UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

O ENSINO DE POLINÔMIOS UTILIZANDO A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO

Francisca Alves de Souza

Recife, Março de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

O ENSINO DE POLINÔMIOS UTILIZANDO A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Dra. Bárbara Costa da Silva

Recife, Março de 2016

Francisca Alves de Souza
O ENSINO DE POLINÔMIOS UTILIZANDO A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO/ Francisca Alves de Souza. – Recife, Março de 2016
?? p. il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientadora: Dra. Bárbara Costa da Silva

Dissertação – UFRPE, Março de 2016.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Dra. Bárbara Costa da Silva. II. UFRPE. III. O ENSINO DE POLINÔMIOS UTILIZANDO A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO

CDU 02:141:005.7

O ENSINO DE POLINÔMIOS UTILIZANDO A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO

Francisca Alves de Souza

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de Mestre em Matemática, defendida e aprovada por unanimidade em / /2016 pela comissão examinadora.

Orientadora:

Dra. Bárbara Costa da Silva

Banca examinadora:

Dr. Ross Alves do Nascimento
UFRPE

Dr. Paulo Figueiredo Lima
UFPE

Recife, Março de 2016

Dedico este trabalho a todas as pessoas que um dia, quando crianças, sonharam com um mundo encantado.

Agradecimentos

Agradeço, principalmente, a minha mãe por ser um exemplo de honestidade, de mulher, de coragem e por estar sempre ao meu lado.

A minha filha Yasmim, por ser meu porto seguro, pois os seus olhos me transmitem tranquilidade e paz.

Ao meu filho Yago, por ser o motivo da minha força e obstinação.

Ao meu companheiro de vida e amigo Carlos, por me apoiar e não deixar que o domo, o qual eu criei ao meu redor, o impedisse de ver a minha verdadeira essência.

A minha madrinha, carinhosamente chamada de Dindinha, por ter me dado seu amor e me ensinado o caminho da fé até os últimos instantes da sua vida. I will love you forever.

A minha bisavó, por me amar, mesmo que as vezes se esquecesse quem eu era.

A SBM por ter me proporcionado a oportunidade de cursar o mestrado do PROFMAT.

A CAPES por ter me dado recursos para cursar o PROFMAT.

E a Deus, por ter me amparado, me dado força para prosseguir e me ensinado a ser forte para poder vencer os obstáculos.

Nunca um fenômeno histórico se explica plenamente fora do estudo do seu momento. E isto é válido para todas as etapas da evolução. Para aquela em que vivemos, como para outras. Já um provérbio árabe dissera: "os homens parecem-se mais com o seu tempo que com os seus pais".
(Marc Bloch)

Resumo

Os polinômios são de suma relevância para a matemática e quando associados a funções modelam vários fenômenos do nosso dia a dia. Esse assunto é abordado, pela primeira vez, no 8º ano do ensino fundamental, porém os alunos chegam ao ensino médio e superior com várias dificuldades na aprendizagem do mesmo. Essas dificuldades ocorrem por inúmeros motivos, sendo um dos principais a aversão que os alunos tem pelas aulas de matemática e por essa razão este trabalho tem como um dos seus objetivos à apropriação da história da matemática como recurso didático para o ensino e aprendizagem de polinômios. O outro objetivo é elaborar uma material de apoio didático para ser utilizado na sala de aula. Para verificar a eficácia da utilização da história da matemática como recurso didático no ensino de polinômios foi realizada uma pesquisa com alunos da 1ª série do curso técnico em informática para internet integrado ao ensino médio do IFCE-Campus Crato, aplicando a seguinte metodologia: aplicação de um teste, o qual foi chamado de Teste 1, para verificar as dificuldades dos alunos na resolução de questões envolvendo o conceito de polinômios, depois foi realizada uma oficina para estudo de polinômios usando a história da matemática como recurso didático e para finalizar foi aplicado um segundo teste (Teste 2) para verificar se houve algum avanço na aprendizagem dos alunos.

Palavras-chaves: Polinômios, Ensino e Aprendizagem, História da Matemática.

Abstract

Polynomials are of paramount importance for mathematics and functions when associated with modeling various phenomena of our day to day. This subject is addressed for the first time in 8 years of elementary school, but students arrive at secondary and higher education with multiple learning difficulties of it. These difficulties occur for many reasons, the main one being the aversion that students have by math classes and for that reason this work has as one of its objectives to the history of mathematics ownership as a teaching resource for teaching and learning polynomials. The other goal is to develop a teaching support material for use in the classroom. To check the effectiveness of the use of the history of mathematics as a teaching resource in polynomial teaching a survey was conducted with students from the 1st series of technical course in informatics for integrated internet to high school the IFCE-Campus Crato, applying the following methodology: Application a test which was called Test 1, to check students' difficulties in resolving issues involving the concept of polynomials, then held a workshop for polynomials study using the mathematics of history as a teaching tool and to finish we applied a second test (Test 2) to see if there was some progress in student learning.

Key-words: Polynomials,Teaching and Learning, History of Mathematics.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Atualmente, nos cursos de Licenciatura em Matemática, está havendo uma preocupação mais acentuada com o estudo de formas e recursos que podem melhorar o ensino de matemática, e é realmente nessa fase que deve ser propiciado aos futuros docentes a oportunidade

> (...) de trabalhar segundo metodologias de ensino e de aprendizagem diversificadas, de modo a desenvolver uma variedade de conhecimentos, de capacidades, de atitudes e de valores. Esta exposição a diferentes métodos também funciona como um mecanismo de aprendizagem. (PONTE, 2000, p. 15)

Se faz necessário que o conhecimento da história dos conceitos matemáticos façam parte da formação dos professores para que os mesmos tenham elementos que lhes permitam mostrar aos discentes a matemática como uma ciência dinâmica sempre aberta à inserção de novos conhecimentos.

A História da Matemática é um recurso que pode e deve ser utilizado pelos docentes de matemática, já que a mesma é apontada por vários pesquisadores, tais como Ubiratan D'Ambrosio, Antonio Miguel, Maria Ângela Miorim, Arlete de Jesus Brito, Sérgio Roberto Nobre, Rosa Lúcia Sverzut Baroni e Dirk Jan Struik, como um instrumento didático importante no processo de ensino e aprendizagem de matemática, pois pode trazer inúmeras contribuições tanto para a formação dos professores de matemática como para os alunos dessa disciplina.

Por todos os motivos citados acima e também por tornar uma aula mais prazerosa é que esse trabalho utiliza a história da matemática como recurso didático no estudo de polinômios, objetivando a regressão da aversão que os discentes tem pela matemática, e conforme o PCN+:

> A matemática no ensino médio deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao londo da vida social e profissional. (PCN+, p. 111)

O conteúdo polinômio foi escolhido pelos seguintes motivos: devido à sua importância dentro do conhecimento matemático; para verificar se os alunos da 1ª série do ensino médio compreenderam esse assunto, visto que eles o estudaram no 8º ano do ensino fundamental; e porque esse assunto é revisto 3ª série do ensino médio, o que deveria resultar em um bimestre com as maiores notas e sem necessidade de se aplicar a recuperação bimestral, porém não é o que ocorre na prática.

Essa pesquisa foi desenvolvida com alunos da 1ª série do curso Técnico em Informática para Internet Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, localizado no estado do Ceará na cidade de Crato e para fazer a verificação citada acima foi aplicado um primeiro questionário chamado de Teste 1, após foi ministrado uma oficina cujo tema foi "O estudo de polinômios com relatos de história da matemática" utilizando uma apostila elaborada para tal ocasião e em seguida foi aplicado um segundo questionário denominado teste 2, e de posse dos resultados foi feito uma análise comparativa entre os testes conforme pode ser visto logo adiante.

1 Teste 1 e análise dos resultados

O Teste 1 foi aplicado para 29 alunos da 1ª série do curso Técnico em Informática para Internet Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, localizado no estado do Ceará na cidade de Crato. O objetivo desse teste era averiguar se os discentes ainda tinham dificuldades para resolverem situações-problema envolvendo o conceito de polinômios, pois teoricamente eles já deveriam ter se apropriado desse conhecimento, visto que esse assunto é ministrado no 8º ano do ensino fundamental. O teste foi composto por 15 questões, as quais abordam a definição, valor numérico, grau, produto notáveis, aplicação, operações, raízes de equações e fatoração de polinômios. Abaixo será mostrado a análise das respostas dos discentes em cada questão e depois uma análise mais geral dos resultados obtidos.

1.1 Análise das questões

1.1.1 Questão 1

Assinale a alternativa que representa um polinômio na variável x:

(a) $P(x) = x^{-3} + 5x$

(b) $P(x) = x^{\sqrt{2}} + 1$

(c) $P(x) = x^{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + 6x + 1$

(d) $P(x) = x^{\left(\frac{2}{1}\right)^{-1}} + 8x + 2$

Alternativa correta: C

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos (de um total de 29 participantes conforme foi especificado acima) que assinalaram cada alternativa da questão 1.

Tabela 1 – Questão 1T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	44,9
b	13,8
c	31,0
d	3,4
n.a. (não assinalou)	6,9

O objetivo dessa questão era verificar se os alunos conheciam a definição de polinômio, definição essa estudada por todos eles no 8º ano do ensino fundamental. Considerando que esses alunos estão concluindo a 1ª série do ensino médio (último mês de aula) e o nível da questão vês-se que eles não se apropriaram da definição, pois somente

31,0% assinalaram a alternativa correta. Um fato importante é que dois alunos não assinalaram nenhuma das alternativas, deixando os seguintes questionamentos: Ele não sabia e por isso não assinalou ou estava com pressa para entregar? Vale ressaltar que esses alunos ao responderem a pergunta: Quais são seus sentimentos em relação as aulas de matemática? feita no primeiro dia de aula da oficina, responderam que não gostava ou tinha sono durante as aulas e por incrível que pareça um dos mesmos só faltou as aulas do dia 22/01 e durante as aulas parecia esta se sentindo bem e não dormiu, o que leva a constatar que o recurso utilizado surtiu efeito positivo. Se faz necessário ressaltar que dia 22/01 além de ser uma sexta-feira (eles não tem aula na sexta), chovia bastante e nossa escola é localizada no sítio Almecegas, o que dificulta ainda mais o acesso.

1.1.2 Questão 2

Sendo $Q(x) = -x^2 - 5x + 6$, então o valor numérico de $Q(x)$ quando x for igual a -2 é:

(a) 12 (b) 20 (c) 0 (d) 16

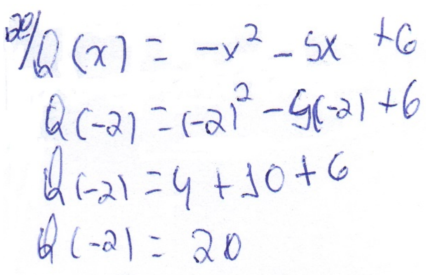
Alternativa correta: A

Através tabela abaixo pode-se ver o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 2.

Tabela 2 – Questão 2T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	34,5
b	44,8
c	20,7
d	0

Essa questão é de nível bastante fácil e seu objetivo era verificar se os alunos sabiam determinar o valor numérico de um polinômio. De acordo com a **Tabela 2** observa-se que 44,8% dos alunos assinalaram a alternativa B, porém a alternativa correta é a A. Analisando as respostas feitas pelos alunos que assinalaram a alternativa B, vê-se que todos fizeram o seguinte cálculo:



Com base no cálculo acima observa-se a falta de atenção desses alunos no momento de resolver uma expressão numérica.

1.1.3 Questão 3

Seja $P(x) = 0$ o polinômio identicamente nulo, então o grau de $P(x)$ é:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) Nenhuma das respostas anteriores.

Alternativa correta: D

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que que assinalaram cada alternativa da questão 3.

Tabela 3 – Questão 3T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	31,0
b	17,2
c	24,1
d	20,7
n.a. (não assinalou)	7,0

O objetivo dessa questão era verificar se o discente compreendia a definição de grau de um polinômio. Porém analisando a **Tabela 3** construída acima, observa-se que 79,3% dos alunos não se apropriaram desse conhecimento, pois somente 20,7% dos discentes assinalaram a alternativa correta, que é a D. Porém a maioria (31,0 %) assinalaram a alternativa A, o que mostra que eles confundem os conceitos de grau do polinômio identicamente nulo com o próprio polinômio.

1.1.4 Questão 4

Considere os polinômios $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ e $Q(x) = 2x^2 - 5x - 2$. Sabendo $K(x)$ é o polinômio determinado pelo produto de $P(x)$ e $Q(x)$, então o grau de $K(x)$ é:

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6

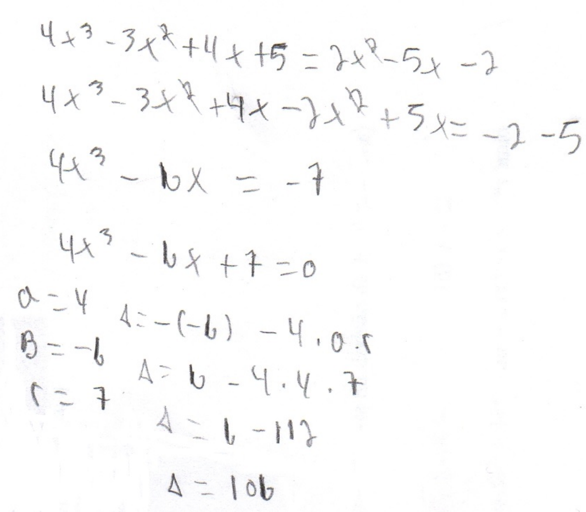
Alternativa correta: C

Veja abaixo a tabela que mostra o percentual de alunos (de um total de 29 participantes) que assinalaram cada alternativa da questão 4.

Tabela 4 – Questão 4T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	10,3
b	27,6
c	31,0
d	24,1
n.a. (não assinalou)	7,0

Essa questão visava verificar se o aluno sabia multiplicar polinômios. Com base na tabela **Tabela 4** observa-se que 27,6% dos alunos assinalaram a alternativa D, o que leva a acreditar que eles acham que a multiplicação de polinômios preserva o maior grau dos polinômios envolvidos e 31,0% assinalaram a alternativa C, que era a correta, mas somente 13,8% desses alunos fizeram algum tipo de cálculo. Um erro que foi verificado, talvez por falta de atenção na leitura do enunciado ou por não saberem ler e interpretar textos, foi o cálculo de raízes de equação polinomiais sem a questão pedir essa resposta. Mas o que chama mais atenção é que eles usaram a fórmula resolutiva de Bhaskara sem o polinômio ser de grau 2, como pode ser observado abaixo.



1.1.5 Questão 5

Desenvolvendo o polinômio $Q(x) = (2x - 3)^2$, obtemos:

(a) $4x^2 - 12x - 9$

(b) $4x^2 + 12x + 9$

(c) $4x^2 - 12x + 9$

(d) $4x^2 + 12x - 9$

Alternativa correta: C

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 5.

Tabela 5 – Questão 5T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	3,4
b	27,6
c	51,7
d	10,3
n.a. (não assinalou)	7,0

Essa questão poderia resolvida de duas formas: a primeira efetuando a multiplicação $(2x - 3) \cdot (2x - 3)$ e depois agrupando os termos semelhantes e a segunda pela fórmula do quadrado da diferença de dois termos. A primeira forma foi escolhida por 10,3% dos alunos e todos eles fizeram o cálculo corretamente. A segunda forma foi escolhida por 13,8% dos discentes, mas somente 50% desses fizeram o cálculo correto. Os outros 75,9% não fizeram cálculo algum e desses 17,2% assinalaram corretamente a questão, o que leva-se ao seguinte questionamento: Eles realmente sabiam resolver a questão?. Em um dos cálculos feitos pelos discentes observa-se a busca incansável pelas raízes de equações, mesmo sem ser pedido na questão, o mais uma vez vem mostrar a dificuldades de interpretar um testo simples. O que fica claro com essa análise é que mesmo a questão sendo de nível fácil 48,3% dos alunos que fizeram o teste não dispõem do conhecimento necessário para obter êxito na resolução dessa atividade.

1.1.6 Questão 6

A expressão $V(x) = x^3$ representa o volume de um cubo e x a medida da aresta de cada face. Se $V(x) = 343\ cm^3$, então o valor de x é:

(a) 7^0 (b) 7^1 (c) 7^2 (d) 7^3

Alternativa correta: B

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 6.

Tabela 6 – Questão 6T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	0
b	17,2
c	3,4
d	79,4

Observando a **Tabela 6** conclui-se que 79,4 % dos alunos assinalaram a alternativa D, mas a alternativa correta é a B. Esse fato ocorreu porque os discentes não tiveram atenção suficiente para perceber que o valor da medida da aresta era a base da potência e não a própria potência, mesmo sendo dito no enunciado da questão e eles já terem estudado como resolver equações exponenciais. Mas vale ressaltar que eles souberam decompor 343 em fatores primos.

1.1.7 Questão 7

Para que o polinômio $P(h) = h^2 - Ah + 16$ seja um quadrado perfeito, o valor de A deve ser:

(a) $2+2$ (b) $2+4$ (c) $2+6$ (d) $2+8$

Alternativa correta: C

A tabela abaixo mostram o percentual de alunos (de um total de 29 participantes) que assinalaram cada alternativa da questão 7.

Tabela 7 – Questão 7T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	41,4
b	20,7
c	20,7
d	13,8
n.a. (não assinalou)	3,4

Essa questão é de nível básico e mesmo assim somente 20,7% dos alunos marcaram a alternativa C, que é a alternativa correta. Já 41,4% assinalaram a alternativa A, esquecendo que deveria multiplicar por 2 para obter o resultado correto. Mas observa-se ainda que as alternativas B e C tiveram a mesma porcentagem de escolha, o que vem mais a evidenciar que os alunos não dominam o conhecimento de produtos notáveis.

1.1.8 Questão 8

A área de um quadrado é dada pelo polinômio $A(x) = 4x^2 + 24x + 36$, então o binômio que representa o valor do lado desse quadrado é:

(a) $2(x+3)$ (b) $2(x-3)$ (c) $4(x-3)$ (d) $4(x+3)$

Alternativa correta: A

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 8.

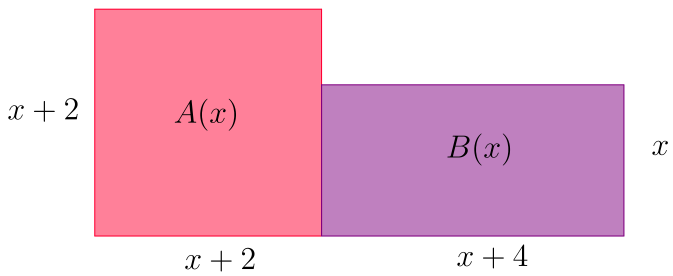
Tabela 8 – Questão 8T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	41,4
b	10,3
c	17,2
d	24,1
n.a. (não assinalou)	7,0

Para resolver essa questão o discente deveria colocar o 4 em evidência, ou seja, $4(x^2+6x+9)$, em seguida escrever o trinômio $(x^2+6x+9) = (x+3)^2$ como um produto notável e depois extrair a raiz quadrada do produto $4(x+3)^2$. A alternativa A (correta) foi escolhida por 41,4% dos alunos e 24,1% assinalaram a alternativa D, ou seja, alguns alunos confundiram as respostas porque não extraíram a raiz quadrada e 10,3% dos discentes não souberam diferenciar o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois termos, sendo mais uma vez confirmada a dificuldade que eles tem nesse assunto.

1.1.9 Questão 9

Sejam $A(x)$ e $B(x)$ os polinômios que representam as áreas das figuras nas cores rosa e lilás, respectivamente. O polinômio $P(x) = A(x) + B(x)$ é dado por:



(a) $2x^2+8x+8$

(b) $2x^2+4x+4$

(c) $2x^2+8x+4$

(d) x^2+4x

Alternativa correta: C

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 9.

Tabela 9 – Questão 9T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	17,2
b	31,0
c	44,8
d	7,0

44,8% dos alunos acertaram essa questão (alternativa correta C), isso indica que eles tem conhecimento de como calcular a área de retângulo (decoram fórmulas), mas somente esse conhecimento não era suficiente para solucionar a questão 9. Dos alunos que acertaram essa questão somente 13,8% fizeram os cálculo necessários e todos corretamente, mas 20,7% só assinalaram sem demostrar o porque escolheram a alternativa A. O que leva a questionar se eles sabiam mesmo como resolver a questão ou simplesmente assinalaram qualquer alternativa visto que eles erraram questões mais simples do que essa.

1.1.10 Questão 10

Considere $P(x) = x^2 - 25$ e $D(x) = x - 5$. O quociente da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ é igual a:

(a) $x - 5$ (b) $x - 25$ (c) $x + 5$ (d) $x + 25$

Alternativa correta: C

Por intermédio da tabela abaixo pode-se ver o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 10.

Tabela 10 – Questão 10T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	37,9
b	13,8
c	34,5
d	13,8

As alternativas B e D tiveram a mesma porcentagem de escolha pelos alunos (13,8%), mas 37,9% assinalaram a alternativa A evidenciando que os alunos não compreendem o produto da soma pela diferença de dois termos. Com base em análises anteriores e na resposta dessa questão constata-se, novamente, a falta de conhecimentos de produtos notáveis por parte dos alunos.

1.1.11 Questão 11

Sabendo que $R(a) - F(a) = 0$ e que $F(a) = 6a^3 + 5a^2 - 3a - 2$,então o polinômio $R(a)$ é:

(a) $-6a^3 - 5a^2 + 3a + 2$

(b) $6a^3 + 5a^2 - 3a + 2$

(c) $6a^3 + 5a^2 - 3a - 2$

(d) $6a^3 + 5a^2 + a + 2$

Alternativa correta: C

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 11.

Tabela 11 – Questão 11T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	58,7
b	17,2
c	20,7
d	0
n.a. (não assinalou)	3,4

Mesmo a questão sendo de extremamente fácil para a série cursada pelos alunos somente 20,7% acertaram (assinalaram a alternativa C) e ainda assim 79,3% dos mesmos erraram a questão. Observando a **Tabela 11** verifica-se que 58,7% dos discentes assinalaram a alternativa A, o que deixa evidente que esses alunos tem dificuldade para resolver equações, mesmo sendo a mais simples possível.

1.1.12 Questão 12

Efetuando a divisão de $2x^2 + 5x + 3$ por $x + 2$, obtemos o resto $R(x)$ e o quociente $Q(x)$, como vemos abaixo:

$$\begin{array}{c|c} 2x^2 + 5x + 3 & \underline{\quad x + 2 \quad} \\ R(x) & Q(x) \end{array}$$

A alternativa que contém $R(x)$ é:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Alternativa correta: B

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 12.

Tabela 12 – Questão 12T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	0
b	27,6
c	44,8
d	20,7
n.a. (não assinalou)	6,9

Observando os resultados apresentados na **Tabela 12**, percebe-se que a maioria dos alunos (44,8%) marcaram a letra C e 27,6% assinalaram a alternativa B, que é a correta. Observando os dados acima verifica-se que mesmo os alunos tendo visto divisão de polinômios no 8º ano do ensino fundamental não foi eficaz a aprendizagem desse assunto, o que irá dificultar a aprendizagem de outros conteúdos que o tenham como pré-requisito.

1.1.13 Questão 13

As raízes do polinômio $M(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, em ordem crescente, são:

(a) 1 e $-\frac{1}{2}$ (b) 1 e $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}$ e 1 (d) $\frac{1}{2}$ e 1

Alternativa correta: D

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos (de um total de 29 participantes) que assinalaram cada alternativa da questão 13.

Tabela 13 – Questão 13T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	10,3
b	34,5
c	27,6
d	20,7
n.a. (não assinalou)	6,9

Como foi visto na questão 4 os alunos ao se deparem com equações polinomiais, não importando o grau, calculam as raízes e esperava-se que todos acertassem essa questão, porém somente 20,7% assinalaram a alternativa D, que era a correta. Mas o que era inesperado é que 79,3% dos alunos errassem a resolução da mesma, principalmente porque não era necessário fazer cálculos para obter a resposta bastava utilizar as relações de Girard para um polinômio de grau dois, o que é ensinado no 9º ano como regra da soma e do produto das raízes. Mais uma vez fica evidente que os discentes não compreendem a maioria das definições matemáticas estudadas até o momento.

1.1.14 Questão 14

Fatorando o polinômio $Q(y) = y^4 - 5y^2 + 4$, obtemos:

(a) $Q(x) = (y-1)(y+1)(y-2)(y+2)$

(b) $Q(x) = (y+1)(y+1)(y-2)(y+2)$

(c) $Q(x) = (y-1)(y+1)(y+2)(y+2)$

(d) $Q(x) = (y-1)(y-1)(y-2)(y+2)$

Alternativa correta: A

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos (de um total de 29 participantes) que assinalaram cada alternativa da questão 14.

Tabela 14 – Questão 14T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	20,7
b	17,2
c	38,0
d	13,8
n.a. (não assinalou)	10,3

38,0% assinalaram a alternativa C, mas somente 20,7% assinalaram a correta (alternativa A). Observa-se que 10,3% não assinalou nenhuma das alternativas e novamente fica a incógnita do por quê. Essa questão poderia ser resolvida utilizando as equações biquadradas vistas no 9º ano e mais uma vez constata-se a deficiência na aprendizagem da álgebra dos polinômios.

1.1.15 Questão 15

A soma e o produto das raízes da equação polinomial $x^2 - x + 3 = 0$ pertencem ao conjunto:

(a) $\{-1, 1, 2\}$ (b) $\{-1, 1, 3\}$ (c) $\{-2, 1, 2\}$ (d) $\{-1, 2, 3\}$

Alternativa correta: B

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos (de um total de 29 participantes) que assinalaram cada alternativa da questão 15.

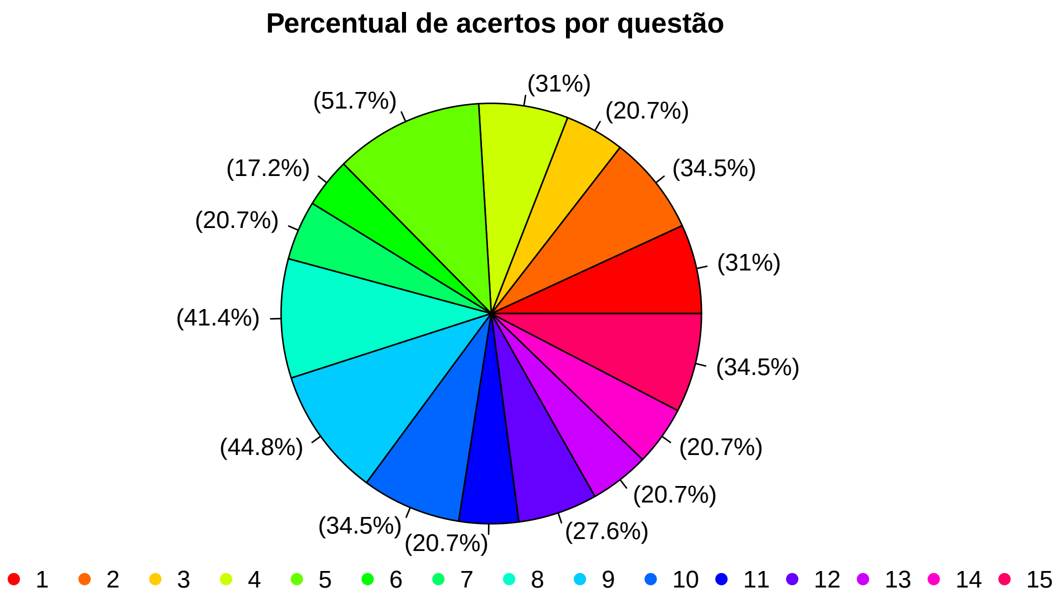
Tabela 15 – Questão 15T1

Alternativa	Percentual de alunos
a	24,1
b	34,5
c	24,1
d	10,3
n.a. (não assinalou)	7,0

Essa última questão visava verificar se o aluno sabia identificar a soma e o produto das raízes de uma equação polinomial de grau 2 sem efetuar o cálculo das raízes pela fórmula usual, porém 65,5% ainda erraram essa questão que é de nível muito fácil para a série que eles estão cursando. Somente 34,5% assinalaram a alternativa correta (B). O que mais uma vez comprova a deficiência na aprendizagem de polinômios e a necessidade de se trabalhar esse conteúdo de forma minuciosa em sala de aula.

1.2 Análise dos resultados

O gráfico abaixo mostra o percentual de alunos (de um total de 29 participantes) que acertaram cada questão do Teste 1. O percentual médio de acertos por questão foi de aproximadamente 30,1%.



Após analisar o gráfico acima, pode-se concluir que em 93,3% das questões o índice de acertos não foi satisfatório. No gráfico verifica-se ainda que a questão como o maior índice de acerto foi a 5 com 51,7% e a questão com o menor índice de acerto foi a questão 6 com 17,2%, mesmo sendo uma questão bastante simples. Com base na análise constata-se que os discentes não entenderam a álgebra dos polinômios ensinada no ensino fundamental, mesmo eles tendo sido aprovados na disciplina de matemática, e por esse motivo mostram grandes dificuldades em utilizar o pouco conhecimento que foi "adquirido". Em resumo, os alunos não conseguiram ter efetivo acesso a esse conhecimento e cuja importância, não só para o meio acadêmico, mas também para a vida é imprescindível. De acordo com Miranda (apud GRANDO, 2006):

> [...] os conceitos do campo algébrico constituem um conjunto de conhecimentos bastante significativos para que o aluno desenvolva sua capacidade de análise e síntese, de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas (p. 56).

Portanto, ler, compreender e aprender a resolver problemas algébricos, é conseguir ver os caminhos possíveis para encontrar a solução de problemas da vida cotidiana e modelá-los com os recursos oferecidos pela álgebra, tornando-os mais simples de serem resolvidos.

2 O estudo de polinômios com relatos de história da matemática

Neste capítulo é apresentado o material didático que foi elaborado para ser usado na sala de aula com a turma que fez o Teste 1. Esse material explora o estudo dos polinômios e utiliza tópicos de História da Matemática para despertar o interesse dos discentes pelo conteúdo ministrado, também traz um texto com uma estética mais atrativa visualmente. Os planos das aulas ministradas para os discentes se encontram nos anexos.

O IFCE oferece 60 vagas para curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio todo ano, porém em 2015 as vagas não foram preenchidas e somente 48 alunos foram matriculados. Foram criadas duas turmas cada uma com 24 alunos, porém houve 6 transferências logo no primeiro bimestre e 8 desistências no decorrer dos outros dois bimestres. Então, a coordenação decidiu juntar as duas turmas e hoje só há uma turma de 1ª série desse curso técnico com 34 alunos, sendo que alguns não comparecem as aulas de matemática nesse 4º bimestre porque já estão em dependência para o próximo ano.

Devido aos resquícios de duas greves pelas quais passamos o ano letivo de 2015 só iniciou em março e seu término foi em fevereiro de 2016. Ficou acordado com a coordenação que seria destinado a oficina para estudo de polinômios 12 aulas (sendo que 2 dessas aulas aplicação do Teste 2), conforme tabela abaixo:

Tabela 16 – Horário de aulas da oficina

Data	Plano	Horário	Total de aulas
11/01/2016	1	13:15 às 14:05	1
15/01/2016	2	7:15 às 8:55 e 9:05 às 9:55	3
18/01/2016	3	13:15 às 14:05	1
22/01/2016	4	7:15 às 8:55 e 9:05 às 9:55	3
26/01/2016	5	13:15 às 14:55	2
29/01/2016	Aplicação do Teste 2	7:15 às 8:55	2

O texto a seguir foi elaborado com base nos livros e revista citados de [1] a [11] nas referências bibliográficas.

2.1 Origem da Álgebra

Era uma vez...

Vou contar-lhe uma pequena história. Você está preparado para ouvir? Sente-se e vamos dar um passeio em um mundo cheio de aventuras e feitos. Sabe que mundo é esse? Não? Pense bem. É o nosso. Então comecemos.

[1]

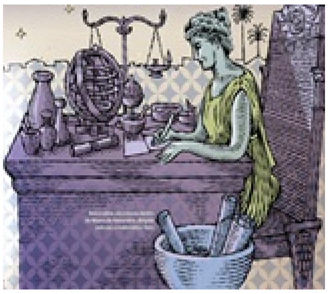


Figura 1 – Hipátia

A civilização egípcia desenvolveu-se ao longo de uns quatro mil anos e deixou-nos marcas maravilhosas. As mais conhecidas são, claro, as pirâmides de Gisé e a Esfinge. Vamos abordar um pouco a herança matemática destes ilustres antepassados. A nossa fonte principal é um papiro, contendo problemas de matemática, escrito por volta de 1650 a.E.C. Este documento contém 85 enunciados copiados em escrita hierática (escrita hieroglífica simplificada usada para escrever textos com um pincel em tiras de papiro), cujo autor foi Ahmes, ficou conhecido pelo nome do historiador escocês que o comprou no século XIX, Alexander Henry Rhind.

O papiro de Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga, descreve os métodos de multiplicação e divisão, o uso que fazia das frações unitárias, seu emprego da regra da falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a situações práticas.[2] Vejamos um exemplo:

Problema 24: O valor de "aha" se "aha" e um sétimo de "aha" é 19.

Para solucionar o problema os egípcios utilizavam uma técnica denominada *método falsa posição*. Esse método consistia em escolher um valor arbitrário para "aha" e a partir deste valor eles faziam os cálculos e comparavam com o resultado, mas provavelmente não era o resultado esperado. Por isso eles utilizavam um fator de correção para obter o valor correto de "aha", ou seja, o valor que satisfaz a expressão. Seguindo o método egípcio vamos resolver o problema e encontrar o valor de "aha".

Solução:

Seja "aha"$= 7$. Logo, um sétimo de "aha" é 1 e consequentemente "aha" e um sétimo de "aha" é $7 + 1 = 8 \neq 19$. Então, o fator de correção é um número que multiplicado por 8 é igual a 19, ou seja, $\frac{19}{8}$. Portanto, o valor de "aha" é $\frac{19}{8} \cdot 7 = \frac{133}{8}$

■

Esse problema transcrito para a linguagem matemática moderna seria:

Problema 24: Determine o valor que somado a sua sétima parte é igual a 19.

Solução:

[1] (Imagem copiada do google) Dica: assista ao filme Alexandria

[2] Texto com base no livro: 10 livros, 10 regiões, 10 jogos para aprender e divertir-se

Seja x o valor procurado, ou seja, o "aha" citado anteriormente. Escrevendo o enunciado na linguagem matemática atual, temos: $x + \frac{1}{7}x = 19$. Logo,

$$\begin{aligned}
x + \frac{1}{7}x = 19 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{7}x = 19\right) \cdot 7 \\
&\Leftrightarrow \quad 7x + 1x = 133 \\
&\Leftrightarrow \quad 8x = 133 \\
&\Leftrightarrow \quad (8x = 133) \div 8 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{133}{8}
\end{aligned}$$

■

Observemos que o problema se resume em encontrar a raiz de uma equação algébrica $\left(x + \frac{1}{7}x = 19\right)$, ou seja, o valor x para que o polinômio $P(x) = x + \frac{1}{7}x$ tenha como valor numérico 19 ($P(x) = 19$).

O papiro de Ahmes ou Rhind, como é mais conhecido, é o documento que marca a origem da álgebra, em especial o surgimento dos polinômios na nossa história, já que os polinômios fazem parte da álgebra. Agora, que tal aprendermos um pouco mais de álgebra, ou melhor, da álgebra dos polinômios? Mas o que é um polinômio? Essa resposta vamos ter em breve.

2.2 O Cálculo Algébrico

Mais uma história? Sim! Que ótimo. Continuemos.

[3]

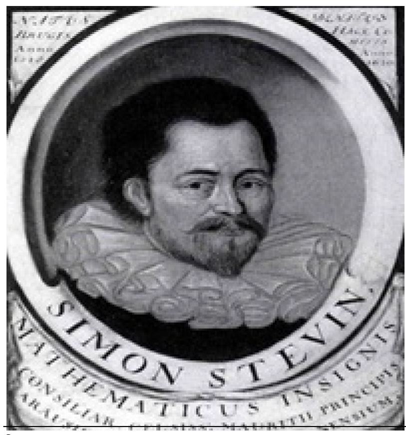


Figura 2 – Simon Stevis

Simon Stevis (1548-1620) nasceu em Brugues, foi comerciante em Antuérpia, viajou pela Dinamarca e para fora da Europa, e aos 35 anos ingressou na Universidade de Leyden, onde estudou matemática, grego e engenharia.

Apesar de ter entrado com idade fora do padrão (por motivos familiares), continuou como professor durante alguns anos, tornando-se amigo de um aplicado

[3] Imagem copiada do google

aluno, o príncipe Maurício de Nassau. Mais tarde, este o tornou diretor do departamento do exército holandês, responsável pela construção de armamentos e de navios. Stevis foi um engenheiro genial e como tal supervisionou a construção de estradas, de vias navegáveis e de outras obras públicas, construiu com incursões na óptica, na qual deixou algumas obras, e na hidrostática, com experiências que comprovaram que a pressão exercida no fundo de um recipiente por um líquido, depende, principalmente, da sua altura.

Suas principais contribuições foram na estática e na matemática. Na matemática, Simon foi o primeiro a estudar de forma metódica e minuciosa o sistema de frações decimais e suas aplicações, os números inteiros e os números irracionais, estudo esse que facilitou o *cálculo algébrico*, cuja definição segundo José Adelino Serrasqueiro [4] é a reunião dos processos empregados para efetuar as operações algébricas, ou seja, os processos usados para transformar uma expressão algébrica em outra equivalente. Ele fez um estudo unificado das equações quadráticas e apresentou métodos para obtenção de soluções aproximadas de equações algébricas de qualquer grau, em outras palavras ele estudou equações polinomiais de grau n [6]. Agora vamos estudar essas expressões algébricas? Ótimo, eu sabia que você ia querer continuar.

2.2.1 Expressão Algébrica

Definição: É toda expressão que tem apenas letras, ou apenas números, ou números e letras.

Exemplos:

(1) mn (2) $3m + 2n$ (3) 5

2.2.2 Classificação das Expressões Algébricas

As expressões algébricas podem ser classificadas da seguinte forma:

[4] Álgebra Elementar: Livro Primeiro, Capítulo I, Noções preliminares §2º Expressões algébricas

$$\text{Expressão algébrica} \begin{cases} \text{Irracional} \\ \text{Racional} \\ \text{Racional inteira} \\ \text{Racional fracionária} \end{cases}$$

Vejamos abaixo cada uma delas.

Expressão Algébrica Irracional: É toda expressão algébrica que apresenta letras no radicando.

Exemplos:

(1) $\sqrt{x} + y$ (2) $2\sqrt{a} - \frac{b}{3}$

Expressão Algébrica Racional: É toda expressão algébrica que não apresenta letras no radicando.

Exemplos:

(1) $\frac{\sqrt{3} + 2a}{3b}$ (2) $2x^2 - 5x + 1$

Expressão Algébrica Racional Inteira: É toda expressão algébrica racional que não apresenta letras no denominador.

Exemplos:

(1) $\frac{\sqrt{3} + 2a}{3}$ (2) $2x^2 - 5x + 1$

Expressão Algébrica Racional Fracionária: É toda expressão algébrica racional que apresenta letras no denominador.

Exemplos:

(1) $\frac{\sqrt{3} + 2a}{3b}$ (2) $\frac{2x + y}{x - y}$

2.2.3 Valor Numérico de uma Expressão Algébrica

Vamos entender o que significa *valor numérico* de uma expressão algébrica por intermédio de um exemplo.

Exemplo: Em uma gráfica cada xerox custa $ 0,20. Que expressão algébrica relaciona o valor a ser pago e a quantidade de cópias? Se João vai xerocar 30 páginas, quanto ele deve pagar?

Solução:

Cada cópia custa $ 0,20 e o valor a ser pago depende da quantidade de cópias. Então, podemos pensar da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Quantidade de cópias} & \longrightarrow & \text{Valor a ser pago (\$)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
(1^{\text{a}} \text{ linha})\ 1 & \longrightarrow & 1 \cdot 0,20 = 0,20 \\
(2^{\text{a}} \text{ linha})\ 2 & \longrightarrow & 2 \cdot 0,20 = 0,40 \\
(3^{\text{a}} \text{ linha})\ 3 & \longrightarrow & 3 \cdot 0,20 = 0,60 \\
(4^{\text{a}} \text{ linha})\ x & \longrightarrow & x \cdot 0,20 = 0,20x
\end{array}$$

Observe que na 4^{a} linha foi colocado a letra x para indicar a quantidade de cópias, pois essa quantidade é variável. Ou seja, a letra ocupa o lugar de um número.

Sejam x a quantidade de cópias e $V(x)$ o valor a ser pago, então a expressão algébrica procurada é $V(x) = 0,20x$.

Como João vai xerocar 30 páginas, então o valor a ser pago é $30 \cdot 0,20 = \$\,6,00$. Veja que para determinar o valor a ser pago é só substituirmos o x na expressão $V(x) = 0,20x$ por 30. Logo, 6 é o valor numérico da expressão algébrica encontrada.

Em outras palavras, para encontrar o valor numérico de uma expressão algébrica basta substituir as variáveis por números.

Definição: Dado o número a e a expressão $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$, chamamos de valor numérico de $P(x)$ em a o valor obtido quando substituímos o x por a na expressão $P(x)$, ou seja $P(a)$.

Exemplo: Calcule o valor numérico da expressão $Q(x) = \dfrac{3x^2 - 5x}{x+3}$ para $x = 4$.

Solução:

Substituindo x pelo seu valor, que é 4, na expressão $Q(x) = \dfrac{3x^2 - 5x}{x+3}$, obtemos:

$$\begin{aligned} Q(4) &= \frac{3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4}{4+3} \\ &= \frac{3 \cdot 16 - 20}{7} \\ &= \frac{48 - 20}{7} \\ &= \frac{28}{7} \\ &= 4 \end{aligned}$$

2.3 Monômios

Você gostou das histórias anteriores? Eu sabia que você ia gostar. Então, que tal mais uma? Formidável, então vamos a história.

[5]

Figura 3 – Tartaglia

Nicolo Fontana nasceu em 1501 na cidade italiana de Bréscia. Em 1512 a Bréscia foi invadida pelas tropas francesas e o jovem Nicolo foi gravemente ferido por golpes de espadas de um soldado e por esse motivo ficou com uma profunda cicatriz na boca, o que lhe ocasionou um defeito na fala e por isso recebeu o apelido de Tartaglia, que quer dizer gago. Segundo a história ele foi deixado para morrer, mas sua mãe o encontrou e por não ter remédios para tratar seus ferimentos ela procedeu da mesma forma que gatos e cachorros fazem para cuidar dos seus filhotes. Porém, foi esse cuidado que salvou a vida do seu filho.

Tartaglia não frequentou a escola devido suas posses serem escassas, por isso estudou sozinho em casa nos livros que conseguia encontrar. Sem dinheiro para comprar

[5] Imagem copiada do google

papel, tinta e pena, escrevia com carvão sobre paredes, alguns historiadores dizem que as lápides também serviam como cadernos. Dono de uma memória extraordinária, Nicolo aprendeu a ler e escrever por conta própria, e rapidamente obteve conhecimento de latim, grego e matemática, tornando-se professor de matemática em Veneza, Verona, Bréscia e Vicenza. Tartaglia publicou diversas obras, sendo a mais conhecida um tratado sobre aritmética, no qual ele abordou operações numéricas e regras comerciais. Foi o primeiro a realizar cálculos de artilharia e participou de vários debates.

Porém, o que o colocou no anais da matemática foi sua rivalidade com Cardano sobre o método de resolução das equações cúbicas. Vamos entende melhor essa história.

Fiore, obtendo o método de resolver equações cúbicas algebricamente de Del Ferro, desafiou Tartaglia para ver se ele era capaz de encontrar soluções para as tais equações, mas ele não sabia que Tartaglia já havia descoberto a solução geral de equações do tipo $x^3 + px^2 = q$. A disputa ocorreu em 1535 e cada participante deveria apresentar 30 questões para o outro resolver. Tartaglia apresentou várias questões distintas colocando Fiore em uma situação desconfortável, pois o mesmo não tinha conhecimento do que se gabava. Já era de se espera o resultado, ou seja, Fiore mostrou-se incapaz de solucionar os problemas propostos.

Esse episódio despertou a curiosidade de Cardano, o qual não sabia solucionar as equações polinomiais de grau 3, então ele entrou em contato com Tartaglia e solicitou o método de resolução para publicar no livro que ele estava escrevendo. Tartaglia se recusou, pois ele mesmo queria publicar, então Cardano prometeu manter o método em segredo e em seguida quebrou a promessa, mesmo dando os créditos a seu inventor.Tartaglia ficou muito chateado e escreveu um livro publicando sua descoberta e de certo modo insultando Cardano. [6]

Definição: Monômios são expressões algébricas racionais inteiras representadas por um único produto.

Exemplo (1):

$$\begin{tikzcd}
5x^3y^2 \arrow[r] \arrow[d] & 5 \text{ (Coeficiente)} \arrow[d] \\
x^3y^2 \text{ (Parte literal)} \arrow[r] & \text{monômio}
\end{tikzcd}$$

[6] Dica: visite a página https://pt.wikipedia.org/wiki/Tartaglia e leia mais sobre essa história

Exemplo (2):

$$\begin{tikzcd} -\frac{2}{7}ab^3m \arrow[r] \arrow[d] & -\frac{2}{7}\ \text{(Coeficiente)} \arrow[d] \\ ab^3m\ \text{(Parte literal)} \arrow[r] & \text{monômio} \end{tikzcd}$$

Exemplo (3):

$$\begin{tikzcd} \sqrt{2}\,x \arrow[r] \arrow[d] & \sqrt{2}\ \text{(Coeficiente)} \arrow[d] \\ x\ \text{(Parte literal)} \arrow[r] & \text{monômio} \end{tikzcd}$$

Exemplo (4):

$$\begin{tikzcd} ab^5 \arrow[r] \arrow[d] & 1\ \text{(Coeficiente)} \arrow[d] \\ ab^5\ \text{(Parte literal)} \arrow[r] & \text{monômio} \end{tikzcd}$$

Exemplo (5):

$$\begin{tikzcd} 10 \arrow[r] \arrow[d] & 10\ \text{(Coeficiente)} \arrow[d] \\ \text{não tem parte literal} \arrow[r] & \text{monômio} \end{tikzcd}$$

Observação: Quando "não tiver" a parte literal denominamos monômio constante

2.3.1 Grau de um Monômio

Definição: O grau (gr) de um monômio cujo coeficiente não é nulo é indicado pela soma dos expoentes da parte literal.

Exemplos:

(1) $4x^2y^2 \Longrightarrow gr = 4$

(2) $\frac{2}{3}ab^2 \Longrightarrow gr = 3$

(3) $-7 \Longrightarrow gr = 0$

2.3.2 Monômios Semelhantes

Definição: São aqueles que possuem a mesma parte literal ou não possuem parte literal.

Exemplos:

(1) $4x$ e $-7x$

(2) 8 e -3

(3) $7z^2y$ e $9z^2y$

2.3.3 Operações com Monômios

Adição e Subtração: É obtida somando-se algebricamente os coeficientes e conservando-se a parte literal dos monômios semelhantes.

Exemplos:

(1) $24x^2 + 12x^2 = 36x^2$

(2) $-10x + 6x = -4x$

Multiplicação: É obtida multiplicando os coeficientes e depois as partes literais.

Exemplo: $(5a^2b).(-3a) = -15a^3b$

Divisão: É obtida dividindo os coeficientes e depois as partes literais.

Exemplo: $(12a^4b^3) \div (2ab^2) = 6a^3b$

Nem sempre é possível efetuar a divisão, vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo: $(30a^2b^3) \div (7a^3) = \frac{30b^3}{7a} = \frac{30}{7}a^{-1}b^3$

A parte literal é $a^{-1}b^3$, mas o expoente da variável a é negativo. Logo, $\dfrac{30b^3}{7a}$ não é um monômio.

Potenciação: É obtida elevando o coeficiente e a parte literal à potência indicada.

Exemplo: $(-5ab^2)^3 = (-5)^3.(a)^3.(b^2)^3 = -125a^3b^6$

Radiciação: É obtida extraindo a raiz n-ésima do coeficiente e dividindo o expoente de cada variável por n.

Exemplos:

(1) $\sqrt{25y^2} = \sqrt{25}.y^{\frac{2}{2}} = 5y$

(2) $\sqrt[5]{32x^{10}y^5} = \sqrt[5]{32}.x^{\frac{10}{5}}.y^{\frac{5}{5}} = 2x^2y$

Observe o índice do radical e os expoentes da parte literal em cada exemplo e veja que os expoentes são múltiplos do índice, por isso é possível efetuar a radiciação. Mas nem sempre é possível. Vejamos abaixo:

Exemplos:

(1) $\sqrt{3y^3} = \sqrt{3}.y^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}y^{1,5}$, veja que $1,5 \notin \mathbb{N}$ e por esse motivo $\sqrt{3y^3}$ não é um monômio.

2.4 Polinômios

Definição: É toda expressão algébrica racional inteira.

Monômio expressões algébricas racionais inteiras representadas por um único produto (polinômio que possui um único termo)

Binômio polinômio formado pela soma de dois monômios, ou seja, possui dois termos

Trinômio polinômio formado pela soma de três monômios, ou seja, que possui três termos

Polinômio nulo polinômio formado por monômios nulos

Os polinômios com mais de três termos não recebem denominação particular

Exemplos:

(1) -5

(2) x

(3) $a^5 - 3$

(4) $2x^2 - 3x$

(5) $x^2 - 2xy + y^2$

(6) $5x^2 - 3x + 2x^3 - 4$

2.4.1 Grau de um Polinômio

Definição: É igual ao grau do monômio não nulo de maior grau que compõe o polinômio.

Observação: Não se define grau para o polinômio nulo

Exemplos:

Polinômio	Grau do Polinômio
(1) $P(x,y) = 2x^2y - 5x^2y^3 + 4xy$	$gr(P(x,y)) = 5$
(2) $Q(a,b) = 5a^3b + 2a^2b^3 - 4a^3b^4 - 2ab^3$	$gr(Q(a,b)) = 7$
(3) $R(x) = 5$	$gr(R(x)) = 0$

2.4.2 Polinômio com uma Variável

Definição: Um polinômio na variável real x é uma expressão dada por:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e são chamados de coeficientes do polinômio;
- a_0 é coeficiente independente ou termo independente;
- $n \in \mathbb{N}$;
- o grau do polinômio é o número n, onde $a_n \neq 0$

Exemplos:

(1) $P(x) = 5x^2 - 4x + 2$ é um polinômio completo de grau 2

(2) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ é um polinômio completo de grau 3

(3) $P(x) = x^2 - 4$ é um polinômio incompleto de grau 2

Reescrevendo, temos $P(x) = x^2 + 0x - 4$, por esse motivo dizemos que é incompleto

(4) $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2$ é um polinômio incompleto de grau 4

Reescrevendo, temos $P(x) = 2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 2$

(5) $P(x) = 2x + 3x^{-2} + 4x^{-1}$ não é um polinômio, pois o expoente de x é negativo

(6) $P(x) = 3x^2 - 5\sqrt{x} + 2$ não é um polinômio, pois o expoente de x é fracionário

2.5 Operações com Polinômios

Vamos entender como efetuar as operações com polinômios por meio de exemplos.

2.5.1 Adição e Subtração

Exemplos:

(1) $(4x^2 - 7x + 2) + (3x^2 + 2x + 3) = ?$

Solução:

$$\begin{aligned}
(4x^2 - 7x + 2) + (3x^2 + 2x + 3) &= 4x^2 + 3x^2 - 7x + 2x + 2 + 3 \\
&= (4+3)x^2 + (-7+2)x + (2+3) \\
&= 7x^2 - 5x + 5
\end{aligned}$$

■

(2) $(4x^3 - 7x + 2) - (3x^2 + 2x + 3) = ?$

Solução:

$$\begin{aligned}
(4x^3 - 7x + 2) - (0x^3 + 3x^2 + 2x + 3) &= 4x^3 - 7x + 2 - 0x^3 - 3x^2 - 2x - 3 \\
&= 4x^3 - 0x^3 - 3x^2 - 7x - 2x + 2 - 3 \\
&= (4-0)x^3 - 3x^2 + (-7-2)x + (2-3) \\
&= 4x^3 - 3x^2 - 9x - 1
\end{aligned}$$

■

Com base nos exemplos acima vemos que para efetuarmos a soma ou subtração de polinômios devemos associar os monômios semelhantes. Ou seja, Definição: Dados dois polinômios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$ denominamos soma ou diferença de P com Q os polinômios $P(x)+Q(x) = (a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$ e $P(x)-Q(x) = (a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(a_2-b_2)x^2+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)$, respectivamente.

2.5.2 Multiplicação e Divisão

Exemplos:

✳ Multiplicação de monômio por polinômio

(1) $7x \cdot (2x - 5) = ?$

Solução:

$$\begin{aligned} 7x \cdot (2x-5) &= 7x \cdot 2x + 7x \cdot (-5) \\ &= (7 \cdot 2) \cdot x^{1+1} + [7 \cdot (-5)] \cdot x^{1+0} \\ &= 14x^2 - 35x \end{aligned}$$

■

✳ Multiplicação de polinômio por polinômio

(2) $(7x^2 - 2x + 1).(x - 2) = ?$

Solução:

$$\begin{aligned} (7x^2-2x+1).(x-2) &= 7x^2 \cdot x + 7x^2 \cdot (-2) + (-2x) \cdot x + (-2x) \cdot (-2) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-2) \\ &= 7x^3 - 14x^2 - 2x^2 + 4x + x - 2 \\ &= 7x^3 - 16x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

■

Como vimos acima para efetuar a multiplicação de polinômios usamos a propriedade distributiva, ou seja, basta multiplicar cada termo de um dos polinômios por cada termo do outro polinômio.

Definição: Dados dois polinômios $P(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$ denominamos produto de $P \cdot Q$ o polinômio $P(x) \cdot Q(x) = a_mb_nx^{m+n} + \ldots + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_0b_0$.

✳ Divisão de monômio por polinômio

(3) $(18x^3 - 12x^2 + 3x) \div (3x) = ?$

Solução:

$$\begin{aligned}
(18x^3 - 12x^2 + 3x) \div (3x) &= \frac{18x^3 - 12x^2 + 3x}{3x} \\
&= \frac{18x^3}{3x} - \frac{12x^2}{3x} + \frac{3x}{3x} \\
&= 6x^2 - 4x + 1
\end{aligned}$$

■

✳ Divisão de polinômio por polinômio

Para efetuarmos a divisão podemos utilizar o algoritmo da divisão (algoritmo de Euclides ou método da chave) ou o método de Descartes, porém vamos focar somente no algoritmo da divisão já que ele funciona de forma mais geral. Existe também o dispositivo prático de Briot-Ruffini, mas ele só deve ser utilizado para dividir polinômio por binômio.

Para facilitar o entendimento do algoritmo, vamos resolver o exemplo abaixo detalhando cada passo da solução.

(4) $(-1 + 8x^3) \div (2x - 1) = ?$

Solução:

(1) O dividendo $-1 + 8x^3$ é um polinômio incompleto e está na ordem crescente de expoente. Logo, vamos colocar na ordem decrescente de expoentes e completá-lo com zeros, ou seja, $8x^3 + 0x^2 + 0x - 1$.

(2) O divisor $2x - 1$ já está na ordem decrescente de expoentes.

(3) Agora dividimos o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor. Logo, $\frac{8x^3}{2x} = 4x^2$.

(4) Em seguida multiplicamos o resultado encontrado no item (3) pelo divisor, ou seja, $4x^2 \cdot (2x - 1) = 8x^3 - 4x^2$.

(5) Agora façamos a diferença entre o dividendo e o resultado obtido no cálculo anterior (no caso item (4)), então a primeira diferença é $8x^3 + 0x^2 + 0x - 1 - (8x^3 - 4x^2) = 4x^2 + 0x - 1$

(6) Agora temos a nova divisão $(4x^2 + 0x - 1) \div (2x - 1)$ e seguimos o mesmo procedimento até que o grau da última diferença seja menor que o grau do divisor ou que a última diferença seja igual a zero, e nesse caso o dividendo é divisível pelo divisor.

$$
\begin{array}{r|l}
8x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & 2x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-8x^3 + 4x^2 \qquad\qquad} & 4x^2 + 2x + 1 \\
4x^2 + 0x - 1 & \\
\underline{-4x^2 + 2x \qquad} & \\
2x - 1 & \\
\underline{-2x + 1} & \\
0 \quad &
\end{array}
$$

■

(5) $(12x^4 - 17x^3 - 3x^2 - 11x - 3) \div (3x^2 - 2x - 3) = ?$

Solução:

$$
\begin{array}{r|l}
12x^4 - 17x^3 - 3x^2 - 11x - 3 & 3x^2 - 2x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{-12x^4 + 8x^3 + 12x^2 \qquad\qquad} & 4x^2 - 3x + 1 \\
-9x^3 + 9x^2 - 11x - 3 & \\
\underline{9x^3 - 6x^2 - 9x \qquad} & \\
3x^2 - 20x - 3 & \\
\underline{-3x^2 + 2x + 3} & \\
-18x \qquad &
\end{array}
$$

■

Definição: Dados dois polinômios P (dividendo) e $D \neq 0$ (divisor), dividir P por D é determinar dois outros polinômios Q (quociente) e R (resto) de modo que se verifiquem as seguintes condições:

(I) $P = Q \cdot D + R$

(II) $gr(R) < gr(D)$ ou $R = 0$

Observação: Se $R = 0$ dizemos que P é divisível por D

2.6 Produtos Notáveis

O que significa produto notável? Os cálculos algébricos obedecem alguns padrões de resolução, os quais podemos citar determinadas multiplicações. Para efetuar essas multiplicações utilizamos constantemente a propriedade distributiva, mas algumas dessas multiplicações aparecem frequentemente e por esse motivo denominamos produtos notáveis.

2.6.1 Quadrado da Soma de Dois Termos

Definição: O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo termo mais o quadrado do segundo termo.

Exemplos:

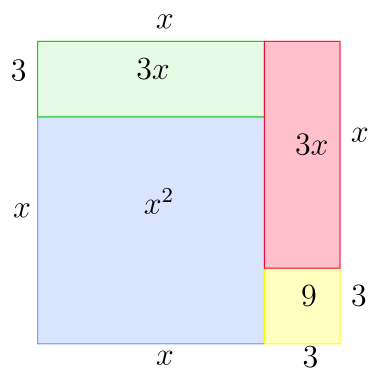
(1) Desenvolva $(x+3)^2$.

Solução:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= (x+3)\cdot(x+3)\\ &= x\cdot x + x\cdot 3 + 3\cdot x + 3\cdot 3\\ &= x^2+3x+3x+9\\ &= x^2+6x+9\end{aligned}$$

■

Geometricamente, essa expressão representa a área de um quadrado de lado igual a $x+3$. Vejamos a figura abaixo:



Ou seja, $A(x) = (x+3)^2 = x^2+3x+3x+9 = x^2+6x+9$

Generalizando, temos:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

(2) Desenvolva $(3x+5y)^2$.

Solução:

$$\begin{aligned}(3x+5y)^2 &= (3x+5y)\cdot(3x+5y)\\ &= (3x)^2 + 2\cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2\\ &= 9x^2 + 30xy + 25y^2\end{aligned}$$

■

(3) Simplifique a expressão $4x^2(x^2+2) - x(2x+3)^2$.

Solução:

$$\begin{aligned}4x^2(x^2+2) - x(2x+3)^2 &= 4x^3 + 8x^2 - x\cdot(4x^2+12x+9)\\ &= 4x^3 + 8x^2 - 4x^3 - 12x^2 - 9x\\ &= -4x^2 - 9x\end{aligned}$$

■

2.6.2 Quadrado da Diferença de Dois Termos

Definição: O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo termo mais o quadrado do segundo termo.

Exemplos:

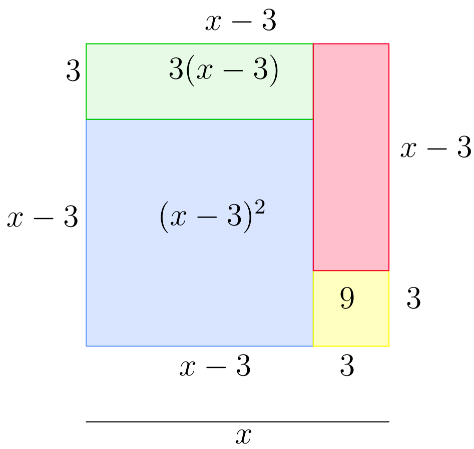
(1) Desenvolva $(x-3)^2$.

Solução:

$$\begin{aligned}
(x-3)^2 &= (x-3)\cdot(x-3)\\
&= x\cdot x + x\cdot(-3) + (-3)\cdot x + (-3)\cdot(-3)\\
&= x^2 - 3x - 3x + 9\\
&= x^2 - 6x + 9
\end{aligned}$$

■

Geometricamente, essa expressão representa a área $B(x)$ de um quadrado de lado igual a $x-3$. Vejamos a figura abaixo:



Ou seja,

$B(x) = (x-3)^2 = x^2 - 3(x-3) - 3(x-3) - 9 = x^2 - 3x + 9 - 3x + 9 - 9 = x^2 - 6x + 9$

Generalizando, temos:

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2}$$

(2) Desenvolva $(3x-5y)^2$.

Solução:

$$\begin{aligned}
(3x-5y)^2 &= (3x)^2 - 2\cdot(3x)\cdot(5y) + (5y)^2\\
&= 9x^2 - 30xy + 25y^2
\end{aligned}$$

■

(3) Simplifique a expressão $4x^2(x^2+2)-x(2x-3)^2$.

Solução:

$$\begin{aligned} 4x^2(x^2+2)-x(2x-3)^2 &= 4x^3+8x^2-x.(4x^2-12x+9) \\ &= 4x^3+8x^2-4x^3+12x^2-9x \\ &= 20x^2-9x \end{aligned}$$

■

2.6.3 Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos

Definição: O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Exemplos:

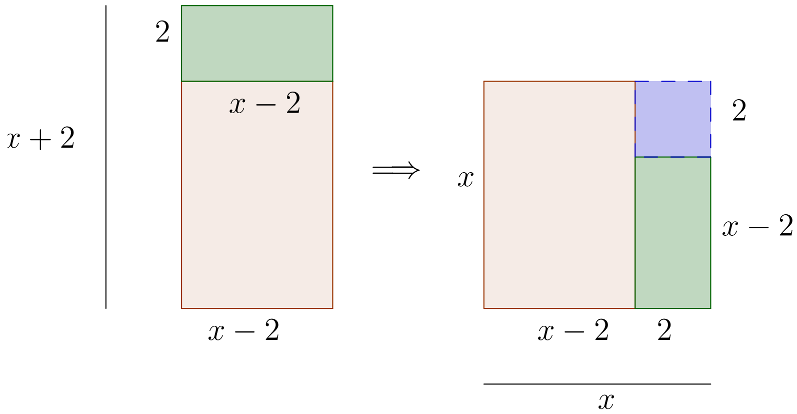
(1)$(x+2).(x-2) = ?$

Solução:

$$\begin{aligned} (x+2).(x-2) &= x\cdot x + x\cdot(-2)+2\cdot x+2\cdot(-2) \\ &= x^2-2x+2x-2^2 \\ &= x^2-4 \end{aligned}$$

■

Geometricamente, essa expressão representa a área $C(x)$ de um retângulo de lados $x+2$ e $x-2$. Vejamos a figura abaixo:



Logo, a área desse retângulo é $C(x) = (x+2)\cdot(x-2) = x^2 - 4$

Generalizando, temos:

$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$$

(2) $(5m+2n).(5m-2n) = 25m^2 - 4n^2$

Solução:

$$\begin{aligned}(5m+2n).(5m-2n) &= (5m)^2 - (2n)^2\\ &= 25m^2 - 4n^2\end{aligned}$$

■

2.6.4 Cubo da Soma e da Diferença de Dois Termos

Exemplos:

(1) Desenvolva $(x+5)^3$.

Solução:

$$\begin{aligned}(x+5)^3 &= (x+5)^2\cdot(x+5)\\ &= (x^2+10x+25)\cdot(x+5)\\ &= x^2\cdot x + x^2\cdot 5 + 10x\cdot x + 10x\cdot 5 + 25\cdot x + 25\cdot 5\\ &= x^3 + 5x^2 + 10x^2 + 50x + 25x + 125\\ &= x^3 + 15x^2 + 75x + 125\end{aligned}$$

■

Generalizando, temos:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3}$$

(2) Desenvolva $(x-y)^3$.

Solução:

$$\begin{aligned}(x-y)^3 &= x^3 + 3\cdot x^2\cdot(-y) + 3\cdot x\cdot(-y)^2 + (-y)^3\\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\end{aligned}$$

■

Até o momento vimos como desenvolver expressões com expoentes 2 e 3, agora vamos nos apropriar de conhecimentos que facilitará o desenvolvimento de expressões com expoente maior ou igual a 2.

2.6.5 Fatorial

Exemplo: João está organizando o armário e possui 4 livros de matemática. De quantas maneiras distintas João pode dispor esses livros?

Solução:

João tem 4 livros, então vamos numerá-los com $1, 2, 3$ e 4. Logo, temos as seguintes sequências:

(1, 2, 3, 4)	(1, 2, 4, 3)	(1, 3, 2, 4)	(1, 3, 4, 2)	(1, 4, 2, 3)	(1, 4, 3, 2)
(2, 1, 3, 4)	(2, 1, 4, 3)	(2, 3, 1, 4)	(2, 3, 4, 1)	(2, 4, 1, 3)	(2, 4, 3, 1)
(3, 1, 2, 4)	(3, 1, 4, 2)	(3, 2, 1, 4)	(3, 2, 4, 1)	(3, 4, 2, 1)	(3, 4, 1, 2)
(4, 1, 2, 3)	(4, 1, 3, 2)	(4, 2, 1, 3)	(4, 2, 3, 1)	(4, 3, 1, 2)	(4, 3, 2, 1)

Portanto, temos 24 sequências. Ou seja, 24 maneiras distintas para João dispor os livros.

Outro modo de solucionar a questão é pensar dessa forma:

Primeira posição: ele pode escolher qualquer um dos 4 livros

Segunda posição: ele só pode escolher qualquer um dos 3 livros restantes

Terceira posição: ele só pode escolher qualquer um dos 2 livros restantes

Quarta posição: ele só tem 1 único livro

Logo, a quantidade de maneiras distintas dele dispor os livros é dado pelo produto $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$\blacksquare$

Em problemas de contagem, aparecem frequentemente multiplicações de números naturais na ordem decrescente e por isso os matemáticos criaram um símbolo para representá-las, esse símbolo ! e recebe o nome de fatorial. O símbolo de fatorial foi introduzido pela primeira vez em 1808 pelo professor universitário Christian Kramp, cujo objetivo era eliminar as dificuldades encontradas na escrita. Em 1811, Legendre representou o fatorial usando a letra grega Gama e Gauss utilizou a letra grega Π e atualmente usamos o símbolo de Kramp, então o cálculo anterior seria escrito como $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

Definição: Seja $n \in \mathbb{N}$. Denominamos fatorial de n e indicamos por $n!$ a relação:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ para $n \geq 2$

$1! = 1$

$0! = 1$

Exemplos:

(1) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

(2) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

(3) $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$

2.6.6 Combinação

Definição: Seja A um conjunto com n elementos. Chamamos de combinações (C) dos n elementos, tomados p a p, aos subconjuntos de A constituídos de p elementos.

Exemplo: Considere o conjunto $E = \{a, b, c, d\}$. Determine a quantidade de subconjuntos do conjunto E com dois elementos.

Solução: Para determinar a quantidade de subconjuntos de E com dois elementos é só fazer as combinações dos 4 elementos de E, tomados 2 a 2, e depois contar quantas combinações fizemos. Lembre-se que $\{a, b\} = \{b, a\}$, então:

$$\begin{tikzcd} & b \\ a \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & c \\ & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & c \\ b \arrow[ur] \arrow[r] & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$

Logo, os subconjuntos de E com dois elementos são:

$$\{a, b\}\,;\{a, c\}\,;\{a, d\}\,;\{b, c\}\,;\{b, d\}\,;\{c, d\}$$

Portanto, temos 6 subconjuntos.

Observe que o conjunto E só possui 4 elementos, então é bastante simples exprimir os subconjuntos pedidos. Mas se o conjunto dado possuísse 10, 15 ou 1000 elementos, como exprimir os subconjuntos com dois elementos ou todos os subconjuntos? Seria muito trabalhoso e exaustivo. Então, para otimizar o tempo e facilitar o cálculo usamos a fórmula abaixo:

Fórmula para o cálculo do número de combinações

$$C_{n,p} = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Exemplos:

(1) $C_{3,2} = \dfrac{3!}{2!.(3-2)!} = \dfrac{6}{2} = 3$

(2) $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2!.(5-2)!} = \dfrac{5.4.3!}{2!.3!} = \dfrac{20}{2} = 10$

2.6.7 Binômio de Newton

> Não sei o que o mundo pode pensar de mim, mas eu mesmo me considero tão somente um menino que, brincando na areia da praia, se diverte ao encontrar um seixo arredondado ou uma concha mais bonita que as comuns, enquanto o grande oceano da verdade jaz indecifrável ante meus olhos. (ISAAC NEWTON)

Na frase acima Newton deixa claro que desconhece uma grande quantidade de coisas, mas o pouco que ele afirma ter conhecimento foi suficiente para descobrir e desenvolver estudos em matemática e física. Creio que nesse momento você deve estar querendo saber um pouco mais sobre Newton, é verdade? Eu sabia. Então, vamos à história.

[7]

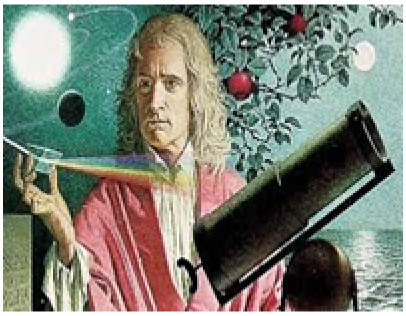


Figura 4 – Isaac Newton

Isaac Newton nasceu em 25/12/1642 na aldeia de Woolsthorpe. Newton se dedicava a projetar miniaturas mecânicas até que um dia encontrou um livro de astrologia que mudou sua atenção para a matemática. Esse novo interesse o levou a ler vários livros, sendo o primeiro deles os *Elementos de Euclides* e depois *La géométrie* de Descartes, a *Clavis* de Outghtred, *Arithmetica infinitorum* de Wallis, entre outros trabalhos.

Pouco depois Newton descobriu o teorema do binômio generalizado, inventou o método do fluxões, o qual hoje o chamamos de cálculo diferencial. No período de março a junho de 1666 a Universidade de Cambridge foi fechada devido a uma epidemia de peste e Newton teve que retornar a sua cidade natal. Esse período foi bem inspirador, pois além do cálculo ele se dedicou a várias partes da física e testou suas primeiras experiências em óptica e também formulou os princípios básicos da teoria da gravitação. Porém alguns historiadores dizem que essas descobertas só ocorreram após o seu retorno a universidade.

Newton retornou a Cambridge em 1667, desenvolveu suas pesquisas no campo da óptica por dois anos, ocupou a cátedra lucasiana em 1669 e publicou um artigo com suas descobertas em óptica, porém surgiram várias críticas sobre seu trabalho deixando-o muito chateado e por esse motivo Newton demorou para publicar suas descobertas posteriores, fato que o levou a uma disputa com Leibniz sobre a primazia da criação do cálculo.

Em 1675 comunicou a Royal Society sua teoria corpuscular, lecionou **álgebra e teoria das equações** de 1673 à 1683 , publicou o tratado *Philosophiae naturals principia mathematica* (material compostos por três livros) e em 1692 Newton adoeceu e teve como consequência da doença um distúrbio mental. Desse ano em diante seus esforços se voltaram para a química, alquimia e teologia. No ano de 1696 foi indicado inspetor da Casa da Moeda sendo promovido a diretor em 1699. Em 1703 foi eleito presidente da Royal Society, cargo que ocupou até sua morte em 1727.

Newton é considerado um dos maiores gênios de todos os tempos e suas realizações foram expressas nesse poema de Alexandre Pope: “A natureza e as leis da natureza jaziam ocultas na noite; Deus disse: Faça-se Newton, e a luz se fez”.

Todos nós temos habilidades, as quais as vezes estão escondidas e não deixamos

[7] Imagem copiada do google

que elas floresçam. Mas acredito que cada um de nós é capaz de gostar e de aprender os mistérios da matemática, mas isso só depende do nosso querer e do nosso esforço. Como diz o capitão planeta: O poder é de vocês.

Teorema 2.6.1 (Teorema Binomial)**.** *O desenvolvimento de* $(x+a)^n$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x, a \in \mathbb{R}$ *é dado por:*

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n$$

Exemplo: Desenvolva $(x+y)^4$.

Solução:

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0} \cdot x^4 \cdot y^0 + \binom{4}{1} \cdot x^3 \cdot y^1 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 + \binom{4}{3} \cdot x^1 \cdot y^3 + \binom{4}{4} \cdot x^0 \cdot y^4$$

$$(x+y)^4 = 1 \cdot x^4 \cdot 1 + 4 \cdot x^3 \cdot y^1 + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot x^1 \cdot y^3 + 1 \cdot x^0 \cdot y^4$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

■

Para determinar o valor de cada coeficiente binomial podemos utilizar a fórmula para combinações vista anteriormente ou utilizar o triângulo de Pascal, o qual veremos adiante e facilitará bastante o cálculo.

2.6.8 Triângulo Aritmético

O triângulo aritmético também é chamado de triângulo de Tartaglia-Pascal, é uma tabela de formato triangular (não limitada) de números naturais, fácil de construir e que permite obter de modo imediato os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$. Esse triângulo foi descoberto pelo matemático chinês Yang Hui e suas propriedades aritméticas foram estudadas pelo matemático francês Blaise Pascal, razão pela qual o triângulo leva o seu nome. Pascal e Fermat foram os criadores da Análise Combinatória e da Teoria de Probabilidades [7].

Você já conheceu um pouco da história de Tartaglia. Agora vamos conhecer a história de Pascal? Sim? Ótimo, eu sabia que você ia gostar. Então, continuemos com nossa viajem no passado.

[8]

Figura 5 – Blaise Pascal

Blaise Pascal nasceu a 19 de julho de 1623, em Clermont-Ferrand, na França. A mãe de pascal, Antoniette Bejon, faleceu quando ele tinha apenas 3 anos de idade. Étienne Pascal, pai de Blaise, se encarregou pessoalmente da educação do garoto através de um método um pouco diferente dos adotados na época e cujo objetivo era o estudo da razão. Esse método consistia na aplicação de exercícios diversos abordando as disciplinas geografia, história e filosofia, já as aulas de matemática só deveriam ser ministradas quando o jovem Pascal estava com o intelecto preparado para aprender essa ciência, ou seja, maduro de acordo com seu pai.

O jovem Pascal ouvia conversas sobre matemática e sua curiosidade foi se acentuando. Sem professor ou mesmo livros, ele começou a desenvolver seus estudos. Depois de autorizado a estudar matemática se juntou aos sábios do círculo de Mersenne e a partir daí teve contato com conhecimentos que proporcionaram o desenvolvimento dos seus trabalhos. Aos 17 anos descobriu e publicou vários teoremas em geometria projetiva essenciais para o desenvolvimento tecnológico da aviação. Criou uma máquina de calcular para ajudar seu pai e hoje sabemos que existe uma linguagem de programação denominada pascal, em sua homenagem, pois ele achava que no futuro as máquinas poderiam pensar.

Blaise dedicou-se a estudo da aritmética e desenvolveu os cálculos de probabilidade, o triângulo de pascal e o tratado sobre as potências numéricas e também contribuiu na física no campo da hidrostática. Devido seus esforços excessivos ficou gravemente doente e em 1648 se tornou adepto do misticismo de Port-Royal. Pascal faleceu em Paris no dia 19 de junho de 1662, sofreu bastante, mas suportou toda dor com grande resignação. Suas palavras finais foram: “Que Deus jamais me abandone”. [5]

Definição: O triângulo de Pascal é uma tabela onde podemos dispor ordenadamente os coeficientes binomiais.

Vejamos abaixo:

[8] Imagem copiada do google

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Isto é:

A linha 1 contém o coeficiente do desenvolvimento de $(x+a)^0$

A linha 2 contém os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^1$

A linha 3 contém os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^2$

....

Também podemos escrever o triângulo de Pascal substituindo cada coeficiente binomial pelo seu valor, isto é:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Para construir o triângulo de Pascal não é necessário calcular os coeficientes binomiais, basta usarmos algumas de suas propriedades. Vejamos:

(1) Em cada linha do triângulo o primeiro e o último número são iguais a 1.

(2) A partir da terceira linha, cada número (exceto o primeiro e o último) é a soma dos números da linha anterior, imediatamente acima dele.

(3) Na mesma linha, dois números equidistantes dos extremos são iguais.

Exemplo: Desenvolva $(2a-b)^5$.

Solução:

Observando a forma como é desenvolvido o binômio de Newton e a 5ª linha do triângulo de Pascal, temos:

$$(2a-b)^5 = 32a^5 - 80a^4b + 80a^3b^2 - 40a^2b^3 + 10ab^4 - b^5$$

■

[8] *Outras Propriedades:*

- A soma de todos os binomiais da n-ésima é 2^n.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

- A soma dos n primeiros binomiais da coluna k é igual ao binomial localizado na próxima linha e na próxima coluna.

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}, k \in \mathbb{N}$$

- A soma dos n primeiros binomiais de uma diagonal, é igual ao binomial localizado abaixo da última parcela.

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \ldots + \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{n-k}, k \in \mathbb{N}$$

2.6.9 Fatoração

Definição: Fatorar é o termo usado na álgebra para designar a decomposição que se faz de cada um dos elementos que integram um produto. O objetivo da fatoração é a simplificação das fórmulas matemáticas em que ocorre a multiplicação, especialmente das chamadas equações.

As fatorações mais conhecidas são:

1. Fator comum em evidência

   Nessa forma de fatoração que determinamos o elemento comum aos termos que formam o polinômio e escrevemos o polinômio como o produto $m \cdot n$, onde m é o elemento comum e n é o resultado da divisão dos termos do polinômio pelo elemento comum.

   Exemplo: $a^3 - 5a^2 = a^2(a^2 - 5)$

2. Agrupamento

   Agrupamos os termos semelhantes de forma que seja possível utilizar a fatoração por evidência mais de uma vez.

   Exemplo: $5x - xy + 15 - 3y = (x+3).(5-y)$
   Solução:

   $5x - xy + 15 - 3y = 5x + 15 - xy - 3y = 5(x+3) - y(x+3) = (x+3).(5-y)$

   ■

3. Diferença entre dois quadrados

   Extraímos a raiz quadrada dos elementos e os resultados obtidos formarão um produto entre binômios, da forma produto da soma pela diferença

   Exemplo: $a^4 - 9 = (a^2 - 3) \cdot (a^2 + 3)$
   Solução:

   Extraindo as raízes temos: $\sqrt{a^4} = a^2$ e $\sqrt{9} = 3$

   Logo, $(a^2 - 3) \cdot (a^2 + 3) = a^4 + 3a^2 - 3a^2 + 9 = a^4 - 9$

   ■

4. Trinômio quadrado perfeito

   Basta determinar o produto notável responsável pela formação do trinômio

   Exemplo: $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$
   Solução:

   Extraindo as raízes temos: $\sqrt{x^2} = x$ e $\sqrt{4} = 2$

   Fazendo o produto $2 \cdot x \cdot 2 = 4x$, logo $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

   ■

Exemplo: $k^2 - 6k + 9 = (k-3)^2$

Solução:

Extraindo as raízes temos: $\sqrt{k^2} = k$ e $\sqrt{9} = 3$

Fazendo o produto $-2 \cdot k \cdot 3 = -6k$, logo $(k-3)^2 = k^2 - 6k + 9$

■

Exemplo: Determine as raízes do polinômio $P(x) = 4x^4 - 9x^2 + 16x^3 - 36x$.

Solução:

Determinar as raízes de um polinômio é encontrar valores para x tais que o valor numérico de $P(x)$ é igual a 0, ou seja $P(x) = 0$. Logo,

$$4x^4 - 9x^2 + 16x^3 - 36x = 0$$

Observe que tem um elemento comum em todos os termos desse polinômio, o x. Colocando x em evidência, temos:

$$4x^4 - 9x^2 + 16x^3 - 36x = 0 \Longleftrightarrow x(4x^3 - 9x + 16x^2 - 36) = 0$$

Usando a fatoração por agrupamento, temos:

$$\begin{aligned} x(4x^3 - 9x + 16x^2 - 36) = 0 & \\ & \Leftrightarrow \ x(4x^3 + 16x^2 - 9x - 36) = 0 \\ & \Leftrightarrow \ x\left[4x^2(x+4) - 9(x+4)\right] = 0 \\ & \Leftrightarrow \ x\left[(x+4)(4x^2-9)\right] = 0 \\ & \Leftrightarrow \ x(x+4)(4x^2-9) = 0 \end{aligned}$$

Veja que $4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$, então:

$$x(x+4)(4x^2-9) = x(x+4)(2x-3)(2x+3) = 0$$

Logo,

$x = 0$, $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$, $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ ou $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

Portanto, as raízes reais do polinômio $P(x)$ são $0, -4, \dfrac{3}{2}$ e $-\dfrac{3}{2}$.

■

2.7 Exercícios propostos

1. **Circule** as alternativas que apresentam monômios semelhantes.

   (a) $7x^2y$ e $9xy^2$ (c) $\dfrac{a}{3}$ e $5a$ (e) $8a^2$ e $-5a$

   (b) $5ab$, $\sqrt{3}ab$ e $2ab$ (d) $2a$ e $2b$ (f) -15 e 1

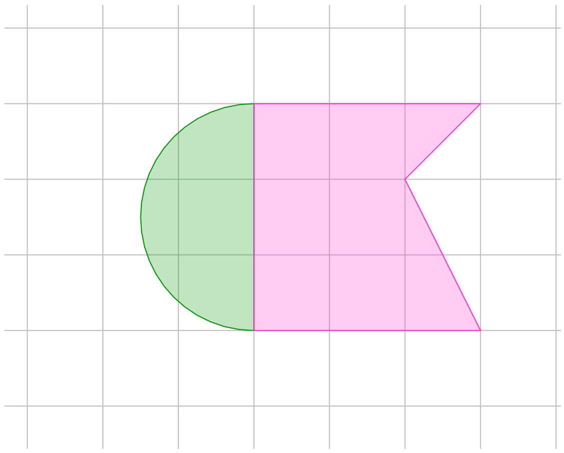
2. Uma empresa de *software* lançou um novo programa no mercado. No primeiro mês, ela vendeu uma certa quantidade desse novo programa. No segundo mês, foi vendido o dobro do que se vendeu no primeiro mês. No quarto mês, foi vendido o dobro do que se vendeu no terceiro mês. Sabendo que a diferença entre as quantidades vendidas no terceiro e segundo meses é igual a quantidade vendida no primeiro mês, expresse os monômios que representam as quantidades vendidas nos quatro primeiros meses.

3. Classifique como monômio, binômio ou trinômio as expressões algébricas a seguir.

   (a) $2x^2 - 3x$ (b) $5a^2 - 3a + 7$ (c) $a^5 - 3$ (d) $7x - 5y$ (e) -5

4. Fatore a expressão $-2x + 14 + xw + 2 - 2w - 7w$, colocando o fator $(w - 2)$ em evidência.

5. Determine o polinômio que representa a área da figura abaixo considerando cada lado do quadradinho com valor igual m.



6. Ordene os polinômios segundo as potências decrescentes de x e depois classifique-os em completo ou incompleto.

   (a) $2x + 3x^2 - 4$ (c) $5x^2 - 3x + 2x^3 - 4$

   (b) $-6 + x^4 - 5x^2 + 4x^3 - 2x$ (d) $4x + 5x^3 - 1$

7. Qual deve ser o valor de a para que o polinômio $P(y) = (a^2 - 1)y^3 + (a + 1)y^2 - y + 4$ seja de grau um?

8. Determine o grau do polinômio $Q(x) = x(x-1)^4 \cdot (x+5)^3$.

9. Calcule os valores de x, y e z, sabendo que $xv^2 + (y-1)v + (z+1) = 0, \forall\ v \in \mathbb{R}$.

10. Dados $P(x) = 2x^2 - 1$ e $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, calcule:

    (a) $2 \cdot P(x) + Q(x)$ (b) $P(x) - Q(x)$ (c) $P(x) \cdot Q(x)$ (d) $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$

11. Determine o resto da divisão de $P(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 - x + 1$ por $Q(x) = x - 2$, sem efetuar a divisão.

12. Quantas raízes tem a equação algébrica $a(a-2)^3(a+1)^4 = 0$?

13. Determine as raízes do polinômio $A(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

14. Determine o valor de a sabendo que $a, 93$ é a medida da aresta de cubo, cujo volume é n e $\dbinom{n}{3} = 120$.

15. Determine o coeficiente do termo independente no desenvolvimento de $\left(m + \dfrac{1}{m}\right)^6$.

16. Como vimos anteriormente, a disposição de números abaixo é conhecida como Triângulo de Pascal. Suas linhas são constituídas segundo determinada regra. Que valor devemos atribuir a K para que tal regra continue a valer na linha 9?

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&K&&56&&28&&8&&1
\end{array}$$

17. Determine o valor numérico de $P(n) = \dfrac{n}{3}$ quando n for igual a quantidade de zeros obtidos no resultado de $1000!$.

18. Em um estacionamento existem carros e motos totalizando 132 veículos e 88 pneus. Determine a quantidade de retrovisores existente nesse estacionamento.

3 Teste 2 e análise dos resultados

Após a realização da oficina, na qual foram trabalhados os conteúdos abordados no material (pode ser visto no capítulo anterior) elaborado para a mesma foi aplicado o Teste 2, o qual é composto por 15 questões objetivas, para os mesmos alunos que fizeram o Teste 1. Abaixo será apresentado a análise das respostas dos discentes em cada questão, com as quais os alunos foram avaliados em relação aos conhecimentos de polinômios e e depois uma análise mais geral dos resultados obtidos. Fazendo um comparativo entre os dois testes observa-se que o Teste 2 possui um nível um pouco mais elevado que o Teste 1, já que os conteúdos foram trabalhados e com isso os discentes ficaram teoricamente mais preparados.

3.1 Análise das questões

3.1.1 Questão 1

Assinale a alternativa que representa um polinômio na variável x.

(a) $A(x) = 6x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{1}{3}$

(b) $B(x) = x^{\sqrt{2}}$

(c) $C(x) = \sqrt[3]{x} + 2x^2 - 1$

(d) $D(x) = x + \frac{1}{x}$

Alternativa correta: A

A tabela e o gráfico abaixo mostram o percentual de alunos (de um total de 29 participantes) que assinalaram cada alternativa da questão 1.

Tabela 17 – Questão 1T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	89,6
b	0
c	6,9
d	3,5

Essa questão tinha como objetivo verificar se os alunos compreenderam a definição de polinômio de uma variável e como pode-se ver acima somente 89,6% assinalaram a alternativa A, ou seja, responderam corretamente. Comparando esse resultado com o resultado da questão 1 do Teste 1, 31,0 % de acerto, observa-se que o resultado foi muito bom. Logo, pose-se concluir que os alunos compreenderam o assunto abordado na questão.

3.1.2 Questão 2

Quais os valores de H para que o polinômio $P(x) = (2H^2 - 18)x^4 + 3x + 2$ possua grau 4?

(a) $H \neq \pm 4$ (b) $H = \pm 3$ (c) $H \neq \pm 3$ (d) $H = \pm 4$

Alternativa correta: C

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos (de um total de 29 participantes) que assinalaram cada alternativa da questão 2.

Tabela 18 – Questão 2T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	0
b	6,9
c	93,1
d	0

O objetivo dessa questão era verificar se os alunos se apropriaram do conceito de grau de polinômio, já que na questão 3 do Teste 1, a qual abordava o mesmo conceito, 79,3% dos alunos erram. Através da **Tabela 18**, percebe-se que houve um avanço considerável, pois 93,1% (alternativa correta C) dos alunos acertaram a questão.

3.1.3 Questão 3

Qual é o resto da divisão do polinômio $M(x) = 6x^3+2x^2-3x$ pelo binômio $N(x) = 2x-2$?

(a) $5x$ (b) 5 (c) $-5x$ (d) -5

Alternativa correta: B

A tabela e o gráfico abaixo mostram o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 3.

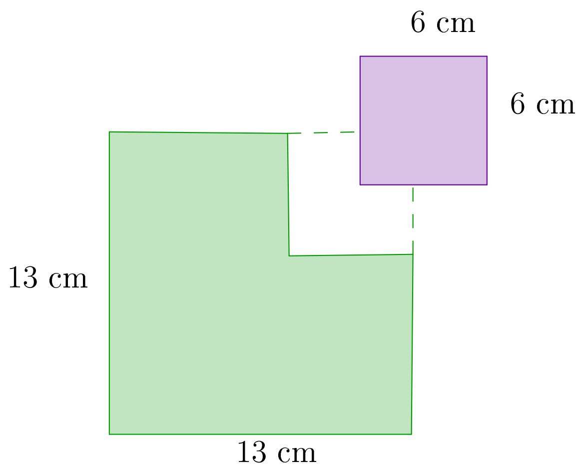
Tabela 19 – Questão 3T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	24,2
b	72,4
c	3,4
d	0

Nessa questão, os discentes necessitavam ter aprendido o algoritmo da divisão (modo que foi ensinado em sala de aula, além de ter sido feito um relato sobre Euclides e pedido para os alunos fazerem uma pesquisa sobre o livro Os Elementos) para poder resolvê-la. Observando os dados acima vê-se que houve um avanço significativo, já que 72,4% dos alunos acertaram essa questão. Comparando esses resultados com os resultados obtidos na questão 12 do Teste 1, a qual cobrava o mesmo conteúdo, observa-se que houve um avanço de 44,8%.

3.1.4 Questão 4

A área do hexágono de cor verde pode ser escrita como:



(a) $(10+3)^2 - (2\cdot 3)^2$

(b) $(13\cdot 0)^2 - (3\cdot 2)^2$

(c) $(10\cdot 1)^2 - (3\cdot 2)^2$

(d) $(10+3)^2 - \left[(2\cdot 3)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

Alternativa correta: A

A **Tabela 20** mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 4.

Tabela 20 – Questão 4T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	65,6
b	0
c	10,3
d	24,1

Para calcular a área do hexágono de cor verde, os alunos precisavam perceber que a área pedida era obtida fazendo a diferença entre a área do quadrado de lado 13 cm e a área do quadrado de lado 6 cm e ainda escrever esse resultado utilizando expressões numéricas. O objetivo dessa questão era verificar se os alunos tinham mais atenção ao trabalharem com expressões, já que na questão 2 do teste 1 ficou evidente que eles tinham essa dificuldade. De acordo com os resultados acima percebe-se que 65,6% acertaram essa questão, o que foi bom, pois o nível do cálculo dessa questão era mais elevado do que o cálculo necessário para resolver a questão 2 do Teste 1, na qual só 34,5% dos discentes acertaram a mesma. Mas observa-se que esses alunos tem dificuldades em para resolverem expressões numéricas.

3.1.5 Questão 5

As raízes da equação polinomial $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ pertence ao conjunto:

(a) $\mathbb{N}$ (b) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$

Alternativa correta: D

A **Tabela 21** mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 5.

Tabela 21 – Questão 5T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	0
b	10,3
c	13,8
d	75,9

Essa questão pedia as raízes de uma equação polinomial de grau 4 e ainda exigia que os alunos conhecessem os conjuntos numéricos e como pode-se ver acima o resultado foi bom (75,9%) em relação a questão 13 do Teste 1 (20,7%) que pedia somente as raízes de uma equação polinomial de grau 2 e 79,3% dos alunos erraram.

3.1.6 Questão 6

Qual é o valor de m para que 2 seja raiz do polinômio $P(x) = x^2 - mx + 6$?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Alternativa correta: C

A **Tabela 22** mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 6.

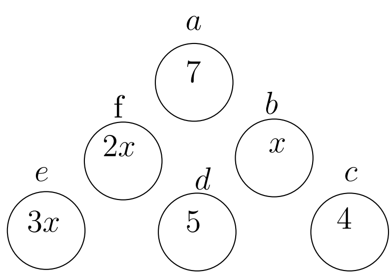
Tabela 22 – Questão 6T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	3,4
b	7,0
c	86,2
d	3,4

O objetivo dessa questão era verificar se os alunos conseguiram aprender a determinar o valor para o qual o polinômio tem com valor numérico o zero. A grande maioria dos alunos acertaram essa questão (86,2%) e se compará-la com a questão 6 do Teste 1, a qual queria o valor de x tal que $V(x) = 343\ cm^3$, observa-se que houve um avanço de 69,0%, o que foi muito bom.

3.1.7 Questão 7

As bolas abaixo estão identificadas por letras e dentro de cada uma há um monômio. Qual deve ser o valor de x para que os binômios $(a+b+c)$, $(c+d+e)$ e $(e+f+a)$ sejam iguais?



(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Alternativa correta: A

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 7.

Tabela 23 – Questão 7T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	93,1
b	6,9
c	0
d	0

O objetivo dessa questão era verificar se os discentes compreenderam os conceitos de igualdade de polinômio e de resolução de equação polinomial de grau 1. Com base na **Tabela 23** observa-se que os alunos se apropriaram dos conteúdos exigidos na questão, já que a grande maioria a resolveram com sucesso (93,1%).

3.1.8 Questão 8

Qual deve ser o valor de z para que o polinômio $12x^3 - 48x^2 + 48x$ seja divisível por $(x-z)^2$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Alternativa correta: C

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 8.

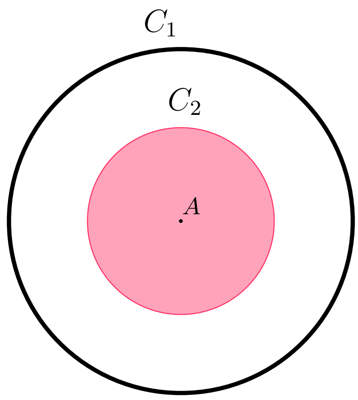
Tabela 24 – Questão 8T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	3,4
b	3,4
c	89,8
d	3,4

O objetivo dessa questão era verificar se os alunos se apropriaram dos conceitos fatoração e produto notável. Como pode-se ver acima 89,8% dos alunos acertaram essa questão o que foi um ótimo resultado, visto que na questão 8 do Teste 1 era exigido os mesmos conceitos e somente 41,4% dos alunos acertaram.

3.1.9 Questão 9

Sejam C_1 e C_2 dois círculos de raios $2p+6$ e $p+2$, respectivamente. O polinômio que representa a área da parte branca é:



(a) $(3p^2 + 20p - 32)\pi$

(b) $(3p^2 - 20p + 32)\pi$

(c) $(-3p^2 + 20p + 32)\pi$

(d) $(3p^2 + 20p + 32)\pi$

Alternativa correta: D

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 9.

Tabela 25 – Questão 9T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	10,3
b	3,4
c	3,4
d	82,9

Nessa questão, os alunos precisavam calcular a área do círculo C_1, a área do círculo C_2 e depois efetuar a diferença $C_1 - C_2$. Observando a tabela acima pode-se ver que 82,9% dos alunos acertaram a essa questão, o que foi um resultado muito bom.

3.1.10 Questão 10

Qual deve ser o valor de a para que a soma das raízes do polinômio $P(x) = ax^2 - 3x - 18$ seja igual a 3?

(a) -1 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Alternativa correta: B

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 10.

Tabela 26 – Questão 10T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	13,8
b	82,8
c	3,4
d	0

Nessa questão, os alunos precisavam mostrar que tinham aprendido como determinar a soma das raízes de uma equação polinomial de grau 2 sem ter exatamente essas raízes. De acordo com **Tabela 26**, observa-se que os discente demonstraram ter obtido esse conhecimento, pois 82,8% acertaram essa questão. Se comparar os resultados obtidos nessa questão com os resultados obtidos na questão 15 do Teste 1 (34,5%), fica bem claro a evolução dos discentes.

3.1.11 Questão 11

Seja $P(m) = (m^3 + m^2 + m + 1) \cdot Q(m)$ um polinômio do quinto grau, cujo coeficiente de m^5 é igual a 1. Se $P(1) = 8$, qual será o valor de $Q(1)$?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Alternativa correta: A

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 11.

Tabela 27 – Questão 11T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	79,4
b	3,4
c	17,2
d	0

Essa questão visava verificar se os alunos aprenderam calcular o valor numérico de um polinômio, porém o enunciado é mais elaborado do que o da questão 2 do Teste 1. O que se pode observar, comparando os resultados obtidos nas duas questões, foi que houve um avanço de 44,9%. Logo, foi um bom resultado.

3.1.12 Questão 12

Se o polinômio $-18x+k$ for decomposto numa diferença de dois quadrados $(x+a)^2-(x+b)^2$ e $a + b = 3$, qual será o valor do número real k?

(a) -1 (b) -3 (c) -9 (d) -27

Alternativa correta: D

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 12.

Tabela 28 – Questão 12T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	0
b	3,4
c	20,7
d	75,9

Essa questão exigia o conhecimento de produto notável e de resolução de sistema linear, uma questão com um nível mais elevado que outras desse teste. Porém, 75,9% dos alunos acertaram o que se mostrou um resultado excelente.

3.1.13 Questão 13

Podemos afirmar que o quociente da divisão de $(15x^2y + 20xy^2 + 30x^2y^2)$ por $5xy$ é:

(a) $3xy + 4y + 6x$

(b) $3x + 4xy + 6y$

(c) $3x + 4y + 6xy$

(d) $3x + 4y + 6x^2y$

Alternativa correta: C

A **Tabela 29** mostra o percentual de alunos (de um total de 29 participantes) que assinalaram cada alternativa da questão 13.

Tabela 29 – Questão 13T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	0
b	3,4
c	96,6
d	0

O objetivo dessa questão era verificar se os discentes tinham aprendido a efetuar a divisão de um polinômio por um monômio. Com base na tabela acima observa-se que o conteúdo foi aprendido com sucesso, pois 96,6% dos alunos acertaram a questão.

3.1.14 Questão 14

Seja $P(x)$ um polinômio do $1^{\underline{o}}$ grau tal que $P(7) = 0$ e $P(0) = 7$. Assinale a alternativa que apresenta $P(x)$.

(a) $-x + 7$ (b) $-x - 7$ (c) $x + 7$ (d) $x - 7$

Alternativa correta: A

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos (de um total de 29 participantes) que assinalaram cada alternativa da questão 14.

Tabela 30 – Questão 14T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	89,7
b	0
c	10,3
d	0

Essa questão exigia dos alunos os conhecimentos da definição de polinômio de grau 1 e de resolução de sistema linear. Na **Tabela 30**, percebe-se que 89,7% dos alunos acertaram essa questão o que mostra-se um resultado muito bom.

3.1.15 Questão 15

Em relação ao polinômio $(x + 2)^3 \cdot (x - 1)$, assinale a soma das alternativas que forem corretas.

(01) O coeficiente de x^3 é igual a 5

(02) Ele tem 6 termos

(04) O coeficiente de x^4 é um número ímpar

(08) A soma dos seus coeficientes é diferente de zero

(16) O coeficiente de x é negativo

(a) 16 (b) 21 (c) 25 (d) 28

Alternativa correta: B

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos que assinalaram cada alternativa da questão 15.

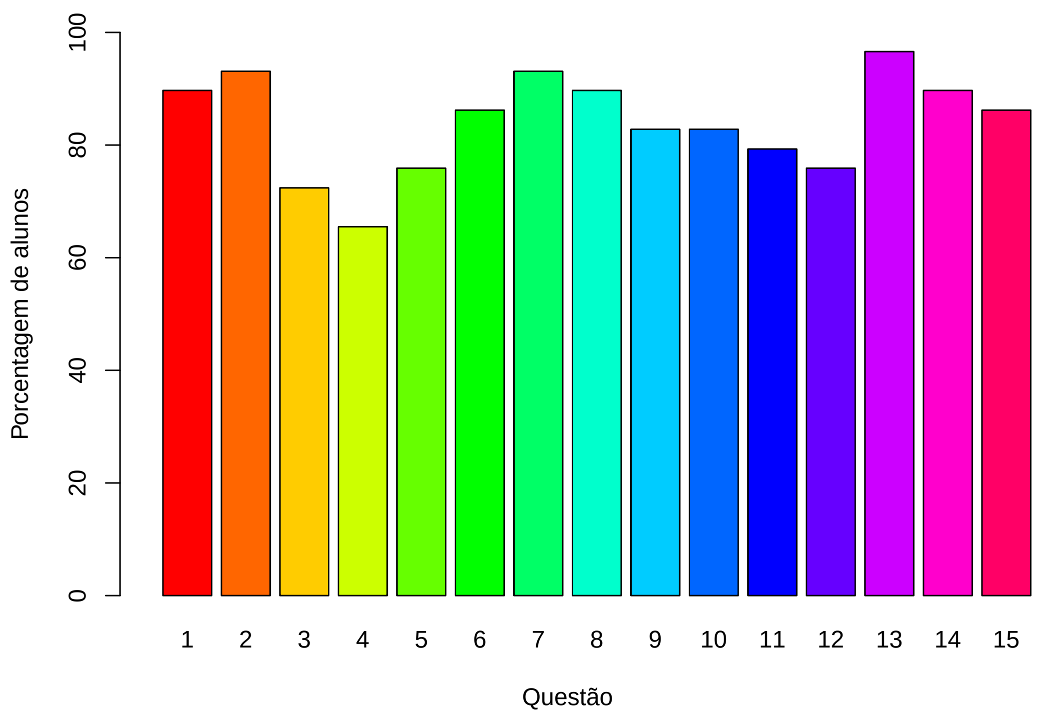
Tabela 31 – Questão 15T2

Alternativa	Percentual de alunos
a	0
b	86,2
c	6,9
d	6,9

Nessa questão, os alunos precisavam desenvolver um polinômio e analisar as proposições para verificar o seu valor lógico (verdade ou falsidade). A grande maioria 86,2% dos alunos acertaram a questão, o que foi um resultado excelente.

3.2 Análise dos resultados

O gráfico abaixo mostra o percentual de alunos (de um total de 29 participantes) que acertaram cada questão do Teste 2. O percentual médio de acertos por questão foi de aproximadamente 84%.



Após analisar o gráfico acima, pode-se concluir que em todas as questões o índice de acertos foi satisfatório. No gráfico verifica-se ainda que a questão como o maior índice de acerto foi a 13 com 96,6% e a questão com o menor índice de acerto foi a questão 4 com 65,6%. Comparando os resultados dos Testes 1 e 2 observa-se que houve um grande avanço no conhecimento dos discentes.

3.3 Análise comparativa dos resultados por questão

O domínio do conhecimento matemático não deve ser um privilégio dos discentes tidos como mais "inteligentes", os quais são mais suscetíveis a fazerem as atividades propostas pelos docentes mesmo sem compreenderem o significado do que estão fazendo, e sim de todos os alunos que compõem a turma. Para tanto, se faz necessário que os alunos sejam autônomos na sua aprendizagem, ou seja, que eles não se restrinjam somente a responderem os questionamentos do professor, mas que confiem na sua própria maneira de pensar. E para que eles aprendam a pensar deve ser oferecido oportunidades para que expressem seus pensamentos em sala de aula. A partir dessa forma de pensar foi dado oportunidade aos discentes para que eles se expressassem durante o período da oficina e no primeiro dia de aula (20 alunos estavam presentes) lhes foi feito a seguinte pergunta: Quais são seus sentimentos em relação as aulas de matemática? Na **Tabela 32** estão listadas as respostas dadas pelos mesmos para a pergunta.

Tabela 32 – Respostas

Quantidade de alunos	Respostas
1	Me dá sono, porque não entendo nada
1	A matemática é necessária, mas eu não gosto
16	Não me sinto bem, porque não gosto
1	Tenho vontade de morrer nas aulas de matemática
1	Eu me sinto bem e gosto

Conforme a tabela acima observa-se que as respostas não são as desejáveis, mas são as respostas esperadas por todos os docentes que estão em sala de aula e conhecem a realidade, com exceção de uma. Essa situação pode ser modificada, mas para que ocorra essa mudança se faz necessário que o professor entenda que dar aulas é diferente de ensinar e que só há ensino quando houver aprendizagem, e para haver aprendizagem deve ser utilizado um instrumento que tenha o papel psicológico motivacional no discente. Para Lucchesi, não exite à "melhor maneira de ensinar", todas as maneiras devem ser usadas, pois cada uma delas favorece o aprendizado de um aspecto do tema em questão. A maneira de ensino proposta nesse trabalho é usar a História da Matemática como recurso didático, porém a relação da mesma com a Educação ultrapassa esse papel, já que a História da Matemática também tem uma função política aliada a um papel crítico na formação de professores, conforme Romélia relata em seu livro Cinema e história da matemática. Portanto, conforme com os resultados vistos anteriormente e reforçados no quadro abaixo, essa forma de ensino é bastante eficaz e pode ser utilizada desde o ensino fundamental 1 até o ensino médio.

Tabela 33 – Comparação entre percentual médio de acertos

Conhecimento exigido	Teste 1 (T1)	Percentual médio de T1	Teste 2 (T2)	Percentual médio de T2
Definição de polinômio	Q1-31%	31%	Q1-89,6% Q14-89,7%	89,7%
Valor numérico de um polinômio	Q2-34,5%	34,5%	Q11-79,4% Q14-89,7%	84,6%
Grau de um polinômio	Q3-20,7% Q4-31,0%	25,9%	Q2-93,1%	93,1%
Produto notável	Q5-51,7% Q7-20,7% Q8-41,4%	37,9%	Q12-75,9% Q15-86,2%	81,1%
Raízes de equações polinomiais	Q6-17,2% Q13-20,7% Q15-34,5%	24,1%	Q5-75,9% Q6-86,2% Q10-82,8%	81,6%
Operações	Q9-44,8% Q10-34,5% Q11-20,7% Q12-27,6%	31,9%	Q3-72,4% Q7-93,1% Q9-82,9% Q13-96,6%	86,3%
Aplicação de polinômios no cálculo de áreas	Q9-44,8%	44,8%	Q4-65,6% Q9-82,9%	74,3%

Observa-se na **Tabela** , o qual faz uma comparação entre o percentual de acertos por questão dando ênfase ao conteúdo exigido em cada uma das mesmas, que os conceitos de polinômios foram compreendidos pelos discentes. O mais uma vez comprova que que esse modo de ensino é ótimo para chamar a atenção dos alunos para os conteúdos e consequentemente a propiciar uma aprendizagem dos mesmos.

Na oficina ministrada para os alunos da 1ª série do técnico em informática do IFCE - Campus Crato, foram utilizados filmes e pesquisas na internet para motivar mais ainda os discentes. Essas atitudes fizeram com que eles se sentissem bem durante as aulas de matemática, pois de acordo com D'Ambrosio utilizar produções cinematográficas é uma eficiente estratégia de ensino de matemática, pois destaca e reforça a importante ideia de que a Matemática é uma ciência humana, com fortes raízes culturais. E para Deise Miranda o uso do computador, principalmente com acesso à internet, proporciona uma troca de informações de maneira dinâmica, interativa, de mão dupla fazendo com que as fronteiras geográficas deixem de existir e as informações possam ser compartilhadas por um número ilimitado de pessoas, aumentando assim o potencial de inteligência coletiva dos grupos humanos.

3.4 Análise comparativa dos resultados por nota

A **Tabela 34** mostra as notas dos alunos antes e depois da intervenção (oficina), e por intermédio da mesma é possível perceber que os discentes obtiveram um grande avanço. Esses resultados evidenciam que a proposta de ensino abordada nesse trabalho é bastante satisfatória, o que deixa claro que o docente deve trabalhar de forma a desmistificar a matemática para não correr o risco de deixar seus alunos com aversão a essa ciência, a qual deve ser vista como um instrumento para a vida e como uma forma de comunicação. Portanto, se faz necessário que o todo educador repense sobre sua própria prática pedagógica (PPP) e que ao planejar suas aulas proponha atividades que possibilitem a discussão entre os alunos sobre as soluções encontradas pelos mesmos, ou seja, o confronto de soluções e a defesa destas mesmo estando incorretas. Os erros devem ser considerados como indicadores para uma reestruturação do plano de aula e como o esforço de alguém que busca um caminho para compreender ou agir sobre o mundo, porém que fique claro que não está sendo afirmado que todo aluno tem que errar para aprender matemática e nem que os erros não devem ser corrigidos, o que está sendo dito é que utilizar o erro como "castigo" é causar um sofrimento desnecessário e um possível distanciamento do educando dessa ciência, a qual é essencial para a humanidade, e ser mais um a propagar a crendice que a matemática é " um bicho de sete cabeças".

Das considerações acima pode-se concluir que para ocorrer uma aprendizagem satisfatória o docente deve direcionar e orientar os alunos para que eles assimilem o que é discutido em sala de aula e para que possam identificar as relações entre esses assuntos e o seu cotidiano adquirindo assim um equilíbrio até que novamente o docente provoque o desequilíbrio na mente dos alunos e eles novamente busquem o reequilíbrio criando o ciclo da aprendizagem.

Tabela 34 – Comparação entre notas

Aluno(a)	Nota no Teste 1	Nota no Teste 2
A_1	2,7	8,0
A_2	2,7	8,7
A_3	3,3	8,7
A_4	6,7	9,3
A_5	5,3	9,3
A_6	3,3	8,0
A_7	2,0	8,0
A_8	2,7	8,7
A_9	2,7	7,3
A_{10}	2,0	8,7
A_{11}	2,0	8,7
A_{12}	3,3	8,7
A_{13}	4,7	8,7
A_{14}	4,7	9,3
A_{15}	0,7	7,3
A_{16}	2,0	8,7
A_{17}	4,0	8,7
A_{18}	3,3	7,3
A_{19}	2,7	8,7
A_{20}	0,7	8,0
A_{21}	2,7	8,0
A_{22}	1,3	8,7
A_{23}	0,7	6,7
A_{24}	4,0	9,3
A_{25}	5,3	9,3
A_{26}	2,0	8,0
A_{27}	3,3	8,7
A_{28}	4,7	9,3
A_{29}	0,7	7,3

4 Considerações Finais

Durante a oficina ofertada aos discentes da 1ª série do ensino médio foi possível perceber que a maioria conseguiu compreender os conceitos que envolvem polinômios. Além da evolução que os alunos tiveram no seu conhecimento vale ressaltar que eles gostaram das aulas e esse fato foi constatado pela participação, por vontade própria, em todas as atividades propostas e comparecendo as aulas até em dias que não havia aula "normal" para os mesmos. Porém ainda se tem muito para fazer, já que há uma resistência pela maioria dos alunos a disciplina de matemática, mas essa foi uma experiência que deu certo e é possível aplicá-la em todas as escolas do país, principalmente com alunos do ensino fundamental. Mas é necessário haver uma mudança na postura docente frente ao processo ensino-aprendizagem de matemática, conforme D'Ambrosio (1996):

> "é importante dizer que não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir História da Matemática em seus cursos. Se em algum tema o professor tem uma informação ou sabe de uma curiosidade histórica, deve compartilhar com os alunos. Se sobre outro tema ele não tem o que falar, não importa. Não é necessário desenvolver um currículo, linear e organizado, de História da Matemática. Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de Matemática. E isso pode ser feito sem que o professor tenha se especializado em História da Matemática". (p. 13)

Fazendo a análise dos resultados dos testes 1 e 2 observa-se que houve um avanço significativo em relação aos percentuais de acertos dos alunos em 15 questões. No Teste 1 os alunos erraram muitas questões de nível básico, confundiram ou esqueceram alguns conceitos e não efetuaram quase nenhum tipo de cálculo para resolverem as questões. No Teste 2 esses erros tiveram uma redução drástica e a maioria tentou de algum modo fazer o cálculo para solucionar as questões. Como é possível constatar observando a análise do Teste 2 houve um avanço na compreensão dos conceitos de polinômios e uma leitura melhor do enunciado das questões mesmo sendo um nível um pouco mais elevado do que as do Teste 1, isso de deve às aulas com explanação oral e escrita dos assuntos utilizando o material didático, tópicos de História da Matemática e recursos audiovisuais. A média de acertos aproximadamente no Teste 1 foi de 30,1%, enquanto no Teste 2 a média foi aproximadamente de 84%, o que mostrou que essa metodologia de ensino pode ser utilizada com êxito. De acordo com Brolezzi (1991),

> O ensino elementar em geral tende a enfatizar a técnica de fazer cálculos, deixando para segundo plano o cuidado na apreensão do significado dos mesmos por parte dos alunos. Acaba-se assim, operando com símbolos matemáticos com pouco ou nenhum conhecimento do significado das operações realizadas. E muitas vezes a Matemática torna-se objeto

> de aversão por parte dos alunos do nível elementar, justamente pela dificuldade de compreensão de sua linguagem. (p. 174)

Com os resultados obtidos nesse trabalho, verifica-se o quanto é necessário e essencial um ensino com o auxílio de um material didático específico para o assunto estudado e uma aula de matemática diferente do comum, embora as mudanças feitas nas aulas sejam bem simples, mas o suficiente para despertar o interesse dos alunos e fazer com que eles compreendam o assunto ministrado e não meramente decoração de fórmulas. É de se esperar que esse tipo de abordagem matemática se torne uma forma constante na atuação do professor de matemática do ensino fundamental e médio, e que eles utilizem a história da matemática para fazer com que os discentes percebam que a matemática evolui com a evolução da sociedade e é essencial para o mundo tecnológico em que vivemos.

Referências Bibliográficas

[1] BIANCHINI, Edwaldo. Matemática, 8º ano. 6ª Ed. - São Paulo: Moderna, 2006.

[2] EVES,Howard. Introdução à História da Matemática. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

[3] IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, 5: complexos, polinômios, equações. 8ª Ed. - São Paulo: Atual, 2013.

[4] IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, 6: complexos, polinômios, equações. 8ª Ed. - São Paulo: Atual, 2013.

[5] Revista Ética e Filosofia Política - Nº 12 - Volume 1 - Abril de 2010

[6] ANDRADE, Carlos Henrique Vianna de. História Ilustrada da Medicina da Idade Média ao Século do Início da Razão: a medicina no seu contexto sociocultural história. Editora Baraúna, 2015.

[7] MORGADO, Augusto César & CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Coleção PROFMAT: matemática discreta. Rio de janeiro: SBM, 2013.

[8] Disponível em: http://www.colegioweb.com.br/binomio-de-newton/propriedades-do-triangulo-de-pascal.html. Acessado em 08 de janeiro de 2016.

[9] BOYER, Carl B. História da Matemática. 3ª Ed. - São Paulo: Blucher, 2010.

[10] GARBI, Gilberto Geraldo. O Romance das Equações Algébricas. Livraria da Física, 2009.

[11] RUIZ, Ángel. Historia y filosofía de las matemáticas. San José: EUNED, 2003.

[12] D'AMBROSIO, Ubiratan. História da Matemática e Educação. In: Cadernos CEDES 40. 1ª Ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 1996, p.7-17.

[13] OLIVEIRA, Adriana Maria Evaristo Martinez de. Normas e padrões para trabalhos acadêmicos e científicos da Unoeste. Presidente Prudente: Unoeste - Universidade do Oeste Paulista, 2015.

[14] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN+): ciências da natureza e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

[15] PONTE, João Pedro da; JANUÁRIO, Carlos; FERREIRA, Isabel Calado; CRUZ, Isabel. Por uma formação inicial de professores de qualidade. Documento de trabalho da Comissão ad hoc do CRUP para a formação de professores. Portugal, 2000.

[16] MIRANDA, Ivanete Rocha; GRANDO, Neiva Ignês. Álgebra no ensino fundamental: dificuldades e obstáculos. In: GRANDO, N. I. (Org.). Pesquisa em educação matemática. Passo Fundo: UPF, 2006.

[17] BROLEZZI, A. C. A Arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da história da matemática. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo: São Paulo,1991.

[18] CARVALHO, Dione Lucchesi de. Metodologia do ensino da matemática. 3ª Ed. Rev. - São Paulo: Cortez, 2009.

[19] SOUTO, Romélia Mara Alves. Cinema e história da matemática: entrelaços possíveis. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

[20] CARVALHO, Anna Maria Pessoa de (org.). Ensino de ciências: unindo a pesquisa e a prática. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

[21] SÉRGIO, Lorenzato. Para aprender matemática. Campinas, São Paulo: Autores Associado, 2006.

ANEXO A – Planos de aula

A.1 Plano 1

Tema: A Matemática Egípcia

Objetivos:
Levar o(a) aluno(a) à:

- Despertar a curiosidade e o interesse pelas aulas de matemática através da história da matemática no Egito.
- Conhecer as principais fontes que dispomos da matemática egípcia, em especial o papiro de Rhind, e a origem da álgebra.
- Compreender a matemática como uma ciência viva e em movimento.

Conteúdos:
Registros primitivos, Notação hieroglífica, Papiro de Ahmes, Operações aritméticas, Problemas algébricos

Metodologia:
Será pedido aos alunos para sentarem no chão formando um círculo para dá ideia de contação de história. Será colocado a música instrumental M.T - Hoffnungslos, como fundo musical, e será entregue um pincel a um dos alunos para poder fazer as apresentações. Será explicado que cada aluno deverá passar o pincel para o próximo colega após ter respondido os seguintes questionamentos: Qual é seu nome? Quais são seus sentimentos em relação as aulas de matemática? Após ouvir as respostas dadas pelos discentes será pedido aos mesmos que pensem nos motivos que os ajudaram a ter esses sentimentos para serem discutidos na próxima aula. Será feita a entrega das apostilas a cada aluno. Para prosseguir a aula será pedido para um aluno fazer a leitura do texto: Origem da álgebra e a partir daí explanar sobre a matemática no Egito, personagens importantes, desenvolvimento e aplicações.

Avaliação:
Cada discente será avaliado através da participação nas discussões.

Recursos Didáticos:
Quadro branco, pincel, aparelho de som e apostila

Referências:

- EVES,Howard. Introdução à História da Matemática. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.
- BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. 3ª Ed. - São Paulo: Blucher, 2010.
- ROQUE, Tatiana. História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

A.2 Plano 2

Tema: Manipulação algébrica

Objetivos:
Levar o(a) aluno(a) à:

- Conhecer um pouco da história de Simon Stevis e de Tartaglia.
- Identificar uma expressão algébrica.
- Classificar as expressões algébricas.
- Reconhecer um polinômio.
- Identificar o grau de monômio e polinômio.
- Identificar termos semelhantes.
- Operar com monômios.

Conteúdos:
Definição de monômio, Grau de um monômio, Monômios semelhantes, Operações com monômios, Definição de polinômio, Grau de um polinômio e Polinômio com uma variável

Metodologia:
A aula será iniciada ouvindo as respostas dos alunos quanto questionamento feito na aula anterior, deixando-os a vontade para expor seu ponto de vista. A conversa será encerrada com a leitura do texto: Assembleia das ferramentas, o qual tem o objetivo de mostrar a importância do trabalho em equipe e do empenho que cada um deve ter para que a aprendizagem seja eficaz. Em seguida será feito a leitura, pelos alunos, dos textos que relatam a história de Simon e Tartaglia, os quais serão debatidos. Será pedido aos alunos que pesquisem ou perguntem ao docente de história sobre Maurício de Nassau, a Guerra de Cambrai e Alexandre o grande. Logo depois será feita a explanação oral e escrita dos conteúdos enfatizando os questionamentos e a resolução de exercícios pelos discentes. Será exibido o filme Alexandria das 9:55 às 12:16 (duração de 2h e 21 min), cujo objetivo é mostrar: a primeira mulher na matemática e suas descobertas, a importância da biblioteca de Alexandria, o princípio da inércia, a forma do movimento dos planetas e a primeira lei de Kleper.

Avaliação:
Cada discente será avaliado através da participação na aula e da resolução de exercícios.

Recursos Didáticos:
Quadro branco, pincel, apostila, texto: Assembleia das ferramentas, lousa digital e filme: Alexandria

Referências:

- BIANCHINI, Edwaldo. Matemática, 8º ano. 6ª Ed. - São Paulo: Moderna, 2006.
- IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, 6: complexos, polinômios, equações. 8ª Ed. - São Paulo: Atual,2013.
- GARBI, Gilberto Geraldo. O Romance das Equações Algébricas. Livraria da Física, 2009.
- ANDRADE, Carlos Henrique Vianna de. História Ilustrada da Medicina da Idade Média ao Século do Início da Razão: a medicina no seu contexto sociocultural história. Editora Baraúna, 2015.

A.3 Plano 3

Tema: Operações algébricas

Objetivos:
Levar o(a) aluno(a) à:

- Efetuar adições, subtrações, multiplicações e divisões com polinômios.
- Efetuar a divisão de polinômios pelo método da chave ou algoritmo da divisão ou algoritmo de Euclides.
- Determinar o conjunto solução de uma equação polinomial.

Conteúdos:
Operações com polinômios

Metodologia:
Será feito a explanação oral e escrita do conteúdo e em seguida os alunos serão convidados a resolverem questões no quadro. Lembrando que o(a) aluno(a) deverá explicar seu método de resolução. Será pedido aos alunos pesquisem sobre Euclides e D'Alembert. Será mostrado o jogo da memória com raízes (equações do 2º grau) e proposto que os discentes joguem no intervalo. No final da aula será entregue aos alunos o problema 1 (Os Elementos: Livro II, proposição 4), cujo objetivo é fazer com que eles reflitam sobre o que estão lendo.

Avaliação:
Cada discente será avaliado através das respostas que derem para os questionamentos feitos durante a aula e da participação na resolução de exercícios no quadro.

Recursos Didáticos:
Quadro branco, pincel, apostila, cartolina recortada em cartelas retangulares e quadradas

Referências:

- BIANCHINI, Edwaldo. Matemática, 8º ano. 6ª Ed. - São Paulo: Moderna, 2006.
- IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, 6: complexos, polinômios, equações. 8ª Ed. - São Paulo: Atual,2013.
- MACHADO, Antonio dos Santos. Matemática Temas e Metas: geometria analítica e polinômios.2ª Ed. 25ª Reimpressão - São Paulo: Atual, 1988.

A.4 Plano 4

Tema: Expressões notáveis

Objetivos:
Levar o(a) aluno(a) à:

- Conhecer um pouco da história de Isaac Newton e de Blaise Pascal.
- Reconhecer os produtos notáveis e relacioná-los a áreas de figuras planas.
- Identificar um número binomial .
- Compreender o triângulo de Pascal.
- Aplicar a fórmula do binômio de Newton.

Conteúdos:
Produtos notáveis, Fatorial, Combinação, Binômio de Newton, Triângulo aritmético, Fatoração

Metodologia:
Será feita a leitura, pelos alunos, dos textos que relatam a história de Isaac Newton e Blaise Pascal. Após essa leitura os textos serão discutidos com os alunos. Também será sugerido a leitura do livro intitulado Isaac Newton e sua maçã de Kjartan Poskitt. Será feito a explanação oral e escrita dos conteúdos mencionados acima. Para melhor entendimento dos produtos notáveis será utilizado o aspecto visual, ou seja, a álgebra geométrica ou melhor, a álgebra grega. Será exibido o filme Front of the Class das 9:55 às 11:30 (duração de 1h e 35 min), cujo objetivo é mostrar que todos podem realizar seus sonhos, inclusive aprender matemática, desde que se esforce, se dedique e que não desista só porque está diante de obstáculos.

Avaliação:
Os discentes serão avaliados com a participação durante as aulas, na resolução de exercícios que serão entregues a cada um e na participação no debate após o filme.

Recursos Didáticos:
Quadro branco, pincel, apostila, lousa digital e filme: Front of the Class

Referências:

- BIANCHINI, Edwaldo. Matemática, 8º ano. 6ª Ed. - São Paulo: Moderna, 2006.
- IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, 5: combinatória, probabilidade. 8ª Ed. - São Paulo: Atual,2013.
- IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, 6: complexos, polinômios, equações. 8ª Ed. - São Paulo: Atual,2013.
- BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. 3ª Ed. - São Paulo: Blucher, 2010.
- EVES,Howard. Introdução à História da Matemática. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.
- Revista Ética e Filosofia Política - Nº 12 - Volume 1 - Abril de 2010

A.5 Plano 5

Tema: Atividades propostas

Objetivos:
Levar o(a) aluno(a) à:

- Identificar os dados fornecidos e os solicitados em cada questão.
- Utilizar os conhecimentos adquiridos para solucionar as situações propostas nos exercícios.

Conteúdos:
Polinômios, Produtos notáveis, Fatorial, Combinação, Binômio de Newton, Triângulo aritmético

Metodologia:
O alunos serão divididos em duplas para resolverem os exercícios. Será dado 2,5 min para as duplas resolverem a questão 1 e após esse tempo será feito a correção da questão 1, em seguida será dado 2,5 min para as duplas resolverem a questão 2 e após esse tempo será feito a correção da questão 2, e esse procedimento se repetirá até a última questão. No final da aula será entregue aos discentes o problema 2, cujo objetivo é despertar a curiosidade.

Avaliação:
Cada discente será avaliado através da interação na dupla para solucionar as questões e do debate durante a correção.

Recursos Didáticos:
Quadro branco, pincel, apostila

Referências:

- IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, 5: combinatória, probabilidade. 8ª Ed. - São Paulo: Atual,2013.
- IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, 6: complexos, polinômios, equações. 8ª Ed. - São Paulo: Atual,2013.
- http://www.vestibular.ita.br
- http://www.ime.eb.br

ANEXO B – Materiais utilizados nas aulas

B.1 Jogo da memória com raízes

Material necessário:

• Cartelas retangulares com equações completas do 2º grau

$x^2 - 5x + 4 = 0$	$x^2 - 8x + 12 = 0$
$x^2 - 6x + 8 = 0$	$x^2 + 2x - 15 = 0$
$x^2 - 6x + 5 = 0$	$x^2 + 9x + 20 = 0$
$x^2 - 8x + 15 = 0$	$x^2 + 6x - 27 = 0$
$x^2 + 3x - 4 = 0$	$x^2 - 6x - 7 = 0$

• Cartelas quadradas com as raízes das equações escolhidas na confecção das cartelas retangulares.

$x_1 = 1$ $x_2 = 4$	$x_1 = 2$ $x_2 = 6$
$x_1 = 2$ $x_2 = 4$	$x_1 = -5$ $x_2 = 3$
$x_1 = 1$ $x_2 = 5$	$x_1 = -5$ $x_2 = -4$
$x_1 = 3$ $x_2 = 5$	$x_1 = -9$ $x_2 = 3$
$x_1 = -4$ $x_2 = 1$	$x_1 = -1$ $x_2 = 7$

Observação: Escolher equações com $a = 1$ e raízes inteiras, para não exceder no nível de dificuldade dos cálculos mentais

Regras: Os jogadores dispõem as cartelas sobre a mesa, viradas para baixo. Na sua vez, cada participante vira duas cartelas: uma retangular e outra quadrada. Se as raízes corresponderem à equação escolhida, o jogador retira as cartelas e joga novamente. Se as raízes não corresponderem à equação escolhida, o jogador retorna as cartelas às posições iniciais e passa a vez para o outro participante. vence aquele que formar o maior número de pares.

O jogo foi retirado do livro do Giovanni, cujo título é A conquista da matemática do $9^{\underline{o}}$ ano da editora FTD

B.2 Texto: A assembleia das ferramentas

A ASSEMBLEIA DAS FERRAMENTAS

Em certa ocasião aconteceu uma assembleia de ferramentas numa carpintaria para resolver certos problemas da classe. O martelo se elegeu presidente e convocou as ferramentas batendo forte na mesa do carpinteiro. Mas sua presidência durou pouco.

Foi acusado de fazer muito barulho e ficar dando golpes o tempo todo. O martelo reconheceu sua culpa e foi substituído pelo parafuso, que também não durou muito, acusado de ficar dando muitas voltas para conseguir alguma coisa.

O parafuso concordou e a lixa assumiu seu lugar por pouco tempo. Era muito áspera no tratamento com os demais e criava muitos atritos. Acatou também as reclamações pela sua maneira de agir e foi substituída pelo metro.

O metro, no princípio, se deu bem, mas logo começaram a acusá-lo de achar que só ele estava certo, só ele era exato, e media a todos segundo suas próprias medidas, como se fosse o único perfeito.

O serrote ia substituí-lo quando o marceneiro entrou. Todas as ferramentas ficaram quietas.

O marceneiro, separou umas tábuas e começou a trabalhar nelas. As ferramentas foram passando por suas mãos: o martelo, o serrote, o parafuso, a lixa, o metro, etc... No final de seu trabalho, aquelas tábuas se tinham convertido num belo armário, elegante e fino.

Quando o marceneiro saiu, as ferramentas decidiram continuar a assembleia. O serrote tomou a palavra e disse:

- Senhoras e senhores! Ficou demonstrado que temos defeitos e por isso não nos aceitamos uns aos outros. Mas o marceneiro trabalhou com nossas qualidades, com o que temos de valor. Esse armário está em pé, reto, bem equilibrado, preciso e exato, graças ao metro. As tábuas foram encaixadas umas nas outras graças à força do martelo. O parafuso uniu e juntou muito bem as diversas partes do armário. A lixa tirou as asperezas da madeira e deu lisura e brilho ao armário.

As ferramentas sentiram-se animadas ao ver que poderiam produzir móveis de qualidade, se trabalhassem juntas e em harmonia.

(Autor desconhecido)

B.3 Problemas 1 e 2

Problema 1: Proposição VII
Se uma linha reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda é igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as partes contém. Explique do que se trata o enunciado.(EUCLIDES, livro II, p.34)

Problema 2: Antalogia Grega
Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz, criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida. Quantos anos viveu Diofanto? (BOYER, 2010, p. 121)