Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação
Matemática em Rede Nacional
Mestrado Profissional - PROFMAT

Paulo Sérgio Ferreira Braúna

O ENEM como Objeto Motivador ao Ensino e Aprendizagem de Derivada no Ensino Médio

Campo Grande - MS
2016

Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação
Matemática em Rede Nacional
Mestrado Profissional - PROFMAT

Paulo Sérgio Ferreira Braúna

O ENEM como Objeto Motivador ao Ensino e Aprendizagem de Derivada no Ensino Médio

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lilian Milena Ramos Carvalho

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Mato grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

Campo Grande - MS
2016

“*Há um ditado que ensina: “o gênio é uma grande paciência”; sem pretender ser gênio, teimei em ser um grande paciente. As invenções são, sobretudo, o resultado de um trabalho teimoso, em que não deve haver lugar para o esmorecimento”.*

(Alberto Santos Dumont)

O ENEM como Objeto Motivador ao Ensino e Aprendizagem de Derivada no Ensino Médio

Paulo Sérgio Ferreira Braúna

Dissertação apresentada ao Programa de Pos-Graduação mestrado profissional em matemática em Rede Nacional do Instituto de Matematica da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dra. Lilian Milena Ramos Carvalho
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Profª. Drª. Rúbia Mara de Oliveira Santos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Profª. Drª. Selma Helena Marchiori Hashimoto
Universidade Federal da Grande Dourados

Profª. Drª. Irene Magalhães Craveiro - Suplente
Universidade Federal da Grande Dourados

Campo Grande - MS, 06 de Outubro de 2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela graça e paz necessárias para superar as dificuldades que se apresentaram durante o caminho percorrido até aqui.

Aos meus pais José Maciel Braúna e Francisca Ferreira Braúna, e aos meus seis irmãos, Jéfferson, Francisco José, Jairo, Jânia, Jaucy e Jorge, pela educação, pelos exemplos, pelos ensinamentos, pelos princípios, pela luta e por serem cada um em seu devido momento, os meus verdadeiros heróis.

Ao Sr. Cmt da Base aérea de Campo Grande nos anos de 2014 e 2015, Coronel Aviador Potiguara Vieira Campos, que investiu no cidadão para ter um melhor militar.

À minha esposa e filhos por terem entendido os momentos de ostracismo e ausência.

E à minha orientadora Profª. Drª. Lilian Milena Ramos Carvalho. Sempre disposta a orientar não tendo por caro seu tempo, estando sempre a disposição sem em momento algum perder o vigor nas exigências para que este trabalho acontecesse da melhor maneira.

RESUMO

Este trabalho teve origem a partir de relatos de estudantes de nível médio sobre suas dificuldades em solucionar provas de matemática dos vestibulares pelo Brasil, em especial o Exame Nacional do Ensino Médio-ENEM. Visando diminuir essas dificuldades, objetiva-se elaborar um material que ajude e incentive professores de matemática do ensino médio a ensinar conceitos básicos de uma ferramenta interdisciplinar que ajudará o aluno a solucionar grande parte dos exercícios abordados nesses exames que constam nos programas de Matemática e Física, a derivada. Este conceito é exposto de forma a evitar excessos de nomenclaturas, utilizando as noções básicas de limite somente quando necessário e de forma intuitiva, abordando a derivada sob um ponto de vista prático com a finalidade de facilitar sua compreensão neste nível de ensino.

Palavras-chave: *Diferenciação, Derivação, Ensino-Médio, ENEM, Vestibular.*

Abstract

This work originated from high school students reports about their difficulties in solving math tests of vestibular in Brazil, especially the National Examination of Secondary Education-ENEM. Aiming to reduce these difficulties, the objective is to develop a material to help and encourage high school math teachers to teach basic concepts of an interdisciplinary tool that will help the student to solve most of the exercises discussed in these tests contained in the mathematics and physics programs the derivative. This concept is defined in order to avoid excesses of nomenclatures using the boundary basics only when necessary and intuitively, addressing derived from a practical point of view in order to facilitate their understanding of this level of education.

Keywords: *Differentiation , Derivation , High School, ENEM , Entrance Exam.*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Enfrentar o vestibular tem se tornado um divisor de águas na vida dos jovens estudantes brasileiros. E o advento do ENEM tem contribuído para o aumento desta tensão nos últimos anos.

Colégios e cursinhos tem demandado um enorme esforço para passar o conteúdo necessário para que o aluno atinja sua meta e consiga alcançar a vaga no curso tão desejado.

Uma parte significativa das questões propostas em vestibular e no ENEM podem ser resolvidas utilizando o conceito de derivada. Neste trabalho, é mostrado não só a importância do conceito de derivada como uma ferramenta fundamental para a solução de várias questões dos vestibulares e do ENEM, como também a forma como este conceito deve ser introduzido, de forma a facilitar sua compreensão pelos alunos do ensino médio. Assim, utilizamos como objeto motivador o uso desses conceitos em um ambiente voltado aos negócios, visto que muitos desses alunos são absorvidos pelo mercado de trabalho como bancos, lojas e negócios da própria família. Também utilizamos exemplos de uso das derivadas em questões de provas de vestibulares. O trabalho está assim organizado:

Aspectos históricos: Apresentamos a história do ensino da derivada no Ensino Médio do Brasil e contrapomos com o exemplo Norte – Americano. Apresentamos também os motivos pelos quais o ensino da derivada não é apresentado no nível médio e mostramos que é possível e importante que esse tema seja abordado no ensino médio.

Conceitos básicos: Tratamos de assuntos que nos levarão à introdução de uma maneira mais branda do conceito de derivada.

Derivadas e Aplicações de derivadas: Apresentamos a definição de derivada, sua interpretação geométrica, derivadas de funções elementares, regras de derivação, estudo sobre máximos e mínimos de uma função e a utilização da derivada na cinemática. Apresentamos também, questões que caíram em vestibulares e que aqui são solucionadas utilizando os conceitos de derivada.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS

2.1 No passado, o ensino da derivada no Brasil.

No Brasil, no final da década de 50 e início da década de 60, aconteceu um movimento que tentava traduzir o que acontecia nos grandes centros de pensamento matemático fora do país. O Movimento da Matemática Moderna tinha como finalidade modernizar o ensino da matemática no Brasil. A partir desse movimento, esse ensino passou a ter excessiva ênfase no rigor e no formalismo das apresentações. Com isso, tópicos importantes como Cálculo e Geometria foram sendo alijados do programa de ensino nas escolas brasileiras.

Antes de 1943, o Cálculo fazia parte do programa do curso pré–vestibular de Engenharia. Esse curso era antecedido pelo ginasial que se equiparava hoje em dia ao que conhecemos como sexto ao nono ano do ensino fundamental mais o primeiro ano do ensino médio. O pré de Engenharia tinha duração de dois anos. Àquela época existiam três cursos pré vestibulares: Engenharia, Medicina e Direito. Em 1943, o ensino da Matemática passou por uma reforma denominada Reforma Capanema, que fez com que o ensino do Cálculo fosse ministrado no que conhecemos hoje por terceiro ano do nível médio. Era ensinado nesse curso o uso da derivada e suas aplicações a problemas de máximos e mínimos além de outros tópicos. (Avila, RPM 18, p. 1).

2.2. O ensino da derivada no exterior

Em outros países, como nos EUA por exemplo, o cálculo tem um papel importante nas escolas secundárias. O sistema de ensino, apesar de variar de estado para estado, tem uma flexibilidade nos anos finais daquilo que seria o ensino médio, o chamado senior high school. O aluno do senior high tem a possibilidade de escolher estudar mais matemática, mais ciências ou mais humanidades. Na hipótese de ele escolher estudar mais matemática ele teria um ensino mais incisivo em álgebra (incluindo trigonometria e geometria analítica), geometria e cálculo. O aluno que faz cálculo, recebe um certificado de proficiência que pode ser usado para eliminar essa disciplina no primeiro semestre do curso universitário e dependendo da quantidade de cálculo estudado também pode eliminar essa matéria do segundo semestre. Assim o aluno já pode avançar para estudar disciplinas mais avançadas no curso escolhido. (Avila, RPM 18, p. 2)

2.3. Por que não ensinamos derivada no ensino médio?

Os reformistas, seguindo as suas próprias aspirações, priorizaram mais outros tópicos que traduziam essa intenção de modernizar o ensino da Matemática. Fruto dessas prioridades, o programa de ensino da matemática foi elaborado seguindo uma ótica onde o rigor e o formalismo, exigindo vários detalhamentos axiomáticos, tomaram um espaço imenso, por isso, não haveria espaço no programa pra tópicos que não eram considerados modernos. Portanto, o Cálculo para se adequar a essa nova linha de pensamento, deveria exigir um estudo detalhado dos números reais, o que gastaria muito tempo, tornando assim, o ensino do Cálculo, e consequentemente das derivadas, inviável. (Avila, RPM 18, p. 2)

Conforme o Professor Geraldo Ávila na RPM 18, p.3, “Os reformistas do ensino falavam em modernizar, criticavam o ensino por se limitar à Matemática que terminava no ano de 1700. Ora, o irônico é que descartaram o Cálculo, cujas ideias surgiram antes desse ano de 1700, e que são o que de mais moderno começava a surgir na Matemática. E desde então o Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico - tecnológico. Portanto, descartá-lo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.”

Um dos conceitos importantes do cálculo é a derivada que possui inúmeras aplicações. É um conceito, portanto, importante que merece ser introduzido no ensino médio. Assim, se a função do ensino da Matemática é preparar os alunos para que consigam se integrar à sociedade de uma maneira correta, este conceito não pode simplesmente ser deixado de lado.

2.4. Para que ensinar Derivada a alunos do Ensino Médio?

Desde que apresentado da maneira correta, as novas ideias introduzidas no estudo das derivadas fazem com que esse conceito seja bastante desafiador e gratificante para professores e alunos. Isso torna o ensino atrativo e o aprendizado mais acessível, desde que dado de uma maneira mais intuitiva, priorizando as ideias, técnicas e aplicações.

Assim, um curso introdutório do ensino das derivadas se tornaria vantajoso ao aluno pré vestibulando. Um curso que não gaste tanto tempo em formalismos e longas terminologias e que utilizasse as noções básicas de derivadas e suas aplicações, colocando o estudo de funções em seu contexto apropriado, feito de uma maneira mais enxuta, espontânea, progressiva e proveitosa. (Avila, RPM 18, p. 3)

2.5 Fatos históricos sobre as derivadas

O aparecimento da Derivada remonta ao século V a.C. quando os Gregos antigos já utilizavam o conceito de reta tangente como sendo uma reta que tocava a curva em um único ponto. Esse fato vem da generalização que os gregos faziam sobre a tangente a uma circunferência. Mostraremos mais a frente nesse trabalho, que essa ideia é imprecisa necessitando de um maior rigor para a definição de reta tangente a uma curva.

Vários métodos para resolver o problema de encontrar reta tangente a curvas foram desenvolvidos. O resultado do estudo dessas tangentes, juntamente com o estudo de máximos e mínimos proporcionou o aparecimento da Derivação e seu eventual desenvolvimento.

Após os Gregos, somente no século XVII, o interesse por retas tangentes a uma curva reacendeu. Isso se deve à sistematização do estudo dos movimentos dos corpos por Galileu, que utilizava o estudo geométrico desses movimentos chegando a encontrar relações entre distância, velocidade e aceleração bem conhecidas nas aplicações de derivada hoje em dia. (ECALCULANDO, 2016)

Muitos cientista do século XVII fizeram trabalhos sobre diferenciação. Segundo

Eves(2002), torna-se razoável aceitar que a primeira manifestação clara sobre a diferenciação vem das ideias de Fermat expostas em 1629. Fermat não só descobriu um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva, quando já se sabia a sua equação cartesiana, como também elaborou um método algébrico para determinar máximos e mínimos de uma função.

Muitos dos matemáticos da época se entregaram aos estudos sobre o movimento. O que fez com que o conhecimento sobre a derivada avançasse chegando assim a conclusão, já naquela época, de que que a taxa de variação pontual - derivada - do deslocamento era a velocidade.

Johannes Kepler, astrônomo e filósofo alemão, estudou sobre incrementos infinitesimais de uma função nos pontos de máximo e mínimo comum. Esse trabalho foi acolhido pelo matemático e cientista francês Pierre de Fermat, que utilizou para determinar um processo para encontrar pontos de máximo e mínimo de uma função. Apesar de haver alguns problemas na lógica do trabalho de Fermat, nota-se que seu trabalho equivale a impor:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

ou seja, a derivada seja nula no ponto. Esse é o método que utilizamos hoje em dia para se encontrar máximos e mínimos de uma função. (Eves, 2004, Cap 11, p. 428).

O britânico Isaac Barrow, fez uma abordagem em seu livro *Lectiones opticae et geometricae* do processo de diferenciação próxima daquilo que utilizamos hoje em nossos livros atuais. (Eves, 2004, Cap 11, p. 434).

O cientista inglês, Isaac Newton, ao observar o movimento dos planetas, imaginou o porque de suas órbitas serem curvas, e que se em vez disso fossem formadas por segmentos de retas consecutivas o estudo desses movimentos seriam muito mais fáceis. Então considerou que quanto mais segmentos de retas maior seria a aproximação com a curva descrita pelo planeta. Assim, se deu início a produção científica que lhe traria grandes frutos e que englobou, entre tantas outras coisas, as derivadas. A ideia de Newton consistia no movimento de uma partícula que descrevia uma curva em um sistema de coordenadas ortogonais entre si. Esse movimento fazia com que houvesse variação na linha horizontal e na linha vertical. A velocidade dessas variações é o que hoje chamamos de derivada de x ou y com relação ao tempo, ou em notação moderna x'(t) ou y'(t) (ECALCULO, 2016). Infelizmente para Newton, apesar de ter desenvolvido todos esses estudos que culminaram no avanço do processo de diferenciação entre 1666 e 1671, e escrever em 1671 o seu *Method of fluxions,* ele apenas mostrou seu trabalho há alguns colegas, e teve seu livro publicado somente em 1736. (Eves, 2004, Cap 11, p. 438).

Leibniz, em 1672, estabeleceu contatos com muitos matemáticos, entre eles, Barrow, que impulsionaram o jovem matemático nos seus estudos sobre o Cálculo diferencial. Ele escreveu seu primeiro artigo sobre cálculo diferencial em 1684. Sua fundamentação era diferente da fundamentação de Newton. A grande diferença se dá no modo de interpretar as variáveis x e y. Leibniz as interpretou como grandezas variáveis em sucessões de intervalos infinitesimais. Ao introduzir símbolos algébricos, contribuiu sobremaneira para o desenvolvimento da diferenciação. Introduziu dx e dy para cognominar esses invervalos sucessivos infinitesimais. Leibniz já sabia que o coeficiente angular da tangente era o que conhecemos hoje como derivada, porém, não usou esse fato como definição e deduziu muitas regras atuais de diferenciação. (ECALCULO, 2016).

Apesar de Newton ter feito um excelente trabalho, os matemáticos da sua época preferiram assumir as notações criadas por Leibniz.

Um dos mais tristes capítulos da matemática está na disputa entre Leibniz e Newton sobre quem foi o criador do cálculo. Foi uma situação tão tensa que os matemáticos britânicos chegaram a se fechar dentro de seu próprio país não dando atenção ao que acontecia no restante da Europa. Quando essa situação mudou, haviam perdido grande parte do avanço do cálculo, inclusive sem conhecer a notação que fora adotada, a notação de Leibniz. Os matemáticos ingleses, porém, ainda persistiram por algum tempo na notação de Newton, no entanto começaram a utilizar a notação mais aceita a partir de 1812.

A intenção deste trabalho não é descobrir quem criou o cálculo, e consequentemente as derivadas, mas notamos que essa situação controversa que foi irrompida por outras partes, contribuiu muito para que a matemática britânica fosse prejudicada. (Eves, 2004, Cap 11, p. 444).

Mesmo após anos de controvérsias, Newton e Leibniz reconheceram um pouco a importância de cada um para a matemática. Leibniz considerou que as obras de Newton eram a melhor metade da Matemática. Newton, chegou a admitir, na primeira edição do Principia, que Leibniz tinha um método parecido com o seu. Mas infelizmente, quando as discussões eram mais acirradas, Newton retirou tal referência na terceira edição de sua obra. (Eves, 2004, Cap 11, p. 441).

3 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, revisaremos os conceitos de razão, proporção e regra de três, conhecimentos necessários para introduzirmos a equação da reta. A partir daí, veremos reta tangente e inclinação da reta chegando assim à definição de derivada. Também utilizaremos várias funções em modelos econômicos para tornar o aluno familiarizado com a noção de variação.

3.1 Razão, proporção e regra de três

Vamos rever três tópicos muito importantes na matemática, Razão, Proporção e Regra de Três que geralmente são vistos no primeiro ano do ensino médio. Esses tópicos abordam a dependência entre grandezas envolvidas em determinados acontecimentos, ou seja, em um determinado momento essas grandezas podem agir como variáveis onde uma dependerá da outra. Utilizaremos esses conceitos para introduzir a equação da reta no plano.

3.1.1 GRANDEZA

É tudo aquilo que pode ser medido ou contado, para isso utiliza-se uma unidade adequada. (TEIXEIRA, 2016)

Exemplo 3.1.1: Velocidade medido em metros por segundo, aceleração medido em metros por segundo ao quadrado, massa medido em quilogramas, espaço medido em metros, área medido em metros quadrados, temperatura medida em graus Celsius, Gastos, despesas, receitas medido em reais, etc.

3.1.2 RAZÃO E PROPORÇÃO

Denomina-se razão entre grandezas de mesma espécie o quociente entre os números que expressam as medidas dessas grandezas numa mesma unidade. Para determinar a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, determina-se o quociente entre as medidas dessas grandezas. Essa razão deve ser acompanhada da notação que relaciona as grandezas envolvidas. (PORTAL SÓ MATEMÁTICA, 2016).

Exemplo 3.1.2: Uma escala 1:250 de uma planta de uma casa é uma razão de grandezas iguais, pois a cada centímetro na planta se relaciona 250 centímetros da casa. A velocidade média é outro exemplo, ela é uma razão entre espaço percorrido e tempo de viagem que são grandezas diferentes. O gasto médio da fabricação de uma peça é uma razão de grandezas diferentes entre o valor gasto com a fabricação de todas as peças em reais e o número de peças fabricadas em unidades. Portanto a razão é uma relação de duas grandezas iguais ou não.

A igualdade entre duas razões forma uma proporção, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$, onde a, b, c e d são números reais com b e d diferentes de 0. O número k chama-se constante de proporção. (SILVA, 2016)

Exemplo 3.1.3: Para cada 3 produtos vendidos por Sandro, ele ganha R$ 300,00 de comissão. Quanto ele recebeu de comissão no mês que vendeu 15 produtos?

$\frac{3}{300}=\frac{15}{x}$ ou seja, $x=\frac{300.15}{3}$, logo, $x=150$

3.1.3 PROPORÇÃO DIRETA E PROPORÇÃO INDIRETA

Duas grandezas x e y são diretamente proporcionais quando elas se relacionam conforme a equação: $y=kx$ ou $y/x=k$, onde $k\geqslant 0$, onde k se chama constante de proporcionalidade. (Avila, RPM 08, p. 3)

Observe que estudando a fórmula $\frac{y}{x}=k$ para que $\frac{y}{x}$ se mantenha constante, se y aumenta, x também deverá aumentar, se y diminui, x também deverá diminuir.

Exemplo 3.1.4: Massa e peso são grandezas diretamente proporcionais pois se relacionam conforme a equação da definição acima, pois $P=m.g,$ em que g é a constante gravitacional. O gasto com a fabricação de peças e a quantidade de peças são grandezas diretamente proporcionais pois $G(x) = t.x,$ onde $G(x)$ é o valor gasto para fabricar x peças, t é o valor de cada peça e x é a quantidade de peças fabricadas.

Duas grandezas x e y são inversamente proporcionais quando se relacionam conforme a equação: $y=k/x$ ou $xy=k,$ onde $k \geqslant 0$, onde k se chama constante de proporcionalidade. (Avila, RPM 08, p. 3)

Observe que estudando a fórmula $xy=k$ para que $x.y$ se mantenha constante, se y aumenta, x deverá diminuir, se y diminui, x deverá aumentar.

Exemplo 3.1.5: Em uma viagem a velocidade e tempo de gasto são grandezas inversamente proporcionais pois se relacionam conforme a equação da definição acima, pois $s=vt,$ em que *s* é o espaço percorrido que é constante. Quando se tem uma verba fixa para se gastar com um produto qualquer (V), podemos ver que a quantidade deste produto (q) é inversamente proporcional ao valor de cobrado pelo produto (c), pois $qc=V$.

3.1.4 PROPORÇÃO DIRETA E INDIRETA

Quando várias variáveis, como, x, y, z, w, r e s, estão relacionadas entre si, como na equação: $z=k\frac{xyw}{rs},$ com k constante, diremos que z é diretamente proporcional a x, y e w; e inversamente proporcional a r e s.

Quando dizemos que z é diretamente proporcional a x, estamos imaginando apenas duas variáveis, z e x, e todas as demais como sendo constantes; logo, $z=cx,$ sendo c uma constante, atendendo à proporção direta. Da mesma forma, dizer que z é inversamente proporcional a r é dizer que estamos tomamdo todas as outras variáveis como constantes e z e r como as únicas variáveis, obtendo assim $z=\frac{C}{r}$, com C constante; atendendo à definição de proporção indireta. (Avila, RPM 08, p. 3).

Exemplo 3.1.6: Se 10 máquinas, funcionando 6 horas por dia, durante 60 dias, produzem 90000 peças, em quantos dias *x*, 12 dessas mesmas máquinas, funcionando 8 horas por dia, produzirão 192000 peças?

Solução:

Temos aqui quatro variáveis:

M = número de máquinas; H = horas de funcionamento por dia; D = dias de funcionamento e P = número de peças produzidas.

Seja k o número de peças que cada máquina produz por hora.

Temos: $P=kMHD$; ou $\frac{P}{MHD}=k$.

Esta equação nos diz que a variável P é diretamente proporcional a M, H e D. Substituindo nesta equação as duas sequências de valores dados no problema, obtemos

$$\frac{90000}{10 \ x \ 6 \ x \ 60} = k = \frac{192000}{12 \ x \ 8 \ x \ X}$$

Novamente temos aqui uma equação simples, cuja solução é

$$X = \frac{10 \ x \ 6 \ x \ 60 \ x \ 192000}{90000 \ x \ 12 \ x \ 8} = 80\, dias$$

Utilizamos os dois últimos exemplos para mostrar como a conhecida regra de três composta pode ser reduzida a uma regra de três simples bastando apenas notar a dependência direta ou indireta entre as grandezas. Chegando assim a uma resolução mais simples do problema.

Exemplo 3.1.7: Um trabalhador gasta 5 horas para limpar um terreno circular de

7 metros de raio. Quanto tempo gastaria se o terreno tivesse 14 metros de raio?

Solução: Temos aqui envolvidas as grandezas raio r do terreno e tempo t gasto para o trabalhador limpar o terreno. Vamos tentar simplesmente aplicar a regra acima e dizer que r e t são diretamente proporcionais. Assim, o trabalhador gastaria 10 horas para limpar o terreno de 14 metros de raio.

Mas como sabemos isto é um engano, pois sabemos que t é proporcional à *área* do terreno, então ele é proporcional a $r^{2,}$ isto é, $t = Cr^{2,}$ com *C* constante. Sendo T o tempo gasto para limpar o terreno maior, teremos:

$$5 = Cx7^2, \quad e \quad T = Cx14^2;$$

logo, $\frac{T}{5} = (\frac{14}{7})^2 \quad e \quad T = 2^2 x 5 = 20 \ \ horas$

Como vimos o trabalhador gastará 4 vezes o tempo que gasta com o menor terreno e não duas vezes como poderíamos pensar.

Nem sempre duas variáveis são diretamente proporcionais pelo simples fato de uma aumentar ou diminuir quando a outra também aumenta ou diminui. Da mesma maneira inversamente proporcional se uma aumenta enquanto a outra diminui, faz-se necessário muita atenção para notar-se a verdadeira relação entre as grandezas. (Avila, RPM 08, p. 5)

3.1.5 PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES

O produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Esta propriedade é na verdade das igualdades e não é uma exclusividade das proporções.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Demonstração: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}bd=\frac{c}{d}bd \Leftrightarrow ad=bc$,

onde a, b, c e d são números reais e b e d não nulos (Avila, RPM 08, p. 7)

Exemplo 3.1.8: Cinco torneiras idênticas juntas enchem um tanque em 144 minutos. Quantas dessas torneiras são necessárias para encher o mesmo tanque em uma hora e meia?

Solução: Seja C a capacidade do tanque, N o número de torneiras (esta grandeza representa uma taxa de variação, qual seja, a quantidade de água despejada por minuto) e T o tempo necessário para encher o tanque. Então, $C=NT$. Basta agora substituir os dados nesta equação, eliminar C e resolver a equação resultante para encontrar N. Como uma hora e meia é o mesmo que 90 minutos, temos:

$$C=5\,x\,144 \quad e \quad C=Nx\,90$$

de onde se segue que $90.N=5\,x\,144$ e, finalmente, N = 8 torneiras.

Exemplo 3.1.9: Um certo rei mandou 30 homens plantar árvores em seu pomar. Se em 9 dias eles plantaram 1000 árvores, em quantos dias 36 homens plantariam 4400 árvores?

Solução: Sejam A o número de árvores, H o número de homens e D o número de dias. O número de árvores plantadas é proporcional ao tempo total de trabalho, que é produto do número de homens pelo número de dias de trabalho, isto é, $A=k(HxD)$. Substituindo os dois conjuntos de dados nesta equação, obtemos

$$1000=k(30\,x\,9) \quad e \quad 4400=k(36\,xD).$$

dividindo uma equação pela outra, eliminamos k e ficamos com uma só equação para determinar D:

$$\frac{1000}{4400}=\frac{30\,x\,9}{36\,x\,D} \Leftrightarrow 10\,x\,4\,D=30\,x\,44 \Leftrightarrow D=\frac{30\,x\,44}{10\,x\,4} \Leftrightarrow D=33\,dias$$

Exemplo 3.1.10: Se 6 datilógrafos, em 18 dias de 8 horas, preparam 720 páginas de 30 linhas, com 40 letras por linha, em quantos dias de 7 horas, 8 datilógrafos comporão 800 páginas, de 28 linhas por página e 45 letras por linha?

Solução: Sejam N o número de datilógrafos, D o número de dias de trabalho, H o número de horas por dia, P o número de páginas, L o número de linhas por páginas e l o número de letras por linha. Ora, os produtos

$$HxDxN \quad e \quad IxLxP$$

representam, respectivamente, o número total de horas de datilografia e o número total de letras datilografadas. Eles são diretamente proporcionais; logo,

$$H\,x\,D\,x\,N = k(l\,x\,L\,x\,P) \quad ou \quad \frac{H\,x\,D\,x\,N}{l\,x\,L\,x\,P} = k$$

onde k é a constante de proporcionalidade. Substituindo nesta última equação os dois conjuntos de valores dados no problema, obtemos as equações

$$\frac{8\,x\,18\,x\,6}{40\,x\,30\,x\,720} = k \quad e \quad \frac{7\,x\,D\,x\,8}{45\,x\,28\,x\,800} = k$$

Daí, eliminando a constante k, obtemos uma equação para determinar D, a qual nos dá D = 18 dias.

Note que todos os problemas de regra de três podem ser reduzidos a aplicações de equações do primeiro grau. Mesmo as compostas. Para isso basta notarmos a relação que existe entre as grandezas envolvidas e assim podemos reformular essas grandezas em termos de apenas duas variáveis transformando a equação em algo do tipo $y = kx$ ou $xy = k$, com k constante.

3.2 Equação da reta e gráficos

Neste tópico daremos continuidade ao que foi visto no tópico 3.1, porém, utilizaremos o que foi ali exposto para introduzirmos os conceitos de equação da reta e seus gráficos.

Seja a fórmula, $V = Q(x)(2{,}00)$. Essa fórmula calcula o valor gasto V em função da quantidade de mercadorias *Q(x),* onde essa mercadoria vale R$ 2,00. Como visto no tópico 3.1, V e *Q(x)* são grandezas diretamente proporcionais e 2,00 é uma constante positiva. Essas grandezas variam da seguinte forma:

Quando uma certa quantidade de mercadorias x_1, muda para um novo valor x_2, medimos a variação pela diferença entre as duas quantidades, utilizaremos o símbolo grego Δ (DELTA), para designar essa variação, logo $\Delta x = x_2 - x_1$. (Muller; Garcia, 2012, cap. 4, p 109).

Essa variação faz com que V varie de um valor $V_1 = y_1$ para um valor $V_2 = y_2$. Onde essa variação é dada dada por $\Delta y = y_2 - y_1$.

Esse tipo de equação, dá origem ao gráfico de reta passando pela origem como na figura 3.1, em que temos o gráfico de $y = 2x$, uma reta originada por grandezas diretamente proporcionais onde para acréscimos de x teremos acréscimos em y.

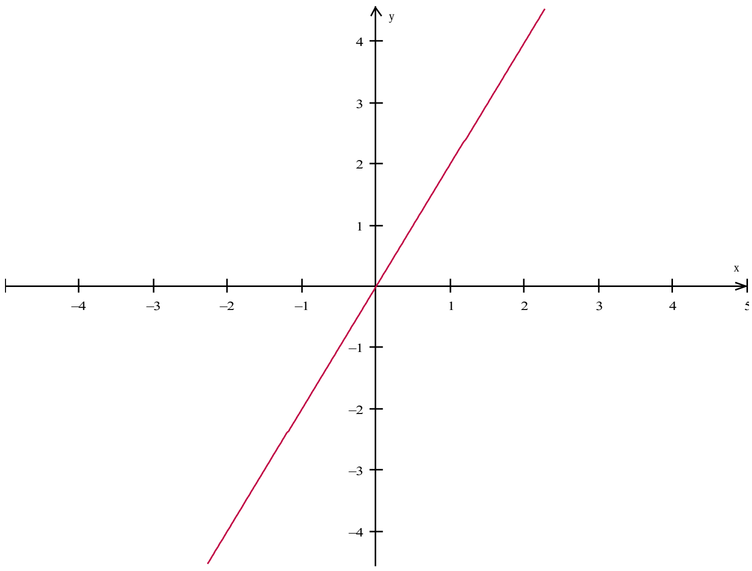


Figura 3.1: reta formada por grandezas diretamente proporcionais[1]

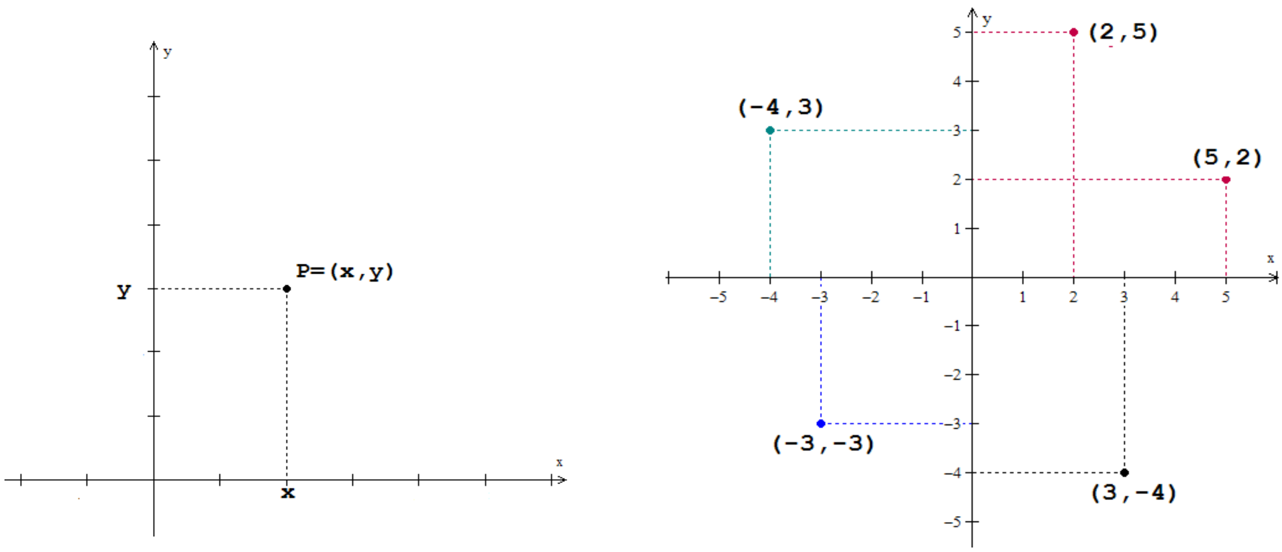
Sendo assim, chegamos à conclusão que a equação $y = kx$ não só garante que y

1 As figuras deste trabalho confeccionadas no Winplot versão 1.55, software livre.

e x são grandezas diretamente proporcionais como também origina gráficos de retas que passam pela origem. Vamos agora ao estudo da equação da reta utilizando um pouco de Geometria Analítica.

3.2.1 COORDENADAS NO PLANO

Inicialmente, vamos tomar dois eixos no plano perpendiculares entre si, de mesma origem. Um na horizontal que chamaremos eixo x, e outro na vertical que chamaremos eixo y. O eixo x será orientado da esquerda para a direita e o eixo y orientado de baixo para cima. Os pontos no plano são representados por coordenadas. Dado um ponto P do plano, traçamos, por P, uma paralela ao eixo x que intersecciona o eixo y em P_2 de coordenada y. Agora, trançando uma paralela ao eixo y por P, essa reta intersecciona o eixo x em P_1 de coordenada x. Ou seja, todo ponto P do plano pode ser representado por suas coordenadas (x,y) conforme a Figura 3.2 (a). Da mesma forma, todas as coordenadas (x,y) determinam pontos P_1 e P_2 onde poderemos traçar retas paralelas aos eixos que determinarão um ponto P no plano determinado pela intercessão destas retas. Isso nos mostra que existe uma correspondência biunívoca entre pontos do plano e as coordenadas (x,y), que nos permite identificar cada ponto do plano com uma coordenada. (Ávila, 2003, Cap 2, p. 17)



(a) Coordenadas de P

(b) Coordenadas de pontos

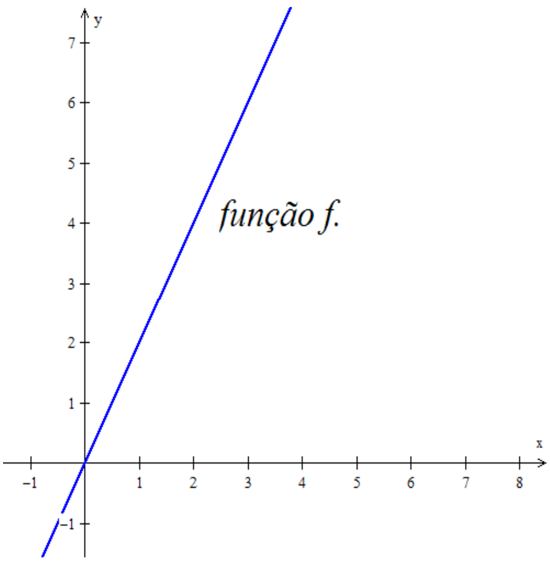
Figura 3.2: Coordenadas no plano

Temos na Figura 3.2 (b) vários exemplos de pontos com suas coordenadas. Note que o par (x, y) é diferente de (y, x), a não ser que $x = y$. Por exemplo, $(3{,}1) \neq (1{,}3)$. Daí vem o fato de (x, y) ser um par ordenado. Chamamos o x, que vem primeiro, abscissa e chamamos o número y, de ordenada. Esse sistema de eixos com todas as condições que foram descritas acima se chama sistema cartesiano de eixos ortogonais. O plano fica assim dividido em quatro quadrantes que são enumerados no sentido anti-horário começando do quadrante onde os pontos números x e y são ambos positivos.(Ávila, 2003, Cap 2, p. 17)

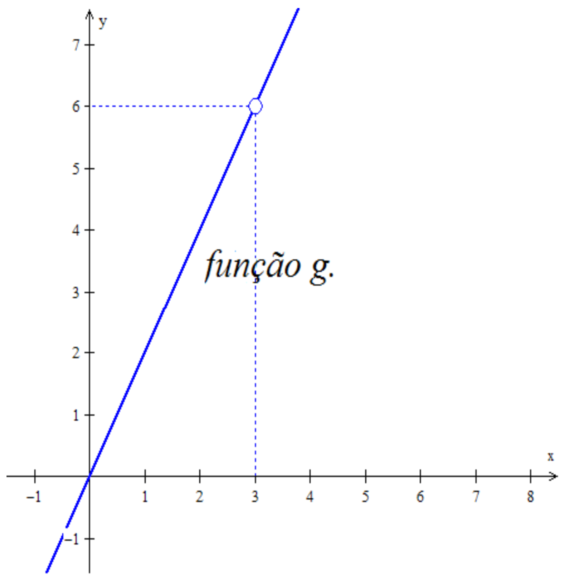
<u>Resolver os exercícios 3.2.1 do anexo único.</u>

3.2.2 CONTINUIDADE

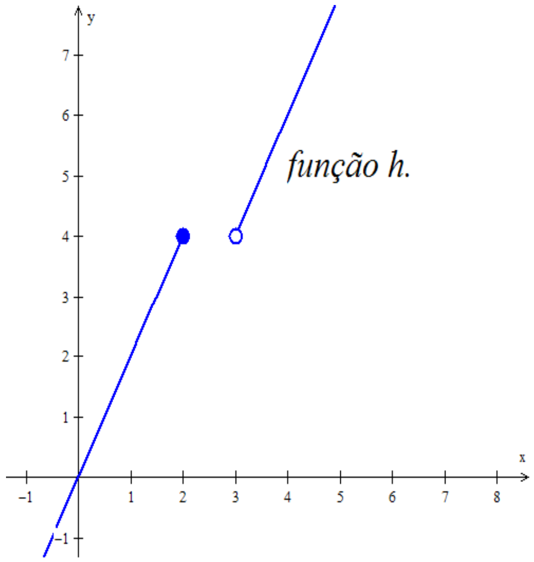
Uma função contínua é aquela que o seu gráfico não apresenta interrupção, ou seja, uma função que tem um gráfico que pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel. Assim, verificar que uma função não é contínua, a partir do seu gráfico, é muito simples.



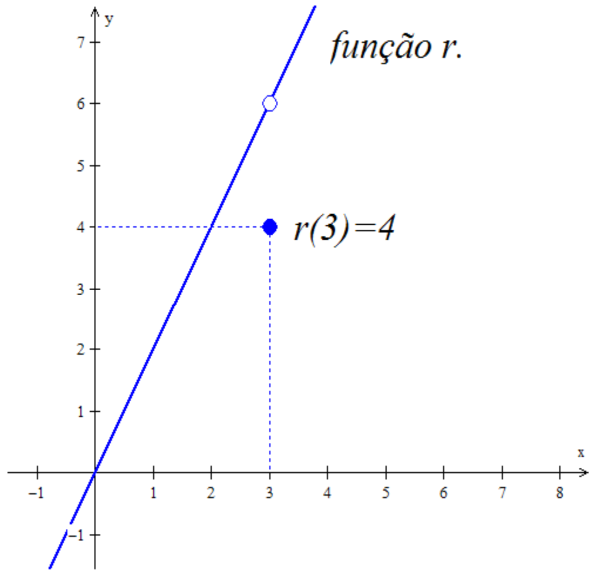
(a): $f(x) = 2x$



(b): $g(x) = \dfrac{2x^2 - 6x}{x - 3}$



(c): $h(x) = \begin{cases} 2x=3, & para \quad x \leqslant 2 \\ 2x-2, & para \, x>3 \end{cases}$



(d) $r(x) = \begin{cases} 2x, & \forall x \neq 3 \\ 4, & para \quad x=3 \end{cases}$

Figura 3.3: Continuidade de funções.

Na figura 3.3 (a), o gráfico da função f não apresenta interrupções e, portanto, ela é contínua para todo valor de x. Os demais gráficos que estão nas Figuras 3.3 (b), 3.3 (c) e 3.3 (d) das funções g, h e r apresentam interrupções e, portanto, essas funções não são contínuas nesses pontos de interrupção.

Observe o gráfico das funçãos g. Essa função não está definida em $x=3.$ Logo, esse ponto não faz parte do seu Domínio. Note que, se percorrermos o gráfico da direita para a esquerda partindo de valores de x maiores que 3, tenderemos a encontrar $f(x)=6.$ O mesmo aconteceria se percorrermos o gráfico da esquerda para a direita partindo de valores de x menores que 3. Portanto, existe limite *g(x)* quando x tende a 3. Porém não existe *g(3).* Nesse caso, escrevemos $\nexists f(3),$ mas $\exists \lim_{x \Rightarrow 3} g(x).$ O mesmo ocorre no gráfico da função h, que não está definida para todos os valores $2<x\leqslant 3$ porém o limite desses pontos para x tendendo a 3 é igual 4.

A função r é descontínua apenas $x=3.$ Diferente das funções g e h, esta função está definida em $x=3$ e, portanto, faz parte do Domínio. Porém ao percorrermos o gráfico da direita para a esquerda para valores de x maiores que 3, a tendência seria completar o gráfico com $r(3)=6.$ O mesmo ocorrendo se percorrermos o gráfico da esquerda para a direita partindo de valores de x menores que 3. Porém $r(3)=4.$ Escrevemos então: $\exists r(3)=4$ e $\exists \lim_{x \Rightarrow 3} r(x)=6.$ Logo, $\lim_{x \Rightarrow 3} r(x) \neq r(3).$

A função f é contínua para todo valor de x, pois a função não apresenta interrupção em nenhum valor de x. Vamos ver o que ocorre com a função para $x=3.$ Mais uma vez, ao percorrer o gráfico da direita para a esquerda a partir de valores de x maiores que 3, encontraremos $f(3)$=6. O mesmo ocorre ao percorrer o gráfico da esquerda para a direita partindo de valores de x menores que 3. Portanto $\exists \lim_{x \Rightarrow 3} r(x)=6.$ E também temos que $\exists r(3)=6.$ Ou seja, $\lim_{x \Rightarrow 3} r(x)=r(6).$

<u>Definição 2.1</u> - Dizemos então que uma função $y=f(x)$ é contínua em um ponto $x=a$ se a seguinte condição está satisfeita: $\lim_{x \Rightarrow a} f(x)=f(a).$

3.2.3 EQUAÇÃO DA RETA

Vimos no início deste capítulo que a equação $y=kx$ que garante que duas grandezas sejam diretamente proporcionais também é a equação de uma reta que passa pela origem do sistema. Agora, em vez de tomarmos y e x como grandezas, tomemos como variáveis e vamos trocar a constante de proporção k por uma constante m. Assim teremos uma nova equação $y=mx.$ Que continua sendo a equação de uma reta que passa pela origem e que poder-se-á verificar resolvendo os exercícios da questão 3.2.1 do anexo único. Lá veremos que os pontos que satisfazem equações do tipo $y=mx,$ são retas que passam pela origem do sistema.

Observe que, da mesma maneira como pudemos associar pontos do plano a pares ordenados do sistema cartesiano de eixos ortogonais, também poderemos associar curvas geométricas a equações. A esta curva que associamos uma equação nós chamamos de gráfico da equação, e consequentemente chamamos a equação de equação da curva.

Chegou a hora de generalizar a equação da reta, para isso, faz-se necessário resolver os exercício 3.2.2 do anexo único.

Resolver os exercícios 3.2.2 do anexo único.

Após resolver o exercício 3.2.2, nota-se que o gráfico gerado pelos pontos que satisfazem equações do tipo $y=mx+n$, também são retas. E mais, pode-se notar que essas retas são originadas de translações de retas do tipo $y=mx$. Ou seja, tomando os pontos que geram o gráfico da reta $y=mx$, obteremos todos os gráfico das retas $y=mx+n$ apenas deslocando o gráfico original $y=mx$, para cima, n unidades, se $n>0$ ou para baixo, n unidades, se $n<0$. O número n chama-se coeficiente linear da reta r. Se fizermos $x=0$ em, $y=mx+n$, resulta $y=n$, ou seja, o coeficiente linear n é a ordenada do ponto onde a reta corta o eixo y. (Avila, RPM 60, p. 31)

Observação: No mundo dos negócios existem várias relações que podem ser tratadas linearmente, ou seja, obedecem a uma equação do tipo $y=mx+n$ como por exemplo: receita e quantidade, lucro e quantidade, oferta e preço, etc.

3.2.4 DECLIVE OU COEFICIENTE ANGULAR

Como foi dito anteriormente, o gráfico da equação geral da reta $y=mx+n$ é uma translação no eixo y do gráfico da reta $y=mx$ com um deslocamento de n unidades. Conclui-se então que a variação de n na equação da reta faz com que o gráfico se desloque no eixo y. Mas o que acontece com o gráfico de uma reta quando m varia?

Resolver os exercícios 3.2.3 do anexo único.

Chamaremos a todas as retas paralelas ao eixo y de retas verticais. Essas retas são do tipo $x=k$, onde k é uma constante real. Definimos essa reta como não tendo declividade. Mas o que é declividade?

Tomemos agora, uma reta r qualquer que não seja vertical. Tomemos dois pontos quaisquer distintos entre si que satisfaçam a equação dessa reta. Sejam $P=(x_0, y_0)$ e

$Q=(x_1, y_1)$ pertencentes à reta r. Note que, dizer que $x_0 \neq x_1$, é o mesmo que dizer que a reta não é paralela ao eixo y. O número $\Delta x = x_1 - x_0$ (leia-se "delta x") é o acréscimo que se deve dar a x_0 para chegarmos a x_1, pois $x_1 = x_0 + \Delta x$ e $\Delta y = y_1 - y_0$ (leia-se "delta y") é o acréscimo que se deve dar a y_0 para chegarmos a y_1, pois $y_1 = y_0 + \Delta y$.

O que acabamos de ver quer dizer simplesmente que Δx e Δy, são os acréscimos que fazem com que o ponto P seja levado até o ponto Q, como nos mostra a Figura 3.4. (Ávila, 2003, Cap 2, p. 19)

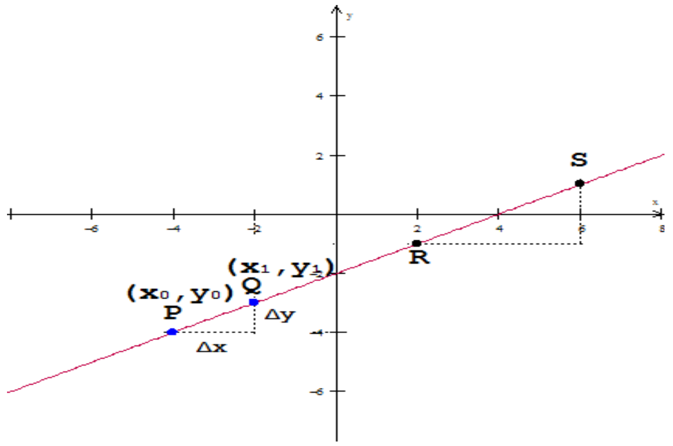


Figura 3.4: Declividade da reta

Com isso, podemos definir que a declividade é o número $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ que é chamado declive ou coeficiente angular da reta. E com isso podemos responder à pergunta anterior. Ao alterarmos o número m na equação da reta, o gráfico da reta alterará a sua inclinação com relação ao eixo x.

É importante observar que o declive não depende da ordem dos pontos, ou seja, podemos tomar os pontos de P para Q ou de Q para P. O declive é independente dos pontos que se tome sobre a reta. Notar pela definição e pela figura 3.5, que o declive é a tangente trigonométrica do ângulo que se faz entre a reta e o eixo x. (Ávila, 2003, Cap 2, p. 19)

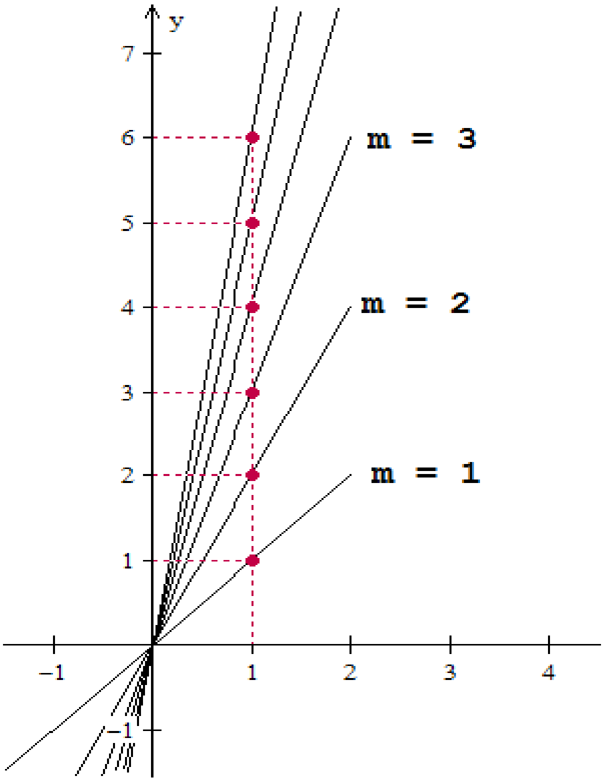


Figura 3.5: Variação da declividade

Cabe ressaltar que o declive não está definido para retas verticais. Conforme o ângulo entre a reta e o eixo x vai aumentando (ele varia entre 0^o e 90^o) a declividade também vai aumentando chegando a números positivos muito grandes.

Quando a angulação chega a 90^o, a reta será vertical e a declividade será infinitamente grande, mas infinito não é um número. Note que o declive é positivo para retas que são inclinadas do terceiro para o primeiro quadrante e negativas para retas inclinadas do quarto para o segundo quadrante. (Figura 3.6)

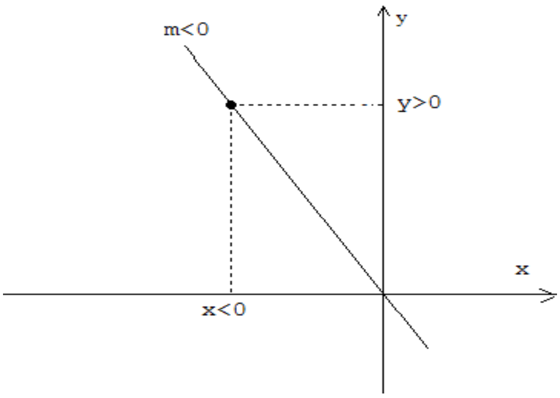


Figura 3.6: Declividade negativa

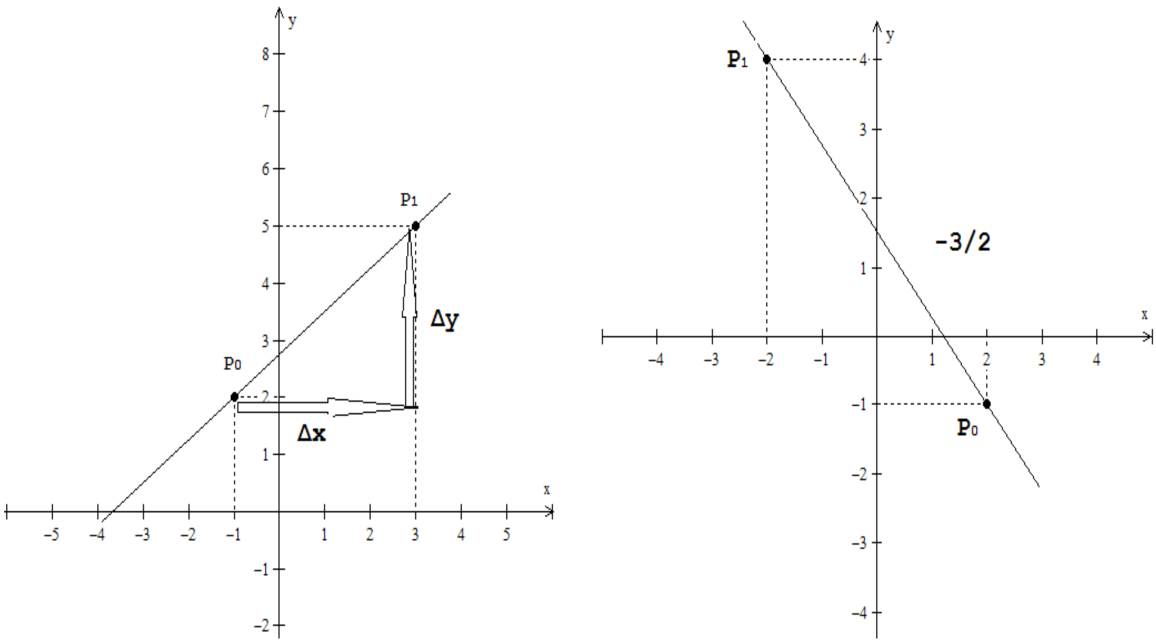
Exemplo 3.2.1 O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $P_0=(-1,2)$ e $P_1=(3,5)$ é dado por

$$m=\frac{5-2}{3-(-1)}=\frac{3}{4}.$$

Exemplo 3.2.2 O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $P_0=(2,-1)$ e $P_1=(-2,4)$ é dado por:

$$m=\frac{4-(-1)}{-2-2}=\frac{5}{-4}=\frac{-5}{4}.$$

Veja na Figura 3.7 (a), que geometricamente o significado do declive da reta é que para cada acréscimo de quatro unidades na abscissa, devemos acrescentar três unidades na ordenada para sermos levados do ponto P_0 para P_1, e na Figura 3.7 (b), para cada acréscimo de 4 unidades na abscissa devemos subtrair cinco unidades na ordenada para sermos levados de P_0 até P_1.



(a) Declive positivo (b) Declive negativo

Figura 3.7: Significado da declividade

3.2.5 GRÁFICO

Uma função f é o conjunto G_f dos pares ordenados $(x, f(x))$, onde x varia no domínio de f. Esse conjunto G_f, posto no plano cartesiano representa também o gráfico da função, ou seja:

$$G_f = [(x, f(x)) : x \in D],$$

onde D é o domínio da função f considerada. (Ávila, 2003, Cap 2, p. 38)

Vamos tomar como exemplo a função $y = f(x) = x^2$, e calculemos alguns valores para $f(x)$ conforme a tabela 3.1, para construir o gráfico conforme a Figura 3.8 da função.

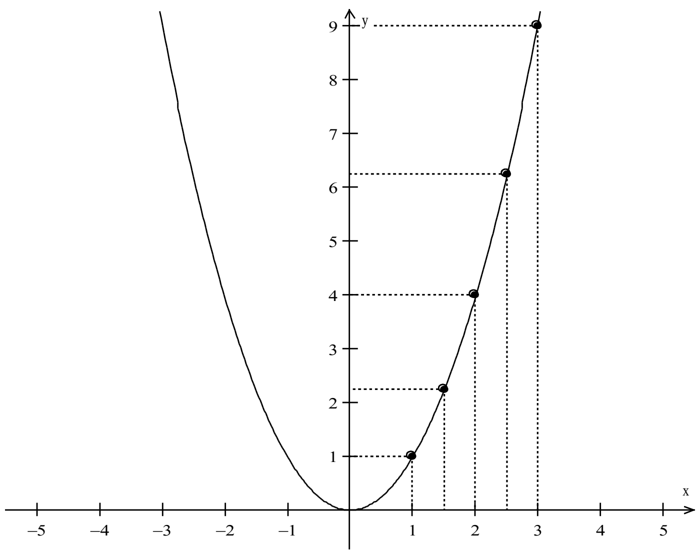


Figura 3.8: Gráfico da função $y = x^2$

x	y
0	0
± 1	1
$\pm 3/2$	9/4
± 2	4
$\pm 5/2$	25/4
± 3	8

Tabela 3.1: pontos do gráfico

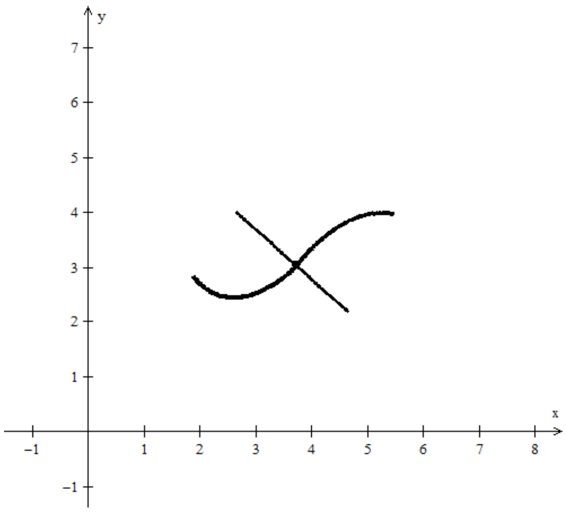
Note pela tabela 3.1, que esta função possui uma característica especial, pois temos que $f(1) = f(-1) = 1$, que $f(2) = f(-2) = 4$, que $f(3) = f(-3) = 9$, etc. Note também pelo gráfico da função que isso acontece para todo x e $-x$, ou seja $f(x) = f(-x)$.

Ainda olhando o gráfico da função, poderíamos nos fazer a seguinte pergunta: "o que acontece com valores de x maiores que aqueles que foram elencados em nossa tabela?" Nota-se que para valores maiores de x nos deparamos com o problema de encontrar números muito grandes de $f(x)$, mas como poderemos saber qual o comportamento da curva no restante do gráfico? Se ela irá mudar sua concavidade para valores muito grandes de x? (Ávila, RPM 60, p. 32)

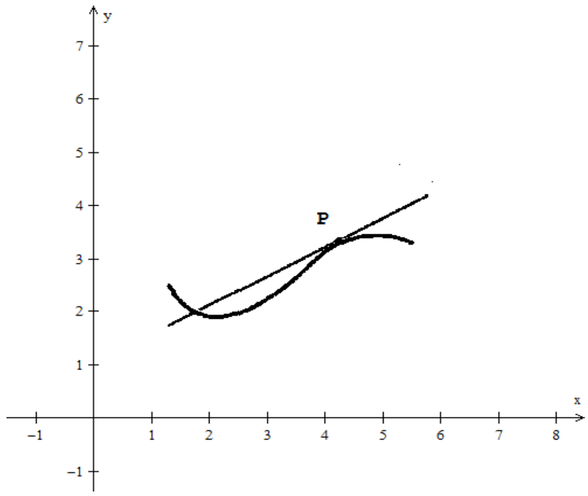
A resposta para isso vem do estudo da inclinação da reta tangente a essa curva. Porque afirmar que a concavidade de uma curva está voltada para cima é o mesmo que afirmar que a medida que os valores de x crescem a inclinação da reta tangente também cresce. Então, precisamos aprender a calcular o declive de uma reta tangente a uma curva.

3.2.6 RETA TANGENTE

Para uma boa definição de reta tangente, começamos discutindo sobre uma definição bastante familiar que é a de reta tangente a uma circunferência, onde a reta tangente a essa curva toca-a em um único ponto e é perpendicular ao seu raio que também passa nesse ponto. Essa definição não serve para uma curva qualquer, pois, existem retas que tocam curvas num único ponto, e nem por isso merecem o nome de reta tangente; e existem retas que que tocam a curva em mais de um ponto e que, no entanto, merece o nome de reta tangente à curva no ponto P. Como podemos ver na Figura 3.9 (Avila, RPM 60, p. 33).



(a) Não Tangente



(b) Tangente

Figura 3.9: Retas tangente e não tangente

Vamos considerar então uma curva que seja o gráfico de uma função $y=f(x)$. Seja $P=(x,y)$ o ponto onde desejamos traçar a reta tangente, que está para ser definida. Quando atribuímos a x um acréscimo $\Delta x=h$, a variável dependente y sofre um acréscimo correspondente Δy, e passamos do ponto $P=(x,y)$ ao ponto $Q=(x+h, y+\Delta y)$. Por exemplo, no caso concreto da função $y=f(x)=x^2$, temos:

$y+\Delta y \;=\; f(x+h) \;=\; (x+h)^2 \;=\; x^2+2xh+h^2$, de sorte que

$$\Delta y \;=\; f(x+h)-f(x) \;=\; (x^2+2xh+h^2)-x^2 \;=\; h(2x+h).$$

Sabemos que o declive da reta secante que passa pelos pontos P e Q é $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Conforme a Figura 3.10. Calculando esse declive temos, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \;=\; \frac{h(2x+h)}{h} \;=\; 2x+h$. (Avila, RPM 60, p. 33)

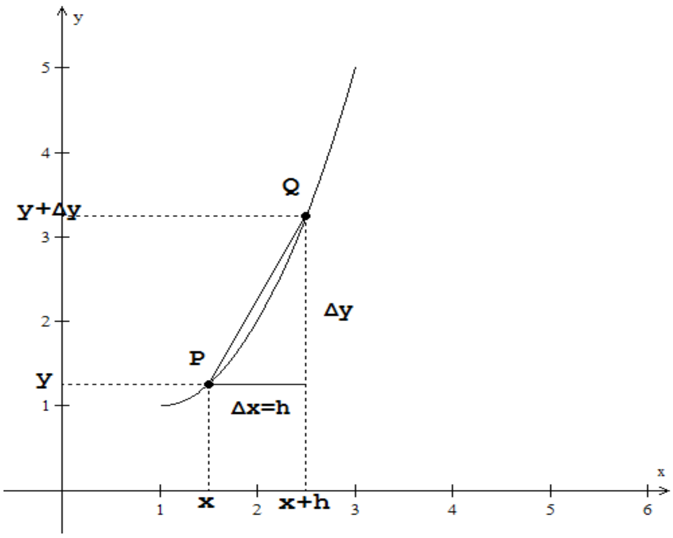


Figura 3.10: Declive da reta secante

Agora façamos o seguinte, vamos manter fixo o valor de x e variar o valor de h. teremos o ponto P fixo, enquanto o ponto Q vai se aproximando de P à medida que, apesar de permanecer sempre positivo, diminuímos o valor de h para valores cada vez menores e próximos de zero. Observe a figura 3.11 para ter uma noção do que acontece com Q. (Avila, RPM 60, p. 34)

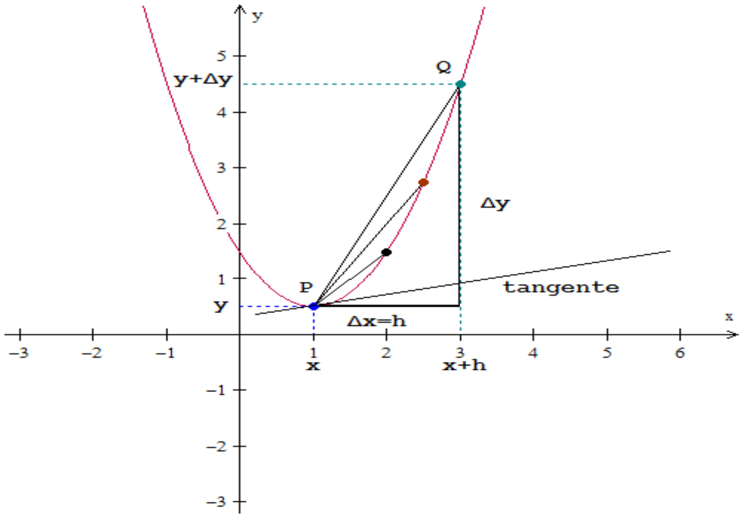


Figura 3.11: Declividade da tangente

Note que a reta vai se aproximando de uma posição que é limitada por x e h, uma reta limite, a qual é definida como sendo a reta tangente à curva no ponto P. O declive dessa reta tangente é precisamente o limite do declive $2x+h$ quando h tende a números positivos cada vez mais próximos de zero. Esse valor limite é exatamente $2x$.

Encontrada a inclinação, que chamaremos de m, precisamos apenas de um ponto da reta tangente, que, curiosamente, é o próprio ponto $(x, f(x))$ do qual queremos que, obrigatoriamente, haja passagem desta reta. A equação da reta com inclinação m e passando por um ponto (x_0, y_0), sendo $y_0 = f(x_0)$: (Ávila, 2003.Cap 2, p. 21)

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Portanto, a equação da reta tangente à curva $y = x^2$, no ponto (1,2), será:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = 2x(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 2.1(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x.$$

Deve-se notar que h se torna um número muito pequeno, mas nunca é zero, pois esse valor tornaria a razão $\Delta y / h$ sem sentido. E aqui chegamos ao ponto que nos interessa, o limite dessa razão. Ou seja, o valor que essa razão assume quando fazemos com que h se torne cada vez mais próximo de zero. Chamamos a esse limite derivada da função em x.

Antes de passarmos para o estudo da derivada, vamos ver uma de suas aplicações no estudo das funções. E ainda antes disso, precisamos de dois novos conceitos, o de função crescente e o de função decrescente.

Recordando o que foi falado sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Lembre que duas grandezas que eram diretamente proporcionais cresciam ou decresciam mutuamente enquanto que as grandezas inversas acontecia o fato de que enquanto uma crescia a outra decrescia. A ideia simples é quase a mesma para estes dois novos conceitos.

3.2.7 FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

Uma função é crescente quando: Se o valor de x aumentar, o valor de y aumenta. Se o valor de x diminuir o valor de y diminui.

Uma função é decrescente quando: Se o valor de x aumenta o valor de y diminui. Se o valor de x diminui o valor de y aumenta. (Avila, RPM 60, p. 34)

Utilizando novamente a função $y=f(x)=x^2$ e utilizando os novos conceitos de função crescente e função decrescente, vemos que nossa função é crescente para todo $x>0,$ é zero para $x=0$ é decrescente para $x<0.$ E como calculamos anteriormente, sua derivada é $y'=f'(x)=2x.$ E essa derivada é crescente para todo x.

Agora podemos responder às perguntas feitas no tópico 3.2.5. Lembre-se que a derivada é a declividade da reta tangente à curva em um de seus pontos. Como a derivada é crescente, ao aumentarmos o valor de x, aumentamos o valor da derivada o que significa dizer que aumentamos o declive da reta tangente cada vez que aumentamos o valor de x. Isso nos garante que a curva mantém sua concavidade voltada para cima.

Como a derivada se anula em $x=0,$ temos que a declividade também é zero na origem, ou seja, a reta tangente à curva é horizontal na origem, o que nos afirma que a curva passa por ali sem fazer bico. Portanto, a curva não pode ter outro aspecto que não seja o da figura 3.8. (Avila, RPM 60, p. 35)

Resolver os exercícios 3.2.4 do anexo único.

3.3. Modelos econômicos

3.3.1 FUNÇÃO DEMANDA

A demanda é a relação entre o preço de um bem e a quantidade necessária para atender os compradores. A lei de demanda diz que: se tudo permanecer constante, a quantidade demandada de um produto ou bem, varia inversamente proporcional a seu respectivo preço e vice versa. Assim, tanto podemos ter o preço em função da quantidade, quanto a quantidade em função do preço.

Definição 3.1 - Seja p o preço unitário de um produto e x a quantidade demandada deste produto oferecido no mercado por uma empresa. Então, a função que relaciona estas duas variáveis é chamada de função demanda e, denotamos por: $x=f(p)$ ou $p=g(x)$. (MULLER; GARCIA. 2012, Cap 3, p. 66).

Na definição 3.1, assumindo que $x=f(p)$, o preço p é a variável independente, enquanto que a quantidade x é a variável dependente.

A função demanda representa o comportamento do consumidor e pode depender de muitas variáveis, além da quantidade e do preço. Por exemplo, ela pode depender da renda e dos hábitos e preferências dos consumidores, bem como dos preços de possíveis substitutos daquele produto. Normalmente, trabalhamos com as variáveis preço e quantidade, porque a utilização de mais do que duas variáveis pode ser um complicador tanto para a elaboração do modelo matemático, quanto para a análise e interpretação dos resultados do ponto de vista do modelo econômico.

O modelo mais simples é representado matematicamente por uma equação linear, cujo gráfico é uma reta. O gráfico da função demanda é chamado de curva de demanda. Uma particularidade da função demanda e que é proveniente da lei de demanda é que a equação linear que a representa tem coeficiente angular negativo e coeficiente linear positivo. Ou seja,

$$x=f(p)=mp+b,\ \ m<0,\ \ b>0.$$

Definição 3.2 - A função inversa (quando existir) da função demanda é chamada função preço e é denotada por $p=g(x)$. (MULLER; GARCIA. 2012, Cap 3, p. 72).

Para nossos propósitos, a função demanda é linear. Assim, a inversa dela também é linear e tem a forma $p=g(x)=nx+c,$ com $n<0$. Para encontrar a inversa da função demanda $x=mp+b,$ procedemos como segue:

$$x=mp+b \iff mp+b=x \iff mp=x-b \iff \frac{1}{m}x-\frac{b}{m} \iff p=nx+c$$

em que $n=\frac{1}{m}$ e $c=\frac{-b}{m}$.

Assim, uma maneira direta de achar a inversa da função demanda é lembrar que na função preço, n é o inverso do coeficiente angular m e c é o negativo de b dividido pelo coeficiente angular m.

Exemplo 3.3.1 - Para a função demanda $x=-5000p+75000$, determine:

1. a quantidade demandada se o preço for igual a zero. Qual o significado econômico desse ponto?

2. a quantidade demandada se o preço for igual 4,00;

3. o preço de venda se a quantidade demandada for igual a zero. Qual o significado econômico desse ponto?

4. a função preço (a inversa da função demanda).

Solução.

1) $x(0)=-5000.0+75000=75000$

Economicamente, $x = 75000$ corresponde a uma estimativa de produção máxima.

2) $x(4{,}00) = -5000.4{,}00 + 75000 = -20000{,}00 + 75000{,}00 = 55000{,}00$

3) $0 = -5000.p + 75000 \Rightarrow 5000.p = 75000 \Rightarrow p = \frac{75000}{5000} = 15$

Economicamente, $p = 15$ é o preço máximo e, para este valor não há consumo.

4) $x = -5000\text{p} + 75000 \Rightarrow 5000\text{p} = 75000 - x \Rightarrow p = \frac{75000}{5000} - \frac{x}{5000} \Rightarrow p = \frac{-x}{5000} + 15$

3.3.2 FUNÇÃO OFERTA

A oferta é a relação entre o preço de um bem e a quantidade do mesmo que é oferecido pelos produtores. A lei da oferta diz que se tudo permanecer constante, a oferta de um produto, durante um período de tempo, varia diretamente proporcional ao preço. A rigor, a oferta de um produto depende essencialmente da quantidade, do preço, do custo do produto, da tecnologia com que se produz o produto, dos concorrentes, do clima, etc. Como antes, vamos considerar estas variáveis como constantes, exceto uma.

Definição 3.3 - Denotando por p o preço unitário de um produto e por x a quantidade oferecida no mercado daquele produto, então, denotamos por $p = f(x)$ a função que relaciona estas variáveis e a chamamos de função oferta. (MULLER; GARCIA. 2012, Cap 3, p. 74).

A função oferta descreve o comportamento do produtor. Seu gráfico é chamado de curva de oferta. O modelo mais simples da função oferta é o linear. Assim, o modelo linear deve ter coeficiente angular não negativo, uma vez que intuitivamente, quando o preço de um bem aumenta, a oferta aumenta, ou quando este mesmo preço decresce, a oferta decresce.

$$p = f(x) = ax + b, \quad a \geq 0.$$

O caso $a=0$, indica um preço constante independente da oferta.

Exemplo 3.3.2: Numa empresa a relação entre o preço p em reais e a quantidade x de unidades de certo produto é $x=p^2-p-6$. Determine, a partir de que preço havería oferta? A que preço a oferta será de 24 unidades. A partir de que preço a oferta será superior a 14 unidades? Quando a oferta ficará entre 14 e 66 unidades?

Solução. A empresa terá oferta se $x>0$, isto é, $p^2-p-6=(p-3)(p+2)>0$.

Como $p>0$, então, $p-3>0$, ou seja, $p>3$. Por outro lado, temos que

$$24=p^2-p-6 \Rightarrow (p-6)(p+5)=0 \Rightarrow p=6{,}00.$$

Agora, calculemos $p^2-p-6>14$. Como $p>0$, então, $p>5$. Finalmente, temos:

$$14<p^2-p-6<66 \Rightarrow 5<p<9.$$

Exemplo 3.3.3 - Quando o preço de mercado de certo produto atinge 300,00 reais por unidade, a fábrica não produz este produto. Quando o preço do produto aumenta 20,00 reais a fábrica disponibiliza 600 unidades do produto no mercado. Ache a função oferta se ela for linear.

Solução. Como a função é linear, então ela é da forma $p=f(x)=ax+b$. Para $x=0$ (a fábrica não produz), então, $f(0)=a.0+b=300$, ou seja, $b=300$. Assim, $p=ax+300$. Por outro lado, temos que $300+20=600a+300$, ou seja, $600\text{a}=20$ e, portanto, $a=\frac{1}{30}$. Portanto, a curva de oferta procurada é: $p(x)=\frac{x}{30}+300$.

3.3.3 FUNÇÃO CUSTO TOTAL E CUSTO MÉDIO

O custo para produzir certo produto ou serviço pode ser subdividido em custo fixo e custo variável. Os custos fixos são associados ao gasto da empresa decorrente de produzir ou não um produto e, independem da quantidade produzida. Por exemplo, aluguel ou algum tipo de imposto. O custo variável é o que muda de acordo com o volume de produção. Se não há produção o custo é zero.

Definição 3.4: - A função custo total representa o custo final para produzir x unidades de um certo produto.

Seja $C=C(x)$, a função custo total de uma empresa. Esta função tem duas componentes, a saber, o custo variável que representa gastos com matéria prima, mão de obra, entre outros, e o custo fixo. Se a quantidade produzida for zero, temos que $C(0)\geq 0$. Quando $C(0)=0$, então $C(0)$ representa o custo fixo de produção. O domínio desta função é determinado pelo produtor, considerando a quantidade máxima que pode produzir.

Definição 3.5: - Seja $C=C(x)$, a função custo total de uma empresa. A função custo médio é definida por:

$$CM(x)=\frac{C(x)}{x}, \quad x>0.$$

Esta função representa o custo para produzir uma unidade do produto.

Exemplo 3.3.4: Uma empresa para produzir *x* unidades de um certo tipo de produto tem como função de custo total $C(x)=2x^4+12x^3+9x+30$. Determine as funções de custo fixo, custo variável e custo médio. Calcule o custo para fabricar 10 unidades.

Solução. A função custo total pode ser reescrita como:

$C(x)= 30+2x^4+12x^3+9x= Cf+Cv$, em que $Cf=30$ é o custo fixo e $Cv=2x^4+12x^3+9x$ é o custo variável.

Por definição, o custo médio é:

$$Cm(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x^4+12x^3+9x+30}{x} = 2x^3+12x^2+9+\frac{30}{x}; \quad x>0.$$

O custo para fabricar 10 unidades é: $C(10)=32120$ unidade monetária.

3.3.4 FUNÇÃO RECEITA TOTAL E RECEITA MÉDIA

A receita total é a quantidade total paga pelos compradores aos vendedores por um certo bem.

Definição 3.6: A função receita total de uma empresa é todo dinheiro que recebe pela venda de seus produtos e/ou serviços. Isto é, se $p=f(x)$ é uma função preço, então, a função receita total é dada por:

$$R(x)=xf(x).$$

Da definição segue que a função receita total depende da função oferta, que por sua vez depende do número de unidades vendidas. Se $x>0$, então $\frac{R(x)}{x}=f(x)$ é a receita média por unidade, que é igual à oferta por unidade.

Exemplo 3.3.5 - Uma montadora de carros tem como função receita total $R(x)=5\mathrm{x}-3\mathrm{x}^2$ para um certo tipo de carro. Encontre a função oferta e esboce ambos os gráficos.

Solução. - Vamos reescrever a função receita total como:

$R(x)= 5x-3x^2= x(5-3x)= xf(x)$. Portanto, $p=f(x)=5-3\mathrm{x}$ é a função oferta da montadora.

3.3.5 FUNÇÃO LUCRO

O lucro é a relação entre os benefícios de uma empresa e a quantidade de bens e/ou serviços que esta produz.

Definição 3.7 - A função lucro é a quantidade de dinheiro que uma empresa obtém por produzir e vender uma certa quantidade de bens e/ou serviços. Em outras palavras, se $C=C(x)$ é a função custo e $R=R(x)$ é a função receita de uma empresa, então, a função lucro é definida por: (Muller; Garcia. 2012, Cap 2, p. 48).

$$L(x)=R(x)-C(x).$$

Definição 3.8 - A função lucro médio é definida por:

$$L_M(x)=\frac{L(x)}{x}, \quad x>0$$

O lucro médio representa o ganho obtido em produzir e vender uma unidade do produto.

Exemplo 3.3.6: Um laboratório farmacêutico tem um novo medicamento que deseja colocar no mercado. Estudos de mercado indicam que a demanda anual do produto depende essencialmente do preço. Estimou-se que a função demanda para produzir este remédio é $x+500\,p=250000,$ em que p é dado em reais e x é a quantidade de caixas. Por outro lado, o custo de produção deste remédio é $C(x)=300000-300\,x-(0{,}25)(2).$ Determine a função lucro. Qual é o lucro se vender 1000 caixas do remédio?

Solução. - A função lucro é definida como $L(x)=R(x)C(x).$ Como conhecemos a função custo total, precisamos encontrar a função receita, isto é $R(x)=xf(x)=xp.$

$$x+500\,p=250000 \;\Rightarrow\; p=\frac{-x}{500}+500 \;\Rightarrow\; R(x)=x(\frac{-x}{500}+500)=500\,x-\frac{x^2}{500}.$$

Logo, $L(x)=\; R(x)-C(x)=\; 500\,x-\dfrac{x^2}{500}-300000+300\,x+0{,}25\,x^2=\; 0{,}248\,x^2+800\,x-300000$

O lucro para vender 1000 caixas do remédio é $L(1000)=748000$ reais.

3.3.6 EQUILÍBRIO DA OFERTA E DA DEMANDA

Em geral, o equilíbrio é relativo às condições do mercado que tendem a persistir. Se a determinado preço as quantidades de produtos que o produtor deseja vender se igualam às quantidades que os consumidores desejam comprar, diz-se que o mercado está em equilíbrio.

Definição 3.9 - O equilíbrio de mercado ocorre na intersecção das curvas de demanda e de oferta. O ponto de intersecção é dito ponto de equilíbrio do mercado; a ordenada do ponto é dita preço de equilíbrio do mercado e a abscissa do ponto representa a quantidade de equilíbrio do mercado. (Muller; Garcia. 2012, Cap 2, p. 50).

Em mercados perfeitamente competitivos, se o preço de mercado de um produto está acima do preço de equilíbrio, temos excesso de oferta, o que deve abaixar os preços. Quando o preço de mercado de um produto está abaixo do preço de equilíbrio, temos excesso de demanda, o que eleva os preços do produto.

Exemplo 3.3.7 - A demanda e a oferta de um certo produto fabricado por uma empresa são dadas pelas seguintes equações:

$$x^2 + p^2 - 25 = 0 \qquad p^2 - 8x + 8 = 0.$$

1. Ache o ponto de equilíbrio.

2. Se o preço for 2 u. m., existe excesso de oferta ou de demanda. Determine o excesso.

Solução.

1. Devemos resolver o sistema: $\begin{cases} x^2 + p^2 - 25 = 0 \\ p^2 - 8x + 8 = 0. \end{cases}$ Obtemos $p=4$ e $x=3.$ Portanto, o ponto de equilíbrio é (4, 3). Observe que a função demanda é dada por $x=\sqrt{25-p^2},\ 0 \leqslant p \leqslant 5.$

2. Para $p=2,$ a quantidade demandada é $x^2 = 25 - 4 = 21,$ isto é, $x=\sqrt{21}$ e a quantidade ofertada é $\frac{3}{2}.$ Então, existe falta de oferta igual a $\sqrt{21} - \frac{3}{2} \simeq 3{,}08.$

Resolver os exercícios 3.3.1 do anexo único.

4. DERIVADA

Neste capítulo abordaremos a derivada como taxa instantânea de variação. Também introduziremos algumas técnicas de diferenciação com a finalidade de mostrar ao aluno que não é necessário utilizar sempre a definição de derivada.

4.1 Variação

Variações estão por todo lado. A temperatura exterior, a população de uma cidade, o preço de uma ação, o tamanho de um tumor e a velocidade de uma bola de futebol. Nos setores econômicos a palavra variação é particularmente importante, pois, ela pode levar ao sucesso ou à falência.

Quando uma certa quantidade de mercadorias x_1, muda para um novo valor x_2, a mudança é medida pela diferença entre as duas quantidades e dada por

$$\Delta x = x_2 - x_{1.}$$

A variação na quantidade de mercadoria pode levar a uma variação no lucro. (Muller; Garcia. 2012, Cap 4, p. 109).

Exemplo 4.1.1 - Suponhamos que $L(x) = -\dfrac{x^2}{5000} + 8{,}46\text{x} - 19800$ seja o modelo matemático que fornece a função lucro de uma determinada empresa. Consideremos os seguintes intervalos de variação da quantidade x, em quilogramas: (19000, 21000), (21000, 22000) e (19000, 22000). Determine a variação da função lucro, nestes intervalos.

<u>Solução</u>.

1. Para o primeiro caso: $L(x) = L(21000) - L(19000) = 69660 - 68740 = 920 \ \ reais$

2. Para o segundo caso: $L(x) = L(22000) - L(21000) = 69520 - 69660 = -140 \ \ reais$

3. Para o terceiro caso: $L(x)=L(22000)-L(19000)=69520-68740=780 \quad reais$

Os três casos anteriores mostram que, no primeiro, houve um acréscimo no lucro ao aumentarmos a quantidade de 19000 para 21000. No segundo, houve um decréscimo no lucro ao aumentarmos a quantidade de 21000 para 22000. No terceiro caso, houve um acréscimo no lucro ao aumentarmos a quantidade de 19000 para 22000. No segundo caso, o decréscimo no lucro não significa que este é negativo, mas que o lucro gerado por x_2 é menor do que o lucro gerado por x_1.

Resumindo:

Uma variação Δx a partir de uma quantidade inicial x_1 leva a uma variação L no lucro representado por: $\Delta L=L(x_1+\Delta x)-L(x_1)$.

4.1.1 TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO

Para termos a noção de como o lucro varia em média, conforme aumentamos ou diminuímos gradualmente a quantidade, fazemos:

$$TMV(L)=\frac{\Delta L}{\Delta x}=\frac{L(x_1+\Delta x)-L(x_1)}{x_2-x_1}$$

em que $x_2=x_1+\Delta x$ e $TMV(L)$ significa taxa média de variação de L. A taxa média de variação também é chamada de quociente da diferença (Muller; Garcia. 2012, Cap 4, p. 112). Assim, no exemplo 4.1.1, temos:

1. No primeiro caso: $TMV(L)=\frac{\Delta L}{\Delta x}=\frac{920}{2000}=0{,}46$

Esta taxa média significa que a partir de 19000 kg de mercadorias $(x_1=19000)$, ao acrescentarmos 2000 kg $(\Delta x=2000)$ obteremos um acréscimo médio no lucro, por quilograma de mercadoria acrescida, de 0,46 reais.

2. No segundo caso: $TMV(L)=\frac{\Delta L}{\Delta x}=\frac{-140}{1000}=-0,14$

Esta taxa média significa que a partir de 21000 kg de mercadorias $(x_1=21000)$, ao acrescentarmos 1000 kg $(\Delta x=1000)$ obteremos um decréscimo médio no lucro, por quilograma de mercadoria acrescida, de 0,14 reais.

3. No terceiro caso: $TMV(L)=\frac{\Delta L}{\Delta x}=\frac{780}{3000}=0,26$

Esta taxa média significa que a partir de 19000 kg de mercadorias $(x_1=19000)$, ao acrescentarmos 3000 kg $(\Delta x=3000)$ obteremos um acréscimo médio no lucro, por quilograma de mercadoria acrescida, de 0,26 reais.

OBSERVAÇÕES:

O estudo de grandes variações na quantidade (grandes x), esconde variações no lucro proporcionadas por pequenos x.

Exemplo 4.1.2 - Considere a função lucro $L(x)=-x^2+70x-400$.

1. Determine a variação no lucro para as condições seguintes, em que x_1 é a quantidade inicial produzida e x_2 é a quantidade final produzida.

(a) de $x_1=30$ para $x_2=34$; (b) de $x_1=34$ para $x_2=37$; (c) de $x_1=30$ para $x_2=37$.

2. Obtenha a expressão da taxa média de variação para a função lucro dada.

3. Usando a equação do item 2, calcule a taxa média de variação para cada um dos casos anteriores. Interprete seus resultados.

<u>Solução</u>.

Item 1:

Para o caso a):
$$L(30)=-30^2+70.30-400=800$$
$$L(34)=-34^2+70.34-400=824$$
$$\Delta L=L(34)-L(30)=824-800=24$$

Para o caso b):
$$L(34)=-34^2+70.34-400=824$$
$$L(37)=-37^2+70.37-400=821$$
$$\Delta L=L(37)-L(34)=821-824=-3$$

Para o caso c):
$$L(30)=800$$
$$L(37)=821$$
$$\Delta L=L(37)-L(30)=821-800=21$$

Item 2):
$$\begin{aligned}
&\Delta L=L(x_2)-L(x_1) \Leftrightarrow\\
&\Delta L=L(x_1+\Delta x)-L(x_1) \Leftrightarrow\\
&\Delta L=-(x_1+\Delta x)^2+70(x_1+\delta x)-400-(-x_1^2+70x_1-400) \Leftrightarrow\\
&\Delta L=-x_1^2-2x_1\Delta x-\Delta x^2+70x_1+70\Delta x-400+x_1^2-70x_1+400 \Leftrightarrow\\
&\Delta L=-2x_1\Delta x-\Delta x^2+70\Delta x \Leftrightarrow\\
&\Delta L=\Delta x(-2x_1-\Delta x+70) \Leftrightarrow\\
&\frac{\Delta L}{\Delta x}=-2x_1-\Delta x+70.
\end{aligned}$$

Item 3): Para $x_1=30\ e\ \Delta x=4,$ temos $\frac{\Delta L}{\Delta x}=-2.30-4+70=6$

Este resultado significa que, a partir de $x_1=30$ (30 unidades produzidas), ao acrescentarmos 4 unidades $(x=4)$ obteremos um acréscimo médio no lucro, por unidade acrescida, de 6 reais.

Para $x_1=34\ e\ \Delta x=3,$ temos $\frac{\Delta L}{\Delta x}=-2.34-3+70=-1$

Este resultado significa que, a partir de $x_1=34$ (34 unidades produzidas), ao acrescentarmos 3 unidades $x=3$ obteremos um decréscimo médio no lucro, por unidade acrescida, de 1 real.

Para $x_1=30\ e\ \Delta x=7,$ temos $\frac{\Delta L}{\Delta x}=-2.30-7+70=3$

Este resultado significa que, a partir de $x_1=30$ (30 unidades produzidas), ao acrescentarmos 7 unidades $x=7$ obteremos um acréscimo médio no lucro, por unidade acrescida, de 3 reais.

Resolver os exercícios 4.1.1 do anexo único.

4.1.2 TAXA INSTANTÂNEA DE VARIAÇÃO - DERIVADA

Se a variação na quantidade for muito pequena, ou seja, matematicamente indicamos esse fato por $x \Rightarrow 0,$ teremos uma variação no lucro muito pequena. Contudo, a razão $\frac{\Delta L}{\Delta x}$ continuará representando uma taxa de variação. Neste caso, como o intervalo entre x_1 e x_2 é muito pequeno (infinitesimal), $\frac{\Delta L}{\Delta x}$ representará uma variação instantânea no lucro. (Muller; Garcia. 2012, Cap 4, p. 117):

No Exemplo 4.1.2, chegamos à expressão: $\frac{\Delta L}{\Delta x} = -2x_1 - \Delta x + 70.$

Se, nesta expressão, fizermos $\Delta x \Rightarrow 0,$ cuja representação matemática é $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x},$ obteremos: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x_1 - \Delta x + 70) = -2x_1 + 70$

Esta última expressão, representada por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x}$

corresponde a uma nova função que deriva da função lucro $L(x)$. Assim, essa nova função é a derivada da função $L(x)$.

Notação: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} = \frac{dL}{dx}$

Esta notação é devida a Leibniz (1646-1716).

Como a função derivada $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x}$ deriva da função $L(x)$ (chamada de primitiva), outra notação interessante que faz lembrar quem é a primitiva (ou função que deu origem à derivada) é:

$$L'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x}$$

Esta notação, em que $L'(x)$ é a derivada da primitiva $L(x)$ foi sugerida pelo físico e matemático Lagrange (1736-1813).

Resumindo:

1. A variação no lucro é chamada de taxa de variação. Representamos por $\Delta L = L(x_1 + \Delta x) - L(x_1)$, em que $x_1 + \Delta x = x_2$.

2. Definimos como taxa média de variação, ou quociente diferencial.

3. Quando $\Delta x \Rightarrow 0$, ou seja a variação na quantidade é infinitesimal, obtemos a taxa instantânea de variação: $\frac{dL}{dx} = L'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x}$

Este resultado é conhecido como derivada da função lucro. Esta derivada indica que, se uma variação instantânea ocorrer na quantidade x, então isto acarretará um acréscimo $L'(x_1) > 0$ ou um decréscimo $L'(x_1) < 0$ no lucro.

Exemplo 4.1.3 - Considere a equação $L(x) = -x^2 + 70x - 400$. Calcule:

1. $L'(30)$ 2. $L'(34)$ 3. $L'(37)$

<u>Solução</u>. Sabemos que a função derivada de $L(x)$ é $\frac{dL}{dx} = L'(x) = -2x + 70$. Então,

1. Para $x = 30$, encontramos $L'(30) = -2.30 + 70 = 10$

Isto significa que a partir de $x = 30$, um acréscimo infinitesimal na quantidade provocará um lucro adicional de de 10 reais.

2. Para $x = 34$, encontramos $L'(34) = -2.34 + 70 = 2$

Isto significa que a partir de $x=34,$ um acréscimo infinitesimal na quantidade provocará um lucro adicional de de 2 reais.

3. Para $x=37,$ encontramos $L'(37)=-2.37+70=-4$

Isto significa que a partir de $x=37,$ um acréscimo infinitesimal na quantidade provocará uma diminuição no lucro de 4 reais. Observemos que uma diminuição no lucro não implica lucro negativo, ou seja, prejuízo. Significa, apenas, que aumentar a produção a partir de $x=37,$ não é interessante.

Resolver os exercícios 4.1.2 do anexo único.

4.1.3 FUNÇÕES MARGINAIS

As derivadas das funções gasto, receita e lucro recebem denominações especiais, visto a sua grande importância para a área de negócios.

1. Função Gasto marginal é o nome que damos à $G'(x)$, derivada da Função Gasto;

2. Função Receita marginal é o nome que damos à $R'(x)$, derivada da Função Receita;

3. Função Lucro marginal é o nome que damos à $L'(x)$, derivada da Função Lucro. (Muller; Garcia. 2012, Cap 4, p. 121).

Observação:

Ao processo de derivação damos o nome de cálculo diferencial. O cálculo tem como objetivo extrair informações de funções sem necessitar do gráfico, ou seja, pode caminhar paralelamente à análise gráfica. Há vantagens em utilizar o cálculo diferencial em detrimento de taxas médias. De fato, utilizar intervalos de x grandes pode levar a interpretações erradas.

Resolver os exercícios 4.1.2 do anexo único.

4.2 Técnicas de diferenciação

Neste tópico iremos nos dedicar apenas à compreensão das técnicas conhecidas para a derivação de funções. O domínio destas técnicas nos permitirá maior agilidade nos cálculos.

Definição 4.1: A derivada de uma função f é:

$$f'(x)=\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

A partir de agora vamos desenvolver técnicas para derivar uma função, sem ter que utilizar a definição 4.1. (Muller; Garcia. 2012, Cap 5, p. 127).

4.2.1 DERIVADA DA FUNÇÃO CONSTANTE

Definimos função constante toda função do tipo

$f(x)=C,$ em que C é um número real.

A derivada da função constante é sempre igual a zero, isto é, dado $f(x)=C,$ então, $f'(x)=0$ para todo número real C. Isto corresponde a perguntar: Qual a variação em $f(x)$ quando x varia infinitesimalmente? A resposta é que não importa o quanto x varie, $f(x),$ sendo constante, não varia. (Muller; Garcia. 2012, Cap 5, p. 128).

4.2.2 DERIVADA DA FUNÇÃO POTÊNCIA

As funções polinomiais são formadas por potências do tipo $x^n,$ em que a variável x é a base e n é o expoente. Assim, uma função potência é do tipo

$f(x)=x^n, n\in\mathbb{R}$ com $\mathbb{R}=Conjuntos\ \ dos\ \ números\ \ reais.$ A derivada da função potência é: (Muller; Garcia. 2012, Cap 5, p. 129)

$$f'(x)=\frac{df}{dx}=nx^{n-1}$$

Exemplo 4.2.1 - Derive as funções:

1. $f(x)=x^3$ 2. $f(x)=x$ 3. $f(x)=\frac{1}{x}$

4. $g(x)=\frac{1}{x^4}$ 5. $h(x)=\sqrt{x}$

Solução.

1. $f'(x)=3\mathrm{x}^{3-1}=3\mathrm{x}^2$

2. $f'(x)=1.\mathrm{x}^{1-1}=x^0=1$

3. Esta função é do tipo potência, pois, pode ser escrita como $f(x)=x^{-1}$, Assim,

$f'(x)=-1.\mathrm{x}^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

4. Analogamente, $g(x)=x^{-4}$. Assim, $g'(x)=-4\mathrm{x}^{-4-1}=-4\mathrm{x}^{-5}=-\frac{4}{x^5}$

5. A função $h(x)=\sqrt{x}$ pode ser escrita como uma função potência, na forma

$h(x)=x^{\frac{1}{2}}$. Assim, $h'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

4.2.3 FUNÇÕES DO TIPO: $f(x)=cx^n$

A derivada de uma função potência multiplicada por um número real:

$$f'(x) = cnx^{n-1}$$

4.2.4 DERIVADA DA SOMA

Consideremos uma função *f*, definida como a soma (diferença) de *n* outras funções, isto é: (Muller; Garcia. 2012, Cap 5, p. 133)

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \quad \text{ou} \quad f(x) = f_1(x) - f_2(x) - \cdots - f_n(x).$$

Então, a derivada de *f* é definida por:

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \cdots + f'_n(x), \quad \text{ou} \quad f'(x) = f'_1(x) - f'_2(x) - \cdots - f'_n(x)$$

Exemplo 4.2.2 - Derive a função $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} + 3x^{-4}$

Solução. - Neste caso, observemos que a função f dada é composta, por exemplo, de três funções, a saber, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{2}{x}$ e $f_3(x) = 3x^{-4}$. De acordo com a definição de derivada da soma (Eq. 3.8 e 3.9), basta diferenciarmos cada uma delas e depois fazer a junção. Ou seja:

$$f'_1(x) = 2x$$
$$f'_2(x) = -2x^{-2}$$
$$f'_3(x) = -12x^{-5}.$$

Assim, a derivada de *f* é: $f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + f'_3(x) = 2x - 2x^{-2} - 12x^{-5}$

4.2.5 DERIVADA DO PRODUTO

Consideremos uma função *f* escrita como o produto de duas ou mais funções, como, por exemplo

$$f(x)=u(x).v(x)$$

Então, a derivada de f é definida como: $f'(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$

(Muller; Garcia. 2012, Cap 5, p. 135)

Exemplo 4.2.3 - Derive $f(x)=(x^5-3\mathrm{x})(3\mathrm{x}^2-x^{\frac{1}{2}})$

<u>Solução</u>. - Neste caso, a função f dada é composta das funções $u(x)=(x^5-3\mathrm{x})$ e $v(x)=3x^2-x^{\frac{1}{2}}$. De acordo com a definição de derivada do produto, vamos necessitar das derivadas de cada uma das funções u e v. Derivando, temos:

$$u'(x)=(5\mathrm{x}^4-3) \text{ e } v'(x)=(6x-\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}})$$

Portanto, aplicando a definição de derivada do produto, obtemos:

$$f'(x)=(5\mathrm{x}^4-3)(3\mathrm{x}^2-x^{\frac{1}{2}})+(x^5-3\mathrm{x})(6\mathrm{x}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$$

Essa expressão pode ser simplificada, resultando em:

$$f'(x)=-\frac{11}{2}x^9+21\mathrm{x}^6-27\mathrm{x}^2+\frac{9}{2}x.$$

4.2.6 DERIVADA DO QUOCIENTE

Consideremos uma função f escrita como a razão entre duas funções.

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

Então, a derivada de f é definida como: (Muller; Garcia. 2012, Cap 5, p. 137)

$$f'(x)=\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$$

Exemplo 4.2.4 - Derive a função $f(x)=\frac{3x^2}{x^5}$.

Solução. $u(x)=3x^2 \Rightarrow u'(x)=6x$ e $v(x)=x^5 \Rightarrow v'(x)=5x^4$

Substituindo na definição, temos:

$$f'(x)=\frac{6x.x^5-5x^4.3x^2}{(x^5)^2}=\frac{6x^6-15x^6}{x^{10}}=-\frac{9x^6}{x^{10}}=-\frac{9}{x^4}$$

Resolver os exercícios 4.2.1 do anexo único.

4.2.7 DERIVADA DA FUNÇÃO SENO

Dada a função: $f(x)=sen(x)$

A derivada da função seno é: $f'(x)=\frac{df}{dx}=\cos(x)$

4.2.8 DERIVADA DA FUNÇÃO COSSENO

Dada a função: $f(x)=\cos(x)$

A derivada da função cosseno é: $f'(x)=\frac{df}{dx}=-sen(x)$

Resolver os exercícios 4.2.2 do anexo único.

5. APLICAÇÕES DA DERIVADA

Neste capítulo abordaremos as aplicações mais frequentes da derivada e que são muito cobrados em provas do ENEM e de outros vestibulares. As técnicas de derivação nos permitirão trabalhar com modelos econômicos de uma forma mais ampla.

Exemplo 5.1.1 - Considere que $L(x)=0,4x^2+58x+46$ seja o lucro para x mercadorias. Calcule:

1. O lucro obtido com 50 mercadorias.

2. O lucro obtido com 51 mercadorias.

3. A taxa de variação no lucro ao aumentarmos de 50 para 51 mercadorias.

4. O lucro marginal.

5. O lucro marginal para 50 mercadorias, interpretando o resultado.

<u>Solução</u>.

1. $L(50)=0,4.(50)^2+58.50+46=3946.$ O lucro obtido com 50 mercadorias é de 3946, 00 reais.

2. $L(51)=0,4.(51)^2+58.51+46=4044{,}4.$ O lucro obtido com 51 mercadorias é de 4044,40 reais.

3. $\Delta L=L(51)-L(50)=98{,}4.$ Ao aumentarmos de 50 mercadorias para 51 mercadorias, obteremos um lucro adicional de 98,40 reais.

4. $L'(x)=0,8x+58,$ que é a nossa função lucro marginal derivada da função lucro original.

5. $L'(50)=0,8.50+58=98,$ cujo significado é: Ao variarmos infinitesimalmente a quantidade de mercadorias, a partir de 50 unidades, teremos um lucro adicional instantâneo de 98,00 reais. Comparando o item 3 com o item 5, observamos que $L'(50)$ é,

aproximadamente, o lucro adicional obtido ao aumentarmos de 50 mercadorias para 51 mercadorias.

Exemplo 5.1.2 - A receita de uma empresa é de $R(x)=\frac{1}{2}x^3-120x^2+3500x,$ em que x é a quantidade de mercadoria vendida.

1. Calcule a variação na receita ao aumentarmos a venda de 220 mercadorias para 221 mercadorias.

2. Calcule o acréscimo aproximado na receita gerada pela 221 mercadoria.

Solução.

1.
$$\begin{aligned}
&R(220)=\ \frac{1}{2}.(220)^3-120.(220)^2+3500.220=\ 286000\ \ reais\\
&R(221)=\ \frac{1}{2}.(221)^3-120.(221)^2+3500.221=\ 309510,50\ \ reais\\
&\Delta R=\ R(221)-R(220)=\ 309510,50-286000=\ 23510,20\ \ reais.
\end{aligned}$$

2. Como pudemos observar no exemplo anterior, a receita marginal de 220 nos fornece, aproximadamente, o acréscimo gerado pela 221 mercadoria. Portanto:

$$\begin{aligned}
&R'(x)=\ \frac{3}{2}x^2-240x+3500\\
&R'(220)=\ \frac{3}{2}(220)^2-240.220+3500=\ 23300\ \ reais
\end{aligned}$$

Exemplo 5.1.3 - A função demanda para um certo tipo de vestuário é $x=105+30p-1{,}5p^2,$ em que p é o preço por unidade e x a quantidade demandada.

1. Encontre a taxa de variação instantânea da demanda quando o preço é igual a 5 reais e interprete.

2. Encontre a taxa de variação instantânea da demanda quando o preço é igual a 11 reais e interprete.

3. Verifique se a partir de um preço igual a 15 reais é conveniente aumentá-lo sob

o ponto de vista da receita.

Solução.

1. $x'(p)=30-3p$. Portanto, $x'(5)=30-3.5=15$. Isto significa que, se aumentarmos o preço de 5 reais para um valor "um pouco" maior (digamos, aproximadamente 6 reais), a quantidade demandada aumentará.

2. $x'(11)=30-3.11=-3$. Significa que, ao aumentarmos o preço de 11 reais em uma quantidade pequena, a demanda cairá.

3. Receita é definida por: $R=px$. Substituindo a função demanda nesta equação, temos: $R(p)=\ p(105+30p-1{,}5\,p^2)=\ 105\,p+30\,p^2-1{,}5\,p^3$. Assim temos:

$$R'(p)=\ 105+60\,p-4{,}5\,p^2$$
$$R'(15)=\ 105+60.15-4{,}5.(15)^2=\ -7{,}5\ \ reais.$$

Como a taxa de variação instantânea é negativa, concluímos que não é conveniente aumentar as vendas a partir de 15 reais.

Resolver os exercícios 5.1.1 do anexo único.

Exemplo 5.1.4 - A função demanda para um certo produto é: $x=-p^2+50\,p-225$, em que x é a quantidade demandada de produtos e p é o preço, em reais. Esta função é válida para preços que variam entre 25,00 reais e 45,00 reais (domínio da função).

1. Encontre a variação percentual no preço desse produto quando ele sofre um aumento de 40,00 reais para 42,00 reais.

2. Encontre a variação percentual na quantidade demandada quando o preço passa de 40,00 reais para 42,00 reais.

3. Determine a variação percentual na quantidade demandada em função da

variação percentual no preço. Interprete.

Solução.

1. $p=40 \quad e \quad \Delta\, p=42-40=2.$ Então, $\frac{\Delta\, p}{p}=\frac{2}{40}=0,05 \quad \text{ou } 5\%$

$$x(40)= \ -40^2+50.40-225= \ 175 \quad unidades$$
$$x(42)= \ -42^2+50.42-225= \ 111 \quad unidades$$

2. $\Delta\, x= \ x(42)-x(41)= \ 111-175= \ -64$

$$\frac{\Delta\, x}{x(40)}= \ \frac{-64}{175}= \ -0{,}366\, ou-36{,}6$$

Interpretação: Quando o preço aumenta em 5% a partir de 40,00 reais, a quantidade demandada sofre um decréscimo de 36,6%.

3. Dividindo-se os resultados obtidos em (1) e (2), calculamos a variação percentual pedida:

$$\frac{\frac{\Delta\, x}{x(40)}}{\frac{\Delta\, x}{40}}= \ \frac{-36,6}{5}= \ -7,32$$

Interpretação: Quando o preço do produto aumentar em 1% a partir de 40,00 reais, a quantidade demandada cairá em 7,32%, ou ainda, se o preço do produto diminuir em 1% a partir de 40,00 reais, a quantidade demandada aumentará em 7,32%. (Muller; Garcia. 2012, Cap 6, p. 141)

5.1 Elasticidade de Demanda Pontual

Definição 5.1 - Elasticidade de demanda pontual é definida por:

$$\varepsilon\, d=\frac{x\,'(p)}{\frac{x}{p}}$$

(Muller; Garcia. 2012, Cap 6, p. 147) em que εd é a elasticidade de demanda no ponto *(p, x)* e fornece a variação percentual aproximada na quantidade em função da variação de 1% no preço. A elasticidade da demanda é uma grandeza adimensional.

O conceito de elasticidade de demanda tem grande aplicação à economia e administração, pois é frequentemente utilizado para medir o modo como a demanda por um certo produto responde às variações no seu preço.

Quando o preço p aumenta a demanda x diminui. Assim, εd é sempre negativo. Portanto, a análise da elasticidade é feita considerando o valor absoluto, isto é, $|\varepsilon d|$.

1. Se $|\varepsilon d|>1,$ então temos demanda elástica. Isto significa que um aumento de 1% no preço leva a uma diminuição maior do que 1% na demanda e vice-versa. Ou, ainda, uma diminuição de 1% no preço leva a um aumento maior do que 1% na demanda e vice-versa. Em outras palavras, a demanda de um produto que tem $|\varepsilon d|>1$ é bastante sensível às oscilações de seu preço. Isto é característica de produtos que apresentam concorrentes diretos ou substitutos similares no mercado.

2. Se $|\varepsilon d|<1,$ então temos demanda inelástica. Isto significa que um aumento de 1% no preço leva a uma diminuição menor do que 1% na demanda e vice-versa. Ou, ainda, uma diminuição de 1% no preço leva a um aumento menor do que 1% na demanda e vice-versa. Em outras palavras, a demanda de um produto que tem $|\varepsilon d|<1$ é pouco sensível às oscilações de seu preço. Isto é característica de gêneros de primeira necessidade ou de mercados monopolizados.

3. Se $|\varepsilon d|=1,$ então temos demanda unitária. Isto significa que um aumento no preço leva à mesma diminuição relativa na demanda.

4. Se $|\varepsilon d|=0,$ então isto significa que o aumento ou diminuição no preço não altera a demanda. Este fenômeno ocorre para um mercado no qual há várias empresas atuando na mesma área de forma que nenhuma consegue afetar o mercado por intermédio do preço ou da produção. é o que chamamos de concorrência perfeita. Aqui, a função demanda está sendo vista sob a ótica do mercado global.

Exemplo 5.1.5 - A função demanda da dúzia de rosa é

$x(p) = -100\,p^2 - 200\,p + 3500.$

1. Calcule a demanda para $p = 2.$

2. Calcule a elasticidade da demanda para $p = 2$ e interprete.

3. Calcule a elasticidade da demanda para $p = 3$ e interprete.

4. Se o preço de 3,00 reais é aumentado em 2% qual a variação na demanda?

<u>Solução.</u>

1. $x(2) = -100.2^2 - 200.2 + 3500 = 2700$ dúzias. Assim, para o preço de 2,00 reais serão procuradas para a compra 2700 dúzias de rosas.

2.
$$
\begin{aligned}
&x'(p) = -200\,p - 200 \\
&x'(2) = -200.2 - 200 = -600 \\
&\varepsilon d = \frac{x'(2)}{\frac{x(2)}{2}} = \frac{-600}{\frac{2700}{2}} = -0{,}44 \\
&\varepsilon d(2) = -0{,}44
\end{aligned}
$$

Significa que ao aumentarmos o preço em 1%, ou seja, de 2,00 reais para 2,02 reais a demanda cai aproximadamente em 0,44%, ou seja, de 2700 dúzias para aproximadamente 2688 dúzias de rosas. Neste caso temos uma demanda inelástica na região (naquele intervalo) de preço 2,00 reais, ou seja, a demanda sente pouco a variação do preço.

3.$\varepsilon d(3) = -1{,}\ 20\%$. Significa que ao aumentarmos o preço em 1% (de 3,00 reais para 3,03 reais) a demanda cai, aproximadamente, em 1,20%. Temos, então, uma demanda elástica na região de preço 3,00 reais, ou seja, a demanda sente bastante a variação do preço. De fato, calcule $x(3)$ e depois 1,20% de $x(3)$. Então, compare com o item 2.

4.

$p + 1\% \rightarrow x - 1{,}\ 20\%$

$p + 2\% \rightarrow x - 2.1, 20\% = x - 2, 40\%$

Portanto, a variação na demanda é, aproximadamente, 2,40%. De fato, se $p=3$ aumenta 2%, ou seja, passa para 3,06, então a variação percentual foi de $\frac{\Delta p}{p} = \frac{0{,}02}{3}$ = 0, 66%. Por outro lado, a variação percentual na quantidade foi de $\frac{\Delta x}{x(3)} = \frac{48}{2000} = 0{,}024$ = 2, 40%.

Exemplo 5.1.6 - Suponha que x equivale a 100 balas de caramelo na função de demanda semanal $x = 0{,}75\,p^2 - 31{,}50\,p + 330{,}75,$ em que $0 \leqslant p < 21.$

1. Calcule a demanda x quando o preço de cada bala for 0,05 reais.

2. Calcule a elasticidade de demanda para o preço de 0,05 reais por bala.

3. Se pretendermos um aumento percentual de aproximadamente 2% na demanda, qual deve ser a variação do preço?

4. Calcule a elasticidade de demanda para $p = 10$ e interprete.

5. Idem para $p = 20.$

6. Compare os itens 2, 4 e 5.

<u>Solução</u>. - Esta função decresce para $p \geq 10$ e $p < 21.$ Fora deste intervalo, ela não corresponde a uma função demanda.

1. uma bala ⇒ 0,05

cem balas ⇒ 5,00 ⇒ $p = 5.$

$$x(5) = 0{,}75 \,.\, 5^2 - 31{,}50 \,.\, 5 + 330{,}75 = 192$$

Isto significa que para o preço de 0,05 por bala a demanda será de 192 centenas de balas por semana.

2. $$\begin{aligned} x'(p) &= 1{,}5\,p - 31{,}5 \\ x'(5) &= 1{,}5\,.\,5 - 31{,}5 = -24 \\ \varepsilon d &= \frac{x'(5)}{\frac{x(5)}{5}} = \frac{-24}{\frac{192}{5}} = 0{,}625 \end{aligned}$$

Isto significa que, ao aumentarmos o preço da bala em 1%, a demanda cairá em 0, 625%. Portanto, temos uma demanda inelástica.

3. Com $p=5$ a demanda é $x=192.$ Se aumentarmos a demanda em 2%, então, a variação no preço é calculada como:

$$\begin{aligned} &p+0{,}01\,p \quad \square \quad x-0{,}0063\,x \\ &p-p_1\,p \quad \square \quad x+0{,}02\,x \\ &1{,}01\,p \quad \square \quad 0{,}9937\,x \\ &(1-p_1)\,p \quad \square \quad 1{,}02\,x \end{aligned}$$ Assim,

$$\begin{aligned} 1{,}02\,x &= \frac{(1-p_1)\,p\,.0{,}9937\,x}{1{,}01\,p} \\ 1{,}02 &= \frac{(1-p_1)0{,}9937}{1{,}01} \\ 0{,}9937\,p_1 &= 0{,}9937-1{,}0302 \\ p_1 &= -\frac{0{,}0365}{0{,}9937} \\ p_1 &= -0{,}0367 \end{aligned}$$ Portanto, devemos diminuir o preço em 3, 7%.

4. $\varepsilon d(10)$ = 1, 82%

A demanda é elástica, o que significa se aumentarmos o preço em 1% a demanda cai em aproximadamente 1, 82%.

5. $\varepsilon d(20)$ = −40%

A demanda é elástica, o que significa se aumentarmos o preço em 1% a demanda cai em aproximadamente 40%.

6. Para os três intervalos obtivemos elasticidades muito variadas. Assim, o mercado tem respostas muito diferentes para o mesmo produto. Há preços aceitáveis e há preços totalmente incompatíveis com o mercado. De fato,

$$x(5)=0,75.(5^2)-31,50.5+330,75=192$$

$$x(10)=0,75.(10^2)-31,50.10+330,75=90,75$$

$$x(20)=0,75.(20^2)-31,50.20+330,75=0,75.$$

5.2 Estudo sobre máximos e mínimos das funções

Neste tópico, aplicaremos os ensinamentos aprendidos até aqui sobre derivada para estudarmos os máximos e mínimos de uma função. Para isso utilizaremos exemplos que possibilitem um melhor entendimento por parte do aluno.

5.2.1 PONTO CRÍTICO

Diz-se que um ponto c é um ponto crítico para uma função f quando f é definida em c mas não é diferenciável ou $f'(c)=0$. (Guidorizzi. Cap 9, 1 vol. p 280. 2001).

5.2.2 PONTOS DE MÁXIMO E MÍNIMO

Seja f uma função definida em seu domínio D. Dizemos que x é um ponto de máximo local de f se existir um t, tal que para todo x_0 pertencente ao intervalo aberto de $x-t$ a $x+t$ contido em D, tenhamos $f(x) \geqslant f(x_0)$. E $f(x_0)$ é máximo local de f. Onde t é um número real positivo. (Iezzi; Murakami; Machado. 1993, Cap 8, p. 153)

Seja f uma função definida em seu domínio D. Dizemos que x é um ponto de mínimo local de f se existir um t, tal que para todo x_0 pertencente ao intervalo aberto de $x-t$ a $x+t$ contido em D, tenhamos $f(x) \leqslant f(x_0)$. E $f(x_0)$ é mínimo local de f. Onde t é um número real positivo. (Iezzi; Murakami; Machado. 1993, Cap 8, p. 153)

Pontos de máximo local e pontos de mínimo local são chamados de extremos locais.

Exemplo 5.2.1: $x=0$ é o ponto de máximo local da função $f(x)=1-x^2$, o máximo local de *f* é $f(0)=1$. Conforme a Figura 5.2.1.

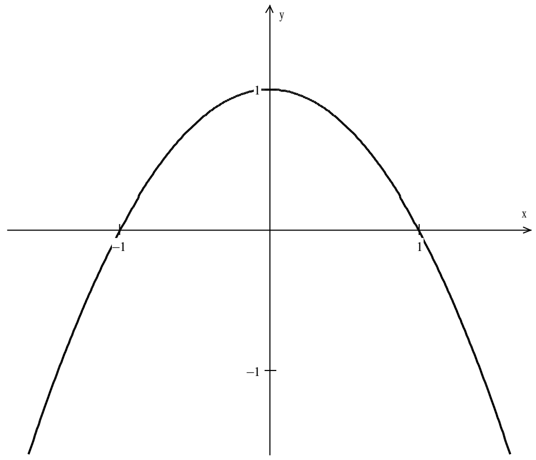


Figura 5.2.1: Ponto de máximo de $f(x)=1-x^2$

$x=0$ é o ponto de minimo local de $f(x)=|x|$, o mínimo local de *f* é $f(0)=0$. Conforme a Figura 5.2.2.

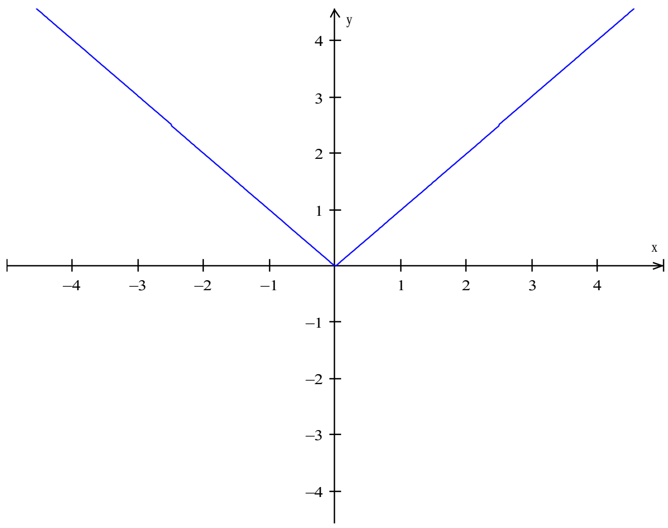


Figura 5.2.2: Ponto de mínimo de $f(x)=|x|$

Seja *f* uma função definida em seu domínio D. Dizemos que x_1 é um ponto de máximo absoluto de *f* se $f(x_1) \geqslant f(x_0)$. Dizemos que x_2 é ponto de mínimo absoluto se $f(x_2) \leqslant f(x_0)$ para todo x_0 do domínio de *f*. E $f(x_1)$ é valor de máximo absoluto e consequentemente o maior valor que *f* assume. $f(x_2)$ é valor de mínimo absoluto e consequentemente o menor valor que *f* assume. Pontos de máximo absoluto e pontos de mínimo absoluto são chamados de extremos globais.

Exemplo 5.2.2:O valor de máximo absoluto da função $f(x)=1-x^2$ é 1. O valor de mínimo absoluto da função $f(x)=|x|$ é 0. 1 e 0 são extremos globais das funções anteriores.

5.2.3 TEOREMA DE FERMAT

Seja f uma função definida em seu domínio D e derivável em $x_0 \in D$, se x_0 é um extremo local de f, então $f'(x_0)=0$. (Iezzi; Murakami; Machado. 1993, Cap 8, p. 156)

Vejamos a demonstração do Teorema de Fermat. Seja x_0 um ponto de mínimo local pertencente ao domínio da f. Então existe um $t \in \mathbb{R}$ tal que para todo x pertencente ao intervalo aberto Q =] x_0-t, x_0+t [, tem-se:

$$f(x_0) \leqslant f(x) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 \ para \ x<x_0 \\ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \ para \ x>x_0 \end{cases}$$

Como f é derivável em x_0, existe o limite: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, como o limite em Q para $x > x_0$ e para $x < x_0$ devem ser iguais, temos que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = 0$

Para o máximo local a demonstração é análoga.

5.2.4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

O Teorema de Fermat garante que em extremos locais ou globais de uma função a reta tangente ao gráfico é paralela ao eixo x.

Note que o Teorema de Fermat não garante que se existe algum ponto da função onde $f'(x_0)=0$ ela será ponto de mínimo ou de máximo. O que ela garante é que pontos de mínimo ou de máximo tem derivada igual a zero. Ou seja, os pontos onde a derivada é zero são considerados candidatos a ponto de mínimo ou de máximo. Esses pontos são chamados de pontos críticos. Por exemplo, a função $f(x)=(x-1)^3$ tem derivada $f'(x_0)=3(x-1)^2$, logo $f'(1)=0$ e 1 não é extremo da função. Conforme Figura 5.2.3

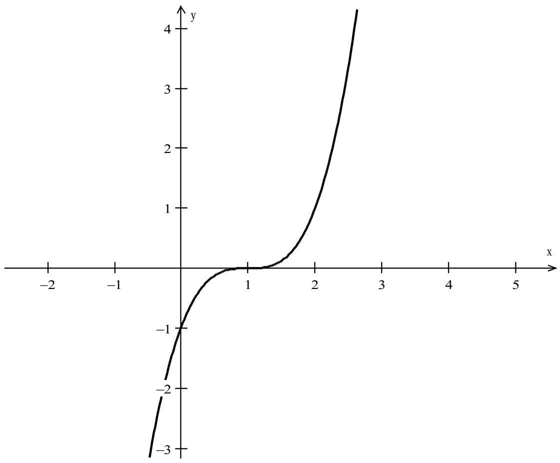


Figura 5.2.3: função $f(x)=(x-1)^3$

O teorema de Fermat também não exclui a possibilidade de x_0 ser um extremo da função sem que $f'(x_0)=0$. Isto pode ocorrer quando a função não tem derivada em x_0. Por exemplo, na Figura 5.2.4, 0 é extremo da função $f(x)=|x|$, porém não existe $f'(0)$.

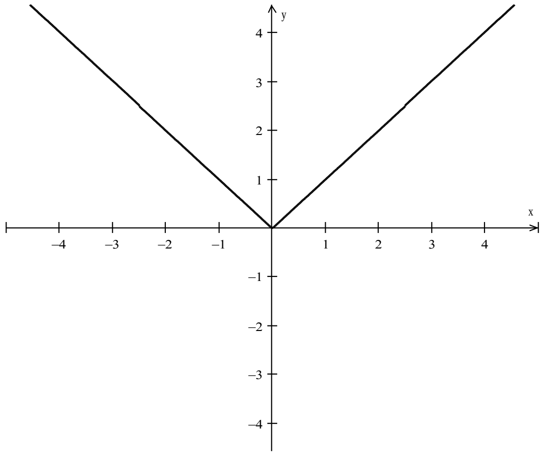


Figura 5.2.4: Função $f(x)=|x|$

5.2.5 CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DE UMA FUNÇÃO

Relembrando o conceito de função crescente em um intervalo I, quando x cresce, y também cresce. Ou seja, tomando $x > x_0$ teremos $f(x) > f(x_0)$. Portanto se f é crescente, temos que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ pois numerador e denominador tem sinais iguais. E quando uma função é decrescente em um intervalo I, temos que quando x cresce, y decresce. Ou seja, tomando $x > x_0$ teremos $f(x) < f(x_0)$. Portanto se f é decrescente, temos $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$ pois numerador e denominador tem sinais diferentes.

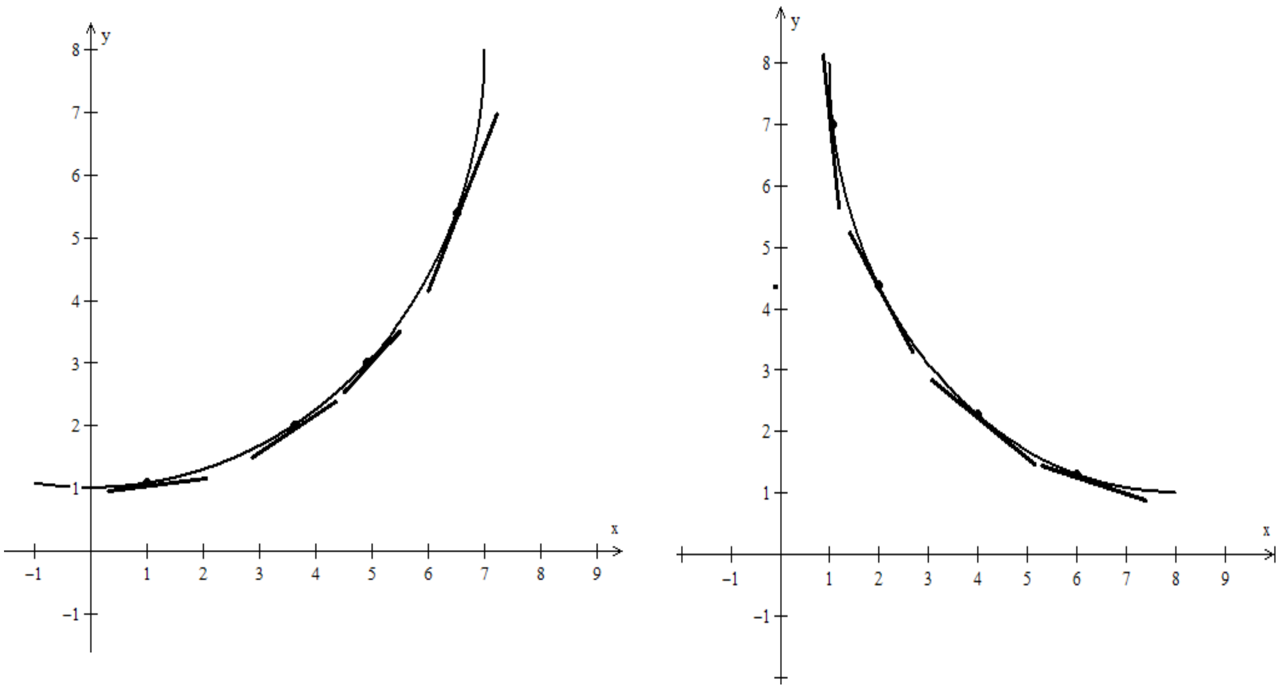
Teorema 5.2.1: Seja f contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, derivável no intervalo aberto]a,b[. Então:

I) $f'(x) \geqslant 0$ em $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ é crescente em $[a,b]$

II) $f'(x) \leqslant 0$ em $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ é decrescente em $[a,b]$

5.2.6 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Tomando uma função f definida em $[a,b]$, derivável em $]a,b[$, tomando pontos do intervalo $]a,b[$. O que o teorema nos mostra é que para uma função f ser crescente, as declividades das retas tangentes ao gráfico de f nesses pontos tomados são não negativos (Figura 5.2.5 (a)) e para uma função f ser decrescente as declividades das retas tangentes ao gráfico de f são não positivos. (Figura 5.2.5 (b)).



(a) Interpretação geométrica do crescimento (b)Interpretação geométrica do decrescimento

Figura 5.2.5: Interpetação geométrica do crescimento e do decrescimento

Um dos mais notáveis matemáticos que contribuiram sobremaneira para o desenvolvimento do Cálculo, Conforme Leithold (1994), foi Pierre de Fermat. Esse matemático francês contribuiu com diversas aplicações entre elas está o estudo que leva à descoberta dos extremos de uma função. Esse estudo é de suma importância pois aborda tópicos presentes nos programas do ensino de nível médio como por exemplo encontrar valores de máximo ou mínimo de grandezas como: área, volume, força, potência, tempo, lucro ou custo, dentre outros.

Exemplos 5.2.4: A função constante $f(x)=c$ tem derivada $f'(x)=0$ para todo x real.

Exemplos 5.2.5: A função $f(x)=x^3$ é crescente em todo x real, sua derivada $f'(x)=3x^2 \geqslant 0$ para todo x real.

Exemplos 5.2.6: A função $f(x)=x^3-3x^2$ tem derivada $f'(x)=3x^2-6x$, então:

I) para $x \leqslant 0$ ou $x \geq 2 \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$

II) para $0 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow f'(x) \leqslant 0$

Portanto: f é crescente $\Leftrightarrow x \leqslant 0 \;\; ou \;\; x \geq 2$

f é decrescente $\Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$

Resolver os exercícios 5.2.1 do anexo único.

Exemplo 5.2.7: Deseja-se confeccionar uma trave para um campo de futebol com uma viga de 20*m* de comprimento. Encontre as dimensões para que a área do gol seja máxima. Vamos esboçar um desenho de uma trave genérica, observe a Figura 5.2.6:

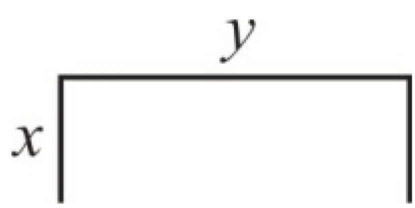


Figura 5.2.6: Trave

Pelos dados fornecidos pelo enunciado do problema, temos que:

$2x + y = 20$ ou $y = 20 - 2x$

A área do gol é dada pela fórmula da área do retângulo formado: $A = x.y$

Utilizando o y do comprimento do gol na fórmula da área, temos que:

$$A = x(20-2x) = 20x - 2x^2$$

Calculamos, a derivada da função $A(x)$ temos: $A'(x)=20-4x$

Vamos calcular os valores que maximizam a função área igualando $A'(x)$ a zero

$$20-4x=0$$

$$4x=20$$

$$x=5$$

Encontramos a altura x da trave. Para encontrarmos sua largura, precisamos encontrar o valor de y em $y=20-2x$ substituindo x pelo seu valor encontrado, logo:

$$y=20-2.5$$
$$y=20-10$$
$$y=10$$

Portanto, a trave deverá ter altura de 5*m* e largura de 10*m* para que a área de gol seja a maior possível.

Observação: As dimensões oficiais de uma trave de futebol é 7,32*m* de largura entre os postes e 2,44*m* de altura.

Exemplo 5.2.8: Considerando que um aumento inesperado na produção obrigou um empresário a pagar horas extras a seus funcionários e a usar máquinas mais velhas que quebram com maior frequência, obteve-se a Função Gasto:

$$G(x)=\frac{1}{3}x^3-7x^2+11x+50$$

onde o gasto é calculado em Reais e x representa a quantidade de produtos fabricados.

A função demanda para o produto em questão é $x=100-p$, com o preço (p) em Reais.

a) Obtenha a receita em função da quantidade x.

b) Obtenha a Função Lucro.

c) Calcule a quantidade x que maximiza o lucro.

d) Qual o lucro máximo?

e) Qual o prejuízo máximo?

f) Esboce o gráfico da função lucro.

<u>Solução:</u> a) Lembrando que $R(x) = px$ e a inversa da função demanda dada é: $p = 100 - x$, subistituímos p em $R(x)$ e obtemos: $R(x) = -x^2 + 100\text{x}$

b)
$$L(x) = R(x) - G(x) \Leftrightarrow$$
$$L(x) = -x^2 + 100x - \frac{1}{3}x^3 + 7x^2 - 11x - 50 \Leftrightarrow$$
$$L(x) = \frac{-1}{3}x^3 + 6x^2 - 11x - 50$$

c) A Função Lucro obtida no item anterior é de 3º grau, sendo então necessário obter a derivada $L'(x)$ para podermos determinar seus pontos de máximo e de mínimo e, consequentemente, o valor da quantidade a ser produzida para que o lucro seja máximo.

$$L'(x) = -x^2 + 12\text{x} - 11$$, assim: $$x_1 = 1 \quad unidade$$ $$x_2 = 11 \quad unidades$$

A determinação dos valores do lucro correspondentes a estes valores de x_1 e x_2 é feita substituindo tais valores na função lucro (cuidado, trata-se da Função Lucro original e não da sua derivada!)

$$L(1) = -\frac{1}{3}.1^3 + 6.1^2 - 11.1 - 50$$

$L(1) = -55{,}33$ reais

$$L(11) = -\frac{1}{3}.11^3 + 6.11^2 - 11.11 - 50$$

$L(11) = 111{,}33$ reais

Como o maior valor do lucro foi obtido para x = 11, o ponto de máximo local é $(11; 111{,}3)$ e o ponto de mínimo local é $(1; -55{,}3)$

Portanto, $x=11$ maximiza o lucro

d) O valor do lucro máximo já foi determinado no item anterior:

$$L(11)=111{,}33 \quad reais$$

e) O valor do lucro mínimo ou prejuízo máximo também já foi determinado em (c):

$$L(1)=-55{,}33 \quad reais$$

f) Sabemos as coordenadas dos pontos de máximo e mínimo locais e também o ponto onde a curva corta o eixo vertical (0, -50), com estes três pontos é possível esboçar o gráfico da Função Lucro do 3º grau. Observe a Figura 5.2.7

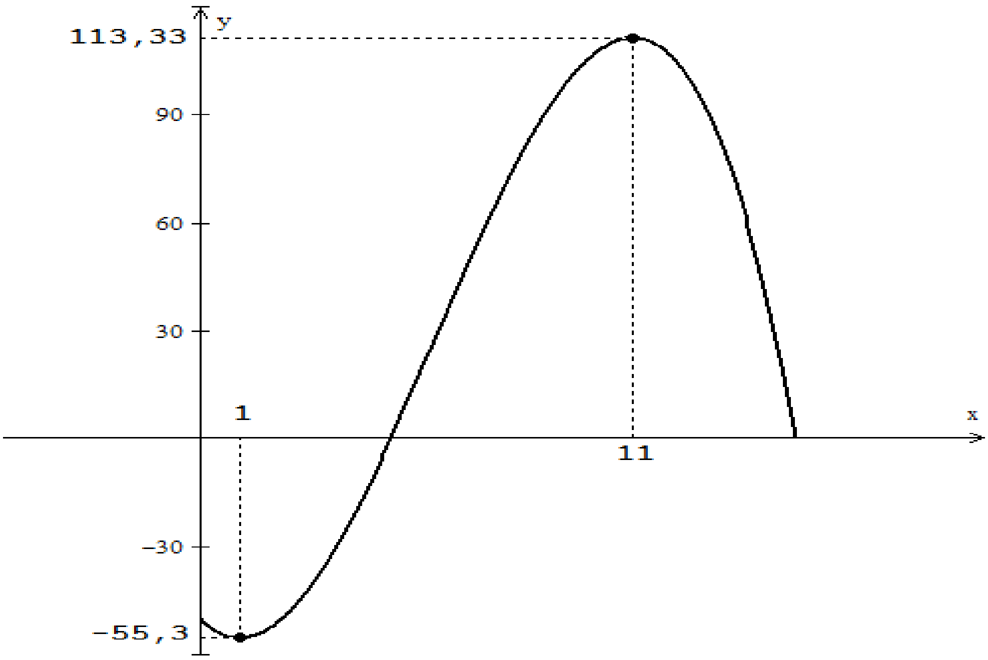


Figura 5.2.7 : Função Lucro

<u>Resolver os exercícios 5.2.2 do anexo único.</u>

5.3 DERIVADAS E CINEMÁTICA

Abordaremos agora, uma outra aplicação muito cobrada em vestibulares, o uso da derivada na cinemática. Esse estudo demonstra a interdisciplinaridade da derivada.

5.3.1 FUNÇÕES COM DERIVADA ZERO

Foi visto no capítulo sobre derivadas que a derivada de uma função constante é zero, pois como $y=f(x)=c$ temos que a variação $\Delta y=y-y_0=0$ o que faz com que a razão $\Delta y/\Delta x$ seja sempre zero qualquer que seja a variação $\Delta x=x-x_0\neq 0,$ portanto também a derivada $f'(x)$ será nula. (Avila, RPM 61, p. 25)

O que vamos utilizar a partir de agora é a recíproca dessa propriedade, ou seja, podemos facilmente admitir que se uma função em um dado intervalo tem sua derivada nula, então essa função é constante nesse intervalo pois a reta tangente ao gráfico da função em qualquer ponto do intervalo é horizontal, portanto o gráfico só pode ser uma reta horizontal, por isso a função deve ser uma função constante.

5.3.2 VELOCIDADE MÉDIA E MOVIMENTO UNIFORME

Imagine um ponto material em movimento com uma trajetória qualquer, nesse momento não vamos nos importar com massa, força ou energia. Somente com o estudo do movimento desse ponto material. (Avila, RPM 61, p. 26)

Seja $s=s(t)$ a função que denota o espaço percorrido por esse móvel em função do tempo a partir de um certo ponto de origem O. Então, a variação de espaço durante uma certa duração de tempo será:

$$\Delta s=s(t)-s(t_0)$$

Essa duração de tempo começa no instante t_0 e vai até o instante t. Com isso, temos que a velocidade média v_m nesse intervalo é definida como sendo a razão:

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

Dizemos que o movimento é uniforme quando a velocidade média tem o mesmo valor v durante todo o tempo do movimento, ou seja, a velocidade do ponto móvel não se altera. Nesse caso, denotando com s_0 o valor do espaço inicial, que é o espaço onde se começa a contar o tempo para o estudo do movimento, podemos escrever essa velocidade média utilizando o incremento espacial $\Delta s = s - s_0$ correspondente ao incremento do tempo $\Delta t = t - t_0 = t - 0 = t$, isto é,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t}, \quad \text{donde} \quad s = s_0 + vt$$

Esta equação horária do movimento uniforme. Seu gráfico no plano cartesiano é uma reta. A figura 5.3.1 ilustra esse gráfico numa situação em que s_0 e v são números positivos.

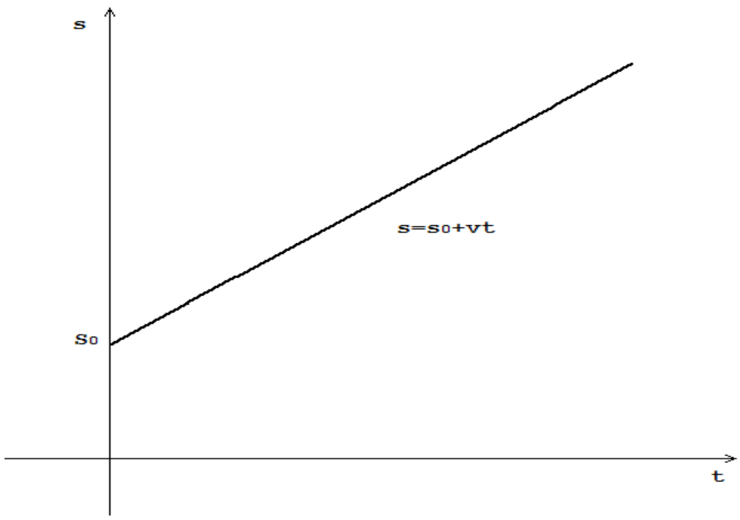


Figura 5.3.1: Equação horária do movimento

5.3.3 VELOCIDADE INSTANTÂNEA

As vezes estamos interessados em saber a velocidade de um ponto móvel em um determinado momento, e para isso a velocidade média não nos ajuda muito. De fato, podemos imaginar inúmeros movimentos diferentes, entre os instantes t e t_0, todos com a mesma velocidade média: o móvel pode mover-se muito rapidamente em certos trechos, mais devagar em outros e até parar uma ou várias vezes antes de completar o percurso; e isso de maneiras variadas. (Avila, RPM 61, p. 27)

Apesar de todas essas considerações, a ideia de velocidade instantânea é bastante familiar. Podemos ter como exemplo a velocidade que a lombada eletrônica marca quando passamos de carro. Porém precisamos de uma versão matemática de tudo isso que acabamos de falar. Comecemos observando o movimento de um ponto móvel; lembre que movimento só existe durante intervalos de tempo, nunca num instante de tempo! É preciso deixar fluir o tempo para podermos avaliar a rapidez ou a vagarosidade do movimento. Mantendo t fixo e imaginando intervalos de tempo cada vez menores, as velocidades médias correspondentes nos dão informações cada vez mais precisas sobre o que se passa no instante t. Assim, concebemos a ideia de que essas velocidades médias deverão se aproximar de um valor determinado quando Δt tende a zero. E é isso o que acontece na maioria dos movimentos observados na natureza e que são descritos por idealizações matemáticas. Esse valor limite é chamado de velocidade instantânea no instante t. Como essa velocidade está associada ao instante t, ela deve ser função desse tempo t, por isso deve ser denotada $v=v(t)$. Portanto, como acabamos de explicar, matematicamente ela é definida como sendo o limite, com $\Delta t \to 0$, da razão incremental que dá a velocidade média, isto é,

$$v(t)=\lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Assim, por definição, a velocidade instantânea é a derivada do espaço em relação ao tempo.

5.3.4 MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

O conceito de aceleração é introduzido de maneira análoga ao de velocidade, pois ela mede a variação da velocidade em relação ao tempo. No movimento uniforme, em que a velocidade permanece constante, não há aceleração; ou seja, a aceleração é zero. (Avila, RPM 61, p. 28)

O movimento de um corpo em queda livre é um exemplo típico de movimento acelerado. Desprezando a resistência do ar, a velocidade desse corpo aumenta de aproximadamente $10 m/s$ a cada segundo. Assim, se o corpo é abandonado à ação da gravidade com velocidade zero no instante $t=0,$ depois de um segundo essa velocidade é de aproximadamente $10 m/s;$ depois de dois segundos será de $20 m/s;$ depois de três segundos, $30 m/s,$ e assim por diante.

De modo geral definimos aceleração média num intervalo de tempo (t, t_0) como sendo o quociente $\Delta v/\Delta t,$ onde Δv é a variação da velocidade nesse intervalo, dada por $\Delta v=v(t+\Delta t)-v(t).$ A aceleração instantânea $a(t)$ no instante *t*, por sua vez, é o limite da velocidade média com Δt tendendo a zero, isto é

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t-\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

Dizemos que um movimento é uniformemente variado quando sua aceleração for constante e diferente de zero. É esse o caso mencionado há pouco de um corpo em queda livre.

Vamos considerar um movimento uniformemente variado com aceleração $a.$ Seja $v=v(t)$ sua velocidade num instante *t*; seja $v_0=v(0)$ a velocidade inicial. Como a é constante, podemos escrever $\frac{v-v_0}{t}=a,$ donde se obtém $v=v_0+at$ que é a equação da velocidade. Seu gráfico é uma reta, Ilustrada na figura 5.3.2 quando v_0 e a são números positivos.

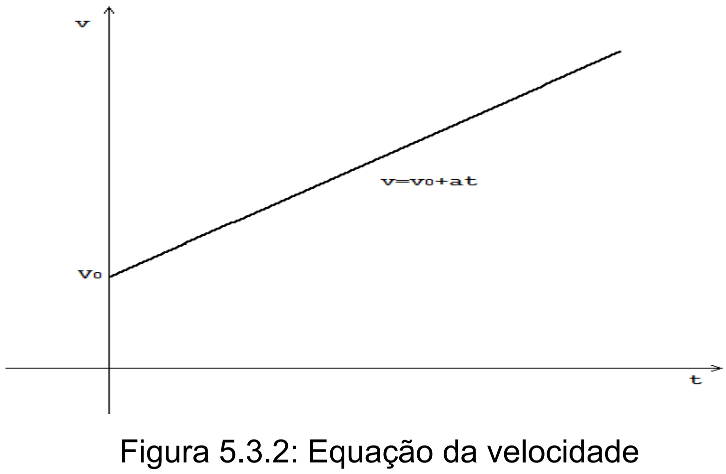


Figura 5.3.2: Equação da velocidade

5.3.5 EQUAÇÃO HORÁRIA

Para obtermos a equação horária do movimento, vamos utilizar a segunda propriedade da derivada, mencionada no tópico 5.3.1, segundo a qual se duas funções *f(t)* e *g(t)* têm a mesma derivada, a diferença $h(t)=f(t)-g(t)$ tem derivada zero, significando que o gráfico de *h(t)* tem tangente horizontal em todos os pontos, sendo, pois, uma função constante em t, vale dizer, f e g diferem por uma constante. (Avila, RPM 61, p. 29)

Para isso começamos procurando uma função cuja derivada seja a velocidade $v(t)=v_0+at$. O primeiro termo v_0 é a derivada de $v_0 t$. Quanto ao segundo termo at, notamos que t é a derivada de $at^2/2$. Essas considerações nos mostram que

$v(t)=v_0+at^2/2$, isto é, $(v_0 t-\frac{at^2}{2})'=v_0+at$

Mas a derivada do espaço $s(t)$ também é a velocidade $v(t)=v_0+at.$ Portanto, a função $s(t)-(v_0 t+\frac{at^2}{2})$

tem derivada zero; logo é uma constante C: $s(t)-(v_0 t+\frac{at^2}{2}) = C$.

Em consequência, $s(t)=C+v_0 t+\frac{at^2}{2}$

o significado de C torna-se claro quando fazemos $t=0$ e $C=s(0)=s_0$

Substituindo esse valor na equação anterior, obtemos a equação horária do movimento uniforme: $s=s_0+v_0 t+\frac{at^2}{2}$

Como *s* é um trinômio do segundo grau em t, seu gráfico é uma parábola.

5.4 Aplicações de derivadas em vestibulares

O professor de matemática muitas vezes se defrontam com a clássica pergunta: Pra que serve isso? Aí está o brilho de se ensinar os conceitos básicos da derivada, pois até mesmo as idéias iniciais desse tópico estão atreladas a aplicações nos problemas do dia a dia. Prover o acesso a esses conceitos para alunos do ensino médio equivale a oferecer novas ferramentas em um momento em que o aluno está propenso a receber novos ensinos pois está prestes a enfrentar o momento mais tenso na vida do aluno que é o vestibular. Vejamos agora como aplicar essas idéias em questões de vestibulares.

ENEM 2015 – QUESTÃO 136 – CADERNO AMARELO – PRIMEIRA APLICAÇÃO

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h)=-h^2+22h-85,$ em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela 5.4.1, associa intervalos de temperatura, em graus Celcius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (C^0)	Classificação
$0\leqslant T\leqslant 17$	Muito Baixa
$0\leqslant T<17$	Baixa
$17\leqslant T<30$	Média
$30\leqslant T<43$	Alta
$T\geqslant 43$	Muito Alta

Tabela 5.4.1 – Classificação de temperaturas

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como:

A) muito baixa. B) baixa. C) média. D) alta. E) muito alta

SOLUÇÃO:

A temperatura é expressa por $T(h)=-h^2+22h-85$, a questão nos pede para encontrar o horário em que a estufa está com a maior temperatura.

Utilizando o Teorema de Fermat e a derivada da função temperatura, encontraremos o ponto de máximo dessa função e o horário em que isso acontece, consequentemente a temperatura máxima será conhecida.

Derivando a função, temos: $T'(h)=-2h+22$, fazendo o estudo do crescimento e decrescimento da derivada temos:

$$T'(h)>0 \Rightarrow -2\mathrm{h}+22>0 \Rightarrow -2\mathrm{h}>-22 \Rightarrow h<11$$

$$T'(h)<0 \Rightarrow -2\mathrm{h}+22<0 \Rightarrow -2\mathrm{h}<-22 \Rightarrow h>11$$

Assim, $T(h)$ é crescente quando $h<11$ e decrescente quando $h>11$.

Logo, a temperatura máxima ocorre quando $h=11$, visto que $T'(11)=0$, logo a temperatura $T(11)=36C^o$

Portanto, de acordo com a tabela 5.4.1, a classificação é alta

ENEM 2015 – CADERNO AMARELO – QUESTÃO 176

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x)=8+5\cos(\frac{\pi x-\pi}{6})$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro. Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

A) janeiro. B) abril. C) junho. D) julho. E) outubro.

SOLUÇÃO:

O mês de produção máxima desse produto é o mês onde o preço é mínimo, deveremos estudar a função preço com relação ao seu ponto de mínimo, vamos utilizar mais uma vez o Teorema de Fermat e a derivada da função preço:

$$P'(x)=-5(\frac{\pi}{6})sen(\frac{\pi x-\pi}{6})=\frac{-5\pi}{6}sen\frac{(\pi x-\pi)}{6}$$

Estudando crescimento e decrescimento da derivada da função preço:

$$P'(x)>0 \Rightarrow -\frac{5\pi}{6}sen\frac{(\pi x-\pi)}{6}>0 \Rightarrow \frac{5\pi}{6}sen\frac{(\pi x-\pi)}{6}<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi<\frac{(\pi x-\pi)}{6}<2\pi \Rightarrow 6\pi<(\pi x-\pi)<12\pi \Rightarrow 7\pi<(\pi x)<13\pi \Rightarrow 7<x<13 \Rightarrow 7<x\leqslant 12$$

$$P'(x)<0 \Rightarrow -\frac{5\pi}{6}sen\frac{(\pi x-\pi)}{6}<0 \Rightarrow \frac{5\pi}{6}sen\frac{(\pi x-\pi)}{6}>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0<\frac{(\pi x-\pi)}{6}<\pi \Rightarrow 0<(\pi x-\pi)<6\pi \Rightarrow \pi<(\pi x)<7\pi \Rightarrow 1<x<7$$

Portanto, o preço decai de janeiro até julho e sobe de julho até dezembro, logo, em julho o preço é mínimo e a produção é máxima, alternativa correta D.

VESTIBULAR ITA 2014 – PROVA DE FÍSICA – QUESTÃO 15

Na Figura 5.3.2, as linhas cheia, tracejada e pontilhada representam a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula em um movimento harmônico simples. Com base nessas curvas assinale a opção correta dentre as seguintes proposições:

I. As linhas cheia e tracejada representam, respectivamente, a posição e a aceleração da partícula.

II. As linhas cheia e pontilhada representam, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula.

III. A linha cheia necessariamente representa a velocidade da partícula.

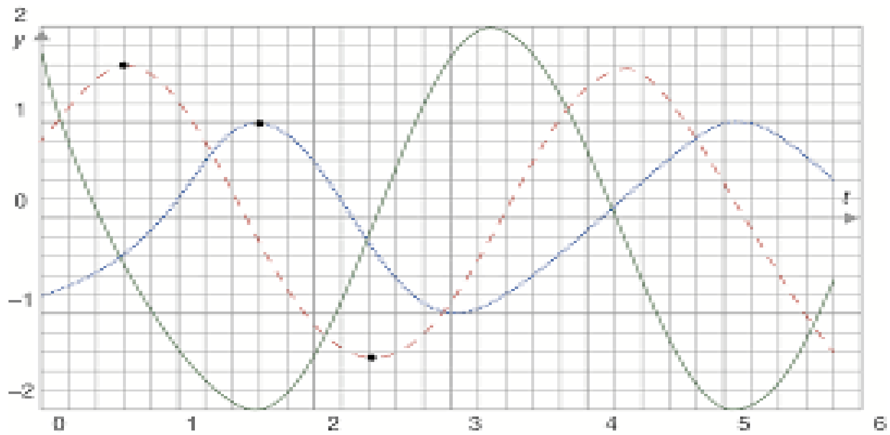


FIGURA 5.4.1 – POSIÇÃO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO DA PARTÍCULA

A posição de uma partícula pode ser expresso num Movimento Harmônico Simples por $S = A.sen(\mu t + \varphi)$

Sua velocidade é a derivada da posição em relação ao tempo: $V = \frac{dS}{dt} = A.\mu \cos(\mu t + \varphi)$

A aceleração, por sua vez, é a derivada da velocidade em relação ao tempo: $a = \frac{dV}{dt} = -A.\mu^2 sen(\mu t + \varphi)$

As linhas cheias e pontilhadas devem ser representadas pela mesma função trigonmétrica, porém em oposição de fase. Assim podem representar posição e aceleração, o que torna falsa as afirmações I e II. A linha tracejada representa outra função trigonométrica, pois encontra-se defasada de 90º em relação às primeiras. Assim, ela representa a velocidade da partícula, tornando falsa a afirmação III.

VESTIBULAR ITA 2016 – PROVA DE FÍSICA – QUESTÃO 5

A partir do repouso, um foguete de brinquedo é lançado verticalmente do chão, mantendo uma aceleração constante de $5\mathrm{m}/s^2$ durante os 10 primeiros segundos. Desprezando a resistência do ar, a altura máxima atingida pelo foguete e o tempo total de sua permanência no ar são, respectivamente, de:

A ( ) 375 m e 23,7 s. B ( ) 375 m e 30,0 s. C ( ) 375 m e 34,1 s.

D ( ) 500 m e 23,7 s. E ( ) 500 m e 34,1 s.

SOLUÇÃO:

Primeiramente, o foguete é lançado com uma aceleração constante por 10 segundos. A posição desse foguete pode ser expresso num Movimento Uniformemente Variado por: $S=S_0+v_0t+1/2at^2,$ como ele parte do repouso com espaço inicial e velocidade inicial nulos, temos que $\Delta S=1/2at^2,$ logo a aceleração é $5\mathrm{m}/s^2$ por um tempo de 10 segundos, assim temos que: $\Delta S=250m.$ A velocidade é obtida derivando a função posição, logo tempos que $\frac{dS}{dt}=V=V_0+at \Rightarrow V=5.10=50m/s.$ Depois ele passa a estar em um movimento vertical livre e obedece agora à expressão $S=S_0+V_0t+1/2at^2.$ Vamos obter o tempo desse movimento utilizando a derivada da posição que é sua velocidade, logo: $\frac{dS}{dt}=V=V_0+at,$ com $V=0m/s,\ V_0=50m/s,\ a=10m/s^2,$ encontraremos que $t=5s,$ utilizando agora esse tempo na função posição, teremos que $S_0=250m,\ V_0=50m/s,\ t=5s,\ a=-10m/s^2.$

Assim encontramos $S=375\,m$ que é sua altura máxima.

Agora nos resta calcular o tempo de descida do foguete que passa a estar em queda livre.

Basta utilizar novamente a função posição onde $S=0,\ s_0=-375,\ V_0=0,\ a=10\,m/s^2,$ assim encontraremos que $t=5\sqrt{3}\approx 8{,}7.$ Somando agora os tempos de subida e descida temos que $10+5+8{,}7=23{,}7$ que é o tempo total de permanência desse foguete no ar. Alternativa A é a resposta correta.

VESTIBULAR IME 2015 – PROVA DISCURSIVA DE MATEMÁTICA – SEGUNDA FASE – QUESTÃO 06

Pelo ponto P de coordenadas (-1,0) traçam-se as tangentes t e s à parábola $y^2=2x.$ A reta t intercepta a parábola em A e a reta s intercepta a parábola em B. Pelos pontos A e B traçam-se paralelas às tangentes encontrando a parábola em outros pontos C e D, respectivamente. Calcule o valor da razão AB/CD.

SOLUÇÃO:

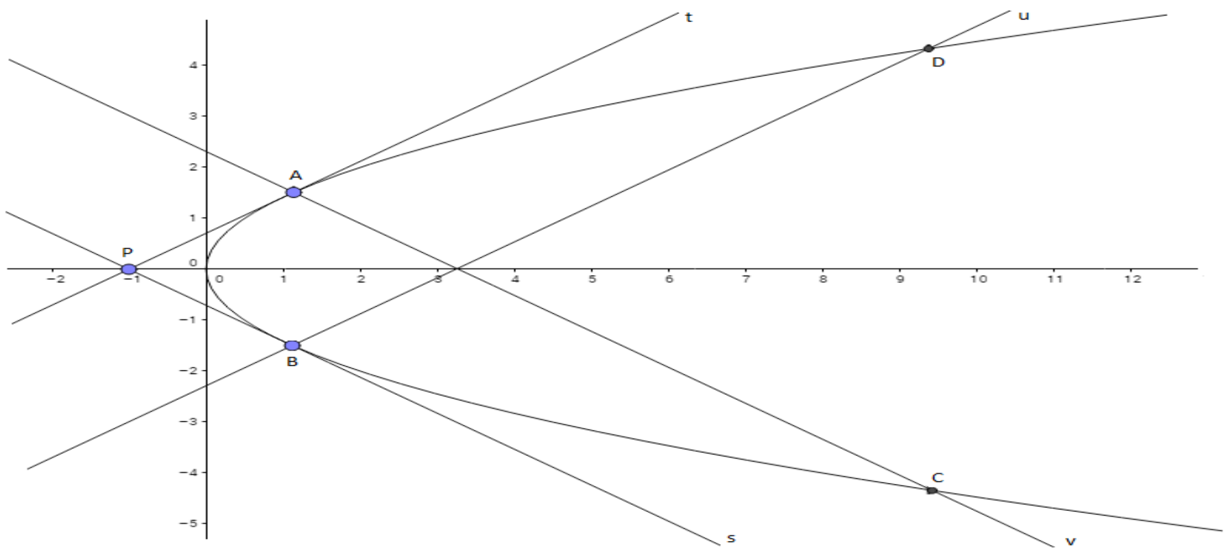


FIGURA 5.4.2 – TANGENTES À PARÁBOLA $y^2=2x.$

A equação da parábola é $y^2=2x \Rightarrow y=\sqrt{2x} \Rightarrow y=(2x)^{\frac{1}{2}}$. Derivando esta última equação em relação à variável x, logo, $y'=\frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}.2 \Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{2x}}$. Como $y^2=2\mathrm{x}$ então $y'=\frac{1}{y}$

Seja $A=(X_a, Y_a);$ O coeficiente angular da reta *t* é $\frac{1}{Y_a}$.

Seja $t=\frac{1}{Y_a}x+n;$ como $P\in t \Rightarrow 0=\frac{-1}{Y_a}+n \Rightarrow n=\frac{1}{Y_a}$

Como A pertence à parábola, temos que: $A=(\frac{Y_a^2}{2}, Y_a)$, então,

$$A\in t \Rightarrow Y_a=\frac{1}{Y_a}.\frac{Y_a^2}{2}+\frac{1}{Y_a} \Rightarrow Y_a=\frac{Y_a}{2}+\frac{1}{Y_a} \Rightarrow \frac{Y_a}{2}=\frac{1}{Y_a} \Rightarrow Y_a^2=2 \Rightarrow Y_a=\sqrt{2}$$

analogamente $Y_b=-\sqrt{2}$

Portanto, $A=(1,\sqrt{2})$ e $B=(1,-\sqrt{2})$ e $AB=2\sqrt{2}$

Como a reta u é paralela à reta *t*, encontramos:

u: $y=\frac{1}{\sqrt{2}}.x+n';$ como $B\in u \Rightarrow -\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.1+n' \Rightarrow n'=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$

O ponto *D* é solução do sistema formado pela reta *u* e pela parábola, logo; deveremos resolver ao mesmo tempo $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e $x=\frac{y^2}{2}$, substituindo x temos que, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{y^2}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=\frac{y^2}{2\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=\frac{y^2-6}{2\sqrt{2}} \Rightarrow y^2-2\sqrt{2}y-6=0$

Calculando o discriminante dessa equação do segundo grau encontramos:

$$\Delta=b^2-4ac=32 \qquad y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y=3\sqrt{2}\ (ponto\ D)\ \ ou\ \ y=-\sqrt{2}\ (ponto\ B)$$

Como $x=\frac{y^2}{2} \Rightarrow x=\frac{18}{2} \Rightarrow x=9$

Portanto $D=(9,3\sqrt{2})$

Analogamente encontramos que $C=(9,-3\sqrt{2})$ e que $CD=6\sqrt{2}$

Finalmente $\frac{AB}{CD}=\frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=\frac{1}{3}.$

ENEM 2015 – PROVA CINZA – QUESTÃO 137 – SEGUNDA APLICAÇÃO

Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura *T*, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h)=A+Bsen(\frac{\pi}{12}(h-12)),$ sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite $(0\leqslant h<24),$ e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

A)A=18 e B=8 B)A=22 e B=-4 C)A=22 e B=4 D)A=26 e B=-8 E)A=26 e B=8

SOLUÇÃO: $T(h)=A+ Bsen(\frac{\pi}{12}(h-12))$

Vamos estudar o crescimento e o decrescimento utilizando a derivada da função:

$$T'(h)=B(\frac{\pi}{12})\cos(\frac{\pi}{12}(h-12))=\frac{B\pi}{12}\cos(\frac{\pi}{12}(h-12))$$

Estudando o sinal da derivada, primeiro para a derivada negativa:

$$T'(h) < 0 \leftrightarrow B > 0\, e \cos\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right) < 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi h}{12} - \pi < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi h}{12} < \frac{5\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\ 3 < \frac{h}{6} < 5\ \Rightarrow\ 18 < h < 30\ \Rightarrow\ 18 < h \leqslant 24\ \text{ e }\ e\, 0 \leqslant h < 6$$

Ou $T'(h) < 0\ \Leftrightarrow\ B < 0\, e \cos\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right) > 0$

Logo: $0 < \frac{\pi}{12}(h-12) < \frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ 0 < \frac{\pi h}{12} - \pi < \frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \pi < \frac{\pi h}{12} < \frac{3\pi}{2}\ \Rightarrow\ 12 < h < 18$

E, também: $\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{12}(h-12) < 2\pi\ \Rightarrow\ \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi h}{12} - \pi < 2\pi\ \Rightarrow\ \frac{5\pi}{2} < \frac{\pi h}{12} < 3\pi\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ 30 < h < 36\ \Rightarrow\ 6 < h < 12$$

Agora vamos estudar a derivada quando ela for positiva:

$$T'(h) > 0\ \Leftrightarrow\ B > 0\, e \cos\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right) > 0$$

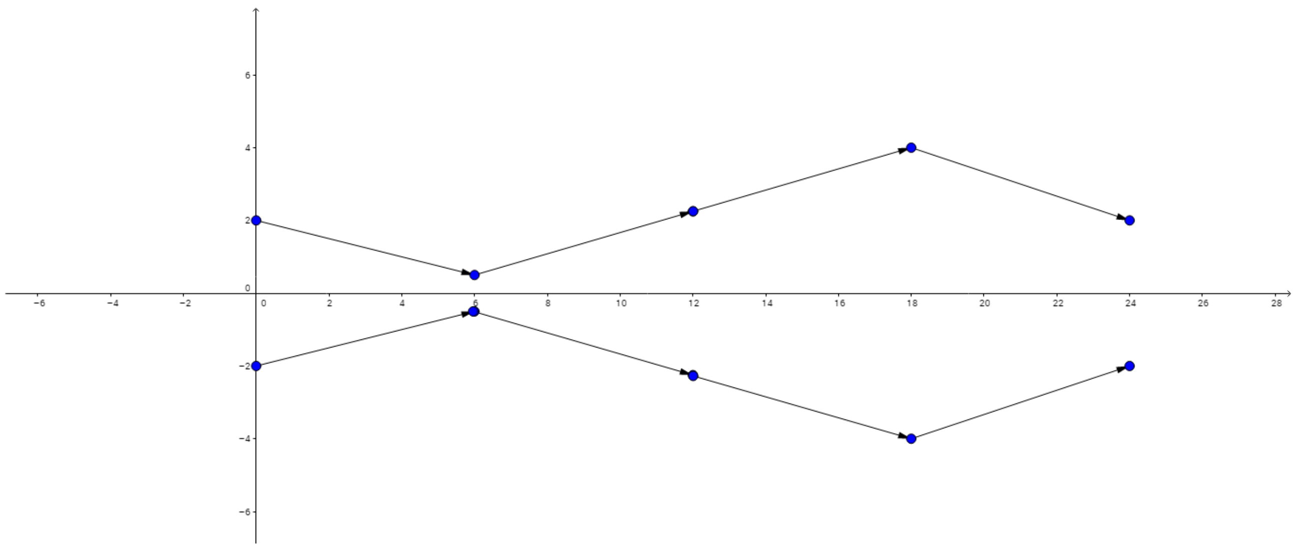
Assim teremos que: $0 < \frac{\pi h}{12} - \pi < \frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \pi < \frac{\pi h}{12} < \frac{3\pi}{2}\ \Rightarrow\ 12 < h < 18$

Portanto: $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi h}{12} - \pi < 2\pi\ \Rightarrow\ \frac{5\pi}{2} < \frac{\pi h}{12} < 3\pi\ \Rightarrow\ 30 < h < 36\ \Rightarrow\ 6 < h < 12$

Ou $B < 0\, e \cos\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right) < 0\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{2} < \frac{\pi h}{12} - \pi < \frac{3\pi}{2}\ \Rightarrow\ \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi h}{12} < \frac{5\pi}{2}\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ 18 < h < 30\ \Rightarrow\ 18 \leqslant h < 24\, e\, 0 \leqslant h < 6$$

Colocando os dados no gráfico, temos que:



eixo B

FIGURA 5.4.3 – ESTUDO DO SINAL DA DERIVADA

Como a tarde a temperatura deve ser menor que pela manhã, então devemos ter a temperatura decrescendo durante o dia, isso acontece quando $B<0$ e $T'(h) < 0$

Como vimos Na Figura 5.4.3, o ponto de máximo ocorre quando $h = 6$, logo:

$$T(h)=A+Bsen(\frac{\pi}{12}(h-12)) \Rightarrow 26=A+Bsen(\frac{-\pi}{2}) \Rightarrow 26=A-B$$

O ponto de mínimo ocorre quando $h=16$, logo:

$$T(h)=A+Bsen(\frac{\pi}{12}(h-12)) \Rightarrow 18=A+Bsen(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow 18=A+B$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} A+B=18 \\ A-B=26 \end{cases}$ encontramos que $A= 22$ e $B= -4$

Portanto, a alternativa correta seria a alternativa *B.*

<u>VESTIBULAR IME – PROVA DISCURSIVA DE FÍSICA – QUESTÃO 03</u>

Uma partícula de carga $+Q$ e massa m move-se pelo espaço presa a um carrinho.

Esse movimento é regido pelas seguintes equações de posição nos três eixos, para k, ω_1 e ω_2 constantes.

$$x(t)=\frac{k}{\omega_1} sen(\omega_1 t)-\frac{k}{\omega_2} sen(\omega_2 t);$$

$$y(t)=\frac{k}{\omega_1}\cos(\omega_1 t)+\frac{k}{\omega_2} sen(\omega_2 t)$$

$$z(t)=\frac{4k}{\omega_1+\omega_2} sen\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}\right)t$$

Durante todo o movimento, um campo elétrico atua na partícula, o que provoca uma força que tende a arrancá-la do carrinho.

Dado: coordenadas nos três eixos do campo elétrico: (0,0,E). Portanto:

a) mostre que a partícula se move com velocidade escalar constante;

b) determine os instantes em que a força provocada pelo campo elétrico na partícula é ortogonal à sua trajetória;

c) determine as equações dos vetores aceleração tangencial e aceleração normal decompostos nos três eixos;

d) supondo que em $t_x=\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}$ a partícula se solte do carrinho, determine as acelerações normal e tangencial da partícula imediatamente após t_x.

SOLUÇÃO:

a) Derivando as funções de posição em função do tempo encontraremos as funções velocidade:

$$\frac{dx}{dt}=v_x=\omega_1\frac{k}{\omega_1}\cos(\omega_1 t)-\omega_2\frac{k}{\omega_2}\cos(\omega_2 t)=k[\cos(\omega_1 t)-\cos(\omega_2 t)]$$

$$\frac{dy}{dt}=v_y=-\omega_1\frac{k}{\omega_1}sen(\omega_1 t)-\omega_2\frac{k}{\omega_2}sen(\omega_2 t)=-k[sen(\omega_1 t)+sen(\omega_2 t)]$$

$$\frac{dz}{dt}=v_z=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\frac{4\mathrm{k}}{\omega_1+\omega_2}\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)=2\mathrm{k}\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)$$

Agora vamos encontrar o módulo da velocidade da carga

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

$$v_x^2=k^2[\cos^2(\omega_1 t)-2\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+\cos^2(\omega_2 t)]$$

$$v_y^2=k^2[sen^2(\omega_1 t)+2\mathrm{sen}(\omega_1 t)sen(\omega_2 t)+sen^2(\omega_2 t)]$$

$$v_z^2=4\mathrm{k}^2\cos^2(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t)$$

$$v_x^2+v_y^2+v_z^2=k^2[\cos^2(\omega_1 t)-2\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+\cos^2(\omega_2 t)]+.$$

$$+k^2[sen^2(\omega_1 t)+2\mathrm{sen}(\omega_1 t)sen(\omega_2 t)+sen^2(\omega_2 t)]+4\mathrm{k}^2\cos^2(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ v_x^2+v_y^2+v_z^2=k^2[\cos^2(\omega_1 t)+sen^2(\omega_1 t)]+k^2[\cos^2(\omega_2 t)+sen^2(\omega_2 t)]+.$$

$$+2\mathrm{k}^2[-\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+sen(\omega_1 t)sen(\omega_2 t)]+4\mathrm{k}^2\cos^2(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2})t$$

Como $\cos^2(\varphi)=\frac{1}{2}(1+cos\varphi)$ então:

$$\cos^2(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t)=\frac{1}{2}[1+\cos[2\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t]]=\frac{1}{2}[1+\cos(\omega_1+\omega_2)t]$$

Assim,

$$v_x^2+v_y^2+v_z^2=k^2+k^2+2\mathrm{k}^2[-\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+sen(\omega_1 t)sen(\omega_2 t)]+4\mathrm{k}^2\frac{1}{2}[1+\cos((\omega_1+\omega_2)t)]$$

$$v^2=2k^2-2k^2\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+2k^2 sen(\omega_1 t) sen(\omega_2 t)+2k^2[1+\cos((\omega_1+\omega_2)t)]$$

$$v^2=2k^2-2k^2\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+2k^2 sen(\omega_1 t) sen(\omega_2 t)+2k^2+.$$

$$+2k^2[\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-sen(\omega_1 t) sen(\omega_2 t)]$$

$$v^2=2k^2-2k^2\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)+2k^2 sen(\omega_1 t) sen(\omega_2 t)+2k^2+2k^2\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)-.$$

$$-2k^2 sen(\omega_1 t) sen(\omega_2 t)$$

$$v^2=4k^2$$

$v=2k$. Portanto, velocidade escalar é constante

B) Como o ventor força elétrica só possui componente na direção do eixo Z:(0, 0, E) ele será ortogonal à trajetória se o vetor velocidade for nulo na direção da componente do eixo Z. Então:

$$v_z=2k\cos\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t=0\right) \Leftrightarrow \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t=\frac{\pi}{2}+\alpha\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\omega_1+\omega_2)t=\pi+2\alpha\pi \Leftrightarrow \rightarrow t=\frac{(\pi+2\alpha\pi)}{(\omega_1+\omega_2)}, com\, \alpha\notin\mathbb{Z}$$

C) $(\vec{a})_{total}=(\vec{a})_{tangencial}+(\vec{a})_{centrípeta}$, conforme o item a) a velocidade escalar é constante

Logo: $|(\vec{a})_{tangencial}|=0.$ A aceleração é a derivada segunda da posição. Então:

$$(\vec{a})_x=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=k[-\omega_1 sen(\omega_1 t)+\omega_2 sen(\omega_2 t)]$$

$$(\vec{a})_y=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=-k[-\omega_1\cos(\omega_1 t)+\omega_2\cos(\omega_2 t)]$$

$$(\vec{a})_z=-2\mathrm{k}\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}sen(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t)=-k(\omega_1+\omega_2)sen(\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t)$$

D) No item b) encontdramos que em $t_x=\frac{\pi+2\alpha\pi}{\omega_1+\omega_2}$, com $\alpha\in\mathbb{Z}$ a velocidade na direção do eixo z era nula

Para $a=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{\omega_1+\omega_2}$

Para $a=1 \Rightarrow t=\frac{3\pi}{\omega_1+\omega_2}$

assim, concluímos que em $t=\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}$ a componente da velocidade na direção do eixo z não será nula e a aceleração normal será, ou seja, $(\vec{a})_{normal}=0$. Nesse caso, a força elétrica terá a direção do eixo z, produzindo aceleração tangencial.

$$F_R=m.a_{tangencial}\rightarrow$$
$$Q.E=m.a_{tangencial}\rightarrow$$
$$a_{tangencial}=\frac{Q.E}{m}$$

6. CONCLUSÃO

O objetivo desta dissertação é apresentar um material que apóie o professor de matemática do ensino médio a ensinar os conceitos básicos da Derivada. Utilizando a linguagem de negócios visa-se utilizar a experiência dos alunos que estão inseridos no mercado de trabalho para que essas noções sejam mais acessíveis, mais palpáveis e de melhor entendimento por parte deste aluno.

Destaca-se a importância da preparação do aluno para os exames vestibulares em especial o ENEM, visto que esses exames tem se tornado uma das maiores motivações para aqueles que aspiram uma melhor colocação no mercado de trabalho. Portanto, a contribuição deste trabalho é no sentido de entregar ao professor um material didático que se utilize desse objeto motivador com a finalidade de ensinar um conceito que é interdisciplinar e que tem inserido em seu contexto a possibilidade de oferecer ao aluno uma ferramenta que o torne capaz de solucionar questões de diferentes disciplinas do programa destas provas.

TRABALHOS FUTUROS

Como o estudo foi realizado para desenvolver o ensino da derivada para alunos do ensino médio, pretende-se estender o uso experimental deste trabalho para os cursinhos preparatórios atingindo assim as demais pessoas que se prepararam para o vestibular, em especial o ENEM. Realizar estudo para inserir outros tópicos dos programas do ensino médio que ainda não constam neste estudo mas que podem ser abordados sob a ótica da derivada, estudar a influencia destes novos conceitos sobre o aluno e avaliar a melhoria dos resultados desses alunos após o vestibular. Após a realização do estudo para agregar outros tópicos, constantes nos programas do ensino médio, desenvolver um novo trabalho para a produção de um material que possa ser mais completo, aproveitando a interdisciplinaridade da derivada.

ANEXO ÚNICO

Exercícios 3.2.1

1) Marque, num plano cartesiano, os pontos

$(3,-2),\ (-1,2),\ (0,3),\ (\frac{-5}{2},-4),\ (\frac{3}{2},0),\ (2,\frac{5}{3})$

2) Marque no plano cartesiano os pontos (x,y) que satisfazem as equações: $y=x,$

$y=-x,\quad y=2x,\quad y=\frac{x}{2},\quad y=\frac{2x}{3},\quad 3x+2y=0$

Exercícios 3.2.2

3) Marque no plano cartesiano os pontos (x,y) que satisfazem as equações:

$y=x+1,\quad y=-x+2,\quad y=2x-6,\quad y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\quad y=\frac{2x}{3}-\frac{4}{3},\quad 3x+2y=6$

Exercícios 3.2.3

4) Marque no plano cartesiano os pontos (x,y) que satisfazem as equações: $y=x+1,$

$y=-2x+1,\quad y=-x+1,\quad y=\frac{x}{2}+1,\quad y=2x+1,\quad 3x+2y=1$

Exercícios 3.2.4

5) Estenda a figura 3 para a esquerda da origem e desenhe a reta tangente em vários pontos.

6) Prove, no caso da função $y=f(x)=x^2,$ que ela é crescente em $x>0$ e decrescente em $x<0.$ (Para isso não é preciso usar derivada.)

7) Mostre que $y=f(x)=x^3$ é uma função crescente em toda a reta, mesmo em $x<0.$

8) Mostre que a função do exercício anterior é uma função ímpar, assim chamada toda função que é definida em um intervalo simétrico em relação à origem (isto é, do tipo $[-a, a]$) e satisfaz a propriedade $f(-x)=-f(x)$ para todo x nesse intervalo.

9) Proponha um desafio: calcular a derivada de $y=f(x)=x^3$. Como sugestão, que o aluno relembre a expansão de $(x+h)^3$, complemente este exercício com a representação das retas tangentes ao gráfico da função; proponha mostrar que a função tem concavidade para baixo em $x<0$ e para cima em $x>0$.

10) Aproveite para fazer os alunos provarem direitinho as fórmulas do quadrado da soma e do cubo da soma. Um desafio maior seria provar a fórmula da quarta potência da soma. Seria um modo de encaminhar o aprendizado do binômio de Newton.

11) Prove que a derivada da soma de duas função é a soma das derivadas delas, isto é, $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$.

12) Prove que, se k é uma constante, então a derivada de $kf(x)$ é $kf'(x)$.

Exercícios 3.3.1

14) Uma companhia ferroviária verificou que quando cobra 6 reais pela passagem, a média de passagens vendidas é de 720 e quando o preço é de 11 reais, a média de passagens vendidas é de 320. Ache a função de demanda, se ela for linear.

15) Uma fábrica de equipamentos eletrônicos vende uma quantidade x de artigos (em milhões) quando o preço é de p, reais por unidade. Se a relação que existe entre p e x é dada por: $x^2-2px=p^2+25$, determine o número de artigos vendidos a 10 reais.

16) Uma empresa de distribuição de combustíveis necessita adquirir um caminhão tanque ao custo de 50000 u. m. Estima-se que o custo operacional do caminhão é de 2 u.m. por quilômetro rodado e que pode percorrer 100000 km antes da primeira revisão. Ache a função custo total se ela for afim.

17) Uma fábrica de circuitos para telefones celulares tem custo fixo para funcionar de 100000 reais e um custo de 4 reais para produzir cada unidade, que são vendidas a um preço de 8 reais por unidade. Determine as funções custo, custo médio, receita e lucro da fábrica. Calcule cada uma das funções obtidas, para 10000 unidades. Quando a fábrica terá lucro?

18) Uma empresa que produz componentes eletrônicos para sistemas de injeção eletrônica de carros, tem funções de custo total $C(x)=10x+8$ e de receita $R(x)=-2x^2+25x+1$ referentes à produção e à venda de x unidades do produto. Calcule os pontos de nivelamento. Quando a empresa tem e não tem lucro por produzir estes componentes?

19) Uma empresa que produz softwares para segurança de imóveis tem como função de custo total $C(x)=x^2+5x+10$ e de demanda $x=f(p)=100-5p$. É possível determinar o lucro máximo da empresa?

20) Uma empresa que produz componentes eletrônicos para sistemas de injeção eletrônica de carros, tem funções de custo total $C(x)=10x+12$ e de receita $R(x)=2x^2$ referentes à produção e à venda de x unidades do produto. (a) Quantos componentes devem ser vendidos para que a empresa não tenha prejuízo? (b) Se são produzidas 12 unidades do produto a empresa tem lucro?

Exercícios 4.1.1

Para a função lucro $L(x)=-x^2+12x-20$:

21) Determine a variação no lucro para as condições seguintes, em que x_1 é a quantidade inicial produzida e x_2 é a quantidade final produzida.

(a) de $x_1=4$ para $x_2=5$;

(b) de $x_1=5$ para $x_2=7{,}5$;

(c) de $x_1=4$ para $x_2=7{,}5$.

22) Faça um esboço do gráfico da função lucro incluindo os pares ordenados do item 1.

23) Obtenha a expressão da taxa média de variação (quociente diferencial) para a função lucro dada.

24) Usando a equação do item 3, calcule a taxa média de variação para cada um dos casos anteriores. Interprete seus resultados.

Exercício 4.1.2

Para a função lucro: $L(x)=-x^2+12\text{x}-20$, calcule:

25) a taxa instantânea de variação ou derivada da função lucro (L′(x));

26) os valores de L′(4), L′(5) e L′(7, 5). Interprete os resultados.

Exercícios 4.1.3

27) Dada a função $y=x^2+2x-8$:

(a) Ache o quociente diferencial (taxa média de variação) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

(b) Ache a derivada $\frac{dy}{dx}$

(c) Ache $y'(1)$ e $y'(-5)$

28) Dada a função $y=9x^2+8-4x$:

(a) Ache o quociente diferencial (taxa média de variação) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

(b) Ache a derivada $\frac{dy}{dx}$

(c) Ache $y'(2)$ e $y'(3)$

29) Dada a função lucro de uma empresa: $L(x)=-x^2+30x-125,$ em que x representa a quantidade de mercadorias e L, o lucro em reais, determine:

(a) O quociente diferencial.

(b) A derivada da função lucro

(c) Os valores de *L'(13), L'(18)* e *L'(15)*. Interprete os resultados.

30) A receita R, em reais,obtida com a venda de x unidades de certo tipo de perfume é:

$$R(x) = -\frac{x^2}{5} + 100x$$

(a) Ache a taxa média de variação para essa função.

(b) Ache a taxa instantânea de variação para essa função.

(c) Calcule $R'(250)$. O que significa o resultado obtido?

(d) Esboce o gráfico dessa função receita.

Exercícios 4.2.1

Calcule as derivada das seguintes funções, utilizando as técnicas de derivação.

28) $h(x) = 6x^2 + 5x^3 - 6x^{-3} + 5x^{-2}$

29) $y = \frac{9}{4x^9}$

30) $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

31) $y = x^{\frac{2}{3}} + 3x^{-3}$

32) $f(x) = (2x^3 + x)(x - 3x^2)$

33) $f(x) = 6x(2 + 3x - x^8)$

35) $h(x) = \frac{2x^3}{x+2}$

36) $w(x) = \frac{5}{x^4}$

37) $f(x) = \left(6x^2 + \frac{1}{3}\right)^2$

38) $y = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$

39) $y = \frac{x^4}{2x^3+1} . (x^2 + 2x)$

40) $y = \sqrt{5}(x^3 - x^4)$

34) $g(x)=\frac{x-1}{x}$ **41).** $f(t)=8t^4-9t+10t^2-90+15t^3$

Exercícios 4.2.2

Obtenha a derivada das seguintes funções:

42) $t(x)=senx+cosx$ **43)** $u(x)=cosx+x^3$

44) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da equação $f(x)=cosx$ no ponto $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$

Exercícios 5.1.1

45) Suponha a função custo $C(x)=13x^2+1040x+150$, em que x é a quantidade produzida. Calcule:

(a) O custo de 115 produtos. (b) O custo de 116 produtos. (c) O custo marginal.

(d) A taxa de variação do custo ao aumentarmos a produção de 115 para 116.

(e) O custo marginal para 115 produtos. Interprete e compare com o item (c).

46) Calcule, aproximadamente, o lucro adicional gerado pela 11ª mercadoria a partir da função lucro $L(x)=-\frac{x^2}{2}+35x-164-\frac{1000}{x}$. Depois faça uma comparação com o acréscimo real (não aproximado) do lucro, para a 11ª mercadoria.

47) Dada a função receita: $R(x)=-x^3+32x^2+900x$,

(a) Calcule, aproximadamente, a receita gerada pela 15ª mercadoria.

(b) Calcule o acréscimo exato na receita quando as vendas aumentam de 15 para 16 mercadorias.

Exercícios 5.2.1

48) Determine os valores de x para os quais as funções são crescentes:

a) $f(x)=2x^3-15x^2-84x+13$ b) $f(x)=2\cos x-x+1$ c) $f(x)=senx-cosx$

49) Determine os valores de x para os quais as funções são decrescentes:

a) $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+1$ b) $f(x)=x^2-1$ c) $f(x)=senx-cosx$

Exercícios 5.2.2

50) Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a $576cm^2$, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.

51) Dividindo um arame de comprimento L em duas partes, faz-se com uma das partes uma circunferência e com a outra um quadrado. Determinar o ponto em que se deve cortar o arame para que a soma das áreas geradas pelo quadrado e circunferência seja mínima.

52) Dentre todos os retângulos de perímetro 64c*m*, encontre as medidas de um em que sua áreas seja máxima.

53) Um negociador de carros importados sabe que o gasto de importação e de venda de x carros é $G(x)=56000+3500x-0{,}01x^2$ dólares. Sua experiência diz que ele pode vender $x=40000-10p$ carros a p dólares cada carro.

a) Quantos carros deve importar para obter lucro máximo?

b) Qual deve ser o preço de venda de cada carro? c) Qual é o lucro máximo?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar. 5ª ed. 3 reimp. 8 Vol. São Paulo: Atual, 1993.

LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. 3ª ed. 1 Vol. São Paulo: Harbra, 1994.

MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. Cálculo. 1 Vol. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1982.

GUIDORIZZI, Hamilton luiz. Um curso de Cálculo. 5ª ed. 1 Vol. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2001.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução de Higino H. Domingues. 5ª edição. Campinas: UNICAMP, 2004.

MULLER, Franz August; GARCIA, Adriana Martins. Matemática aplicada a negócios. Rio de Janeiro: Saraiva, 2012.

ÁVILA, Geraldo. Cálculo das funções de uma variável. 7ª ed. 1 Vol. Rio de Janeiro. LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2003

Revista do Professor de Matemática. Volume 8. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática

Revista do Professor de Matemática. Volume 18. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática

Revista do Professor de Matemática. Volume 23. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática

Revista do Professor de Matemática. Volume 53. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática

Revista do Professor de Matemática. Volume 60. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática

Revista do Professor de Matemática. Volume 61. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática

Portal Educação, Google Analytics. Disponível em: <http://www.portaleducacao.com.br/informatica/artigos/48358/google-analytics>. Acesso em 3 de julho de 2013.

Ecálculo. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm> acesso em 13 de agosto de 2016

Geocities. Disponível em <http://www.geocities.ws/infinitesimos/calculo/derivadas.pdf> acesso em em 17 de julho de 2016.

Blog do mestre. Disponível em: <http://www.oblogdomestre.com.br/2014/10/RetaTangenteACurvaNoPonto.Matematica.html> acesso em 17 de julho de 2016.

O Baricentro da mente. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/03/aplicacao-de-derivada-para-determinacao.html> acesso em 13 de junho de 2016

Mundo vestibular. Disponível em: <http://www.mundovestibular.com.br/articles/451/1/GRANDEZAS---REGRA-DE-TRES> acesso em 13 de agosto de 2016

Portal só Matemática. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/fundam/razoes5.php> acesso em 13 de agosto de 2016

Portal só Matemática. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/fundam/razoes4.php> acesso em 13 de agosto de 2016

Brasil Escola. Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/proporcao.htm>. Acesso em 15 de agosto de 2016.

Portal Cálculo UNESP: <http://www.calculo.iq.unesp.br/PDF/Continuidade-complemento.pdf> acesso em 20 de outubro de 2016.