UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Fernando Marques Calister

Representações dos Números Complexos e Transformações de Möbius

São José do Rio Preto
2016

Fernando Marques Calister

Representações dos Números Complexos e Transformações de Möbius

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

São José do Rio Preto
2016

Calister, Fernando Marques

Representações de Números Complexos e Transformações de Möbius/Fernando Marques Calister – São José do Rio Preto : [s.n.], 2016

87 f. ; 30cm.

Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Números Complexos. 2. Transformações de Möbius. 3. Transformações Conformes. 4. Projeção Estereográfica. I. Buzzi, Claudio Aguinaldo. III. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. V. Título.

CDU – 517.93

Fernando Marques Calister

Representações dos Números Complexos e Transformações de Möbius

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler
UFU - Uberlândia

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
19 de agosto de 2016

RESUMO

O objetivo deste trabalho é ampliar os conhecimentos sobre números complexos já adquiridos no ensino médio. Diversas formas de representação e propriedades operatórias são abordadas. Para este fim, primeiramente, os números complexos são definidos a partir do conceito de matrizes quadradas de ordem 2, e portanto, serão definidos como *pares ordenados* de números reais. Na sequência, a partir da apresentação geométrica dos conceitos e operações, é estudado o plano complexo estendido, as *Transformações de Möbius* e a *Projeção Estereográfica.*

Palavras-chave: Números Complexos. Transformações de Möbius. Transformações Conformes. Projeção Estereográfica.

ABSTRACT

The objective of this paper is to extend the concepts of complex numbers already acquired in high school. Many forms of representation and operative properties are used. For that, first, the complex numbers are defined from the concept of square matrices of order 2, and will therefore be defined as *ordered pairs* of real numbers. Following, from the geometric presentation of concepts and operations, it is studied the extended complex plane, the *Möbius Transformations* and the *Stereographic Projection*.

Keywords: Complex Numbers. Möbius Transformations. Conformal Transformations. Stereographic Projection.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me guiar e me dar forças para superar os momentos mais difíceis.

Aos meus queridos pais, José e Maria, por terem me apoiado e compreendido as minhas ausências durante os momentos de estudos.

À minha esposa Lucilena, amiga, compreensiva, paciente durante todos os dias dos 11 anos que estamos juntos.

Ao Prof Dr Claudio Aguinaldo Buzzi por me orientar no desenvolvimento deste trabalho com toda paciência e atenção.

E a todos os meus colegas de PROFMAT que de maneira direta ou indireta contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Sumário

Capítulo 1

Tratamento Matricial

1.1 Introdução

Os números complexos surgem para dar uma solução para a equação $x^2 + 1 = 0$.

Neste primeiro capítulo vamos propor uma resolução desta equação no espaço das matrizes de entradas reais e de ordem 2×2.

Com o auxílio da Álgebra Linear Elementar, escrevemos a equação na forma

$$X \cdot X + I = O, \text{isto é}, X \cdot X = -I, \tag{1.1}$$

onde $X \in M_2(\mathbb{R})$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade 2×2 e $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2×2.

Nessas condições, tomando uma matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, temos

$$X \cdot X = -I \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da última igualdade, temos

(I) $a^2 + bc = -1$,

(II) $ab + bd = 0$,

(III) $ac + cd = 0$ e

(IV) $bc + d^2 = -1$.

Em (II) tem-se que

$$ab + bd = 0 \Longleftrightarrow b \cdot (a + d) = 0 \Longleftrightarrow b = 0 \text{ ou } a + d = 0 \Longleftrightarrow b = 0 \text{ ou } a = -d.$$

Quando $b = 0$, a equação $a^2 + bc = -1$ se torna $a^2 = -1$ e, esta não possui solução, pois admitimos que $a \in \mathbb{R}$, para qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.

O mesmo ocorre quando verificamos a igualdade (III), pois

$$ac + cd = 0 \Longleftrightarrow c \cdot (a + d) = 0 \Longleftrightarrow c = 0 \text{ ou } a + d = 0 \Longleftrightarrow c = 0 \text{ ou } d = -a.$$

Quando $c = 0$, a equação $bc + d^2 = -1$ se torna $d^2 = -1$ e, esta não possui solução, pois admitimos que $d \in \mathbb{R}$, para qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

Do exposto acima, temos que uma solução de (1.1) será da forma

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

e satisfazendo a condição $a^2 + bc = -1$, o que nos leva a concluir que a solução não é única.

Podemos ainda garantir que a matriz X admite inversa, isto é, existe X^{-1} tal que $X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I_2$, pois

$$det(X) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & -a \end{vmatrix} = -a^2 - bc = -(a^2 + bc) = -(-1) = 1,$$

onde a penúltima igualdade segue da condição $a^2 + bc = -1$. E ainda,

$$X \cdot X = -I \Longleftrightarrow (X \cdot X) \cdot X^{-1} = -I \cdot X^{-1},$$

e como o produto de matrizes é associativo segue,

$$X \cdot (X \cdot X^{-1}) = -X^{-1} \Longleftrightarrow X \cdot I = -X^{-1} \Longleftrightarrow X = -X^{-1} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow X + X^{-1} = O_2 \Longleftrightarrow X^{-1} = -X,$$

onde O_2 é a matriz nula de ordem 2.

Tomando-se $a = 0$, $b = -1$ e $c = 1$ obtemos $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ como uma das possíveis soluções. Denotaremos esta matriz por i.

1.2 O Conjunto dos Números Reais Ampliado

Nesta seção queremos mostrar como o Conjunto dos Números Reais pode ser ampliado para um conjunto que acomoda uma infinidade de números além dos números reais.

Para isso, tomaremos aplicações cujos domínios e contradomínios são espaços vetoriais e que preservam as operações de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar.

Definição 1.2.1. *Sejam V e W espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ que satisfaz*
(a) $(\forall u, v \in V)$: $T(u + v) = T(u) + T(v)$,
(b) $(\forall v \in V)$ e $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$: $T(\lambda v) = \lambda T(v)$.

Vale observar que para qualquer aplicação linear $T : V \longrightarrow W$

- $T(0) = 0$, pois $T(0) = T(0 - 0) = T(0) - T(0) = 0$;
- Se $v \in V$, então $T(-v) = -T(v)$, pois $T(v) + T(-v) = T(v - v) = T(0) = 0$.

Como exemplo de transformação linear, apresentamos a rotação por um ângulo θ.
Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De acordo com a transformação linear dada acima, podemos afirmar que, geometricamente, $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ corresponde à rotação de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos no plano $\mathbb{R}^2$, no sentido anti-horário.

Para enunciarmos e demonstrarmos a Proposição 1.2.2, será de extrema importância entendermos o que é um *isomorfismo*.

Isomorfismo é estudado na matemática com a função de estender conhecimentos de uns fenômenos para outros, ou seja, dizer que dois objetos são isomorfos equivale a dizer que qualquer propriedade que é preservada pelo isomorfismo e válida para um dos objetos, também será válida para o outro.

Proposição 1.2.2. *Existe um subconjunto de matrizes reais 2×2 que é isomorfo ao conjunto dos números reais.*

Demonstração:
Vamos considerar a transformação $T : \mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ que leva o número real 1 na matriz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, isto é, $T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por linearidade temos que para todo $a \in \mathbb{R}$ vale $T(a) = a \cdot T(1)$. De fato,

$$T(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot T(1).$$

Note que $T(0) = O_2$, pois se $T(a) = aT(1)$ para todo número real a, tomando $a = 0$,

$$T(0) = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Provemos que T é um isomorfismo entre $\mathbb{R}$ e o conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$, isto é, T preserva as operações de *adição* e *multiplicação* em $\mathbb{R}$. Devemos mostrar que $T(a + c) = T(a) + T(c)$ e $T(a \cdot c) = T(a) \cdot T(c)$ para todo $a, c \in \mathbb{R}$.

De fato,

(i) $T(a + c) = \begin{pmatrix} a + c & 0 \\ 0 & a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = T(a) + T(c)$ e

(ii) $T(a \cdot c) = \begin{pmatrix} a \cdot c & 0 \\ 0 & a \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = T(a) \cdot T(c)$. ∎

Desta maneira, acrescentando o elemento $bi = b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ o conjunto $\mathbb{R}$ fica ampliado e escrito da forma

$a \cdot I + bi = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

A um número escrito na forma $a \cdot I + bi$ dá-se o nome de *Número Complexo*, donde temos:

(i) $a \cdot I + 0i = a \cdot I$ chamaremos de *números reais* e,

(ii) $0 \cdot I + bi = bi$ chamaremos de *números imaginários.*

Iremos representá-lo por $\mathbb{C} = \{a \cdot I + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$.

1.3 Operações entre Números Complexos

Apresentaremos as operações entre números complexos a partir da adição e multiplicação de matrizes.

Consideremos os seguintes números complexos $z = aI + bi$, $z_1 = a_1I + b_1i$, $z_2 = a_2I + b_2i$ e $z_3 = a_3I + b_3i$.

Definição 1.3.1. *Em $\mathbb{C}$ definimos as operações de adição*

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (z_1; z_2) & \longmapsto & z_1 + z_2 \end{array}$$

onde

$$z_1 + z_2 = (a_1I + b_1i) + (a_2I + b_2i) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

e multiplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (z_1; z_2) & \longmapsto & z_1 \cdot z_2 \end{array}$$

onde

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1I + b_1i) \cdot (a_2I + b_2i) = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix}.$$

Proposição 1.3.2. *Sejam z, z_1, z_2 e z_3 números de $\mathbb{C}$, então são válidas as seguintes propriedades para*

Adição

(A_1) Fechamento: $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$.

(A_2) Comutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(A_3) Associativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(A_4) Existência de elemento neutro. Para todo $z \in \mathbb{C}$ *existe* $z_0 = 0 \cdot I + 0i$ *tal que*

$$z + z_0 = z = z_0 + z.$$

(A_5) Existência do elemento oposto. Para todo $z \in \mathbb{C}$, *existe* $-z \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$z + (-z) = z_0 = (-z) + z.$$

(A_6) Multiplicação por um escalar k. *Para todo* $k \in \mathbb{R}$ *tem-se* $k \cdot z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Multiplicação

(M_1) Fechamento: $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$.

(M_2) Comutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(M_3) Associativa: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(M_4) Existência de elemento neutro. Para todo $z \in \mathbb{C}$, *existe* $1 \in \mathbb{C}$ *tal que* $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$. *Nesse caso* $1 = 1I + 0i$.

(M_5) Existência de elemento inverso. Dado $z \neq 0$ *existe o elemento inverso* z^{-1} *tal que* $z \cdot z^{-1} = 1 = z^{-1} \cdot z$. *Nesse caso, se* $z = aI + bi$ *então* $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} I - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i$.

Distributividade da multiplicação em relação à adição

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

Demonstração:

Adição

(A_1)

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 I + b_1 i) + (a_2 I + b_2 i) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ (b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix} = (a_1 + a_2)I + (b_1 + b_2)i \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

(A_2)

$$\begin{aligned} z_1+z_2 =&(a_1I+b_1i)+(a_2I+b_2i) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2+a_1 & -(b_2+b_1) \\ (b_2+b_1) & a_2+a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = a_2I+b_2i+a_1I+b_1I = z_2+z_1. \end{aligned}$$

Portanto, $z_1+z_2=z_2+z_1$.

(A_3)

$$\begin{aligned} &(z_1+z_2)+z_3 = [(a_1I+b_1i)+(a_2I+b_2i)]+(a_3I+b_3i) \\ &= \left[\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+a_3 & -(b_1+b_2)-b_3 \\ (b_1+b_2)+b_3 & (a_1+a_2)+a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1+(a_2+a_3) & -b_1-(b_2+b_3) \\ b_1+(b_2+b_3) & a_1+(a_2+a_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+a_3 & -(b_2+b_3) \\ b_2+b_3 & a_2+a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{pmatrix}\right] \\ &=(a_1I+b_1i)+[(a_2I+b_2i)+(a_3I+b_3i)] = z_1+(z_2+z_3). \end{aligned}$$

Logo, $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

(A_4)Queremos determinar o número complexo z_0 tal que $z+z_0=z$. Para isso, tomemos $z_0 = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbb{R}$.

$$z+z_0=z \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & -b-y \\ b+y & a+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Da última igualdade, segue

(1) $a + x = a \iff x = a - a \iff x = 0$,

(2) $-b - y = -b \iff -y = -b + b \iff y = 0$,

(3) $b + y = b \iff y = b - b \iff y = 0$,

(4) $a + x = a \iff x = a - a \iff x = 0$.

Concluímos que $z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0I + 0i$.

Analogamente, chegamos que $z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0I + 0i$ para $z_0 + z = z$. Logo, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z + z_0 = z = z_0 + z$.

(A_5) Queremos determinar o número complexo $\widetilde{z}$ tal que $z + \widetilde{z} = z_0$. Para isso, tomemos $\widetilde{z} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z + \widetilde{z} = z_0 \iff \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} a + x & -b - y \\ b + y & a + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da última igualdade, segue

(1) $a + x = 0 \iff x = -a$.

(2) $-b - y = 0 \iff y = -b$.

(3) $b + y = 0 \iff y = -b$.

(4) $a + x = 0 \iff x = -a$.

Concluímos que $\widetilde{z} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = -z$ e ainda, $\widetilde{z} = (-a)I + (-b)i$.

Analogamente, chegamos que $\widetilde{z} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = (-a)I + (-b)i$, para $\widetilde{z} + z = z_0$.

(A_6)

$$k \cdot z = k \cdot (aI + bi) = k \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & -kb \\ kb & ka \end{pmatrix} = (k \cdot a)I + (k \cdot b)i \in \mathbb{C}.$$

Multiplicação

(M_1)

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 I + b_1 i) \cdot (a_2 I + b_2 i) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2)I + (a_1b_2 + a_2b_1)i \in \mathbb{C}.$$

(M_2)

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 I + b_1 i) \cdot (a_2 I + b_2 i) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 - b_2b_1 & -a_2b_1 - b_2a_1 \\ a2_1b_1 + b_2a_1 & a_2a_1 - b_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = (a_2 I + b_2 i) \cdot (a_1 I + b_1 i) = z_2 \cdot z_1.$$

(M_3)

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = [(a_1 I + b_1 i) \cdot (a_2 I + b_2 i)] \cdot (a_3 I + b_3 i)$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2a_3 - a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 - b_1b_3a_2 & -a_1a_2b_3 + b_1b_2b_3 - a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 \\ a_1a_3b_2 - b_1b_2b_3 + a_1a_3b_1 + a_2a_3b_1 & a_1a_2a_3 - a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 - b_1b_3a_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) =& (a_1 I + b_1 i) \cdot [(a_2 I + b_2 i) \cdot (a_3 I + b_3 i)] \\
=& \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{pmatrix} \right] \\
=& \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2a_3 - b_2b_3 & -a_3b_3 - b_2a_3 \\ b_2a_3 + a_2b_3 & -b_2b_3 - a_2a_3 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} a_1a_2a_3 - a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 - b_1b_3a_2 & -a_1a_2b_3 + b_1b_2b_3 - a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 \\ a_1a_3b_2 - b_1b_2b_3 + a_1a_2b_3 + a_2a_3b_1 & a_1a_2a_3 - a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 - b_1b_3a_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

(M_4)Seja $\widetilde{z}$ tal que $z \cdot \widetilde{z} = z$. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, tomemos $\widetilde{z} = xI + yi = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
z \cdot \widetilde{z} = z \iff (aI + bi) \cdot (xI + yi) = (aI + bi) \iff \\
\iff \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \iff \\
\iff \begin{pmatrix} ax - by & -ay - bx \\ bx + ay & -by + ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da última igualdade, tem-se

(1) $ax - by = a$,

(2) $bx + ay = b$,

(3) $-ay - bx = -b$

(4) $-by + ax = a$.

Considere as igualdades (1) e (2). Inicialmente, tomando $a = 0$ segue em (1) $by = 0$ e em (2) $bx = b$. Daí, devemos considerar duas situações:

- $b = 0$, o que implica a igualdade (1) e (2) terem infinitas soluções;
- $b \neq 0$, obtemos $x = 1$ e $y = 0$.

Tomando $b = 0$ segue em (1) $ax = a$ e em (2) $ay = 0$. Daí, devemos considerar duas situações:

- $a = 0$, já vista anteriormente;
- $a \neq 0$, obtemos $x = 1$ e $y = 0$.

Agora, tomando $a \neq 0$ e $b \neq 0$ obteremos $x = 1$ e $y = 0$. De fato. De (1) tem-se $x = \dfrac{a + by}{a}$ que substituindo em (2)tem-se

$$b \cdot \left(\frac{a + by}{a}\right) + ay = b \Longleftrightarrow ba + b^2y + a^2y = ab \Longleftrightarrow (a^2 + b^2)y = 0.$$

Como $a^2 + b^2 \neq 0$, segue que $y = 0$ e assim, concluímos que $x = 1$.

Nessas condições, $\widetilde{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot I + 0i = 1.$

E ainda,

$z \cdot 1 = (aI + bi) \cdot (1I + 0i) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = (aI + bi) = z.$

$1 \cdot z = (1I + 0i) \cdot (aI + bi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = (aI + bi) = z.$

Logo, 1 é o elemento neutro da multiplicação.

(M_5) Seja z^{-1} o inverso multiplicativo do número complexo $z = aI + bi$, com $z \neq 0$, ou seja, a e b não simultaneamente nulos, então

$$z \cdot z^{-1} = 1 = z^{-1} \cdot z.$$

Tomemos $z^{-1} = cI + di$, com $c, d \in \mathbb{R}$, então

$$z \cdot z^{-1} = 1 \Longleftrightarrow (aI + bi) \cdot (cI + di) = (1I + 0i) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da última igualdade temos $\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$

Da segunda equação do sistema acima e tomando $a \neq 0$, temos

$$ad + bc = 0 \Longleftrightarrow ad = -bc \Longleftrightarrow d = -\frac{bc}{a}.$$

Substituindo o valor de d na primeira equação, obtemos

$$ac - b \cdot \left(-\frac{bc}{a}\right) = 1 \Longleftrightarrow a^2c + b^2c = a \Longleftrightarrow c(a^2+b^2) = a \Longleftrightarrow c = \frac{a}{a^2+b^2},$$

Nessas condições,

$$d = -\frac{b \cdot (\frac{a}{a^2+b^2})}{a} = -\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Logo, $c = \dfrac{a}{a^2+b^2}$ e $d = -\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

$$z^{-1} \cdot z = 1 \Longleftrightarrow (cI + di) \cdot (aI + bi) = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} ca - db & -bc - ad \\ da + bc & -db + ca \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da última, igualdade temos $\begin{cases} ac & - & bd & = & 1 \\ ad & + & bc & = & 0 \end{cases}$

que já foi resolvido acima. Portanto,

$$z^{-1} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) I + \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right) i.$$

Segue,

$$z \cdot z{-}1 = (aI + bi) \cdot \left[\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) I + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) i\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{ba}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1I + 0i = 1.$$

Analogamente, $z^{-1} \cdot z = 1$.

Distributividade da multiplicação em relação à adição

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 + z_3) =&(a_1 I + b_1 i) \cdot [(a_2 I + b_2 i) + (a_3 I + b_3 i)] \\
=& \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{pmatrix} \right] \\
=& \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & -b_2 - b_3 \\ b_2 + b_3 & a_2 + a_3 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3) & a_1(-b_2 - b_3) - b_1(a_2 + a_3) \\ b_1(a_2 + a_3) + a_1(b_2 + b_3) & b_1(-b_2 - b_3) + a_1(a_2 + a_3) \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 & -a_1b_2 - a_1b_3 - a_2b_1 - a_3b_1 \\ a_2b_1 + a_3b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 & -b_1b_2 - b_1b_3 + a_1a_2 + a_1a_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 =&(a_1 I + b_1 i)(a_2 I + b_2 i) + (a_1 I + b_1 i)(a_3 I + b_3 i) \\
=& \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 & -a_1b_2 - a_1b_3 - a_2b_1 - a_3b_1 \\ a_2b_1 + a_3b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 & a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

∎

1.4 O Corpo dos Números Complexos

Com o intuito de simplificar as operações com números complexos, iremos defini-lo como um par ordenado $z = (a; b)$ de números reais a e b sujeitos às regras operacionais

$(R1)$ igualdade: $(a; b) = (c; d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

$(R2)$ soma: $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$.

$(R3)$ produto: $(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$ e $m(a; b) = (ma; mb)$.

Com este objetivo, consideremos o conjunto $\Upsilon = \{(a; 0), a \in \mathbb{R}\}$, de modo que

- $(a; 0) + (b; 0) = (a + b; 0)$;
- $(a; 0) \cdot (b; 0) = (a \cdot b; 0)$.

Vale observar que, em Υ, estas operações satisfazem as propriedades apresentadas na Proposição 1.2.2.

Proposição 1.4.1. *O conjunto Υ é isomorfo ao conjunto dos números reais.*

Demonstração:
Consideremos a transformação $\Gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \Upsilon$ que leva o número real 1 no par $(1; 0)$, isto é, $\Gamma(1) = (1; 0)$. Por linearidade tem-se que para todo $a \in \mathbb{R}$ vale $\Gamma(a) = a\Gamma(1)$. De fato,

$$\Gamma(a) = (a; 0) = a(1; 0) = a\Gamma(1).$$

E mais, $\Gamma(0) = (0; 0)$, pois se $\Gamma(a) = a\Gamma(1)$ para to número real a, tomando $a = 0$, segue $\Gamma(0) = 0\Gamma(1) = 0(1; 0) = (0; 0)$.

Provemos que Γ é um isomorfismo entre $\mathbb{R}$ e Υ. De fato,
(I) $\Gamma(a + b) = (a + b; 0) = (a; 0) + (b; 0) = \Gamma(a) + \Gamma(b)$;
(II) $\Gamma(a \cdot b) = (a \cdot b; 0) = (a; 0) \cdot (b; 0) = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b)$. ∎

A partir da transformação $T; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que representa uma rotação θ radianos no sentido anti-horário,

$$T(x; y) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

tomando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e o ponto $Q = (b; 0)$ pertencente ao eixo das abscissas, tem-se

$$T(b; 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = (0; b).$$

Conclui-se que, o ponto $Q = (b; 0)$ após rotação de $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário, passa a pertencer ao eixo das ordenadas.

Tomando o *par ordenado* $(a; b)$ denotado por z como no início desta seção, tem-se

$$z = (a; b) = (a; 0) + (0; b) = (a \cdot 1; 0) + (0; b \cdot 1) = (a; 0) \cdot (1; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1).$$

Segue da Proposição 2.3.4 que

$$z = (a; b) = (a; 0) + (0; b) = a(1; 0) + b(0; 1).$$

Note que o produto $(b; 0) \cdot (0; 1)$ também representa uma rotação de $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário, do ponto $Q = (0; 1)$.

Nestas condições, passaremos a admitir que,

- o número 1 pode ser associado ao par ordenado $(1; 0)$ e a matriz I_2;
- o número i pode ser associado ao par ordenado $(0; 1)$ e a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vale observar que

$$(1; 0) \cdot (1; 0) = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0; 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (1; 0)$$

ou seja, equivale ao número real 1 e,

$$(0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1; 0)$$

que equivale ao número real -1. Assim, podemos escrever cada número complexo na forma

$$z = (a; b) = a + bi, \tag{1.2}$$

chamada de *forma algébrica*.

Aos números reais a e b daremos os nomes de *parte real* e *parte imaginária* de $z = (a; b)$, respectivamente, indicando por

$$Re(z) = a \text{ e } Im(z) = b.$$

Em particular temos

(a) o par $(a; 0)$ é identificado com o número real a;

(b) o par $(0; b)$ é um número imaginário puro identificado por bi;

(c) o par $(0; 0)$ é equivalente ao número real 0.

A partir da igualdade (1.2) e tomando os números complexos $z_1 = (a; b)$ e $z_2 = (c; d)$, as fórmulas $(R1)$, $(R2)$ e $(R3)$ podem ser escritas

$(R1)$ $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow (a; b) = (c; d) \Longleftrightarrow a = c$ e $b = d$,

$(R2)$ $z_1 + z_2 = (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d) = (a + c) + (b + d)i,$

$(R3)$ $z_1 \cdot z_2 = (a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$

Proposição 1.4.2. *Seja o conjunto* $\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$ *e,considere* $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. *Então,*

(P1) lei do fechamento: $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ *e* $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$.

(P2)lei comutativa da adição: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

(P3) lei associativa da adição: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

(P4)lei comutativa da multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

(P5) lei associativa da multiplicação: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

(P6) lei distributiva: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

(P7) elemento neutro da adição: $z + 0 = z = 0 + z$.

(P8) elemento neutro da multiplicação: $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$.

(P9)Para todo $z_1 \in \mathbb{C}$, *existe um único número* $z \in \mathbb{C}$, *tal que*

$$z_1 + z = 0,$$

chamado elemento oposto de z_1.

(P10) Para todo $z_1 \in \mathbb{C}$, *com* $z_1 \neq 0$, *existe um único número* $z \in \mathbb{C}$, *tal que*

$$z_1 \cdot z = z \cdot z_1 = 1.$$

O elemento z_1 *é chamado de inverso de* z *e será denotado por* $z_1 = \dfrac{1}{z}$.

Omitiremos a demonstração da proposição acima, pois já foram demonstradas na forma matricial na Proposição 1.4.2.

Como $\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$ satisfaz tais propriedades, diz-se que $\mathbb{C}$ é um *Corpo*.

1.4.1 Operações Inversas

(A) A operação de subtração é a operação inversa da adição.

Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tais que $z_1 = (a; b)$, $z_2 = (c; d)$ e $z_3 = (e; f)$.
Denotando a diferença $z_1 - z_2$ por z_3 temos:

$$z_3 = z_1 - z_2.$$

Assim, $z_1 = z_2 + z_3$. Mais precisamente,

$$(a;b) = (c;d) + (e;f).$$

Utilizando a regra operacional $(R2)$ segue:

$$(a;b) = (c+e;d+f),$$

e ainda por $(R1)$,

$$a = c + e \text{ e } b = d + f.$$

Isolando e e f, obtemos

$$e = a - c \text{ e } f = b - d.$$

Desta forma, a lei de subtração será dada por

$$z_1 - z_2 = z_3 = (a-c;b-d) = (a-c) + (b-d)i$$

(B) A operação de divisão é a operação inversa da multiplicação.

Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tais que $z_1 = (a;b)$, $z_2 = (c;d)$, $z_3 = (e;f)$ e $z_2 \neq 0$ Denotando o quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$ por z_3 temos

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

Assim,

$$z_1 = z_2 \cdot z_3, \text{ mais precisamente }, (a;b) = (c;d) \cdot (e;f)$$

Utilizando a regra operacional $(R3)$ segue

$$(a;b) = (ce - df; cf + de)$$

Agora, de $(R1)$ obtemos

$$a = ce - df; b = cf + de. \tag{1.3}$$

Queremos determinar o par $(e;f)$, porém devemos considerar que o número complexo $z_2 = (c;d) \neq 0$ admita $c = 0$ ou $d = 0$.

Primeiramente, tomando $c = 0$ e $d \neq 0$ na igualdade (1.3) tem-se

$$a = -df \text{ e } b = de.$$

Assim, tem-se $f = -\frac{a}{d}$ e $e = \frac{b}{d}$.

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = z_3 = (e; f) = e + fi = \frac{b}{d} + \frac{-a}{d}i$.

Caso, $c \neq 0$ e $d = 0$, na igualdade (1.3) tem-se

$$a = ce \text{ e } b = cf.$$

Assim, tem-se $e = -\frac{a}{c}$ e $f = \frac{b}{c}$.

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = z_3 = (e; f) = e + fi = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}i$.

No caso em que $c \neq 0$ e $d \neq 0$ e de $a = ce - df$ segue

$$a = ce - df \Longleftrightarrow ce = a + df \Longleftrightarrow e = \frac{a + df}{c} \text{ (I)}$$

Substituindo (I) em $b = cf + de$, tem-se

$$b = cf + d(\frac{a + df}{c}) \Longleftrightarrow bc = c^2 f + ad + d^2 f \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow bc - ad = f(c^2 + d^2) \Longleftrightarrow f = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \ (II)$$

Substituindo (II) em (I) tem-se

$$e = \frac{a + df}{c} \Longleftrightarrow e = \frac{a + d(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2})}{c} \Longleftrightarrow e = \frac{ac^2 + ad^2 + bdc - ad^2}{c(c^2 + d^2)} \Longleftrightarrow$$
$$e = \frac{c(ac + bd)}{c(c^2 + d^2)} \Longleftrightarrow e = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}.$$

Nessas condições, a lei da divisão será dada por

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 = (e; f) = e + fi = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Em particular, se $z \neq 0$, então

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1 + 0i}{c + di} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2}i.$$

Proposição 1.4.3. *Se o produto de dois números complexos é nulo, então pelo menos um dos fatores deve ser nulo.*

Demonstração:
Tomemos $z_1 = (a; b)$ e $z_2 = (c; d)$ de modo que $z_1 \cdot z_2 = 0$. Segue, das regras operatórias $(R3)$ e $(R1)$, respectivamente, que

$$ac - bd = 0 \text{ e } ad + bc = 0.$$

Observe que, se a ou b não é nulo, formamos o sistema homogêneo que admitirá uma solução diferente da trivial, logo será possível e indeterminado, nas incógnitas a e b.

$$\begin{cases} ca & - & db & = & 0 \\ da & + & cb & = & 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow c^2 + d^2 = 0 \Longleftrightarrow c = d = 0$$

Logo, se $z_1 \cdot z_2 = 0$, então $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ ou $z_1 = z_2 = 0$. ∎

Capítulo 2

Representações dos Números Complexos

2.1 Representação Geométrica

Sabemos que cada par ordenado de números reais $(a; b)$ está associado a um único ponto P de coordenadas a e b do plano de coordenadas retangulares Oxy.

A partir do estudo do Corpo $\mathbb{C}$, vimos que a cada número complexo $z = a + bi$ associamos o par ordenado $(a; b)$. Desse modo, podemos associar a cada número complexo $z = a + bi$ o ponto $P(a; b)$, chamado de afixo de z.

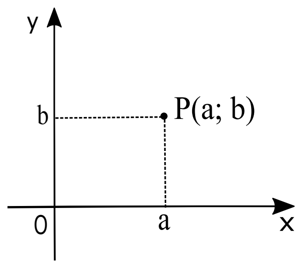

Figura 2.1: Afixo do Ponto P

2.1.1 Interpretação Vetorial dos Números Complexos

Dado um número complexo $z = a + bi$, podemos considerá-lo como o vetor $\overrightarrow{OP}$, de origem $O(0; 0)$ e extremidade $P(a; b)$ do plano Oxy, como na figura 2.2.

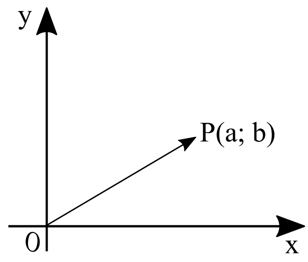

Figura 2.2: Vetor OP

Tomando o vetor $\overrightarrow{OP}$ fixo, chama-se classe de equipolência de $\overrightarrow{OP}$ ao conjunto de todos os vetores equipolentes a $\overrightarrow{OP}$, isto é,

(i) se $\overrightarrow{OP}$ é nulo, então todos serão nulos;

(ii) se nenhum é nulo, então terão mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

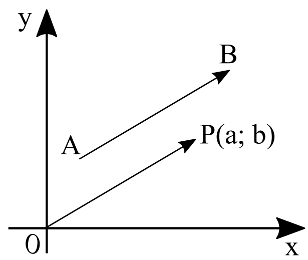

Figura 2.3: Vetor AB da Classe de Equipolência do Vetor OP

A partir da definição da adição de dois números complexos, temos que $z_1 + z_2$ associa-se ao ponto $(a + c; b + d)$ que, por sua vez, corresponde ao vetor cujas componentes são as coordenadas desse ponto. Nessas condições, o número complexo $z_1 + z_2$ é representado pela adição vetorial do vetores z_1 e z_2.

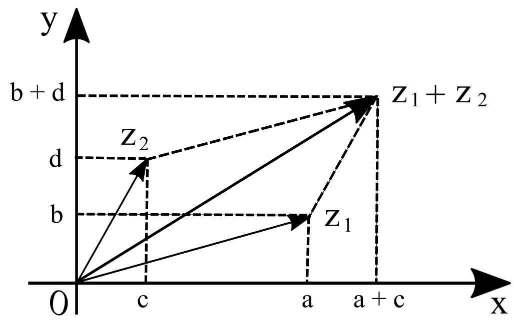

Figura 2.4: Afixo da Adição

O oposto do número complexo $z = (a; b) = a + bi$, representado por $-z$, corresponde a um vetor de mesmo comprimento, mesma direção, porém, de sentido oposto ao de z.

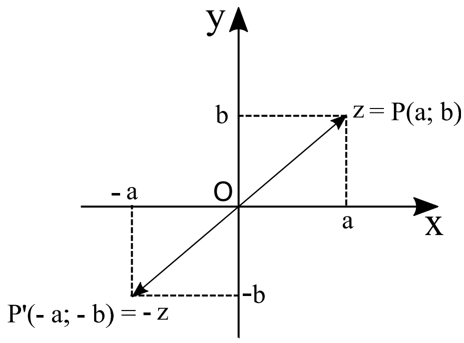

Figura 2.5: Afixo do Oposto de z

A diferença $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ é representada como na figura 2.6.

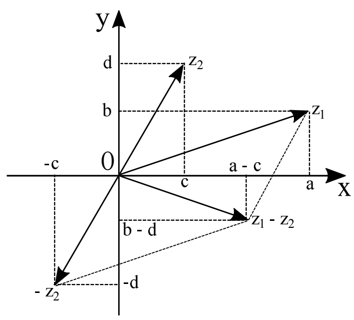

Figura 2.6: Afixo da Diferença

Do exposto nas figuras 2.5 e 2.6 temos que a representação geométrica da adição e da subtração de números complexos corresponde à regra do paralelogramo para vetores. A diagonal obtida representa os vetores $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$ em cada caso.

Da definição de multiplicação de números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos que $z_1 \cdot z_2$ associa-se ao par $(ac - bd; ad + bc)$.

Definição 2.1.1. *Dado o número complexo* $z = (a; b) = a + bi$ *o conjungado de* z *é o número complexo* $\overline{z} = (a; -b) = a - bi$.

Geometricamente, $\overline{z}$ significa a reflexão de z em relação ao eixo Ox, isto é, a posição do afixo de $\overline{z}$ é simétrica à do afixo de z em relação ao eixo Ox.

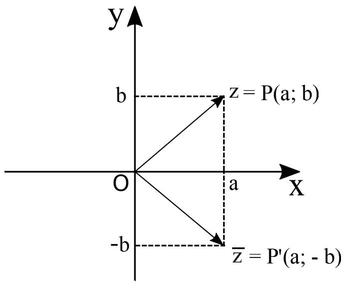

Figura 2.7: Afixo do Conjugado de z

Proposição 2.1.2. *Se z e w são números complexos, então:*

(I) $\overline{\overline{z}} = z$;

(II) $\overline{z} = z \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

(III) $z + \overline{z} = 2Re(z)$;

(IV) $z - \overline{z} = 2iIm(z)$;

(V) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

(VI) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$;

(VII) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

$(VIII)$ *Se* $w \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$;

(IX) $(\overline{z})^n = (\overline{z^n}), n \in I\!N$.

Demonstração:

Para a demonstração tomemos os números complexos $z = (a; b)$ e $w = (c; d)$, com a, b, c e d reais.

(I) Como $z = (a; b)$ segue da Definição 2.1.1 que $\overline{z} = (a; -b)$.
Chamando de $u = \overline{z} = (a; -b)$ segue que $\overline{u} = (a; -(-b)) = (a; b)$. Nessas condições, concluímos que $\overline{u} = z$ e ainda que $\overline{u} = \overline{\overline{z}}$. Portanto, $z = \overline{\overline{z}}$.

(II) Se $\overline{z} = z$ então, $(a; -b) = (a; b)$.

Nessas condições, teremos $a = a$ que sempre ocorre e, $-b = b$ que só será verdade quando $b = 0$. Logo, $z = (a; 0) = a(1; 0)$ representa um número real. Reciprocamente, se z é um número real, então $z = a = a(1; 0) = (a; 0)$ e $\overline{z} = (a; -0) = (a; 0) = z$.

Portanto, $\overline{z} = z \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

(III) $z + \overline{z} = (a; b) + (a; -b) = (a + a; b + (-b)) = (2a; 0) = 2a(1; 0) = 2a = 2Re(z)$.

(IV) $z - \overline{z} = (a;b) - (a;-b) = (a-a; b-(-b)) = (0;2b) = 2b(0;1) = 2ib = 2iIm(z)$.

(V) Se $z = (a;b)$ e $w = (c;d)$ então,

$$z + w = (a;b) + (c;d) = (a+c; b+d).$$

Daí, segue que

$$\overline{z+w} = (a+c; -(b+d)). \tag{2.1}$$

Por outro lado,

$$\overline{z} + \overline{w} = (a;-b) + (c;-d) = (a+c; -(b+d)). \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) concluímos que $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(VI) Se $z = (a;b)$ e $w = (c;d)$ então,

$z - w = (a;b) - (c;d) = (a;b) + (-c;-d) = (a+(-c); b+(-d)) = (a-c; b-d)$.

Daí, segue que

$$\overline{z-w} = (a-c; -(b-d)). \tag{2.3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \overline{z} - \overline{w} =& (a;-b) - (c;-d) = (a;-b) + (-c; -(-d)) = (a;-b) + (-c;d) \\ =& (a-c; -b+d) = (a-c; -(b-d)). \end{aligned} \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4) concluímos que

$$\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}.$$

(VII) Da definição de produto entre $z = (a;b)$ e $w = (c;d)$ segue,

$$z \cdot w = (a;b) \cdot (c;d) = (ac - bd; ad + bc).$$

Logo,

$$\overline{z \cdot w} = (ac - bd; -(ad+bc)). \tag{2.5}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \overline{z} \cdot \overline{w} =& (a;-b) \cdot (c;-d) = (ac - (-b)(-d); a(-d) + (-b)c) \\ =& (ac - bd; -ad - bc) = (ac - bd; -(ad+bc)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6) concluímos que $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

$(VIII)$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}$, decorrente do item (vii) com $w \neq 0$.

Agora, precisamos mostrar que $\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\overline{w}}$.

Fazendo $u = \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}$ temos $\overline{u} = \overline{\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}} = \frac{1}{w}$, sendo a segunda igualdade válida por (I).

Desse modo, podemos escrever que $\overline{u} \cdot w = 1$ e ainda, que $\overline{\overline{u} \cdot w} = \overline{1}$. Aplicando as propriedades (VII) e (II) no primeiro e segundo membros, respectivamente, temos $\overline{\overline{u}} \cdot \overline{w} = 1$, donde por (I) obtemos, $u \cdot \overline{w} = 1 \Longleftrightarrow u = \frac{1}{\overline{w}}$.

Desta forma, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

(IX) Provaremos esta propriedade usando o Princípio da Indução Finita sobre $n \in I\!N$.

Consideremos a sentença $P(n) : (\overline{z})^n = (\overline{z^n})$.

Verifiquemos a veracidade de $P(n)$ para $n = 2$.

$P(2) : \overline{z^2} = \overline{z \cdot z} = \overline{z} \cdot \overline{z} = \overline{z}^2$.

HI: Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira para um certo $n = k$. Logo, $P(k) : \overline{z^k} = \overline{z}^k$.

Provemos para $n = k + 1$,

$P(k+1) = \overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \cdot z} = \overline{z^k} \cdot \overline{z} = \overline{z}^k \cdot \overline{z} = \overline{z}^{k+1}$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, segue que $(\overline{z})^n = (\overline{z^n}), n \in I\!N$. ∎

Definição 2.1.3. *Se a e b são números reais, o número real não negativo* $\sqrt{a^2 + b^2}$ *é chamado valor absoluto, ou módulo, do número complexo* $z = (a; b) = a + bi$.

Escrevemos $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Geometricamente, o valor absoluto de z é o comprimento do vetor z; é a distância entre o afixo P de z e a origem O e pode ser obtido aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OPA:

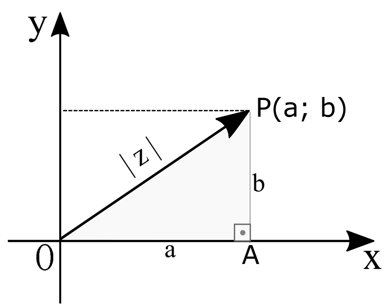

Figura 2.8: Módulo do Número Complexo z

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Podemos observar que $|z_1 - z_2|$ é a distância entre os afixos de z_1 e z_2, e que segue imediatamente da Definição 2.1.3, já que

$$|z_1 - z_2| = |(a-c) + (b-d)i| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

A conjugação e o módulo de um número complexo $z = (a;b) = a + bi$, nos diz que,

$$z \cdot \overline{z} = (a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2 = |z|^2,$$

isto é, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, o que nos permite calcular o quociente $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$, de dois números complexos z_1 e z_2. Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

Tomando $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{|z_2|^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{|z_2|^2} = \frac{ac+bd}{|z_2|^2} + \frac{(bc-ad)}{|z_2|^2}i.$$

2.2 Representação Polar

Nesta seção veremos uma outra forma de representar os números complexos no plano.

Fixado no plano um semi-eixo Ox, denominado *eixo polar*, de origem no ponto O (pólo), cada ponto P do plano fica determinado por suas coordenadas polares $(\theta_0; \rho)$.

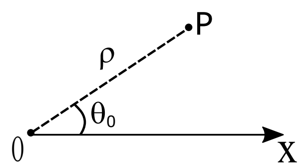

Figura 2.9:

O símbolo ρ representa a medida do comprimento do segmento OP, $\rho \geq 0$, enquanto θ_0 é a medida, em radianos, do ângulo entre o segmento OP e o eixo polar, sendo contado a partir do eixo polar no sentido anti-horário.

Tomemos um ponto P do plano complexo associado ao número complexo $(a;b) = a+bi$.

Consideremos o plano complexo em que a origem coincida com o pólo e o eixo real Ox com o eixo polar com $(\theta_0; \rho)$ coordenadas polares de P.

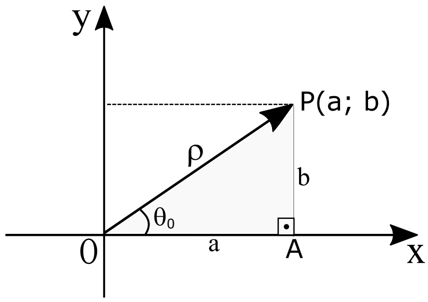

Figura 2.10:

A partir da figura (2.10), podemos relacionar as coordenadas polares de P, onde P não coincide com o pólo, com as coordenadas cartesianas do número complexo $(a;b) = a + bi$.

A partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo temos

$$\begin{cases} cos(\theta_0) & = & \dfrac{a}{\rho} \\ sen(\theta_0) & = & \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = & \rho \cdot cos(\theta_0) \\ b & = & \rho \cdot sen(\theta_0) \end{cases}$$

onde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$ é chamado de *módulo* ou *valor absoluto* de $z = (a;b) = a + bi$ e θ_0 é o argumento de z, denotado por $\theta_0 = arg(z)$.

Nessas condições, temos $(a;b) = (0;0)$, se P coincide com o pólo, porém, se P não coincide com o pólo, tem-se $(a;b) = (\rho \cdot cos(\theta_0); \rho \cdot sen(\theta_0))$.

Assim, podemos escrever

$$z = (a;b) = a + bi = \rho cos(\theta_0) + i\rho sen(\theta_0) = \rho(cos(\theta_0) + isen(\theta_0)),$$

que é chamada *forma polar* do número complexo z.

Dessa forma, é sempre possível representar z na forma

$$z = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)) \tag{2.7}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ é o argumento de z.

Entretanto, todo $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, satisfaz (2.7), assim z possui infinitos argumentos. Logo, o conjunto de todos os argumentos de z é dado por

$$arg(z) = \{\theta_0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Quando z tem a forma (2.7), a forma polar do seu conjugado é

$$\overline{z} = \rho(cos(-\theta) + isen(-\theta)) = \rho(cos(\theta) - isen(\theta))$$

que geometricamente é dado pela figura

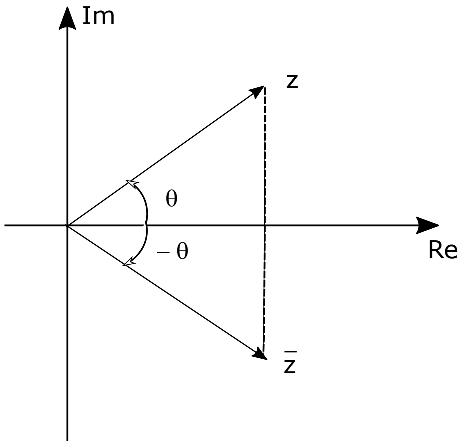

Figura 2.11: Conjugado de z

Podemos também, usar a forma polar em torno de um certo ponto z_0 ao invés da origem. Dai, a forma polar

$$z - z_0 = \rho(cos(\varphi) + isen(\varphi))$$

pode ser interpretada graficamente como indica a figura (2.12), onde ρ é a distância entre z e z_0, $\rho = |z - z_0|$ e φ é o ângulo de inclinação do vetor $z - z_0$ em relação ao eixo polar.

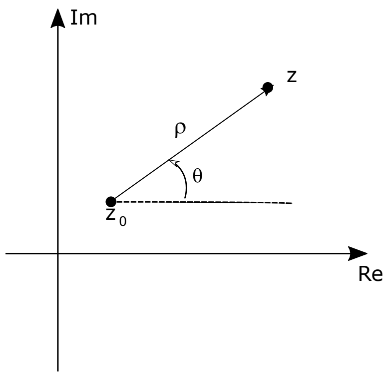

Figura 2.12:

2.2.1 Operações na Forma Polar

Teorema 2.2.1. *Se* $z = \rho(cos(\theta) + isen(\theta))$ *e* $w = \xi(cos(\varphi) + isen(\varphi))$, *então*

(i) *o produto* $z \cdot w$ *é dado por*

$$z \cdot w = \rho \cdot \xi[cos(\theta + \varphi) + isen(\theta + \varphi)].$$

(ii) o quociente $\frac{z}{w}$ *é dado por*

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\xi}[cos(\theta - \varphi) + isen(\theta - \varphi)].$$

Demonstração:

(i)

$$\begin{aligned} z \cdot w =& \rho(cos(\theta) + isen(\theta)) \cdot \xi(cos(\varphi) + isen(\varphi)) \\ =& \rho \cdot \xi[cos(\theta)cos(\varphi) + cos(\theta)isen(\varphi) + cos(\varphi)isen(\theta) + i^2sen(\theta)sen(\varphi)] \\ =& \rho \cdot \xi[cos(\theta)cos(\varphi) - sen(\theta)sen(\varphi) + i(cos(\theta)sen(\varphi) + cos(\varphi)sen(\theta))] \\ =& \rho \cdot \xi[cos(\theta + \varphi) + isen(\theta + \varphi)]. \end{aligned}$$

Na última igualdade foi usado as fórmulas de adição das relações trigonométricas cosseno e seno.

Portanto, $z \cdot w = \rho \cdot \xi[cos(\theta + \varphi) + isen(\theta + \varphi)]$.

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} =& \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2} \\ =& \frac{\rho[cos(\theta) + isen(\theta)] \cdot \xi[cos(-\varphi) + isen(-\varphi)]}{\xi^2} \\ =& \frac{\rho}{\xi} \cdot [cos(\theta) + isen(\theta)] \cdot [cos(-\varphi) + isen(-\varphi)] \end{aligned}$$

A partir do item (i), podemos escrever
$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\xi} \cdot [cos(\theta - \varphi) + isen(\theta - \varphi)]$.
Portanto, $\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\xi} \cdot [cos(\theta - \varphi) + isen(\theta - \varphi)]$. ∎

O corolário a seguir pode ser facilmente demonstrado pelo Princípio de Indução Finita e por essa razão omitiremos a demonstração.

Corolário 2.2.2. *Uma generalização do item* (i) *permite escrever*

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \ldots \cdot \rho_n \cdot [cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n)]$$

Para o caso particular em que $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots z_n = z$, tem-se a potência $z^n = \rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]$ temos o chamado **Teorema de De Moivre**:

Teorema 2.2.3. *Sendo* $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$ *um número complexo não nulo e* n *um número inteiro qualquer, tem-se que* $z^n = \rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]$.

Demonstração:

1º Caso: $n \geq 0$

Aplicando-se o Princípio de Indução Finita, temos que provar que a sentença $P(n)$: $z^n = \rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 0$.

I. Para $n = 0$, tem-se que $z^0 = 1$. Por outro lado,

$P(0) : \rho^0[cos(0\theta) + isen(0\theta)]$

$P(0) : 1[cos(0) + isen(0)]$

$P(0) : 1.[1 + i0]$

$P(0) : 1.$

Portanto, P(0) é verdadeira.

II. (HI) Suponhamos que $P(k) : z^k = \rho^k[cos(k\alpha) + isen(k\alpha)]$ seja verdadeira para algum $k \in I\!N$.

Provemos que a sentença $P(k + 1)$ é verdadeira. Sabemos que $z^{k+1} = z^k \cdot z$.

Pela (HI) tem-se

$$\begin{aligned} z^{k+1} =& \rho^k \cdot [cos(k\theta) + isen(k\theta)] \cdot \rho \cdot [cos(\theta) + isen(\theta)] \\ =& \rho^k \cdot \rho \cdot [cos(k\theta + \theta) + isen(k\theta + \theta)] \\ =& \rho^{k+1} \cdot [cos[(k + 1)\theta] + isen[(k + 1)\theta]]. \end{aligned}$$

Logo, $P(k + 1)$ é verdadeira.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, temos que $z^n = \rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]$, para $n \geq 0$.

2º Caso: $n < 0$

Inicialmente, escrevamos $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}}$.

Como $n < 0$, tem-se que $-n > 0$ e nessas condições, pelo 1º caso, podemos escrever

$$z^{-n} = \rho^{-n} \cdot [cos(-n\theta) + isen(-n\theta)].$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} z^n = \frac{1}{z^{-n}} =& \frac{1(cos0 + isen0)}{\rho^{-n} \cdot [cos(-n\theta) + isen(-n\theta)]} = \frac{1}{\rho^{-n}} \cdot \{cos[0 - (-n\theta)] + isen[0 - (-n\theta)]\} \\ =& \rho^n \cdot [cos(n\theta) + isen(n\theta)], \end{aligned}$$

o que prova o 2º caso.

Portanto, $z^n = \rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]$ vale para qualquer n inteiro. ∎

2.2.2 Interpretação Geométrica

(i) Produto

Geometricamente, o comprimento do vetor $z_1 \cdot z_2$ é igual ao produto dos comprimentos de z_1 e z_2. Já o seu argumento é dado pela soma dos argumentos θ_1 e θ_2.

De fato. Consideremos o triângulo de vértices $O, 1, z_1$ e construiremos o triângulo de vértices $O, z_2, z_1 \cdot z_2$ a partir dos dados $O, 1, z_1$.

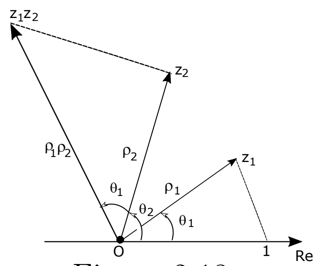

Figura 2.13:

A partir dos triângulo de vértices $O, 1, z_1$ temos

$$k = \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1 \cdot \rho_2},$$

onde k é uma constante real, o que nos permite dizer que ele é semelhante ao triângulo de vértices em $O, z_2, z_1 \cdot z_2$, como na figura 2.13.

(ii) Quociente

Geometricamente, o comprimento do vetor $\dfrac{z_1}{z_2}$ é igual ao quociente dos comprimentos dos vetores z_1 e z_2. Já o seu argumento é dada pela diferença dos argumentos θ_1 e θ_2.

Do mesmo modo, como no caso do produto, a construção do quociente é feita pela semelhança dos triângulos com vértices em $O, 1, \dfrac{z_1}{z_2}$ e O, z_2, z_1.

Tomemos o triângulo de vértices em O, z_2, z_1.

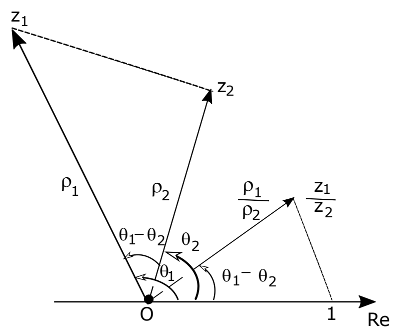

Figura 2.14:

Daí,

$$k = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\dfrac{\rho_1}{\rho_2}}{\dfrac{\rho_2}{\rho_2}} = \frac{\dfrac{\rho_1}{\rho_2}}{1},$$

onde k é uma constante real, o que garante a semelhança entre os triângulos de vértices O, z_2, z_1 e $O, 1, \dfrac{z_1}{z_2}$.

2.2.3 Raízes n-ésimas

Dados um número complexo w e um número natural $n \geq 1$, dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é uma *raiz n-ésima de w* se

$$z^n = w.$$

Considerando $w \neq 0$, temos exatamente n soluções distintas da equação $z^n = w$, enquanto para $w = 0$ a solução $z = 0$ é única, conforme o próximo resultado nos mostra.

Teorema 2.2.4. *Fixado $n \in N - \{0\}$, todo número complexo não nulo w possui exatamente n raízes-ésimas complexas distintas, a saber,*

$$\sqrt[n]{\xi} \cdot \left[cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{2.8}$$

onde ξ é o módulo de w, $\alpha = arg(w)$ e $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Demonstração:

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, chamaremos de z_k o números complexo dado na forma (2.8). Consideremos a forma polar de $w = \xi \cdot [cos(\alpha) + isen(\alpha)]$, onde $\alpha = arg(w)$.

O nosso objetivo é determinar todos os números complexos $z = \rho[cos(\theta) + isen(\theta)]$ que satisfaçam a equação

$$z^n = w.$$

Pela fórmula de De Moivre a igualdade acima se transforma em

$$\rho^n[cos(n \cdot \theta) + isen(n \cdot \theta)] = \xi[cos(\alpha) + isen(\alpha)].$$

Assim, obtemos

$$\rho^n = \xi,\ cos(n \cdot \theta) = cos(\alpha) \text{ e } sen(n \cdot \theta) = sen(\alpha).$$

Da primeira igualdade temos que $\rho = \sqrt[n]{\xi}$. Já as outras duas igualdades devem satisfazer as periodicidades das funções trigonométricas seno e cosseno.

Logo, serão satisfeitas quando,

$$n \cdot \theta = \alpha + 2k\pi \Longleftrightarrow \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}; k \in \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

Logo, as *raízes n-ésimas* de w são os números z_k para $k \in Z$, mas vale observar que fazendo $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, obtemos diferentes raízes *n-ésimas* de w.

Já para os demais valores de k obtemos apenas repetições das raízes z_0, $z_1, \ldots$, z_{n-1}.

De fato, tomando $k \in \mathbb{Z}$ arbitrário, podemos

$$k = q \cdot n + r; q \in \mathbb{Z}; 0 \leq r < n.$$

Assim,

$$\theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha + 2(q \cdot n + r)\pi}{n} = \frac{\alpha + 2qn\pi + 2r\pi}{n} = \frac{\alpha + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

mostrando que $z_k = z_r \in \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$.

Corolário 2.2.5. *Atribuindo valores inteiros a k, os argumentos crescem em Progressão Aritmética de n termos cujo primeiro termo $\frac{\alpha}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.*

Demonstração:

De fato. Como $\theta_k = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, temos que a razão

$$r = \theta_{k+1} - \theta_k = \frac{\alpha + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha + 2k\pi + 2\pi - \alpha - 2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$

Tomando $k = 0$ temos que o primeiro termo $a_1 = \theta_0 = \dfrac{\alpha + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{n} = \dfrac{\alpha}{n}$. ∎

2.2.4 Interpretação Geométrica - Raízes n-ésimas

Todas as n raízes de w possuem o mesmo módulo $\sqrt[n]{\rho}$, mostrando geometricamente que o comprimento de cada um dos vetores z_k é o número positivo $\sqrt[n]{\rho}$. O argumento de um desses vetores é o ângulo obtido dividindo-se α por n, e os demais pela adição de múltiplos de $\dfrac{2\pi}{n}$ a $\dfrac{\alpha}{n}$.

Nessas condições, essas raízes podem ser representadas por n pontos sobre a circunferência com centro na origem e raio $\sqrt[n]{\xi}$.

Devido a relação dos seus argumentos, Corolário 2.2.5, tais pontos estão igualmente espaçados ao longo da circunferência e consequentemente, serão os vértices de um polígono regular de n lados, $n \geq 3$. Caso $n = 2$ as raízes têm afixos diametralmente opostos.

Portanto, as n diferentes raízes n-ésimas de w são os vértices do polígono regular inscrito na circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{\xi}$.

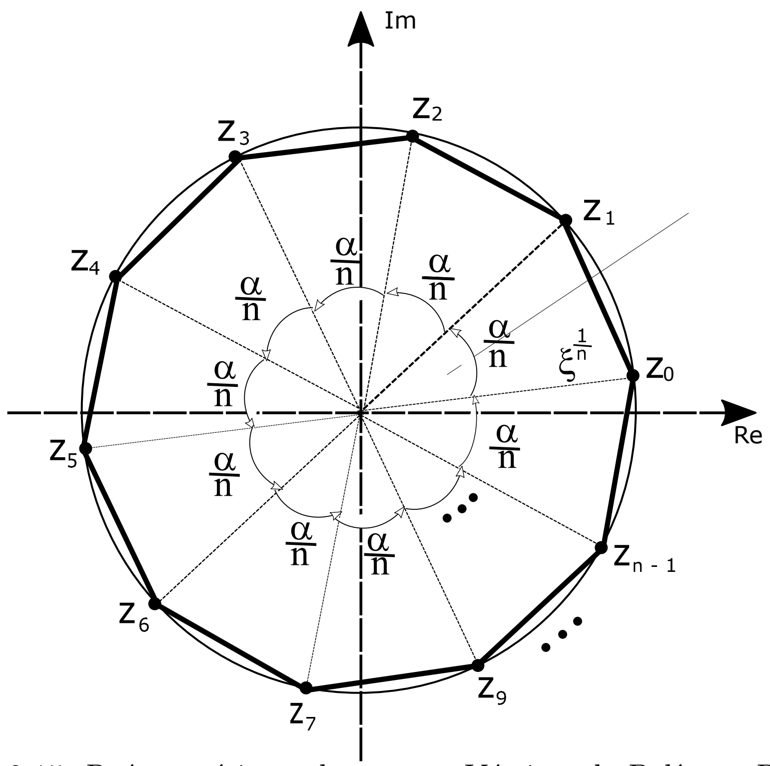

Figura 2.15: Raízes n-ésimas de ω como Vértices do Polígono Regular

2.2.5 Raízes da Unidade

Aqui estudaremos o caso particular $z = 1$, cujo módulo $\rho = 1$ e o ângulo θ assume o valor zero. Desse modo, a fórmula (2.8) se reduz a

$$z = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right),$$

que são as raízes n-ésimas da unidade.

Fazendo $w = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ e utilizando o Fórmula de De Moivre, vemos que as raízes n-ésimas da unidade serão dadas por $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$, pois

$$w^n = cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2n\pi}{n}\right) = cos(2\pi) + isen(2\pi) = 1.$$

Vale observar que essas raízes n-ésimas da unidade serão vértices do polígono regular inscrito na circunferência centrada na origem e raio 1.

Proposição 2.2.6. *As raízes n-ésimas de um número complexo não nulo podem ser obtidas como o produto de uma de suas raízes particulares,*

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + isen\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right]$$

pelas raízes n-ésimas da unidade $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$, *ou seja,*

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + isen\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right] \cdot w^k, k = 0, 1, \ldots, (n-1).$$

Demonstração:

Consideremos a fórmula (2.8).

$$\sqrt[n]{\rho} \cdot \left[cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right].$$

A partir das fórmulas de adição de arcos para as funções trigonométricas seno e cosseno, tem-se

$$\begin{aligned} cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) &= cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)\cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - sen\left(\frac{\alpha}{n}\right)\cdot sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)\cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i^2 sen\left(\frac{\alpha}{n}\right) sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

e

$$isen\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) = isen\left(\frac{\alpha}{n}\right)\cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha}{n}\right). \tag{2.11}$$

De (2.10) e (2.11) segue

$$\begin{aligned} cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) &= \\ &= cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\left(cos\frac{\alpha}{n} + isen\frac{\alpha}{n}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\left(cos\frac{\alpha}{n} + isen\frac{\alpha}{n}\right) \\ &= \left(cos\frac{\alpha}{n} + isen\frac{\alpha}{n}\right)\cdot\left(cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= \left[cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + isen\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right]\cdot w^k, k = 0, 1, \ldots, (n-1). \end{aligned}$$

Portanto, $z = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + isen\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right]\cdot w^k, k = 0, 1, \ldots, (n-1).$ ∎

2.3 Representação Exponencial

Além das formas já apresentadas anteriormente, os números complexos podem ser representados em outra forma bastante útil, a partir das expansões em séries de *MacLaurin*, das funções trigonométricas seno e cosseno, a *Constante de Euler* e a função exponencial, a saber

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \tag{2.12}$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \tag{2.13}$$

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \tag{2.14}$$

válidas para todos os valores reais da variável x.

Observação: A Constante de Euler e é o número irracional obtido como caso particular de (2.12) para $x = 1$,

$$e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots, \tag{2.15}$$

cujo valor está compreendido entre 2 e 3 ($e \approx 2,71828\ldots$).

Proposição 2.3.1. *Dado o número real y podemos escrever $e^{iy} = cos(y) + isen(y)$.*

Demonstração:

A partir da expansão (2.12) temos,

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \frac{(iy)^0}{0!} + \frac{(iy)^1}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \ldots + \frac{(iy)^{4k}}{(4k)!} + \frac{(iy)^{4k+1}}{(4k+1)} + \\
&\quad + \frac{(iy)^{4k+2}}{(4k+2)!} + \frac{(iy)^{4k+3}}{(4k+3)!} + \ldots \\
&= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots + \frac{y^{4k}}{(4k)!} + i\frac{(y)^{4k+1}}{(4k+1)} - \frac{(y)^{4k+2}}{(4k+2)!} - i\frac{(y)^{4k+3}}{(4k+3)!} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots + \frac{y^{4k}}{(4k)!} - \frac{y^{4k+2}}{(4k+2)} + \ldots\right) + \\
&\quad + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \ldots + \frac{y^{4k+1}}{(4k+1)} - \frac{y^{4k+3}}{4k+3} + \ldots\right).
\end{aligned}$$

Observemos que $Re(e^{iy}) = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots + \frac{y^{4k}}{(4k)!} - \frac{y^{4k+2}}{(4k+2)} + \ldots\right)$ que comparada com a expansão (2.13) temos

$$Re(e^{iy}) = cos(y).$$

Por outro lado, $Im(e^{iy}) = \left(y - \frac{y^3}{3!} + \ldots + \frac{y^{4k+1}}{(4k+1)} - \frac{y^{4k+3}}{(4k+3)} + \ldots\right)$ que comparada com a expansão (2.14) temos

$$Im(e^{iy}) = sen(y).$$

Portanto, $e^{iy} = cos(y) + isen(y)$. ∎

Definição 2.3.2. *A função exponencial é definida por*

$$exp(z) = e^z.$$

A partir da Definição 2.3.2, da forma algébrica do número complexo $z = x + yi$ e da Proposição 2.3.1 podemos escrever a função exponencial da seguinte forma,

$$exp(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (cos(y) + isen(y)).$$

Portanto, $exp(z) = e^x \cdot (cos(y) + isen(y))$.

A igualdade acima nos mostra uma maneira mais simples de escrevermos a *forma polar* de um número complexo:

$$z = \rho \cdot [cos(\theta) + isen(\theta)] = \rho \cdot e^{i\theta} = \rho \cdot exp(i\theta),$$

o que nos mostra, e será provado mais adiante, que $\rho = e^x = e^{Re(z)}$.

Proposição 2.3.3. *Dados os números complexos z e w temos:*

(I) $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$;

(II) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$;

(III) $e^z \neq 0$;

(IV) $|e^z| = e^{Re(z)}$

(V) $e^z = 1 \iff z = (2k\pi)i$, *$k$ inteiro;*

(VI) $(e^z)^n = e^{nz}$, *n inteiro;*

(VII) $arg(e^z) = \{Im(z) + 2k\pi, k \in Z\}$

$(VIII)$ $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

Demonstração:

(I) Escrevamos, inicialmente, a formas exponenciais de e^z e e^w como sendo

$$e^z = e^x \cdot [cos(y) + isen(y)]; e^w = e^v \cdot [cos(u) + isen(u)].$$

Daí,

$$\begin{aligned}
e^z \cdot e^w &= e^x \cdot [cos(y) + isen(y)] \cdot e^v \cdot [cos(u) + isen(u)] \\
&= e^x \cdot e^v \cdot [cos(y)cos(u) + i^2 sen(y)sen(u) + isen(y)cos(u) + isen(u)cos(y)] \\
&= e^{x+v}\{[cos(y)cos(u) - sen(y)sen(u)] + i[sen(y)cos(u) + sen(u)cos(y)]\} \\
&= e^{x+v}[cos(y+u) + isen(y+u)] \\
&= e^{z+w}.
\end{aligned}$$

(II) Da2.3.2 temos $z = e^x \cdot [cos(y) + isen(y)]$ então,

$$\begin{aligned} e^{-z} &= e^{-x-iy} \\ &= e^{-x}[cos(-y) + isen(-y)] \\ &= \frac{1}{e^x} \cdot [cos(0-y) + isen(0-y)] \\ &= \frac{1}{e^x} \cdot \frac{cos(0) + isen(0)}{cos(y) + isen(y)} \\ &= \frac{1 \cdot [cos(0) + isen(0)]}{e^x \cdot [cos(y) + isen(y)]} \\ &= \frac{1}{e^z}. \end{aligned}$$

(III) Suponhamos que $e^z = 0$. Assim,

$$e^x \cdot [cos(y) + isen(y)] = 0 \Longleftrightarrow e^x = 0$$

ou

$$[cos(y) + isen(y)] = 0.$$

Como, $e^x \neq 0$ para todo real x, logo, $[cos(y) + isen(y)] = 0$, o que só ocorre quando $cos(y) = 0$ e $sen(y) = 0$ o que nunca acontece, pois não existe um y real tal que seno e cosseno sejam ambos nulos.

Portanto, $e^z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

(IV)

$$\begin{aligned} |e^z| =& |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x \cdot |cos(y) + isen(y)| \\ =& e^x \cdot [cos^2(y) + sen^2(y)] = e^x \cdot 1 = e^x = e^{Re(z)}. \end{aligned}$$

(V) Partindo da hipótese de que $e^z = 1$ tem-se

$$e^z = 1 \Longrightarrow e^{x+iy} = 1 \Longrightarrow e^x \cdot e^{iy} = 1 \Longrightarrow e^{iy} = \frac{1}{e^x} \Longrightarrow e^{iy} = e^{-x} \Longrightarrow e^{0+iy} = e^{-x+0i} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow e^0 \cdot [cos(y) + isen(y)] = e^{-x}[cos(0) + isen(0)].$$

Da última igualdade, segue

$$\begin{cases} e^0 cos(y) & = & e^{-x}cos(0) \\ e^0 sen(y) & = & e^{-x}sen(0) \end{cases}$$

O que implica

$$\begin{cases} cos(y) & = & e^{-x} \\ sen(y) & = & 0 \end{cases}$$

De $sen(y) = 0$ segue que $y = 2k\pi$. Assim,

$$cos(2k\pi) = e^{-x} \Longleftrightarrow e^{-x} = 1 \Longleftrightarrow -x = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Portanto, $z = (2k\pi)i$.

(VI) $(e^z)^n = (e^{x+iy})^n = (e^x \cdot [cos(y) + isen(y)])^n = (e^x)^n \cdot [cos(y) + isen(y)]^n$.

Pelo Teorema de De Moivre, temos $[cos(y) + isen(y)]^n = [cos(ny) + isen(ny)]$ para todo inteiro n.

Nessas condições, $(e^z)^n = e^{nx} \cdot [cos(ny) = isen(ny)] = e^{nz}$.

(VII) Consideremos o número complexo $w = \xi[cos(\varphi) + isen(\varphi)]$ tal que $w = e^z$. Para determinarmos o $arg(e^z)$, devemos determinar primeiro $arg(w)$.

Assim,

$$w = e^z \Longleftrightarrow \xi[cos(\varphi) + isen(\varphi)] = e^x[cos(y) + isen(y)],$$

e segue a igualdade,

$$\begin{cases} \xi & = & e^x \\ cos(y) & = & cos(\varphi) \\ sen(y) & = & sen(\varphi) \end{cases}$$

Desta forma, obtemos

$$\begin{cases} cos(\varphi) & = & cos(y + 2k\pi) \\ sen(\varphi) & = & sen(y + 2k\pi) \end{cases}$$

Logo, $\varphi = y + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $arg(w) = arg(e^z) = \{Im(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$(VIII)$ Para provarmos esta propriedade é necessário considerar o fato de que a função cosseno é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$, enquanto a função seno é uma função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x)$. Desta forma, tem-se $cos(y) = cos(-y)$ e $sen(-y) = -sen(y)$.

$$\overline{e^z} = \overline{e^x[cos(y) + isen(y)]} = e^x[cos(y) - isen(y)] = e^x[cos(-y) + isen(-y)] = e^{\overline{z}}.$$

∎

Observação 2.3.1. $|e^z|^2 = e^z \cdot \overline{e^z} = e^z \cdot e^{\overline{z}}$.

Proposição 2.3.4. *Se n é um inteiro positivo então, para cada $z \in \mathbb{C}$ existem n números complexos w satisfazendo $w^n = e^z$.*

Demonstração:

Seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}
w &= (e^z)^{\frac{1}{n}} \\
&= [e^x \cdot (cos(y) + isen(y))]^{\frac{1}{n}} \\
&= (e^x)^{\frac{1}{n}} \cdot [cos(y) + isen(y)]^{\frac{1}{n}} \\
&= (e^x)^{\frac{1}{n}} \cdot [cos(y + 2k\pi) + isen(y + 2k\pi)]^{\frac{1}{n}} \\
&= (e^x)^{\frac{1}{n}} \cdot \left[cos\left(\frac{y + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{y + 2k\pi}{n}\right)\right] \\
&= e^{\frac{x}{n}} \cdot \left[cos\left(\frac{y + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{y + 2k\pi}{n}\right)\right] \\
&= e^{\frac{x}{n} + \left(\frac{y + 2k\pi}{n}\right)i} \\
&= e^{\left(\frac{x}{n} + \frac{y}{n}i\right) + \frac{2k\pi}{n}i} \\
&= e^{\left(\frac{z + i2k\pi}{n}\right)}, 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

Observação 2.3.2.

(1) Segue da Proposição 2.3.3 item (V) e da Proposição 2.3.4 que, se $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in I\!N$

$$(e^z)^{\frac{m}{n}} = \{(exp)^{\frac{1}{n}}\}^m = e^{\left[\frac{m}{n}\cdot(z+i(2k\pi))\right]}, 1 \leq k \leq n.$$

(2) A exponencial complexa é *periódica*, de período imaginário $2\pi i$.

De fato,

$$e^{z+2\pi i} = e^x \cdot [cos(y+2\pi) + isen(y+2\pi)] = e^x[cos(y) + isen(y)] = e^z.$$

(3) O item (2) nos permite dizer que o conjunto imagem de retas verticais $x = x_0$ pela exponencial são círculos centrados na origem e raio e^{x_0}, enquanto retas horizontais $y = y_0$ tem conjunto imagem formado por semirretas partindo da origem.

Capítulo 3

O Plano Complexo Estendido

O *plano complexo estendido*, também conhecido por esfera de Riemann. Foi amplamente estudado por Bernhard Riemann, no século XIX. É uma maneira de ampliar os números complexos de modo que a expressão $\frac{1}{0} = \infty$ seja adequada e útil em determinados contextos.

Para um melhor entendimento das propriedades e conceitos que envolvem o Plano Complexo Estendido, primeiramente estudaremos as Projeções Estereográficas e suas propriedades.

3.1 Projeção Estereográfica

Seja S^2 a superfície esférica de raio unitário e centrada na origem $O = (0,0,0)$, cujos pontos têm a seguinte propriedade,

$$S^2 = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + t^2 = 1\}. \tag{3.1}$$

Identificaremos o plano complexo com o plano equatorial, ou seja, para as coordenadas $(x;y;t) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}$ é o plano onde $t = 0$. O ponto $N = (0;0;1)$ é chamado *Pólo Norte*.

Denotaremos um número complexo z por $x + iy$. Note que o círculo unitário em $\mathbb{C}$ coincide com o equador da S^2. Observe que com esta representação, N não pertence ao $\mathbb{C}$.

Para o ponto $P \in S^2 - \{N\}$, existe uma única reta por P e N que denotaremos por NP. Esta reta intercepta o plano $\mathbb{C}$ em exatamente um ponto $z \in \mathbb{C}$.

Definição 3.1.1. *A aplicação $\Phi : S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$ que associa a um ponto $P = (\xi; \eta; \zeta)$ o ponto $z \in \mathbb{C}$ obtido pela intersecção $NP \cap \mathbb{C}$ é chamada Projeção Estereográfica.*

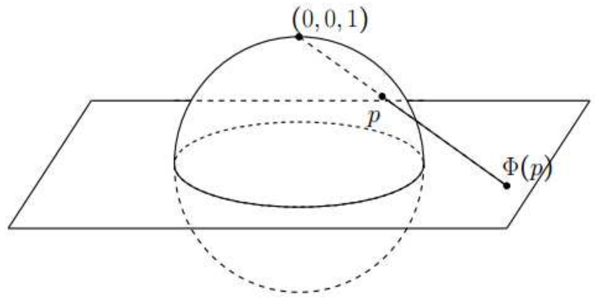

Figura 3.1: Projeção Estereográfica

A figura acima nos permite observar que:

1. o hemisfério sul de S^2 é aplicado no interior da circunferência unitária do plano $\mathbb{C}$; em particular, S (chamado de pólo sul) é aplicado em O;

2. cada ponto da circunferência unitária do plano $\mathbb{C}$ é aplicado nele mesmo;

3. o hemisfério norte de S^2 é aplicado no exterior da circunferência unitária do plano $\mathbb{C}$, exceto o pólo N que não é aplicado a nenhum ponto do plano $\mathbb{C}$.

Do exposto acima, temos os seguintes casos:

1. Projeções estereográficas de circunferências paralelas ao plano de projeção

As circunferências que se aproximam do pólo norte, ou seja, com raios tendendo a zero, se projetam no plano com raios muito grandes, tendendo ao infinito. Isso nos permite admitir que se transformem em retas ou pontos no infinito.

2. Projeções estereográficas de meridianos no plano de projeção

As circunferências que passam pelos pólos norte e sul (meridianos) se projetam em retas no plano.

3. Projeções estereográficas de circunferências com centro da esfera

Nesse caso precisamos tomar dois pontos distintos fora da esfera e considerarmos o plano que passa por eles e pela origem, determinando a intersecção do mesmo com a esfera, uma circunferência C_1. Sobre essa circunferência, tomemos o ponto M e tracemos a semirreta $\overrightarrow{NM}$, encontrando o plano $\mathbb{C}$ no ponto M'. Fazendo o ponto M percorrer o caminho C_1, M' percorre um caminho que também é uma circunferência, porém, não centrada na origem do plano $\mathbb{C}$.

Observação 3.1.1.

Geodésicas da esfera são circunferências resultantes da intersecção da esfera com planos que passam pelo o seu centro. Portanto, a projeção estereográfica leva geodésicas da esfera em retas ou circunferências no plano.

4. Posição entre as circunferências no plano de projeção

Define-se como ângulo entre duas curvas C_1 e C_2 em um ponto $\in C_1 \cap C_2$, como sendo o ângulo formado pelas retas tangentes t_1 a C_1 e t_2 a C_2 em P.

A Projeção Estereográfica envia ângulos entre curvas do plano em ângulos iguais formados pelas respectivas curvas projetadas na esfera.

Proposição 3.1.2. *A projeção estereográfica é conforme, isto é, preserva ângulos.*

Demonstração:

Consideremos um ponto $P \in S^2 - \{N\}$ e sejam T_P um e T_N dois planos tangentes a S^2 em P e a S^2 em N, respectivamente.

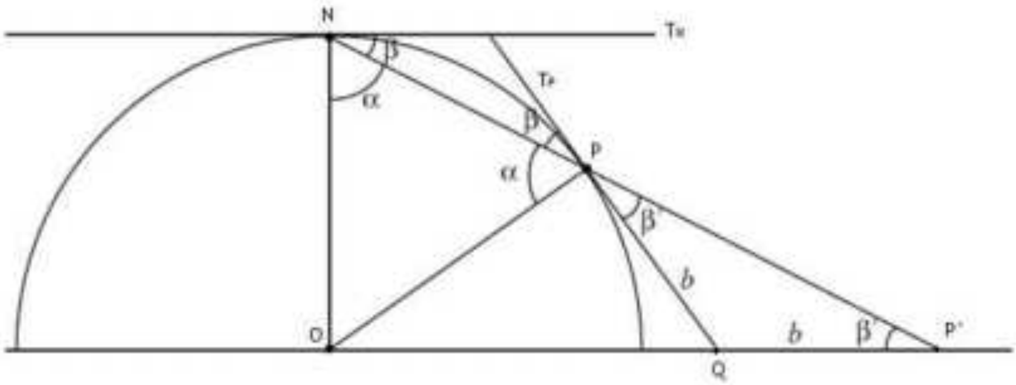

Figura 3.2: Vista Lateral da Projeção Estereográfica

De acordo com a figura acima, o triângulo ONP é isósceles, pois os segmentos $\overline{ON}$ e $\overline{OP}$ são raios, consequentemente os ângulos $O\widehat{N}P$ e $O\widehat{P}N$ são congruentes de medida α.

Os planos tangentes T_P e T_N são perpendiculares aos raios $\overline{OP}$ e $\overline{ON}$, respectivamente, o que nos garante a congruência dos ângulos formados entre $\overline{PN}$ e T_N e, entre $\overline{PN}$ e T_N, cuja medida é β.

Considere Q' como um ponto de intersecção entre os planos T_P e T_N. Como os planos T_N e $\mathbb{C}$ são paralelos, segue que os triângulos $NQ'P$ e $P'QP$ são semelhantes, visto que $N\widehat{P}Q' \equiv P'\widehat{P}Q$ (ângulos opostos pelo vértice), e $P\widehat{N}Q' \equiv P\widehat{P'}Q$ (ângulos alternos internos), concluindo que o triângulo PQP' é isósceles de base $\overline{PP'}$ e lados congruentes $\overline{PQ}$ e $\overline{QP'}$ medindo b.

Considerando a extensão natural da projeção inversa de Φ a $\mathbb{R}^3 - \{N\}$, que chamaremos de Π, tomemos uma curva γ suave em S^2 por P, sendo t a reta tangente à curva γ no ponto P e t' a imagem de Π de t.

Como, toda aplicação diferenciável transforma curvas tangentes em curvas tangentes e, Π é diferenciável, concluímos que t' é tangente à imagem de γ pela projeção estereográfica Φ no ponto $\Pi(P)$.

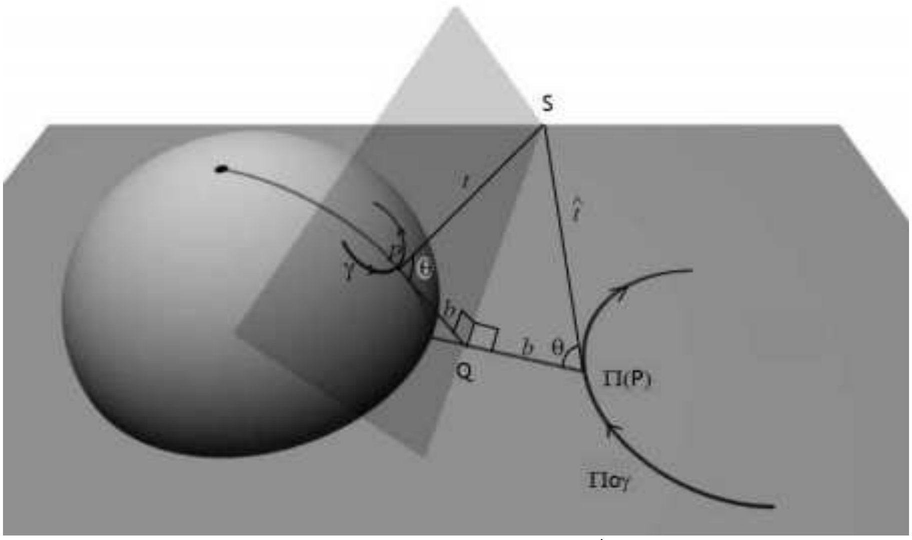

Figura 3.3: Preservação de Ângulos

Podemos observar na figura acima que o lado $\overline{QS}$ é comum aos triângulos PQS e $\Pi(P)QS$, e que $\overline{PQ} \equiv \overline{Q\Pi(P)}$ cuja medida é b, como visto anteriormente e ainda, que o ângulo Q é reto. Daí, podemos concluir que os triângulos PQS e $\Pi(P)QS$ são semelhantes, e assim os ângulos $S\widehat{P}Q \equiv S\widehat{\Pi(P)}Q$ cuja a medida é θ. ∎

Observação 3.1.2. *Assumimos na demonstração acima que t e t' se intersectam, porém, no caso particular de as retas t e t' serem estritamente paralelas, teremos que t é paralela ao plano $\mathbb{C}$, assim $\theta = 90^o$.*

3.1.1 A Projeção Estereográfica em Coordenadas

Nesta seção iremos obter a lei de formação para projeção Φ que relaciona as coordenadas do ponto $P = (\xi, \eta, \zeta) \in S^2$ com as coordenadas de $P' = (x, y, 0) \in \mathbb{C}$, onde $P' = \Phi(P)$

Inicialmente, com o auxílio de ferramentas da Geometria Analítica, determinaremos a equação da reta r determinada pelos pontos $N = (0, 0, 1)$ e $P = (\xi, \eta, \zeta)$.

Para isso, determinemos inicialmente o vetor

$$\overrightarrow{NP} = P - N = (\xi, \eta, \zeta) - (0, 0, 1) = (\xi, \eta, \zeta - 1),$$

para que possamos escrever:

$$\begin{aligned} r &: \{N + t \cdot \overrightarrow{NP}, t \in \mathbb{R}\} \\ r &: \{(0, 0, 1) + t(\xi, \eta, \zeta - 1)\} \\ r &: \{(0, 0, 1) + (t\xi, t\eta, t(\zeta - 1)) \\ r &: \{(t\xi, t\eta, 1 + t(\zeta - 1))\}. \end{aligned}$$

Temos que $\Phi(P) \in r \cap \mathbb{C}$, onde $\mathbb{C} = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3; w = 0\}$ é o plano complexo. Assim,

$$r \cap \mathbb{C} = \{(t\xi, t\eta, 1 + t(\zeta - 1)) = (x, y, 0)\},$$

donde,

$$1 + t(\zeta - 1) = 0 \Longleftrightarrow t(\zeta - 1) = -1 \Longleftrightarrow t = \frac{-1}{\zeta - 1} \Longleftrightarrow t = \frac{1}{1 - \zeta}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} x = t\xi &= \left(\frac{1}{1 - \zeta}\right)\xi = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \\ y = t\eta &= \left(\frac{1}{1 - \zeta}\right)\eta = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$\begin{aligned}\Phi :&S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}\\ (\xi, \eta, \zeta) &\longmapsto \left(\frac{\xi}{1-\zeta}, \frac{\eta}{1-\zeta}\right) = \frac{\xi}{(1-\zeta)} + \frac{\eta}{(1-\zeta)}i,\end{aligned}$$

mostrando que

$$z = x + iy = \frac{\xi}{1-\zeta} + i\frac{\eta}{1-\zeta} = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}.$$

Proposição 3.1.3. *A aplicação Φ é bijetora.*

Demonstração:

Provaremos inicialmente que Φ é **injetora**.

Sejam $P_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ e $P_2 = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ com $P_1 \neq P_2$ e $P_1, P_2 \in S^2 - \{N\}$. Assim,

$$\Phi(P_1) = \Phi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \left(\frac{\xi_1}{1-\zeta_1}, \frac{\eta_1}{1-\zeta_1}\right),$$
$$\Phi(P_2) = \Phi(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = \left(\frac{\xi_2}{1-\zeta_2}, \frac{\eta_2}{1-\zeta_2}\right).$$

Portanto,$\Phi(P_1) \neq \Phi(P_2)$, e assim concluímos que Φ é injetora.

Provemos que Φ é **sobrejetora**.

Tomemos o ponto $(x, y, 0) \in \mathbb{C}$ e $N = (0, 0, 1) \in S^2$. Considere a reta

$$s : \{(0, 0, 1) + t(x, y, -1); t \in \mathbb{R}\} = \{(tx, ty, 1-t),$$

onde $(x, y, -1) = \overrightarrow{v}$ é o vetor diretor de s.

Queremos mostrar que existe um único o ponto P tal que $\{P\} = s \cap S^2$.

Como $P = (\xi, \eta, \zeta) \in s$ temos que $\xi = tx$, $\eta = ty$ e $\zeta = t - 1$.

Como, $P \in S^2$ temos que o ponto P satisfaz a propriedade (3.1). Assim,

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Substituindo seus respectivos valores temos:

$$
\begin{aligned}
(tx)^2 + (ty)^2 + (1-t)^2 &= 1,\\
t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 &= 1,\\
t^2(x^2+y^2) + (1-t)^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

Lembrando que $|z|^2 = x^2 + y^2$ segue,

$$
\begin{aligned}
t^2 \cdot |z|^2 + 1 - 2t + t^2 &= 1,\\
t^2 \cdot |z|^2 - 2t + t^2 &= 0,\\
t^2 \cdot [|z|^2 + 1] - 2t &= 0,\\
t \cdot \{t[|z|^2+1] - 2\} &= 0.
\end{aligned}
$$

Assim,

$t = 0$ ou $t[|z|^2+1] - 2 = 0$, porém t não pode ser nulo, pois $P \neq N$, logo,

$$t[|z|^2+1] = 2 \Longleftrightarrow t = \frac{2}{|z|^2+1}.$$

Nessas condições, determinamos o ponto $P = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \in S^2$. Dessa forma, concluímos que Φ é sobrejetora.

Portanto, Φ é bijetora. ∎

A Proposição 3.1.3 garante que a aplicação Φ admite inversa cuja lei de formação é dada por:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 - \{N\}\\
(x,y) &\longmapsto \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).
\end{aligned}
$$

A essa aplicação Φ damos o nome de *Projeção Estereográfica.*

Proposição 3.1.4. *Se $\mathcal{C}$ é uma circunferência em S^2 então $\Phi(\mathcal{C})$ é uma reta em $\mathbb{C}$ quando N pertence a $\mathcal{C}$ ou uma circunferência em $\mathbb{C}$ quando N não pertence a $\mathcal{C}$.*

Demonstração:

Tomemos a transformação

$$\begin{array}{rccc} \Phi & S^2 - \{N\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\xi, \eta, \zeta) & \longmapsto & z = (x; y), \end{array}$$

de modo que

$$(\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Consideremos um círculo $A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$, com $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ em $\mathbb{R}^3$.

A imagem do círculo pela transformação será

$$A \cdot \left(\frac{2x}{x^2 + z^2 + 1} \right) + B \cdot \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right) + C \cdot \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) + D = 0$$

$$A(2x) + B(2y) + C(x^2 + y^2 - 1) + D(x^2 + y^2 + 1) = 0$$

$$(C + D)x^2 + (C + D)y^2 + 2Ax + 2By - (C - D) = 0$$

Vale observar que se $N \in \mathcal{C}$ teremos $C + D = 0$ e desta forma $\Phi(\mathcal{C})$ é uma reta, pois obteremos

$$2Ax + 2By - (C - D) = 0.$$

Porém, se $C + D \neq 0$ teremos que $\Phi(\mathcal{C})$ é uma circunferência, pois

$$(C + D)x^2 + (C + D)y^2 + 2Ax + 2By - (C - D) = 0$$

escrita na forma

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{2A}{C + D} \right) x + \left(\frac{2B}{C + D} \right) y - \left(\frac{C - D}{C + D} \right) = 0$$

e completando quadrados obtemos a equação em $\mathbb{C}$

$$\left(x - \frac{A}{C + D} \right)^2 + \left(y - \frac{B}{C + D} \right)^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - D^2}{(C + D)^2},$$

que é a equação de uma circunferência, visto que,$A^2 + B^2 + C^2 - D^2 > 0$, pois a distância do plano até a origem é menor que 1. ∎

3.2 Plano Complexo Estendido

Na seção anterior obtivemos a aplicação

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} = z$$

e a sua inversa

$$\Phi^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = (\xi, \eta, \zeta),$$

que nos permite determinar,

$$|z|^2 = |\Phi(\xi, \eta, \zeta)|^2 = \left| \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} \right|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2}$$

e, sabendo que $P \in S^2 - \{N\}$ vale $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, que resulta $\xi^2 + \eta^2 = 1 - \zeta^2$, podendo escrever

$$|z|^2 = \frac{1 - \zeta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}.$$

Vale observar que quando $P = (\xi, \eta, \zeta)$ tende a $N = (0, 0, 1)$, temos $\Phi(P)$ tende ∞ e, quando z tende ∞, $\Phi(z)$ tende N.

Assim, através de Φ identificamos $\mathbb{C}$ com $S^2 - \{N\}$ e definindo $\Phi(N) = \infty$, temos a necessidade de ampliar o plano complexo $\mathbb{C}$ adicionando um ponto no infinito, obtendo $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, chamado *Plano Complexo Estendido* ou *esfera de Riemann* que nos fornece a bijeção $\Psi : S^2 \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$.

Capítulo 4

Transformações de Möbius

August Ferdinand Möbius, matemático alemão (1790 - 1868), introduziu uma das classes mais importantes das aplicações conformes, que levam círculos em círculos, círculos em linhas e vice-versa, conhecidas como *Transformações de Möbius.*

Como vimos no capítulo anterior, existe uma transformação complexa de variável complexa que leva o plano complexo na esfera (a projeção estereográfica). Veremos nesse capítulo que tal transformação é definida por uma composição de transformações mais simples: translação, rotação, dilatação (ou contração) e inversão.

Exemplo típico são as bolas de Natal que espelham o que está de fora para dentro.

Definição 4.0.1. *Considere os números complexos a, b, c e d tais que $ad - bc \neq 0$, então a função complexa*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

é chamada Transformação de Möbius.

A condição $ad - bc \neq 0$ garante que c e d não são simultaneamente nulos. Além disso, se $c \neq 0$, a função $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ está definida para todo z tal que $z \neq -\dfrac{d}{c}$. Por outro lado, se $c = 0$ e $ad - bc \neq 0$, temos d não nulo e

$$T(z) = \frac{az + b}{d}.$$

Neste caso, a Transformação de Möbius $T(z)$ é uma transformação linear afim. Vale ressaltar que toda aplicação linear afim é uma Transformação de Möbius.

A proposição a seguir mostra que a transformação T pode ser obtida pela composição de:

(i) translação: $T_1(z) = z + \dfrac{d}{c}$;

(ii) inversão: $I(z) = \dfrac{1}{z}$;

(iii) rotação e dilatação (ou contração) em relação a origem $D(z) = \dfrac{bc - ad}{c^2} \cdot z$;

(iv) translação: $T_2(z) = \dfrac{a}{c} + z$.

Proposição 4.0.2. *Sejam a, b, c e d números complexos com $ad - bc \neq 0$ e considere a transformação de Möbius $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$. Então,*

$$T(z) = (T_2 \circ D \circ I \circ T_1)(z).$$

onde T_1, T_2, D e I são translações, dilatação e inversão, respectivamente.

Demonstração:

Podemos escrever a fórmula $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(z) =& \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + \frac{bc}{c} + \frac{ad}{c} - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{az + \frac{ad}{c} + \frac{bc - ad}{c}}{cz + d} \\ =& \frac{\frac{a}{c} \cdot (cz + d) + \frac{bc - ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c}}{cz + d} \\ =& \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{c \cdot \left(z + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

Basta agora verificar que $T(z) = (T_2 \circ D \circ I \circ T_1)(z)$.
De (i) temos $T_1(z) = z + \dfrac{d}{c}$ e de (ii) $I(z) = \dfrac{1}{z}$. Assim,

$$(I \circ T_1)(z) = I(T_1)(z) = \frac{1}{T_1(z)} = \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

De (iii) temos $D(z) = \dfrac{bc-ad}{c^2} \cdot z$ e, então

$$\begin{aligned}(D \circ (I \circ T_1))(z) =& D(I \circ (T_1))(z)\\ =& \frac{bc-ad}{c^2} \cdot (I \circ T_1)(z)\\ =& \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}}.\end{aligned}$$

E, por fim, de (iv) $T_2(z) = \dfrac{a}{c} + z$ segue

$$(T_2 \circ (D \circ I \circ T_1))(z) = T_2(D \circ I \circ T_1(z)) = \frac{a}{c} + (D \circ I \circ T_1)(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}}.$$

Nessas condições, concluímos que $T(z) = (T_2 \circ D \circ I \circ T_1)(z)$. ∎

Proposição 4.0.3. *Uma Transformação de Möbius é injetora no seu domínio.*

Demonstração:

Da Proposição 4.0.2, a transformação de Möbius $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, com $ad - bc \neq 0$, pode ser escrita da forma

$$(T_2 \circ (D \circ I \circ T_1))(z) = T_2(D \circ I \circ T_1(z)) = \frac{a}{c} + (D \circ I \circ T_1)(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}}.$$

Assim, sejam z_1 e z_2 números complexos no domínio de T, queremos mostrar que se $T(z_1) = T(z_2)$ então $z_1 = z_2$.

$$\begin{aligned}T(z_1) = T(z_2) \Longleftrightarrow& \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z_1+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z_2+\frac{d}{c}}\\ \Longleftrightarrow& \frac{1}{z_1+\frac{d}{c}} = \frac{1}{z_2+\frac{d}{c}}\\ \Longleftrightarrow& z_1 + \frac{d}{c} = z_2 + \frac{d}{c}\\ \Longleftrightarrow& z_1 = z_2,\end{aligned}$$

o que mostra que T é injetora no seu domínio. ∎

Proposição 4.0.4. *Uma Transformação de Möbius é sobrejetora no seu domínio.*

Demonstração:

Considere $T : \mathbb{C} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \longrightarrow \mathbb{C} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ e dado $y \neq \dfrac{a}{c}$ tomemos $x = \dfrac{dy-b}{-cy+a} \in \mathbb{C}$.
Daí,

$$T(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\cdot\left(\dfrac{dy-b}{-cy+a}\right)+b}{c\cdot\left(\dfrac{dy-b}{-cy+a}\right)+d} = \frac{\dfrac{ady-ab}{-cy+a}+b}{\dfrac{cdy-cb}{-cy+a}+d}$$
$$= \frac{\dfrac{ady-ab-bcy+ab}{-cy+a}}{\dfrac{cdy-bc-cdy+ad}{-cy+a}} = \frac{ady-bcy}{ad-bc} = \frac{y(ad-bc)}{(ad-bc)} = y,$$

o que prova que T é sobrejetora em seu domínio. ∎

Corolário 4.0.5. *Toda transformação de Möbius é invertível e sua inversa é dada por* $T^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$.

Demonstração:

De fato. Das Proposições 4.0.3 e 4.0.4 temos que toda transformação de Möbius é bijetora, logo, possui inversa.

Partindo de $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ e fazendo $T(z) = y$ segue,

$$y = \frac{az+b}{cz+d} \Longleftrightarrow y\cdot(cz+d) = az+b \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow cyz + yd = az + b \Longleftrightarrow cyz - az = b - yd \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow z\cdot(cy-a) = b - yd \Longleftrightarrow z = \frac{b-yd}{cy-a} \Longleftrightarrow z = \frac{dy-b}{-cy+a},$$

logo, $T^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$. ∎

Considerando $c \neq 0$, a transformação T pode ser escrita na forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{c\left(z+\dfrac{d}{c}\right)} = \frac{az+b}{c}\cdot\frac{1}{z+\dfrac{d}{c}} = \varphi(z)\cdot\frac{1}{z+\dfrac{d}{c}},$$

onde $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{c}$ e $z \in \mathbb{C} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$. Porém, se $z = -\dfrac{d}{c}$ temos

$$\varphi(-\frac{d}{c}) = \frac{a \cdot \left(-\dfrac{d}{c}\right) + b}{c} = \frac{-\dfrac{ad+bc}{c}}{c} = -\frac{(ad-bc)}{c^2} \neq 0,$$

pois $ad - bc \neq 0$ e assim,

(I) $\displaystyle\lim_{z \to -\frac{d}{c}} T(z) = \lim_{z \to -\frac{d}{c}} \varphi(z) \cdot \frac{1}{z + \dfrac{d}{c}} = \infty$, e

(II) $\displaystyle\lim_{z \to \infty} T(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{z \to \infty} \frac{z\left(a + \dfrac{b}{z}\right)}{z\left(c + \dfrac{d}{z}\right)} = \lim_{z \to \infty} \frac{a + \dfrac{b}{z}}{c + \dfrac{d}{z}} = \frac{a}{c}.$

Nessas condições, podemos definir T em todo plano complexo estendido $\mathbb{C}_\infty$, da seguinte forma

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & \text{se} \quad z \neq -\dfrac{d}{c}, z \neq \infty \\ \infty, & \text{se} \quad z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c}, & \text{se} \quad z = \infty. \end{cases}$$

4.1 Representação Matricial

Com o objetivo de facilitar o cálculo da *composta* e da *inversa* de transformações de Möbius, é conveniente representar $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ na forma matricial.

Definição 4.1.1. *À transformação $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ de Möbius dada por*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

associamos a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}),$$

grupo linear das matrizes inversíveis 2×2, visto que $det(M) = ad - bc \neq 0$.

Em particular, a próxima proposição garante que podemos associar as transformações T de Möbius às matizes de $M \in GL(2, \mathbb{C})$ tais que $det(M) = 1$. Neste caso particular T, será dita *normalizada*. Esta estrutura será útil quando estudarmos pontos fixos de T.

Proposição 4.1.2. *Toda transformação de Möbius $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ admite uma representação matricial M tal que $det(M) = 1$.*

Demonstração:

Dada $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, com $ad - bc \neq 0$. Considere $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{ad-bc}}$. Nesse caso temos

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda(az+b)}{\lambda(cz+d)} = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)} = \frac{a'z+b'}{c'z+d'},$$

onde $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ e $d' = \lambda d$.

Assim, a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

é tal que

$$det(M) = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda^2 \cdot (ad-bc) = \left(\frac{1}{\sqrt{ad-bc}}\right)^2 \cdot (ad-bc) = 1.$$

∎

Proposição 4.1.3. *Sejam M_1 e M_2 matrizes associadas às transformações de Möbius T_1 e T_2, respectivamente. Então, o produto matricial $M_1 \cdot M_2$ representa a matriz associada à transformação de Möbius $T_1 \circ T_2$.*

Demonstração:

De fato. Tomemos $T_1(z) = \dfrac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ e $T_2(z) = \dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$. Calculemos inicialmente $T_1 \circ T_2$.

$$\begin{aligned}(T_1 \circ T_2)(z) = T_1(T_2(z)) &= \frac{a_1T_2(z)+b_1}{c_1T_2(z)+d_1} \\ &= \frac{a_1\left(\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right)+b_1}{c_1\left(\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right)+d_1} = \frac{a_1a_2z+a_1b_2+b_1c_2z+b_1d_2}{a_2c_1z+c_1b_2+c_2d_1z+d_1d_2} \\ &= \frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+(a_1b_2+b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+d_1d_2)},\end{aligned}$$

que associa-se a matriz $\begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$.

Fazendo $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, o produto

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

■

Observação 4.1.1. *A transformação de Möbius T^{-1} dada como no Corolário 4.0.5, associa-se a matriz,*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4.2 Pontos Fixos

Definição 4.2.1. *Seja $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$. Dizemos que $p \in D_f$ é um ponto fixo se $f(p) = p$.*

É importante definirmos pontos fixos neste capítulo, para mostrarmos que existe uma única transformação de Möbius que leva três pontos dados em outros três pontos dados.

Segue da definição, que pontos fixos de uma Transformação de Möbius T serão as soluções da equação

$$T(z) = z \Longleftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z \Longleftrightarrow az + b = cz^2 + dz \Longleftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Se $c \neq 0$ temos uma equação quadrática, que no universo $\mathbb{C}$, admitirá duas soluções distintas ou uma solução dupla. Logo, teremos no máximo dois pontos fixos, da forma

$$z = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}. \tag{4.1}$$

Se tomarmos uma transformação de Möbius normalizada, teremos $bc = ad - 1$ que substituído em (4.1) segue

$$\begin{aligned} z &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4(ad-1)}}{2c} \\ &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{d^2 - 2ad + a^2 + 4ad - 4}}{2c} \\ &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{d^2 + 2ad + a^2 - 4}}{2c} \\ &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}. \end{aligned}$$

Neste caso, tomando $a + d = \pm 2$ tem-se $z = \dfrac{(a-d)}{2c}$ como o único ponto fixo.

Quando $\mathbf{c = 0}$ devemos analisar duas situações:

1) $d \neq a$:

$$T(z) = \frac{az+b}{d} \Longleftrightarrow z = \frac{az+b}{d} \Longleftrightarrow dz - az = b \Longleftrightarrow z = \frac{b}{d-a},$$

logo, teremos um ponto fixo, $z = \dfrac{b}{d-a}$, e vale observar que $T(\infty) = \infty$. Portanto, o ∞ é outro ponto fixo.

2) $d = a$:

$$T(z) = \frac{az+b}{d} \Longleftrightarrow T(z) = \frac{az+b}{a} \Longleftrightarrow \frac{az}{a} + \frac{b}{a} \Longleftrightarrow T(z) = z + \frac{b}{a},$$

que representa uma translação e daí, $T(\infty) = \infty$. Portanto, ∞ é o único ponto fixo.

Já para **homotetia** (dilatação ou contração) e **rotação**, tem-se que $T(0) = 0$ e $T(\infty) = \infty$, o que nos mostra a conveniência de trabalharmos no universo $\mathbb{C}_\infty$.

Por fim, para a inversão,

$$T(z) = \frac{1}{z} \Longleftrightarrow z = \frac{1}{z} \Longleftrightarrow z^2 = 1 \Longleftrightarrow z = \pm 1,$$

ou seja, -1 e 1, serão seus pontos fixos.

4.3 Razão Cruzada

O conceito de **razão cruzada** é útil para determinarmos transformações de Möbius que levam três pontos determinados z_1, z_2 e z_3 em outros três pontos determinados w_1, w_2 e w_3.

Definição 4.3.1. *Ao número complexo*

$$[z, z_1, z_2, z_3] = \frac{(z - z_1)}{(z - z_3)} \cdot \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)}, \tag{4.2}$$

dá-se o nome de ***razão cruzada*** *entre os números complexos z, z_1, z_2 e z_3.*

Vale observar que a ordem dos números complexos é extremamente importante quando substituídos na Fórmula (4.2).

Para termos a razão cruzada completamente definida em todo plano complexo estendido $\mathbb{C}_\infty$, definimos

$$\begin{aligned}
[\infty, z_1, z_2, z_3] &= \lim_{z\to\infty} [z, z_1, z_2, z_3] \\
&= \lim_{z\to\infty} \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \\
&= \lim_{z\to\infty} \frac{z\left(1 - \frac{z_1}{z}\right)}{z\left(1 - \frac{z_2}{z}\right)} \cdot \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)} \\
&= \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)}
\end{aligned}$$

e assim, podemos escrever que sua extensão a $\mathbb{C}_\infty$ é dada por

$$[\infty, z_1, z_2, z_3] = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Teorema 4.3.2. *A razão cruzada é invariante pela Transformações de Möbius.*

Demonstração:

Sejam $z, z_1, z_2, z_3, w \in \mathbb{C}$. Primeiramente observe que:

$$\begin{aligned}
T(z) - T(w) =& \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} = \frac{(cw+d)(az+b) - (cz+d)(aw+b)}{(cz+d)(cw+d)} \\
=& \frac{azcw + cwb + azd + bd - awcz - czb - awd - bd}{(cz+d)(cw+d)} \\
=& \frac{bcw - adw + adz - bcz}{(cz+d)(cw+d)} \\
=& \frac{w(bc-ad) - z(bc-ad)}{(cz+d)(cw+d)} \\
=& \frac{(bc-ad)(w-z)}{(cz+d)(cw+d)}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
[T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)] =& \frac{T(z) - T(z_1)}{T(z) - T(z_3)} \cdot \frac{T(z_2) - T(z_3)}{T(z_2) - T(z_1)} \\
=& \frac{\left[\dfrac{(bc-ad)(z_1 - z)}{(cz+d)(cz_1+d)}\right] \cdot \left[\dfrac{(bc-ad)(z_3 - z_2)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}\right]}{\left[\dfrac{(bc-ad)(z_3 - z)}{(cz+d)(cz_3+d)}\right] \cdot \left[\dfrac{(bc-ad)(z_1 - z_2)}{(cz_2+d)(cz_1+d)}\right]} \\
=& \frac{(z_1 - z)(z_3 - z_2)}{(z_3 - z)(z_1 - z_2)} \\
=& \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \\
=& [z, z_1, z_2, z_3].
\end{aligned}$$

∎

Desse modo, se quisermos encontrar o valor de $[z, z_1, z_2, z_3]$, podemos determinar T, tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ e $T(z_3) = \infty$.

De fato. Se

(i) $T(z_1) = 0$ então tem-se

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = 0 \Longleftrightarrow az_1 + b = \Longleftrightarrow b = -az_1.$$

(ii) $T(z_3) = \infty$ então tem-se $az_3 + d = 0 \Longleftrightarrow d = -az_3$.

(iii) $T(z_2) = 1$ então tem-se

$$\frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = 0 \Longleftrightarrow az_2 + b = cz_2 + d \Longleftrightarrow az_2 + b - cz_2 + d = 0.$$

Como a transformação T é de Möbius, temos $ad - bc \neq 0$ e segue de (i) e (ii) que

$$ad - bc \neq 0 \Longleftrightarrow a(-cz_3) + c(-az_1) \neq 0 \Longleftrightarrow ac(z_1 - z_3) \Longleftrightarrow z_1 - z_3 \neq 0.$$

Substituindo os resultados obtidos em (i) e (ii) em (iii) tem-se

$$az_2 - az_1 - cz_2 + cz_3 = 0 \Longleftrightarrow a(z_2 - z_1) + c(z_3 - z_2) = 0.$$

Basta tomarmos, $a = (z_3 - z_2)$, $c = (z_1 - z_2)$, $b = -z_1(z_3 - z_2)$ e $d = -z_3(z_1 - z_2)$. Daí,

$$\begin{aligned} T(z) =& \frac{(z_3 - z_2)z - z_1(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)z - z_3(z_1 - z_2)} = \frac{z_3 z - z_2 z - z_1 z_3 + z_1 z_2}{z_1 z - z_2 z - z_3 z_1 + z_3 z_2} \\ =& \frac{z_3(z - z_1) - z_2(z - z_1)}{z_1(z - z_3) - z_2(z - z_3)} = \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}. \end{aligned}$$

Além disso, temos que $[z, z_1, z_2, z_3] = [T(z), 0, 1, \infty] = T(z)$, pois

$$[T(z), 0, 1, z_3] = \frac{(T(z) - 0)(1 - z_3)}{(T(z) - z_3)(1 - 0)} = \frac{T(z) - T(z)z_3}{T(z) - z_3}.$$

Daí,

$$\lim_{z_3 \to +\infty} [T(z), 0, 1, z_3] = \lim_{z_3 \to +\infty} \frac{T(z)z_3 - T(z)}{z_3 - T(z)} = \lim_{z_3 \to +\infty} \frac{z_3 \left(T(z) - \frac{T(z)}{z_3} \right)}{z_3 \left(1 - \frac{T(z)}{z_3} \right)} = T(z).$$

Assim, dados três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, podemos definir $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ por

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \\ T(z) &= \frac{z_2 - z_3}{(z - z_3)} \text{ se } z_1 = \infty \\ T(z) &= \frac{z - z_1}{z - z_3} \text{ se } z_2 = \infty \\ T(z) &= \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ se } z_3 = \infty. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Proposição 4.3.3. *Dados três pontos distintos em* $\mathbb{C}_\infty$, z_1, z_2, z_3, *e outros três pontos distintos em* $\mathbb{C}_\infty$, w_1, w_2, w_3, *existe uma única transformação de Möbius* $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$, *tal que* $T(z_1) = w_1, T(z_2) = w_2$ *e* $T(z_3) = w_3$.

Demonstração:

Consideremos que se $[z, z_1, z_2, z_3] = [w, w_1, w_2, w_3]$ então podemos encontrar T tal que $T(z_k) = w_k$, com $k = 1, 2, 3$.

Sabemos que existem $R : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ e $S : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ que satisfaçam (4.3), de modo que $R(z_1) = 0, R(z_2) = 1, R(z_3) = \infty$ e $S(w_1) = 0, S(w_2) = 1, S(w_3) = \infty$.

Assim, podemos escrever

$R(z) = [R(z), 0, 1, \infty] = [z, z_1, z_2, z_3] = [w, w_1, w_2, w_3] = [S(w), 0, 1, \infty] = S(w)$.

Por fim, como R e S são bijeções, basta tomarmos $T = S^{-1} \circ R$,

$$T(z_k) = (S^{-1} \circ R)(z_k) = S^{-1}(R(z_k)) = S^{-1}(S(w_k)) = w_k.$$

Por outro lado, seja $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ de Möbius e z_1, z_2, z_3 os três pontos distintos de $\mathbb{C}_\infty$ de modo que, $T(z_1) = w_1, T(z_2) = w_2, T(z_3) = w_3$, sendo w_1, w_2, w_3, visto que T é uma bijeção, tomemos $S : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ de Möbius tal que $S(z_1) = w_1, S(z_2) = w_2, S(z_3) = w_3$.

Queremos mostrar que $T = S$. Para isso, basta calcularmos $S^{-1} \circ T$ e obtermos que $(S^{-1} \circ T)(z_k) = z_k$ para $k = 1, 2, 3$.

$$(S^{-1} \circ T)(z_1) = S^{-1}(T(z_1)) = S^{-1}(w_1) = z_1,$$
$$(S^{-1} \circ T)(z_2) = S^{-1}(T(z_2)) = S^{-1}(w_2) = z_2,$$
$$(S^{-1} \circ T)(z_3) = S^{-1}(T(z_3)) = S^{-1}(w_3) = z_3.$$

Portanto, T é única. ∎

Em Geometria Plana, estudamos que três pontos distintos do plano ($\mathbb{C}$), podem determinar uma única reta caso estejam alinhados e uma única circunferência caso contrário.

Vimos no Capítulo 3, que a aplicação Projeção Estereográfica leva uma circunferência do plano $\mathbb{C}$ numa circunferência na esfera $\mathbb{C}_\infty$, o mesmo ocorrendo com uma reta do plano $\mathbb{C}$ que é levado para uma circunferência na esfera $\mathbb{C}_\infty$ passando por ∞.

Teorema 4.3.4. *As transformações de Möbius preservam a família $\mathcal{F}$ de todas circunferências na esfera $\mathbb{C}_\infty$, isto é, se $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$, então $T(\mathcal{C}) \in \mathcal{F}$ qualquer que seja T de Möbius.*

Para provarmos o Teorema necessitamos do Lema.

Lema 4.3.5. *Qualquer reta ou circunferência pode ser escrita, em coordenadas cartesianas, na forma*

$$Ax^2 + Ay^2 - 2Bx - 2Cy + D = 0, \tag{4.4}$$

que representará uma reta caso $A = 0$ e $B^2 + C^2 \neq 0$ e, caso $A \neq 0$, teremos uma circunferência se $B^2 + C^2 > AD$.

Demonstração:

De fato.

Tomando $A = 0$ temos $-2Bx - 2Cy + D = 0$, e a condição $B^2 + C^2 \neq 0$ garantindo que B e C não são simultaneamente nulos, assim obtemos a equação de uma reta.

Já $A \neq 0$ queremos verificar se a equação (4.4) pode representa uma circunferência e sobre quais condições.

$$\begin{aligned}
&Ax^2 + Ay^2 - 2Bx - 2Cy + D = 0,\\
&A\left[x^2 + y^2 - 2\left(\frac{B}{A}\right)x - 2\left(\frac{C}{A}\right)y + \frac{D}{A}\right] = 0, (A \neq 0)\\
&x^2 + y^2 - 2\left(\frac{B}{A}\right)x - 2\left(\frac{C}{A}\right)y + \frac{D}{A} = 0,
\end{aligned}$$

completando quadrados, teremos

$$\begin{aligned}
&x^2 - 2\left(\frac{B}{A}\right)x + \left(\frac{B}{A}\right)^2 + y^2 - 2\left(\frac{C}{A}\right)y + \left(\frac{C}{A}\right)^2 + \frac{D}{A} - \left(\frac{B}{A}\right)^2 - \left(\frac{B}{A}\right)^2 = 0,\\
&\left(x - \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y - \frac{C}{A}\right)^2 + \frac{AD - (B^2 + C^2)}{A^2} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, teremos uma circunferência se $A \neq 0$ e $B^2 + C^2 > AD$ ∎

Segue a demonstração do Teorema 4.3.4.

Demonstração:

A partir da equação (4.4) e as condições dadas, queremos obter uma equação equivalente na variável complexa.

Tomando $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e o seu conjugado $\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z \cdot \overline{z}, \\ 2x &= z + \overline{z}, \\ 2y &= -i(z - \overline{z}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Substituindo as igualdades (4.5) na equação (4.4) temos

$$\begin{aligned} &Az\overline{z} - B(z + \overline{z}) - iC(z - \overline{z}) + D = 0 \Longrightarrow \\ &Az\overline{z} - Bz - B\overline{z} - iCz + iC\overline{z} + D = 0 \Longrightarrow \\ &Az\overline{z} - (B + Ci)z - (B - iC)\overline{z} + D = 0. \end{aligned}$$

Fazendo $E = B + iC$, tem-se $\overline{E} = B - iC$, o resulta

$$Az\overline{z} - Ez - \overline{E}\overline{z} + D = 0. \tag{4.6}$$

A partir de agora queremos verificar qual a imagem da curva dada pela equação (4.6) sob a transformação a seguir:

(i) translação: $T(z) = z + b$. Basta substituirmos z por $z + b$ na equação (4.6).

$$A(z + b)\overline{(z + b)} - E(z + b) - \overline{E}\overline{(z + b)} + D = 0,$$

e chamando $z + b = w$ temos

$$Aw\overline{w} - Ew - \overline{E}\overline{w} + D = 0.$$

(ii) rotação: $T(z) = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Basta substituirmos z por αz na equação (4.6).

$$A(\alpha z)(\overline{\alpha z}) - E(\alpha z) - \overline{E}(\overline{\alpha z}) + D = 0,$$

e chamando $u = \alpha z$ temos

$$Au\overline{u} - Eu - \overline{E}\overline{u} + D = 0.$$

(iii) homotetia: $T(z) = \rho z$, $\rho > 0$. Basta substituirmos z por ρz na equação (4.6).

$$A(\rho z)(\overline{\rho z}) - E(\rho z) - \overline{E}(\overline{\rho z}) + D = 0,$$

e chamando $v = \rho z$ temos

$$Av\overline{v} - Ev - \overline{E}\overline{v} + D = 0.$$

Os três itens anteriores obtivemos equações do mesmo tipo da equação (4.6) e com as mesmas características, mostrando que a translação, a rotação e a homotetia levam reta em reta e circunferência em circunferência.

Veremos o que ocorrerá com a inversão $T(z) = \dfrac{1}{z}$. Basta substituirmos z por $\dfrac{1}{z}$ na equação (4.6).

$$A\frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}} - E\frac{1}{z} - \overline{E}\frac{1}{\overline{z}} + D = 0. \tag{4.7}$$

Multiplicando por $z\overline{z}$ ambos os membros da equação (4.7) tem-se

$$A - E\overline{z} - \overline{E}z + Dz\overline{z} = 0,$$

isto é,

$$Dz\overline{z} - \overline{E}z - E\overline{z} + A = 0. \tag{4.8}$$

Logo, temos que a equação (4.8) tem a mesma forma da equação (4.6), fazendo a troca de $A, E, \overline{E}, D$ por $D, \overline{E}, E, A$, respectivamente. Então, segue

(1) Se a equação (4.6) representa uma circunferência que não passa pela origem, isto é, $z = 0$ não é solução desta equação, então $D \neq 0$. Portanto, a equação (4.8) representa também uma circunferência que não passa pela origem, visto que $A \neq 0$ e $E\overline{E} > AD$.

(2) Se a equação (4.6) representa uma circunferência que passa pela origem, então $D = 0$ o que implica que a (4.8) representa uma reta, com $A \neq 0$, logo não passa pela

origem.

(3) Se a equação (4.6) representa uma reta que não passa pela origem, temos $A = 0$, $D \neq 0$ e $E \neq 0$, então a equação (4.8) representa uma circunferência que passa pela origem.

(4) Se a equação (4.6) representa uma reta que passa pela origem, assim $A = 0$, $D = 0$ e $E \neq 0$, logo a equação (4.8) representa uma reta que passa pela origem.

Portanto, concluímos que $T(C) \in \mathcal{F}$, qualquer que seja T de Möbius. $\blacksquare$

Capítulo 5

Proposta de Atividade no Ensino Médio

Para o desenvolvimento desta atividade é necessário que os discentes tenham domínio sobre os conceitos de *matrizes*, *trigonometria* e *funções*. Por isso, sugiro que seja aplicada à Terceira Série do Ensino Médio.

5.1 Números Complexos Associados à Matrizes

Nesta seção temos como objetivo promover aos discentes condições de associar a forma algébrica de um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ a uma matriz quadrada de ordem 2.

Dado o conjunto $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ tomemos a matriz particular $A \in M_2(\mathbb{R})$ obtida no **Capítulo 1**, Seção (1.1), escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Matrizes A escritas forma (5.1) estão em correspondência biunívoca com pontos de $\mathbb{R}^2$, isto é, a cada matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ associa-se a um único ponto $P \in \mathbb{R}^2$ e vice-versa.

Assim, a matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ será representada no plano cartesiano pelo ponto $P = (a, b)$ como na figura.

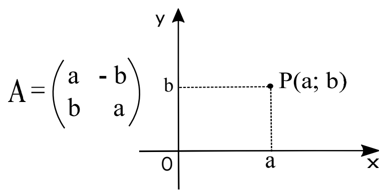

Figura 5.1:

Exercício 1. *Represente em um só plano cartesiano as matrizes a seguir:*
$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ *e* $D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercício 2. *Dadas as matrizes* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, *determine:*

(*a*) $A + B$

(*b*) $A - B$

(*c*) $A \cdot B$

(*d*) $B \cdot A$

(*e*) A^{-1}

O objetivo da resolução do **Exercício 3** não é apenas o de relembrar as operações com matrizes, mas fazer com que os discentes percebam que o conjunto formados pelas matrizes do tipo (5.1) é fechado quanto as operações de adição, subtração e multiplicação, além de serem comutativas e invertíveis.

No caso geral, tomando $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ tem-se

Adição

$$A + B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}.$$

Logo, a matriz $A + B$ é da mesma forma que a matriz (5.1).

Subtração

$$
\begin{aligned}
A - B &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & -b+d \\ b-d & a-c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a-c & -(b-d) \\ b-d & a-c \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Logo, a matriz $A - B$ é da mesma forma que a matriz (5.1).

Multiplicação

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} = B \cdot A.
\end{aligned}
$$

Logo, a matriz $A \cdot B$ é da mesma forma que a matriz (5.1).

Nessas condições, podemos afirmar que as matrizes do tipo (5.1) são fechadas quanto as operações *adição*, *subtração* e *multiplicação*.

Quanto a A^{-1} podemos garantir sua existência, desde que, $a^2+b^2 \neq 0$, o que nos mostra que o conjunto das matrizes do tipo (5.1) não admite inversa quanto estiver representando a *origem* do sistema cartesiano.

Podemos determinar a matriz A^{-1} como faremos a seguir. Tomando $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tem-se

$$
\begin{aligned}
&A \cdot A^{-1} = I \\
&\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} ax-bz & ay-bw \\ bx+az & by+aw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\begin{cases} ax & - & bz & = & 1\ (I) \\ bx & + & az & = & 0\ (II) \end{cases}$$

Escolhendo a equação (II),

$$bx + az = 0 \Longleftrightarrow bx = -az \Longleftrightarrow x = -\frac{az}{b}.$$

Substituindo a expressão de x em (I) segue

$$a \cdot \left(-\frac{az}{b}\right) - bz = 1 \ \cdot (b) \Longleftrightarrow -a^2z - b^2z = b \Longleftrightarrow z(-a^2 - b^2) = b \Longleftrightarrow z = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Logo, $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$.

E ainda,

$$\begin{cases} ay & - & bw & = & 0\ (I) \\ by & + & aw & = & 1\ (II) \end{cases}$$

Escolhendo a equação (I),

$$ay - bw = 0 \Longleftrightarrow bw = ay \Longleftrightarrow w = \frac{ay}{b}.$$

Substituindo a expressão de w em (II) segue

$$by + a \cdot \left(\frac{ay}{b}\right) = 1 \ \cdot (b) \Longleftrightarrow b^2y + a^2y = b \Longleftrightarrow y(a^2 + b^2) = b \Longleftrightarrow y = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Logo, $w = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$.

Portanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ -\dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{a^2+b^2} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Logo, a matriz A^{-1} é da mesma forma que a matriz (5.1).

Neste segundo momento desta seção, tomemos os *números complexos* na forma algébrica $z = a + bi$ com sua representação no *Plano de Argand-Gauss*, dada por

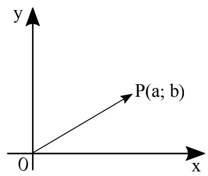

Figura 5.2: Afixo de z

Das representações na figuras 1 e 2, espera-se que os discentes concluam que

$$z = a+bi = (a;b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

E desta forma, concluir que

(I) $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: unidade imaginária;

(II) a matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = (a;0)$ representa a parte real de z;

(III) a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0;b) = bi$ representa a parte imaginária de z.

Portanto, se $z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, z será chamado de *número real* e se $z = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, com $b \neq 0$, z será chamado de *número imaginário puro*.

Representação Matricial Polar

A representação do número complexo z no plano de Argand-Gauss considerando o seu *módulo* ρ e o seu *argumento* θ_0 é dado por

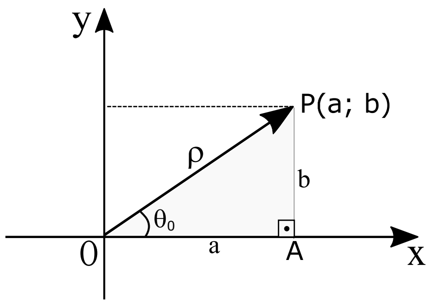

Figura 5.3:

de modo que, pelo Teorema de Pitágoras $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e pelas relações trigonométricas do triângulo retângulo

$cos(\theta_0) = \dfrac{a}{\rho} \Longleftrightarrow a = \rho \cdot cos(\theta_0)$

e

$sen(\theta_0) = \dfrac{b}{\rho} \Longleftrightarrow b = \rho \cdot sen(\theta_0)$

Substituindo os valores de a e b na matriz (5.1) tem-se

$$\begin{pmatrix} \rho \cdot cos(\theta_0) & -\rho \cdot sen(\theta_0) \\ \rho \cdot sen(\theta_)) & \rho \cdot cos(\theta_0) \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} cos(\theta_0) & -sen(\theta_0) \\ sen(\theta_0) & cos(\theta_0) \end{pmatrix}.$$

Logo, a *representação matricial polar* de z é $z = \rho \cdot \begin{pmatrix} cos(\theta_0) & -sen(\theta_0) \\ sen(\theta_0) & cos(\theta_0) \end{pmatrix}$.

Exercício 3. *Dados os números complexos $z = 1 + 2i$, $u = -3 + i$ e $v = 4 + 3i$. a) Determine a forma matricial de z, de u e v;*

b) Determine a soma $z + v$ e $u + v$.

c)Represente os números complexos z, u, $z + v$ e $u + v$ no plano de Argand-Gauss. Em seguida, ligue os afixos de z com u e $z + v$ com $u + v$.

d) Explique que tipo de movimento ocorreu com o segmento $\overline{zu}$.

Observação 5.1.1. *O objetivo do Exercício (3) é mostrar que na adição de dois números complexos $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ com $v = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ teremos um movimento de translação de z em c unidades na horizontal e de d unidades na vertical.*

No caso do segmento inicial com extremidades z e u, todos os seus pontos sofrerão uma translação, de modo que o seu módulo não será alterado.

Vale chamar a atenção para o fato de que $z - v = z + (-v)$, logo teremos o mesmo tipo de movimento.

Exercício 4. *Determine a forma matricial polar do produto entre os números complexos $z = |z| \cdot \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ e $w = |w| \cdot \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$.*

Exercício 5. *Dados os números complexos* $z = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$ *e* $u = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. *a) Obtenha a forma matricial polar de z, u e v.*

b) Determine o produto $z \cdot v$ e $u \cdot v$.

c) Represente os números complexos z, u, $z \cdot v$ e $u \cdot v$ no plano de Argand-Gauss. Em seguida, ligue os afixos de z com u e $z \cdot v$ com $u \cdot v$.

d)Explique que tipo de movimento ocorreu com o segmento $\overline{zu}$.

Observação 5.1.2. *Com o Exercício (5) percebemos que o produto entre dois números complexos determina uma rotação de θ graus de z e que o módulo do produto é dado pelo produto dos módulos, de modo que se $|v| = 1$ a medida do segmento $\overline{zu}$ não se altera, caso $|v| < 1$, sofrerá uma contração e se $|v| > 1$ sofrerá uma dilatação.*

Assim, podemos concluir que se $|v| = 1$ a matriz $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ *representa um operador de rotação.*

Desse modo, dado o número complexo $w = i$, imaginário puro, dado por $w = i = \begin{pmatrix} cos(90^o) & -sen(90^o) \\ sen(90^o) & cos(90^o) \end{pmatrix}$. *Isso significa que $z \cdot i$ determina que z sofrerá uma rotação de 90^o, que $z \cdot i^2$ determina que z sofrerá uma rotação de 180^o e assim sucessivamente.*

Exercício 6. *Um quadrado $ABCD$ está inscrito num círculo com centro na origem. O vértice A coincide com o afixo do número complexo $3 + 4i$. Qual é o afixo de cada um dos outros vértices?*

Exercício 7. *Como consequência da fórmula da multiplicação de números complexos na forma matricial polar, temos que a potência de* $z = |z| \cdot \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(n\theta) \end{pmatrix}$ *é dada por* $z^n = \begin{pmatrix} cos(n\theta) & -sen(n\theta) \\ sen(n\theta) & cos(n\theta) \end{pmatrix}$. *Com esta informação em mãos determine a forma matricial polar de z^n, para $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ sendo* $z = 2 \cdot \begin{pmatrix} cos30^o & -sen30^o \\ sen30^o & cos30^o \end{pmatrix}$ *e, em seguida, represente as potências obtidas no plano de Argand-Gauss.*

Exercício 8. *Dado o número complexo* $z = \begin{pmatrix} cos60^o & -sen60^o \\ sen60^o & cos60^o \end{pmatrix}$*, determine a forma matricial polar de* z^n*, para* $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ *e represente cada uma das potências obtidas no plano de Argand-Gauss.*

Observação 5.1.3. *Após a resolução dos Exercícios (7) e (8) devemos observar que, dado o número complexo* $z = |z| \cdot \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ *e* $n \in I\!N$*, temos que* $w = z^n$ *representa que* z *sofre uma rotação de* $n\theta$ *e seu módulo poderá sofrer uma dilatação ou uma contração de medida* $|z|^n$*, podendo permanecer o mesmo caso* $|z| = 1$*.*

Chegamos ao ponto de estudarmos a divisão entre números complexos, e para isso, determinaremos inicialmente o inverso do número complexo z.

Determinamos neste capítulo que a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ é dada por $\frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Queremos mostrar que $\frac{1}{z} = A^{-1}$

De fato,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Nessas condições, $\frac{1}{z} = A^{-1}$.

Assim,

$$\begin{aligned} z^{-1} =& \frac{1}{|z|^2} \cdot \begin{pmatrix} |z|cos\theta & |z|sen\theta \\ -|z|sen\theta & |z|cos\theta \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{|z|^2} \cdot |z| \cdot \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{|z|} \cdot \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da trigonometria tem-se que a função cosseno é uma função par, isto é, $f(-\theta) = cos(-\theta) = cos(\theta) = f(\theta)$ e a função seno é uma função ímpar, ou seja, $f(-\theta) = sen(-\theta) = -sen(\theta) = -f(\theta)$.

Com isso, tem-se que $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|} \cdot \begin{pmatrix} cos(-\theta) & -sen(-\theta) \\ sen(-\theta) & cos(-\theta) \end{pmatrix}$. Geometricamente, quando representamos z^{-1} significa z sofreu uma reflexão em torno do eixo real seguido de uma dilatação ou contração, ou ainda, podemos dizer que z sofreu uma rotação de 2θ no sentido horário seguido de uma dilatação ou contração.

E ainda, quando fizermos $w \cdot z^{-1}$ o número complexo w sofrerá uma rotação de θ no sentido horário e ainda, o módulo $|w|$ ficará multiplicado por $\dfrac{1}{|z|}$.

Exercício 9. *Determine a forma matricial polar do inverso de* $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Na divisão de $\dfrac{z}{w}$ dados por $z = |z| \cdot \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ e $w = |w| \cdot \begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} =& z \cdot \frac{1}{w} = z \cdot w^{-1} = |z| \cdot \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \cdot |w|^{-1} \cdot \begin{pmatrix} cos(-\alpha) & -sen(-\alpha) \\ sen(-\alpha) & cos(-\alpha) \end{pmatrix} \\ =& |z| \cdot |w|^{-1} \cdot |w| \cdot \begin{pmatrix} cos(\theta-\alpha) & -sen(\theta-\alpha) \\ sen(\theta-\alpha) & cos(\theta-\alpha) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que geometricamente, z sofrerá rotação de α no sentido horário.

Exercício 10. *Considere os números complexos* $z = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$ *e* $v = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

a) Determine a forma matricial polar de z, u e v.

b) Determine o quociente $\dfrac{z}{v}$ e $\dfrac{u}{v}$.

c) Represente no plano de Argand-Gauss z, u, $\dfrac{z}{v}$ e $\dfrac{u}{v}$.

d) Interprete o movimento sofrido pelo segmento $\overline{zu}$ após a divisão.

Neste último momento trabalharemos a Radiciação.

Sejam z e w dois números complexos e n um número inteiro positivo, de tal forma que $w^n = z$. Nessas condições, w é uma raiz n-ésima de z.

Seja a forma matricial polar de $z = |z| \cdot \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$, temos que as raízes n-ésimas de z são dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \begin{pmatrix} cos\left(\dfrac{\theta}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}\right) & -sen\left(\dfrac{\theta}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}\right) \\ sen\left(\dfrac{\theta}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}\right) & cos\left(\dfrac{\theta}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

com $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$.

Exercício 11. *Considere o número complexo $z = 1$.*

a) Determine a forma matricial polar de z.

b) Determine as raízes sexta de z.

c) Represente as raízes sextas de z no plano de Argand-Gauss.

Observação 5.1.4. *Geometricamente as raízes n-ésimas de z representam os vértices um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio $\sqrt[n]{|z|}$.*

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G. *Variáveis complexas e aplicações.* 3ª edição. Editora LTC, Rio de Janeiro, 2008.

[2] Churchill, R.V.; Brown, J.W. *Complex variables and applications.* 4ª edição. McGraw-Hill Book Co., New York, 1984.

[3] Dettman, J.W. *Applied complex variables.* The Macmillan Co., New York, 1985.

[4] SPIEGEL, M.R. *Variáveis Complexas.* Coleção Schaum. Editora McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1973

[5] Fernandez, C.S.; Bernanrdes, N.C. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa.* SBM., Rio de Janeiro, 2006.

[6] Soares, M.G. *Cálculo em uma Variável Complexa.* 3ª edição. Coleção Matemática Universitária. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2003.