**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT**

RINALDO MIRANDA FERREIRA

# TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA ANÁLISE QUANTITATIVA DO SEU SABER NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

JUAZEIRO – BA

2016

**RINALDO MIRANDA FERREIRA**

# TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA ANÁLISE QUANTITATIVA DO SEU SABER NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva.

JUAZEIRO – BA

2016

Ferreira, Rinaldo Miranda.
F383t Teorema de Pitágoras: uma análise quantitativa do seu saber na 3ª série do ensino médio / Rinaldo Miranda Ferreira – Juazeiro-BA, 2016.
xiii, 101 f. : il.; 29 cm..

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, campus Juazeiro-BA, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva.

Referências

1. Teorema de Pitágoras. 2. Matemática – Ensino Médio. I. Título. II. Silva, Alexandre Ramalho. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 515

*Universidade Federal do Vale do São Francisco*

*Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*

***PROFMAT/UNIVASF***

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

PROFMAT

# TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA ANÁLISE QUANTITATIVA DO SEU SABER NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Por:

RINALDO MIRANDA FERREIRA

**Dissertação aprovada em 26 de agosto de 2016.**

Alexandre Ramalho Silva

Prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva
Orientador - PROFMAT/UNIVASF

Lino Marcos da Silva

Prof. Dr. Lino Marcos da Silva
Examinador Interno - PROFMAT/UNIVASF

Felipe Wergete Cruz

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz
Examinador Externo – UFPE

Juazeiro
2016

*Ao meu Senhor Jesus Cristo e à minha família.*

## AGRADECIMENTOS


Ao meu Deus pela existência de todas as coisas e por me permitir chegar até aqui;

Ao meu Senhor Jesus Cristo pela esperança em um futuro de amor e justiça;

Aos meus pais que me ensinaram que a educação é um caminho de possibilidades;

À minha esposa pelo companheirismo, apoio e dedicação à família;

Aos meus filhos por permiti-los ensinar que gostar de aprender é uma virtude;

Aos meus colegas de curso pelos proveitosos finais de semana de estudos;

Ao meu orientador Prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva, pela orientação e correções importantes;

Ao IMPA, à SBM, à UNIVASF e à CAPES pela iniciativa e apoio técnico;

A todos que contribuíram para a realização desse trabalho de pesquisa.

“Pelo que sinto prazer nas fraquezas, nas injúrias, nas necessidades, nas perseguições, nas angústias, por amor de Cristo. Porque, quando sou fraco, então, é que sou forte.” (2 CORÍNTIOS 12:10)

# RESUMO

O teorema de Pitágoras é um importante conteúdo, sendo de ampla aplicação em diversos ramos da Matemática. Seu recorrente uso está associado, basicamente, à sua utilidade como pré-requisito em diversos cálculos matemáticos. Este trabalho é o resultado de um estudo realizado com estudantes do 3º ano do Ensino Médio em uma escola pública situada na cidade de Juazeiro-BA. O seu principal objetivo é a investigação do conhecimento dos estudantes acerca da aplicação do teorema de Pitágoras como ferramenta para a resolução de problemas. A metodologia utilizada se fundamentou na pesquisa bibliográfica acompanhada da aplicação de três questionários. A finalidade da aplicação desses questionários foi à aquisição de informações necessárias aos estudos conclusivos sobre o tema pesquisado. Os questionários foram compostos por cinco problemas de múltipla escolha com apenas uma única opção correta. Os problemas se referem a aplicações do teorema de Pitágoras em situações contextualizadas ou não, a depender do questionário. Também foi realizada uma abordagem didático-metodológica com o grupo de estudantes, utilizando-se: material concreto, tecnologias da informação e comunicação (TIC's) e análise de erros. Os resultados do estudo foram expressos em quadros e gráficos. A análise dos resultados mostrou que o grupo de discentes pesquisados apresentou baixo rendimento na resolução dos problemas, indicando que o conhecimento referente ao tema está abaixo do ideal. Portanto, este trabalho de pesquisa contribuiu para avaliarmos o quanto assuntos essenciais e pré-requisitos matemáticos fazem parte do universo do saber dos nossos alunos.

**Palavras-chave**: Teorema de Pitágoras. Aplicações. Ensino Médio.

## ABSTRACT

The Pythagorean theorem is an important content, with a great application in various branches of mathematics. His recurrent use is associated basically to its usefulness as a prerequisite in various mathematical calculations. This work is the result of a study conducted with students of the 3rd year of high school in a public school in the city of Juazeiro-BA. Its main objective is the investigation of students' knowledge about the application of the Pythagorean theorem as a tool for problem solving. The methodology used was based on a bibliographic research accompanied by the application of three questionnaires. The purpose of the application of these questionnaires was to acquire the necessary information for conclusive studies on the searched topic. Questionnaires were composed by five multiple-choice problems with only one correct option. The problems relate to applications of the Pythagorean theorem in contextualized situations or not, depending on the questionnaire. It was also carried out a didactic-methodological approach with the group of students, using: a physic material, information and communication technologies (ICTs) and error analysis. The study results were expressed in charts and graphs. The results analysis showed that the surveyed students group presented a low performance in solving problems, indicating that the knowledge on the researched subject is less than optimal. Therefore, this research contributed to evaluate how key issues and mathematical prerequisites are part of our student's knowledge universe.



**Key-words**: Pythagorean theorem. Applicability. High school.

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE QUADROS

# LISTA DE GRÁFICOS

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

A proposta de estudo deste trabalho de pesquisa é um tema de muita importância para a Matemática: o teorema de Pitágoras.

É sabido que o uso do teorema de Pitágoras como ferramenta para resolução de problemas se faz presente em vários ramos da Matemática. Muniz Neto (2013) declara que a importância do teorema de Pitágoras para a Geometria e suas aplicações não podem ser menosprezadas, afirmando que uma considerável parte das aplicações da Geometria ao Cálculo e à Mecânica tem um de seus principais alicerces no teorema de Pitágoras. Muniz Neto (2013, p. 157) faz, ainda, a seguinte reflexão: “Assim, mais que uma simples herança cultural da humanidade, o teorema de Pitágoras constitui-se em verdadeira pedra angular na moderna sociedade do conhecimento”. Portanto, diante das palavras de Muniz Neto (2013), temos uma ideia da dimensão da relevância do tema tratado neste trabalho de pesquisa.

Atualmente, o quanto nossos alunos da 3ª série do Ensino Médio sabem sobre esse notável teorema, da sua história, da sua importância como ferramenta na resolução de problemas e da sua aplicabilidade em diversos ramos da Matemática? Diante dessa dúvida e de outras pesquisas relacionadas à importância do estudo desse tema, percebemos o quanto é atual e necessário o conhecer e dominar tal assunto. Logo, admitimos ser razoável que nossos discentes percebam o aprendizado de tal teorema como indispensável à sua formação intelectual não somente pelo grau de sua importância dentro da Matemática, mas também por se constituir em um útil pré-requisito em diversas situações teóricas e práticas do cotidiano.

Para direcionar tal estudo traçamos como objetivo geral: Avaliar se um específico grupo de alunos da 3ª série do Ensino Médio é capaz de identificar a necessidade da utilização do teorema de Pitágoras como ferramenta para a resolução de situações-problema. Para detalharmos a proposta da pesquisa definimos os seguintes objetivos específicos: verificar o conhecimento dos alunos acerca da aplicabilidade do teorema de Pitágoras utilizando-se de questionários; comparar o conhecimento dos alunos quanto à natureza dos questionários (contextualizado e não contextualizado); aplicar ações interventivas referentes à metodologia de ensino no sentido de melhorar a aprendizagem e compreensão do conteúdo; reavaliar o conhecimento e domínio do discente sobre o assunto tema da pesquisa, mediante o uso de questionários, após a intervenção didático-metodológica.

O trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica e de campo com aplicação de questionários. *A priori* foram aplicados dois questionários um contextualizado e outro, não contextualizado e de posse dos resultados da avaliação de desempenho do grupo _ avaliados como insatisfatórios _, mediante uma ação interventiva experimental, utilizamos uma didática diversificada com o uso de material concreto, das TIC's e da análise de erros para tentar suprimir as dificuldades dos discentes. *A posteriori* foi aplicado um terceiro questionário totalmente contextualizado com o objetivo de reavaliar o desempenho dos alunos e, consequentemente, verificar se a intervenção didático-metodológica experimental, de fato, havia melhorado o conhecimento dos discentes em relação ao conteúdo tema da pesquisa.

O enfoque dado à contextualização, no processo de ensino e aprendizagem, por este trabalho de pesquisa tem respaldo nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias):

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. (BRASIL, 1999, p. 16)

Os PCN's deixam evidente que o ensino-aprendizagem, em parte, deve-se dá de forma concreta e contextualizada, sendo tal abordagem necessária não somente em matemática, mas em cada área do conhecimento, visto que as demandas da vida moderna impõem tal prática.

Utilizamos um amplo aporte teórico para fundamentar as proposições, as ideias, as descobertas, as reflexões e as teorias de modo em geral contidas neste trabalho de pesquisa. Dentre os vários personagens, sendo cada um deles dentro da sua particular linha de estudo e pesquisa, podemos citar como exemplo os seguintes autores e pesquisadores: Singh (1999), que fundamenta a historicidade de Pitágoras e do seu teorema; Lima et al (2006) e Wagner (2015), que fundamentam as generalidades sobre o teorema de Pitágoras; os PCN's (BRASIL, 1998; 1999; 2002), Cury (2015) e Correia (2010), que dão embasamento ao capítulo do referencial teórico propriamente dito e; o Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB (BRASIL, 2008), que fundamenta o capítulo sobre a análise e inferência de erros.

No primeiro capítulo, falamos sobre a história de Pitágoras e do seu teorema por entender que o conhecimento somente progride mediante a compreensão de suas bases. De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias):

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. (BRASIL, 2008, p. 86)

Aqui, vemos a importância de dar significado ao que estamos estudando, pois para que o aluno valorize e queira aprender o que o seu professor se propõe a ensinar é necessário que este procure situar aquele no tempo e no espaço. E isso se faz através da história e do protagonismo de seus personagens. Logo, procuramos, neste trabalho, dá uma maior evidência a esse notável alicerce do conhecimento matemático – a sua história.

No segundo capítulo abordamos a descoberta de uma fórmula que gera ternos pitagóricos e as conjecturas que classificam tais ternos em primitivos e não primitivos. Explicitamos a diferença entre prova matemática e prova científica mediante uma análise comparativa. Enunciamos três demonstrações do teorema de Pitágoras: a demonstração clássica, a demonstração simplificada chinesa e a demonstração que usa semelhança. Também apresentamos a generalização do teorema e, embasado em Wagner (2015), mostramos a sua recíproca. Finalizamos, exemplificando duas aplicações do teorema de Pitágoras, sendo uma relacionada ao estudo da geometria plana e a outra, ao estudo da geometria analítica.

No terceiro capítulo, apresentamos o referencial teórico dos principais tópicos que compõem o trabalho de pesquisa que foram: contextualização, material concreto, tecnologias da informação e comunicação (TIC's) e a análise de erros. Esses assuntos foram amplamente referenciados, pois tratam do cerne da proposta temática da pesquisa e também do processo de intervenção didático-metodológica.

No quarto capítulo, descrevemos a metodologia empregada no processo de pesquisa. Detalhamos os diversos tópicos que formam o corpo dessa metodologia os quais foram: campo de pesquisa, participantes, instrumentos de coleta de dados e o procedimento. Dentro desse penúltimo tópico, fizemos a análise dos três questionários (A, B e C) aplicados com a finalidade de coletarmos dados necessários à execução dessa proposta de estudo.

No quinto capítulo, apresentamos os resultados e discussões sobre os dados coletados, sendo esses dados transformados em informações estatísticas. O tratamento da informação ocorreu, em alguns momentos, apenas como mera verificação de quantidades estatísticas e em outros, conjecturamos sobre tais informações. Procuramos demonstrar os resultados em quadros e gráficos, objetivando dar maior transparência e credibilidade à pesquisa realizada.

No sexto capítulo, tratamos sobre a análise e inferência de erros. Analisamos o erro sob dois pontos de vista: como uma abordagem de pesquisa e também como metodologia de ensino. Como abordagem de pesquisa, significa que procuramos identificar nos discentes suas eventuais deficiências no conhecimento relacionado ao tema e, como metodologia de ensino, significa que lançamos mão dos dados obtidos desse estudo para buscarmos corrigir tais eventuais deficiências e/ou erros observados. Utilizamos para expressar a análise e inferência de erros à mesma metodologia utilizada pelo SAEB (BRASIL, 2008).

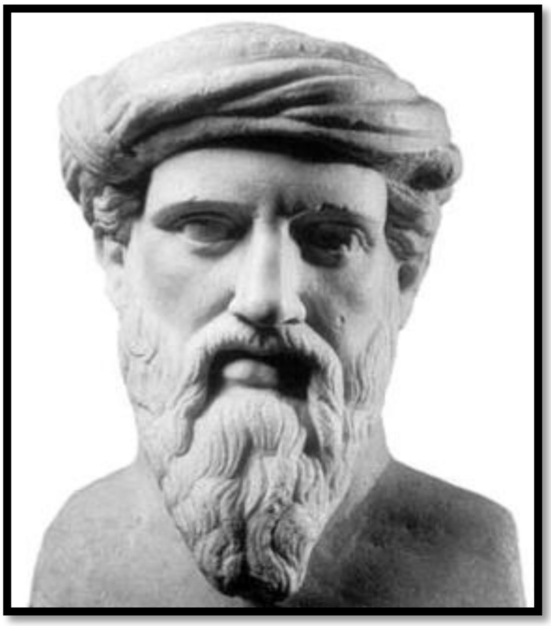
Nas considerações finais, falamos do objetivo da pesquisa; avaliamos, em linhas gerais, quais as dificuldades encontradas na realização da pesquisa; comentamos os resultados do estudo; citamos as contribuições do estudo para o meio acadêmico e educacional; e sugerimos temas para futuros trabalhos.

# CAPÍTULO 1

## 1 UM POUCO DE HISTÓRIA

De acordo com Strathern (2011), Pitágoras nasceu por volta de 565 a.C. na ilha de Samos na Grécia, situada a leste do mar Egeu. Seu pai possivelmente tenha sido um próspero gravador e mercador local chamado de Mnesarcos, apesar de diversas outras fontes sustentarem que ele era filho de Apolo, o antigo deus grego da música, poesia e dança. No pronunciar de Bertrand Russell: “Deixo ao leitor a escolha entre essas alternativas”.

**Figura 1 –** Busto de Pitágoras.



**Fonte:** www.templodeapolo.net

Qual seria a origem do conhecimento matemático de Pitágoras? Segundo Strathern (2011), Pitágoras cresceu no início da idade áurea da cultura grega antiga. Com a expansão dos gregos para o Mar Negro e o sul da península italiana (que chamavam de Magale Hellas e era conhecida pelos romanos como Magna Graecia). Os primeiros templos de mármore foram construídos na Acrópole[1] de Atenas e começaram a surgir os primeiros filósofos, dentre os quais Anaximandro, que se tornaria mestre de Pitágoras. Da Escola de Mileto originaram-se vários filósofos, sendo Anaximandro o seu segundo filósofo o qual se mostrou bem mais exímio pensador que o seu mestre Tales. Porém o pensamento de Anaximandro era mais científico e mais amplo que o de Tales. Dos antigos, foi um dos primeiros a tentar

[1]Cidadela na parte mais elevada das antigas cidades gregas.

desenhar um mapa do mundo, sendo que idealizou de forma curva a sua superfície. Porém a hipótese que concebeu foi falha por não ter percebido que era curva em todos os planos, imaginando que nas laterais fosse como o tambor de uma coluna. E que nós habitávamos somente a superfície superior dessa forma cilíndrica.

Ainda de acordo com Strathern (2011), o filósofo Ferécidas, também, foi mestre de Pitágoras. E estabelecendo um comparativo entre seus dois mestres, enquanto Anaximandro exerceu o papel do menino-prodígio, Ferécidas, fundamentalmente, representou um feiticeiro da “rudimentar internet[2] filosófica”. O mesmo era um interessante misto de filósofo e contador de histórias fantasiosas. Era considerado por alguns o inventor da doutrina da metempsicose (a transmigração das almas). Segundo essa doutrina, após a morte do indivíduo, a alma passa a habitar em outro corpo que pode está em estágio superior ou inferior de uma idealizada escala, a depender do comportamento recente. Podendo ser o corpo de um humano, de um animal ou, em casos mais extremos, de um vegetal.

Porém, Strathern (2011) acrescenta que mais relevante é compreendermos onde foi que Pitágoras “primeiramente trabalhou com matemática e aritmética”, visto que Anaximandro era um filósofo-cientista e Ferécidas era um filósofo-feiticeiro, e que, portanto, nenhum dos dois era matemático. Então voltando a nossa pergunta original. Qual seria a origem do conhecimento matemático de Pitágoras? Quem nos responde é o autor e pesquisador Simon Singh:

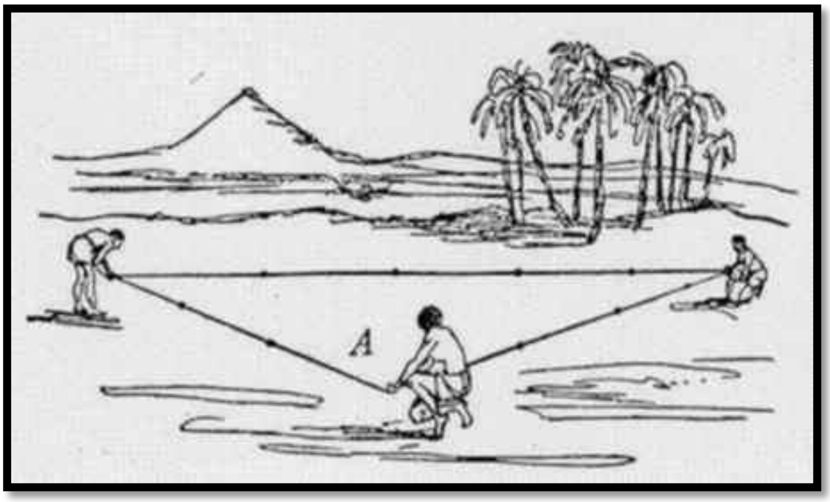
> Pitágoras adquiriu suas habilidades matemáticas em suas viagens pelo mundo antigo. Algumas histórias tentam nos fazer crer que Pitágoras teria ido até a Índia e a Inglaterra, mas o mais certo é que ele aprendeu muitas técnicas matemáticas com os egípcios e os babilônios. Esses povos antigos tinham ido além da simples contagem e eram capazes de cálculos complexos que lhes permitiam criar sistemas de contabilidade sofisticados e construir prédios elaborados. De fato, os dois povos viam a matemática como uma ferramenta para resolver problemas práticos. A motivação que conduziu à descoberta de algumas das leis básicas da geometria era a necessidade de refazer a demarcação dos campos, perdida durante as enchentes anuais do Nilo. A palavra geometria significa “a medida da terra”. (SINGH, 1999, p.29)

Portanto, entendemos que muito do conhecimento adquirido por Pitágoras se deve aos egípcios e aos babilônios que à época dispunham das mais sofisticadas técnicas matemáticas que permitiam o cálculo de problemas práticos, conforme podemos observar na Figura 2.

---

[2]Sistema de conexão de computadores, em rede mundial, que permite a transmissão de mensagens e o acesso a grande quantidade de informações. Strathern (2011) apenas estabelece uma analogia.

**Figura 2 –** Ilustração de egípcios usando a corda com 13 nós.



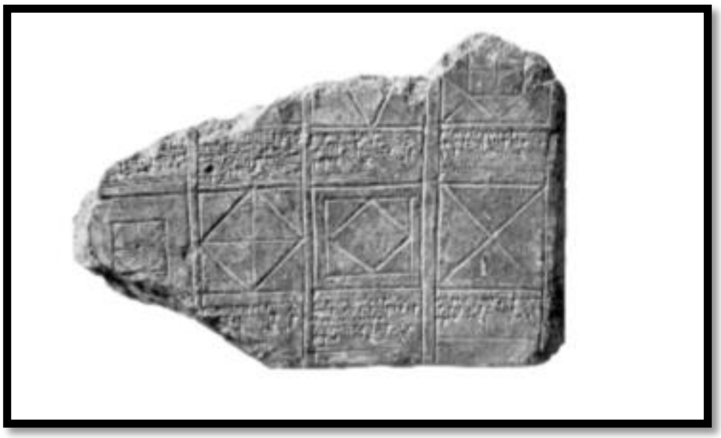

**Fonte:** www.ipv.pt

Ainda de acordo com Singh (1999), Pitágoras percebeu que os egípcios e os babilônios realizavam seus cálculos como se fosse uma espécie de receita pronta. E as receitas, as quais eram passadas através de gerações, sempre resultavam na resposta correta, fazendo com que não houvesse qualquer preocupação com a lógica subentendida nas equações, visto que não examinavam ou questionavam tais respostas. Portanto, para essas civilizações o importante era que os cálculos davam certo. Porém, saber por que davam certo não tinha a menor importância.

A respeito do conhecimento matemático de Pitágoras, Singh (1999) complementa, dizendo que passados vinte anos de viagens, Pitágoras regressou a sua terra natal, a ilha de Samos, após ter acumulado um vasto conhecimento matemático do mundo até então conhecido por ele. Com o propósito de conhecer os números mais profundamente e não apenas meramente utilizá-los, Pitágoras tinha como objetivo fundar uma escola dedicada ao estudo da filosofia e, timidamente, voltada para a pesquisa da matemática a qual tivera contato recente. A expectativa de Pitágoras era de encontrar um número considerável de estudantes ávidos pelo aprender que pudessem auxiliá-lo a desenvolver filosofias novas e radicais. A outrora liberal Samos fora transformada em uma sociedade intolerante e conservadora pelo tirano Polícrates durante o período da ausência de Pitágoras. Ao ser convidado por Polícrates a fazer parte de sua corte, Pitágoras percebeu que o convite do tirano visava silenciá-lo e recusou a honra, deixando Samos e indo morar em uma caverna, numa parte longínqua da ilha, na qual podia dá continuidade aos seus estudos sem medo de perseguição.

Para Strathern (2011) é relevante sabermos que os egípcios já tinham conhecimento que um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5 é retângulo. E mais ainda, evidências históricas, também, indicam que eles conheciam outras propriedades de tais triângulos, inclusive uma trigonometria elementar. Consoante à tradição, Tales teria medido a altura das pirâmides utilizando-se de suas sombras, sendo quase certo que recorreu a uma técnica trigonométrica criada séculos antes pelos egípcios. Strathern (2011), ainda, acrescenta que fica evidente pelo tablete de Yale[3] (ver exemplo de um tablete na Figura 3) que os babilônios já haviam feito algum progresso em direção à descoberta do teorema que levaria Pitágoras à fama. Eles conheciam a relação entre os lados de um triângulo retângulo e sua hipotenusa, no entanto não haviam descoberto uma maneira simples de expressar tal relação. Ainda se utilizavam de técnicas empíricas as quais não se demonstravam através de nenhuma fórmula algébrica genérica.

**Figura 3 –** Tablete de escrita cuneiforme dos babilônios.



**Fonte:** Wagner (2015)

Após o embate entre o tirano Polícrates e Pitágoras, este foi banido de Samos e de acordo com Singh (1999):

> Pitágoras partiu para o Sul da Itália, que era então parte da Magna Grécia. Ele se estabeleceu em Crotona onde teve a sorte de encontrar o patrono ideal em Milo. Milo era o homem mais rico de Crotona e um dos homens mais fortes de toda a história. Embora a reputação de Pitágoras como o sábio de Samos já estivesse se espalhado pela Grécia, a fama de Milo era ainda maior. Tratava-se de um homem de proporções hercúleas, que fora doze vezes campeão nos jogos olímpicos e de Pítias. Um recorde. Além de sua capacidade como atleta, Milo também apreciava e estudava a filosofia e a matemática. Ele cedeu uma parte de sua casa para que Pitágoras estabelecesse sua escola. E, assim, a mente mais criativa e o corpo mais poderoso formaram uma aliança. (SINGH, 1999, p.30)

[3]A Universidade Yale é um instituto universitário privado situado em New Haven, Connecticut, Estados Unidos. Fundada em 1701 sob o nome de Collegiate School.

Percebemos que a partir do apoio de Milo, começara um novo ciclo de vida produtiva para Pitágoras em relação ao estudo da filosofia e da pesquisa matemática.

Ainda segundo Singh (1999):

> Seguro em seu novo lar, Pitágoras fundou a Irmandade Pitagórica – um grupo de seiscentos seguidores, capazes não apenas de entender seus ensinamentos, mas também de contribuir criando ideias novas e demonstrações. Ao entrar para a Irmandade cada adepto devia doar tudo o que tinha para um fundo comum. E se alguém quisesse partir receberia o dobro do que tinha doado e uma lápide seria erguida em sua memória. A irmandade era uma escola igualitária e incluía várias irmãs. A estudante favorita de Pitágoras era a filha de Milo, a bela Teano, e, apesar da diferença de idade, os dois acabaram se casando. (SINGH, 1999, p.30-31)

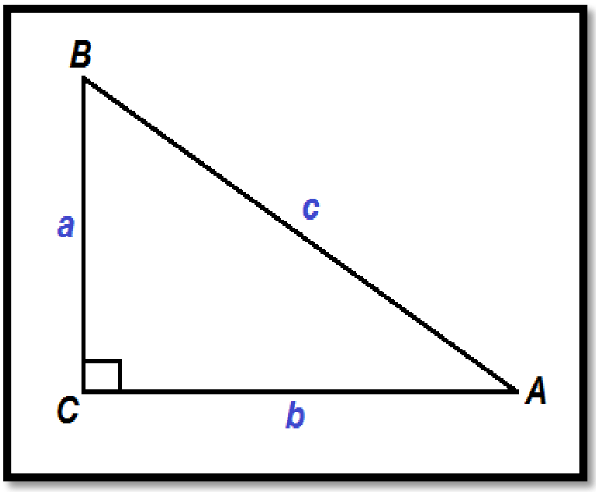
É curioso, se levarmos em consideração o período histórico, a existência de uma comunidade na qual se produziam conhecimentos e se buscava o aperfeiçoamento na pesquisa matemática com participação de mulheres, inclusive em assembleias, haja vista que, em algumas civilizações, estas não tinham – e, em alguns casos, continuam a não ter – direito a participarem ativamente de todos os segmentos da sociedade. Igualmente, é curioso o senso de justiça e a equidade vivenciada por tal agremiação – a Irmandade Pitagórica.

Singh (1999) acrescenta que logo após a fundação da Irmandade, Pitágoras criou a palavra filósofo, e, assim, o fazendo, expos detalhadamente os propósitos de sua escola. Na oportunidade em que assistia aos jogos olímpicos, Leon, príncipe de Pilos, questionou a Pitágoras como ele se definiria. Então, Pitágoras respondeu: “Eu sou um filósofo”. Porém, Leon não conhecia tal palavra e pediu que o explicasse. Assim, o fez Pitágoras.

Strathern (2011) acrescenta que foi nos primeiros anos em Crotona que Pitágoras pusera em prática sua relevante obra matemática, inclusive a descoberta do afamado teorema. É sabido que os babilônios quase descobriram a relação que hoje conhecemos como teorema de Pitágoras. Eles tinham conhecimento de que um triângulo retângulo de lados medindo 3 e 4 tem uma hipotenusa de medida 5. Efetivamente, existem evidências obtidas mediante inscrições cuneiformes contidas em um bloco no qual estão listados 15 ternos numéricos distintos, representando as medidas dos lados de triângulos retângulos. Entretanto, é provável que tenha sido o próprio Pitágoras (ou um dos seus discípulos) quem primeiro usou a relação

$a^2 + b^2 = c^2$ (Figura 4) para generalizar a existência de um triângulo retângulo mediante a observação das medidas de seus lados.

**Figura 4 –** Triângulo retângulo.




**Fonte:** Editada pelo autor.

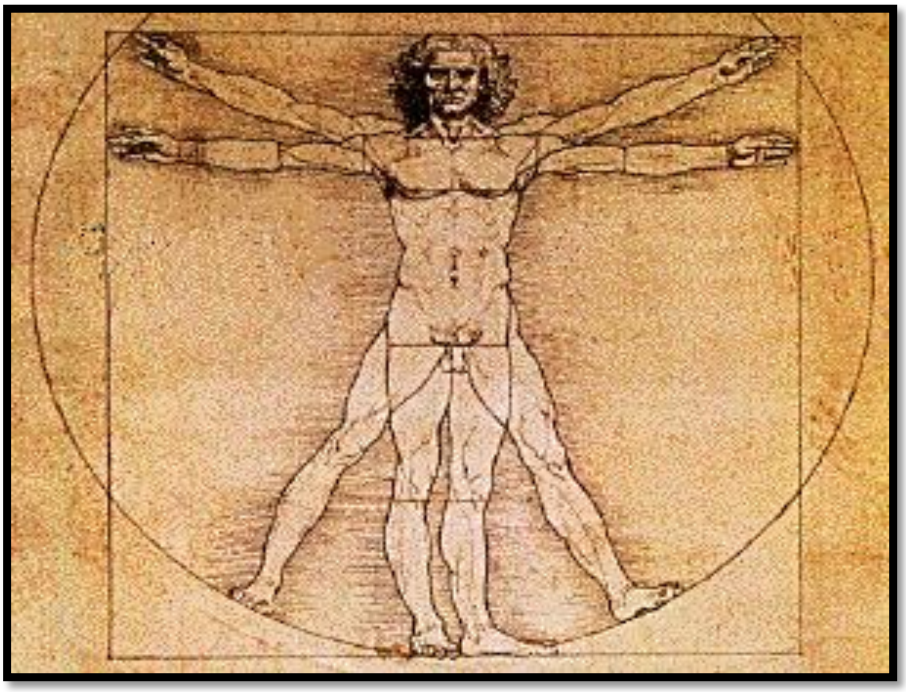
Segundo Strathern (2011), essa relação é uma contribuição, especialmente, dada pelos gregos à matemática – motivo pelo qual, atualmente, os gregos são considerados, sob muitos aspectos, os criadores dessa ciência. Os gregos foram os precursores do estudo da matemática sob o ponto de vista puramente teórico cujos métodos podem ser aplicados genericamente. E avançaram no conhecimento matemático ao ratificarem esses métodos gerais com demonstrações.

Strathern (2011) assevera que três elementos fundamentais da matemática – abstração, prova e raciocínio dedutivo – foram todos introduzidos pelos gregos da antiguidade e existe uma grande possibilidade de que foi o próprio Pitágoras que os introduziu.

Ainda de acordo com Strathern (2011), como Pitágoras nada deixou registrado, não sabemos como o mesmo provou seu teorema. Porém, a mais remota autoridade conhecida que conferiu ao próprio Pitágoras o teorema que leva seu nome foi Vitrúvio Pólio, arquiteto romano do século I a.C., atualmente, lembrado por sua teoria das proporções humanas – acomodação da figura humana dentro de um quadrado inscrito num círculo, de que Leonardo da Vinci deixou notável gravura (Figura 5). Verdadeiramente, sabemos pouquíssimas coisas fidedignas a respeito da vida de Pitágoras que se torna quase impossível diferenciarmos suas ideias das de seus discípulos. Em razão da inexistência de obras atribuídas ao próprio Pitágoras, somente podemos nos fundamentar nas obras dos pitagóricos e críticos posteriores.

Entretanto, como os pitagóricos tinham o costume de conferir todas as suas descobertas ao seu mestre, é de pouca confiabilidade as informações difundidas.

**Figura 5 –** O Homem Vitruviano, desenho de Leonardo da Vinci, 1490.



**Fonte:** www.infoescola.com.

Segundo Strathern (2011), à Crotona, Pitágoras chegara como professor, porém a profunda transformação como líder religioso parece ter ocorrido rapidamente. Como consequência seus alunos de matemática e filosofia, logo receberam a denominação de discípulos e o que lhes era ensinado alcançou uma aura religiosa. “Tudo é número” se transformou em explicação equivalentemente teológica e científica do mundo.

Ainda de acordo com Strathern (2011), Pitágoras entendia que ser capaz de permanecer em silêncio era o passo inicial para a compreensão – hipótese nem sempre sábia para determinadas funções. Seus seguidores eram formados por dois grupos hierárquicos. Os iniciados – também denominados de “ouvintes” – não tinham autorização para se manifestarem. Desses se esperava que, de fato, justificassem a denominação lhes atribuída e memorizassem as palavras do mestre. Os chamados de “matemáticos” pertenciam ao grupo dos mais antigos. A esses era concedido fazer perguntas e, ocasionalmente, manifestarem suas opiniões. Podiam, também, realizar suas próprias investigações e, casualmente, chegavam a descobertas matemáticas originais. No entanto, todos os avanços do conhecimento e da pesquisa eram atribuídos ao mestre – como já fora ressaltado –, daí o principal motivo pelo qual é dificílimo sabermos o que seguramente o próprio Pitágoras descobriu.

Para Strathern (2011), o pitagorismo surgiu como religião, porém se discerne de outras religiões gregas da época. Fundamentalmente, por algumas peculiares características, tais como: estrutura social, implícita cruzada moral, seu lado oculto e sua permanente disseminação as quais fizeram o pitagorismo também assumir um caráter político. Entretanto, em seus ensinamentos não figuravam qualquer teoria política realista.

A religião pitagórica possuía regras de comportamento, porém tais regras eram prioritariamente de natureza religiosa em detrimento da civil. Em vez de contrapor-se à democracia, o pitagorismo foi casualmente considerado pelos governantes aristocráticos do sul da Itália como uma ameaça revolucionária. Igualmente, todos os que eram a favor das reformas democráticas não possuíam qualquer desejo de que o pitagorismo inserisse reformas de sua moral. Tal impasse foi inteligentemente contornado pelos governantes, fazendo com que a opinião pública se voltasse contra os pitagóricos. Como consequência, Pitágoras e seus seguidores foram obrigados a abandonar sua morada em Crotona.

Ainda, de acordo com Strathern (2011):

> Pouco depois da expulsão de Crotona, Pitágoras e seus seguidores estabeleceram-se em Metaponto, outra cidade-colônia grega cerca de 160 quilômetros ao norte, no Golfo de Tarento. A essa altura Pitágoras tinha sessenta e tantos anos, idade venerável considerando que a expectativa média de vida na época era em torno de trinta e cinco. Mas, os anos de abstinência de feijão obviamente cobraram seu tributo, pois Pitágoras morreu não muito depois de chegar a Metaponto (embora, segundo uma fonte, tenha morrido queimado no incêndio que manifestantes antipitagóricos provocaram na casa comunitária onde morava). Como todo o restante da vida de Pitágoras, é impossível verificar isso. (STRATHERN, 2011, p.30)

Portanto, foi na cidade-colônia grega de Metaponto que Pitágoras vivera seus últimos dias de vida, após uma existência dedicada ao estudo da filosofia e à pesquisa matemática.

Strathern (2011) assegura atribuir-se ao próprio Pitágoras a fórmula para determinar ternos de números pitagóricos, ou seja, que justifiquem a fórmula: $a^2 + b^2 = c^2$. A fórmula para se determinar as tríades pitagóricas é:

$$n^2 + \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{2} + 1\right)^2 ,$$

onde n é um número ímpar. Na realidade, tal relação é válida para qualquer n real. Os babilônios eram conhecedores desse método e Pitágoras provavelmente o conhecera na Babilônia. Entretanto, apenas os gregos criaram uma fórmula para tal método.

Para Singh (1999), Pitágoras notou a ocultação dos números em tudo, das harmonias da música até as órbitas dos planetas, levando-o a anunciar que “tudo é número”. Ao pesquisar o significado da matemática, Pitágoras estava elaborando uma forma de expressão que facilitaria que ele e outros depois dele representassem minuciosamente a natureza do universo. A partir desse estágio, cada avanço da matemática permitiria aos cientistas criarem o vocabulário necessário para melhor esclarecer os fenômenos que nos cercam. Com efeito, o progresso da matemática traria ideias revolucionárias à ciência.

Ainda segundo Singh (1999), a matemática utilizada para compreender o teorema de Pitágoras é relativamente elementar. Contudo, para entender tal matemática basta começar medindo o comprimento dos dois catetos (lados menores) do triângulo retângulo ($a$ $e$ $b$), e então calcular o quadrado de cada um deles ($a^2$, $b^2$). Depois somamos os quadrados dos dois números ($a^2 + b^2$), fornecendo, assim, o número final. Feita tal operação, então medimos o lado mais comprido, $c$, denominado de hipotenusa, e calculamos o quadrado do seu comprimento. O resultado surpreendente é que este número, $c^2$, é igual ao calculado anteriormente, isto é, ($a^2 + b^2$). Resumidamente: num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Simbolicamente, temos: $c^2 = a^2 + b^2$.

Todavia, o que é extraordinário é que o teorema de Pitágoras é verdadeiro para todos os imagináveis triângulos retângulos. E por ser uma regra universal da matemática, podemos contar com ela sempre que encontrarmos um ângulo reto. Reciprocamente, se tivermos um triângulo que está sujeito ao teorema de Pitágoras, então podemos afirmar se tratar de um triângulo retângulo.

Segundo Singh (1999), é relevante citarmos que, conquanto, tal teorema esteja perpetuamente associado a Pitágoras, o mesmo já era utilizado pelos chineses e babilônios mil anos antes. Entretanto, essas culturas não tinham conhecimento que o teorema era aplicável em todos os triângulos retângulos. Sabiam que era verdadeiro tão somente para os triângulos retângulos os quais tinham testado. A razão pela qual o teorema leva o nome de Pitágoras é porque foi ele o primeiro a provar de forma incontestável esta verdade universal.

Porém, como Pitágoras tinha certeza de que o teorema é válido para todos os triângulos retângulos? Não haveria como testar as incontáveis variedades de triângulos retângulos e, no entanto, estava totalmente convicto de que o teorema era irrefutável. O motivo para a sua certeza está no conceito de prova, ou demonstração matemática. A procura pela prova matemática é a procura pelo saber mais soberano do que o saber acumulado por qualquer outra disciplina. Este anseio pela verdade inconteste mediante o uso da prova, ou demonstração, é o que tem instigado os matemáticos nos últimos dois mil e quinhentos anos.

# CAPÍTULO 2

## 2 GENERALIDADES SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS

Neste capítulo, discorreremos sobre algumas importantes peculiaridades que envolvem o estudo do teorema de Pitágoras, tais como: ternos pitagóricos, provas ou demonstrações do teorema, recíproca do teorema e aplicações do teorema.

### 2.1 TERNOS PITAGÓRICOS

Lima et al. (2006) sobre os ternos pitagóricos faz a seguinte declaração:

> O triângulo de lados $1$, $3$ e $\sqrt{10}$ é retângulo? Sim, pois $(\sqrt{10})^2 = 1^2 + 3^2$. Durante toda a história antiga e mesmo até hoje, temos curiosidade em encontrar triângulos cujos lados são medidos por números inteiros. Todos nós sabemos que o triângulo de lados $3$, $4$ e $5$ é retângulo, mas você sabia que o triângulo de lados $372$, $925$ e $997$ é retângulo? Possivelmente não. Este é inclusive o triângulo retângulo de maior perímetro que tem lados menores que $1\,000$. Nossa curiosidade nos leva a seguinte pergunta: "Como encontrar triângulos retângulos cujos lados tenham medidas inteiras?" (LIMA et al., 2006, p. 69)

Aqui, percebemos que a humanidade sempre teve interesse nas descobertas matemáticas e, especificamente, de trios de números inteiros que satisfizessem a condição de serem as medidas dos lados de um triângulo retângulo. E diante dessa curiosidade, surge a indagação se é possível encontrar tais medidas inteiras mediante a utilização de alguma fórmula.

Quem responde é o próprio Lima et al. (2006) ao apresentar a seguinte definição:

Sendo $a$, $b$ e $c$ inteiros positivos com $a > b$ e $a > c$ dizemos que $(b,\ c,\ a)$ é um terno pitagórico se $a^2 = b^2 + c^2$. Portanto, $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$ são exemplos de ternos pitagóricos.

Um terno pitagórico $(b, c, a)$ é dito primitivo, quando $b$ e $c$ são primos entre si, isto é, quando $mdc(b,\ c) = 1$. Logo, $(3, 4, 5)$ é um terno pitagórico primitivo. Evidentemente, qualquer terno de estrutura $(3k, 4k, 5k)$ com $k$ inteiro e maior que 1 é também pitagórico, porém não é primitivo.

Lima et al. (2006) apresenta uma fórmula que gera ternos pitagóricos:

Sendo $m$ e $n$ inteiros positivos com $m > n$, considere:

$$b = m^2 - n^2,\ c = 2mn,\ a = m^2 + n^2.$$

Perceba que $(b, c, a)$ é um terno pitagórico, pois:

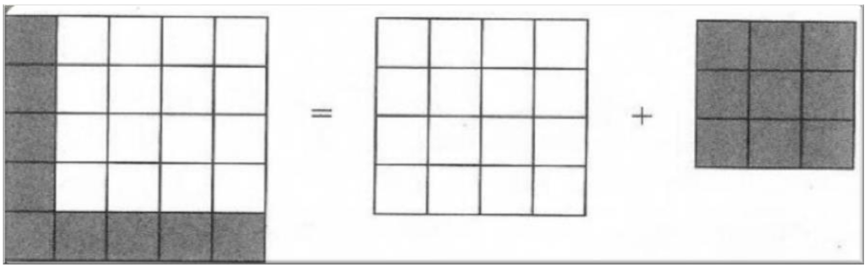
$$b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2 = a^2.$$

Portanto, para uma escolha aleatória de números inteiros $m$ e $n$ ($m > n > 0$), o terno ($b$, $c$, $a$) é pitagórico. Exemplificando, para $m = 7$ e $n = 4$ obtemos o terno pitagórico $(33, 56, 65)$. Perceba que, se nessa fórmula atribuirmos para $m$ e $n$ valores ambos pares ou ambos ímpares, encontraremos um terno pitagórico não primitivo, visto que todos os termos do trio serão pares. Se escolhermos para $m$ e $n$ valores que conduzam *b* e *c* a serem primos entre si, então encontraremos um terno pitagórico primitivo. A referida fórmula é atribuída a Platão (século IV, a.C.).

Segundo Singh (1999), outra maneira de imaginarmos os trios pitagóricos é compará-los ao ato de reorganizar quadrados. Exemplificando, se possuímos um quadrado de 3 x 3 formado por 9 ladrilhos e um 4 x 4 formado por 16 ladrilhos, então os ladrilhos podem ser reorganizados para compor um quadrado de 5 x 5 formado de 25 ladrilhos, conforme podemos observar na figura 6.

Os Pitagóricos desejavam obter outros trios pitagóricos, ou melhor, outros quadrados que se somados resultasse em um terceiro quadrado maior.

**Figura 6 –** Obtenção de ternos pitagóricos reorganizando quadrados.



**Fonte:** http://www.dme.ufcg.edu.br/pet/arquivos/palestra_michell_fermat.pdf.

Um exemplo de trio pitagórico maior é $x = 99$, $y = 4\,900$ e $z = 4\,901$. Os trios pitagóricos se fazem mais raros à medida que os números crescem seus valores, tornando-se cada vez mais difícil determiná-los. Para encontrarmos tantos trios quanto quisermos, os pitagóricos criaram um método de determiná-los e, assim, procedendo, também demonstraram que existe uma infinidade deles. Conforme comentado no Capítulo 1, Strathern (2011) atribui a fórmula $n^2 + (\frac{n^2-1}{2})^2 = (\frac{n^2-1}{2} + 1)^2$, onde $n$ é um número ímpar, para se determinar as tríades pitagóricas ao próprio Pitágoras.

## 2.2 DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

De acordo com Singh (1999), em matemática o conceito de prova é bem mais exigente e poderoso do que o usado no nosso cotidiano e até mais rigoroso do que o conceito de prova entendido, geralmente, pelos físicos e químicos. A distinção entre prova científica e prova matemática é quase que imperceptível e profunda simultaneamente. A prova é de extrema relevância para entendermos o trabalho de cada matemático, desde Pitágoras.

Ainda segundo Simon Singh, sobre o tema prova ou demonstração matemática o mesmo declara que:

> A ideia da demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos serem verdadeiras ou que são verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. Esta conclusão é o teorema.
>
> Os teoremas matemáticos dependem deste processo lógico, e uma vez demonstrados eles serão considerados verdade até o final dos tempos. A prova matemática é absoluta. (SINGH, 1999, p. 41)

Aqui, Simon Singh deixa evidente que o encadeamento sequencial lógico dos axiomas conduz a uma conclusão irrefutável a qual chamamos de teorema. E se tais axiomas forem, de fato, sólidos e seguirem uma lógica inquestionável, então, também, a conclusão será indiscutível, tornando-se eternamente incontestável.

Singh (1999), com o propósito de avaliar o valor das provas matemáticas, faz uma análise comparativa entre prova matemática e prova científica, denominando esta de prima pobre daquela e afirma que na ciência é necessário apresentar uma conjectura para explicar um fenômeno físico. Se as observações do fenômeno estudado forem propensas à hipótese, então aquelas se tornam evidências favoráveis a esta. E acrescenta que a hipótese não somente deve descrever um fenômeno conhecido, bem como antever os resultados de outros fenômenos. Experimentos podem ser feitos para verificar a aptidão da hipótese em prever os resultados, e caso o resultado seja favorável, então acumularemos mais evidências para sustentar a hipótese. Enfim, o somatório de todas as evidências pode chegar a ser tão grande que, consequentemente, a hipótese passará a ser admitida como teoria científica.

Singh (1999), em relação ao assunto tratado, adverte que uma teoria científica jamais pode ser provada de modo analogamente incontestável quanto um teorema matemático. Com base nas evidências disponíveis, a teoria científica é simplesmente considerada como extremamente provável. Logo, a denominada prova científica se apoia na observação a na percepção, sendo que ambas são falíveis, produzindo apenas aproximações em relação à verdade. Conforme, outrora, pronunciou Bertrand Russell: “Se bem que isto pareça ser um paradoxo, toda a ciência exata é subjugada pela ideia de aproximação.” Até as “provas” científicas mais rigorosas admitem mínimos elementos de desconfiança inseridos nelas. Às vezes esta desconfiança é amenizada, porém nunca é completamente extinguida. Sendo que em algumas ocasiões se descobre, até mesmo, que a prova estava equivocada. Esta fragilidade das provas científicas leva a mudanças profundas na ciência, uma vez que uma teoria que se considerava correta é substituída por outra a qual pode ser simplesmente um aprimoramento da teoria original, ou mesmo representar uma total incoerência.

Simon Singh fundamentou-se em Pitágoras e no seu teorema para discorrer sobre o significado de prova ou demonstração matemática. No entanto, queremos evidenciar a diferença entre prova científica e prova matemática mediante análise comparativa das peculiaridades dos referidos procedimentos, e, uma vez que já refletimos a respeito da prova científica, agora, falaremos, consoante Simon Singh, sobre prova ou demonstração matemática.

> [...], Pitágoras construiu uma demonstração que mostra que todos os triângulos retângulos possíveis irão obedecer ao seu teorema. Para Pitágoras a ideia da prova matemática era sagrada, e foi esse tipo de demonstração que permitiu que a Irmandade descobrisse tanta coisa. A maioria das provas modernas são incrivelmente complexas e seguem uma lógica inatingível para o homem comum. Felizmente, no caso do teorema de Pitágoras, o argumento é relativamente direto e depende apenas de matemática de nível ginasial. (SINGH, 1999, p. 45)

Aqui, compreendemos a importância da demonstração do teorema de Pitágoras para a Matemática. Pois, foi a partir de descobertas desse tipo que se sucederam várias outras relevantes descobertas matemáticas. Sabemos que a argumentação que nos leva ao entendimento da demonstração do teorema é bastante elementar. Em contrapartida, as demonstrações atuais requerem um elevado nível de compreensão de lógica matemática. O que as tornam, para muitos, algo incompreensível.

Ainda relacionando a importância da descoberta do teorema de Pitágoras como um dos alicerces da fundamentação da teoria da demonstração matemática. Simon Singh afirma que:

> A prova, ou demonstração, de Pitágoras é irrefutável. Ela mostra que seu teorema é verdadeiro para cada triângulo retângulo do universo. [...]. Sua importância foi dupla. Primeiro, desenvolveu a ideia da prova. Uma solução matemática demonstrada era uma verdade mais profunda do que qualquer outra por ser o resultado de uma lógica encadeada, passo a passo. Embora

> o filósofo Tales já tivesse inventado algumas demonstrações geométricas primitivas, Pitágoras levou a ideia muito mais adiante e foi capaz de provar ideias matemáticas muito mais engenhosas. A segunda consequência do teorema de Pitágoras é que ele liga o método matemático abstrato a alguma coisa tangível. Pitágoras demonstrou que as verdades da matemática podem ser aplicadas ao mundo científico, dando-lhe um fundamento lógico. A matemática dá à ciência um princípio rigoroso, e sobre seus fundamentos infalíveis os cientistas acrescentam suas medições imprecisas e suas observações imperfeitas (SINGH, 1999, p. 45-46)

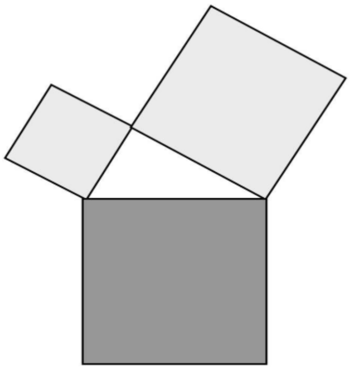
Claro está que a demonstração do teorema é incontestável, visto que o pragmatismo de Pitágoras o levou através de uma argumentação lógica a mostrar que seu teorema é verdadeiro e aplicável a todo triângulo retângulo existente. Sendo que a demonstração do teorema de Pitágoras teve por consequência o desenvolvimento da ideia de prova que até então era bastante tímido, e também que o teorema pode oscilar do nível da pura abstração para o nível da demonstração prática. Levando-nos a perceber sua veracidade, também, mediante o uso de material manipulável.

Segundo Lima (1991), Elisha Scott Loomis, professor de matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos) era um verdadeiro entusiasta do teorema de Pitágoras. Por um período de 20 anos, de 1907 a 1927, reuniu demonstrações desse teorema, juntou-as e as publicou num livro chamado “The Pythagoren Proposition” (A Proposição de Pitágoras). A primeira edição, em 1927, já fora publicada com 230 demonstrações. Na segunda edição, publicada em 1940, o número de demonstrações cresceu para 370. Após o falecimento do autor, o livro foi reimpresso em 1968 e 1972, pelo “National Council of Teachers of Mathematics” do referido país.

Lima (1991) ainda acrescenta que as demonstrações do teorema de Pitágoras foram classificadas, fundamentalmente, em dois tipos pelo professor Loomis, a saber: provas “algébricas” (firmadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e provas “geométricas” (firmadas em comparações de áreas). E que Loomis, ainda, adverte que não é possível demonstrar o teorema de Pitágoras se utilizando de argumentos trigonométricos, visto que a igualdade fundamental da trigonometria, $cos^2x + sen^2x = 1$, já é uma particularidade do teorema de Pitágoras.

Como sabemos, o enunciado do teorema de Pitágoras é o seguinte: “Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos”. (WAGNER, 2015, p. 4)

**Figura 7 –** Ilustração do enunciado do teorema de Pitágoras.

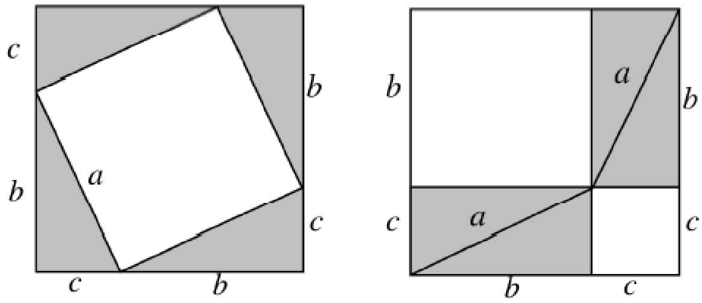


**Fonte:** Wagner (2015).

Portanto, se $a$ é a medida da hipotenusa e se $b$ e $c$ são as medidas dos catetos, o enunciado do teorema de Pitágoras equivale a afirmar que $a^2 = b^2 + c^2$. Observando a Figura 7, o teorema de Pitágoras afirma que a área sombreada na tonalidade mais clara é igual à área sombreada na tonalidade mais escura. Wagner (2015, p. 5) faz a seguinte reflexão a respeito da Figura 7 e da observação sobre a mesma: “Este fato não é evidente! Muito pelo contrário. É misterioso e intrigante. Para que possamos nos convencer da verdade dessa afirmação precisamos de uma demonstração”. Portanto, apresentaremos algumas.

**1ª demonstração:** A demonstração clássica.

**Figura 8 –** A demonstração clássica.




**Fonte:** Wagner (2015).

Tomemos como referência a Figura 8. De acordo com Wagner (2015): Dado um triângulo retângulo de hipotenusa $a$ e catetos $b$ e $c$, considere o quadrado cujo lado é $b + c$.

Do quadrado de lado $b + c$, da esquerda, retiramos quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado $a$. Do quadrado de lado $b + c$, da direita, retiramos também quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado $b$ e um quadrado de lado $c$. Portanto, a área do quadrado de lado $a$ é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem $b$ e $c$.

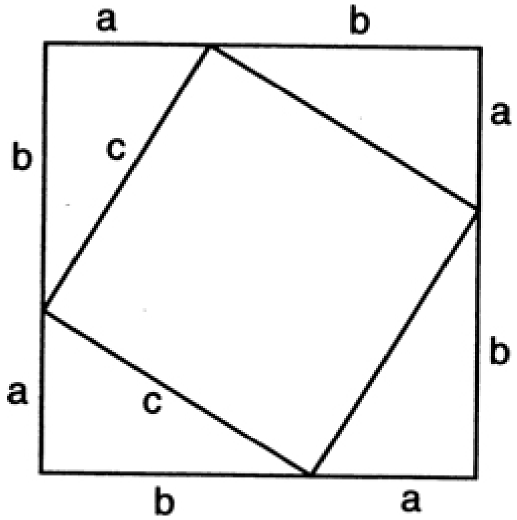
Wagner (2015) ainda acrescenta que esta evidente e inventiva demonstração pode ter sido a que os pitagóricos criaram.

**2ª demonstração:** A demonstração simplificada chinesa.

Segundo Strathern (2011), existe uma prova chinesa no Chou pei suan ching[4], escrito por volta de 500 a.C. e o início da nossa era. O que significa dizer que os chineses certamente quase chegaram à demonstração do teorema de maneira independente.

No pensar de Strathern (2011) "a versão simplificada da prova chinesa é de todas a mais bela".

**Figura 9 –** A demonstração simplificada chinesa.




**Fonte:** Strathern (2011).

Tomemos como referência a Figura 9. De acordo com Strathern (2011):

Um quadrado com lados $a + b$ tem um quadrado inscrito com lados $c$.

Resumidamente, esta demonstração envolve equacionar a área total, isto é, $(a + b)^2$ com as áreas do quadrado e dos quatro triângulos contidos nela, ou seja, $c^2 + 4.(\frac{ab}{2})$. Resolvendo, temos:

$$(a + b)^2 = 4.(\frac{ab}{2}) + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

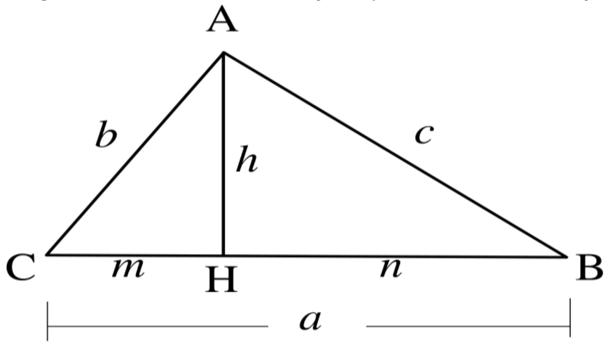
De fato, é uma belíssima demonstração pela sua simplicidade e objetividade. Não sendo necessário recorrer a nenhum conhecimento mais aprofundado, visto

[4]**Chou pei suan ching** é um dos mais antigos e famosos textos chineses sobre matemática.

que o simples domínio das definições de áreas de figuras planas é o suficiente para a obtenção da prova.

**3ª demonstração:** A demonstração que usa semelhança.

**Figura 10 –** A demonstração que usa semelhança.




**Fonte:** Wagner (2015).

Esta, possivelmente seja a demonstração mais comumente encontrada. Tomemos como referência a Figura 10. Consoante Wagner (2015):

A partir de um triângulo $ABC$, retângulo em $A$, traçamos a altura $AH$ e verificamos que os triângulos $AHB$ e $AHC$ são semelhantes ao triângulo $ABC$.

Da semelhança dos triângulos $AHC$ e $ABC$ temos $b^2 = am$ e, da semelhança dos triângulos $AHB$ e $ABC$, temos $c^2 = an$. Somando essas duas relações membro a membro, encontramos:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = a.a = a^2.$$

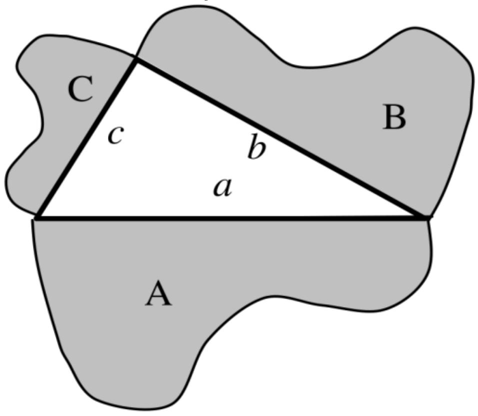
O professor Eduardo Wagner, ainda declara que:

> Esta demonstração é a mais frequente hoje nas escolas porque permite, com um único e pequeno esforço, não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar as relações importantes do triângulo retângulo. Além das duas relações, que deram origem à demonstração do teorema, obtemos a relação $bc = ah$, que também se interpreta com o conceito de área, e $h^2 = mn$, que revela o importante fato de que a altura é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. (WAGNER, 2015, p. 7)

Portanto, Wagner (2015) justifica a frequente utilização da demonstração por semelhança devido ao fato de que além de podermos obter a demonstração do teorema de Pitágoras de maneira bastante elementar, também oportuniza a obtenção de outras relações existentes no triângulo retângulo.

Agora, procuraremos generalizar o teorema de Pitágoras. Consoante Wagner (2015, p.12) “O Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos”. Tomemos, agora, figuras semelhantes quaisquer, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo. Figuras semelhantes são aquelas que têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Esse conceito é também extensivo aos sólidos geométricos.

**Figura 11 –** Generalização do Teorema de Pitágoras.




**Fonte:** Wagner (2015).

Tomando como referência a Figura 11, acompanhe o procedimento de Wagner (2015) para demonstrar uma generalização do teorema de Pitágoras:

Consideremos $A, B$ e $C$ áreas de figuras semelhantes, construídas sobre a hipotenusa $a$ e sobre os catetos $b$ e $c$ de um triângulo retângulo. Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Logo,

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \ ou \ \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \ ou \ \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Portanto,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Pela propriedade das proporções, como $a^2 = b^2 + c^2$, concluímos que $A = B + C$. Esclarecendo, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

## 2.3 A RECÍPROCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Segundo Wagner (2015, p. 8-10), cabe o seguinte questionamento: “se $a$, $b$, e $c$ são reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$ será o triângulo de lados $a$, $b$, e $c$ retângulo? Intuitivamente, pensamos que sim. Mas, devemos demonstrar isto”. Para tanto, tomaremos como referências as Figuras 12 e 13 para o 1º e 2º casos respectivamente.

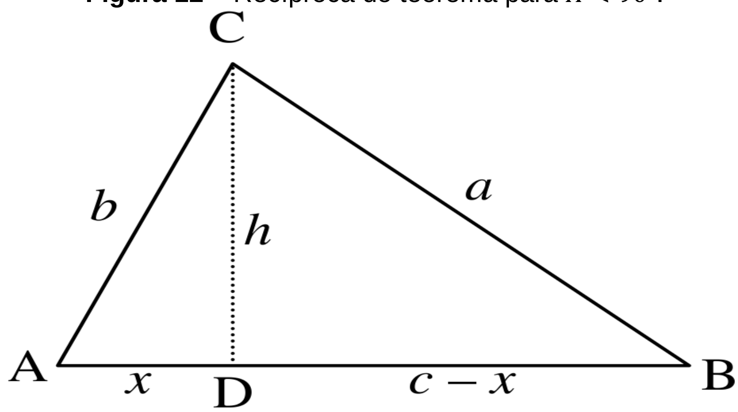
Portanto, consideremos a seguinte proposição: **Seja $ABC$ um triângulo, tal que $AB = c, BC = a$ e $AC = b$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então $ABC$ é retângulo em $A$.** Da hipótese $a^2 = b^2 + c^2$, sabemos que $a$ é o maior dos lados do triângulo e que $\hat{A}$ é o maior dos ângulos, visto que a medida de um ângulo de um triângulo qualquer é proporcional à medida do seu lado aposto. E se $\hat{A}$ for reto, então será único, uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer vale 180°.

**Condição inicial:** demonstraremos por contradição a validade da proposição, admitindo ser verdade que $a^2 = b^2 + c^2$ para o ângulo $A$ diferente de 90°.

**Análise do 1º caso: $\widehat{A} < 90°$.**

Suponha que $b \leq c$. Dessa forma, o ponto $D$, projeção de $C$ sobre $AB$, pertence ao interior do lado $AB$. Considere $AD = x$ e $CD = h$.

**Figura 12 –** Recíproca do teorema para $\hat{A} < 90°$.




**Fonte:** Wagner (2015).

Como o triângulo $ADC$ é retângulo em D, temos que $b^2 = h^2 + x^2$. Como o triângulo $BDC$ também é retângulo D, temos:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2,$$

se temos que $b^2 = h^2 + x^2, então\ h^2 = b^2 - x^2$ , logo,

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

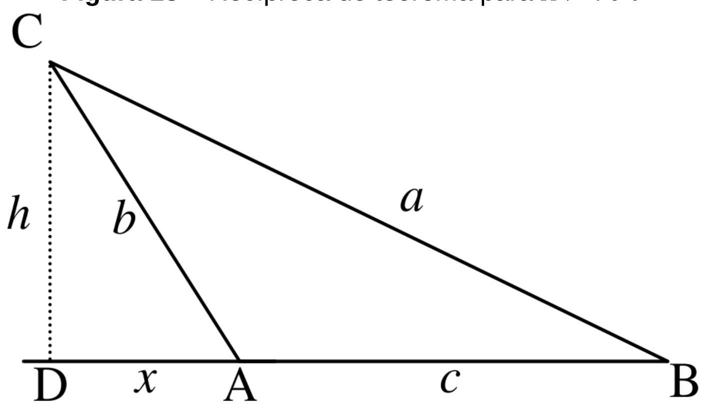
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx,$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, contradizendo a condição inicial.

**Análise do 2º caso: $\widehat{A} > 90°$.**

Agora, o ponto $D$ pertence ao prolongamento do lado $AB$.

**Figura 13 –** Recíproca do teorema para $\hat{A} > 90°$.




**Fonte:** Wagner (2015).

Como o triângulo $ADC$ é retângulo em D, temos que $b^2 = h^2 + x^2$. Como o triângulo $BDC$ também é retângulo em D, temos:

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

se temos que $b^2 = h^2 + x^2, então\ h^2 = b^2 - x^2$ , logo,

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx,$$

ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, mais uma vez contradizendo a condição inicial.

Portanto, provamos que em um triângulo $ABC$, de lados $a, b\ e\ c$ são válidas as seguintes implicações:

$$\hat{A} < 90° \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2.$$

$$\hat{A} > 90° \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2.$$

Logo, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $\hat{A} = 90°$.

Portanto, concluímos que um triângulo é retângulo se a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos e, reciprocamente, se área do quadrado construído sobre o maior dos lados de um triângulo for igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os outros dois lados, então esse triângulo possui um ângulo de 90°, isto é, é retângulo. Simbolicamente, temos que: $\hat{A} = 90° \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

## 2.4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

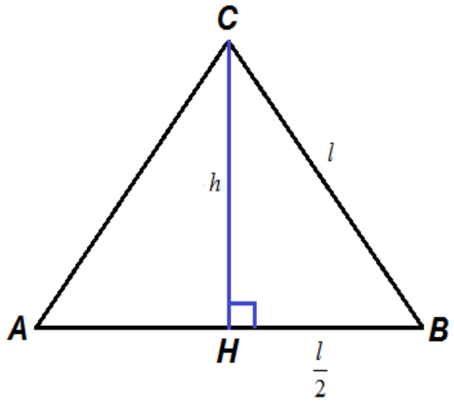
Das várias aplicações existentes do teorema de Pitágoras, apresentaremos apenas duas com o objetivo de mostrar a importância de tão essencial ferramenta para a Matemática. A primeira aplicação está relacionada ao estudo da geometria plana e a segunda, ao estudo da geometria analítica.

**1ª aplicação:** O teorema de Pitágoras no triângulo equilátero.

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida $h$ da altura e a medida $l$ do lado do triângulo equilátero.

A Figura 14 é um triângulo equilátero ABC, em que $l$ é a medida do lado e $h$ é a medida da altura relativa ao lado AB. Sabemos que um triângulo equilátero tem três lados de mesma medida, e que em um triângulo qualquer os lados são proporcionais aos ângulos opostos. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, concluímos que cada um dos ângulos internos do triângulo equilátero mede 60°.

**Figura 14 –** Triângulo equilátero.




**Fonte:** Editada pelo autor.

No triângulo equilátero, a altura e a mediana coincidem; logo, o ponto $H$ é ponto médio do lado $\overline{AB}$.

No triângulo retângulo $CHB$ ($\widehat{H}$ é reto), de acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Agora, de posse do cálculo da altura $h$ do triângulo equilátero em função do lado $l$, uma consequência natural é a possibilidade do cálculo da área desse mesmo triângulo equilátero, também, em função do lado.

De acordo com a Figura 14, temos que $\overline{AB} = l \text{ e } \overline{CH} = h$. Sabemos que o cálculo da área $A$ de um triângulo qualquer é obtido pela metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base. Logo, temos:

$$A = \frac{\overline{AB}.\overline{CH}}{2} \Rightarrow A = \frac{l.h}{2} \Rightarrow A = \frac{l.\frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

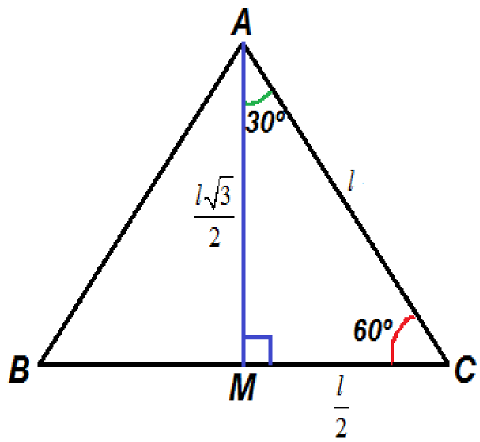
Portanto, percebemos que a essencialidade da ferramenta teorema de Pitágoras nos favoreceu com a obtenção de dois cálculos relevantes, sendo o segundo (o da área $A$) oportunizado mediante a utilização do primeiro (o da altura $h$), facilitando, assim, o cálculo de duas grandezas do triângulo equilátero de forma bastante simples, uma vez que as fórmulas para a obtenção de tais grandezas são dadas somente em função do lado $l$ do triângulo.

Como o cálculo da altura $h$ em função do lado $l$ do triângulo equilátero já foi obtido, então, mediante a utilização da relação existente entre $h\ e\ l$ e as considerações feitas anteriormente, é possível determinar o cálculo das razões trigonométricas dos arcos notáveis de 30° e 60°. Portanto, temos, aqui, uma segunda consequência do cálculo da altura do triângulo equilátero em função do lado, obtido com a utilização do teorema de Pitágoras.

Da trigonometria no triângulo retângulo, sabemos que o seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa; o cosseno de um ângulo é a razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa; e a tangente de um ângulo é a razão entre o cateto aposto e o cateto adjacente a esse ângulo. Portanto, admita a seguinte notação: $sen\ \theta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \theta}{hipotenusa}$; $cos\ \theta = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \theta}{hipotenusa}$ e $tan\ \theta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \theta}{cateto\ adjacente\ \theta}$ .

A Figura 15 representa um triângulo equilátero, em que $l$ é a medida do lado e $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ é a medida da altura.

**Figura 15 –** O triângulo equilátero e os arcos notáveis.




**Fonte:** Editada pelo autor.

Tomando como referência a Figura 15, temos que no triângulo retângulo $AMC$, o ângulo M é reto, $\hat{C} = 60°\ e\ \frac{\hat{A}}{2} = 30°$. Portanto, calculando as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis 30° e 60° temos:

$$sen\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$cos\ 30° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$tan\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ;$$

$$sen\ 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$cos\ 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$tan\ 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} = \sqrt{3}.$$

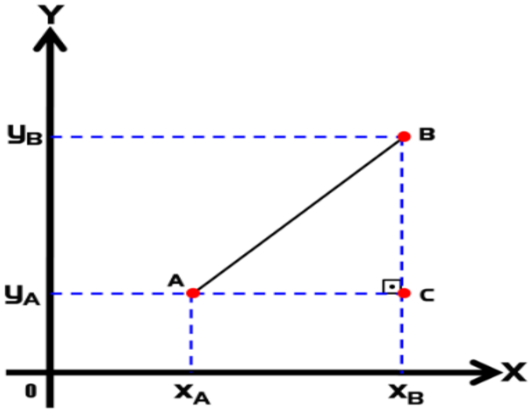
A tabela, a seguir, apresenta os valores do seno, cosseno e tangente de 30° e 60°. Quanto ao ângulo notável de 45° a demonstração das razões trigonométricas pode ser obtida a partir de um quadrado de lado $l$ e diagonal $d$.

| | $sen$ | $cos$ | $tan$ |
|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |

**2ª aplicação:** O teorema de Pitágoras na distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Tomando como referência a Figura 16, consoante Dante (2013, p. 71), podemos determinar uma expressão que indica a distância entre dois pontos $A(x_A,\ y_A)$ e $B(x_B,\ y_B)$ quaisquer do plano cartesiano. Como o triângulo $ABC$ é retângulo em $C$, podemos aplicar o teorema de Pitágoras.

**Figura 16 –** Distância entre dois pontos no plano cartesiano.




**Fonte:** http://geometrianodiadia.blogspot.com.br.

Fazendo $\Delta x = x_B - x_A \; e \; \Delta y = y_B - y_A$ para representar as medidas dos catetos, então a distância entre $A$ e $B$, representada pela notação $d(A,B)$, é a hipotenusa. Logo, temos que:

$$[d(A,B)]^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$d(A,B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ .$$

Portanto, concluímos que a distância entre dois pontos $A$ e $B$ quaisquer do plano, tal que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, é dada por:

$$\boldsymbol{d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

Dante (2013) ainda acrescenta que a expressão geral obtida independe da localização de $A$ e $B$.

Agora, apresentaremos um exemplo de aplicação da expressão geral que nos permite calcular a distância entre dois pontos quaisquer do plano. Lembremos que tal expressão geral é, na realidade, conforme demonstrado, a própria relação de Pitágoras.

**Exemplo:** Mostrar que os pontos $A(2,2), B(-4,-6)$ e $C(4,-12)$ formam um triângulo retângulo isósceles e calcule seu perímetro.

Primeiramente, vamos calcular as medidas dos lados do triângulo $ABC$ e ver se formam uma terna pitagórica.

$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4-2)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$

$d(B,C) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4+4)^2 + (-12+6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10.$

$d(A,C) = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (-12-2)^2} = \sqrt{4+196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$

Verificaremos, agora, se os valores encontrados anteriormente satisfazem o teorema de Pitágoras. Como a maior distância é do segmento $\overline{AC} = 10\sqrt{2}$, concluímos que o candidato à hipotenusa é o segmento $\overline{AC}$.

$$[d(A,C)]^2 = [d(A,B)]^2 + [d(B,C)]^2$$

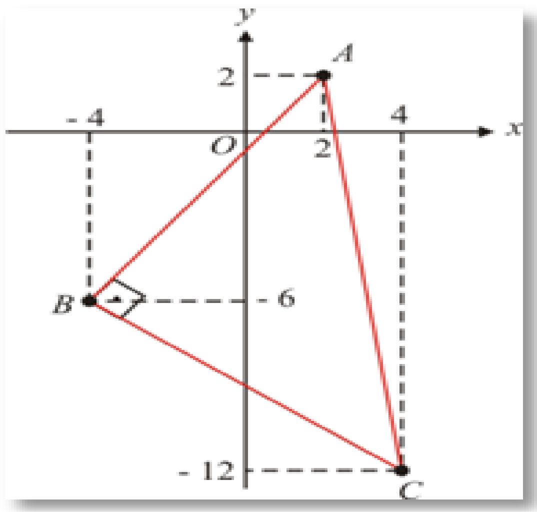
$$\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 10^2 + 10^2$$

$$200 = 100 + 100.$$

Logo, o triângulo $ABC$ é retângulo e é isósceles, pois ambos os catetos têm o mesmo tamanho. O perímetro $2P$ do triângulo é dado pela soma dos lados:

$$2P = d(A,B) + d(B,C) + d(A,C) = 10 + 10 + 10\sqrt{2} = 10\left(2 + \sqrt{2}\right).$$

**Figura 17 –** Percepção analítica do problema.




**Fonte:** http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/.

Diversas outras aplicações poderiam ter sido citadas, porém o que é necessário é que compreendamos que o teorema de Pitágoras é uma das relações mais importante se não a mais importante da Matemática.

As possíveis aplicações do teorema de Pitágoras são bem sintetizadas por Muniz Neto (2013) ao declarar que decorridos aproximadamente 2.300 anos da confecção d’Os Elementos por Euclides, a importância do teorema de Pitágoras para a Geometria e suas aplicações não podem ser menosprezadas. O autor afirma, também, que o teorema de Pitágoras revelou-se imprescindível à formulação do método analítico de René Descartes para a análise de problemas geométricos; que o estabelecimento das bases da trigonometria está intimamente ligado ao método

Cartesiano, de forma que boa parte das aplicações da Geometria ao Cálculo e à Mecânica tem, no teorema de Pitágoras, um de seus principais fundamentos. Em contrapartida, foi exatamente a construção Cartesiana da Geometria Euclidiana, propiciada pelo teorema de Pitágoras, que possibilitou ao matemático alemão do século XIX David Hilbert firmar a consistência da Geometria Euclidiana plana, no sentido de percebê-la como uma teoria que pode ser criada a partir de argumentos bem estruturados, sem a possibilidade de encerrar contradições lógicas.

Muniz Neto (2013) continua a sua declaração afirmando que as sucessivas generalizações do teorema de Pitágoras contribuíram para o progresso, nos séculos XIX e XX, da teoria dos espaços vetoriais com produto interno (e, mais especificamente, dos espaços de Hilbert), como também da Geometria Diferencial. Afirma, ainda, que tais teorias matemáticas que podem parecer, em uma primeira análise, motivadas por abstrações sem nexo com a relação de Pitágoras, demonstram-se, modernamente, essenciais a um estudo rigoroso dos mais diversos fenômenos, compreendendo temas, tais como: o estudo de problemas de difusão (exemplificando, transmissão de calor em meios sólidos); o desenvolvimento de estruturas de membrana em engenharia civil; as modernas formulações da Mecânica Clássica e Quântica e a Teoria da Relatividade Geral; dentre outros.

Concluindo sua declaração, Muniz Neto (2013) ainda faz a seguinte reflexão: “Assim, mais que uma simples herança cultural da humanidade, o teorema de Pitágoras constitui-se em verdadeira pedra angular da moderna sociedade do conhecimento”.

# CAPÍTULO 3

## 3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, discorreremos sobre autores e obras que dão embasamento ao trabalho de pesquisa realizado sobre o tema proposto e seus desdobramentos. Tais desdobramentos estão relacionados ao estudo da importância da contextualização para a aprendizagem efetiva do educando, não somente na ciência Matemática, mas também em todos os outros ramos do conhecimento científico; e, também, a utilização de material concreto, das tecnologias da informação e comunicação e da análise de erros como ferramentas didático-metodológicas capazes de contribuírem para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Sabemos que o conhecimento matemático é muito importante para uma profícua e consciente vida em sociedade. Portanto, o estudo da Matemática se faz necessário devido a sua ampla aplicação em diversos ramos da pesquisa científica e nas mais triviais atividades do cotidiano. Dessa maneira, é essencial conhecer e dominar a Matemática em todos os níveis da educação básica, particularmente, no Ensino Médio, visto que, é nessa etapa da escolaridade que o educando atinge uma maior maturidade, adquirindo maior autonomia cognitiva da referida ciência. O aporte teórico que justifica as considerações feitas, anteriormente, será apresentado nas próximas linhas. Fundamentalmente, utilizaremos para essa finalidade os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

A nossa pesquisa envolveu discentes da 3ª série do Ensino Médio. Sobre essa modalidade de ensino as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – fazem a seguinte consideração:

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2008, p. 69)

Fica, pois, claro que os discentes deverão desenvolver competências que os tornem participantes ativos do mundo do conhecimento e do saber tecnológico.

Os PCN+ Ensino Médio – Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – complementam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio quanto aos objetivos a serem alcançados com o ensino da Matemática nessa etapa da educação básica:

> No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. (BRASIL, 2002, p. 111)

Nesse caso, o enfoque dado à Matemática, nessa específica etapa da escolaridade básica, sugere que o uso dessa ciência possa contribuir para uma formação mais geral do educando, apontando para o desenvolvimento das competências necessárias para um convívio integral e harmonioso em sociedade.

Ainda de acordo com os PCN+ (BRASIL, 2002), fica evidente a importância do saber matemático, em nossa sociedade, pelo seu necessário uso em diversas situações, pelo seu amplo apoio as mais variadas áreas do conhecimento, pela sua necessária aplicação em situações do cotidiano, ou mesmo pelo seu inerente caráter de desenvolver habilidades do raciocínio reflexivo.

Os PCN's do Ensino Médio reforçam a importância do saber matemático, nessa importante etapa da escolaridade, e, também, nos mais variados segmentos do conhecimento científico, declarando:

> A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem, portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. (BRASIL, 1999, p. 21-22)

Desse modo, percebemos que a Matemática desempenha papel fundamental em diversas atividades da vida contemporânea, daí a real relevância de seu estudo, no Ensino Médio, de uma maneira mais aprofundada e detalhada em relação à etapa anterior – o Ensino Fundamental.

A esse respeito, os PCN's do Ensino Médio ratificam a Lei de Diretrizes e Bases da educação Nacional (BRASIL, 1996) e o Conselho Nacional de Educação (BRASIL, 1998), declarando que:

> A LDB/96, ao considerar o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, e a Resolução CNE/98, ao instituir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que organizam as áreas de conhecimento e orientam a educação à promoção de valores como a sensibilidade e a solidariedade, atributos da cidadania, apontam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio. Nessa nova etapa, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos. (BRASIL, 1999, p. 15)

Portanto, fica clara a importância do ensino e da aprendizagem da Matemática desde o ingresso do educando no Ensino Fundamental. No Ensino Médio o conjunto de conhecimentos e valores morais e sociais, outrora apreendidos, passa a ter uma progressiva necessidade de aprimoramento, até mesmo, pela natural maturidade do educando nessa etapa final da Educação Básica.

Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias) se encarregaram de endossar o que anteriormente asseguraram sobre a necessidade do bem ensinar a Matemática já no Ensino Fundamental, procurando dá uma maior ênfase ao estudo dessa Ciência no Ensino Médio ao afirmarem que:

> A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a ideia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto às de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.
> Por fim, cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. (BRASIL, 1999, p. 83)

Desse modo, compreendemos que é no Ensino Médio que os alunos estão em condições de utilizarem e ampliarem os conhecimentos obtidos no Ensino Fundamental. Sendo esta fase da escolaridade básica de relevante e indispensável preparação para aquela, pois é no Ensino Médio que cabe à Matemática o papel de oferecer ao educando o desenvolvimento da capacidade de prosseguir aprendendo.

Com efeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) são concordantes com o texto dos PCN's do Ensino Médio (BRASIL, 1999) ao manifestarem que:

> Os blocos de conteúdo e os eixos temáticos são agrupamentos que representam recortes internos à área e visam explicitar objetos de estudo essenciais à aprendizagem. Distinguem as especificidades dos conteúdos, para que haja clareza sobre qual é o objeto do trabalho, tanto para o aluno como para o professor, pois é importante ter consciência do que se está ensinando e do que se está aprendendo.
> Os blocos são organizados em função da necessidade de receberem um tratamento didático que propicie um avanço contínuo na ampliação de conhecimentos, tanto em extensão quanto em profundidade, pois o processo de aprendizagem dos alunos requer que os mesmos conteúdos sejam tratados de diferentes maneiras e em diferentes momentos da escolaridade, de forma a serem "revisitados", em função das possibilidades de compreensão que se alteram pela contínua construção de conhecimentos e em função da complexidade conceitual de determinados conteúdos. (BRASIL, 1998, p. 79-80)

Portanto, os PCN's recomendam que blocos de conteúdos sejam trabalhados em distintas etapas da escolaridade básica de forma que, em cada uma dessas progressivas etapas, tais conteúdos recebam uma nova roupagem referente à complementação dos conceitos estudados e ao aumento do nível de complexidade desses referidos conceitos.

Concordante com os PCN's do Ensino Fundamental, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – trazem em seu texto uma exemplificação de conteúdos que são tratados no Ensino Fundamental e que devem figurar no bloco de conteúdos da etapa seguinte da Educação Básica – o Ensino Médio.

> O trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização. Alguns conceitos estudados no ensino fundamental devem ser consolidados, como, por exemplo, as ideais de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o **Teorema de Pitágoras**. (BRASIL, 2008, p. 75-76) (grifo nosso)

Aqui, observamos a preocupação das Orientações Curriculares para o Ensino Médio em deixar evidente a necessidade de se trabalhar alguns conceitos relevantes no Ensino Fundamental, sendo retomados, posteriormente, no Ensino Médio. Percebemos que foram evidenciados vários conteúdos como exemplos, dentre os quais o Teorema de Pitágoras com o qual plenamente concordamos.

Ainda, segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008) as atividades propostas sobre grandezas geométricas deverão tornar oportuna a solidez de conceitos aprendidos, em fases anteriores, tais como: área, perímetro e volumes. E asseguram ser no Ensino Médio a fase em que o educando está apto a compreender algumas demonstrações de fórmulas matemáticas. E acrescenta que quando trabalhamos com comprimentos, áreas e volumes é importante que o discente tenha à compreensão dos processos que conduziram ao estabelecimento de uma determinada fórmula, procurando evitar simplesmente a sua apresentação.

Tudo quanto foi dito, dá-nos a certeza de que precisamos trabalhar com seriedade os conceitos que tem previsão de estudo no Ensino Fundamental para que, chegando ao Ensino Médio, o discente tenha plena capacidade de entender a complementação e o aprofundamento de tais conceitos.

## 3.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Neste tópico, embasados na literatura especializada, discorreremos sobre o que se entende a respeito do significado de contextualização e, também, da sua parcela de importância na formação intelectual do educando.

Os PCN’s do Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – trazem em seu texto previsão de lei e de diretrizes acerca da contextualização no processo do ensino e da aprendizagem.

> Felizmente, pelo menos no plano das leis e das diretrizes, a definição para o Ensino Médio estabelecida na LDB/96, assim como seu detalhamento e encaminhamento pela Resolução CNE/98, apontam para uma revisão e uma atualização na direção correta. Vários dos artigos daquela Resolução são dedicados a orientar o aprendizado para uma maior contextualização, uma efetiva interdisciplinaridade e uma formação humana mais ampla, não só técnica, já recomendando uma maior relação entre teoria e prática no próprio processo de aprendizagem. (BRASIL, 1999, p. 98)

De acordo com a Resolução CNE/98, a aprendizagem deverá ser orientada mediante um maior uso da contextualização. Porém, quem bem define o seu significado são as autoras Vanessa Sena Tomaz e Maria Manuela M. S. David ao declararem:

> Percebendo essas limitações das escolas, muitas pesquisas em Educação, particularmente em educação Matemática, vêm produzindo e ampliando consideravelmente o conhecimento sobre os processos de construção de significado, as formas de aprendizagem e sobre os procedimentos de

> ensino, o que se tem traduzido em reformulações curriculares e em novas diretrizes pedagógicas que se fazem presentes nos meios escolares[1]. Essas propostas pretendem mudar o isolamento e a fragmentação dos conteúdos, ressaltando que o conhecimento disciplinar por si só não favorece a compreensão de forma global e abrangente de situações da realidade vividas pelo aluno, elegendo dois princípios básicos para o ensino de Matemática: o da contextualização e o da interdisciplinaridade. De acordo com o primeiro, o ensino da matemática deve estar articulado com as várias práticas e necessidades sociais, mas de forma alguma se propõe que todo conhecimento deva sempre ser aprendido a partir das situações da realidade dos alunos. Outra forma de contextualização pode ocorrer via inter-relações com outras áreas do conhecimento, que, por sua vez, pode ser entendida como uma forma de interdisciplinaridade. O segundo princípio, a interdisciplinaridade, pode ser esboçado por meio de diferentes propostas, com diferentes concepções, entre elas, aquelas que defendem um ensino aberto para inter-relações entre a Matemática e outras áreas do saber científico ou tecnológico, bem como com as outras disciplinas escolares. (TOMAZ; DAVID, 2013, p. 14)

Portanto, observamos que as autoras traduzem os significados de contextualização e interdisciplinaridade. Não havendo confusão entre as referidas propostas pedagógicas, visto que, no ensino da Matemática, conteúdos interdisciplinares, necessariamente, são contextualizados. Porém, conteúdos contextualizados nem sempre são interdisciplinares. Sendo que tais propostas pedagógicas – contextualização e interdisciplinaridade – visam evitar o isolamento e a fragmentação dos conteúdos escolares. As autoras ainda acrescentam que:

> Assim, na tentativa de dar conta da complexidade das situações a que os indivíduos estão sendo submetidos e das tendências atuais defendidas no campo da educação, o discurso escolar passou a defender a organização dos conteúdos incorporando as perspectivas da interdisciplinaridade e da contextualização, que se refletiram também nos livros didáticos[2], nas propostas pedagógicas dos sistemas de ensino municipais e estaduais[3]. A Matemática escolar passa a ser vista como um meio de levar o aluno à participação mais crítica na sociedade, pois a escola começa a ser encarada como um dos ambientes em que as relações sociais são fortemente estabelecidas. Aliada a esse objetivo, a Matemática também é chamada a engajar-se na crescente preocupação com a formação integral do aluno como cidadão da sociedade contemporânea onde cada vez mais é obrigado a tomar decisões políticas complexas. Introduz-se, assim, definitivamente, na agenda da Matemática escolar, o ensino voltado para a formação de cidadãos críticos e responsáveis. (TOMAZ; DAVID, 2013, p. 14-15)

Percebemos a que grau de importância foram elevadas a interdisciplinaridade e a contextualização, ocupando, nos vários segmentos educacionais, espaços para ocorrência do estudo dos diversos conteúdos com enfoque na formação crítica. A Matemática, ensinada nas escolas, passa a desempenhar um papel de maior participação em questões sociais. Sendo o ensino dessa disciplina direcionado à formação cidadã de forma definitiva dentro da competência escolar.

Atualmente, é notória a dificuldade de boa parte dos discentes em leitura e inferência do que os mesmos se propõem a ler. Várias são as causas que acarretam o déficit cognitivo em tais competências as quais poderão ser melhoradas mediante o trabalho com habilidades próprias para essa finalidade. Para tanto, podemos citar como exemplos as seguintes atitudes: ampliar o conhecimento matemático mediante a utilização de problemas contextualizados com o propósito de fixar conceitos conhecidos e aprender outros novos; melhorar e desenvolver o reduzido conjunto vocabular por meio do uso de contextos nos problemas propostos; buscar superar as dificuldades em classificar os dados relevantes inseridos em um dado texto, utilizando-se, para tanto, o ensino com problemas contextualizados.

Esse pensar é corroborado pelos $PCN_{+}$ Ensino Médio ao declararem que:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p.111)

Nesse sentido, fica evidente a importância do ensino contextualizado para que ocorra o desenvolvimento da capacidade do aprender a aprender, fazendo o educando se apropriar do verdadeiro saber.

Os PCN's do Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – destacam a resolução de problemas como metodologia capaz de desenvolver no educando habilidades que resultarão em competências que o torne construtor do seu próprio conhecimento.

> Assim, as funções da Matemática descrita anteriormente e a presença da tecnologia nos permitem afirmar que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemático e de um saber pensar matemático.
>
> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1999, p. 84)

Os PCN’s deixam claro o que de fato é aprendizagem matemática e o que é, simplesmente, memorização de resultados dentro dessa ciência. Também, delineiam quais os caminhos que conduzem a uma aprendizagem consistente e duradoura. Os $PCN_{+}$ Ensino Médio complementam o texto dos PCN’s do Ensino Médio ao afirmarem que:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 2002, p.112)

No entanto, os $PCN_{+}$ Ensino Médio (2002) ponderam a afirmação anterior ao fazerem a consideração de que exercícios do tipo “calcule...” ou “resolva ...” não devem ser eliminados, visto que os mesmos desempenham a função do aprendizado de técnicas e propriedades, porém de maneira alguma bastam como preparação dos discentes, tanto para prosseguirem aprendendo, como para comporem uma ampla compreensão de mundo ou, mesmo, para que se completem no universo social ou do trabalho.

## 3.2 MATERIAL CONCRETO

Aqui, trataremos da importância do uso do material concreto como recurso didático-metodológico no sentido de promover o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Sabemos que a escolha do adequado recurso didático é de fundamental importância no processo de ensino e aprendizagem. Sobre esse tema os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental – Terceiro e Quarto Ciclos – fazem a seguinte consideração:

> Os recursos didáticos desempenham um papel importante no processo de ensino e aprendizagem, desde que se tenha clareza das possibilidades e dos limites que cada um deles apresenta e de como eles podem ser inseridos numa proposta global de trabalho.
> Quando a seleção de recursos didáticos é feita pelo grupo de professores da escola, cria-se uma oportunidade de potencializar o seu uso e escolher, dentre a vasta gama de recursos didáticos existentes, quais são os mais adequados à sua proposta de trabalho. (BRASIL, 1998, p. 96)

Concluímos, portanto, que uma maior efetividade na utilização dos vários recursos didáticos depende do trabalho conjunto dos professores que compartilham de um mesmo objetivo pedagógico. Por outro lado, a escolha de um específico recurso didático depende exclusivamente do conteúdo a ser estudado.

Os $PCN_{+}$ Ensino Médio ratificam o texto dos PCN's do Ensino Fundamental e vai mais além ao declararem que:

> Nessa perspectiva, não só a seleção de temas e conteúdos, como a forma de tratá-los no ensino são decisivas. A maneira como se organizam as atividades e a sala de aula, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino é que poderão permitir o trabalho simultâneo dos conteúdos e competências. Se o professor insistir em cumprir programas extensos, com conteúdos sem significado e fragmentados, **transmitindo-os de uma única maneira** a alunos que apenas ouvem e repetem, sem dúvida as competências estarão fora de alcance. (BRASIL, 2002, p. 113) (grifo nosso)

Percebemos que o texto alerta para a necessidade da seleção adequada dos recursos didáticos componentes da metodologia de ensino que facilitará a aprendizagem. Igualmente, alerta que o aprender será alcançado pela diversificação das formas de ensinar.

Os PCN's do Ensino Médio afirmam o que fora declarado pelos $PCN_{+}$ Ensino Médio e, além disso, acrescentam a constatação da necessidade de se ter uma postura metodológica inovadora frente às novas demandas da educação escolar ao inserirem em seu texto que:

> É preciso mudar convicções equivocadas, culturalmente difundidas em toda a sociedade, de que os alunos são os pacientes, de que os agentes são os professores e de que a escola estabelece simplesmente o cenário do processo de ensino. Quando o aprendizado das Ciências e da Matemática, além de promover competências como o domínio de conceitos e a capacidade de utilizar fórmulas, pretende desenvolver atitudes e valores, através de atividade dos educandos, como discussões, leituras, observações, experimentações e projetos, toda a escola deve ter uma nova postura metodológica difícil de implementar, pois exige a alteração de hábitos de ensino há muito consolidados. (BRASIL, 1999, p.99)

Com base nessas ponderações, a quebra de paradigmas, torna-se imprescindível para que, de fato, possamos apostar em metodologias inovadoras e diversificadas, objetivando melhorar o processo de ensino e aprendizagem em nossas escolas.

Carvalho (2011), sobre o tema abordado, declara:

> Frequentemente, os professores questionam os especialistas em Educação Matemática quanto ao melhor "material didático" para ensinar determinado tema do conteúdo. A resposta tem sido: "todos", pois um só material, por mais possibilidades de atividades que ofereça, aborda apenas aspectos parciais dos conceitos. [...].
> Quanto à "melhor maneira de ensinar", acredito também que "todas as maneiras" devem ser usadas, pois cada uma delas favorece o aprendizado de um aspecto do tema em questão. [...]. (CARVALHO, 2011, p. 109-110)

Nesse sentido, concluímos que a melhor metodologia é aquela que dinamiza o processo de aquisição do conhecimento. Facilitando, assim, a compreensão do conteúdo por parte do educando.

Ainda de acordo com o pensar da autora sobre a utilização dos recursos didáticos, a mesma acrescenta:

> Na manipulação do material didático a ênfase não está sobre objetos e sim sobre as operações que com eles se realizam. Discordo das propostas pedagógicas em que o material didático tem a mera função ilustrativa. O aluno permanece passivo, recebendo a ilustração proposta pelo professor, respondendo sim ou não a perguntas feitas por ele. Não é o aluno quem pesquisa, mas o professor é quem lhe mostra o que deve concluir. Aqui está um exemplo de utilização de material como mera ilustração: o professor pede aos alunos que determinem a área de um retângulo, a medida dos lados e depois os manda conferir o resultado, desenhando o retângulo e quadriculando-o. A esta situação contrapõe-se a do professor que fornece (ou os próprios alunos recortam) quadrados de cartolina, propondo que encontrem a relação entre o número de quadrados utilizados nas montagens e as dimensões de algumas figuras construídas com esses mesmos quadrados. (CARVALHO, 2011, p. 107)

Como se pode observar, a importância da utilização de material manipulável (concreto) como recurso didático, no processo de ensino e aprendizagem, está na possibilidade de aquisição por parte do educando de construir seu próprio conhecimento, sendo reservado ao professor o papel de mediador nesse processo.

Freitas (2004 *apud* SANTOS; OLIVEIRA & OLIVEIRA, 2013) afirma que todos os materiais têm como característica principal o fato de oferecerem suporte aos alunos a entenderem conceitos importantes a partir da sua manipulação. A potencialização do uso destes instrumentos depende unicamente da vontade e da capacidade de criação dos professores.

Isto posto, concluímos da importância que os materiais manipuláveis têm para o processo de ensino e aprendizagem, servindo de suporte didático com a finalidade de atuarem na formação intelectual do discente mediante a compreensão de relevantes conceitos. Sendo a responsabilidade pelo processo criativo e de aplicação desses materiais manipuláveis (concretos) reservada ao docente.

Compartilhando do mesmo pensar de Freitas (2004), Ribeiro (2011) ressalta que:

> Manipular os materiais concretos permite aos alunos criar imagens mentais de conceitos abstratos. Porém, ele sozinho não consegue atingir essas funções. É preciso uma participação ativa do professor, pois, materiais concretos sozinhos não garantem a compreensão de conceitos. Ao utilizar um material é necessário que o professor o conheça bem, saiba aplicá-lo e tenha claro os seus objetivos ao utilizá-lo. Os professores devem criar uma sequência didática que promova a reflexão e a construção de significados pelo aluno. (RIBEIRO, 2011, p.9 *apud* PINHEIRO, 2014, p. 28-29)

Fica, pois, claro que a atuação do professor é fundamental no processo de utilização do material concreto como recurso didático-metodológico, visto que o uso do referido material sem que fiquem claros os objetivos pretendidos, de nada servirá na construção do conhecimento por parte do aluno. Portanto, cabe ao professor a criação de uma adequada sequência didática que desenvolva no educando a competência da autonomia na aprendizagem.

No entanto, Magina e Spinillo (2004) ponderam que:

> O material concreto não é o único e nem o mais importante recurso na compreensão matemática, como usualmente se supõe. Não se deseja dizer com isso que tal recurso deva ser abolido da sala de aula, mas que seu uso seja analisado de forma crítica, avaliando-se sua efetiva contribuição para a compreensão matemática. (MAGINA; SPINILLO, 2004, p.11 *apud* SANTOS; OLIVEIRA & OLIVEIRA, 2013, p. 10)

Com efeito, o material concreto é apenas mais um recurso, dentre vários outros recursos didáticos existentes, que utilizamos para alcançar o entendimento de alguns tópicos da Matemática. Sabemos que a aplicação de um específico recurso didático deverá está condicionada ao objetivo que se pretende atingir. Em outras palavras, a boa metodologia é aquela na qual o recurso didático utilizado é adequado ao conteúdo que se deseja ensinar.

## 3.3 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TIC’s)

Atualmente, é notória a imprescindibilidade das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC’s) em vários segmentos da sociedade civilizada e, principalmente, como recursos didático-metodológicos capazes de contribuírem para o êxito do processo da aprendizagem escolar.

Com o advento da tecnologia, o fluxo das informações se tornou algo rotineiro, e, as certezas presentes se tornam arquivos de conhecimentos em um curto espaço de tempo. Sendo o limite do ser e do não ser atual, uma linha tênue traçada pela velocidade de tais informações. Os PCN's Ensino Fundamental – Terceiro e Quarto Ciclos – fazem a esse respeito à seguinte declaração:

> A rapidez com que se dá a produção de conhecimento e a circulação de informações no mundo atual impõe novas demandas para a vida em sociedade. Hoje, mais do que nunca, é necessário que a humanidade aprenda a conviver com a provisoriedade, com as incertezas, com o imprevisto, com a novidade em todos os sentidos. Isso pressupõe o desenvolvimento de competências relacionadas à capacidade de aprendizagem contínua, ou seja, à autonomia na construção e na reconstrução do conhecimento: capacidade de analisar, refletir, tomar consciência do que já se sabe, ter disponibilidade para transformar o seu conhecimento, processando novas informações e produzindo conhecimento novo. (BRASIL, 1998, p. 139-140)

Entendemos que o aprender conviver com a instantaneidade da informação, não significa, necessariamente, que um dado conhecimento científico, num dado momento, é tido como verdade incontestável e, noutro, deixa de ser. E sim, que as informações chegadas por diversas fontes podem ser confirmadas, comparadas, ou mesmo complementadas. Contribuindo, assim, para um progressivo aprofundamento do saber. Nessa nova conjuntura, a autonomia na construção do conhecimento, reflete na formação do educando independente e criativo.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, os PCN's do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) ressaltam que a ocorrência da aprendizagem em diferentes lugares e por diferentes canais é facilitada pelo progresso das tecnologias da informação. E, como consequência, a autonomia no desenvolvimento de competências passa a assumir relevância na vida escolar do educando. Sendo reservado à escola o papel de protagonista no processo de formação de indivíduos participativos e produtores de novos conhecimentos.

Ainda de acordo com os PCN's do Ensino Fundamental sobre a utilização das novas tecnologias na escola, os mesmos esclarecem que:

> A incorporação das inovações tecnológicas só tem sentido se contribuir para a melhoria da qualidade do ensino. A simples presença de novas tecnologias na escola não é, por si só, garantia de maior qualidade na educação, pois a aparente modernidade pode mascarar um ensino tradicional baseado na recepção e na memorização de informações.
> A concepção de ensino e aprendizagem revela-se na prática de sala de aula e na forma como professores e alunos utilizam os recursos tecnológicos disponíveis — livro didático, giz e lousa, televisão ou computador. A presença de aparato tecnológico na sala de aula não garante mudanças na forma de ensinar e aprender. A tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional, propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores. (BRASIL, 1998, p.140)

Fica evidente, que a simples presença de recursos tecnológicos, na sala de aula, de forma nenhuma garante o sucesso no processo de ensino e aprendizagem. Pelo contrário, o uso despropositado desses recursos didáticos tecnológicos pode revelar um flagrante desvio de finalidade. Enfim, o objetivo das Tecnologias da Informação e Comunicação é proporcionar ser mais uma opção de recurso didático adequado a uma dada situação pedagógica.

Além disso, os PCN’s do Ensino Fundamental fazem o seguinte alerta sobre o assunto em questão, afirmando que:

> Tanto no Brasil como em outros países, a maioria das experiências com o uso de tecnologias informacionais na escola estão apoiadas em uma concepção tradicional de ensino e aprendizagem. Esse fato deve alertar para a importância da reflexão sobre qual é a educação que queremos oferecer aos nossos alunos, para que a incorporação da tecnologia não seja apenas o “antigo” travestido de “moderno”. (BRASIL, 1998, p. 140-141)

Aqui, os PCN’s fazem uma advertência para que a utilização de tecnologias informacionais, como recurso didático, não sirva apenas como mero reprodutor das usuais práticas pedagógicas, e sim, como um pertinente aliado nas ministrações das aulas, favorecendo, assim, o processo de produção de conhecimentos.

Para os PCN’s do Ensino Fundamental (1998, p. 153) “as propostas didáticas que utilizam as Tecnologias da Comunicação e Informação como instrumentos de aprendizagem devem ser complementadas e integradas com outras propostas de ensino.” Isto posto, os PCN’s, ainda declaram que:

> Utilizar recursos tecnológicos não significa utilizar técnicas simplesmente, e não é condição suficiente para garantir a aprendizagem dos conteúdos escolares. Por isso, é fundamental criar um ambiente de aprendizagem em que os alunos possam ter iniciativas, problemas a resolver, possibilidades para corrigir erros e criar soluções pessoais. (BRASIL, 1998, p.153)

Os PCN’s descartam a possibilidade de que o aprender se dê apenas pelo simples uso dos recursos tecnológicos. Entretanto, afirma que um ambiente é facilitador da aprendizagem quando há liberdade para que o aluno produza seu próprio conhecimento. Ainda de acordo com o texto dos PCN’s (BRASIL, 1998), é exclusivamente do professor a prerrogativa de decidir quando, por que e como utilizar o recurso tecnológico no processo de geração de saberes. Também, é do professor a responsabilidade pela idealização dos processos que determinam a construção de conhecimentos.

Até então, discorremos sobre de que forma a tecnologia tem interferido em nosso cotidiano e, também, sobre as advertências do errôneo uso das tecnologias como recurso didático no processo de ensino e aprendizagem nas instituições escolares. Agora, falaremos da importância das tecnologias para o ensino da Matemática. A esse respeito, os PCN's do Ensino Fundamental – Terceiro e Quarto Ciclos – declaram que:

> A Matemática também faz parte da vida das pessoas como criação humana, ao mostrar que ela tem sido desenvolvida para dar respostas às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e aqui leva-se em conta a importância de se incorporar ao seu ensino os recursos das Tecnologias da Comunicação. (BRASIL, 1998, p. 59)

Em conformidade com o nível de importância que possui a Matemática para as nossas vidas, torna-se imprescindível a utilização das TIC's de forma a favorecer a sua aprendizagem. Com efeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – trazem, em seu texto, mais especificamente, a relevância da utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação para o ensino das Ciências e da Matemática.

> Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática. O uso dessa diversidade é de fundamental importância para o aprendizado porque tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmeras, computadores e outros equipamentos não são só meios. Dominar seu manuseio é também um dos objetivos do próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráficos; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado. (BRASIL, 1999, p. 107)

Como podemos observar o advento da tecnologia agregou ao ensino das Ciências e da Matemática dinamização ao estudo de alguns conteúdos que outrora o seu ensino ficava limitados ao uso exclusivo do livro didático, do quadro e do giz. Atualmente, o domínio dos vários instrumentos que compõem os recursos didáticos, também, tornou-se objeto de estudo com a finalidade de melhorar a educação escolar em seus mais variados aspectos.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – ratificam e complementam o texto dos PCN's do Ensino Médio ao afirmarem que:

> Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (BRASIL, 2008, p. 87)

A inserção das TIC’s, no cotidiano dos indivíduos, requisitou de cada um destes a necessidade de uma melhor capacitação para o domínio das novas demandas da sociedade moderna. Além disso, a escola assume o papel de fazer a Matemática e a tecnologia cooperarem reciprocamente para que sejam entendidas.

Portanto, sobre o uso das TIC’s, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental – Terceiro e Quarto Ciclos – fazem a seguinte ponderação:

> É necessário, portanto, uma cuidadosa reflexão por parte de todos que compõem a comunidade escolar, para que a tecnologia possa de fato contribuir para a formação de indivíduos competentes, críticos, conscientes e preparados para a realidade em que vivem. Necessariamente, o uso de tecnologias na escola está vinculado a uma concepção de ser humano e mundo, de educação e seu papel na sociedade moderna. (BRASIL, 1998, p. 157)

Desse modo, os PCN’s fazem um alerta à comunidade escolar sobre a necessidade do uso consciente dos recursos tecnológicos no sentido de que tais recursos contribuam para a formação do educando que, dentre outras competências, seja crítico do seu papel como construtor de saberes na atual sociedade.

## 3.4 ANÁLISE DE ERROS

A análise de erros foi estudada sob dois pontos de vista, sendo o segundo um possível complementar do primeiro, a saber: como metodologia de pesquisa, investigando as possíveis deficiências apresentadas no ideal conjunto de conhecimentos dos discentes e, também, como metodologia de ensino, promovendo a aprendizagem de um específico conteúdo matemático.

O autor Carlos Eduardo Félix Correia, ao ensinar sobre o papel que o erro desempenha no desenvolvimento da humanidade, cita De La Torre et al (1994) que ao se pronunciarem:

> Afirmam que aprender com os erros é tão antigo quanto o homem; segundo esse autor, "o homem tem errado e continuará errando; porém, é sua capacidade para aprender com os erros, com os fracassos, o que o torna diferente das demais espécies", "o erro e êxito são duas faces da mesma moeda de muitos valores culturais, são a possibilidade de a humanidade prosseguir em seu desenvolvimento". (DE LA TORRE ET AL, 1994, p.11 *apud* CORREIA, 2010, p. 21-22)

Portanto, de acordo com os autores: os erros, os acertos e a capacidade de transformar erros em acertos sempre fizeram parte da história da humanidade. Sendo, notório que o desenvolvimento social do homem está sustentado nesse tripé.

Segundo Cury:

> A análise das respostas, além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser, também, enfocada como metodologia de ensino, se for empregada em sala, como "trampolim para a aprendizagem" (Borasi, 1985), partindo dos erros detectados e levando os alunos a questionar suas respostas, para construir o próprio conhecimento. (CURY, 2015, p. 15)

Aqui, Cury (2015) juntamente com Borasi (1985) esclarecem a respeito de como trabalhar o erro, apontando duas variantes metodológicas que objetivam a consecução da aprendizagem.

A análise de erros como metodologia de pesquisa, na realidade, é válida para se identificar as dificuldades dos alunos em relação ao domínio de um dado conhecimento. Porém, essa pesquisa pode ensejar o segundo motivo da análise de erros que é a sua utilização como ferramenta didático-metodológica para se alcançar a aprendizagem.

Segundo Cury (2015), quando se analisa as respostas dos alunos, o relevante não é simplesmente o acertar ou o errar – que aos quais são atribuídos valores em exames que avaliam a aprendizagem –, mas as maneiras de se apossar de um específico conhecimento, que surge na produção escrita e que podem demonstrar empecilhos para a aprendizagem. Ainda de acordo com Cury (2015), ao se analisar as respostas dos alunos, se considerarmos somente a classificação e a quantidade de respostas de cada tipo, a pesquisa ficará abaixo das expectativas, de tal forma que não trará quaisquer benefícios a alunos e professores. Entretanto, se buscarmos compreender as maneiras como o aluno gerou a resposta, certa ou errada, o estudo poderá cooperar para a realização de novos níveis de saberes. A esse respeito, Lorenzato (2008) diz que o erro, na sua nova concepção, é entendido como parte natural, inevitável e essencial ao processo de aprendizagem. O mesmo pode ser interpretado como um aviso ao docente, assim como a febre o faz na enfermidade.

Cury (2015) nos informa sobre o pensar da pesquisadora Raffaella Borasi ao declarar que:

> Borasi (1996) considera que, se os alunos são pressionados pelo sistema escolar, os erros por eles cometidos são frustrantes, porque os fazem perder tempo e despender esforços na tentativa de evitar a reprovação. No entanto, se a ênfase da avaliação dos estudantes se desloca do produto para o processo, há a possibilidade de que os erros cometidos venham a ser discutidos e possam ser fonte de novas aprendizagens. (BORASI, 1996 *apud* CURY, 2015, p. 37-38)

Aqui, a autora faz um comparativo entre as formas de como o sistema escolar, na busca da aprendizagem, concebe o erro: como algo frustrante, canalizando esforços na tentativa de evita-lo; e também, como recurso didático-metodológico na aquisição de novos conhecimentos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental – Terceiro e Quarto Ciclos – corroboram o pensar de Cury (2015) ao declararem que:

> A tradição escolar — que não faz diferença entre erros integrantes do processo de aprendizagem, erros construtivos, e simples enganos ou desconhecimentos — trabalha com a ideia de que a ausência de erros na tarefa escolar é a manifestação da aprendizagem. Hoje, o erro construtivo é interpretado como algo inerente ao processo de aprendizagem e fator de ajuste da ação pedagógica. (BRASIL, 1998, p. 71-72)

De acordo com os PCN's, observamos que a escola tradicional pouco se interessa pelo tipo de erro cometido pelo educando, trabalhando na perspectiva que a ausência de erro é que caracteriza a existência da aprendizagem, desconsiderando, assim, a potencialidade da utilização da análise de erro como uma ferramenta imprescindível na ação pedagógica.

Agora, versaremos sobre a utilização do erro como importante recurso didático na construção do conhecimento. A seguir, apresentaremos alguns autores que defendem essa linha de pensamento.

A pesquisadora Cury (2015), criticamente, adverte sobre como devemos perceber o erro, afirmando que:

> Efetivamente, detectar os erros dos alunos apenas para conhecê-los, algumas vezes citando-os como "piadas", não os ajuda a se conscientizarem das dificuldades. Acredito ser necessário compreender o que o aluno "sabe", ou melhor, como determinado conhecimento, estabelecido em certo momento de sua história de vida, está funcionando

> como obstáculo para a superação da dificuldade e o que suas respostas "decoradas" estão encobrindo em termos de não conhecimento. (CURY, 2015, p. 50)

Fica, pois, claro que devemos tratar com seriedade os erros cometidos pelos nossos alunos, visto que tais erros podem revelar evidências de um ensino deficiente, baseado em processos de pouquíssima compreensão crítica dos conteúdos tratados. Os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – incentivam a resolução de problemas como um importante método de ensino capaz de desenvolver diversas competências, dentre as quais, saber capitalizar o erro como ferramenta promotora da aprendizagem.

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, **fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas**; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1999, p. 105) (grifo nosso)

Diante de tais argumentos, percebemos a resolução de problemas como uma poderosa ferramenta na construção crítica do conhecimento. Sendo que, nesse processo, a investigação de erros se apresenta como uma competente estratégia na busca do saber.

Lorenzato (2008) elenca diversas causas para a ocorrência do erro, dentre as quais estão: a falta de atenção, pressa, a resposta aleatória do problema, falha de raciocínio, falta de estudo, interpretação errônea da linguagem oral ou gráfica da Matemática, insatisfatório conhecimento do idioma materno ou de conceitos matemáticos. E acrescenta que identificar a causa ou causas de cada erro, na maior parte das vezes, não é fácil. E que compete ao professor, antes de tudo, dedicar contínua atenção para descobrir o erro e, ainda, alerta para o fato de que acerto pode esconder erro. E continua a sua linha de raciocínio, dizendo que, na fase de diagnose do erro, é fundamental ouvir o aluno, dialogar com o mesmo com o propósito de revelar seu pensamento e seus motivos. O autor, ainda sugere que, depois de feita a diagnose, o aluno seja submetido a uma ou mais situações-problema com as quais ele possa observar a inconsistência das suas respostas ou posições. E finalizado todo esse processo, o aluno deverá está apto a descobrir novas alternativas, reestruturar seus conceitos e, corrigir seu próprio erro para que, finalmente, evolua.

A pesquisadora Cury (2015) se referindo ao trabalho do psicólogo russo Krutetskii (1976), assim se posiciona:

> Desse trabalho do psicólogo russo, considero que, para a análise de erros, além dos vários tipos de problemas propostos, vale a ênfase na observação detalhada da resolução, com o cuidado de registrar o pensamento em voz alta dos estudantes, de questionar suas respostas, para verificar como pensavam ao solucionar as tarefas. Essa é, em meu entender, a maneira de enfatizar o produto – ou seja, enfocar a atenção na produção, escrita ou oral, para, a partir dela, voltar ao aluno e auxiliá-lo a fazer uma análise da sua forma de aprender. (CURY, 2015, p. 30)

Aqui, a pesquisadora destaca o trabalho com resolução de problemas propostos e a observação minuciosa dessa resolução, destacando o raciocínio dos estudantes em voz alta e o questionamento de suas respostas, como metodologia capaz de conduzir o professor à compreensão do pensar do aluno ao solucionar as atividades, contribuindo, assim, para o estudo envolvendo a análise de erros.

Compartilhando do mesmo senso crítico a respeito da metodologia sugerida pela referida pesquisadora Cury (2015), a também pesquisadora Dione Lucchesi de Carvalho, assim, declara:

> Nessa perspectiva de trabalho, eu e Franchi propomos que se considere não só as respostas dadas pelos alunos a um dado problema como também as regras que as produziram, pedindo-lhes explicações verbais ou outros testemunhos que tornem explícitas as representações subjacentes. Essas explicações adicionais revelam as possíveis origens do erro, fornecendo ao professor um referencial importante a respeito de quais pontos devem ser reelaborados no encaminhar do processo de aprendizagem. (CARVALHO, 2011, p. 110)

De acordo com as pesquisadoras, não basta somente propor o problema ao aluno e julgar o seu produto final. Deve-se, sim, analisar de forma mais detalhada o processo de desenvolvimento de tal problema, solicitando do aluno, por exemplo, esclarecimentos verbais acerca do passo a passo do processo na tentativa de compreender o raciocínio implícito que o levou ao cometimento do erro. De posse desse conhecimento, então o professor pode reelaborar a sua metodologia na busca da aprendizagem.

Sobre a metodologia utilizada pelas mencionadas pesquisadoras, Correia (2010) confirma ao fazer a seguinte citação:

> Para Lacueva (1997), a conversa do professor com o aluno sobre seus erros e acertos contribui para a conscientização dos pontos fortes e fracos, contribuindo também para a aprendizagem e superação dos erros. Orientado pelo professor, cada vez mais o aluno passa a ser o proponente das medidas de intervenção. (LACUEVA, 1997 *apud* CORREIA, 2010, p. 37)

Observamos que o dialogar sobre os erros e acertos é a metodologia mais enfatizada entre os estudiosos e pesquisadores da análise de erros. Possivelmente, por ser a forma mais direta de entender o pensar do educando.

Segundo Correia (2010), os erros abrangem processos de raciocínio que necessitam ser debatidos e não somente uma resposta incorreta, algo falso a ser retificado, tais erros são normalmente percebidos no cotidiano da aprendizagem escolar. Todo pensamento é coerente mesmo àqueles que levam ao erro, e que tais erros precisam ser entendidos para serem superados.

Correia (2010) sintetiza a importância do erro, como uma real possibilidade de contribuição para a construção da aprendizagem, ao declarar a seguinte citação:

> Para se avaliar a aprendizagem de forma mais significativa, o avaliador deve considerar o erro como um vigoroso objeto de estudo. A educação Matemática tem discutido a importância de se tratar adequadamente o erro para que este passe a ser uma possibilidade e uma realidade permanente na construção do conhecimento (PIRES; GOMES, 2004, p. 124 apud CORREIA, 2010, p. 36)

A discussão em torno da utilização da análise de erros como metodologia de ensino parece ser uma tendência crescente, visto que a educação Matemática tem debatido sobre a sua importância para o processo de ensino e aprendizagem.

# CAPÍTULO 4

## 4 METODOLOGIA

### 4.1 CAMPO DE PESQUISA

O local de aplicação da pesquisa foi em um colégio estadual de ensino médio regular, localizado na zona urbana da cidade de Juazeiro-BA, contendo um número aproximado de 1300 alunos distribuídos nos três turnos de funcionamento da instituição escolar.

### 4.2 PARTICIPANTES

Um grupo de aproximadamente 170 alunos da 3ª série do ensino médio do turno matutino foi pesquisado no período de 23/09/2015 a 18/11/2015. Esse total de 170 alunos está distribuído em quatro turmas, as quais identificamos por turmas A, B, C e D.

### 4.3 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

O objetivo inicial era investigarmos o quanto os alunos pesquisados possuíam de conhecimento acerca do teorema de Pitágoras e, para tanto, aplicamos um primeiro questionário composto por problemas contextualizados que atendiam à proposta objetivada pela pesquisa.

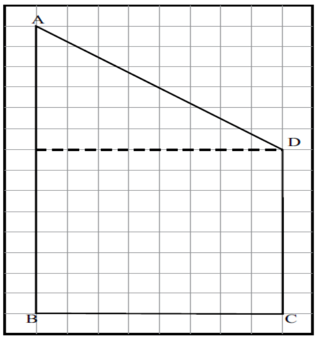
Citaremos todos os instrumentos de coleta de dados utilizados neste trabalho de pesquisa, caracterizando cada um deles e fazendo uma análise dos problemas que os compõem. Também, compararemos, entre si, os problemas dos citados instrumentos quando for pertinente. No grupo de alunos pesquisados, aplicamos três instrumentos de coleta de dados os quais analisaremos detalhadamente a seguir.

#### 4.3.1 **Análise do questionário A**

Denominamos o primeiro instrumento de coleta de dados de questionário A, o qual foi contextualizado e que se encontra integralmente no apêndice A. Esse questionário contém cinco problemas objetivos, isto é, de múltipla escolha, sendo que cada problema é composto por cinco alternativas com apenas uma alternativa correta. Os problemas que compõem tal questionário foram extraídos ou adaptados de Giovanni Júnior; Castrucci (2009), de sites da internet e/ou elaborados pelo autor desse trabalho de pesquisa.

Veja o primeiro problema do questionário A a seguir:

**Problema 1A.** *Um terreno ABCD está representado em uma malha quadriculada na qual o lado de cada quadradinho corresponde a 50 metros do comprimento desse terreno.*




*O terreno ABCD tem perímetro de*

*(A) 3 km (B) 2,5 km (C) 2,0 km (D) 1,5 km (E) não sei*

O primeiro problema desse questionário versa sobre perímetro de figura plana geométrica. Em uma malha quadriculada é dado um trapézio retângulo, onde cada quadradinho tem 50 metros de lado. É um problema bastante simples, pois conhecendo o comprimento dos lados dos quadradinhos é possível calcular praticamente todos os lados do trapézio, contando quadradinhos, exceto o lado oblíquo da figura que se caracteriza por ser a hipotenusa de um triângulo retângulo, sendo possível calcular o seu comprimento mediante o uso do teorema de Pitágoras. Para concluir o problema e assinalar a alternativa correta, o aluno deveria fazer uma transformação de unidades de medidas de comprimento, transformando metros em quilômetros.

Veja, a seguir, o segundo problema do questionário A:

**Problema 2A.** *Um determinado terreno T pode ser decomposto em dois outros terrenos de formatos, respectivamente, iguais a um triângulo equilátero e a um triângulo retângulo. Sendo que um dos lados do triângulo equilátero é também a hipotenusa do triângulo retângulo. Se os catetos do triângulo retângulo medem 9 m e 12 m, então determine o perímetro do terreno T.*

*(A) 66 m (B) 51 m (C) 45 m (D)* $(2\sqrt{42} + 21)$ *m (E) não sei*

O segundo problema desse questionário foi adaptado de Giovanni Júnior; Castrucci (2009, p. 252) em que tomamos uma figura como referência para elaborarmos, a partir um exercício sem contexto, um problema com contexto, porém com a mesma solicitação de cálculo.

O nível de complexidade desse problema em relação ao anterior é um pouquinho maior, visto que o discente, no Problema 2A, deveria tentar visualizar a figura, possivelmente, fazendo um esboço da mesma. É um problema que envolve o conceito de perímetro e cuja proposta é o cálculo da medida do contorno de um terreno composto por dois outros terrenos de formatos, respectivamente, iguais a um triângulo equilátero e a um triângulo retângulo. O problema nos fornece as medidas dos catetos do triângulo retângulo. E um dos lados do triângulo equilátero tem medida igual à hipotenusa do triângulo retângulo. Logo, o cálculo da hipotenusa do triângulo retângulo nos dá o lado do triângulo equilátero e, consequentemente, mediante a soma dos quatro lados, o aluno facilmente chegaria ao valor do perímetro do quadrilátero que é um hipotético terreno cujo formato é um trapézio retângulo.

Veja, a seguir, o terceiro problema do questionário A:

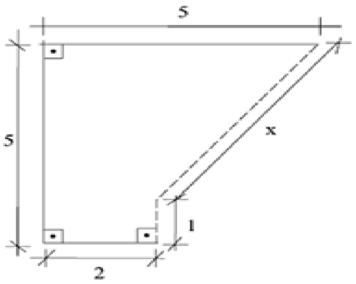
**Problema 3A.** *Um professor solicitou aos seus alunos que determinassem o perímetro de um triângulo retângulo cujas medidas de seus lados são $\sqrt{7}$ cm, $x$ cm e ($x$ + 1) cm. A única informação dada pelo professor foi que os lados que formam o ângulo de 90° são $\sqrt{7}$ cm e $x$ cm. Que resposta os alunos devem encontrar para acertar o problema?*

*(A) $7\sqrt{7}$ cm (B) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$cm (C) (7 + $\sqrt{7}$ ) cm (D) (3 + $\sqrt{7}$) cm (E) não sei*

O terceiro problema desse questionário foi elaborado pelo autor. É um problema de contextualização bastante simples no qual o foco principal consiste novamente no cálculo do perímetro de figura plana geométrica. Nesse problema, além do domínio da definição de perímetro, o aluno deveria associar a resolução do problema ao teorema de Pitágoras, visto que é mencionada a existência de um ângulo de 90°. Outro dado importante do problema, é que foram fornecidas as medidas dos lados formadores do ângulo reto, fazendo o aluno lembrar de que tais lados são os catetos. Logo, o terceiro lado, obviamente, seria a hipotenusa. A consequência imediata é que a solução do problema, necessariamente, seria com o uso da ferramenta teorema de Pitágoras. Também, o discente deveria possuir domínio de cálculo algébrico básico (produtos notáveis e equações do 1º grau), visto que as medidas dos lados do triângulo foram dadas de forma enigmática, isto é, utilizando-se de incógnita. Superada essa última etapa, certamente, o aluno assinalaria a alternativa correta, obtendo, assim, êxito na solução do problema.

Veja o quarto problema do questionário A a seguir:

**Problema 4A.** *Uma chácara possui seu desenho de acordo com a figura abaixo. Sabendo-se que as medidas estão em hectômetro, determine o perímetro da chácara.*



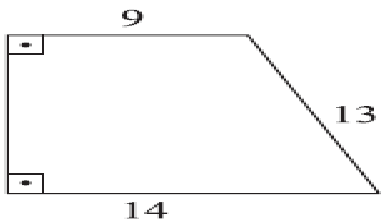

*(A) 16 hm* *(B) 17 hm* *(C) 18 hm* *(D) (13 + $\sqrt{14}$) hm* *(E) não sei*

O quarto problema, semelhantemente aos três primeiros, refere-se ao cálculo do perímetro de figura plana geométrica. É um problema adaptado de http://www.profjosimar.com.br/2013/12/lista-de-exercicios-nocoes-de-geometria.html, a partir de um exercício sem qualquer contexto. Nesse exercício, pede-se apenas que se calcule o único valor do lado $x$ que está faltando na figura. Porém, a adaptação consistiu em contextualizar a figura, associando-a a uma hipotética chácara cujo comprimento do seu contorno é dado em hectômetro. É um problema simples, pois apenas com dois traços internos à figura é possível a visualização do triângulo retângulo que favorecerá a determinação do $x$ almejado.

Para que o discente determinasse o perímetro da figura, o mesmo deveria, inicialmente, calcular a medida do lado da mesma. Logo, o discente poderia optar, possivelmente, por uma decomposição da figura em três outras figuras. Sendo que uma delas é um triângulo retângulo cujos lados são os catetos, obtidos pela decomposição da figura, e a hipotenusa representada pelo lado $x$ o qual se deseja calcular, utilizando-se para tanto o teorema de Pitágoras.

Veja, a seguir, o quinto problema do questionário A:

**Problema 5A.** *O quintal da casa de Marcos tem a forma de um trapézio retângulo, conforme a figura ilustrativa, sendo as medidas dadas em metros.*




*Ele deseja dividir essa área em duas outras áreas utilizando para isso qualquer uma das diagonais do terreno. Uma parte do quintal será para o cultivo de* *um jardim e a outra, para a construção de uma churrasqueira. Nessas condições, uma das áreas será maior do que a outra em*

*(A) 30 $m^2$.     (B) 48 $m^2$.     (C) 108 $m^2$.     (D) 138 $m^2$.     (E) não sei.*

O quinto e último problema, desse questionário, também foi elaborado pelo autor. Diferentemente dos demais problemas, citados anteriormente, refere-se ao cálculo da área de figuras planas geométricas.

A contextualização do problema consiste na associação de uma figura de formato trapezoidal a um idealizado quintal de uma casa. De acordo com a figura, que representa o esboço do citado quintal, são conhecidas as medidas de três lados do trapézio. Sendo que a única medida desconhecida é a do lado perpendicular às bases do trapézio, lado esse denominado comumente de altura (sabemos que uma figura poligonal plana não possui altura e sim lados). Para que o discente obtivesse sucesso na resolução desse problema o mesmo deveria traçar, internamente e do ponto extremo da base menor do trapézio, um segmento paralelo ao segmento denominado de altura, originando, assim, um triângulo retângulo de cateto 5 m e hipotenusa 13 m. O outro cateto que se deseja determinar do triângulo retângulo em questão é o segmento paralelo ao lado perpendicular às bases, ou seja, é a altura do trapézio. Daí, o aluno deveria utilizar a única ferramenta capaz de resolver o problema: o teorema de Pitágoras.

É um problema de complexidade levemente maior que os anteriores, considerando que a sua resolução depende do conhecimento e domínio de alguns conceitos elementares, entretanto, importantes, tais como: o conceito de diagonal e o conhecimento da fórmula da área do triângulo.

### 4.3.2 Análise do questionário B

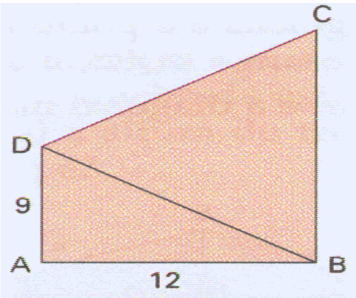
O questionário B foi o segundo instrumento de coleta de dados submetido aos discentes pesquisados. Em tese, esse deveria ser bem mais fácil de ser resolvido que o primeiro questionário, dado que o questionário B fora composto apenas por problemas não contextualizados, isto é, problemas bastante objetivos em suas solicitações.

O questionário B encontra-se na íntegra no apêndice B. Semelhantemente ao questionário A, o mesmo contém cinco problemas objetivos, isto é, de múltipla escolha, sendo que cada problema é composto por cinco alternativas com apenas uma alternativa correta por problema. Os problemas do questionário B podem ser considerados simples exercícios, devido à forma direta de como o problema é apresentado.

A diferença entre o questionário B e o questionário A é, fundamentalmente, a ausência da contextualização nos problemas do questionário B. No entanto, para uma melhor análise entre os citados questionários, compararemos os problemas dos mesmos e faremos uma associação entre tais problemas.

Observe, a seguir, o primeiro problema do questionário B:

**Problema 1B.** *Na figura, o triângulo BCD é equilátero e o ângulo A é reto.*



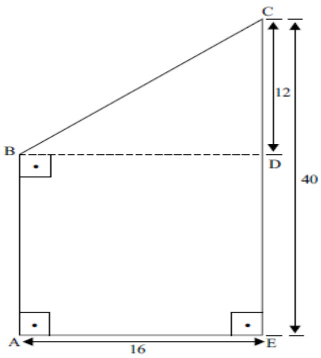

*Calculando o perímetro do quadrilátero ABCD, obtemos:*
*(A) 66 m (B) 51 m (C) 45 m (D) ($2\sqrt{42}$ + 21) m (E) não sei*

O primeiro problema do questionário B se corresponde diretamente com o Problema 2A. Logo, o procedimento para se resolver este problema é análogo ao já descrito no Problema 2A. Porém, nesse caso, a resolução é facilitada pelo fornecimento da figura no texto do problema. A solicitação dos problemas 1B e 2A é exatamente a mesma, ou seja, calcular o perímetro de uma figura plana geométrica.

Consoante o correspondente problema do questionário A, a determinação da medida do lado do triângulo equilátero que também é a hipotenusa do triângulo retângulo se faz utilizando o teorema de Pitágoras.

Observe, a seguir, o segundo problema do questionário B:

**Problema 2B.** *Determine o perímetro da figura em cm.*




*(A) 64 cm (B) 104 cm (C) 116 cm (D) 352 cm (E) não sei*

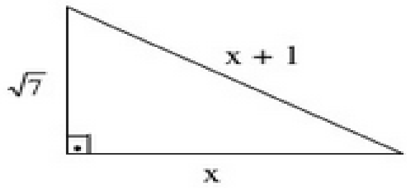
O segundo problema desse questionário se assemelha ao Problema 1A.

Tal qual o Problema 1A, esse problema requer o cálculo do perímetro de uma figura plana geométrica composta por um retângulo e um triângulo retângulo. Portanto, é um problema fácil, visto que são conhecidas as medidas de todos os lados com exceção da hipotenusa do triângulo retângulo. Para que o discente chegasse à solução do problema, necessariamente, teria que ter conhecimento e domínio do teorema de Pitágoras.

Observe, a seguir, o terceiro problema do questionário B:

**Problema 3B.** *Determine a área do triângulo em cm$^2$.*

c)



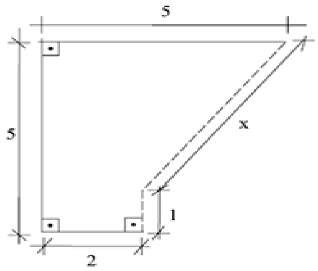

*(A) $7\sqrt{7}$ cm$^2$ (B) $(3 + \sqrt{7})$ cm$^2$ (C) $(7 + \sqrt{7})$ cm$^2$ (D) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm$^2$ (E) não sei*

O terceiro problema desse questionário se assemelha ao Problema 3A. Existem, porém, algumas diferenças, tais como: no Problema 3A, o texto contextualizador foi substituído por uma figura de um triângulo retângulo com a indicação das medidas dos seus lados, dadas em centímetros; também, no Problema 3A, foi solicitado o cálculo do perímetro do triângulo, ao passo que no Problema 3B foi requerida a área do triângulo. Como um dos catetos e a hipotenusa estão expressos de maneira enigmática, ou seja, utilizando-se de incógnita, então as medidas dos citados lados do triângulo seriam obtidas mediante a aplicação do teorema de Pitágoras.

Vencida a etapa inicial do problema – que é a compreensão do necessário uso do teorema de Pitágoras –, o discente deveria possuir domínio de cálculo algébrico básico como produtos notáveis e equações do 1º grau, além, é claro, do elementar conhecimento do cálculo da área de um triângulo para obter sucesso na resolução do problema.

Observe, a seguir, o quarto problema do questionário B:

**Problema 4B.** *Quanto vale o perímetro da figura?*



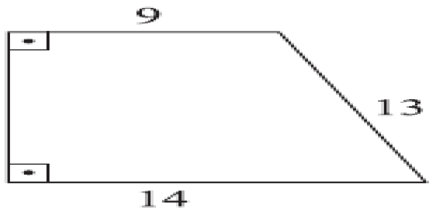

*(A) (13 + $\sqrt{14}$)  (B) 18  (C) 17  (D) 16  (E) não sei*

O quarto problema desse questionário se corresponde com o quarto problema do questionário A. Esse problema foi elaborado a partir de um exercício sem qualquer contexto no qual se requeria apenas que se calculasse o valor de x indicado na figura. Porém, nos problemas dos questionários A e B é acrescentado que se determine o perímetro da figura.

Logo, a mesma análise feita para o Problema 4A se aplica ao Problema 4B.

Observe, a seguir, o quinto problema do questionário B:

**Problema 5B.** *Qual é a área do trapézio em $m^2$?*




*(A) 138 $m^2$  (B) 108 $m^2$  (C) 48 $m^2$  (D) 30 $m^2$  (E) não sei*

O quinto problema desse questionário e o Problema 5A se assemelham, pois possuem como referencial a mesma figura de um trapézio retângulo com a indicação das medidas de três dos seus lados. Sendo esses lados as duas bases e o lado oblíquo, levando o discente à necessidade de calcular o lado perpendicular às bases.

Diferentemente do correspondente Problema 5A, o Problema 5B é não contextualizado o que torna este mais simples do que aquele. A solicitação do problema é direta, requerendo do discente que calcule a área do trapézio, representado na figura, o que somente será possível, obviamente, mediante o conhecimento das fórmulas da área do trapézio e/ou do triângulo. Pois, traçando-se uma das diagonais, podemos decompor o trapézio em dois triângulos. Entretanto, para que se concretize a solução, faz-se necessário que antes seja aplicada uma importante ferramenta: o teorema de Pitágoras.

A conclusão é que se o discente conseguisse resolver o Problema 5A, provavelmente, também, conseguiria resolver o Problema 5B. Ao tentar solucionar aquele problema, esperava-se que o discente calculasse as áreas dos dois triângulos originados pelo traçado de uma das diagonais do trapézio. Ora, o citado raciocínio coopera para a resolução do Problema 5B se considerarmos que o discente não tivesse memorizado ou não soubesse deduzir a fórmula da área do trapézio.

### 4.3.3 Análise do questionário C

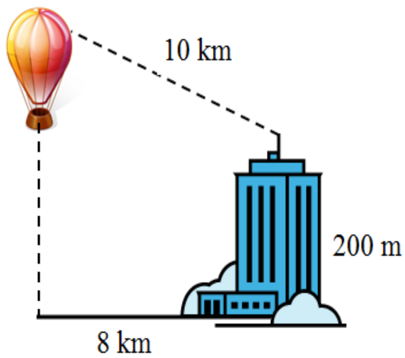
O questionário C foi o terceiro e último instrumento de coleta de dados utilizado neste trabalho de pesquisa e se encontra na íntegra no apêndice C. O mesmo foi um recurso elaborado com o propósito de verificar se houvera melhora no conhecimento dos discentes em relação ao nível verificado nos dois questionários aplicados anteriormente.

Esse questionário contém cinco problemas objetivos, sendo que cada problema é composto por cinco alternativas com apenas uma alternativa correta por problema. Os problemas que compõem tal questionário foram extraídos ou adaptados de Giovanni Júnior; Castrucci (2009), de sites da internet e/ou elaborados pelo autor desse trabalho de pesquisa.

É um questionário contextualizado, contendo problemas com nível de complexidade semelhante aos problemas dos dois primeiros questionários trabalhados. Faremos uma análise de cada um dos problemas sem, necessariamente, compararmos ou associarmos aos problemas dos questionários A ou B já analisados.

Confira, a seguir, o primeiro problema do questionário C:

**Problema 1C.** *Qual deve ser a altitude do balão para que sua distância ao topo do prédio seja de 10 km?*



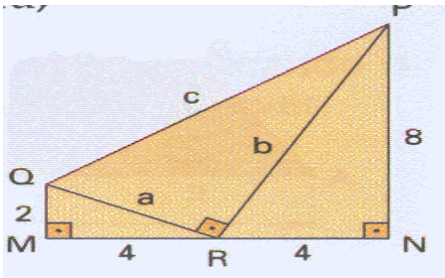
*(A) 9 km (B) 8,2 km (C) 8 km (D) 6,2 km (E) 6 km*

O primeiro problema desse questionário é uma aplicação direta da relação de Pitágoras, visto que fora dada a medida de um cateto e da hipotenusa do triângulo retângulo na situação hipotética ilustrada pela figura.

A possível dificuldade que o discente poderia encontrar para solucionar o problema seria desconhecer a definição do vocábulo altitude[5] ou mesmo esquecer que calculado o outro cateto dever-se-ia adicionar a este o comprimento da altura do prédio. Lembrando-se da necessária transformação entre unidades de medidas de comprimento.

Confira, a seguir, o segundo problema do questionário C:

**Problema 2C.** *Pitágoras possui um terreno, conforme a figura dada. O mesmo, desejando fazer o plantio de uma horta com três culturas diferentes, dividiu o terreno em três partes as quais são triângulos retângulos. Sabendo-se que as dimensões do terreno são dadas em metros, determine o perímetro do terreno de Pitágoras.*




*(A) $40\sqrt{5}$ m (B) 40 m (C) 28 m (D) $(28 + 6\sqrt{5})$ m (E) $(28 + 12\sqrt{5})$ m*

O segundo problema do questionário C foi adaptado de Giovanni Júnior; Castrucci (2009, p. 251) onde se cobrava do aluno que calculasse as medidas a, b, c e finalmente o perímetro do trapézio MNPQ. Portanto, no problema adaptado, foi inserido um pequeno texto comparando a figura dada a um hipotético terreno de uma horta. Contudo, tanto o problema original quanto o problema adaptado têm por objetivo o cálculo do perímetro do trapézio.

Para que o discente obtivesse êxito na resolução do problema, o mesmo deveria lançar mão por três vezes do teorema de Pitágoras. Calcularia os limites internos QR e PR da divisão do terreno para finalmente, de posse desses valores, calcular o lado PQ do quadrilátero.

Confira, a seguir, o terceiro problema do questionário C:

[5] Altura ou elevação em relação ao nível do mar. (KURY, 2002)

**Problema 3C.** *Para ir de sua casa até o ponto de ônibus, uma pessoa anda 120 m em linha reta até uma esquina, dobra à esquerda numa rua perpendicular e anda mais 160 m. Mas, se trocar de caminho, ela pode seguir por um terreno baldio que separa sua casa do ponto de ônibus e fazer esse trajeto em linha reta. Quantos metros ela andará a menos se for da sua casa até o ponto de ônibus, optando por passar pelo terreno baldio?*

*(A) 80 m (B) 60 m (C) 40 m (D) 200 m (E) 480 m*

O terceiro problema desse questionário foi adaptado de Giovanni Júnior; Castrucci (2009, p. 252). A diferença entre os problemas é que o problema original solicita, implicitamente, do discente o cálculo da hipotenusa, já que o mesmo deveria deduzir que o citado trajeto em linha reta é na verdade a hipotenusa de um triângulo retângulo formado por mais dois trajetos dados no problema. Porém, na versão adaptada do problema, o discente além de proceder semelhantemente à maneira de resolver o problema na sua forma original, também, deveria determinar de quanto é a vantagem de andar a menos se optasse pelo trajeto em linha reta. Portanto, esse problema só seria resolvido com o uso do teorema de Pitágoras.

Confira, a seguir, o quarto problema do questionário C:

**Problema 4C.** *Um professor possui uma turma composta por 30 alunos. O mesmo lançou o seguinte desafio para a turma: determinar a área de um triângulo retângulo cujos lados medem respectivamente* $(x+3)$ *cm,* $(x+7)$ *cm e* $(x+11)$ *cm. Apenas três alunos acertaram a resposta de tal desafio. Portanto, qual foi a resposta encontrada por eles?*

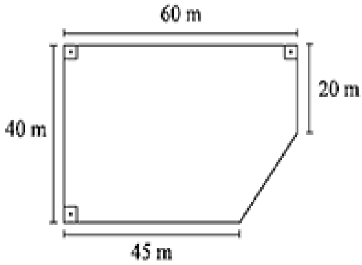
*(A) 48* $cm^2$ *(B) 96* $cm^2$ *(C) 192* $cm^2$ *(D) 1 920* $cm^2$ *(E)* $30\sqrt{63}$ $cm^2$

O quarto problema do questionário C foi elaborado pelo autor. É um problema que requer do discente o domínio de alguns fundamentos da matemática estudada no ensino fundamental, tais como: desenvolvimento de produtos notáveis; determinação das raízes de equações quadráticas e cálculo da área do triângulo. Naturalmente, era preciso que o discente reconhecesse a necessidade do uso do teorema de Pitágoras para obter êxito na resolução do problema.

Ao tentar resolver o problema, o aluno poderia esbarrar em uma dúvida sobre qual das três expressões é a candidata à hipotenusa do triângulo retângulo. Sabendo-se que a hipotenusa é o maior dos lados do triângulo, então a expressão que a representa é aquela que agrega o maior número natural, pois o x é comum.

Confira, a seguir, o quinto problema do questionário C:

**Problema 5C.** *A figura representa uma praça pública que, por questões de segurança, deverá receber grade de proteção em todo o seu perímetro, o que corresponde a:*




*(A) 190 m (B) 180 m (C) 170 m (D) 165 m (E) 155 m*

O quinto e último problema desse questionário é um problema bastante simples. Esse problema associa uma figura plana pentagonal a uma hipotética praça pública que será gradeada. O problema requer do discente o cálculo do perímetro da praça que somente será possível após a determinação da medida do quinto lado do pentágono.

Um possível raciocínio, para que o discente resolvesse o problema, seria traçar dois segmentos perpendiculares entre si, internamente ou externamente à figura, desde que cada um desses segmentos tivesse uma das suas extremidades coincidente com uma das extremidades do lado do pentágono o qual se quer determinar. Portanto, o ponto de intersecção dos supracitados segmentos origina o vértice do ângulo reto e, consequentemente, os dois catetos do triângulo retângulo, sendo a hipotenusa o lado que queremos calcular. De posse desse conjunto de informações, o discente deveria utilizar o teorema de Pitágoras para solucionar o problema.

## 4.4 PROCEDIMENTO

Um determinado grupo de discentes – quatro turmas contendo cada uma aproximadamente 43 discentes – foi submetido, *a priori*, à resolução dos dois questionários que versam sobre o conteúdo teorema de Pitágoras. Todas as turmas são da 3ª série do Ensino Médio as quais identificamos por turmas A, B, C e D.

Buscando alcançar os objetivos propostos pela pesquisa, primeiramente, procuramos verificar mediante a aplicação dos questionários A e B, o nível do conhecimento do grupo pesquisado. É importante ressaltar que os discentes pesquisados não tiveram qualquer explicação de caráter específico acerca do conteúdo teorema de Pitágoras previamente à aplicação do primeiro e segundo instrumentos de coleta de dados – os questionários A e B – como também não lhes fora revelado sobre qual conteúdo versava os problemas propostos. Porém, como preparação para a realização do questionário C foi aplicada uma metodologia experimental e não comumente vivenciada em sala de aula. A seguir, discorreremos, em linhas gerais, todas as etapas desse trabalho de pesquisa, seguindo a ordem cronológica dos fatos ocorridos, isto é, falaremos, inicialmente, da aplicação do questionário A; em seguida, da aplicação do questionário B; do processo de intervenção didático-metodológica; culminando com a aplicação do questionário C.

O primeiro instrumento de coleta de dados (questionário A) foi aplicado na penúltima semana do mês de setembro de 2015. Anteriormente a esse período, informei os discentes de que faria um trabalho de pesquisa e que gostaria da cooperação de todos eles. Expliquei quais as etapas que comporiam esse trabalho de pesquisa e qual a finalidade do mesmo. Porém, não os avisei sobre o conteúdo que estaria presente nos problemas do questionário A, pois o objetivo era mensurar o quanto os discentes dominavam o conteúdo teorema de Pitágoras na data da aplicação do questionário.

Chegado o dia da aplicação do questionário A, solicitei aos discentes que tomassem posição de quem fariam um teste avaliativo de rotina e que em nenhum momento fizessem qualquer comentário relacionado ao tema e aos problemas propostos no questionário para que os demais colegas não sofressem nenhum tipo de influência no tocante à maneira de resolverem os problemas e, consequentemente, à escolha da opção a qual deveriam assinalar.

O quantitativo de 162 discentes se submeteu à realização desse questionário, sendo que esse número de alunos fora dividido em quatro turmas, a saber: 3ª série A (41 discentes), 3ª série B (43 discentes), 3ª série C (34 discentes) e 3ª série D (44 discentes). Todo o processo de resolução do questionário foi realizado por todas as turmas, em uma manhã do mesmo dia, com o propósito de evitar ao máximo o vazamento de informações a respeito dos problemas do questionário. O tempo de duração para a resolução do questionário foi de 50 minutos que é o tempo prefixado para uma aula do colégio campo de pesquisa.

Para os problemas foram criadas alternativas concordantes com os possíveis erros os quais os discentes poderiam cometer, isto é, foram criados distratores[6],

[6] Os distratores indicam as alternativas incorretas à resolução da situação-problema proposta. Além disso, essas respostas devem ser plausíveis, isto é, devem parecer corretas para aqueles participantes do teste que não desenvolveram a habilidade em questão. Eles devem ser plausíveis em relação ao enunciado e à habilidade que está sendo avaliada.
Fonte: http://approva.com.br/2015/03/27/prova-enem-o-conceito-de-distrator/ (em 03/07/2016)

visto que os problemas eram objetivos – não cobramos o desenvolvimento da resolução do problema – e precisávamos, também, avaliar as deficiências advindas dos pré-requisitos necessários à resolução de tais problemas.

Em cada problema, criamos uma opção (alternativa E) cuja resposta era “não sei” a qual o discente foi orientado a marcá-la caso se sentisse incapaz de resolver o problema proposto. A finalidade de termos criado essa opção foi buscarmos avaliar quantos dos discentes pesquisados não tinham qualquer entendimento do que liam, ou se lhes faltavam ferramentas da matemática básica ou, ainda, se desconheciam o teorema de Pitágoras como ferramenta capaz de solucionar o problema.

O segundo instrumento de coleta de dados (questionário B) foi aplicado na última semana do mês de setembro de 2015. Esse questionário foi aplicado no encontro imediatamente posterior à aplicação do questionário A. Portanto, propositadamente, as datas, assim, foram escolhidas para evitar que os discentes pesquisados tivessem oportunidade de comentar a respeito de qual conteúdo era o conjunto de problemas do questionário A.

Tínhamos avisado os alunos de que os mesmos responderiam a dois questionários seguidamente, porém não declaramos qual conteúdo constaria de cada um deles. Portanto, ainda que alguns discentes, depois de terminado o primeiro questionário, tiveram a certeza sobre qual tema constava de cada um dos problemas desse questionário, nada lhes fora confirmado a respeito do conteúdo que constaria no segundo questionário. Pois o objetivo, nessa primeira etapa da pesquisa, era avaliarmos o quanto de conhecimento e/ou domínio os discentes possuíam acerca da ferramenta teorema de Pitágoras no instante da aplicação dos questionários A e B.

O quantitativo de 141 discentes participou do processo de realização da pesquisa mediante o uso do segundo instrumento de coleta de dados (questionário B). Sendo que a divisão desse quantitativo, por turmas, está de acordo com o descrito a seguir: 3ª série A (39 discentes), 3ª série B (39 discentes), 3ª série C (27 discentes) e 3ª série D (36 discentes).

O processo e as regras de aplicação adotados no questionário B foram análogos aos do questionário A. Também coincidiram o turno de aplicação, o tempo de duração e o local de aplicação dos citados questionários.

Por serem os problemas objetivos, os discentes foram dispensados de apresentarem as demonstrações dos cálculos. Pois, mediante a escolha da alternativa, poderíamos conjecturar qual foi o possível erro que os levaram a assinalar uma dada opção, isto é, utilizamos os chamados distratores tais quais utilizados no questionário A.

Criamos para os problemas do questionário B à alternativa (E) cuja resposta é "não sei" com a mesma finalidade que criamos para o questionário A. Pois, orientamos aos discentes que assinalassem tal opção, caso não tivessem qualquer ideia que os conduzissem à solução do problema.

Antes de falarmos do questionário C, buscaremos descrever de que forma atuamos no processo de intervenção didático-metodológica, visando corrigir algumas dificuldades constatadas para tentarmos melhorar o conhecimento dos discentes acerca do assunto objeto da pesquisa.

Durante o mês de outubro foi dada uma pausa no trabalho de pesquisa com a participação direta dos discentes. Um dos motivos foi que esse período antecedia o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e quisemos deixar os discentes focados no que julgamos ser importante para eles. E o outro motivo foi que, nesse ínterim, aproveitamos para corrigir os questionários A e B já aplicados. Portanto, apenas na 2ª semana do mês de novembro iniciamos o trabalho de intervenção didático-metodológica que teve a duração de três aulas de cinquenta minutos cada uma.

A primeira aula foi dividida em dois momentos. No primeiro momento, utilizamos as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) mediante a amostra de um vídeo sobre uma situação-problema cotidiana do uso da ferramenta teorema de Pitágoras. É um vídeo do Novo Telecurso[7] do Ensino Médio – Teorema de Pitágoras / aula 19 – com duração aproximada de 13 minutos. Ver, no Apêndice D, algumas fotos que mostram o uso das TIC's como ferramenta metodológica. O vídeo retrata uma hipotética situação vivida por dois personagens que trabalham em uma vidraçaria, sendo que os mesmos se deparam diante de uma situação em que devem cortar um vidro no formato de um triângulo retângulo com um dos catetos medindo 4 cm e a hipotenusa medindo 7,1 cm. O diálogo dos dois personagens várias vezes é interrompido para a entrada de um terceiro personagem que

[7] É um sistema educacional de educação à distância brasileiro mantido pela Fundação Roberto Marinho e pelo sistema FIESP. Idealizado e criado pelo jornalista Francisco Calazans Fernandes, o programa consiste em teleaulas das últimas séries do ensino fundamental (antigo 1º grau, ou ginásio) e do ensino médio (2º grau, ou colégio) que podem ser assistidas em casa ou em telessalas. Também existe a modalidade profissionalizante em mecânica.

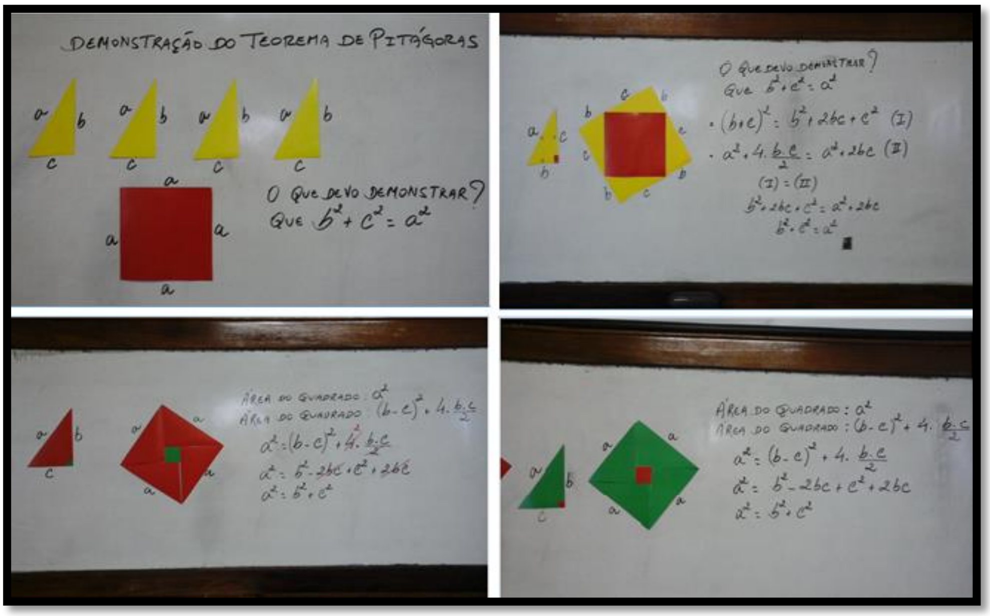
desempenha uma específica função, geralmente de: esclarecer uma determinada dúvida, ratificar ou acrescentar uma dada informação.

Em certo momento do vídeo é feita uma demonstração virtual do teorema de Pitágoras para um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Utilizando-se de uma animação, deslocam-se 9 quadradinhos construídos sobre o lado de medida 3, e 16 quadradinhos construídos sobre o lado de medida 4, quase que simultaneamente, para o lado de medida 5, totalizando 25 quadradinhos de lado medindo 1 unidade de medida de comprimento. Demonstrando, assim, que as medidas 3, 4 e 5 determinam um triângulo retângulo e que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Na sequência do vídeo, é feita outra demonstração do teorema de Pitágoras com o uso de recortes de papel, generalizando esse teorema para qualquer triângulo retângulo. Enfim, no final do vídeo, os personagens conseguem cortar o vidro utilizando-se da ferramenta teorema de Pitágoras.

No segundo momento da 1ª aula, após a exibição do vídeo, foram feitas duas distintas demonstrações do teorema de Pitágoras com o uso de material concreto – confeccionamos recortes de papel-cartão –, visando à utilização de uma metodologia mais dinâmica que despertasse nos discentes o interesse pela aquisição do conhecimento, facilitando o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo proposto. A Figura 18, a seguir, apresenta fotos do material usado nas demonstrações.

**Figura 18 –** Metodologia utilizando-se material concreto: recortes em papel-cartão.




**Fonte:** Editada pelo autor.

Outras fotos sobre o uso de material concreto encontram-se no apêndice E.

A segunda aula foi dividida em dois momentos. Começamos a aula mostrando um vídeo do Novo Telecurso do Ensino Fundamental – Teorema de Pitágoras / aula 55 – com duração aproximada de 13 minutos. O vídeo tem início com a narrativa de um dos personagens que apresenta o conteúdo a ser estudado, afirmando que para a Matemática o teorema de Pitágoras funciona como uma espécie de ferramenta, pois quando o teorema nos dá condições de resolver um problema dizemos que esse foi resolvido por causa da aplicação do teorema. O personagem narrador ainda acrescenta que serão estudadas, a título de revisão, as propriedades das figuras planas e seus elementos mais importantes. Optamos por essa teleaula do Ensino Fundamental por termos constatado, mediante a aplicação e correção dos questionários A e B, a ocorrência de erros ocasionados pelo pouco conhecimento dos conteúdos básicos dessa etapa da educação escolar. Foram erros de pré-requisitos fundamentais os quais não têm associação direta com o não conhecimento e/ou não domínio do teorema de Pitágoras.

O tema da teleaula era sobre aplicações do teorema de Pitágoras. O vídeo aborda uma situação fictícia em que os personagens querem apanhar duas pipas presas no alto de um muro utilizando-se de uma escada. Essa situação se transforma no problema principal da teleaula, pois os personagens desejam determinar a altura do muro que a escada alcança, dado que conhecem o comprimento da escada e a que distância a mesma está situada da base do muro.

Enquanto os dois personagens tentam resolver o problema da escada apoiada no muro, entra em cena um terceiro personagem (aparentando ser um detetive) e começa a apresentar uma sequência de outras aplicações do teorema de Pitágoras, tais como: a) pergunta-se se é possível formar um triângulo retângulo, dadas três varetas medindo, respectivamente, 10 cm, 25 cm e 26 cm; b) o cálculo da medida da diagonal de um quadrado, tomando-se como exemplo uma pipa quadrada de lado medindo 50 cm; c) o cálculo da medida do lado de um losango dadas as medidas das suas diagonais, tomando-se como exemplo um losango de diagonais medindo 16 cm e 12 cm; d) o cálculo da altura de um triângulo equilátero de lado medindo 80 cm.

Sempre que era lançado um dos problemas de aplicação do teorema de Pitágoras, citados anteriormente, também, eram explicadas as propriedades geométricas da figura plana envolvida na situação-problema. Portanto, além de retratar algumas aplicações do teorema de Pitágoras, o vídeo também teve a função de fazer o discente recordar alguns conteúdos básicos, porém, importantes para melhorar sua compreensão sobre alguns conceitos matemáticos e, consequentemente, também melhorar seu desempenho acerca do conhecimento teorema de Pitágoras.

Próximo ao término do vídeo, os dois personagens conseguem determinar a altura do muro que a escada alcança, sendo que o comprimento da escada é 5 m e que o pé da escada está a 3 m de distância da base do muro. Também é feita uma breve narrativa com o objetivo de revisar, em linhas gerais, o conteúdo estudado mediante a exibição do vídeo.

A Figura 19, a seguir, apresenta fotos sobre o uso das TIC’s.

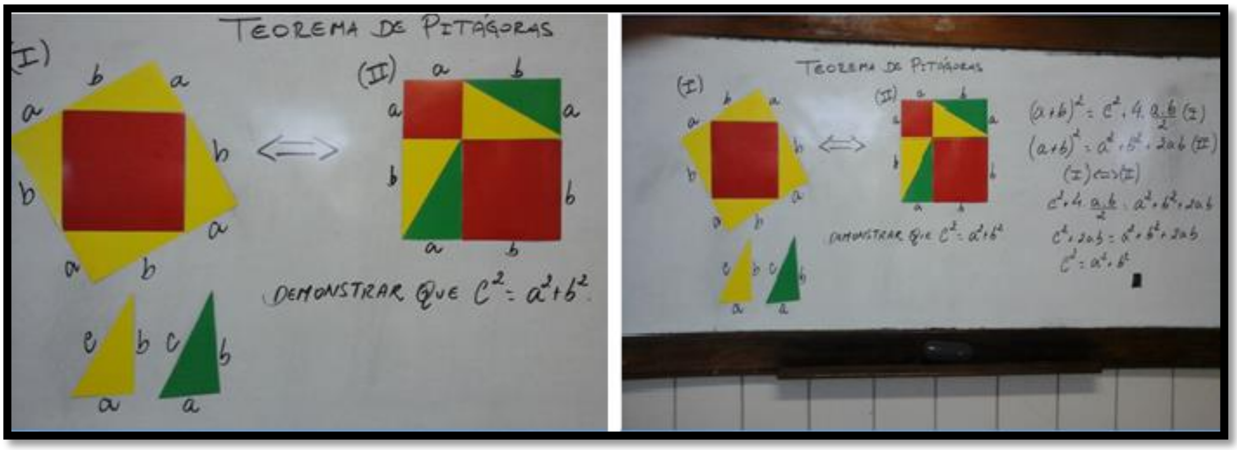
**Figura 19 –** Novo Telecurso do Ensino Fundamental: Teorema de Pitágoras / Aula 55.


**Fonte:** Editada pelo autor.

Outras fotos sobre o uso das TIC’s encontram-se no apêndice D.

Terminada a exibição do vídeo, no segundo momento da aula, foi feita uma demonstração do teorema de Pitágoras. Utilizamos recortes de papel-cartão, priorizando o trabalho com material concreto na tentativa de fugirmos do tradicionalismo didático do restrito uso do quadro branco e pincel. A ideia era usarmos uma metodologia que não precisasse ser inovadora, porém que houvesse adequação entre a proposta de ensino-aprendizagem e o conteúdo estudado. E o uso desse específico material, mostrou-se apropriado nessa elementar demonstração do teorema de Pitágoras. A Figura 20, a seguir, apresenta fotos do material usado na demonstração.

**Figura 20 –** Metodologia utilizando-se material concreto: recortes em papel-cartão.



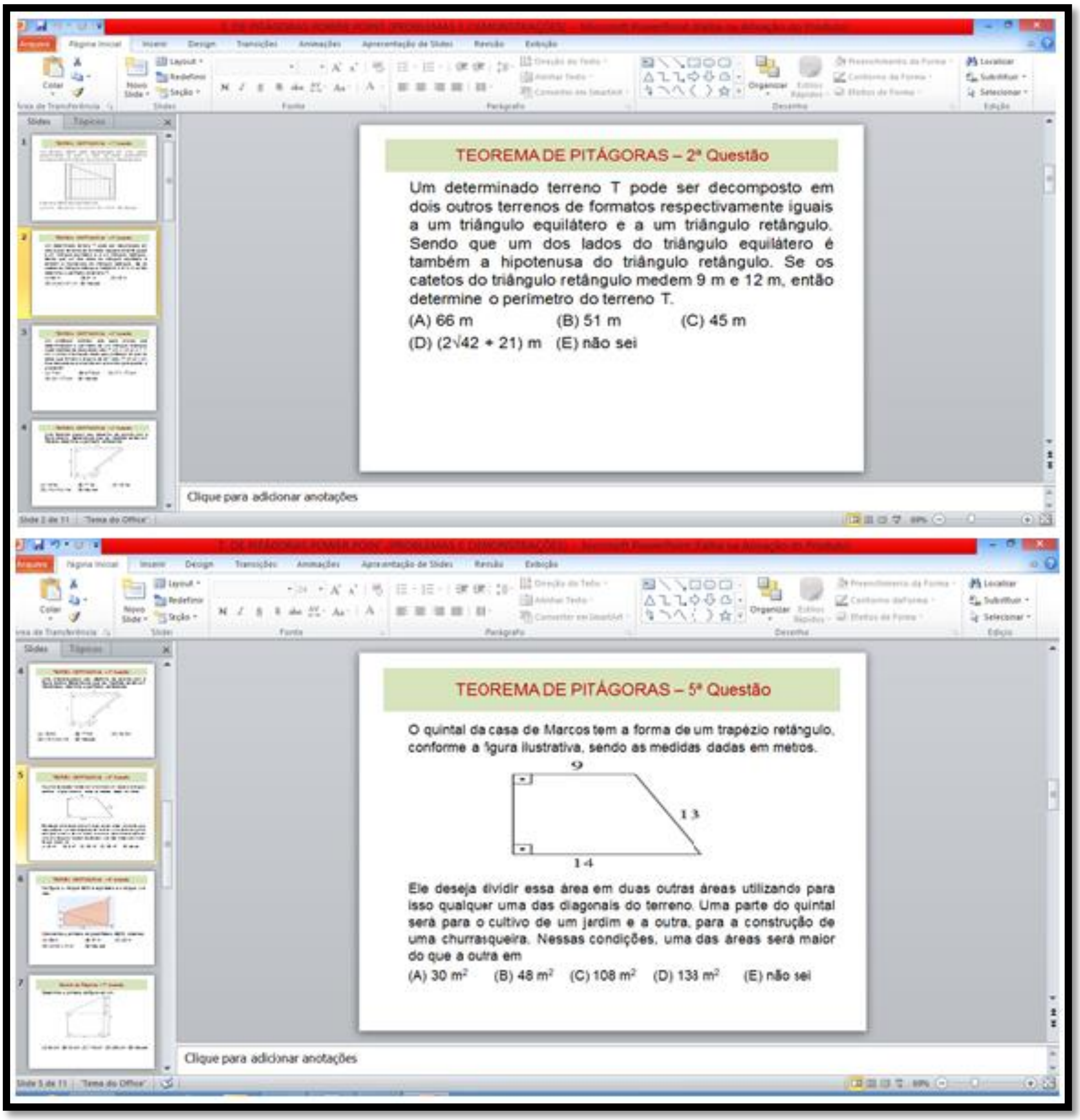

**Fonte:** Editada pelo autor.

Outras fotos sobre o uso de material concreto encontram-se no apêndice E.

Na terceira e última aula da intervenção didático-metodológica, utilizando o computador, datashow, pincel e quadro branco como recursos didáticos, resolvemos os problemas dos questionários A e B com o propósito de evidenciarmos e corrigirmos os erros cometidos pelos discentes. Utilizamos a análise de erros como metodologia de ensino. Portanto, o uso dessa simples, porém, fundamentada metodologia teve como finalidade alcançarmos a aprendizagem. Procuramos, assim, demonstrar que não existe metodologia melhor ou pior e, sim, metodologia mais adequada a uma determinada situação.

A aula ficou restrita a uma didática comum de leitura, interpretação e resolução de problemas. Porém, devido às aulas ocorridas anteriormente, utilizando-se de uma metodologia mais dinâmica foi possível tornarmos a aula mais objetiva, uma vez que boa parte das definições presentes, nos problemas dos questionários A e B, foram reiteradas vezes comentadas durante as duas primeiras aulas. Portanto, nessa mescla de métodos utilizada experimentalmente, foi possível percebermos que cada método de ensino tem sua importância bem definida dentro de um específico contexto, desde que definamos, antecipadamente, quais os objetivos que desejamos alcançar. A Figura 21, a seguir, apresenta fotos da metodologia análise de erros.

**Figura 21 –** Metodologia utilizando-se a resolução de problemas: análise de erro.




**Fonte:** Editada pelo autor.

Outras fotos sobre a metodologia utilizando-se a resolução de problemas (análise de erros) encontram-se no apêndice F.

O terceiro instrumento de coleta de dados (questionário C) foi aplicado na 3ª semana do mês de novembro de 2015. Seguimos o mesmo modelo de aplicação dos dois questionários anteriores, sendo apenas enfatizadas as mesmas instruções dadas anteriormente.

O quantitativo de 167 discentes participou da realização desse questionário, sendo que esse número de discentes fora dividido em quatro turmas, a saber: 3ª série A (44 discentes), 3ª série B (43 discentes), 3ª série C (36 discentes) e 3ª série D (44 discentes). Todas as turmas participaram do processo de resolução do questionário em uma manhã do mesmo dia na tentativa de prevenir a troca de informações relacionadas aos seus problemas. O tempo destinado à resolução desse questionário foram os mesmos 50 minutos dados para a resolução dos questionários A e B. O referido questionário fora composto por cinco problemas contextualizados de múltipla escolha, contendo cada problema cinco alternativas, sendo o modelo de problemas desse questionário assemelhado ao modelo de problemas do questionário A.

Mesmo depois do processo de intervenção didático-metodológica, queríamos continuar avaliando as dificuldades dos discentes em relação aos pré-requisitos necessários à resolução dos problemas propostos, assim como, se ainda havia algum empecilho ao domínio da ferramenta teorema de Pitágoras. Portanto, além da opção correta, foram criados distratores para que pudéssemos, mediante a análise dos erros cometidos, buscar entendermos as possíveis causas do insucesso do discente em não assinalar a opção correta.

Em cada uma das alternativas dos problemas que compunham o questionário C havia um determinado valor numérico. Portando, não foi dada margem, nesse questionário, para que o discente alegasse não ter condições de resolver os problemas, já que tal argumento parecia não ser mais aceitável como antes, pois acontecera a intervenção didático-metodológica previamente à realização desse questionário.

# CAPÍTULO 5

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, apresentaremos os resultados obtidos com os questionários aplicados antes e após a intervenção didático-metodológica. Para tanto usaremos quadros e gráficos para mostrarmos tais resultados, cuja análise se deteve apenas em constatações de quantidades estatísticas, ora fazendo observações facilmente constatáveis, ora criando hipóteses sobre essas quantidades.

Os quadros e gráficos apresentados, neste trabalho de pesquisa, foram feitos com o uso das ferramentas Microsoft Office Word 2007/2010 e Microsoft Office Excel 2007/2010. Os recursos dos quais podemos dispor dessas ferramentas atenderam satisfatoriamente as nossas necessidades de expressão dos dados coletados. A seguir, apresentaremos um quadro contendo as médias das turmas em relação ao tipo de questionário aplicado. Neste caso, a divisão em turmas – 3ª série A, 3ª série B, 3ª série C e 3ª série D – nada quer dizer, pois não foi feito nenhum trabalho diferenciado em qualquer das turmas citadas. Essa divisão em turmas, apenas reflete uma separação, já preexistente, de acordo com as normas pedagógicas estruturais do colégio – campo de pesquisa. O que não nos impede de fazermos alguma observação quando pertinente. Cada um dos questionários fora composto por cinco problemas, sendo atribuídos dois pontos a cada problema resolvido corretamente. Observando os dados do Quadro 1, a seguir, podemos fazer algumas constatações:

**Quadro 1 –** Médias das turmas por tipo de questionário.

| | Questionário A (Contextualizado) | Questionário B (Não Contextualizado) | Questionário C (Contextualizado) |
|---|---|---|---|
| 3ª Série A | 2,14 | 3,02 | 3,00 |
| 3ª Série B | 2,74 | 3,94 | 4,27 |
| 3ª Série C | 2,64 | 3,77 | 3,20 |
| 3ª Série D | 2,81 | 4,00 | 4,72 |
| Média Geral | 2,58 | 3,68 | 3,80 |
| Intervalo das médias: [0, 10] | | | |

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

I) se escolhermos qualquer uma das turmas e compararmos a média no questionário A com quaisquer das outras duas médias nos questionários B ou C, pertencentes à mesma linha, veremos que aquela sempre será menor. O fato do questionário A ter sido o primeiro a ser aplicado, reforça a hipótese de que o citado acontecimento deve-se, em parte, a falta de conhecimento do discente de qual conteúdo seria objeto da pesquisa;

II) observando as turmas da 3ª série B e da 3ª série D, podemos verificar que as médias nos questionários A, B e C seguem, nessa ordem, uma sequência crescente de valores, fazendo-nos crer que o processo de intervenção didático-metodológica, ao menos em parte, pareceu ter sido válido;

III) destacando as médias nos questionários A, B e C das turmas da 3ª série A e 3ª série C, verificamos que a média no questionário B é sempre maior que as médias nos questionários A e C. Nesse caso, a principal hipótese é que os discentes das referidas turmas demonstraram possuir grandes dificuldades em leitura e interpretação de problemas matemáticos contextualizados relacionados ao tema teorema de Pitágoras;

IV) definimos Média Geral como sendo a média aritmética das médias da totalidade das turmas em um dado questionário. Observando a média geral nos questionários A e B, vemos que apenas a média da 3ª Série A ficou abaixo dessa média. E se observarmos a média geral no questionário C, veremos que as médias das turmas A e C ficaram abaixo dessa média. Portanto, constatamos que o rendimento da turma A ficou sempre aquém das demais, demonstrando ser a turma que apresentou o maior nível de dificuldade no tema pesquisado.

Examinando os dados do Quadro 2, a seguir, são pertinentes algumas observações:

**Quadro 2 –** Crescimento percentual das médias por turma e tipo de questionário.

| | Questionário A (Contextualizado) | Questionário C (Contextualizado) | Crescimento percentual |
|---|---|---|---|
| 3ª Série A | 2,14 | 3,00 | ~ 40,19% |
| 3ª Série B | 2,74 | 4,27 | ~ 55,84% |
| 3ª Série C | 2,64 | 3,20 | ~ 21,21% |
| 3ª Série D | 2,81 | 4,72 | ~ 68,00% |
| Média Geral | 2,58 | 3,80 | ~ 47,28% |
| Questionário A: Antes da intervenção / Questionário C: Após a intervenção | | | |
| Intervalo das médias: [0, 10] | | | |

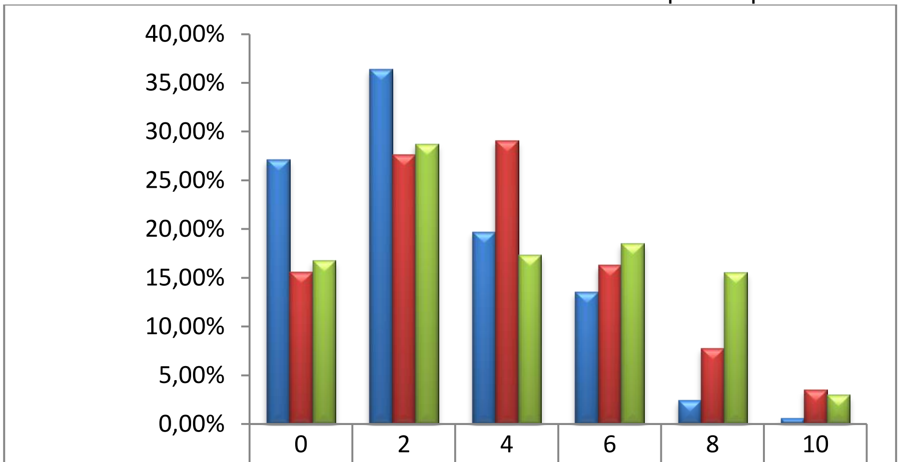
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

I) no Quadro 2, entenda crescimento percentual como sendo o valor representativo da diferença positiva entre as médias dos questionários A e C em relação ao questionário A, sendo esse valor dado em porcentagem. Tomando como exemplo a 3ª série A, temos que 3,00 – 2,14 = 0,86, e 0,86 representa aproximadamente 40,19% de 2,14;

II) observamos a existência, em todas as turmas, do crescimento das médias no questionário C se comparadas às médias no questionário A. O menor crescimento deu-se na turma da 3ª série C (~ 21,21%) e o maior, ocorreu na 3ª série D (~ 68,00%). Portanto, de acordo com os dados, concluímos ter havido na turma D uma aprendizagem bem mais significativa em comparação à turma C;
III) comparando o crescimento da 3ª série D com o crescimento geral, a respectiva diferença é de aproximadamente 20,72%. Já a diferença entre o crescimento da 3ª série B e o crescimento geral, nessa ordem, foi de aproximadamente 8,56%. Portanto, as referidas turmas foram as que mais demonstraram desenvolvimento na aprendizagem do conteúdo estudado;
IV) o crescimento percentual geral foi de aproximadamente 47,28% o que aparenta ser algo expressivo. Porém, se tomarmos a pontuação máxima da média, que é de dez pontos, como referencial comparativo de crescimento entre as médias gerais dos questionários A e C, veremos que o crescimento ficou bem abaixo do ideal. Isso porque a média geral nos questionários A e C foram, respectivamente, 2,58 e 3,80 o que representa, nessa ordem, 25,8% e 38% da pontuação máxima da média. Portanto, de acordo com esse parâmetro de comparação, o percentual real de crescimento é de apenas 12,2%;
V) os percentuais de crescimento das turmas A e C ficaram abaixo do crescimento percentual geral. A diferença entre este e aqueles é, respectivamente, igual a 7,09% e 26,07% aproximadamente. Sendo as citadas turmas as principais responsáveis por contribuírem para a diminuição do índice geral de crescimento;
VI) se tomarmos a pontuação máxima da média (dez pontos) como referencial de comparação do crescimento entre as médias dos questionários A e C, teremos para a 3ª série A, 3ª série B, 3ª série C e 3ª série D, respectivamente, os seguintes percentuais de crescimento: 8,6%, 15,3%, 5,6% e 19,1%.

Analisaremos, utilizando-se do Gráfico 1, o percentual de cada uma das notas obtidas pelos discentes pesquisados de acordo com o tipo de questionário. Faremos algumas análises comparativas, ora envolvendo os três questionários, ora envolvendo apenas dois deles. Porém, não temos o propósito de esgotarmos todas as possíveis análises passíveis de discussões, pelo contrário, gostaríamos de oportunizar outras discussões futuras a respeito desse estudo. Convém, no entanto, revisarmos algumas informações úteis e outras necessárias para a boa compreensão das discussões dos resultados demonstrados pelo gráfico. Desse modo, os questionários A, B e C são, respectivamente, contextualizado, não contextualizado e contextualizado; a nota representa uma variável discreta pertencente ao intervalo [0, 10] com variação constante de dois pontos entre notas imediatamente consecutivas; a quantidade dos discentes pesquisados em cada um dos questionários foi: 162 no A, 141 no B e 167 no C.

**Gráfico 1 –** Percentual de cada nota de acordo com o tipo de questionário.




| | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Questionário A | 27,16% | 36,42% | 19,75% | 13,58% | 2,47% | 0,62% |
| Questionário B | 15,60% | 27,66% | 29,10% | 16,31% | 7,80% | 3,53% |
| Questionário C | 16,77% | 28,74% | 17,36% | 18,56% | 15,57% | 3,00% |

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Analisando os percentuais de nota zero dos três tipos de questionários, percebemos que o percentual de zeros no questionário A foi superior em pouco mais de 11% em relação ao questionário B e em pouco mais de 10% em relação ao questionário C. Demonstrando, assim, parecer existir um maior despreparo do aluno quando da realização do questionário A. Possivelmente pelo fato desse questionário ter sido o primeiro a ser aplicado e, também, contextualizado. Comparando os questionários B e C, notamos que o percentual de zeros no questionário B ficou levemente abaixo do percentual no questionário C, apesar deste questionário ter sido realizado após a intervenção didático-metodológica e aquele antes. Portanto, presume-se existir, por parte do discente, uma notória dificuldade em se resolver problemas contextualizados.

Agora, procuremos ter outro olhar em relação ao gráfico dado. Tomando como referência o questionário B, temos que o somatório dos percentuais das três piores notas (zero, dois e quatro) representa aproximadamente 72% do quantitativo de todas as notas observadas nesse questionário. Por outro lado, o somatório dos percentuais das três melhores notas (seis, oito e dez) representa 28%

aproximadamente. Agora, se tomarmos como referência o questionário A, verificaremos que o somatório dos percentuais das três piores notas (zero, dois e quatro) representa aproximadamente 83% do quantitativo de todas as notas observadas nesse questionário. Em contrapartida, o somatório dos percentuais das três melhores notas (seis, oito e dez) representa 17% aproximadamente. Portanto, diante dos dados observados, concluímos que, no geral, o rendimento dos discentes, no questionário B, foi superior em relação ao questionário A, sendo provável que esse acontecimento tenha se dado pela não contextualização do questionário B em oposição à contextualização do questionário A; ou pelo fato do questionário B ter sido aplicado depois do questionário A; ou ainda pela coexistência das duas possibilidades.

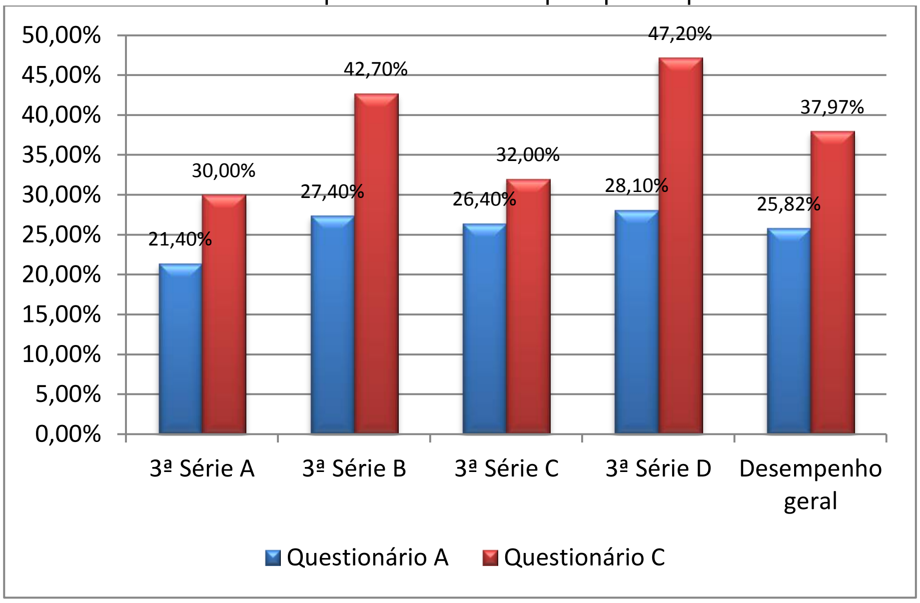
Analogamente, faremos a análise envolvendo os questionários B e C. Analisando, primeiramente, os valores percentuais do questionário B, temos que o total dos percentuais das três piores notas (zero, dois e quatro) representa aproximadamente 72% do quantitativo de todas as notas observadas nesse questionário. Por outro lado, o total dos percentuais das três melhores notas (seis, oito e dez) representa 28% aproximadamente. Agora, observando os dados do questionário C, verificaremos que o total dos percentuais das três piores notas (zero, dois e quatro) representa aproximadamente 63% do quantitativo de todas as notas observadas nesse questionário, enquanto que o total dos percentuais das três melhores notas (seis, oito e dez) representa 37% aproximadamente. Portanto, verificamos que o rendimento dos discentes foi superior no questionário C, apesar desse questionário ter sido contextualizado e, o questionário B, não. A ocorrência desse fato deve-se, provavelmente, à realização da intervenção didático-metodológica antes da aplicação do questionário C.

Agora, analisaremos, exclusivamente, os percentuais das notas referentes aos questionários A e C. É sabido que tais questionários foram contextualizados, sendo que apenas o questionário C foi aplicado após a intervenção didático-metodológica. Portanto, é discutível ter havido ou não alguma melhora no rendimento dos discentes submetidos à aplicação desse último questionário. Observando o gráfico, notamos que os percentuais de cada uma das notas de zero até quatro do questionário A são superiores aos percentuais do questionário C. E que os percentuais de cada uma das notas de seis até dez do questionário A são inferiores aos percentuais do questionário C. Logo, o resultado demonstrado parece ratificar algo que prevíamos que acontecesse e, apenas esperávamos saber em qual proporção seria. Desse modo, concluímos ter havido uma modificação no grupo pesquisado em relação a uma ascensão na quantidade do saber o conteúdo cuja proposta principal é o estudo da aplicação do teorema de Pitágoras como ferramenta na resolução de problemas.

A seguir, apresentaremos o Gráfico 2 que, na realidade, traduz outra forma de perceber os quadros 1 e 2 já comentados. Objetivamos por meio do mesmo dar maior visibilidade a algumas informações necessárias à boa compreensão do trabalho de pesquisa realizado.

O Gráfico 2 refere-se ao desempenho das turmas (A, B, C e D) por tipo de questionário (A e C). Devemos entender, nesse específico caso, “desempenho” como sendo a pontuação alcançada por cada uma das turmas nos respectivos questionários. O cálculo do desempenho das turmas, na realidade, é a média aritmética, expressa em porcentagem, das notas de todos os discentes pertencentes a uma dada turma em um específico questionário.

**Gráfico 2 –** Desempenho das turmas por tipo de questionário.




**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A média das turmas é uma variável quantitativa contínua pertencente ao intervalo [0, 10]. O fato dos questionários terem sido contextualizados e um deles (questionário A) ter sido aplicado antes da intervenção didático-metodológica e o outro (questionário C) aplicado depois, justifica a particular escolha pela análise comparativa entre ambos.

Observando os valores referentes ao questionário A, percebemos que o desempenho de todas as turmas ficou abaixo dos 30%. O que nos remete a uma frustrante constatação: que nenhuma das turmas alcançou o mínimo de três pontos no citado questionário (ver apêndice A) cujos problemas, podemos notar, possuem baixo nível de complexidade, considerando que tal questionário foi aplicado em um grupo que cursa a 3ª série do Ensino Médio. Todavia, os valores referentes ao questionário C indicam que houve uma relativa melhora nos índices de desempenho de todas as turmas. Sendo que esses índices variaram de 30,00% a 47,20%. Esse relativo progresso se sustenta na hipótese de que o questionário C fora aplicado após os estudos realizados durante a intervenção didático-metodológica.

Conforme podemos observar, de todas as turmas envolvidas na pesquisa, a 3ª série D obteve o melhor desempenho nos questionários A e C. No questionário A, a diferença entre o desempenho da turma D e os desempenhos das demais turmas foi bem mais sutil que no questionário C. Comparando, veremos que, no questionário A, as diferenças no desempenho entre a turma D e as turmas A, B e C, nessa ordem, foram 6,70%, 0,70% e 1,70%. Já no questionário C, as diferenças de desempenho entre aquela turma e estas foram, respectivamente, 17,20%, 4,50% e 15,20%. Tais dados demonstram uma aprendizagem mais efetiva da 3ª série D em relação às demais turmas.

O fraco desempenho geral, talvez seja a observação mais relevante no contexto do Gráfico 2. Definimos desempenho geral como sendo a média aritmética dos desempenhos de todas as turmas em um específico questionário. Portanto, no questionário A, observamos que o desempenho geral foi de apenas 25,82% e, no questionário C, foi de 37,97%. Logo, diante desses dados, é conclusivo que o grupo de discentes, submetido à pesquisa, demonstrou possuir um baixo nível de saberes relacionado ao tema pesquisado; muito aquém do ideal, visto que o nível de complexidade dos problemas propostos em todos os questionários estava perfeitamente adequado ao nível de escolaridade do referido grupo.

# CAPÍTULO 6

## 6 ANÁLISE E INFERÊNCIA DE ERROS

Neste capítulo, apresentaremos uma análise quantitativa percentual das respostas aos problemas dos questionários A e C dadas pelos discentes pesquisados. Utilizaremos um quadro comparativo das alternativas escolhidas, em cada problema específico que compunha cada um dos citados questionários, com o objetivo de conjecturarmos sobre os porquês de alguns erros cometidos pelos discentes. Para tanto, foram utilizados alguns distratores para identificarmos as possíveis deficiências relacionadas ao conhecimento da matemática elementar dos discentes. O procedimento utilizado, nessa análise, é baseado na metodologia utilizada pelo SAEB (BRASIL, 2008).

As razões que nos motivaram a proceder com a análise de erros dos problemas propostos nos questionários A e C foram que tais questionários se assemelharam na sua composição por problemas contextualizados e, também, porque precisávamos investigar se houvera desenvolvimento da aprendizagem.

Nesta pesquisa, a análise da resposta ao item foi estudada sob dois pontos de vista: como abordagem de pesquisa, procuramos identificar as deficiências dos discentes mediante a aplicação de questionários e, como metodologia de ensino, utilizamos as informações obtidas do processo anterior para retificar tais deficiências.

De acordo com o SAEB (BRASIL, 2008), a classificação do nível de complexidade de um específico problema em baixo, médio e alto é dada pelo quantitativo percentual de discentes que acertaram o problema analisado. Neste estudo analítico, usaremos o mesmo procedimento classificatório do SAEB (BRASIL, 2008).

**Quadro 3 –** Percentual de respostas às alternativas por problema específico/questionário A.

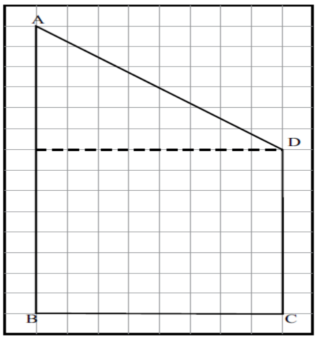
| Problema | Alternativa | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E |
| 01 | 14,81% | 24,70% | 30,86% | 17,90% | 11,73% |
| 02 | 14,81% | 27,78% | 22,22% | 7,41% | 27,78% |
| 03 | 12,34% | 21,00% | 23,45% | 13,58% | 29,63% |
| 04 | 14,81% | 18,53% | 30,86% | 13,58% | 22,22% |
| 05 | 17,28% | 27,16% | 17,90% | 5,56% | 32,10% |
| Universo de discentes pesquisados: 162 (3ª A / B / C / D). | | | | | |

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

O Quadro 3 apresenta um comparativo percentual entre todas as alternativas assinaladas em cada problema proposto no questionário A. No quadro, as células destacadas por um sombreamento, evidenciam que a alternativa encerrada por tal célula é a correta no problema específico.

Analisaremos o Problema 1A. Portanto, veja a proposta do problema a seguir:

**Problema 1A.** *Um terreno ABCD está representado em uma malha quadriculada na qual o lado de cada quadradinho corresponde a 50 metros do comprimento desse terreno.*




*O terreno ABCD tem perímetro de*

*(A) 3 km (B) 2,5 km (C) 2,0 km (D) 1,5 km (E) não sei*

O que o resultado do item indica? Que apenas 30,86% dos discentes assinalaram a alternativa (C) que é a correta, demonstrando, assim, que possuem pouco conhecimento e domínio da ferramenta teorema de Pitágoras, igualmente, uma grande possibilidade do não conhecimento da definição de perímetro de uma figura plana geométrica. O percentual de respostas à alternativa (B) foi de 24,70%, sendo a segunda opção mais escolhida entre os pesquisados, levando-nos a crer que tal escolha se deva ao fato do discente adicionar ao perímetro a linha tracejada interna, ainda que a sua inserção resultasse em 2,4 km e não nos 2,5 km indicados na referida alternativa. Assinalaram a alternativa (E) cuja inscrição é “não sei” 11,73% dos discentes, indicando que os mesmos se julgaram incapazes de resolver o problema ou não entenderam o que o problema solicitara.

Analisaremos, agora, o Problema 2A. Portanto, veja o texto desse problema a seguir:

**Problema 2A.** *Um determinado terreno T pode ser decomposto em dois outros terrenos de formatos, respectivamente, iguais a um triângulo equilátero e a um triângulo retângulo. Sendo que um dos lados do triângulo equilátero é também a hipotenusa do triângulo retângulo. Se os catetos do triângulo retângulo medem 9 m e 12 m, então determine o perímetro do terreno T.*

*(A) 66 m (B) 51 m (C) 45 m (D) $(2\sqrt{42} + 21)$ m (E) não sei*

O que o resultado do item indica? Que a alternativa (B) foi escolhida por somente 27,78% dos discentes os quais acertaram o problema, demonstrando, assim, que o grupo pesquisado apresentou dificuldades em vários aspectos do conhecimento matemático elementar. É possível que a maior dificuldade do discente, nesse problema, tenha sido tentar esboçar uma figura representativa do contexto apresentado, visto que o mesmo deveria fazer uma composição de figuras e não uma decomposição como proposto no problema. Pois, para aquele que se propõe resolver o problema, o desenho a ser rascunhado é de uma composição de dois triângulos, sendo um deles equilátero e o outro retângulo. Sendo provável que isso tenha confundido o discente, uma vez que o texto do problema parte de uma constatação hipotética – Um determinado terreno T pode ser decomposto em dois outros terrenos [...] –, o que sugere que já temos uma figura, imaginariamente, pronta para ser decomposta em duas outras. Uma curiosidade no texto do problema é que os dois triângulos mencionados – equilátero e retângulo – não seguem o mesmo critério de classificação, pois o primeiro está classificado quanto às medidas dos seus lados e o segundo, quanto às medidas dos seus ângulos. Sendo possível e aceitável tal construção textual, sem prejuízo para o entendimento do problema, visto que um triângulo equilátero (três lados de mesma medida) jamais pode ser retângulo, pois para que um triângulo seja retângulo, a medida de um dos seus lados deverá ser maior que a medida dos outros dois.

O percentual dos que escolheram a alternativa (A) foi de 14,81% o que nos leva a conjecturarmos que o grupo de discentes que assinalou essa alternativa, provavelmente, conheça e domine o teorema de Pitágoras, utilizando-o como ferramenta necessária para solucionar o problema proposto. Porém, é possível que o erro cometido pelo referido grupo se assemelhe ao do problema anterior, em que um segmento de reta interno à figura fora considerado, também, como um dos seus lados. Sabemos que na construção da figura ilustrativa do problema há um segmento de reta interno que é ao mesmo tempo a hipotenusa do triângulo retângulo e um dos lados do triângulo equilátero. E para que o discente chegasse à resposta 66 m haveria a necessidade da adição desse segmento de reta interno à conta do perímetro do hipotético terreno.

Outro dado importante que podemos observar no quadro é que o percentual dos discentes pesquisados que assinalaram a alternativa (E) foi de 27,78% que é o mesmo percentual do grupo pesquisado que acertou o problema proposto. E isso significa que o mesmo quantitativo de discentes que acertou o problema, também, revelou não possuir conhecimentos matemáticos necessários para o enfrentamento e domínio do dado problema, pois escolheram a alternativa cuja inscrição é “não sei”. Logo, como na tentativa de solucionar esse problema apenas 27,78% dos pesquisados o acertaram, classificamos tal problema como sendo de média complexidade para o referido grupo que cursa a 3ª série do Ensino Médio.

Agora, procederemos à análise do Problema 3A. Veja o texto do problema proposto a seguir:

**Problema 3A.** *Um professor solicitou aos seus alunos que determinassem o perímetro de um triângulo retângulo cujas medidas de seus lados são $\sqrt{7}$ cm, x cm e (x + 1) cm. A única informação dada pelo professor foi que os lados que formam o ângulo de 90° são $\sqrt{7}$ cm e x cm. Que resposta os alunos devem encontrar para acertar o problema?*

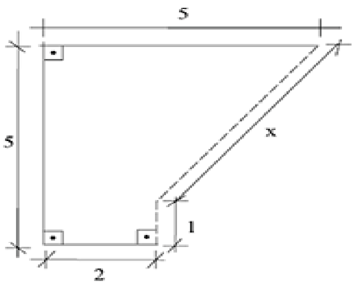
*(A) $7\sqrt{7}$ cm   (B) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$cm   (C) (7 + $\sqrt{7}$ ) cm   (D) (3 + $\sqrt{7}$) cm    (E) não sei*

O que o resultado do item indica? Que apenas 23,45% dos discentes pesquisados acertaram o problema, assinalando a alternativa (C). O que nos faz presumir tratar-se de um problema de média complexidade para o grupo pesquisado. Percebemos no problema proposto uma contextualização bastante elementar, em que é recorrente o cálculo do perímetro de uma figura plana geométrica. Dos 76,55% dos discentes pesquisados que erraram o problema ou se abstiveram de resolvê-lo por não possuírem qualquer ideia de como fazê-lo, é provável que muitos nem ao menos conhecessem o teorema de Pitágoras e de que tal ferramenta fosse capaz de solucionar o problema proposto. Também, é possível conjecturarmos que 12,34% dos pesquisados que assinalaram o item (A) ainda não dominam as operações fundamentais com números reais, uma vez que, de posse das medidas dos lados do triângulo, cometeram o seguinte erro ao somar: 3 + 4 + $\sqrt{7}$ = 7 + $\sqrt{7}$ = $7\sqrt{7}$ m. Portanto, errando o problema.

Chamou-nos a atenção o fato desse problema ter obtido grande quantitativo de alunos, 29,63%, que assinalou a alternativa (E) cuja inscrição é “não sei”, confirmando não saber resolver o problema. Por outro lado, 21,00% dos pesquisados erraram o problema, provavelmente, por ter confundido a definição de perímetro com a de área. Pois, após ter calculado o valor da incógnita x que é igual a 3, infere-se que o discente aplicou a fórmula da área do triângulo, multiplicando o 3 pelo $\sqrt{7}$  e dividindo tal produto por 2, encontrando, assim, a alternativa (B) como suporte para o seu erro.

Agora, destacamos o Problema 4A para analisarmos o desempenho dos discentes pesquisados. Veja, a seguir, o problema proposto:

**Problema 4A.** *Uma chácara possui seu desenho de acordo com a figura abaixo. Sabendo-se que as medidas estão em hectômetro, determine o perímetro da chácara.*

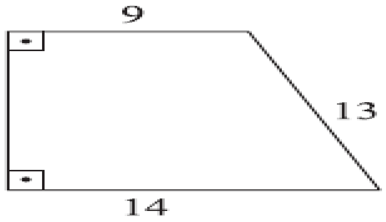



*(A) 16 hm (B) 17 hm (C) 18 hm (D) (13 + $\sqrt{14}$) hm (E) não sei*

O que o resultado do item indica? Que do quantitativo dos discentes pesquisados, apenas 30,86% acertaram o problema proposto, assinalando a alternativa (C). Portanto, consideramos como sendo um percentual baixo de acertos, dado à simplicidade do contexto e dos pré-requisitos cobrados em tal problema. Podemos verificar, no quadro comparativo de respostas às alternativas, que 22,22% dos pesquisados se auto avaliaram como incapazes de solucionar o problema, visto que assinalaram a alternativa (E). Podemos avaliar que, nesse caso, o discente não compreendeu o que leu, ou, se compreendeu, não visualizou o teorema de Pitágoras como ferramenta necessária para solucionar o referido problema, ou mesmo, tendo conhecimento do teorema, não soube como utilizá-lo. Obviamente, consideramos a mobilização do conhecimento sobre o teorema de Pitágoras como sendo o saber primário para se chegar à solução do problema, uma vez que a solicitação do perímetro da figura, denominada no texto de chácara, não passa de uma simples composição textual figurativa. Temos, por hipótese, que os 18,53% dos pesquisados que assinalaram o item (B) erraram o problema por desatenção ao não incluir o lado de medida 1 hm da figura à conta do seu perímetro. De acordo com o quadro comparativo do percentual de respostas às alternativas por problema específico, temos que 69,14% dos discentes pesquisados não souberam solucionar o problema proposto, demonstrando, assim, a existência de um expressivo quantitativo de pesquisados com inexpressivo conhecimento de matemática elementar que os credenciassem ao enfrentamento desse particular conteúdo – o teorema de Pitágoras.

Analisaremos, agora, o Problema 5A. Observe a composição textual do problema a seguir:

**Problema 5A.** *O quintal da casa de Marcos tem a forma de um trapézio retângulo, conforme a figura ilustrativa, sendo as medidas dadas em metros.*




*Ele deseja dividir essa área em duas outras áreas utilizando para isso qualquer uma das diagonais do terreno. Uma parte do quintal será para o cultivo de um jardim e a outra, para a construção de uma churrasqueira. Nessas condições, uma das áreas será maior do que a outra em*

*(A) 30 $m^2$.* *(B) 48 $m^2$.* *(C) 108 $m^2$.* *(D) 138 $m^2$.* *(E) não sei.*

O que o resultado do item indica? Que 17,28% dos discentes pesquisados acertaram o problema proposto ao assinalarem o item (A). Esse baixo quantitativo reflete que o grupo pesquisado encontrou bastantes dificuldades ao tentar resolver esse específico problema, pois se compararmos todos os índices de acertos, em cada problema proposto desse questionário A, veremos que o índice de acertos do Problema 5A foi o mais baixo de todos. É possível que a dificuldade demonstrada pelo grupo, deva-se ao fato de que o problema cobre como pré-requisito para a sua solução o cálculo da área de figura plana geométrica. O quadro, também, indica que o item (B) foi assinalado por 27,16% dos pesquisados, sendo que a provável hipótese para o cometimento desse erro tenha sido uma ligeira confusão feita pelo discente, calculando o perímetro em vez da diferença entre as referidas áreas citadas no contexto do problema. Porém, o dado que nos chamou atenção foi que 32,10% dos discentes pesquisados escolheram a alternativa (E) como resposta ao problema, reconhecendo, desta forma, não possuírem base suficiente de conhecimentos em matemática para o enfrentamento e domínio do referido problema.

Se compararmos o item (E) de todos os problemas desse questionário A, veremos que o problema que apresentou o maior índice de abstenção da tentativa de ser solucionado foi esse problema. Talvez, porque o mesmo tenha um grau de dificuldade um pouco maior que os demais, devido à apresentação de um contexto mais complexo no sentido de que envolve definições e pré-requisitos menos comuns que os outros problemas já analisados.

Agora, apresentaremos o quadro comparativo percentual de respostas às alternativas por problema específico do questionário C. Esse questionário, tal qual o questionário A, fora composto por cinco problemas contextualizados bastante elementares. Em nosso estudo analítico, usaremos o mesmo procedimento classificatório do SAEB (BRASIL, 2008) que é classificar o nível de complexidade de um dado problema em baixo, médio ou alto, sendo que tal classificação é dada pelo quantitativo percentual de discentes que acertaram o problema analisado. No quadro, aparecem algumas células destacadas por um sombreamento, evidenciando que tais células encerram a alternativa correta no problema específico.

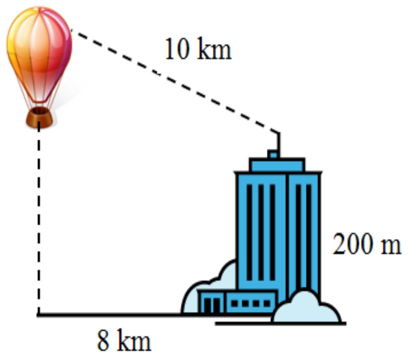
**Quadro 4 –** Percentual de respostas às alternativas por problema específico/questionário C.

| Problema | Alternativa | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E |
| 01 | 12,57% | 10,18% | 16,77% | 25,75% | 34,73% |
| 02 | 16,17% | 8,98% | 46,11% | 18,56% | 10,18% |
| 03 | 37,72% | 10,78% | 23,35% | 23,95% | 4,20% |
| 04 | 17,96% | 42,51% | 20,96% | 5,40% | 13,17% |
| 05 | 47,90% | 14,97% | 1,79% | 29,94% | 5,40% |
| Universo de discentes pesquisados: 167 (3ª A / B / C / D). | | | | | |

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Analisaremos o Problema 1C. Veja a problema proposto a seguir:

**Problema 1C.** *Qual deve ser a altitude do balão para que sua distância ao topo do prédio seja de 10 km?*




*(A) 9 km (B) 8,2 km (C) 8 km (D) 6,2 km (E) 6 km*

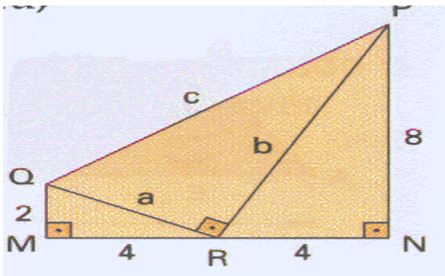
O que o resultado do item indica? Que o quantitativo de 25,75% dos discentes pesquisados acertou o problema, assinalando o item (D). Portanto, para o referido grupo foi um problema de média dificuldade. Uma possível motivação, para esse tímido índice de acertos, talvez tenha sido o desconhecimento do significado do vocábulo altitude, uma vez que é um problema bastante objetivo na sua solicitação. Avaliamos tal resultado como surpreendente, visto que, quando da resolução desse questionário, o discente já havia passado por um processo de intervenção didático-metodológica no qual foi abordado, exaustivamente, o teorema de Pitágoras como ferramenta necessária para solucionar problemas com características assemelhadas as desse problema.

A alternativa (E) foi escolhida por 34,73% dos pesquisados o que representa um quantitativo significativo de erros cometidos no problema, ocasionados, provavelmente, por deficiência de interpretação do que está sendo solicitado pelo mesmo. De acordo com a opção feita pelo item (E), o discente entende ser necessário o uso do teorema de Pitágoras e até o utiliza, porém, não acrescenta a medida da altura do edifício à conta da altitude do balão. Outro dado que podemos inferir do quadro é que 74,25% dos pesquisados erraram tão elementar problema com contextualização bastante simples e objetiva.

Portanto, o cálculo que soluciona o problema proposto é: $x^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 = 100 - 64 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6\ km$. Como $6\ km = 6\ 000\ m$, temos que $6\ 000\ m + 200\ m = 6\ 200\ m = 6{,}2\ km$.

Agora, analisaremos o Problema 2C. Veja a proposta do problema a seguir:

**Problema 2C.** *Pitágoras possui um terreno, conforme a figura dada. O mesmo, desejando fazer o plantio de uma horta com três culturas diferentes, dividiu o terreno em três partes as quais são triângulos retângulos. Sabendo-se que as dimensões do terreno são dadas em metros, determine o perímetro do terreno de Pitágoras.*




*(A) $40\sqrt{5}$ m (B) 40 m (C) 28 m (D) $(28 + 6\sqrt{5})$ m (E) $(28 + 12\sqrt{5})$ m*

O que o resultado do item indica? Que 46,11% dos discentes pesquisados acertaram o problema, assinalando o item (C), demonstrando ser um problema de média complexidade para o grupo pesquisado. Para que esse problema fosse solucionado, o discente deveria aplicar a relação de Pitágoras por três vezes e após determinar a medida do segmento PQ, isto é, do lado c do quadrilátero, então somaria os quatro lados do quadrilátero MNPQ, calculando, assim, o seu perímetro. De acordo com o quadro comparativo apresentado, podemos constatar que 18,56% do quantitativo dos pesquisados escolheram a alternativa (D) como resposta, errando, portanto, o problema. É provável que o referido grupo tenha cometido o erro de adicionar à conta do perímetro os valores das medidas dos dois segmentos internos (QR e PR) à figura, incorrendo, assim, no erro recorrente do questionário A. Ainda, é possível supormos que 8,98% dos pesquisados tenham assinalado a alternativa (B) por terem feito uma ligeira confusão entre as definições de perímetro e área, pois se calcularmos a área do quadrilátero, que na realidade é um trapézio, iremos encontrar 40 m². Acreditamos ter sido uma ligeira confusão, pelo fato do discente ter encontrado a mesma grandeza, porém em unidades de medidas diferentes.

Uma sugestão de cálculo para solucionar o problema é dada a seguir: cálculo da medida do segmento QR: $a^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$; cálculo da medida do segmento PR: $b^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow b^2 = 80 \Rightarrow b = 4\sqrt{5}$; cálculo da medida do segmento PQ: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 20 + 80 \Rightarrow c = \sqrt{100} = 10$. Portanto, o perímetro $2p = 4 + 4 + 8 + 10 + 2 = 28\ m$.

Vejamos, agora, a análise do Problema 3C.

**Problema 3C.** *Para ir de sua casa até o ponto de ônibus, uma pessoa anda 120 m em linha reta até uma esquina, dobra à esquerda numa rua perpendicular e anda mais 160 m. Mas, se trocar de caminho, ela pode seguir por um terreno baldio que separa sua casa do ponto de ônibus e fazer esse trajeto em linha reta. Quantos metros ela andará a menos se for da sua casa até o ponto de ônibus, optando por passar pelo terreno baldio?*

*(A) 80 m (B) 60 m (C) 40 m (D) 200 m (E) 480 m*

O que o resultado do item indica? Que 37,72% dos discentes pesquisados assinalaram corretamente o item (A), demonstrando que o problema fora de média complexidade para o referido grupo de discentes. Temos que 62,28% dos pesquisados erraram o problema ao assinalarem outros itens, o que representa um significativo número de discentes que provavelmente ainda não desenvolveram as habilidades de leitura, conhecimento e/ou domínio do teorema de Pitágoras. Refletindo melhor sobre o resultado do item, conjecturamos que os discentes encontraram dificuldades em solucionar o problema, fundamentalmente, pela existência da sua elementar contextualização.

A hipótese que nos ocorreu a respeito dos 23,95% dos pesquisados que assinalaram o item (D) é que compreenderam, parcialmente, a proposta do problema ao aplicarem o teorema de Pitágoras como ferramenta necessária para solucioná-lo. Porém, não finalizaram adequadamente a solicitação do problema que é o cálculo da vantagem de andar a menos, caso a pessoa escolhesse a segunda opção de trajeto. Os 4,20% dos pesquisados que assinalam o item (E) como resposta, possivelmente, tenham calculado o valor do perímetro do triângulo retângulo originado pelo contexto do problema.

Veja, a seguir, uma sugestão para se resolver o problema:

A distância da casa até a esquina é um cateto: 120 m; a distância da esquina até o ponto de ônibus é o outro cateto: 160 m; a distância da casa até o ponto de ônibus em linha reta é a hipotenusa: x m. Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras, temos: $x^2 = 120^2 + 160^2 \Rightarrow x^2 = 14\,400 + 25\,600 \Rightarrow x^2 = 40\,000 \Rightarrow x = 200$. Logo, concluindo o cálculo, temos que: $120\ m + 160\ m = 280\ m - 200\ m = 80\ m$ que é a resposta do problema.

Analisaremos o Problema 4C. Veja a proposta do problema a seguir:

**Problema 4C.** *Um professor possui uma turma composta por 30 alunos. O mesmo lançou o seguinte desafio para a turma: determinar a área de um triângulo retângulo cujos lados medem respectivamente (x + 3) cm, (x + 7) cm e (x + 11) cm. Apenas três alunos acertaram a resposta de tal desafio. Portanto, qual foi a resposta encontrada por eles?*

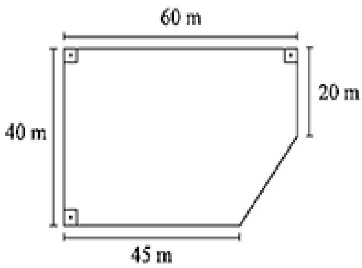
*(A) 48 cm*$^2$ *(B) 96 cm*$^2$ *(C) 192 cm*$^2$ *(D) 1 920 cm*$^2$ *(E) 30*$\sqrt{63}$ *cm*$^2$

O que o resultado do item indica? Que, do grupo pesquisado, 42,51% acertaram o problema ao assinalarem o item (B), demonstrando que o problema foi de média complexidade para o referido grupo. As habilidades necessárias para solucionar o problema são: o conhecer e saber aplicar o teorema de Pitágoras; o domínio do cálculo algébrico no desenvolvimento de produtos notáveis e; o domínio da definição de área de figuras planas geométricas. Logo, o grupo de pesquisados que escolheu a alternativa (B) demonstrou possuir domínio sobre tais habilidades.

É provável que os discentes pesquisados que assinalaram o item (A) tenham confundido as definições de área e perímetro. Pois, apesar desse grupo de 17,96% de discentes possuir conhecimento e domínio da ferramenta teorema de Pitágoras, tal grupo calculou o perímetro em vez da área do triângulo retângulo solicitada no problema. Observemos uma sugestão de cálculo que soluciona o problema proposto: aplicando a relação de Pitágoras aos três lados do triângulo, temos: $(x+11)^2 = (x+3)^2 + (x+7)^2 \Rightarrow x^2 + 22x + 121 = x^2 + 6x + 9 + x^2 + 14x + 49 \Rightarrow x^2 - 2x - 63 = 0 \Rightarrow x' = -7\ ou\ x'' = 9$. Porém, de acordo com as condições de existência do triângulo, o único valor de $x$ que satisfaz ao problema é $x = 9$. Logo, as medidas dos lados do triângulo são: $12\ cm, 16\ cm\ e\ 20\ cm$. Como o triângulo é retângulo, então podemos calcular a sua área multiplicando os dois catetos e dividindo por 2, isto é, A = $\frac{12\ .\ 16}{2}$ = $96\ cm^2$.

Agora, analisaremos o Problema 5C.

**Problema 5C.** *A figura representa uma praça pública que, por questões de segurança, deverá receber grade de proteção em todo o seu perímetro, o que corresponde a:*




*(A) 190 m (B) 180 m (C) 170 m (D) 165 m (E) 155 m*

O que o resultado do item indica? Que o problema fora de média complexidade para o grupo pesquisado, visto que 47,90% dos discentes acertaram o problema ao assinalarem o item (A). É um problema que solicita o cálculo do perímetro de uma figura pentagonal que no contexto é denominada de praça pública. E para o cálculo desse perímetro é necessário determinar, primeiramente, a medida do único lado que está faltando, o que somente será possível mediante a utilização do teorema de Pitágoras. O item (D) foi escolhido por 29,94% dos discentes pesquisados. Nesse caso, a hipótese é que esse grupo tenha considerado como perímetro, apenas, a soma das medidas dos lados com indicação numérica preexiste. Portanto, concluímos que a definição de perímetro ainda não é uma habilidade desenvolvida para esse específico grupo. De acordo com o quadro comparativo, podemos verificar que 52,10% dos pesquisados erraram o problema, o que representa um número significativo de erros para um problema bastante elementar pela objetividade da sua solicitação e, também, pelos pré-requisitos cobrados para a sua resolução.

Veja uma sugestão de cálculo para se determinar o perímetro da figura do problema proposto: inicialmente, prolongamos externamente os lados de medidas $45\ m$ e $20\ m$ de modo que a intersecção desses prolongamentos origine o vértice do ângulo reto do triângulo retângulo de catetos iguais a $(60 - 45)m$ e $(40 - 20)m$, sendo a hipotenusa o lado do pentágono que se quer calcular. Portanto, sendo $x$ a hipotenusa, temos que: $x^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow x^2 = 225 + 400 \Rightarrow x^2 = 625 \Rightarrow x = 25.$ Então o perímetro é $2p = 20 + 60 + 40 + 45 + 25 = 190\ m.$

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de pesquisa, buscamos avaliar o nível de conhecimento e compreensão que um grupo particular de discentes da 3ª série do Ensino Médio possuía a respeito do teorema de Pitágoras como ferramenta na resolução de situações-problema. Então, na consecução desse objetivo elaboramos uma metodologia de pesquisa em que os instrumentos de coletas de dados foram questionários compostos por questões de múltipla-escolha. Sendo que dois dos questionários aplicados contemplavam problemas contextualizados – primeiro e terceiro questionários –, e o outro contemplava questões bastante elementares, pois foi não contextualizado, tornando o comando ou solicitação do cálculo a determinar bastante direto.

Analisamos o grau de conhecimento do grupo de discentes a respeito do tema proposto em cada versão de questionário e, também, mediante o emprego de distratores, avaliamos as possíveis deficiências na aprendizagem da etapa anterior da escolarização, principalmente, no Ensino Fundamental.

O baixo rendimento nas duas versões de questionários nos mostrou que o resultado havia sido insatisfatório. Confirmamos, então, as previstas aplicações da intervenção didático-metodológica e de um terceiro questionário com posterior verificação dos índices de desempenho das turmas.

Medido o desempenho geral dos discentes nesse terceiro questionário, avaliamos que houvera uma tímida melhora da aprendizagem do conteúdo tema da pesquisa e, também, de alguns fundamentos da Matemática elementar, visto que o desempenho do grupo no primeiro questionário foi de 25,82% de aproveitamento, enquanto que no terceiro questionário, aplicado após o processo de intervenção didático-metodológica, foi de 37,97% de aproveitamento. Sendo que esses dados traduzem a realidade de todo o grupo submetido à pesquisa.

Portanto, avaliamos como válido todo o processo, desde a pesquisa para a investigação do nível de conhecimento do grupo de discentes submetidos ao estudo proposto até à verificação dos resultados após o processo de intervenção didático-metodológica, uma vez que nos forneceu informações, ainda que em parte, de como tão relevante conteúdo está sendo tratado por algumas instituições escolares de nosso país. Portanto, esperamos ter contribuído com o meio acadêmico e educacional da nossa estimada nação quando buscamos informações que possam nos fazer refletir a respeito de como estamos conduzindo os destinos de uma Ciência tão importante quanto a Matemática, visto que podemos perceber que tal tema pesquisado é apenas um exemplo dentre vários outros importantes temas dentro da disciplina matemática que podem ser tratados – e que possivelmente ainda o serão – por um trabalho de pesquisa cuja função, nesse caso específico, é nos alertar sobre o pouquíssimo conhecimento que um elevado percentual de discentes possui sobre conteúdos essenciais para o desenvolvimento de estudos futuros.

Logo, se não tivermos uma política educacional de qualidade que prime por uma aprendizagem sólida no Ensino Fundamental I e II, então teremos sérios problemas – difíceis de serem resolvidos – no Ensino Médio e, consequentemente, no Ensino Superior (graduação).

Diante de tudo que aprendemos com esse gratificante estudo, destacamos o gosto pela descoberta que nos conduz à aprendizagem por meio da pesquisa. Alguns assuntos citados nesse trabalho de pesquisa são, ao nosso vê, dignos de estudos futuros para publicações de outros trabalhos os quais ainda pretendemos publicá-los. Podemos citar como sugestões de trabalhos futuros a pesquisa sobre os seguintes temas: analisar como está sendo ensinada a Geometria plana no Ensino Fundamental nas nossas instituições escolares ao mesmo tempo em que se pode sugerir uma metodologia mais dinâmica e concreta para o seu ensino; investigar como melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem do teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental por se constituir em uma ferramenta indispensável à compreensão de diversos conteúdos matemáticos; e pesquisar sobre as principais dificuldades enfrentadas pelos discentes em relação à matemática básica de Ensino Fundamental e Médio nos períodos iniciais dos cursos de graduação em Engenharia.

Portanto, terminada essa longa, porém gratificante, jornada de trabalho, temos a certeza do dever cumprido e de termos contribuído com a melhoria da educação do nosso país.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORASI,R. *Using errors as springboards for the learning of mathematics; an introduction.* ***Focus on Learning Problems in Mathematics***, v.7, n. 3-4, p.1-14, 1985.

_______. ***Reconceiving mathematics Instructions:*** *a Focus on Erros*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BORASI, R.; MICHAELSEN, J. Discovering the difference between fractions and ratios. ***Focus on Learning Problems in Mathematics***, v. 7, n. 3-4, p. 53-63, 1985.

BRASIL. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC, SEMTEC, 2002. 144 p. (**PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**)

_______. Ciência da natureza, matemática e suas tecnologias. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio** / Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999. 112 p.

_______. Ciência da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. 135 p. (**Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2**)

_______. Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação. SAEB: ensino médio. **Matrizes de referência, tópicos e descritores**. Brasília: MEC, SEB, INEP, 2008. 127 p.

_______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 174 p.

_______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998. 148 p.

CARVALHO, D. L. de. **Metodologia do ensino da matemática**. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

CORREIA, C. E. F. **Matemática, análise de erros e formação continuada de professores polivalentes**. São Paulo: Porto de Ideias, 2010.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 2. ed.; 1. reimp. – Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto & aplicações. v.3, 2 ed. São Paulo: Ática, 2013.

DE LA TORRE, S. et alli. *Errores y currículo: tratamiento didáctico de los erroresem La enseñanza*. Barcelona: PPU, 1994.

FRANCHI, Anna. “Dificuldades no ensino da adição e subtração: resolução de problemas aditivos.” In: Revista ANDE n. 12, São Paulo: Cortez, 1987.

FREITAS, R. C. de O. **Um ambiente para operações virtuais com o material dourado** / - Vitória-ES. 2004. Disponível em: <http://ronyfreitas.tripod.com/produção/dissertação.pdf>. Acesso em 28 abr. 2013.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 9º ano**. Ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009. (Coleção a conquista da matemática)

KRUTETSKII, VADIM A. *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago*: The University of Chicago Press, 1976.

KURY, A. da G. **Minidicionário Gama Kury da língua portuguesa**. Organização Ubiratan Rosa. São Paulo: FTD, 2002.

LIMA et al. **Temas e problemas elementares**. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 256 p. (Coleção do Professor de Matemática; 20).

LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 2 ed. rev. Campinas-SP: Autores Associados, 2008. (Coleção Formação de Professores).

MAGINA, S.; SPINILLO, A. G. **Alguns 'mitos' sobre a educação matemática e suas consequências para o ensino fundamental**. *In:* Regina Maria Pavanello. (Org.). Matemática nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental: A pesquisa e a sala de aula. 1ª ed. São Paulo: Ed. SBEM, v. 2, p. 7-36, 2004.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT; 09).

O Teorema de Pitágoras. **Matemática. Novo Telecurso. Ensino Fundamental. Aula 55**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=lNazCZw0FtU>. Acesso em 10 set. 2015.

O Teorema de Pitágoras. **Matemática. Novo Telecurso. Ensino Médio. Aula 19**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=soUbYQCj-5Q>. Acesso em 10 set. 2015.

PINHEIRO, D. M. D. **A importância da utilização de material concreto no ensino da matemática: uma experiência no ensino de funções.** 2014. 115 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2014. Disponível em: <http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1291/2012_01080_D

ANIELA_MACEDO_DAMACENO_PINHEIRO.pdf?sequence=1 >. Acesso em 04 de mai. 2016.

Problema de distância entre dois pontos no plano. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2013/06/distancia-entre-dois-pontos-no-plano.html>. Acesso em 05 de jun. 2016.

Problemas dos Questionários. **Lista de Estudos. Teorema de Pitágoras. Colégio Pentágono**. Disponível em:
< http://pt.static.z-dn.net/files/d0a/a590ffd90fa94a4fd3078680f313cf99.doc >. Acesso em 08 set. 2015.

Problemas dos Questionários. **Noções de geometria – Área, Perímetro e Teorema de Pitágoras**. Disponível em: <http://www.profjosimar.com.br/2013/12/lista-de-exercicios-nocoes-de-geometria.html>. Acesso em: 08 set. 2015.

RIBEIRO, E. C. **Material concreto para o ensino de trigonometria.** 29 f. Monografia de Especialização – Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciência Exatas - ICEX, Belo Horizonte, 2011.

SANTOS, A. O. ; OLIVEIRA, C. R.; OLIVEIRA, G. S. **Material Concreto: Uma Estratégia Pedagógica para Trabalhar Conceitos Matemáticos nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental**. Itinerarius Reflectionis. Revista Eletrônica do Curso de Pedagogia do Campus Jataí – UFG. v. 1, n. 14, p. 1-14, 1º semestre/2013. Disponível em < file:///C:/Users/CCE/Downloads/24344 159387-1-PB.pdf >. Acesso em 04 de mai. 2016.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat:** a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Tradução de Jorge Luiz Calife. 4ª ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.

STRATHERN, P. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**. Tradução: Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora Ltda, Edição digital: abril de 2011.

TOMAZ, V. S; DAVID, M. M. M. S**. Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

WAGNER, E. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 86 .

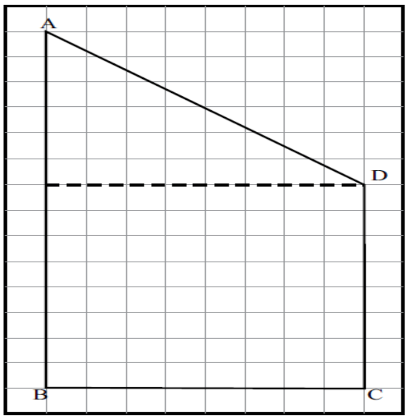
# APÊNDICE A – Questionário A (Contextualizado)

**Questionário A**

Série: Turma: Data: ___/___/_____
Aluno (a):

Problemas Propostos

① Um terreno ABCD está representado em uma malha quadriculada na qual o lado de cada quadradinho corresponde a 50 metros do comprimento desse terreno.




O terreno ABCD tem perímetro de

(A) 3 km (B) 2,5 km (C) 2,0 km
(D) 1,5 km (E) não sei

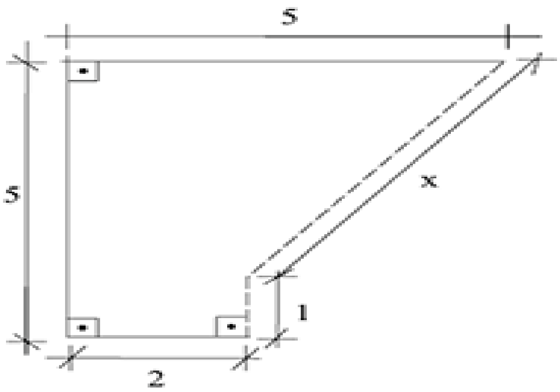
② Um determinado terreno T pode ser decomposto em dois outros terrenos de formatos respectivamente iguais a um triângulo equilátero e a um triângulo retângulo. Sendo que um dos lados do triângulo equilátero é também a hipotenusa do triângulo retângulo. Se os catetos do triângulo retângulo medem 9 m e 12 m, então determine o perímetro do terreno T.

(A) 66 m (B) 51 m (C) 45 m
(D) $(2\sqrt{42} + 21)$ m (E) não sei

③ Um professor solicitou aos seus alunos que determinassem o perímetro de um triângulo retângulo cujas medidas de seus lados são $\sqrt{7}$ cm, x cm e (x + 1) cm. A única informação dada pelo professor foi que os lados que formam o ângulo de 90° são $\sqrt{7}$ cm e x cm. Que resposta os alunos devem encontrar para acertar o problema?

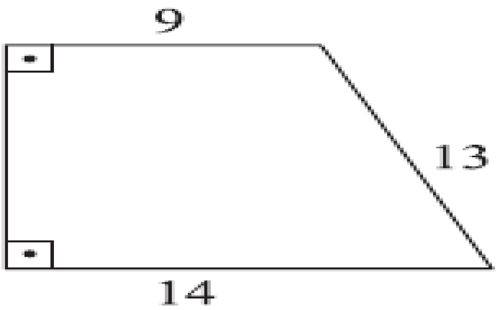
(A) $7\sqrt{7}$ cm (B) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm (C) $(7 + \sqrt{7})$ cm
(D) $(3 + \sqrt{7})$ cm (E) não sei

④ Uma chácara possui seu desenho de acordo com a figura abaixo. Sabendo-se que as medidas estão em hectômetro, determine o perímetro da chácara.




(A) 16 hm (D) $(13 + \sqrt{14})$ hm
(B) 17 hm (E) não sei
(C) 18 hm

⑤ O quintal da casa de Marcos tem a forma de um trapézio retângulo, conforme a figura ilustrativa, sendo as medidas dadas em metros.




Ele deseja dividir essa área em duas outras áreas utilizando para isso qualquer uma das diagonais do terreno. Uma parte do quintal será para o cultivo de um jardim e a outra, para a construção de uma churrasqueira. Nessas condições, uma das áreas será maior do que a outra em

(A) 30 $m^2$. (B) 48 $m^2$. (C) 108 $m^2$.

(D) 138 $m^2$. (E) não sei.

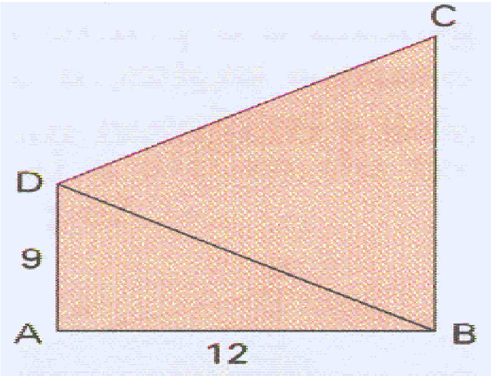
# APÊNDICE B – Questionário B (Não Contextualizado)

**Questionário B**

Série: Turma: Data: ___/___/_____
Aluno (a):

Problemas Propostos

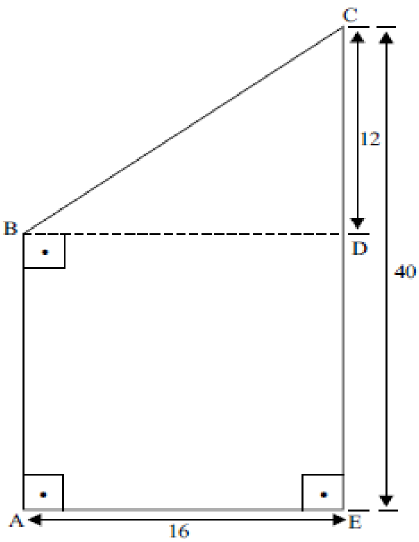
① Na figura, o triângulo BCD é equilátero e o ângulo A é reto.




Calculando o perímetro do quadrilátero ABCD, obtemos:

(A) 66 m (B) 51 m (C) 45 m
(D) $(2\sqrt{42} + 21)$ m (E) não sei

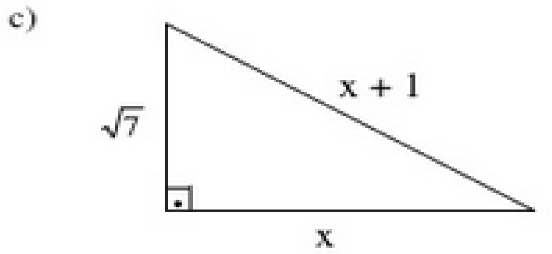
② Determine o perímetro da figura em cm.




(A) 64 cm (B) 104 cm (C) 116 cm

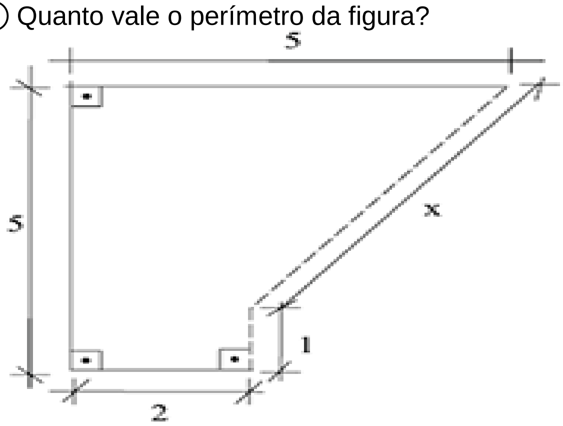
(D) 352 cm (E) não sei

③ Determine a área do triângulo em $cm^2$.



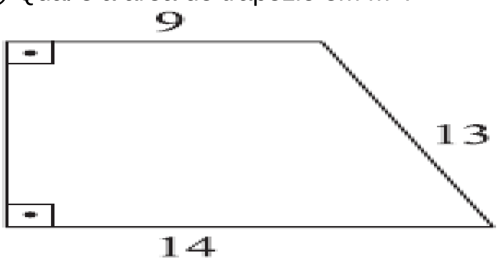

(A) $7\sqrt{7}$ $cm^2$
(B) $(3 + \sqrt{7})$ $cm^2$
(C) $(7 + \sqrt{7})$ $cm^2$
(D) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ $cm^2$
(E) não sei

④ Quanto vale o perímetro da figura?




(A) $(13 + \sqrt{14})$
(B) 18
(C) 17
(D) 16
(E) não sei

⑤ Qual é a área do trapézio em $m^2$?




(A) 138 $m^2$ (B) 108 $m^2$ (C) 48 $m^2$
(D) 30 $m^2$ (E) não sei

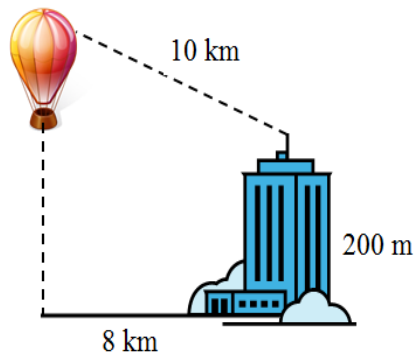
# APÊNDICE C – Questionário C (Contextualizado)

**Questionário C**

Série: Turma: Data: ___/___/_____
Aluno (a):

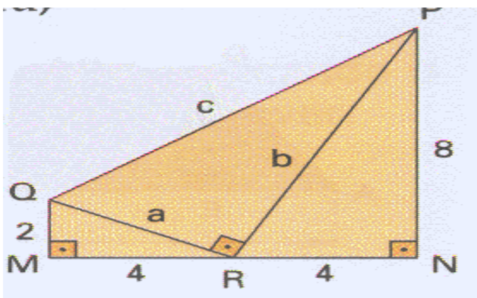
Problemas Propostos

① Qual deve ser a altitude do balão para que sua distância ao topo do prédio seja de 10 km?




(A) 9 km (B) 8,2 km (C) 8 km
(D) 6,2 km (E) 6 km

② Pitágoras possui um terreno, conforme a figura dada. O mesmo, desejando fazer o plantio de uma horta com três culturas diferentes, dividiu o terreno em três partes as quais são triângulos retângulos. Sabendo-se que as dimensões do terreno são dadas em metros, determine o perímetro do terreno de Pitágoras.



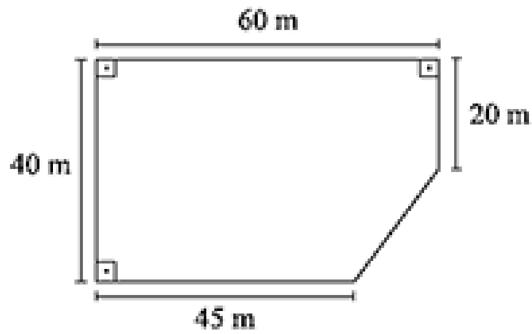

(A) $40\sqrt{5}$ m (B) 40 m (C) 28 m
(D) $(28 + 6\sqrt{5})$ m (E) $(28 + 12\sqrt{5})$ m

③ Para ir de sua casa até o ponto de ônibus, uma pessoa anda 120 m em linha reta até uma esquina, dobra à esquerda numa rua perpendicular e anda mais 160 m. Mas, se trocar de caminho, ela pode seguir por um terreno baldio que separa sua casa do ponto de ônibus e fazer esse trajeto em linha reta. Quantos metros ela andará a menos se for da sua casa até o ponto de ônibus, optando por passar pelo terreno baldio?

(A) 80 m (B) 60 m (C) 40 m
(D) 200 m (E) 480 m

④Um professor possui uma turma composta por 30 alunos. O mesmo lançou o seguinte desafio para a turma: determinar a área de um triângulo retângulo cujos lados medem respectivamente (x + 3) cm, (x + 7) cm e (x + 11) cm. Apenas três alunos acertaram a resposta de tal desafio. Portanto, qual foi a resposta encontrada por eles?
(A) 48 $cm^2$ (B) 96 $cm^2$ (C) 192 $cm^2$
(D) 1 920 $cm^2$ (E) $30\sqrt{63}$ $cm^2$

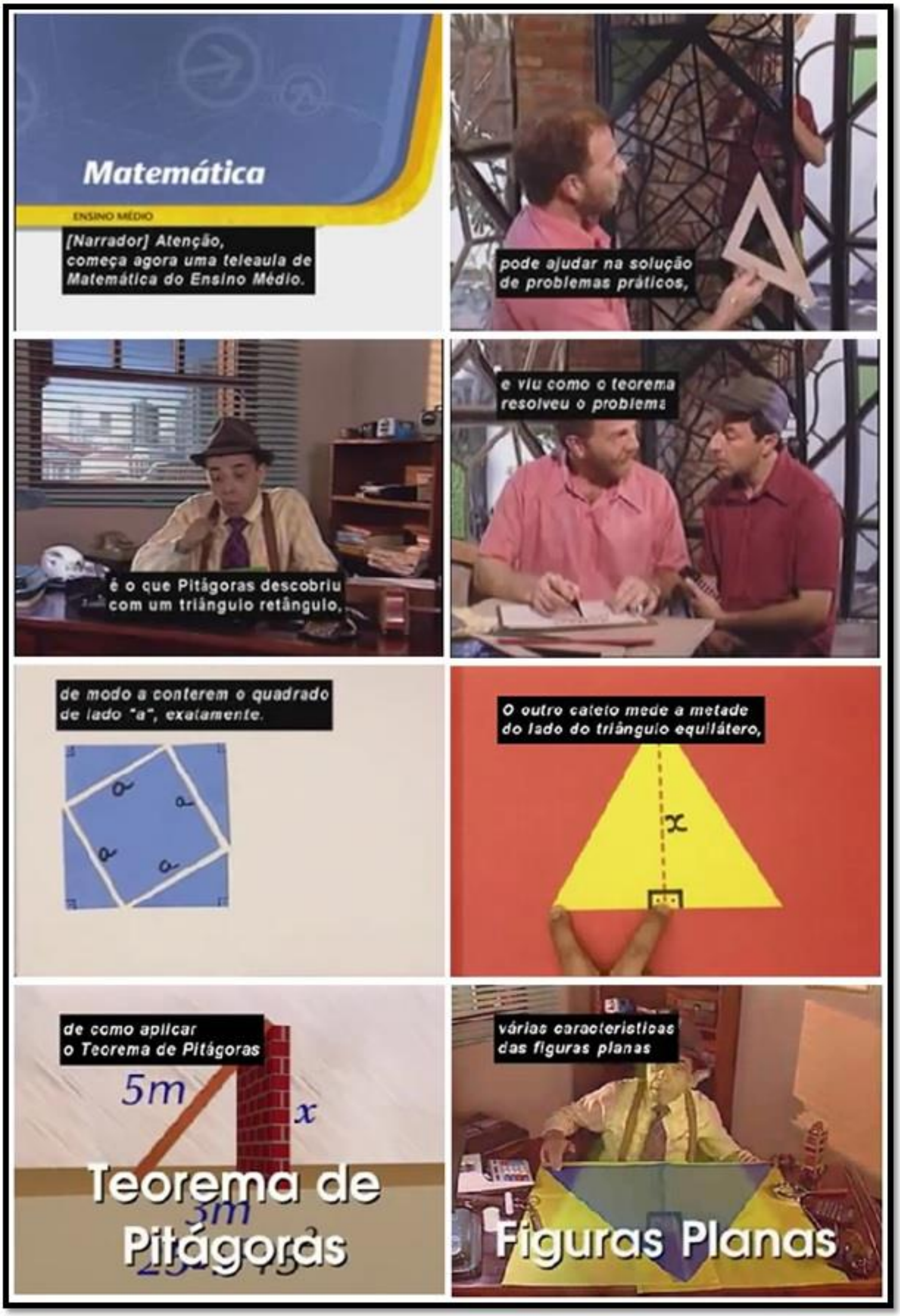
⑤ A figura representa uma praça pública que, por questões de segurança, deverá receber grade de proteção em todo o seu perímetro, o que corresponde a:



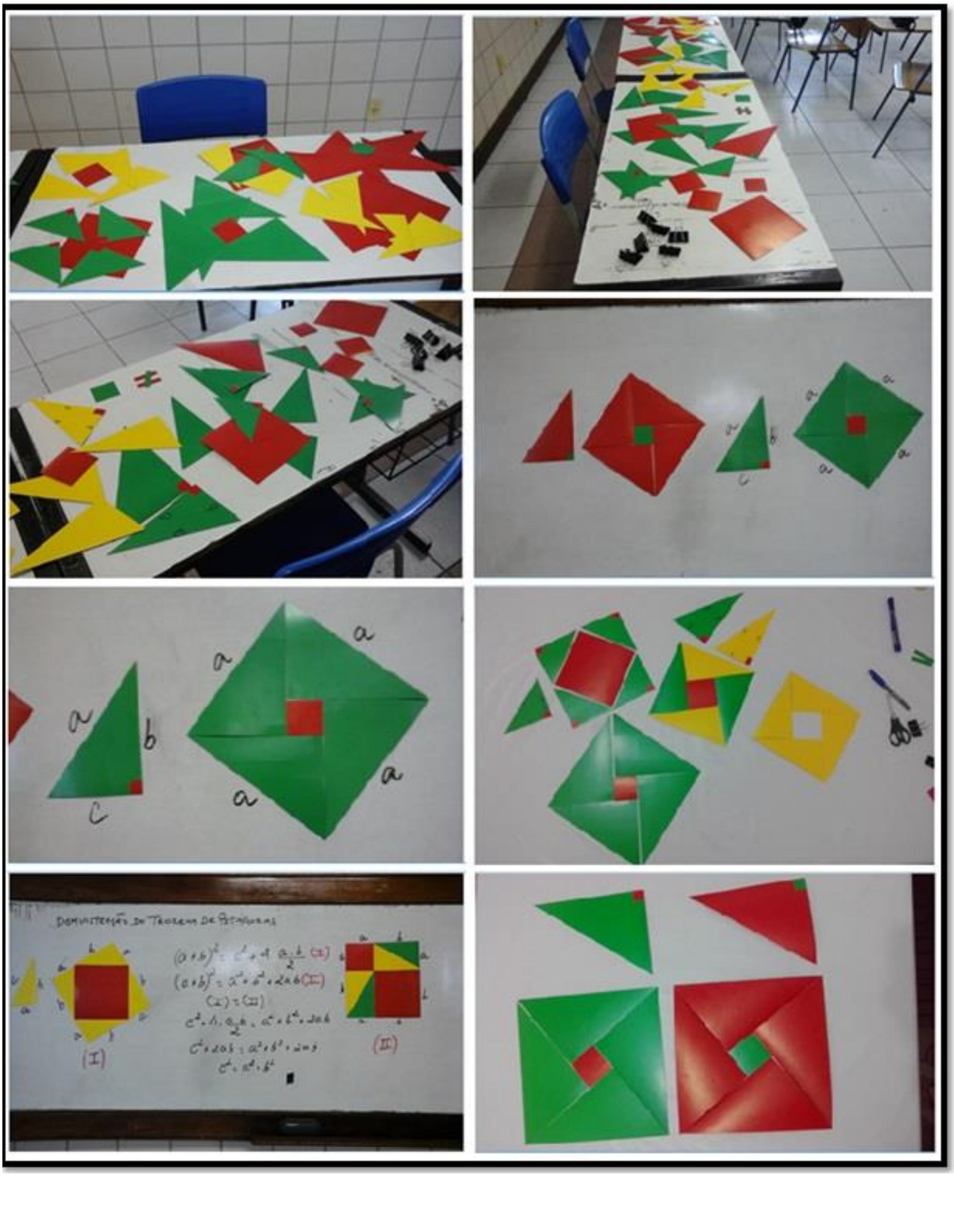

(A) 190 m. (B) 180 m. (C) 170 m.
(D) 165 m. (E) 155 m.

Bom Teste!

## APÊNDICE D – Algumas fotos da metodologia com o uso das TIC's



# APÊNDICE E – Algumas fotos da metodologia com o uso de material concreto



# APÊNDICE F – Algumas fotos da metodologia utilizando-se a resolução de problemas: análise de erro