equação do 3º grau na forma $x^3 + px + q = 0$ com p, q números reais. A ideia era supor que a solução para a equação era composta de duas parcelas u, v tais que $x = u + v$, observando que $u + v \neq 0$ senão teríamos 0 (zero) como uma raiz da equação. Esta informação será de extrema importância mais a frente.

Assim, substituindo $x = u + v$ na equação $x^3 + px + q = 0$ obtemos:

$$(u + v)^3 + (u + v)p + q = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$$

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0$$

Portanto, devemos encontrar números u e v tais que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = \frac{-p}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \end{cases}$$

Note que substituindo $u^3 = t$ e $v^3 = k$ obtemos um sistema de equações do 2º grau tal que

$$\begin{cases} t + k = -q \\ tk = \frac{-p^3}{27} \end{cases}$$

Isolando t em $t + k = -q$ temos

$$t + k = -q \quad \Rightarrow \quad t = -q - k$$

Substituindo t na equação $tk = \frac{-p^3}{27}$ obtemos:

$$(-q - k)k = -\frac{p^3}{27} \quad \Rightarrow \quad -qk - k^2 + \frac{p^3}{27} = 0$$

Note que temos uma equação de grau 2 onde as raízes serão:

$$k = \frac{-(-q) \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2(-1)}$$

$$k = \frac{q}{-2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{-2}$$

$$k = -\frac{q}{2} \mp \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Tomando $k = -\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$ e substituindo em $t = -q - k$ obtemos

$$t = -q - \left(-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \right)$$

$$t = -\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Caso, optemos por tomar $k = -\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$ o valor de t em $t = -q - k$ será

$$t = -q - \left(-\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \right)$$

$$t = -\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Assim, para efeito de cálculo, tomaremos $k = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ e $t = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.
Como $u^3 = t$ e $v^3 = k$ logo $u = \sqrt[3]{t}$ e $v = \sqrt[3]{k}$. Assim

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Agora que encontramos os valores de u e v, basta substituirmos em $x = u + v$ para encontrarmos a solução da equação original $x^3 + px + q = 0$. Assim:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

representa uma raiz da equação do 3º grau. Para encontrarmos as outras duas, podemos recorrer ao Teorema de D'Alembert para que a equação $x^3 + px + q = 0$, se torne uma equação do 2º grau e consequentemente encontremos as outras raízes.
No caso da equação do 3º grau ser na forma canônica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com a, b, c, d reais e $a \neq 0$, basta eliminarmos o termo do 2º grau. Para isso, usaremos o artifício de substituir $x = m + n$, assim:

$$a(m+n)^3 + b(m+n)^2 + c(m+n) + d = 0$$

Desenvolvendo, termo a termo, temos:

$$a(m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3) + b(m^2 + 2mn + n^2) + c(m+n) + d = 0$$

Agrupando os termos em função de m temos:

$$m^3a + m^2(3an + b) + m(3n^2a + 2n + c) + (an^3 + bn^2 + cn + d) = 0$$

Note que agora para eliminarmos o termo de grau 2 basta que

$$3an + b = 0 \quad \Rightarrow \quad n = -\frac{b}{3a}$$

Substituindo n na equação

$$m^3a + m^2(3an + b) + m(3n^2a + 2n + c) + (an^3 + bn^2 + cn + d) = 0$$

obtemos

$$a\left(m - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(m - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(m - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$a\left(m^3 - \frac{3m^2b}{3a} + \frac{3mb^2}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(m^2 - \frac{2mb}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) + c\left(m - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$am^3 + m^2\left(-\frac{3ab}{3a} + b\right) + m\left(\frac{3ab^2}{9a^2} - \frac{2b^2}{3a} + c\right) + \left(-\frac{ab^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0$$

Dividindo toda a equação por a, temos:

$$m^3 + m\left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0$$

Adotando

$$\left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right) = p$$

e

$$\left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = q$$

chegamos a equação na forma $m^3 + pm + q = 0$, onde a resolução já era conhecida por Cardano.

Agora, basta seguir o mesmo procedimento já citado e por fim, lembrar que $x = m + n$.

Daí, faça as combinações dos valores encontrados em m com o valor já conhecido de n ($n = -\frac{b}{3a}$) e encontrará as raízes da equação do 3º grau. Observação importante: Para estudos posteriores denominaremos DELTA (Δ) como a expressão ($\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$).
A seguir, mostraremos alguns exemplos para ilustrar a resolução da equação cúbica.

3.2.1.1 Determinar as raízes da equação $x^3 - 3\sqrt[3]{50}x - 10 = 0$. Tome $x = u + v$, logo

$$(u+v)^3 - 3\sqrt[3]{50}(u+v) - 10 = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3\sqrt[3]{50}(u+v) - 10 = 0$$

$$(u^3 + v^3 - 10) + (3uv - 3\sqrt[3]{50})(u+v) = 0$$

Assim

$$\begin{cases} u^3 + v^3 - 10 = 0 \\ 3uv - 3\sqrt[3]{50} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 10 \\ 3uv = 3\sqrt[3]{50} \end{cases}$$

Elevando a equação $3uv = 3\sqrt[3]{50}$ ao cubo e dividindo por 27, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 10 \\ u^3v^3 = 50 \end{cases}$$

Adotando $u^3 = t$ e $v^3 = k$, assim o novo sistema fica:

$$\begin{cases} t + k = 10 \\ tk = 50 \end{cases}$$

Equacionando o sistema chegamos a

$$10k - k^2 - 50 = 0$$

Note que temos uma equação de grau 2, tal que $a = -1$, $b = 10$, $c = -50$. Assim suas raízes serão:

$$k = \frac{-(10) \pm \sqrt{(10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-50)}}{2(-1)}$$

$$k = \frac{-(10) \pm \sqrt{100 - 200}}{-2}$$

$$k = \frac{-(10) \pm 10i}{-2}$$

É possível concluir que as raízes serão $k_1 = 5 - 5i$ e $k_2 = 5 + 5i$

Portanto, escolhendo $k = 5 - 5i$ teremos $t = 5 + 5i$. Como $u^3 = t$ e $v^3 = k$, para determinarmos u e v basta que $u = \sqrt[3]{k}$ e $v = \sqrt[3]{t}$. Assim

$$u = \sqrt[3]{5 + 5i}$$

e

$$v = \sqrt[3]{5 - 5i}$$

Neste ponto usaremos as referências dos estudos sobre os números complexos que constam nos resultados preliminares para calcularmos suas raízes cúbicas.

1. Determinaremos os módulos de u e v.

$$|v| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} \quad \Rightarrow \quad |v| = \sqrt{50}$$

$$|u| = \sqrt{5^2 + 5^2} \quad \Rightarrow \quad |u| = \sqrt{50}$$

2. Determinaremos o ângulo θ de cada número complexo u e v.

Para u:

$$Sen(\theta) = \frac{5}{|\sqrt{50}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Cos(\theta) = \frac{5}{|\sqrt{50}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = 45^o$$

Para v:

$$Sen(\theta) = \frac{5}{|\sqrt{50}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Cos(\theta) = \frac{-5}{|\sqrt{50}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = 315^o = 45^o \quad (1^o quadrante)$$

3. Determinaremos as raízes cúbicas de u aplicando a fórmula de $Moivre$[1]:

$$\sqrt[3]{u} = u_0 = \sqrt[3]{\left|\sqrt{50}\right|} \cdot \left[cos(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 0 \cdot 180^o}{3}) + isen(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 0 \cdot 180^o}{3})\right]$$

$$\sqrt[3]{u} = u_1 = \sqrt[3]{\left|\sqrt{50}\right|} \cdot \left[cos(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 180^o}{3}) + isen(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 180^o}{3})\right]$$

$$\sqrt[3]{u} = u_2 = \sqrt[3]{\left|\sqrt{50}\right|} \cdot \left[cos(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 180^o}{3}) + isen(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 180^o}{3})\right]$$

$$u_0 = \sqrt[6]{50}(cos(15^o) + isen(15^o))$$

$$u_1 = \sqrt[6]{50}(cos(135^o) + isen(135^o))$$

$$u_2 = \sqrt[6]{50}(cos(255^o) + isen(255^o))$$

4. Determinaremos as raízes cúbicas de v aplicando a fórmula de $Moivre$[1]:

$$\sqrt[3]{v} = v_0 = \sqrt[3]{\left|\sqrt{50}\right|} \cdot \left[cos(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 0 \cdot 180^o}{3}) + isen(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 0 \cdot 180^o}{3})\right]$$

$$\sqrt[3]{v} = v_1 = \sqrt[3]{\left|\sqrt{50}\right|} \cdot \left[cos(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 180^o}{3}) + isen(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 180^o}{3})\right]$$

$$\sqrt[3]{v} = v_2 = \sqrt[3]{\left|\sqrt{50}\right|} \cdot \left[cos(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 180^o}{3}) + isen(\frac{45^o}{3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 180^o}{3})\right]$$

$$v_0 = \sqrt[6]{50}(cos(-15^o) + isen(-15^o))$$

$$v_1 = \sqrt[6]{50}(cos(105^o) + isen(105^o))$$

$$v_2 = \sqrt[6]{50}(cos(225^o) + isen(225^o))$$

5. Agora, lembre-se que $x = u+v$ e como devemos obter 3 raízes reais distintas (o que será provado na próxima seção), agruparemos da seguinte forma para que o termo complexo desapareça. Para isso, usaremos o item 02 dos resultados preliminares.

$$x_0 = u_0 + v_0$$

$$x_1 = u_1 + v_2$$

$$x_2 = u_2 + v_1$$

Determinando x_0 :

$$x_0 = u_0 + v_0$$

$$x_0 = \sqrt[6]{50}(cos(15^o) + isen(15^o)) + \sqrt[6]{50}(cos(-15^o) + isen(-15^o))$$

$$x_0 = \sqrt[6]{50}(cos(15^o) + isen(15^o)) + \sqrt[6]{50}(cos(15^o) - isen(15^o))$$

$$x_0 = 2\sqrt[6]{50}(cos(15^o)$$

$$cos(15^o) = cos(45^o - 30^o) = cos(45^o)cos(30^o) + sen(45^o)sen(30^o)$$

$$cos(15^o) = cos(45^o - 30^o) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{(2)}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$cos(15^o) = cos(45^o - 30^o) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$cos(15^o) = cos(45^o - 30^o) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Portanto

$$x_0 = 2\sqrt[6]{50} \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$$

$$x_0 = \sqrt[6]{50} \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)$$

Determinando x_1 :

$$x_1 = u_1 + v_2$$

$$x_1 = \sqrt[6]{50}(cos(135^o) + isen(135^o)) + \sqrt[6]{50}(cos(225^o) + isen(225^o))$$

$$x_1 = \sqrt[6]{50}(cos(135^o) + isen(135^o)) + \sqrt[6]{50}(cos(135^o) - isen(135^o))$$

$$x_1 = 2\sqrt[6]{50}(cos(135^o)$$

$$cos(135^o) = cos(90^o + 45^o) = cos(90^o)cos(45^o) - sen(90^o)sen(45^o)$$

$$cos(135^o) = cos(90^o + 45^o) = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos(135^o) = cos(90^o + 45^o) = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos(135^o) = cos(90^o + 45^o) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto

$$x_1 = 2\sqrt[6]{50} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$x_1 = -\sqrt[6]{50} \cdot \sqrt{2}$$

Determinando x_2 :

$$x_2 = u_2 + v_1$$

$$x_2 = \sqrt[6]{50}(cos(255^o) + isen(255^o)) + \sqrt[6]{50}(cos(105^o) + isen(105^o))$$

$$x_2 = \sqrt[6]{50}(cos(255^o) + isen(255^o)) + \sqrt[6]{50}(cos(255^o) - isen(255^o))$$

$$x_2 = 2\sqrt[6]{50}(cos(255^o)$$

$$cos(255^o) = -cos(75^o) = -cos(45^o{+}30^o) = -\left[cos(45^o)cos(30^o) - sen(45^o)sen(30^o)\right]$$

$$cos(255^o) = -cos(75^o) = -cos(45^o + 30^o) = -\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{(2)}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right]$$

$$cos(255^o) = -cos(75^o) = -cos(45^o + 30^o) = -\left[\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{(2)}}{4}\right]$$

$$cos(255^o) = -cos(75^o) = -cos(45^o + 30^o) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{(6)}}{4}$$

$$cos(255^o) = -cos(75^o) = -cos(45^o + 30^o) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Portanto

$$x_2 = 2\sqrt[6]{50} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt[6]{50} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{6})}{2}$$

Concluímos que as raízes da equação $x^3 - 3\sqrt[3]{50} - 10 = 0$ serão

$$x_0 = \sqrt[6]{50} \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x_1 = -\sqrt[6]{50} \cdot \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt[6]{50} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{6})}{2}$$

3.2.1.2 Determinar as raízes da equação $3x^3 + 8x^2 + 10x + 4 = 0$. Primeiramente, precisamos eliminar o termo de grau 2. Para isso, Tome $x = m + n$, logo:

$$3(m+n)^3 + 8(m+n)^2 + 10(m+n) + 4 = 0$$

$$3(m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3) + 8(m^2 + 2mn + n^2) + 10((m+n) + 4 = 0$$

Agrupando os temos em função de m obtemos:

$$m^3(3) + m^2(9n+8) + m(9n^2+16n+10) + (3n^3+8n^2+10n+4) = 0$$

Para que o termo de grau 2 desapareça, basta que

$$9n+8=0 \quad \Rightarrow \quad n = -\frac{8}{9}$$

Substituindo n na equação anterior temos:

$$3m^3 + m[9\cdot(\frac{-8}{9})^2 + 16\cdot(\frac{-8}{9}) + 10] + [3\cdot(\frac{-8}{9})^3 + 8\cdot(\frac{-8}{9}) + 10\cdot(\frac{-8}{9}) + 4] = 0$$

$$3m^3 + \frac{26}{9}m - \frac{164}{243} = 0$$

Dividindo a equação toda por 3 temos:

$$m^3 + \frac{26}{27}m - \frac{164}{729} = 0$$

Agora, podemos aplicar o método de Tartaglia. Tome $m = u+v$, assim:

$$(u+v)^3 + \frac{26}{27}(u+v) - \frac{164}{729} = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + \frac{26}{27}(u+v) - \frac{164}{729} = 0$$

$$(u^3 + v^3 - \frac{164}{729}) + (3uv + \frac{26}{27})(u+v) = 0$$

Portanto, basta encontrar u e v que sejam raízes da equação através do seguinte sistema:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = \frac{164}{729} \\ 3uv = -\frac{26}{27} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = \frac{164}{729} \\ uv = -\frac{26}{81} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = \frac{164}{729} \\ u^3v^3 = -\frac{17576}{531441} \end{cases}$$

Usando o mesmo procedimento do exemplo anterior, substituiremos $u^3 = t$ e $v^3 = k$ e resolvendo o sistema teremos

$$-k^2 + \frac{164}{729}k + \frac{17576}{531441} = 0$$

onde suas raízes são calculadas por

$$k = \frac{-\frac{164}{729} \pm \sqrt{(\frac{164}{729})^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (\frac{17576}{531441})}}{2 \cdot (-1)}$$

Assim, as raízes serão:

$$k_1 = \frac{-164 + 180\sqrt{3}}{-1458} \cong -0,10$$

$$k_2 = \frac{-164 - 180\sqrt{3}}{-1458} \cong +0,32$$

Admitindo $k = -0,10$ teremos $t = +0,32$. Como $v^3 = k$ e $u^3 = t$ temos:

$$v = \sqrt[3]{k} = \sqrt[3]{-0,10} = -0,46$$

$$u = \sqrt[3]{t} = \sqrt[3]{+0,32} = +0,68$$

Como $m = u + v$, então

$$m = -0,46 + 0,68 = 0,22$$

Lembrando que $x = m + n$, concluímos que

$$x = \frac{22}{100} - \frac{8}{9} = -\frac{602}{900} \cong -\frac{2}{3}$$

Determinamos então a primeira solução da equação $3x^3 + 8x^2 + 10x + 4 = 0$. Agora, basta reduzirmos a equação de grau 3 para uma de grau 2. Usando o Teorema de D'Alembert, a equação de grau 3 pode ser escrita na forma:

$$3x^3 + 8x^2 + 10x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6x + 6) = 0$$

Assim, basta encontrar a solução da equação $3x^2 + 6x + 6 = 0$ para que possamos encontrar todas as soluções da equação $3x^3 + 8x^2 + 10x + 4 = 0$.

Como $a = 3$, $b = 6$, $c = 6$, encontremos as raízes usando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Assim:

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} \quad = \quad \frac{6 + 6i}{6} \quad = \quad 1 + i$$

e

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} \quad = \quad \frac{6 - 6i}{6} \quad = \quad 1 - i$$

Concluímos que as três raízes da equação $3x^3 + 8x^2 + 10x + 4 = 0$ serão

$$x_0 = -\frac{2}{3}$$
$$x_1 = 1 + i$$
$$x_2 = 1 - i$$

Nos exemplos supracitados percebemos que o valor de DELTA influencia diretamente na quantidade de raízes reais. Para compreendermos melhor tal influência, explanaremos no próximo capítulo.

3.3 A Influência do DELTA nas raízes da equação do 3º grau

Nesta seção será realizado um estudo sobre a quantidade de raízes reais da equação de grau 3 analisando os resultados de DELTA com as variações de p. Para compreendermos melhor os resultados do DELTA usaremos o conceito de funções e estudaremos as funções de 3º grau para analisarmos essas variações.

Considere a função polinomial f de grau 3 sendo $f(x) = x^3 + px + q$ definida por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Inicialmente, mostraremos que a função f possui pelo menos menos 01 (uma) raiz real. Para isso, utilizaremos a ideia do teorema de *Bolzano*[4].

Note que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ obtemos um resultado positivo para $x \to +\infty$ e um valor negativo para $x \to -\infty$. Neste caso, esta transição em algum momento cortou o eixo x, logo, houve um x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Portanto, para toda função polinomial de grau 3 haverá sempre, pelo menos uma raiz real. Para compreender esta análise basta escrever $f(x) = x^3 + px + q$ na forma $f(x) = x^3 \cdot (1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3})$ e aplicar o limite de f.

Porém, as raízes deste polinômio se combinam de várias formas dependendo dos valores de p, pois na expressão do Δ, p tem expoente cúbico o que ocasiona em valores positivos se $p > 0$ e negativos se $p < 0$. A seguir, mostraremos as possíveis soluções do polinômio analisando como os valores de p interferem na solução da equação.

1. Para $p > 0$

   Para entendermos o comportamento da função f, usaremos o teste da 1ª derivada na função $f(x) = x^3 + px + q$ obtendo $f'(x) = 3x^2 + p$. Note que no teste da primeira derivada concluímos que a $f'(x)$ é sempre positiva, logo a função f é crescente e portanto corta o eixo x em apenas um ponto, porém, esta a raiz será positiva, negativa ou nula? Para responder a esta pergunta analisaremos a variação de q. Os gráficos a seguir mostram o posicionamento da raiz em relação à variação de q, observe:

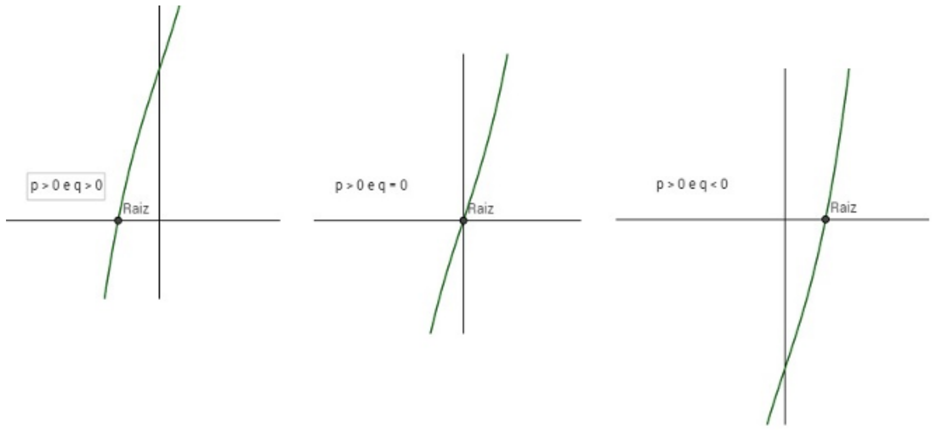


Figura 10: Posição da raiz no caso de $p > 0$

Note que para $q > 0$, $q = 0$ e $q < 0$ teremos, respectivamente, uma raiz negativa, nula, e uma positiva.

2. Para $p = 0$
   Note que ao tomarmos $p = 0$ a função se torna $f(x) = x^3 + q$, onde a raiz será $\sqrt[3]{-q}$. Portanto, para $q \neq 0$, a função terá uma raiz real e duas complexas e para $q = 0$, a função terá as três raízes sendo 0 (zero). Observe os gráficos a seguir:

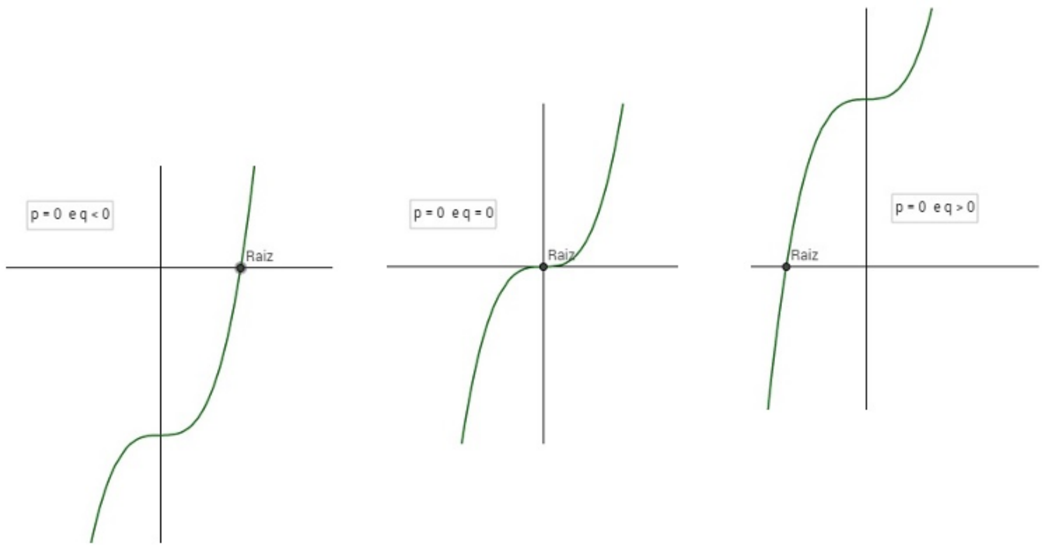


Figura 11: Posição da raiz no caso de $p = 0$

3. Para $p < 0$

   As duas primeiras análises foram simples por que eram intuitivamente dedutíveis. Mas neste caso, faremos uma análise pouco mais aprofundada e com mais detalhes. Tome novamente o polinômio $f(x) = x^3 + px + q$ e sua derivada $f'(x) = 3x^2 + p$. Note que para $p = -3x^2$, a primeira derivada tem valor zero, identificando o ponto crítico da função.

   Partiremos deste ponto. Tome um ponto h. Aplicando h na derivada primeira temos $f'(h) = 3h^2 + p$.

   Resolvendo $f'(x) = 0$ obtemos $p = -3h^2$, onde a derivada $f'(x)$ se anula nos pontos $x = \pm h$.

   Ao aplicarmos o teste da 2ª derivada temos $f''(x) = 6x$. Note que para valores negativos de h a 2ª derivada também é negativa e para valores positivos de h a 2ª derivada também é positiva. Concluímos que para $-h$ este ponto é de máximo e para $+h$ temos um ponto de mínimo como ilustra o gráfico a seguir.

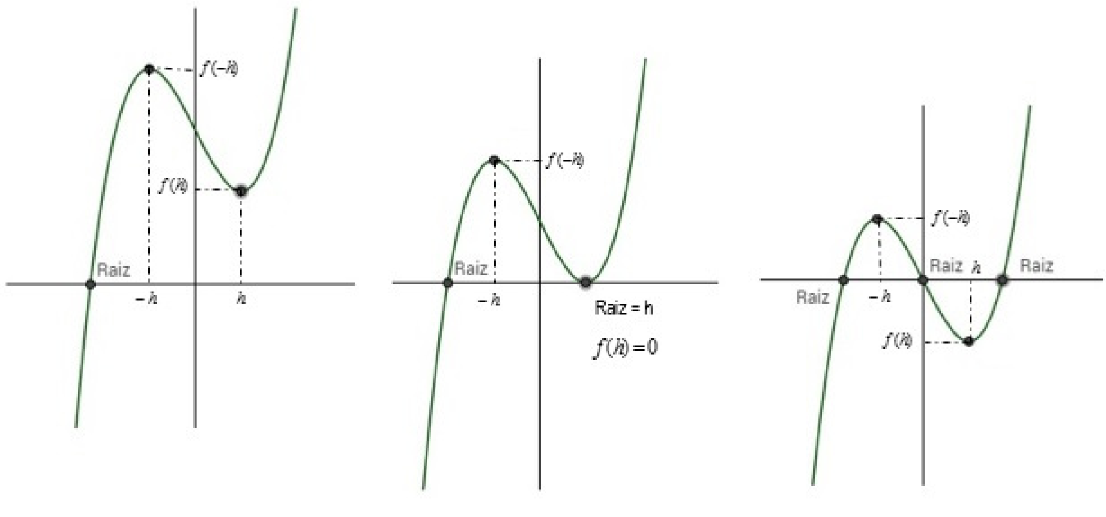


Figura 12: Posição da raiz no caso de $p < 0$

   Analisando o primeiro gráfico percebemos que $f(-h) \cdot f(h) > 0$, o que gera apenas uma raiz real. O segundo gráfico mostra que $f(-h) \cdot f(h) = 0$, o que gera uma raiz real simples e uma raiz real dupla e por fim, o terceiro gráfico mostra que $f(-h) \cdot f(h) < 0$, onde obtemos três raízes reais distintas.

   Mas, quem são $f(-h)$ e $f(h)$? E porque estamos analisando o produto entre eles? Observe a análise a seguir:

Tome a função $f(x) = x^3 + px + q$ e $p = -3h^2$, temos que

$$f(-h) = (-h)^3 - 3h^2(-h) + q$$

$$f(-h) = -h^3 + 3h^3 + q$$

$$f(-h) = q + 2h^3$$

e

$$f(h) = (h)^3 - 3h^2(h) + q$$

$$f(h) = h^3 - 3h^3 + q$$

$$f(h) = q - 2h^3$$

Quando determinamos $f(-h) \cdot f(h)$ temos:

$$f(-h) \cdot f(h) = (q + 2h^3)(q - 2h^3) = q^2 - 4h^6$$

Como $h^2 = -\frac{p}{3}$ então

$$h^6 = (h^2)^3 = (-\frac{p}{3})^3 = (-\frac{p^3}{27})$$

Assim:

$$q^2 - 4h^6 = q^2 - 4(-\frac{p^3}{27}) = q^2 + \frac{4p^3}{27})$$

Colocando o 4 como fator de evidência temos:

$$4(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})$$

que é o mesmo que 4Δ!!!

Concluímos então que $f(-h) \cdot f(h)$ gera o termo Δ, que era objeto de nosso estudo neste capítulo! Conclui-se também, que o sinal do produto $f(-h) \cdot f(h)$ e Δ serão os mesmos. Assim, é possível concluir que a equação de 3º grau tem uma, duas ou três raízes reais distintas, desde que Δ seja positivo, negativo ou nulo.

Seguindo o trabalho, Zuanne de Tonini da Coi aparece novamente para criar um novo alvoroço nas equações algébricas. Se antes foi a "salvação" de Tartaglia agora é a "promoção" de Ludovico Ferrari ao mais alto escalão matemático, quando este descobre a solução geral para as equações do 4º grau.

3.4 A equação de 4º grau - Extensão da Batalha

Neste capítulo, será contado um breve resumo sobre vida de Ferrari.

Ludovico Ferrari nasceu em Bolonha no ano de 1522. Vindo de uma vida miserável, conseguiu emprego na casa de Cardano como servo. Contudo, o que tinha de pobreza sobrava-lhe em inteligência e soberba, características estas que Cardano logo percebeu que poderiam tornar o jovem moribundo em alguém importante no futuro, tanto que o próprio Cardano resolveu tornar-se instrutor do jovem e o promoveu a seu secretário.

Como sempre, grandes gênios surgem quando desafios maiores aparecem, e foi exatamente o que aconteceu com Ferrari. Zuanne de Tonini da Coi aparece novamente, só que agora na vida de Cardano e pede que determine as soluções para a equação $x^4+6x^2-60x+36=0$. Cardano depois de esgotar seus conhecimentos tentando achar a solução para a equação quártica, resolve transferir este desafio ao jovem Ferrari e este com um lampejo de genialidade não só resolve o problema como também determina a forma geral para a resolução das equações quárticas.

Em 1541, Cardano rejeita a proposta da Fundação Piatti de Milão, para lecionar geometria e então abre-se uma porta para Ferrari. Este disputaria a vaga com da Coi, seu único adversário. Felizmente, Ferrari consegue a vaga e começa ali sua jornada como professor da Fundação Piatti.

Em 1545 com o apoio de Cardano, publica a solução por radicais das equações quárticas no *Ars Magna*. Ferrari sabia que para resolver as quárticas precisava das cúbicas, e graças a Annibale della Nave, Cardano e Ferrari conseguem este precioso material que possibilita tal publicação. Tempos depois, Ferrari segue os mesmos passos de Cardano em relação à Tartaglia. As ofensas reaparecem e com elas a grande vontade de se testarem perante a sociedade italiana. Assim, em 1548 em Brescia, acontece o épico desafio entre os gigantes. Ferrari vence o debate e começa a receber inúmeras propostas de emprego, inclusive uma do próprio governador de Milão, *Don Ferrante di Gonzaga*, que requisita Ferrari para que seja tutor de seu filho. Ferrari atinge um status financeiro antes inimaginável. Havia se tornado um homem muito rico.

Em 1565, aposenta-se e volta à Bolonha, para viver com sua irmã, Maddalena, mas este retorno à casa de Maddalena infelizmente antecipa sua morte, pois relatos mostram que fora envenenado ou por sua irmã ou pelo amante da mesma. Maddalena, toma posse de toda a riqueza de Ferrari e duas semanas após sua morte, casa-se. Infelizmente, seu novo marido lhe toma toda a “herança” recebida pela morte de Ludovico, e Maddalena morre tempos depois, na pobreza lhe coube.

3.4.1 Resolução da equação do 4º grau

Nesta seção será demonstrada a resolução por radicais das equações quárticas e exemplos.

Dada a equação $m^4 + pm^2 + qm + r = 0$, podemos, intuitivamente, observar que é possível agrupar termos afim de formarmos quadrados perfeitos. Sendo assim, escrevemos a equação $m^4 + pm^2 + qm + r = 0$ da seguinte foma:

$$m^4 + pm^2 + r = -qm$$

Acrescentando os termos vm^2 e w temos:

$$m^4 + pm^2 + vm^2 + (r + w) = -qm + vm^2 + w$$

$$m^4 + (p + v)m^2 + (r + w) = vm^2 - qm + w$$

Note que, se for possível criar quadrados perfeitos usando os termos vm^2 e w acrescentados na equação, poderemos determinar estes termos através do estudo de seus discriminantes, ou seja, será necessário e suficiente que os discriminantes dos dois trinômios, ao mesmo tempo, sejam iguais a zero. Para efeito de cálculo chamaremos de D_1 o discriminante do trinômio do primeiro membro e D_2 o discriminante para o do trinômio do segundo membro. Logo

$$D_1 : \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$$

$$D_1 : (p + v)^2 - 4(1)(r + w) = 0$$

e

$$D_2 : \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$$

$$D_2 : (-q)^2 - 4vw = 0$$

Isolando w em D_2 temos

$$w = \frac{q^2}{4v}$$

Substituindo w em D_1 temos

$$(p+v)^2 - 4\left(r + \left(\frac{q^2}{4v}\right)\right)$$

Assim:

$$p^2 + 2pv + v^2 - 4r - 4\frac{q^2}{4v} = 0$$

$$p^2 + 2pv + v^2 - 4r - \frac{q^2}{v} = 0$$

$$vp^2 + 2pv^2 + v^3 - 4rv - q^2 = 0$$

$$v^3 + 2pv^2 + (p^2 - 4r)v - q^2 = 0$$

Note que é uma equação cúbica em v e é resolvível por meio de radicais como já mostrado anteriormente. Assim, basta encontrar os valores de v para também encontrarmos os valores de w, não esquecendo que $w = \frac{q^2}{4v}$. Por fim, substituiremos estes valores na equação $m^4 + (p+v)m^2 + (r+w) = vm^2 - qm + w$ onde será possível escrever os quadrados perfeitos e determinar as soluções da equação quártica. No caso da equação quártica se apresentar na forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, onde $a \neq 0$. Basta usar o mesmo mecanismo das equações cúbicas para eliminar o termo de 3º grau. Para isso, tome $x = m + n$, assim

$$a(m+n)^4 + b(m+n)^3 + c(m+n)^2 + d(m+n) + e = 0$$

$a(m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4) + b(m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3) + c(m^2 + 2mn + n^2) + d(m+n) + e = 0$

Agrupando os termos em função de m temos:

$$m^4(a) + m^3(4an+b) + m^2(6an^2+3bn+c) + m(4an^3+3bn^2+2nc+d) + (an^4+bn^3+cn^2+dn+e) = 0$$

Para eliminarmos o termo de 3º grau basta que

$$n = -\frac{b}{4a}$$

Substituindo n na equação temos:
$m^4(a)+m^2\left(\frac{6ab^2}{16a^2}-\frac{3b^2}{4a}+c\right)+m\left(-\frac{4ab^3}{64a^3}+\frac{3b^3}{16a^2}-\frac{2bc}{4a}+d\right)+\left(\frac{ab^4}{256a^4}-\frac{b^4}{64a^3}+\frac{b^2c}{16a^2}-\frac{bd}{4a}+e\right)=0$

Dividindo a equação toda por a e agrupando os termos em função de m temos

$$m^4+m^2\left(\frac{c}{a}-\frac{3b^2}{8a^2}\right)+m\left(\frac{d}{a}-\frac{bc}{2a^2}-\frac{b^3}{8a^3}\right)+\left(\frac{e}{a}-\frac{bd}{4a^2}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{3b^4}{256a^4}\right)=0$$

Assumindo

$$p=(\frac{c}{a}-\frac{3b^2}{8a^2})$$

$$q=(\frac{d}{a}-\frac{bc}{2a^2}-\frac{b^3}{8a^3})$$

e

$$r=(\frac{e}{a}-\frac{bd}{4a^2}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{3b^4}{256a^4})$$

a equação se tornará:

$$m^4+pm^2+qm+r=0$$

modelo o qual será possível resolvê-lo por meio de radicais como o proposto por Ferrari.

Observe os exemplos a seguir:

3.4.1.1 Determinar as raízes da equação $x^4-83x^2+198x+280=0$

Como a equação não possui o termo de 3º grau, basta aplicar a ideia de Ferrari.

Completando os quadrados com vm^2 e w temos:

$$x^4+(v-83)x^2+(280+w)=vx^2-198x+w$$

Determinando os discriminantes temos

$$D_1=(v-83)^2-4(280+w)$$

$$D_2=(-198)^2-4vw$$

Como os discriminantes devem ser, ao mesmo tempo iguais a zero, têm-se que em D_2

$$w = \frac{9801}{v}$$

Substituindo w em D_1, temos a equação na forma

$$v^3 - 166v^2 + 5769v - 39204 = 0$$

Como é resolúvel algebricamente pela forma de Cardano, as raízes serão $v_1 = 9$, $v_2 = 36$, $v_3 = 121$. Portanto, os pares (v, w) serão

$$(v, w) = \left\{(9, \frac{9801}{9}); (36, \frac{9801}{36}); (121, \frac{9801}{121})\right\} = \left\{(9, 1089); (36, \frac{1089}{4}), (121, 81)\right\}$$

Substituindo, qualquer um dos pares ordenados encontrados na equação

$$x^4 + (v - 83)x^2 + (280 + w) = ax^2 - 198x + w$$

encontraremos as quatro soluções procuradas. Veja:

3.4.1.1.1 Para $v = 9$ e $w = 1089$, temos:

$$x^4 + (9 - 83)x^2 + (280 + 1089) = 9x^2 - 198x + 1089$$

$$x^4 - 74x^2 + 1369 = 9x^2 - 198x + 1089$$

$$(x^2 - 31)^2 = (3x - 37)^2$$

Lembre-se: $\sqrt{x} = |x| = \pm x$

Assim, basta resolver as equações

$$x^2 - 37 = 3x - 33$$

e

$$x^2 - 37 = -3x + 33$$

e encontraremos as soluções $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -10$, $x_4 = 7$.

3.4.1.1.2 Para $v = 36$ e $w = \frac{1089}{4}$, temos:

$$x^4 + (36 - 83)\,x^2 + \left(280 + \frac{1089}{4}\right) = 36x^2 - 198x + \frac{1089}{4}$$

$$x^4 - 74x^2 + = 9x^2 - 198x + 1089$$

$$\left(x^2 - \frac{47}{2}\right)^2 = \left(6x - \frac{33}{2}\right)^2$$

Assim, resolvendo as equações

$$x^2 - \frac{47}{2} = 6x - \frac{33}{2}$$

e

$$x^2 - \frac{47}{2} = -6x + \frac{33}{2}$$

teremos as soluções $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -10$, $x_4 = 7$.

3.4.1.1.3 Para $v = 121$ e $w = 81$, temos:

$$x^4 + (121 - 83)x^2 + (280 + 81) = 121x^2 - 198x + 81$$

$$x^4 - 38x^2 + 361 = 121x^2 - 198x + 81$$

$$(x^2 - 19)^2 = (11x - 9)^2$$

Resolvendo as equações

$$x^2 - 19 = 11x - 9$$

e

$$x^2 - 19 = -11x + 9$$

Encontramos as soluções $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -10$, $x_4 = 7$

3.4.1.2 Tome a equação

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 10 = 0$$

Para usarmos o método de Ferrari, primeiramente eliminaremos o termos de grau 3. Logo, substitua $x = m + n$:

$$(m+n)^4 + 4(m+n)^3 + 3(m+n)^2 - 8(m+n) - 10 = 0$$

Desenvolvendo os termos temos:
$m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4 + 4(m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3) + 3(m^2 + 2mn + n^2) - 8(m+n) - 10 = 0$

Escrevendo a equação na variável m temos:

$$m^4 + m^3(4n+4) + m^2(6n^2+12n+3) + m(4n^3+12n^2+6n-8) + (n^4+4n^3+3n^2-8n-10) = 0$$

Para eliminarmos o termo de grau 3 basta que:

$$(4n + 4) = 0$$

$$n = -1$$

Assim, substituindo n na equação obtemos:

$$m^4 - 3m^2 - 6m - 2 = 0$$

Agora, usaremos o método de Ferrari escrevendo

$$m^4 - 3m^2 - 6m - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^4 - 3m^2 - 2 = 6m$$

Acrescentando os termos vm^2 e w temos:

$$m^4 - 3m^2 + vm^2 - 2 + w = vm^2 + 6m + w$$

$$m^4 + m^2(-3 + v) + (-2 + w) = vm^2 + 6m + w$$

Determinando os discriminantes temos:

$$D_1 = (v - 3)^2 - 4(-2 + w)$$

$$D_2 = (6)^2 - 4vw$$

Como os discriminantes devem ser, ao mesmo tempo, iguais a zero têm-se que

$$w = \frac{9}{v}$$

Substituindo w em D_1 temos

$$v^2 - 6v - 4\left(\frac{9}{v}\right) + 17 = 0$$

$$v^3 - 6v^2 + 17v - 36 = 0$$

Como é uma equação de grau 3, basta aplicar a fórmula de Cardano. Assim, as raízes serão $v_1 = 4$, $v_2 = 1 - 2i\sqrt{2}$ e $v_3 = 1 - 2i\sqrt{2}$ obtendo $w_1 = \frac{9}{4}$, $w_2 = \frac{9}{1-2i\sqrt{2}}$ e $w_3 = \frac{9}{1+2i\sqrt{2}}$.

Como vimos no exemplos anterior, não há a necessidade de usarmos todas as combinações de (v, w), pois todas gerarão as mesmas soluções, assim, por comodidade, usaremos v_1 e w_1.

Substituindo os valores de v_1 e w_1 na equação

$$m^4 + m^2(-3 + v) + (-2 + w) = vm^2 + 6m + w$$

temos

$$m^4 + m^2(-3 + 4) + \left(-2 + \frac{9}{4}\right) = 4m^2 + 6m + \frac{9}{4}$$

$$m^4 + m^2 + \frac{1}{4} = 4m^2 + 6m + \frac{9}{4}$$

Podemos escrever a equação como:

$$\left(m^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(2m + \frac{3}{2}\right)^2$$

Extraindo a raiz em ambos os membros obtemos duas equações quadráticas:

$$m^2 + \frac{1}{2} = 2m + \frac{3}{2}$$

e

$$m^2 + \frac{1}{2} = -2m - \frac{3}{2}$$

Resolvendo a equação

$$m^2 + \frac{1}{2} = 2m + \frac{3}{2}$$

encontraremos as soluções $m_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $m_2 = 1 - \sqrt{2}$. Resolvendo a equação

$$m^2 + \frac{1}{2} = -2m - \frac{3}{2}$$

encontraremos as soluções $m_3 = -1 + i$ e $m_4 = -1 - i$.
Logo, para encontrarmos a solução geral basta substituir os valores encontrados na relação $x = m + n$, assim:

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} + (-1) = \sqrt{2}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{2} + (-1) = -\sqrt{2}$$

$$x_3 = -1 + i + (-1) = -2 + i$$

$$x_4 = -1 - i + (-1) = -2 - i$$

Observação Importante: Independente do par ordenado que é escolhido, a solução da equação do 4º grau será sempre a mesma, impossibilitando que haja uma combinação de $3 \cdot 4 = 12$ soluções.

O estudo sobre a solubilidade por radicais das equações ainda era objeto de muito interesse, pois, haviam equações de grau maior que 5 onde se era possível determinar as raízes por meio de radicais. Assim, a grande questão que entra em cena é quando é possível determinar as raízes de uma equação por meio de radicais. Neste ponto, coube a Abel e Galois iniciarem seus estudos para solucionar esta problemática.

3.5 A equação de 5º grau - Contribuições de Abel e Galois

Neste capítulo será contado uma breve história de vida de Abel e Galois e também enunciaremos o Teorema de Galois.

No início do século XIX, dois gênios abrilhantaram o mundo com suas contribuições matemáticas. Abel e Galois aparecem na história em dois mundos paralelos, um de extrema pobreza e outro com acesso a tudo e a todos.

3.5.1 Vida e contribuição de Abel

Niels Henrik Abel nasceu em 5 de Agosto de 1802, numa pequena cidade da Noruega chamada Finnöy. Filho e neto de pastores protestantes, teve uma família grande com 5 irmãos e graças à seu pai, que construiu uma biblioteca na comunidade em que residia, conseguiu ter acesso a obras culturais e científicas. Em 1815, Abel e seu irmão Hans, são enviados à Oslo para dar continuidade em seus estudos. Na universidade, Abel conhece *Bernt Michael Holmboe*, um professor tão apaixonado por matemática que ao expô-la à Abel, este não conseguiu recusá-la, foi amor à primeira vista. Abel já possuía uma leve queda por ciências exatas, mas com a aproximação de Holmboe esta acentuou-se. Com quase 20 anos, Abel que já havia lido obras de Euler, Gauss, Lagrange, Newton entre outros. Neste período começa a desenvolver uma queda para a resolução das equações do 5º grau, e que por um momento, quase consegue encontrar a fórmula geral para se determinar as raízes da equação de 5º grau na forma $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$. Mas, ele mesmo percebeu que havia um erro em sua solução e assim encontrar a fórmula geral tornaria seu objetivo maior.

Uma característica marcante de Abel foi sua originalidade em seus trabalhos. Em 1823, publica seu primeiro trabalho na *Magazine for Naturvidenskaben*, uma revista científica criada por seu amigo geólogo Balthazar Keilhau. Nesse momento o nome de Abel começa a circular por toda a Noruega fazendo com que conseguisse embarcar para a maior jornada sua vida, uma viagem a Copenhague, onde teria a oportunidade de conhecer o que havia de melhor em material humano na área da matemática. Profissionalmente, esta viagem não agregou em nada à Abel, mas foi lá que conheceu Christine Kemp, o grande amor de sua vida. Voltou a Noruega e estudou sobre as funções elípticas fazendo descobertas interessantes na área. Em 1823, retomou o estudo das equações do 5º grau e demonstra que, em casos particulares, a solução por meio de radicais era possível. Esses casos específicos eram chamados de "equações recíprocas". Veja o exemplo retirado GARBI(2007, p. 306):

$$x^8 + 3x^7 - 5x^6 + 4x^5 + 7x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$$

Dividindo-se a equação por x^4 tem-se

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 4x + 7 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4} = 0$$

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 3\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7 = 0$$

Tomando $(1 + \frac{1}{x})$ de z e lembrando que:

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

temos

$$z^4 + 3z^3 - 9z^2 - 5z + 19 = 0$$

Note que a equação de oitavo grau pode ser transformada em uma equação do quarto grau, o que é solúvel pelas técnicas conhecidas de Ferrari. Assim, conhecendo as raízes em z encontraríamos as raízes em x. Comentada por Ruffini e demonstrada por Abel, os estudos sobre o método geral para encontrar as soluções das equações de grau maior que 4 chegara ao fim, mas com um problema, quais equações poderiam ser transformadas para que a resolução fosse possível? Infelizmente Abel não conseguiu responder a esta grande pergunta e coube ao jovem Galois respondê-la, o que veremos mais à frente.

Abel nesta época lutava para conquistar reconhecimento e estabilidade financeira, e em 1826 na França, o secretário da Academia Joseph Fourier apresenta um manuscrito de Abel à Academia e cabe a Cauchy e Legendre julgá-lo para que este finalmente obtivesse reconhecimento. Abel tinha uma escrita muito própria e elegante para a época, o que fez com que seus relatores despendessem muito tempo para entender. Infelizmente, o trabalho de Abel não o tornou famoso e nem lhe rendeu estabilidade financeira, simplesmente por que Cauchy, engavetou-o para estudá-lo posteriormente, já que estava comprometido demais com seus próprios estudos.

A partir de então, o sucesso de Abel parecia mais incerto, pois o julgamento da Academia não tinha data concreta para divulgar o resultado após análise. O tempo avança e Abel se engrandece de desesperança e acaba voltando para a Noruega. Abel em sua jornada, teve muitos amigos que tentaram ajudá-lo de muitas formas. Crelle tentava um emprego na Prússia e outros como Poisson, Lacroix e Legendre intercediam junto ao embaixador sueco em Paris para uma vaga em uma das universidades. Infelizmente nada disso serviu e Abel não conseguiu se desvincular da pobreza que o assombrava.

Anos depois, Abel consegue ir à Berlim e lá reencontra seu grande amor jurando desposá-la assim que possível, o que infelizmente não ocorre. Abel falece em 06 de abril de 1829, tomado pela tuberculose causada pelo desprovimento de uma vida saudável. Mesmo após sua morte, os grande admiradores de Abel, não o abandonaram. Legendre, Schumacher, Crelle e Gaus, entoaram suas vozes rasgando elogios ao brilhante Abel. A Academia de Paris premiou a família de Abel pelas grandes descobertas matemáticas. Holmboe, seu grande mestre incentivador, conseguiu com grande esforço, publicar as obras completas de Abel e uma grande prova de amizade coube a Keilhau. Abel o fez jurar que protegeria sua família e a amada Kemp. Este após saber de sua morte, não hesitou e cumpriu o juramento feito ao amigo e casando-se com Kemp. Esta prova de amizade sem dúvida desmitifica a inexpressiva e desumana imagem do matemático cruel e insensível.

Neste mesmo período da vida de Abel, surge outro inquestionável matemático, que revoluciona a matemática e o campo de Teoria do Números, Galois.

3.5.2 Vida e contribuição de Galois

Évariste Galois nasceu na França, numa cidade chamada Bourg-la-Reine. Vindo de uma família extremamente rica e culta, Galois teve tudo que a vida lhe podia proporcionar. Estudou no Colégio Louis-le-Grand onde aos 13 anos ganhou seu primeiro prêmio em um concurso de versos latinos. Em 1825, Galois se rende aos encantos da matemática e neste momento, se dedica a estudar esta magnífica ciência que posteriormente o colocaria no hall da fama. Galois, por seus professores, poderia ser definido assim "*Ele visa a originalidade*" ou "*Dominado por sua paixão pela matemática, negligencia totalmente o resto*".

Em 1828, Galois tenta admissão na École Polytechnique, instituição que causava fascínio nos que desejavam prosseguir com seus estudos pois oportunizava aos formados grande prestígio perante a sociedade. Galois não conseguiu ser admitido, o que não o impossibilitou de continuar seus estudos.

Percebendo a sobrenatural e fascinante inteligência de Galois, o professor Louis-Paul-Émile Richard decide orientá-lo. Sob suas ordens, publica dois trabalhos, o primeiro *Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo* e *Demonstração de um teorema sobre as frações contínuas periódicas.* Mal poderia imaginar que seu primeiro trabalho seria a maior contribuição de Galois para a matemática: a Teoria de Grupos.

Mais uma vez o caminho para o sucesso de um jovem gênio passava por Cauchy e, novamente, engavetaria o trabalho de outro gênio. Cauchy diz a Galois que seu manuscrito é extenso e que precisaria de tempo para resumir suas ideias e levá-lo à Academia. Cauchy não era uma pessoa ruim ou egocêntrica, apenas preferia seus trabalho em relação à outros.

Galois dedicado a solucionar os problemas das equações algébricas, ao ler um trabalho de Cauchy sobre as leis de permutações, vislumbra ali um oportunidade não vista por Cauchy para o estudos das equações algébricas, e que mais tarde o ajuda a provar de uma vez por todas sobre o método geral das equações de grau superior a 4 que nem Abel nem Ruffini conseguiram fazer.

Enunciaremos o conceito de Grupo Solúvel e o critério de Galois. Ao leitor que interessar indico a referência [5].

Definição 1 (Grupo Solúvel). *Um Grupo G se diz solúvel se contém uma cadeia de subgrupos:*

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq ... \subseteq G_n = G$$

tal que cada subgrupo G_{i-1} é normal em G_i e o grupo quociente G_i/G_{i-1}, $1 \leq i \leq n$, é abeliano.

Teorema 3 (Critério de Galois)**.** *Seja F um corpo com característica zero e $f(x) \in F[x]$, em que $F[x]$ é o conjunto de todos os polinômios sobre, em uma indeterminada x. Então $f(x) = 0$ é solúvel por meio de radicais, se somente se, o grupo de Galois é solúvel.*

De acordo com Galois, as raízes do polinômio $f(x) = x^5 - 6x + 3$ não podem ser encontradas por meio de radicais, por outro lado, as raízes do polinômio $f(x) = x^5 + 1$ já poderiam ser determinadas por meio de radicais.

Depois deste adendo, seguiremos a história de Galois. Infelizmente Galois falha ao tentar ser admitido na École Polytechnique pela segunda vez, e o pior é que junto a essa catástrofe, seu pai comete suicídio ao saber que a Monarquia juntamente com a Igreja, profanavam contra seus ideais. Galois, que sempre via a Igreja e a Monarquia a favor dos ricos, se revolta e ali surge um revoltado político. Esta atitude rebelde de Galois causará sua morte prematura, como a história nos contará.

Em 1829, consegue ingressar na École Normale Supérieure, onde se dedica a formação dos professores para colégios e universidades. Em 1830 publica no Bulletin de Ferrussac, três trabalhos de altíssimo nível, *Análise de uma Memória a Resolução Algébrica de Equações*, *Resolução de Equações Numéricas* e *Teoria dos Números*. Cauchy já possuía tudo isso em mãos meses atrás, porém só depois destas publicações decide ler e apresentar à Academia de Ciências.

Infelizmente, o que Galois tem de genialidade lhe falta em sorte. Quando finalmente Cauchy resolve apresentar o trabalho de Galois, ele fica doente e não comparece a sessão. Logo o tema não foi discutido. Cauchy entra em contato com Galois e pede que este resuma seu trabalho para que seja apresentado no Grande Prêmio de Matemática da Academia, porém o trabalho que estava em posse de Cauchy misteriosamente desaparece. Galois se vê sem alternativas e reescreve seus trabalhos sob o título "*Memórias sobre as Condições de Resolubilidade das Equações por Radicais*", onde agora entrega ao grande Fourier(1768 d.C - 1830 d.C). Porém, antes de ler, Fourier morre e assim Galois não consegue apresentar seu trabalho à comunidade acadêmica novamente.

Daí em diante, Galois se envolveu de corpo e alma na política, gerando ódio entre os que contrapunhavam suas ideias. Como Abel, Galois também encontra seu amor porém longe de ser correspondido como o de Abel. Stéphanie Poterin du Motel era a jovem que havia conquistado o coração de Galois mais do que a própria matemática. Mas, a recusa de Stéphanie sobre as declarações apaixonantes de Galois, gera a morte de um dos mais brilhantes gênios que a matemática já concebera. Ao saber que Stéphanie também era cortejada por outro cavalheiro, Duchâtelet, Galois sempre ímpeto em suas atitudes desafia Duchâtelet a um duelo. Como era sabido, Galois tinha muitos inimigos e não havia percebido que ao desafiar Duchâtelet, assinaria ali sua sentença de morte. O Desafio foi aceito e em 30 de maio de 1832, Galois deu os últimos 20 passos de sua notável vida. Em vida, Galois deixa inúmeros escritos sobre a nova tendência da matemática moderna, A Teoria de Grupos. Algumas áreas se destacam em aplicações como Geometria, Teoria das Equações, Cristalografia, Física Nuclear entre outras.

Após a Morte de Galois, surgiram outros matemáticos que foram capazes de entender o que Galois havia criado e em suas obras, começaram a dar o devido reconhecimento, mais do que merecido a Galois. Joseph Liouville(1809 d.C - 1882 d.C) publica no Journal de Mathématiques Pures et Appliquées o trabalho "*Obras Matemáticas de Évariste Galois*", Camille Jordan (1838 d.C - 1922 d.C) publica "*Tratado das Substituição e das Equações*" e por fim Sophus Lie (1842 d.C - 1899 d.C) publica "*Influência de Galois sobre o Desenvolvimento da Matemática*" o que faz com que o nome de Galois atinja o ápice e finalmente o reconhecimento merecido.

Olhando a evolução desta belíssima ciência, temos dois matemáticos que foram fundamentais neste avanço no papel de "professores incentivadores". Antonio da Coi que numa relação estreita entre Cardano e Tartaglia, fez com que estes realizassem maravilhosas descobertas na solução das equações do 3º e 4º graus, e Cauchy, que graças ao "zelo" em arquivar os trabalhos de Abel e Galois, não percebeu os gênios que ali imploravam por uma oportunidade, cada uma à sua maneira obviamente.

4 Polinômios

Nesta seção faremos um breve estudo sobre os polinômios, compreendendo suas propriedades e demonstrando os teoremas mais importantes.

4.1 Polinômios em uma variável

Tome K um corpo qualquer. Definiremos um polinômio sobre K em uma indeterminada x a expressão $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_mx^m$ onde $a_i \in K$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$ e $a_m \neq 0$.

1. Igualdade entre Polinômios

   Tome $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_mx^m$ e $q(x) = b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + ... + b_kx^k$. Assim,
   $p(x) = q(x)$ se, e somente se, $\forall \quad i \in \mathbb{N}\ a_i = b_i$ em K.

2. Polinômio Constante

   Seja $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_mx^m$ e um $a \in K$ qualquer. Se $a_0 = a$ e $\forall i \geq 1$, $a_i = 0$. Definiremos o polinômio $p(x)$ como polinômio constante.

3. Polinômio Identicamente Nulo

   O polinômio $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_mx^m$ será identicamente nulo se, e somente se, $\forall a_i = 0 \in K$, $\forall i \in \mathbb{N}$, ou seja, $p(x) = 0 + 0x^1 + 0x^2 + ... + 0x^m$

4. Grau de um Polinômio

   Seja $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_mx^m$ tal que $a_m \neq 0$, diz-se que m é o grau de $p(x)$ e será expresso por $\partial p(x) = m$.

Denotaremos $K[x]$ como um conjunto formado por todos os polinômios sobre o corpo K, em uma indeterminada x. Assim, podemos definir as operações de adição e multiplicação de polinômios no conjunto K.

Perceba que o grau do polinômio 0 não está definido, portanto, podemos definir ∂ como uma função do conjunto de todos os polinômios $\neq 0$ no conjunto dos Naturais. Assim:

$$\partial : K[x] - \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$p(x) \longmapsto \partial p(x)$$

onde $\partial p(x)$ representa o grau de $p(x)$

Sejam $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_mx^m$ e $q(x) = b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + ... + b_rx^r$, dois elementos do conjunto $K[x]$.

1. Definimos $p(x) + q(x) = c_0 + c_1x^1 + ... + c_kx^k$ onde $c_i = (a_i + b_i)$.

2. Definimos $p(x) \cdot q(x) = c_0 + ... + c_kx^k$ onde $c_0 = a_0b_0$ $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$
   .
   .
   .
   $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$, $k \in \mathbb{N}$.

Segue também que a função grau ∂ possui as seguintes propriedades:

1. $\partial\ (f(x) + g(x)) \leq max\,\{\partial f(x), \partial g(x)\}$, quaisquer que sejam os polinômios não nulos $f(x)$, $g(x) \in K[x]$ tais que $f(x) + g(x) \neq 0$.

2. $\partial\ (f(x) \cdot g(x)) = \partial f(x) + \partial g(x)$ quaisquer que sejam os polinômios não nulos $f(x)$, $g(x) \in K[x]$.

4.2 Algoritmo da Divisão

Agora que definimos polinômios e suas propriedades, introduziremos o Algoritmo da Divisão.
Seja K um corpo e $K[x]$ o domínio dos polinômios sobre K na indeterminada x.

Teorema 4. *Sejam $f(x)$, $g(x) \in K[x]$ e $g(x) \neq 0$, então existem únicos $q(x)$, $r(x)$ $\in K[x]$ tal que:*
$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, onde ou $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial g(x)$

Proposição 1. *Seja K um corpo e seja $f(x) = a_0 + a_1x^1 + ... + a_nx^n$ um polinômio não nulo em $K[x]$ de grau n. Então, o número de raízes de $f(x)$ em K é no máximo igual a $\partial f(x) = n$.*

Corolário 1. *Seja $f(x) = a_0 + a_1x^1 + ... + a_nx^n$ um polinômio não nulo de grau n em $K[x]$. Então $f(x)$ possui no máximo n raízes em qualquer extensão L de K.*

4.3 Polinômios Irredutíveis

Seja $f(x) \in K[x]$ tal que $\partial f(x) \geq 1$. Definimos um polinômio como irredutível sobre um corpo K se $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, $g(x)$ e $h(x) \in K[x]$ então temos $g(x) = a$ constante ou $h(x) = b$ constantes em K. Se $f(x)$ não for irredutível sobre K dizemos que $f(x)$ é redutível sobre K. Em outras palavras, $p(x)$ será polinômio irredutível sobre o corpo caso não seja possível uma fatoração com elementos do corpo que não sejam constantes. Veja o exemplo a seguir:

Tome o polinômio $p(x) = 2x^2 + 10$. Note que a única forma fatorada de $p(x)$ é $p(x) = 2(x^2 + 5)$ no corpo dos Reais, logo $p(x)$ é irredutível sobre os Reais. Por outro lado, se fizéssemos uma extensão dos Reais para os complexos $p(x)$ seria fatorado em $p(x) = 2(x - i\sqrt{5})(x + i\sqrt{5})$, sendo assim $p(x)$ redutível nos complexos.

Usaremos esta definição de polinômio irredutível para demonstrar um teorema que nos será muito útil para encontrar as raízes dos polinômios.

4.4 Fatoração única

Teorema 5. *Seja K um corpo. Então todo polinômio $f(x) \in K[x] - \{0\}$ pode ser escrito na forma,*

$f(x) = u \cdot p_1(x) \cdot p_2(x) ... p_m(x)$, onde $u \in K - \{0\}$ e $p_1(x), p_2(x), ..., p_m(x)$ são polinômios irredutíveis sobre K (não necessariamente distintos). Mais ainda, essa expressão é única a menos da constante u e da ordem dos polinômios $p_1(x), p_2(x), ..., p_m(x)$.

Demonstração da Irredutibilidade

Seja $f(x) \in K[x] - \{0\}$. Vamos provar por indução que todo polinômio de grau $\leq n$ pode ser escrita na forma $f(x) = u \cdot p_1(x) \cdot p_2(x)...p_m(x)$. Usaremos a indução sobre $\partial f(x) = n$.

Se $n = 0$, $f(x) = u$ constante não nula então assumimos que $\partial f(x) = n \geq 1$.

Suponha por absurdo que $f(x)$ não possa ser escrito como um produto de polinômios irredutíveis, logo $f(x)$ é redutível sobre o corpo K. Assim,

$\exists\ g(x), h(x) \in K[x]$, $1 \leq \partial g(x) < n$, $1 \leq \partial h(x) < n$ tais que

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

Aplicando a indução temos:

$g(x) = ap_1(x)...p_r(x)$, $a \in K - 0$ e $p_1(x), ..., p_r(x)$ polinômios irredutíveis sobre K.

$h(x) = bp_{r+1}(x)...p_m(x)$, $b \in K - 0$ e $p_{r+1}(x), ..., p_m(x)$ são polinômios irredutíveis sobre K.

Assim,

$f(x) = up_1(x)...p_m(x)$, onde $u = ab \in K - \{0\}$ e $p_1(x), ..., p_m(x)$ são todos polinômios irredutíveis sobre K.

Demonstração de Unicidade

Seja o polinômio $f(x) = up_1(x)...p_m(x) = u'p'_1(x)...p_s(x)$ onde $u, u' \in K - 0$ e $p_1(x)...p_m(x)$, $p'_1(x)...p'_s(x)$ são polinômios irredutíveis sobre K.

Assim,

$$p_1(x)\ p'_1(x)...p_s(x)$$

e daí segue que

$\exists \quad u'_i \in K - \{0\}$ tal que $p'_i(x) = u'_i \cdot p_1(x)$. Neste caso definiremos esta relação como *associados* em $K[x]$.

Aplicando a indução sobre m.

Seja $m = 1$ e $p_1(x)$ irredutível temos que necessariamente $s = 1$ e $p_1(x)$ e $p'_i(x)$ são associados em $K[x]$.

Tome $m > 1$. De $p'_i(x) = u'_i \cdot p_1(x)$ sendo $K[x]$ um domínio, temos que:

$u \cdot p_2(x)...p_m(x) = u' \cdot u_i \cdot p'_1(x)...p_{i-1}(x) \cdot p_{i+1}(x)...p_s(x)$

e daí segue pela hipótese de indução que $m - 1 = s - 1$, isto é, $m = s$. Ainda mais, para cada $p'_j(x)$ há um *associado* com $p_i(x)$ através de uma constante.

4.5 Determinando as raízes de um polinômio

Neste capítulo, mostraremos métodos que podem auxiliar a encontrar as raízes racionais de um polinômio independente de seu grau, caso existam.

4.5.1 Raízes Racionais

Nesta seção será mostrado o método de pesquisas de raízes racionais.

Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0$, com $a \neq 0$. Se um número racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ com p e q primos entre si, é raiz desta equação, então, p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração

Como $\frac{p}{q}$ é raiz da equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0$, então $x = \frac{p}{q}$. Assim obtemos:

$a_n \cdot (\frac{p}{q})^n + a_{n-1} \cdot (\frac{p}{q})^{n-1} + ... + a_1 \cdot (\frac{p}{q})^1 + a_0 = 0.$

Multiplicando ambos os membros por q^n, temos:

$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_1 p^1 q^{n-1} + a_0 q^n = 0$

A partir deste ponto faremos duas análises:

1. Isolando $a_n p^n$ e colocando q em evidência temos:

   $a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})$.

   Adote $(a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = \alpha$

2. Isolando $a_n q^n$ e colocando p em evidência temos:

   $a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_1 q^{n-1})$.
   Adote adote $(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_1 q^{n-1}) = \beta$

Portanto, obtemos

$$a_n p^n = -q\alpha$$

e

$$a_0 q^n = -p\beta$$

Como todos os coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ e p e q são inteiros, segue que α e β são inteiros. Assim:

$$\begin{cases} a_n p^n = -q \cdot \alpha \\ \quad \frac{a_n p^n}{q} = -\alpha \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_0 q^n = -p \cdot \beta \\ \frac{a_0 q^n}{p} = -\beta \end{cases}$$

Relembrando que q e p são primos e α e β são inteiros, conclui-se que q divide a_n e p divide a_0. Portanto, se houver alguma raiz racional, esta deverá ser na forma $\frac{p}{q}$, onde q é divisor de a_n e p é divisor de a_0.

Exemplo:

4.5.1.1 Tome o polinômio $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 16x + 12$. Aqui temos $a_n = 3$ e $a_0 = 12$. Logo o conjunto de divisores q de a_n são $D(q) = \pm 1, \pm 3$ e o conjunto de divisores de p de a_0 são $D(p) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Logo, o conjunto das possíveis raízes racionais do polinômio serão $\frac{D(p)}{D(q)} = \pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 3, \pm 4, \pm \frac{4}{3}, \pm 6, \pm 12$.

Assim, basta que, por inspeção, determinemos se existe alguma raiz racional para o polinômio $p(x)$.

Neste caso, as raízes racionais serão $\frac{2}{3}, -2, +3$.

4.5.1.2 Tome o polinômio $p(x) = x^5 + 6x + 3$. Aqui temos $a_n = 1$ e $a_0 = 3$. Logo o conjunto de divisores q de a_n são $D(q) = \pm 1$ e o conjunto de divisores de p de a_0 são $D(p) = \pm 1, \pm 3$. Logo, o conjunto das possíveis raízes racionais do polinômio serão $\frac{D(p)}{D(q)} = \pm 1, \pm 3$.

Assim, basta que, por inspeção, determinemos se existe alguma raiz racional para o polinômio $p(x)$.

Neste caso, não há raízes racionais para o polinômio.

4.5.2 Método da Bisseção

Este método permite que, a partir de um determinado intervalo, utilizemos o conceito de média aritmética para aproximar do valor de uma determinada raiz. Para definirmos este intervalo, usaremos um teorema cujo estudo veio da contribuição de Cauchy.

Para a compreensão do teorema a seguir tome $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_mx^m$ onde $a_i \in K$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$ e $a_m \neq 0$.

Teorema 6. *Seja $p_n(x)$ um polinômio de coeficientes reais de grau n e*
$A = max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_{n-1}|\}$.
Então cada zero de $p_n(x)$ pertencem ao círculo centrado na origem e raio $R = 1 + \frac{A}{|a_n|}$.

Demonstração

Sabendo que $|a+b| \geq |a| - |b|$, temos:

$$|p_n(x)| = \left|a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\right| \geq$$

$$\geq |a_n x^n| - \left|a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\right| \geq ... \geq$$

$$\geq |a_n| |x^n| - |a_{n-1}| \left|x^{n-1}\right| + ... + |a_1| |x| + |a_0| \geq$$

$$\geq |a_n| |x|^n - A \left(|x_{n-1}|^{n-1} + ... + |x| + 1\right) =$$

$$= |a_n| |x|^n - A \left(\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}\right) =$$

$$= |a_n| |x|^n - A\frac{|x|^n}{|x| - 1} + \frac{A}{|x| - 1} >$$

$$> \left(|a_n| - \frac{A}{|x| - 1}\right) |x|^n$$

Assim, $\left||a_n| - \frac{A}{|x|-1}\right| \geq 0$ o que implica em $p_n(x) > 0$, concluindo que $p_n(x)$ não possui raízes reais, o que nos dá uma contradição. Portanto, as raízes de $p_n(x)$ devem satisfazer

$$|a_n| - \frac{A}{|x| - 1} < 0$$

$$|a_n| < \frac{A}{|x| - 1}$$

$$|a_n| |x| - |a_n| < A$$

$$|a_n|\,|x| < A + |a_n|$$

$$|x| < \frac{A}{|a_n|} + 1$$

onde definiremos $\frac{A}{|a_n|} + 1$ como o raio do círculo que contém as raízes procuradas, logo $R = \frac{A}{|a_n|} + 1$.

Teorema 7. *Seja $p_n(x)$ polinômio de coeficientes reais de grau n e $B = max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\}$. Então as raízes de $p_n(x)$ estão fora do círculo centrado na origem e raio $r = \frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}}$.*

Demonstração Seja $y = \frac{1}{x}$. Assim:

$$p_n(x) = p_n\left(\frac{1}{y}\right) = p_n\left(\frac{1}{y}\right) = a_n\frac{1}{y^n} + a_{n-1}\frac{1}{y^{n-1}} + ... + a_1\frac{1}{y} + a_0$$

Considerando $q_n(y) = y^n p_n(\frac{1}{y})$, segue que:

$$q_n(y) = y^n\left(a_n\frac{1}{y^n} + a_{n-1}\frac{1}{y^{n-1}} + ... + a_1\frac{1}{y} + a_0\right)$$

$$q_n(y) = a_n + a_{n-1}y + ... + a_1y^{n-1} + a_0y^n$$

Do teorema anterior segue que as raízes de $q_n(y)$ devem satisfazer

$$|y| \leq 1 + \frac{B}{|a_0|}$$

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1 + \frac{B}{|a_0|}$$

$$\frac{1}{|x|} \leq 1 + \frac{B}{|a_0|}$$

$$1 \leq \left(1 + \frac{B}{|a_0|}\right)|x|$$

$$\frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}} \leq |x|$$

Teorema 8. *Sejam $p(z) = a_0+a_1z+...+a_nz^n$ um polinômio real (diferente do polinômio zero), T o número de trocas de sinais na sequencia de seus coeficientes, e s o números de raízes reais positivas (cada qual contando com sua multiplicidade). Então, $T - r$ é par e não-negativo.*

Em outras palavras, a diferença entre o número de variações de sinal e o número de raízes positivas de um polinômio de coeficientes reais é um número inteiro positivo par. Se interessar ao leitor, a prova está na referência [9].
Após estes três teoremas supracitados, podemos aplicar o método da bisseção para encontrar as raízes reais de um polinômio. Veja no exemplo a seguir a determinação das raízes racionais da equação quíntica $x^5 - 6x + 3 = 0$ que fora citada como exemplo de não solubilidade por meio de radicais no critério de Galois.

Exemplo:

Seja o polinômio

$$p(x) = x^5 - 6x + 3$$

1. Determinando o raio R do círculo em que se encontram as raízes.

$$a_0 = 3$$

$$a_1 = -6$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = 0$$

Logo

$$A = max\left\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|\right\}$$

$$A = max\left\{|3|, |-6|, |0|, |0|, |0|\right\}$$

Portanto $A = 6$
Temos que o Raio R será $R = 1 + \frac{A}{a_n} = 1 + \frac{6}{1} = 7$.
Concluímos que, partindo do centro O do plano cartesiano, com um raio de 7 unidade, o intervalo definido será de $[-7, 7]$.

2. Determinando o raio r do círculo em que não se encontram as raízes.

$$a_1 = -6$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = 1$$

Logo

$$B = max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|, |a_5|\}$$

$$B = max\{|-6|, |0|, |0|, |0|, |0|\}$$

Portanto $B = 6$. Temos que o raio r será

$$r = \frac{1}{1 + \frac{B}{a_0}} = \frac{1}{1 + \frac{6}{3}} = \frac{1}{3}$$

.

Concluímos que, partindo do centro O do plano cartesiano, com um raio de $\frac{1}{3}$ unidade, o intervalo definido será $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

3. Agora, usando a regra de sinais de Descartes, determinaremos em qual intervalo se encontram as raízes. Note que o polinômio $p(x)$ tem uma sequência de sinais +-+. Como houve duas trocas de sinais ($T = 2$), concluímos que existem 2 valores para $x > 0$ que tornam $p(x) = 0$, logo o intervalo $[\frac{1}{3}, 7]$ possui duas raízes reais e caberá ao intervalo $[-7, -\frac{1}{3}]$ ter, ou três raízes reais ou uma raiz real e duas complexas. Analisaremos o intervalo $[-7, -\frac{1}{3}]$ onde se localiza alguma raiz negativa do polinômio. A tabela a seguir mostra como o método é aplicado, onde:

a = Limite Inferior do intervalo

b = Limite Superior do intervalo

$x = \frac{a+b}{2}$

$p(a)$ = valor de a aplicado no polinômio $p(x)$

$p(b)$ = valor de b aplicado no polinômio $p(x)$

Usaremos também uma regra de sinais muito importante para conseguirmos essa aproximação.

(a) Se $p(a) \cdot p(x) > 0$ então a recebe o valor de x e o novo intervalo será $[x, b]$

(b) Se $p(a) \cdot p(x) < 0$ então b recebe o valor de x e o novo intervalo será $[a, x]$

Iterações	a	b	x	p(a)	p(b)	p(x)	Sinal de p(a)*p(x)
1	-7,000	-0,333	-3,667	-16762,000	4,996	-637,761	+
2	-3,667	-0,333	-2,000	-637,791	4,996	-17,001	+
3	-2,000	-0,333	-1,167	-17,000	4,996	7,839	-
4	-2,000	-1,167	-1,583	-17,000	7,838	2,549	-
5	-2,000	-1,534	-1,767	-17,000	3,710	-3,624	+
6	-1,767	-1,534	-1,651	-3,624	3,710	0,655	-
7	-1,767	-1,650	-1,709	-3,624	0,670	-1,306	+
8	-1,709	-1,650	-1,680	-1,324	0,670	-0,286	+
9	-1,680	-1,650	-1,665	-0,303	0,670	0,194	-
10	-1,680	-1,665	-1,673	-0,303	0,194	-0,052	+
11	-1,673	-1,665	-1,669	-0,068	0,194	0,064	-
12	-1,673	-1,669	-1,671	-0,068	0,064	-0,002	+
13	-1,671	-1,669	-1,670	-0,002	0,064	0,031	-
14	-1,671	-1,670	-1,671	-0,002	0,031	0,014	-
15	-1,671	-1,671	-1,671	-0,002	-0,002	-0,002	

Figura 13: Tabela de iterações do Uso do Método da Bisseção

Note que na 15ª iteração os valores de a,b e x tornam-se iguais, portanto concluímos que, por aproximação, uma raiz será $-1,671$.

Analisaremos agora o intervalo $[\frac{1}{3}, 7]$ e encontraremos a primeira, das duas raízes positivas.

Iterações	a	b	x	p(a)	p(b)	p(x)	Sinal de p(a)*p(x)
1	0,333	7,000	3,667	1,004	16768,000	643,761	+
2	3,667	7,000	5,334	644,061	16768,000	4286,801	+
3	5,334	7,000	6,167	4288,821	16768,000	8886,098	+
4	6,167	7,000	6,584	8886,098	16768,000	12331,064	+
5	6,584	7,000	6,792	12335,758	16768,000	14416,259	+
6	6,792	7,000	6,896	14416,259	16768,000	15556,656	+
7	6,896	7,000	6,948	15556,656	16768,000	16153,258	+
8	6,948	7,000	6,974	16153,258	16768,000	16458,336	+
9	6,974	7,000	6,987	16458,336	16768,000	16612,592	+
10	6,987	7,000	6,994	16612,592	16768,000	16690,151	+
11	6,994	7,000	6,997	16696,129	16768,000	16732,034	+
12	6,997	7,000	6,999	16732,034	16768,000	16750,009	+
13	6,999	7,000	7,000	16756,004	16768,000	16762,001	+
14	7,000	7,000	7,000	16768,000	16768,000	16768,000	+

Figura 14: Tabela de iterações do Uso do Método da Bisseção

Note que na 14ª iteração os valores de a,b e x tornam-se iguais e tenderam a 7 que não é raiz da equação. Concluímos assim, que a raiz não está no intervalo definido pela 1ª iteração. Assim, observe a próxima tabela de iterações.

Iterações	a	b	x	p(a)	p(b)	p(x)	Sinal de p(a)*p(x)
1	0,333	7,000	3,667	1,004	16768,000	643,761	+
2	0,333	3,667	2,000	1,006	644,061	23,000	+
3	2,000	3,667	2,834	23,000	644,061	168,647	+
4	2,834	3,667	3,251	168,806	644,061	346,367	+
5	3,251	3,667	3,459	346,643	644,061	477,414	+
6	3,459	3,667	3,563	477,414	644,061	555,843	+
7	3,563	3,667	3,615	555,843	644,061	598,674	+
8	3,615	3,667	3,641	598,674	644,061	621,041	+
9	3,641	3,667	3,654	621,041	644,061	632,468	+
10	3,654	3,667	3,661	632,468	644,061	638,244	+
11	3,661	3,667	3,664	638,690	644,061	641,371	+
12	3,664	3,667	3,666	641,371	644,061	642,715	+
13	3,666	3,667	3,667	643,163	644,061	643,612	+
14	3,667	3,667	3,667	644,061	644,061	644,061	+

Figura 15: Tabela de iterações do Uso do Método da Bisseção

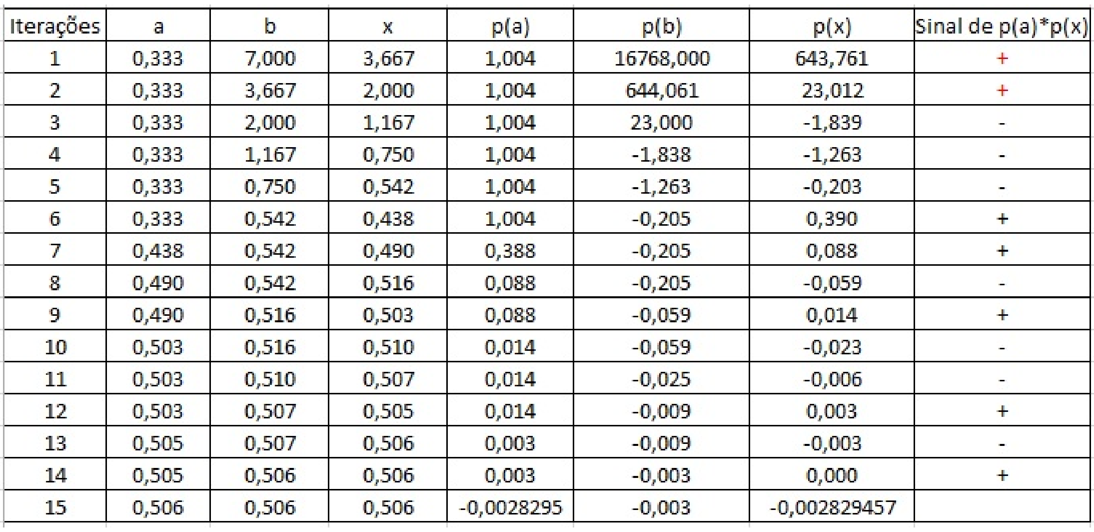
Note que na 14ª iteração os valores de a,b e x tornam-se iguais e tenderam a $3,667$ que não é raiz da equação. Concluímos assim, que a raiz não está no intervalo definido pela 1ª e nem pela 2ª iteração. Assim, observe a próxima tabela de iterações.

Iterações	a	b	x	p(a)	p(b)	p(x)	Sinal de p(a)*p(x)
1	0,333	7,000	3,667	1,004	16768,000	643,761	+
2	0,333	3,667	2,000	1,004	644,061	23,012	+
3	0,333	2,000	1,167	1,004	23,000	-1,839	-
4	1,167	2,000	1,584	-1,838	23,000	3,455	-
5	1,167	1,584	1,376	-1,838	3,468	-0,329	+
6	1,376	1,584	1,480	-0,323	3,468	1,221	-
7	1,376	1,480	1,428	-0,323	1,221	0,370	-
8	1,376	1,428	1,402	-0,323	0,370	0,005	-
9	1,376	1,402	1,389	-0,323	0,005	-0,164	+
10	1,389	1,402	1,396	-0,164	0,005	-0,081	+
11	1,396	1,402	1,399	-0,074	0,005	-0,035	+
12	1,399	1,402	1,401	-0,035	0,005	-0,015	+
13	1,401	1,402	1,402	-0,009	0,005	-0,002	+
14	1,402	1,402	1,402	0,005	0,005	0,005	+

Figura 16: Tabela de iterações do Uso do Método da Bisseção

Note que na 14ª iteração os valores de a,b e x tornam-se iguais, portanto concluímos que, por aproximação, uma raiz será $1,402$.

Continuaremos a analisar o intervalo $[\frac{1}{3}, 7]$ para encontraremos a segunda raiz positiva.



Iterações	a	b	x	p(a)	p(b)	p(x)	Sinal de p(a)*p(x)
1	0,333	7,000	3,667	1,004	16768,000	643,761	+
2	0,333	3,667	2,000	1,004	644,061	23,012	+
3	0,333	2,000	1,167	1,004	23,000	-1,839	-
4	0,333	1,167	0,750	1,004	-1,838	-1,263	-
5	0,333	0,750	0,542	1,004	-1,263	-0,203	-
6	0,333	0,542	0,438	1,004	-0,205	0,390	+
7	0,438	0,542	0,490	0,388	-0,205	0,088	+
8	0,490	0,542	0,516	0,088	-0,205	-0,059	-
9	0,490	0,516	0,503	0,088	-0,059	0,014	+
10	0,503	0,516	0,510	0,014	-0,059	-0,023	-
11	0,503	0,510	0,507	0,014	-0,025	-0,006	-
12	0,503	0,507	0,505	0,014	-0,009	0,003	+
13	0,505	0,507	0,506	0,003	-0,009	-0,003	-
14	0,505	0,506	0,506	0,003	-0,003	0,000	+
15	0,506	0,506	0,506	-0,0028295	-0,003	-0,002829457	

Figura 17: Tabela de iterações do Uso do Método da Bisseção

Note que na 15ª iteração os valores de a,b e x tornam-se iguais, portanto concluímos que, por aproximação, uma raiz será $0,506$.

Note que este método é muito trabalhoso, pois faz-se necessário muitas iterações para se chegar a uma aproximação da raiz. Um dos fatores que soam negativamente para este método é o fato de não ser possível escrever uma raiz irracional.

Para ilustrar o exemplo feito, o gráfico a seguir mostra as raízes da função polinomial $f(x) = x^5 - 6x + 3$.

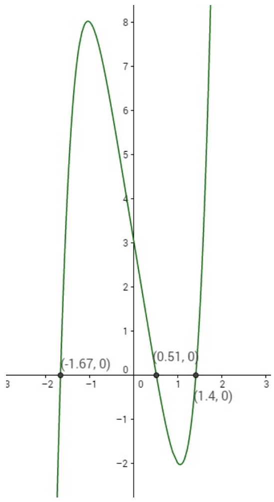


Figura 18: Gráfico da função polinomial $f(x) = x^5 - 6x + 3$

Note que pelo gráfico só existem 3 raízes reais, portanto concluímos que as outras serão complexas sendo impossível determiná-las por este método. Logo o conjunto solução será $S = \{-1,67; 0,50; 1,40; -0,11 - 1,58i; -0,11 + 1,58i\}$

4.5.3 Relação de Girard

Nesta seção, mostraremos a relação de Girard.

O método de Girard é um mecanismo bastante interessante, porém muito trabalhoso. O método cria uma relação das raízes do polinômio com seus coeficientes gerando um sistema de equações. Daí, com algumas manipulações, é possível determinar suas raízes. Veja a seguir o teorema de Girard.

Seja equação $a_n x^n + a_{n-1} a^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, cujas raízes são $r_1, r_2, ..., r_n$.

Assim, pelo teorema da irredutibilidade podemos escrever a equação como:

$$a_n(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_n) = a_n x^n - a_n(r_1+r_2+...+r_n)x^{n-1} + a_n(r_1r_2+r_1r_3+...+r_{n-1}r_n)x^{n-2} +$$

$$+ ... + (-1)^h a_n S_h x^{n-h} + ... + (-1)^n a_n(r_1r_2r_3...r_n), \forall x.$$

Adote

$$S_1 = r_1 + r_2 + ... + r_n$$

$$S_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + ... + r_{n-1}r_n$$

$$S_h = (-1)^h a_n S_h x^{n-h}$$

(Soma de todas as $C_{n,h}$ produtos de h raízes da equação)

$$S_n = r_1 r_2 r_3 ... r_n$$

Assim, podemos escrever a expressão de raízes da seguinte forma:

$$a_n x^n - a_n S_1 x^{n-1} + a_n S_2 x^{n-2} + ... + (-1)^h a_n S_h x^{n-h} + ... + (-1)^n a_n S_n, \forall x.$$

Comparando a expressão acima com a equação $a_n x^n + a_{n-1} a^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ concluímos que:

$$S_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$S_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$
$$S_3 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$S_h = (-1)^h \cdot \frac{a_{n-h}}{a_n}$$
$$S_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$$

Logo, as relações de Girard mostram como podemos relacionar as raízes de um polinômio e seus coeficientes. Este método se torna efetivo, caso exista alguma informação adicional no problema proposto, veja alguns exemplos:

1. *Determinar a raiz do polinômio $p(x)$ sabendo que uma raiz tem multiplicidade 2.*

2. *Determinar a raiz do polinômio $p(x)$ sabendo que as raízes estão em P.A.*

Veja o exemplo a seguir: Determine as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ sabendo que as raízes estão em P.A. Como sabemos, se o polinômio possui $\partial p(x) = 3$, obteremos 3 raízes. Neste caso, adote $x_1 = a - b$, $x_2 = a$ e $x_3 = a + b$ como as três raízes do polinômio.

Aplicando a Relação de Girard obtemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

onde temos

$$(a-b) + (a) + (a+b) = -\frac{9}{1}$$

Daqui se tem

$$3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

Como 3 é raiz do polinômio, podemos escrever $p(x) = (x-3)(x^2 - 6x + 5)$. Logo as raízes de $(x^2 - 6x + 5)$ serão também raízes de $p(x)$. Resolvendo a equação $x^2 - 6x + 5 = 0$, encontramos as raízes 1 e 5. Logo, as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ são $S = \{1, 3, 5\}$.

5 Conclusão

Até a época de Galois, as equações desempenhavam um papel importante na construção e resolução de problemas. Determinar as raízes de uma equação, era o principal estudo da época, e não só isso, encontrar uma maneira geral que proporcionasse esta descoberta, era o que impulsionava as disputas por reconhecimento e poder. Quando Bháskara descobre a solução geral para as equações do 2º grau usando somente as operações algébricas de adição, subtração, divisão, multiplicação, potenciação e radiciação, abre-se ali uma porta para que houvesse sequência no estudo das cúbicas. Às cúbicas, coube a Cardano publicá-las. A resolução das cúbicas no conjunto dos reais, gerou algumas dúvidas quando em determinadas situações, só havia apenas uma única solução possível. Bombelli cria o conjunto dos Complexos e a partir deste momento, todas as cúbicas se tornariam solúveis por meio de radicais. As quárticas, com Ferrari, também se mostra importante na solubilidade por meio de radicais com a ideia de comparar quadrados perfeitos. A partir deste momento, quando começa o estudo das quínticas, surge a grande dúvida do século que era a insolubilidade por meio de radicais. Surgiram equações onde não era possível encontrar suas raízes utilizando-se apenas das operações algébricas. Eis que, surge Galois e com brilhantismo, não só responde a esta questão, mas, define para todas as outras equações de grau $n \geq 5$, quando seria possível encontrar uma fórmula geral que encontrasse as raízes da equação.

Partindo deste ponto, encontrar a solução das equações de grau $n \geq 5$ se tornava um pouco mais desafiadora pois, com Galois, os matemáticos sabiam agora quando era possível determinar as raízes de uma equação por meio de radicais. Alguns matemáticos conseguiram superar a tal falta de uma fórmula geral e desenvolveram métodos bem interessantes como Girard estabelecendo combinações das raízes com os coeficientes da equação, ou resolvendo geometricamente como faziam os gregos ou como Carlyle, fazendo uso da geometria analítica. Alguns destes métodos, ainda são compartilhados no ensino médio são, dentro do contexto antigo da álgebra de encontrar as raízes de uma equação, extremamente relevantes, e por isso foram expostos neste trabalho.

Por fim, o trabalho contemplou a solubilidade por meio de radicais e outros métodos por entender que este método algébrico, na formação do estudante, incide sobre o mundo, uma leitura matemática das situações presentes em que estas podem ser modeladas e resolvidas através de manipulações com operações algébricas ou por outros mecanismos que também possibilitem esta resolução.

Referências

[1] Neto, a. c. m.. **Tópicos da Matemática Elementar: Introdução à Análise**, Rio de Janeiro, SBM, 2ª Ed., 2013.

[2] Garbi, g. g.. **O Romance das Equações Algébricas**, São Paulo, Editora Livraria da Física, 2ª Ed., 2007.

[3] Boyer, c. b.. **História da Matemática**, São Paulo, Editora Edgard Blücher ltda, 2ª Ed., 1996.

[4] Garbi, g. g.. **O Romance das Equações Algébricas**, São Paulo, Editora Livraria da Física, 2ª Ed., 2007.

[5] Livio, M.. **A equação de ninguém conseguia resolver**, Rio de Janeiro - São Paulo, Editora Record, 2008.

[6] Garcia, a.;Lequain, y.. **Elementos da Álgebra**, Rio de Janeiro, IMPA, 6ª Ed., 2013.

[7] Gonçalves, a.. **Introdução à Álgebra**, Rio de Janeiro, IMPA, p.128-130, 1979.

[8] Tunala, n..**Resolução geométrica da equação do 2º grau**. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n.12, p.33-35, 1998.

[9] dos Santos, E. G..**A Regra dos Sinais de Descartes**. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n.83, p. 45, 2014.

[10] Pontes, r. da s.. **Equações polinomiais: Solução Algébrica, geométrica e com auxílio de derivadas**, 2013. 79 f. (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, Paraíba. 2013.

[11] dos Santos, i. l. d.; Silva, g. n.. **Zeros de Polinômios**, Disponível em: $< http : //www2.peq.coppe.ufrj.br/Pessoal/Professores/Arge/EQE358/$ $Matlab_Octave/exemplos/zerosdepolinomios.pdf >$. Acesso em: 26 de julho de 2016.

[12] Abreu, m. de s. m. **Equações Polinomiais**, Disponível em: $< http : //www.mat.ufmg.br/\ espec/monografiasPdf/Monografia_MariadeSouza.pdf >$. Acesso em: 26 de julho de 2016.