UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL – UEMS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

EQUAÇÕES POLINOMIAIS: UM ESTUDO APLICADO AO ENSINO MÉDIO

OSÉAS ARRUDA CIRIACO

DOURADOS - MS

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL – UEMS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

EQUAÇÕES POLINOMIAIS: UM ESTUDO APLICADO AO ENSINO MÉDIO

OSÉAS ARRUDA CIRIACO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul como requisito obrigatório para obtenção do grau de mestre tendo como orientadora a Profª. Drª. Maristela Missio.

DOURADOS - MS

2016

FICHA DE APROVAÇÃO

OSÉAS ARRUDA CIRIACO

Título do Trabalho: EQUAÇÕES POLINOMIAIS: UM ESTUDO APLICADO AO ENSINO MÉDIO

Este trabalho de conclusão de curso – TCC do Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul foi avaliado e aprovado como requisito obrigatório para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Profa. Dra. Maristela Missio – UEMS
Orientadora – Presidente da Banca

Prof. Msc. Rildo Pinheiro do Nascimento - UEMS
Membro da Banca

Prof. Dr. Sérgio Rodrigues - UFGD
Membro da Banca

Dourados - MS, 14 de setembro de 2016.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Roseli, aos filhos Rita de Cássia e João Pedro e a minha mãe Rita.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar coragem e forças para superar as dificuldades.

A minha mãe, pelo incentivo e motivação em todos os momentos de minha vida.

A meu grande amigo Alfred Fosther, por estar sempre disposto a me ajudar.

A minha orientadora Profa. Dra. Maristela Missio pela orientação, apoio, confiança e tempo dedicado na revisão desta dissertação.

Aos meus colegas e amigos pela convivência e aprendizado.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram e fazem parte da minha formação o meu mais sincero muito obrigado.

EPÍGRAFE

A aprendizagem é uma construção pessoal que o aluno realiza com a ajuda que recebe de outras pessoas.

(Cool, 2006)

RESUMO

A resolução de equações polinomiais sempre foi uma das grandes motivações para o desenvolvimento da álgebra. As primeiras equações, mesmo com formas de resolução simples, já apresentavam a ideia de incógnita para indicar a quantidade inicialmente desconhecida. Este trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta de ensino sobre equações polinomiais de até quarto grau para os professores de Matemática que lecionam no terceiro ano do Ensino Médio, com uma atenção especial na fórmula de Cardano-Tartaglia. Abordamos o tema por meio de atividades, algumas são demonstrações em forma de tutoriais e outras apenas aplicações de fórmulas.

Palavras-chave: Sequência didática- Equações Polinomiais-Cardano-Tartaglia-Ensino Médio.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A resolução de equações polinomiais sempre foi uma das grandes motivações para o desenvolvimento da álgebra. As primeiras equações, mesmo com formas de resolução simples, já apresentavam a ideia de incógnita para indicar a quantidade inicialmente desconhecida.

Sabe-se pelas descobertas e posteriormente pelas traduções de papiros, entre os quais podemos destacar o papiro de Rhind (foi comprado á beira do rio Nilo em 1858, por um antiquário escocês chamado Henry Rhind; por isso é chamado de Papiro de Rhind) onde consta uma coletânea de problemas aritméticos e também algébricos.

> Os problemas egípcios descritos até agora são do tipo digamos, aritméticos, mas há outros que merecem a designação de algébricos. Não se referem a objetos concretos, específicos, como pães e cervejas, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares, da forma $x + ax = b$ e $x + ax + bx = c$, onde a, b e c são conhecidos e x é desconhecido. A incógnita é chamada de ‘’aha’’. (Boyer, 2010, p.11)

A busca por soluções de equações vem de muito longe (por volta de 2000 a.C a 1800 a.C, data aproximada do Papiro de Rhind), os egípcios já desenvolviam técnicas para resolver problemas envolvendo equações de primeiro grau, assim como as de segundo grau que a mil e setecentos anos antes da era cristã já eram resolvidas pelos matemáticos da Babilônia, utilizando a técnica de completar quadrados. Por outro lado foi necessário esperar mais de três mil anos até que Scipione Ferro resolvesse a equação do terceiro grau e Ludovico Ferrari, logo em seguida, a do quarto grau.

Porém, na atualidade nossos alunos ainda apresentam muitas dificuldades ao resolver problemas envolvendo equações polinomiais, principalmente às de 3º e 4º graus que, na maioria das vezes, por falta de tempo e por apresentarem maior complexidade, são ignoradas pelos professores.

Neste sentido, acreditando que é possível cativar o aluno despertando seu interesse e curiosidade de forma a contribuir para a melhoria do ensino aprendizagem do tema em questão, objetivamos apresentar uma proposta didática para o ensino de resolução de equações polinomiais até quarto grau e suas aplicações com enfoque para a fórmula de Cardano-Tartaglia.

A proposta compreende uma sequência didática com atividades envolvendo a resolução de equações polinomiais, mais especificamente, a resolução de exercícios e aplicação do conteúdo de equações de até quarto grau, dando uma atenção especial na fórmula de Cardano-Tartaglia para as equações do tipo: $x^3 + Mx + n = 0$. O desenvolvimento da proposta se dará por meio de aulas expositivas e dialogadas com os discentes, de modo que o aluno se torne protagonista de sua aprendizagem, com a intenção de desenvolver uma pratica didática que contribua para a melhoria do aprendizado do aluno sobre o tema abordado.

Foram elaboradas atividades sobre os temas de equações de até quarto grau. Algumas atividades, principalmente as que envolvem demonstrações, são apresentadas com um passo a passo em forma de tutoriais. Em suas elaborações, houve a preocupação que elas fossem investigativas e que levassem a aprendizagem através de uma análise e reflexão em cada um de seus passos e outras atividades são simplesmente aplicação de fórmula.

Visto que a maioria dos estudantes costumam perguntar quais as aplicações do tema em seu cotidiano, foi dedicada uma lista de atividades com aplicações nas diversas áreas do conhecimento, mostrando aos discentes a importância e aplicabilidades para resolver problemas nas várias áreas das ciências exatas.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, onde no primeiro é apontado o percurso da pesquisa a partir dos objetivos e da sua justificativa.

O segundo capítulo traça os aspectos históricos e também as definições de polinômios e equações polinomiais definindo conceitos, características e propriedades. O terceiro trata dos métodos das resoluções das equações de até quarto grau. No quarto capítulo apresentamos a sequência didática composta por quatro atividades aplicadas aos discentes e apresentamos um breve relato referente à aplicação das atividades aos alunos.

Finalizando o trabalho no capítulo cinco, tecemos nossas conclusões destacando os aspectos importantes desse trabalho. O aprendizado da Matemática está diretamente ligado à compreensão, isto é, o que foi pretendido com esta pesquisa.

2 Revisão Bibliográfica dos Polinômios

2.1 ALGUNS FATOS HISTÓRICOS

Ao fazer o estudo das equações polinomiais de até 4º grau é de suma importância relatar aqui um pouco da história de como ela se desenvolveu e a descoberta dos métodos de resolução de tais equações.

Segundo (GOUVÊA, 2010 p. 125) a descoberta do papiro de Rhind contêm uma coleção de problemas que podem ser representados por meio de uma equação polinomial de primeiro grau, que provavelmente foi usado para treinar no Egito antigo jovens escribas.

> Problemas que se reduzem a resolver uma equação de primeiro grau aparecem naturalmente sempre que aplicamos matemática ao mundo real. Não é surpreendente, portanto, descobrir que quase todos que estudaram matemática, dos escribas egípcios aos servidores públicos chineses, desenvolveram técnicas para resolver tais problemas (GOUVÊA, 2010 p. 125).

Por volta do ano 825, um grande generalista chamado Muhammad Ibn Mûsa AL-Kgwârizmî teve uma obra publicada, e desse título deu-se a origem da palavra "álgebra". De todas as suas publicações sobre temas variados, ele escreveu sobre geografia, astronomia e matemática, o mais famoso foi sobre o de álgebra. O livro começa com uma discussão sobre equações quadráticas.

> Um quadrado e dez raízes dele são iguais a trinta e nove dirhems. Que quer dizer, quando de ser o quadrado, o qual, quando aumentado por dez de suas próprias raízes, é igual a trinta e nove? Se chamarmos a incógnita de x, podemos chamar o "quadrado" de x^2. Agora, uma "raíz desse quadrado" é x, de modo que dez raízes do quadrado é 10x. Usando essa notação, o problema se traduz na resolução de $x^2+10x=39$. Mas o simbolismo algébrico ainda não tinha sido inventado, de modo que tudo que Al-Kgwârizmî poderia fazer era dizer isso em palavras. Na tradição dos professores de álgebra, honrada em toda parte, ele seguiu o problema com uma espécie de receita para sua solução, novamente descrita em palavras. A solução é a seguinte: você divide o número de raízes por dois, o que, no caso presente, fornece cinco. Isso você multiplica por si mesmo: o produto é vinte e cinco. Some isso a trinta e nove: a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito, subtraia disso a metade do número de raízes, que é cinco: o resto é três. Essa é a raiz do quadrado que você procurava: o próprio quadrado é nove. Aqui estão os cálculos com os nossos símbolos: $x=\sqrt{5^2+39}-5=\sqrt{25+39}-5=\sqrt{64}-5=8-5=3$. Não é difícil ver que isso é basicamente a fórmula quadrática como a conhecemos atualmente. Para resolver $x^2+bx=c$, Al-Kgwârizmî usou a regra: $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$. (GOUVÊA, 2010 pp. 131,132).

Com a divulgação de seu método para a solução de problemas de segundo grau, tantos outros matemáticos também se interessaram pelo tema.

> Depois da regra de Al-Kgwârizmî, muitos outros matemáticos escreveram sobre as equações quadráticas. Seus métodos e suas justificativas geométricas se tornaram mais e mais sofisticados. Mas a ideia básica nunca mudou. De fato, até mesmo o exemplo permaneceu o mesmo. Do século IX ao século XVI, os livros de álgebra quase sempre começavam suas discussões sobre equações quadráticas considerando "um quadrado e dez raízes são iguais a 39" (GOUVÊA, 2010 p. 133).

Segundo (EVES, 2004 p. 110) em sua álgebra geométrica os gregos utilizavam-se de dois métodos principais para resolução de equações simples - o método da aplicação de áreas e o método das proporções.

Ainda segundo (EVES, 2004 pp. 61,62), por volta do ano 2000 A.C. na babilônia, a aritmética evolui-se em uma álgebra retórica bem desenvolvida, onde se resolviam equações de segundo grau tanto pelo método de completar quadrados como pelo método equivalente ao da substituição em uma fórmula geral.

Gouvêa, (2010) afirma que no fim do século XVI e início do século XVII, os matemáticos tiveram a ideia de que números poderiam se representados por letras, e nos anos seguintes adotaram por conveniência que: letras do final do alfabeto representariam os números desconhecidos e as letras do começo do alfabeto representariam os números conhecidos.

> Finalmente, Thomas Harriot e René Descartes observaram que é mais fácil escrever todas as equações como alguma coisa = 0. A principal vantagem é que agora $ax^2 + bx = c \; e \; ax^2 + cx = b$ podem ser vistos como casos especiais da equação geral $ax^2 + bx + c = 0$. E a solução geral podia ser escrita como: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. (GOUVÊA, 2010 p. 134).

Dificilmente os problemas matemáticos surgem de forma abstrata. O problema de resolver equações de terceiro grau surgiu de problemas geométricos e os gregos foram os primeiros a considera-los, os problemas originais podem ser tão antigos quanto a 400 A.C., mas, a solução completa só foi descoberta 200 anos depois, (GOUVÊA, 2010 p. 137).

Eves (2004) afirma que, provavelmente os matemáticos italianos realizaram o feito mais extraordinário do século XVI, que foi a solução algébrica das equações cúbica e quártica.

É interessante conhecer um pouco da história das soluções das equações de 3º grau.

> A história da solução da equação do terceiro grau tem vários aspectos interessantes, em virtude dos quais ela se constitui num tópico atraente pra o estudo e discussão entre alunos e professores de matemática. Um desses aspectos é o enigma histórico. Se os babilônios já sabiam resolver a equação de segundo grau mil e setecentos anos antes da era cristã, por que se teve de esperar mais de três mil anos até que Scipione Ferro

> resolvesse a equação do terceiro grau e Ludovico Ferrari, logo em seguida, a do quarto grau? Há também o lado humano, as figuras pitorescas e fascinantes dos homens envolvidos nas descobertas e suas disputas daí decorrentes. Além disso, tem-se ainda o aspecto científico, os progressos matemáticos que advieram da solução e o grande problema geral da solução por radicais, somente elucidados trezentos anos depois, por Ruffini, Abel e Galois. Tudo isto sem falar no cenário, aquela notável atmosfera de elevada excitação intelectual existente na Itália da época renascentista (Lima, 2001 p. 11).

Coxford (1995) destaca a regra de sinais de Descartes, o Teorema de De Moivre e o método de Newton entre os tópicos mais importantes envolvendo o estudo de polinômios. Tanto o aluno quanto o professor podem aprender muitos aspectos do pensamento matemático através do estudo de polinômios, e é importante que o ensino do tema permaneça no currículo.

> Se $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, onde p, q e r são números racionais, não pode ser fatorado sobre o conjunto dos números racionais, então suas raízes não podem ser construídas com os instrumentos euclidianos. Esse teorema é a chave para se provar que com os instrumentos euclidianos é impossível a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo, a quadratura do circulo e a construção de um heptágono regular. Há um vínculo muito forte entre os polinômios e os problemas de construções geométrica da Antiguidade, e essa é mais uma razão para que os polinômios devam fazer parte do currículo da escola média (Arthur F. Coxford, 1995 p. 133).

Um pouco da história do método da fórmula de Cardano-Tartaglia contada por Eves (2004).

Consta nos livros de história que Del Ferro resolvia um tipo específico de equações de 3º grau e ele contou seu método a seu estudante Fiore, que se gaba de saber resolver tais equações. Em fevereiro de 1535, Fiore desafia Tartaglia a uma disputa, que consistia em resolver problemas em um total de trinta, mas Fiore só sabia resolver um tipo, "incógnitas e cubos de iguais números", Tartaglia também tinha descoberto a forma de resolver um tipo de equação cúbica diferente do que Fiore poderia resolver, isto é, "quadrados e cubos iguais aos números". Nas primeiras horas de 13 de fevereiro de 1535, pouco antes do fim do prazo, a inspiração veio para Tartaglia. Ele tinha encontrado a resolução geral deste tipo de equação, em seguida, foi capaz de resolver todos os trinta problemas de Fiore e em menos de duas horas. Como Fiore tinha feito pouco progresso com questões de Tartaglia, tornando-se o grande vencedor.

Neste momento, Cardano entra na história, como conferencista público de matemática na Fundação Piatti em Milão, ele estava ciente do problema da resolução de equações cúbicas. Imediatamente começou a trabalhar tentando descobrir o método de Tartaglia para si mesmo, mas não teve sucesso.

Alguns anos mais tarde, em 1539, ele contatou Tartaglia, solicitando que o método poderia ser incluído em um livro que ele estava publicando esse ano. Tartaglia recusou esta oportunidade. Cardano, não aceita isso, e pede para ser mostrado o método, prometendo mantê-lo em segredo, Tartaglia, no entanto, recusa. Cardano irritado escreve uma carta a Tartaglia diretamente, expressando sua amargura, desafiando-o a um debate, mas, ao mesmo tempo, insinuando que ele vinha discutindo o brilho de Tartaglia com o governador de Milão, Alfonso d'Avalos. Após receber esta carta, Tartaglia, percebe que familiaridade com o governador milanês poderia ser muito gratificante e podendo fornecer uma saída para o trabalho do professor modesto. Ele escreveu de volta a Cardano, em termos amigáveis, o mesmo ficou encantado com a nova abordagem de Tartaglia, e convidando-o para sua casa, assegura a Tartaglia que ele irá marcar uma reunião com d'Avalos.

Então, em março de 1539, Tartaglia deixa Veneza e viaja para Milão. Para desânimo de Tartaglia, o governador está temporariamente ausente de Milão, mas Cardano atende Tartaglia e logo a conversa se volta para o problema de equações cúbicas. Tartaglia, depois de muita persuasão, concorda em contar a Cardano seu método, se Ele jurar nunca revela-lo e, além disso, apenas anotá-lo em código para que em sua morte, ninguém iria descobrir o segredo de seus papéis. Cardano concorda prontamente e Tartaglia divulga sua fórmula na forma de um poema, para ajudar a proteger que o segredo caia em mãos erradas.

Cardano e Ferrari (seu assistente) viajam para Bolonha em 1543 e descobre com Della Nave que Del Ferro tinha sido o primeiro a resolver a equação cúbica e não Tartaglia. Cardano sentiu que embora ele havia jurado para não revelar o método de Tartaglia, certamente nada o impediu de publicar fórmula Del Ferro. Em 1545 Cardano publicado *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, ou *Ars magna* como é mais conhecido, que continha soluções para ambas as equações cúbicas e quárticas e todo o trabalho adicional que ele tinha concluído com base na fórmula de Tartaglia. Del Ferro e Tartaglia são creditados com suas descobertas.

2.2 POLINÔMIOS COM COEFICIENTES REAIS

Nas seções seguintes será realizado um breve estudo sobre polinômios e equações polinomiais. Para maiores informações indicamos as referências (Dante-2005, p.47-119 e IEZZI-2002, p.444-455).

De um modo geral, um polinômio é uma função complexa p_n: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sendo $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, definida por $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}\, x^{\mathrm{n-1}} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ com os coeficientes a_i sendo números complexos. Para $a_n \neq 0$, o polinômio tem grau n.

Para os a_i reais, restringimos P_n ao conjunto dos números reais, sendo assim, uma função p_n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definição 2.1: Um polinômio com coeficientes reais é uma expressão do tipo

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{n-1}\, x^{\mathrm{n-1}} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathbb{R}$, para $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Para $i \in \{0,1,2, \ldots, n\}$, os elementos a_i são denominados coeficientes, as parcelas $a_i x^i$ são denominadas termos e os termos $a_i x^i$ tais que $a_i \neq 0$ são denominados monômios de grau i do polinômio $p_n(x)$. O coeficiente a_0 é denominado termo constante.

O polinômio $0(x) = 0 + 0x^1 + \cdots + 0x^{\mathrm{n-1}} + 0x^n$, denotado por $0(x) = 0$, para cada número natural n, é dito identicamente nulo. Um polinômio será dito constante quando $p_n(x) = a_0$.

Exemplos:

1) $p(x) = 5$ é um polinômio de grau 0 ou polinômio constante.

2) $p(x) = 3x - 2$ é um polinômio de 1º grau

3) $p(x) = -5x^2 + 1$ é um polinômio de 2º grau.

Definição 2.2: Considere o polinômio $p_n(x)$ e um número α qualquer. O valor numérico do polinômio $p_n(x)$ para $x = \alpha$ é o valor que se obtém ao substituir x por α e resolvendo a expressão numérica obtida. Então, o valor numérico de $p_n(x)$ para $x = \alpha$ é $p(\alpha)$.

Exemplo:

1) O valor numérico de $p(x) = x^2 + 2x - 1$, para $x = 3$, é:

$p(3) = (3)^2 + 2 \cdot (3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$

Definição 2.3: Diz-se que dois polinômios $p_n(x)$ e $q_n(x)$ são idênticos ou iguais se e somente se, seus valores numéricos são iguais para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

Assim:

$$p_n(x) = q_n(x) \Leftrightarrow p_n(\alpha) = q_n(\alpha)$$

Para que a igualdade aconteça, a diferença $p_n(x) - q_n(x) = 0$ e isto só acontece se, e somente se, têm coeficientes dos termos de mesmo grau iguais.

Exemplo.

Dados os polinômios $p(x) = ax^3 - bx^2 + cx + d \; e \; g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$, temos

$$p(x) = g(x) \Leftrightarrow a = 3, b = 2, c = 1 \; e \; d = -5$$

Definição 2.4: Seja $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ um polinômio não nulo. Chama-se grau de $p(x)$ ou $gr\, p(x)$ o número natural n tal que $a_n \neq 0 \; e \; a_i = 0$, para todo $i > n$.

$$gr\, p(x) \; \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ a_i = 0, \forall\, i > n \end{cases}.$$

Observação 2.1: Não se define o grau do polinômio identicamente nulo. Ressaltamos que:

$$gr\, p(x) = 0 \; \Leftrightarrow p(x) = a_0 \neq 0, a_0 \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.5: Dado um polinômio $p(x)$, dizemos que o número complexo α_0 é raiz do polinômio, se e somente se, $p(\alpha_0) = 0$, ou seja,

$$p_n(\alpha_0) = a_n {\alpha_0}^n + a_{n-1} {\alpha_0}^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha_0 + a_0 = 0.$$

2.2.1 Operações com Polinômios

Definição 2.6: (Adição de Polinômios) A adição entre os polinômios

$$p_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

$$q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

é definida por:

$$p_m(x) + q_n(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{M} (a_i + b_i) x^i,$$

onde, $M = \max\{gr\ p(x), gr\ q(x)\}$ e considerando que o símbolo $\max\{a, b\}$ significa o máximo entre os números a e b, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Observação 2.2: Para a subtração entre dois polinômios $p_m(x)$ e $q_n(x)$ considera-se polinômio $p_m(x) - q_n(x) = p_m(x) + \left(-q_n(x)\right)$.

Exemplos:

1) Se $p(x) = 2x^2 + 3x - 1$ e $g(x) = -x^2 + 5x + 3$, temos que :

$$p(x) + g(x) = (2 - 1)x^2 + (3 + 5)x + (-1 + 3)$$
$$p(x) + g(x) = x^2 + 8x + 2$$

2) Dados os polinômios $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ e $g(x) = 2x^3 + x^2 + 5$, temos que

$$p(x) - g(x) = p(x) + [-g(x)] = (4x^3 + 2x^2 - 5x + 3\ ) + (-2x^3 - x^2 - 5)$$
$$p(x) + [-g(x)] = (4 - 2)x^3 + (+2 - 1)x^2 + (-5 + 0)x + (+3 - 5)$$
$$p(x) + [-g(x)] = 2x^3 + x^2 - 5x - 2$$

Na adição de polinômios, vale a seguinte propriedade do grau:

Proposição 2.1: Sejam $p_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, com a_m e b_n não nulos. Se $p_m(x) + q_n(x) \neq 0$, então

$$gr\left(p(x) + q(x)\right) \leq max\{gr\ p(x), gr\ q(x)\} = \max\{m, n\}.$$

A igualdade será válida sempre que $gr\ p(x) = gr\ q(x)$.

Definição 2.7: (Multiplicação de Polinômios) Dados dois polinômios

$$p_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

$$q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

Define-se a multiplicação entre os polinômios por

$$p_m(x).\, q_n(x) = \sum_{i=0}^{\boldsymbol{m+n}} w_i x^i,$$

sendo

$$w_0 = \mathrm{a}_0 \mathrm{b}_0$$
$$w_1 = \mathrm{a}_0 \mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_1 \mathrm{b}_0$$
$$w_2 = \mathrm{a}_0 \mathrm{b}_2 + \mathrm{a}_1 \mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_2 \mathrm{b}_0$$

$$\vdots$$
$$w_i = \mathrm{a}_0\mathrm{b}_i + \mathrm{a}_1\mathrm{b}_{i-1} + \cdots + \mathrm{a}_i\mathrm{b}_0 = \sum_{\alpha+\beta} \mathrm{a}_\alpha \mathrm{b}_\beta$$
$$\vdots$$
$$w_{\boldsymbol{m+n}} = \mathrm{a}_m\mathrm{b}_n$$

Ou seja,

$(\mathrm{p.q})_{\boldsymbol{m+n}}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{a}_{\boldsymbol{m}}\mathrm{b}_{\boldsymbol{n}}\mathrm{x}^{\boldsymbol{m+n}} + \cdots + (\mathrm{a}_2\mathrm{b}_0 + \mathrm{a}_1\mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_0\mathrm{b}_2)\mathrm{x}^2 + (\mathrm{a}_0\mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_1\mathrm{b}_0)\mathrm{x} + \mathrm{a}_0\mathrm{b}_0.$

Na multiplicação de polinômios, vale a seguinte propriedade do grau:

Proposição 2.2: Sejam $p_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, com a_m e b_n não nulos. Então

$$gr\ (p_m(x).q_n(x)) = m + n$$

Exemplo:

1) Dados $p(x) = x - 5\ e\ g(x) = 4x + 2$, temos que :

$$p(x) \cdot g(x) = (x - 5) \cdot (4x + 2)$$
$$p(x) \cdot g(x) = (1 \cdot 4)x^{1+1} + (1 \cdot 2)x^{1+0} + [(-5) \cdot 4]x^{0+1} + [(-5) \cdot 2]$$
$$p(x) \cdot g(x) = 4x^2 + 2x - 20x - 10$$
$$p(x) \cdot g(x) = 4x^2 - 18x - 10$$

Propriedades da Adição e Multiplicação de polinômios

Sejam $\mathrm{p}(x), q(x)\ e\ r(x)$ três polinômios na variável x, com $x \in \mathbb{R}$, temos:

(1) Os polinômios em relação à adição possuem as seguintes propriedades:

(A_1) Comutativa: $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$.

(A_2) Associativa: $p(x) + [q(x) + r(x)] = [p(x) + q(x)] + r(x)$

(A_3) Polinômio neutro: Existe um polinômio $p_0(x)$ denominado polinômio neutro ou nulo tal que, $p_0(x) + p(x) = p(x) + p_0(x) = p(x)$.

(A_4) Polinômio inverso: Todo polinômio é simetrizável em relação à adição, ou seja, $\forall\ p(x), \exists[-p(x)]: p(x) + [-p(x)] = [-p(x)] + p(x) = p_0(x)$

(2) Os polinômios em relação à multiplicação possuem as seguintes propriedades:

(M_1) Comutativa: $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$

(M_2) Associativa: $p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)] = [p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x)$

(M_3) Polinômio neutro: Existe um polinômio $p_n(x) = 1$, denominado polinômio neutro da multiplicação, tal que, $\forall\, p(x)$.

$$p(x) \cdot p_n(x) = p_n(x) \cdot p(x) = p(x)$$

(M_4) Distributividade: $p(x) \cdot [q(x) + r(x)] = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$

Definição 2.8: (Divisão de Polinômios) Considerando dois polinômios $p(x)\ e\ g(x)$, com $g(x) \neq 0$ dividir $p(x)\ por\ \ g(x)$ significa encontrar dois polinômios $q(x)\ e\ r(x)$, que satisfaçam as seguintes condições:

i. $p(x) = q(x).\, g(x) + r(x)$;
ii. o grau de $r(x)$ deve ser menor que o grau de $q(x)$.

Algoritmo de divisão: Método da chave

É um mecanismo prático que tem a função de obter o quociente o resto, respectivamente $q(x)\ e\ r(x)$, em diversas etapas, de uma forma semelhante a que se faz na divisão euclidiana de números reais.

$$\begin{array}{r|l} p(x) & \text{g}(x) \\ \hline \text{r}(x) & \text{q}(x) \end{array}$$

Assim dizemos que: $p(x)$ é o divisor; $g(x)$ é o dividendo; q(x) é o quociente e $r(x)$ é o resto.

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Exemplo 1:

Na divisão de $p(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ por $g(x) = x^2 - 2x$ temos os seguintes passos, através do método da chave:

1- Dividimos o primeiro fragmento do dividendo pelo primeiro fragmento do divisor, obtendo assim a primeira parcela do quociente.

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + 4x^2 - 3x + & \quad x^2 - 2x \\ \cline{2-2} -5x^3 + 10x^2 & 5x\ \uparrow primeiro \\ & fragmento\ do \\ \hline 14x^2 - 3x + 2 & \quad quociente \\ \uparrow primeiro\ resto & \end{array}$$

Como o grau do resto parcial não é menor que o grau do divisor, a divisão ainda não está concluída.

2- O resto agora é o dividendo, procede-se de maneira análoga para obter o segundo fragmento do quociente.

$$
\begin{array}{r|l}
14x^2 - 3x + 2 & \quad x^2 - 2x \\
\cline{2-2}
-14x^2 + 28x & \quad 14 \\
 & \\
 & \quad \mathit{segundo\ quociente\ parcial} \\
\cline{2-2}
\hline
25x + 2 & \\
\uparrow \mathit{resto\ parcial} &
\end{array}
$$

Como o grau do resto é menor que o grau do quociente, paramos aqui, temos então: Quociente: $5x + 14$ e resto: $25x + 2$.

Exemplo 2:

Na divisão de $p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ por $g(x) = x^2 + 2x - 3$, temos:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 & \quad x^2 + 2x - 3 \\
\cline{2-2}
-2x^3 - 4x^2 + 6x & \quad 2x + 3 \\
\hline
3x^2 + 10x - 4 & \\
-3x^2 - 6x + 9 & \\
\hline
4x + 5 &
\end{array}
$$

Como o grau do resto é menor que o grau do quociente, paramos aqui, temos quociente $2x + 3$ e resto $4x + 5$.

Caso $r(x) = 0$ a divisão de p(x) por $q(x)$ é dita exata e $p(x)$ é divisível por $g(x)$.

Dispositivo de Briot-Ruffini para a divisão por $(\boldsymbol{x - a})$

Este método se deve ao matemático francês Charles A. A. Briot (1817–1882) e ao matemático italiano Paolo Ruffini (1765–1822).

Tal dispositivo permite efetuar as divisões por polinômios do tipo $(x - a)$ de uma maneira mais simples e rápida é o chamado dispositivo de Briot-Rufini.

Termo constante do divisor, com sinal trocado.	Termo constante do dividendo	Termo constante do dividendo
	Coeficiente do quociente.	Resto.

Exemplo 1:

Vejamos o roteiro prático desse dispositivo efetuando a divisão dos polinômios $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $g(x) = x - 2$:

1º passo:

2	3	-5	1	2

2º passo:

Repetimos o primeiro coeficiente do dividendo.

2	3	-5	1	2
	3			

3º passo:

Multiplicamos o termo repetido pelo divisor e somamos o produto com o próximo termo do divisor.

2	3	-5	1	2
	3	$2 \times 3 + (-5)$ $= 1$		

4º passo:

2	3	-5	1	2
	3	1	3	

Repetimos o processo para obter o novo termo do quociente.

5º passo:

2	3	-5	1	2
	3	1	3	4

Pelo quadro, temos que $q(x) = 3x^2 + x + 3 \; e \; r(x) = 4$.

Exemplo 2: Dividir $p(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x + 5 \; por \; q(x) = x + 3$

-3	2	7	0	-4	5
	2	-6+7	-3+0	9+ (-4)	-15+5
	2	1	-3	5	-10

Quociente: $q(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5$ e resto: $r(x) = -10$. Logo, $2x^4 + 7x^3 - 4x + 5 = (x + 3) \cdot (2x^3 + x^2 - 3x + 5) - 10$.

Método de Descartes

O método de Descartes, também conhecido com o nome de método dos coeficientes a determinar, baseia-se em dois fatos:

i) $gr \; q(x) = gr \; p(x) - gr \; r(x)$

ii) $gr \; r(x) < gr \; g(x) \; ou \; (r = 0)$

O método de Descartes é aplicado da seguinte forma:

1) calculam-se os $gr \; q(x) \; e \; gr \; r(x)$;

2) constroem-se os polinômios $q(x) \; e \; r(x)$ deixando incógnitos seus coeficientes;

3) determina-se os coeficientes impondo a igualdade $q(x) \cdot g(x) + r(x) = p(x)$.

Exemplo 1:

Dividir $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ por $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$.

Temos que: $gr \; q(x) = 4 - 3 = 1 \Rightarrow q(x) = ax + b$.

$gr \; r(x) < 3 \Rightarrow \; gr \; r(x) = 2 \Rightarrow r(x) = cx^2 + dx + e$.

Temos então a igualdade:

$$q(x) \cdot g(x) + r(x) = p(x)$$

$$\Rightarrow (ax + b) \cdot (3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + (cx^2 + dx + e) \; = \; x^4 - 2x^3 + 7x + 2.$$

Desenvolvendo o produto e reduzindo os termos, temos:

$3ax^4 + (3b - 2a)x^3 + (4a - 2b + c)x^2 + (4b - a + d)x + (e - b) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$

Então resulta:

$$\begin{cases} 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \\ 3b - 2a = -2 \Rightarrow 3b - 2(1) = -2 \Rightarrow 3b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \Rightarrow 4(1) - 2(0) + c = 0 \Rightarrow c = -4 \\ 4b - a + d = 7 \Rightarrow 4(0) - 1 + d = 7 \Rightarrow d = 8 \\ e - b = 2 \Rightarrow e - 0 = 2 \Rightarrow e = 2 \end{cases}$$

Logo: $q(x) = x$ e $r(x) = -4x^2 + 8x + 2$.

Exemplo 2:

Dividir $p(x) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ por $g(x) = x - 2$.

Temos $\mathrm{gr}\ \mathrm{q(x)} = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \mathrm{q(x)} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$

$\mathrm{gr}\ \mathrm{r(x)} < 1 \Rightarrow gr\ r(\mathrm{x}) = 0 \rightarrow \mathrm{r(x)} = \mathrm{d}$

Temos a igualdade:

$q(x) \cdot g(x) + r(x) = p(x) \Rightarrow (\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}) \cdot (x - 2) + (d) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$.

Desenvolvendo o produto e reduzindo os termos semelhantes temos:

$ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x + (d - 2c) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$.

Então resulta:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b - 2a = 1 \Rightarrow b = 11 \\ c - 2b = -10 \Rightarrow c = 12 \\ d - 2c = 24 \Rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Logo $q(x) = 5x^2 + 11x + 12$ e $r(x) = 0$.

Teorema 2.1: (Teorema do resto) O resto da divisão de um polinômio $p_n(x)$ por $(x - a)$ é igual ao valor numérico de $p_n(a)$.

Prova: Seja $p_n(x)$ um polinômio, então existem $q(x)\ e\ r(x)$ únicos, tal que: $p_n(x) = q(x) \cdot (x - a) + r(x)$, com o grau de $r(x)$ menor ou igual ao grau de $q(x)$, desta forma, vemos que $p(a) = q(a) \cdot (a - a) + r(a) = r(a)$.

Teorema 2.2: (Teorema de D'Alembert) O resto da divisão de um polinômio $p_n(x)$ por $(x - \alpha)$ é $p_n(\alpha)$.

Prova: Considere que

$$\frac{p_n(x)}{(x-\alpha)} = q_n(x) + r_n(x).$$

Então,

$$p_n(x) = (x - \alpha).\, q_n(x) + r_n(x).$$

Fazendo $x = \alpha$, vem

$$p_n(\alpha) = (\alpha - \alpha).\, q_n(\alpha) + r_n(\alpha)$$

$$p_n(\alpha) = 0.\, q_n(\alpha) + r_n(\alpha)$$

Logo $p_n(\alpha) = r_n(\alpha)$.

Teorema 2.3: (Teorema do Fator) Seja α uma raiz de um polinômio $p_n(x)$, de grau $n > 0$, então $(x - \alpha)$ é um fator de $p_n(x)$.

Prova: Pelo Teorema de D'Alembert, a divisão de $p_n(x)$ por $(x - \alpha)$, resulta em um quociente $q_n(x)$ e um resto $r(\alpha)$ tal que $P_n(x) = (x - \alpha).\, q_n(x) + r(\alpha)$.

Se r é raiz do polinômio, então $P_n(r) = 0$ e temos $P_n(x) = (x - \alpha).\, q_n(x)$. Portanto, $x - \alpha$ é um fator de $P_n(x)$.

Teorema 2.4: (Teorema da Decomposição) Todo polinômio $p_n(x)$ de grau $n \geq 1$

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

pode ser fatorado como um produto de uma constante por um polinômio de primeiro grau

$$p_n(x) = a_n (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n).$$

Onde, $r_1, r_2, \ldots, r_n$, são as raízes de $p_n(x)$.

Prova

Seja $p_n(x)$ um polinômio de grau $n \geq 1$,

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Pelo teorema fundamental da Álgebra, $p_n(x)$, admite uma raiz r_1.

Logo, podemos escrever $p_n(x)$ como:

$$p_n(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x)$$

onde $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$.

Se $n - 1 \geq 1$, então, $q_1(x)$ admite uma raiz r_2 e podemos escrever :

$$p_n(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot q_2(x).$$

Repetindo este processo até que $q_n(x)$ seja constante, obtemos:

$$p_n(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) q_n(x)$$

Por definição de igualdade de polinômios, temos que o coeficiente a_n de $p_n(x)$ deve ser igual a $q_n(x)$. Logo:

$$p_n(x) = a_n(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n).$$

2.3 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Será apresentado agora as equações polinomiais

$$a_n x^n + a_{x-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são números reais e a variável x pode ser um número complexo qualquer.

2.3.1 Conceitos Básicos

Define-se como equação polinomial a toda equação que pode ser escrita sob a forma:

$$a_n x^n + a_{x-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0,$$

em que $a_i \in \mathbb{R}$ com $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$e n é o grau da equação.

Exemplos:

1) $3x + 5 = 0$ é uma equação algébrica de 1º grau.
2) $x^2 - 2x - 8 = 0$ é uma equação algébrica de 2º grau.
3) $-x^3 + 4x^2 - x + 5 = 0$ é uma equação algébrica de 3° grau.
4) $x^4 + x + 1 = 0$ é uma equação algébrica de 4º grau.
5) $x^6 - 2x^4 - x^3 + x^2 = 0$ é uma equação algébrica de 6º grau.

Definição 2.10 (Raiz de uma equação polinomial) Denomina-se raiz da equação polinomial, o valor α da variável x que satisfaz a igualdade:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Por exemplo, $x^2 + 3x + 2 = 0$ admite $x = -1$ como raiz, pois

$$(-1)^2 + 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

Teorema 2.1. Se um número complexo $z = a + bi$ com $a\ e\ b \in \mathbb{R}, b \neq 0,$ for raiz de uma equação polinomial $P_n(x) = 0,$ de coeficientes reais, o seu conjugado $\bar{z} = a - bi,$ também será raiz da mesma equação polinomial.

Prova: Seja $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_{0,}\ com\ a_i\ \in \mathbb{R},$

$$P(\bar{z}) = a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \cdots a_1(\bar{z})^1 + a_0$$

$$P(\bar{z}) = \overline{a_n(z^n)} + \overline{a_{n-1}(z^{n-1})} + \cdots + \overline{a_1(z^1)} + \overline{a_0}$$

$$P(\bar{z}) = \overline{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$$P(\bar{z}) = P(\bar{z}).$$

Em particular, como $0 = 0\ e\ \overline{\overline{P(z)}} = P(z),$ conclui-se que:

$$P(z) = 0\ \Leftrightarrow \overline{P(z)} = 0 \Leftrightarrow P(\bar{z}) = 0, \blacksquare$$

O teorema 2.5 nos permite afirmar que um polinômio de grau 3 possui pelo menos uma raiz real. Por exemplo $x^2 + 1 = 0$ admite como raiz $x = -i\ e\ x = +i$, pois $(-i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ e $(i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0.$

Teorema 2.2 (Teorema fundamental da álgebra) O teorema diz que: Toda equação polinomial $P_n(x)$ em $\mathbb{C}$ com grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

Um polinômio complexo $P_n(x)$ com coeficientes complexos pode ser escrito da seguinte forma:

$$P_n(x) = P(x + iy) = P_1(x,y) + iP_2(x,y),$$

Onde, os $P_i(x,y)$ são polinômios reais nas variáveis reais x, y. Segue que

$$|P_n(x)| = \sqrt{P_1(x,y)^2 + P_2(x,y)^2}$$

é uma função contínua nas variáveis $x\ e\ y.$ Considere o fato de que uma função continua num disco fechado D do plano possui um mínimo em D.

A prova será dada em duas partes:

1) Existe um ponto x_0 no plano complexo tal que $|P_n(x_0)| \leq |P_n(x)|, \forall\, x \in \mathbb{C}$.

2) Se x_0 é ponto de mínimo global determinado na primeira parte, então $P_n(x_0) = 0$.

Para provar a teorema faremos uso do lema:

”*Se $f(x) \in \mathbb{C}$, é um polinômio de grau maior ou igual a um, então dado $M > 0$ existe $R > 0$, tal que $|x| > R$, então $|f(x)| \geq M$.*”

Prova:

Seja $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, existe $R > 0$ tal que se $|x| > R$, então $|P_n(x)| > 1 + |a_0|$, para todo $x \in \mathbb{C}$. Seja

$$D = \{x \in \mathbb{C}; |a| \leq R\}.$$

Como D é fechado e limitado no plano, então existe $x_0 \in$ tal que

$$|P_n(x_0)| \leq |P_n(x)|, \forall x\ D.$$

Pela escolha de D, temos $|P_n(x_0)| \leq |P_n(x)|\ \forall x$. Pois se $x \notin D$, então $|x| > R$, e assim:

$|P_n(x)| > 1 + |a_0| > |P(0)|$. Como $0 \in D$, $|P(0)| \geq |P(x_0)|, \forall\, x \in D\ ou\ x \notin D$.

Agora provaremos que $P_n(x_0) = 0$. Fazendo uma mudança de variável $w = x - x_0$, então,

$$P_n(x) = P(w + x_0) = q_1(w)$$

é um polinômio em w e

$$|q_1(0)| = |P(x_0)| \leq |P(x)| = q_1(w), \forall\, w.$$

Assim q_1 tem mínimo global em $w = 0$.

Provaremos agora que $q_1(0) = 0$. Se este for o caso, não há o que fazer. Se $q_1(0) = a \neq 0$ chegaremos a uma contradição. Suponha que $a \neq 0$ e seja $q_2(w) = \frac{1}{a}q_1(w)$. Então, $|q_2(w)|$, tem um mínimo em $w = 0,$ se e somente se, $|q_1(w)|$ tem um mínimo em $w = 0$.

Agora $q_2(w)$ tem a forma:

$$q_2(w) = 1 + bw^m + b_1w^{m+1} + \cdots + b_kw^{m+k},$$

onde $n = m + k$.

Seja r a n-ésima raiz de $-\frac{1}{b}$, então, ${b_k}^m = -1$. Seja $w = ru\ e\ q(u) = q_2(ru) = q_2(w)$, então, $|q(u)|$, tem um mínimo em $u = 0$, se e somente se, $|q_2(w)|$ tem um mínimo e, $w = 0$.

Agora, $q(u)$ tem a forma.

$$q(u) = 1 + b_1(ru)^m + \cdots + b_k(ru)^{m+k}$$
$$q(u) = 1 - u^m + u^{m+1} + Q(u)$$

Onde

$$Q(u) = c_1 + c_2u + c_3u + \cdots + c_ku^{k-1}$$

é um polinômio em u com $c_j = b_j(r)^{m+j}$, $1 \leq j \leq k$. Note que $q(0) = 1$, assim 1 é um valor mínimo de $|q(u)|$.

Seja $t > 0,$ fazendo $u = t$, temos

$$|Q(u)| = |c_1 + c_2t + \cdots + c_kt^{k-1}| \leq |c_1| + |c_2t + \cdots + c_kt^{k-1}|.$$

Seja

$$Q_0(t) = |c_1| + |c_2t + \cdots + c_kt^{k-1}|.$$

Quando $t \to 0$, temos que $tQ_0\,(t) \to 0$. Escolha $0 < t < 1$ tal que $tQ_0(t) < 1$. Vamos mostrar que para cada escolha de t, fazendo $t = u$ $dá$ $|q(t)| < 1 = |q(0)|$. Contradizendo a hipótese de que $|q(u)|$, tem seu mínimo em $u = 0$. De fato,

$$|q(t)| = |1 - t^m + t^{m+1}Q(t)|$$
$$|q(t)| = |1 - t^m| + |t^{m+1}Q(t)|$$
$$|q(t)| = (1 - t^m) + t^mt|Q(t)|$$
$$|q(t)| = (1 - t^m) + t^m\big(tQ_0(t)\big)$$

Como t é escolhido de modo que $tQ_0(t) < 1$, este ultimo é menor do que

$$(1 - t^m) + t^m = 1 = |q(0)|.$$

Como $t \neq 0, |q(u)|$ tem seu mínimo em $u = 0$. Contradição. Logo, $a = 0$, o que implica que $q_1(0) = 0$ e, portanto, $P(x_0) = 0$.

2.3.2 Relação entre Coeficientes e Raízes

No século XVII Albert Girard (1590-1633) apresentou uma importante relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial, mais conhecida no mundo acadêmico como Relação de Girard.

Vejamos como obtê-las.

1. Equação do 2º grau

Considere o polinômio de grau 2 na sua forma canônica

$P_2(x) = ax^2 + bx + c, com\ a, b\ e\ c \in \mathbb{C}\ , e\ a \neq 0$, cujas raízes $x_1\ e\ x_2 \in\ \mathbb{R}$.

Sabemos que, $P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1).(x - x_2)$.

Dividindo a igualdade por a:

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{a}{a}(x - x_1)(x - x_2)$$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$.

Aplicando a distributiva e reagrupando o segundo membro, obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

Da igualdade de polinômios vem:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Equação do 3º grau

Considere um polinômio de grau 3, $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, com\ a, b, c, d \in \mathbb{R}, com\ a \neq 0$, cujas raízes são $x_1, x_2, e\ x_3 \in\ \mathbb{C}$.

$$P_n(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1).$$

Dividindo a igualdade por a;

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_3)(x - x_2)(x - x_1).$$

Aplicando a distributiva e agrupando obtemos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

Da identidade de polinômio temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

3. Equação do 4º grau

Consideremos um polinômio completo de 4º grau, $P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, com\ a, b, c, d, e\ \in \mathbb{R}\ com\ a \neq 0, cujas\ raizes\ x_1, x_2, x_3\ e\ x_4\ \in \mathbb{C}$.

Sabemos que:

$$P_4\,(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Procedendo de forma análoga aos anteriores, temos:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

e

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 \frac{d}{a}x \frac{e}{a}x^4\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2 - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4.$$

Da identidade de polinômios vem:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{e}{a}.$$

4. Equação de grau n

Para as equações de grau superior a 4, o processo é análogo aos anteriores. Seja $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0$, de grau n com $a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0\ e\ n \in \mathbb{N}$ e sua raízes $x_i \in \mathbb{C}$.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2x_3 \cdots x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}.$$

Exemplos:

1. Resolva a equação $2x^3 - 20x^2 + 62x - 60 = 0$, sabendo que a soma de duas raízes é 5.

Solução:

Sejam $x_1, x_2\ e\ x_3$ as raízes, considere que: $x_1 + x_2 = 5$. Existe uma relação de Girard que diz que: $x_1 + x_2\ +\ x_3 = -\frac{b}{a} = 10$. Como $x_1 + x_2 = 5,$ temos agora: $5 + x_3 = 10$, logo $x_3 = 5$. Outra relação, diz que: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} = 30$. Assim, $x_1 \cdot x_2 \cdot 5 = 30$ e $x_1 \cdot x_2 = 6$. Como o produto de duas raiz é 6 e a soma das mesmas raízes é 5, conclui-se que as raízes são respectivamente iguais a: $x_1 = 2\ e\ x_2 = 3$. Portanto, 2, 3 e 5 são as raízes da equação.

2. De acordo com a equação $12x^3 + 6x^2 - 3x - 9 = 0$, determine as relações de Girard envolvendo as raízes $x_1, x_2\ e\ x_3$.

Solução: Os coeficientes da equação são: $\mathrm{a} = 12, \mathrm{b} = 6, \mathrm{c} = -3 \text{ e } \mathrm{d} = -9$. As relações de Girard são:

$i) x_1 + x_2\ +\ x_3 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

$ii)\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{c}{a} = \dfrac{(-3)}{12} = -\dfrac{1}{4}$

$iii)\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{(-9)}{12} = \frac{3}{4}$.

3 Métodos de Resolução das Equações Polinomiais

Neste capítulo serão apresentados alguns métodos algébricos para o cálculo das soluções das equações polinomiais.

3.1 EQUAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO GRAUS

Definição 3.1 (Equações de 1ª grau) As equações da forma $ax + b = 0,$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, são ditas equações polinomiais do 1ª grau. O valor de x é determinado em função dos coeficientes $a\ e\ b$.

Dedução da formula resolutiva da equação: para resolver essa equação, soma-se o oposto de *b* na igualdade e tem-se:

$$ax + b - b = 0 - b$$

$$ax = -b$$

Divide-se a igualdade por a.

$$\frac{ax}{a} = -\frac{b}{a}$$

Logo

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Exemplos:

1) Dada a equação $2x - 6 = 0$, tem-se $a = 2\ e\ b = -6$, logo $x = -\frac{(-6)}{2} = 3$ é solução da equação.

2) Na equação $-x + 3 = 0$, tem-se $a = -1\ e\ b = 3$, logo a solução é $x = -\frac{3}{(-1)} = 3$.

Definição 3.2 (Equações de 2º grau) As equações da forma $ax^2 + bx + c = 0,$ com $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, são ditas equações polinomiais do 2º grau. O valor de x é determinado em função dos coeficientes $a, b\ e\ c$.

Dedução da fórmula resolutiva das equações de segundo grau: considere a equação polinomial de 2º grau $p_2 = ax^2 + bx + c = 0$.

Como o interesse é no estudo das raízes, temos como objetivo encontrar as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, o que será feito como Bhaskara fez:

Divida a igualdade por a.

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Fazendo $B = \frac{b}{a}$ e $C = \frac{c}{a}$ a equação passa a ser:

$$x^2 + Bx + C = 0$$

Considere agora que $x = y - \frac{B}{2}$.

$$\left(y - \frac{B}{2}\right)^2 + B\left(y - \frac{B}{2}\right) + C = 0$$

$$y^2 - By + \frac{B^2}{4} + By - \frac{B^2}{2} + C = 0$$

$$y^2 - \frac{B^2}{4} + C = 0$$

$$y^2 = \frac{B^2}{4} - C$$

$$y^2 = \frac{B^2 - 4C}{4}$$

$$y = \sqrt{\frac{-4C + B^2}{4}}$$

Sendo $B = \frac{b}{a}$ e $C = \frac{c}{a}$.

$$y = \pm\frac{\sqrt{-4ac + b^2}}{2a}$$

Como $x = y - \frac{B}{2}$ e $B = \frac{b}{a}$, logo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A expressão $b^2 - 4ac$ é denominado Discriminante, este termo determina a quantidade e o tipo de solução da equação.

- Se $b^2 - 4ac$ > 0, a equação tem-se duas raízes reais e diferentes.
- Se $b^2 - 4ac$ < 0 , a equação tem duas raízes complexas.
- Se $b^2 - 4ac$ = 0 , a equação possui uma raiz de multiplicidade 2.

Exemplo 1:

Resolva a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$, onde $a = 1, b = 2\ e\ c = -3$.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

Raízes da equação: $-3 \; e \; 1$

Exemplo 2:

Resolva a equação $2x^2 + 5x - 8 = 0$, onde $a = 2, b = 5 \; e \; c = -8$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{24 + 64}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{88}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 2\sqrt{22}}{4}$$

Logo as raízes são

$$x_1 = \frac{-5+2\sqrt{22}}{4} \; e \; x_2 = \frac{-5-2\sqrt{22}}{4}.$$

3.2 EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

Definição 3.3 (Equações de 3º grau) As equações da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a, b, c \; e \; d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ são ditas equações polinomiais do 3º grau. O valor de x é determinado em função dos coeficientes $a, b, c \; e \; d$.

Dedução da fórmula resolutiva das equações do terceiro grau: segundo Lima (2014) é possível deduzir a fórmula de resolução das equações de 3º grau, para tal fato considere a equação:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Com $a_i \in \mathbb{R}$ e $a_3 \neq 0$, uma equação completa de grau 3.

Dividindo a igualdade por a_3 , obtemos a equação:

$$x^3 + \frac{a_2x^2}{a_3} + \frac{a_1x^1}{a_3} + \frac{a_0}{a_3} = 0$$

Fazendo a = $\frac{a_2}{a_3}$, b = $\frac{a_1}{a_3}$ e c = $\frac{a_0}{a_3}$, obtemos a equação equivalente:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Substituindo $x = y - m$, na equação acima, obtemos.

$$(y - m)^3 + a(y - m)^2 + b(y - m) = 0.$$

Desenvolvendo as potencias e reagrupando, obtemos a equação:

$$y^3 + (3m + a)y^2 + (3m^2 + 2am + b)y + m^3 + am^2 + bm + c = 0.$$

Supondo que $3m + a = 0$, então $m = \frac{-a}{3}$, com isso

$$y^3 + \left(3\left(-\frac{a}{3}\right) + a\right)y^2 + \left(3\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + 2a\left(-\frac{a}{3}\right) + b\right)y + \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c = 0$$

Desenvolvendo as potências, somas, subtrações e reagrupando obtemos a equação equivalente:

$$y^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)y - \left(-\frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{9} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

Temos agora uma equação cúbica desprovida do termo y^2.

Sendo agora $p = -\frac{a^2}{3} + b$ e $q = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^2}{9} - \frac{ab}{3}$+c, a equação passa a ser:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Desta forma, para resolver a equação do 3º grau completa, devemos resolver a

$$y^3 + py + q = 0.$$

Vamos considerar que $y = u + v$, tem se que:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0.$$

Tem se agora u e v como variáveis. Desenvolvendo as potências, somas e reagrupando chega-se a expressão equivalente:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Suponha que u e v satisfaçam o sistema:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u.v = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Vamos elevar ambos os membros da segunda equação do sistema ao cubo, obtendo assim: $u^3.v^3 = -\frac{p^3}{27}$. De $u^3.v^3 = -q$, tem-se $v^3 = -(q + u^3)$ com isso $u^3.v^3 = -u^3(\mathrm{q} + u^3) = -\frac{p^3}{27}$, segue que,

$$\mathrm{q}\, u^3 + (u^3)^2 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Pela técnica de completar quadrados temos:

$$\left(u^3 + \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = \left(u^3 + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = 0.$$

Por outro lado, $v^3 = -(q + u^3)$. Implicando $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Logo $y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ é uma solução da equação $y^3 + py + q = 0$.

Assim, $x = y - \frac{a}{3}$ é a solução da equação cúbica dada. Considere que w = $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$.

- Se w > 0, então a equação do 3º grau tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas;
- Se w < 0, então a equação do 3º grau tem três raízes reais e distintas;
- Se w = 0, então a equação do 3º grau tem três raízes reais, sendo uma repetida.

Exemplo: Seja o polinômio de grau 3 $P_3(x) = 12x^3 + 108x^2 + 180x - 888$. Sua solução é a mesma da equação: $12x^3 + 108x^2 + 180x - 888 = 0$. Dividindo a igualdade por 12 temos: $x^3 + 9x^2 + 15x - 74 = 0$. Fazendo uma mudança de variável tal que x= y – m, onde m = $-\frac{a}{3} = 3$.

$(y-3)^3 + 9(y-3)^2 + 15(y-3) - 74 = 0$, desenvolvendo as potencias e calculando somas e as subtrações, chega-se na equação desprovida do termo y^2.

$$y^3 - 12y - 65 = 0.$$

Aplicando a fórmula na equação acima, com $p = -12$ e $q = -65$ obtém-se:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{(-65)}{2} + \sqrt{\frac{(-65)^2}{4} + \frac{(-12)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-65)}{2} - \sqrt{\frac{(-65)^2}{4} + \frac{(-12)^3}{27}}}$$

Resolvendo a expressão numérica acima encontramos:

$y = 5$, que é um raiz da equação $y^3 - 12y - 65 = 0$, como $x = y - 3$, segue que $x = 2$. Para determinar as demais raízes da equação, observe que:

$$x^3 + 9x^2 + 15x - 74 = (x-2)(x^2 + 11x + 37) = 0,$$

segue que $x - 2 = 0$ ou $x^2 + 11x + 37 = 0$. Na primeira igualdade temos uma equação de 1º grau de onde segue que $x = 2$ e, na segunda temos uma equação de 2º grau que pelo método de Bhaskara ou pelo método de completar quadrado chega-se na solução complexa $x = \frac{-11 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$.

Logo o conjunto solução para o polinômio $P_3\,(x) = 12x^3 + 108x^2 + 180x - 888$ é $S = \left\{2, \frac{-11-3\sqrt{3}I}{2}, \frac{-11+3\sqrt{3}I}{2}\right\}$.

3.3 Equação do Quarto Grau

Definição 3.4 (Equação polinomial de 4º grau) As equações da forma $ax^4 + b^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com $a, b, c, d, e \,\epsilon\, \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, são ditas equações polinomiais do 4ª grau. O valor de x é determinado em função dos coeficientes a, b, c, d, e.

Considere a equação de 4º grau na forma canônica na variável y:

$$ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0,$$

com $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Fazendo uma mudança de variável: $y = x + t$, obtemos,

$$a(x+t)^4 + b(x+t)^3 + c(x+t)^2 + d(x+t) + e = 0.$$

Desenvolvendo as potências, somas e reagrupando, obtém-se:

$$ax^4 + (4at + b)x^3 + (6at^2 + 3bt + c)x^2 + (4at^3 + 3bt^2 + 2ct + d)x$$
$$+(at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e) = 0.$$

Dividindo os termos da equação por a, obtemos:

$$x^4 + \left(4t + \frac{b}{a}\right)x^3 + \left(6b^2 + \frac{3bt}{a} + \frac{c}{a}\right)x^2 + \left(4t^3 + \frac{3bt^2}{a} + \frac{2ct}{a} + \frac{d}{a} + \right)x +$$

$$+\left(t^4+\frac{bt^3}{a}+\frac{ct^2}{a}+\frac{dt}{a}+\frac{e}{a}\right)=0.$$

Fazendo $4t+\frac{b}{a}=0$, $t=-\frac{b}{4a}$, substituindo em t na equação anterior, tem-se agora uma equação de quarto grau desprovida do termo x^3.

$$x^4+Ax^2+Bx+C=0.$$

Sendo $A=\frac{c}{a}-\frac{3b^2}{8a^3}$, $B=\frac{d}{a}-\frac{bc}{2a^2}+\frac{b^3}{8a^3}$, $C=\frac{e}{a}-\frac{3b^4}{256a^4}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{bd}{4a^2}$.

Somar e subtrair na equação de quarto grau o termo $2wx^2+w^2$

$$x^4+Ax^2+Bx+C+2wx^2+w^2-2wx^2-w^2=0.$$

Reordenando, temos:

$$(x^4+2wx^2+w^2)+\left((A-2w)x^2+Bx+C-w^2\right)=0.$$

Observe que: $x^4+2wx^2+w^2=(x^2+w)^2$.

$$(x^2+w)^2-\left((2w-A)x^2-Bx-C+w^2\right)=0.$$

A equação $(2w-A)x^2-Bx-C+w^2=0$ é de segundo grau, escrevendo ela agora como um produto de fatores lineares:

$(2w-A)x^2-Bx-C+w^2=(2w-A)(x-x_1)(x-x_2)$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação de segundo grau. $(2w-A)x^2-Bx-C+w^2=0$.

Temos, $x=\frac{B\mp\sqrt{B^2-4(2w-A)(w^2-C)}}{2(2w-A)}$, de onde vem que,

$$x_1=\frac{B+\sqrt{B^2-4(2w-A)(w^2-C)}}{2(2w-A)}\ e\ x_2=\frac{B-\sqrt{B^2-4(2w-A)(w^2-C)}}{2(2w-A)}$$

Se $B^2-4(2w-A)(w^2-C)=0$, segue que, $x_1=x_2=\frac{B}{2(2w-A)}\cdots$.

Se isso ocorre o termo $(2w-A)x^2-Bx-C+w^2$, se transforma em um trinômio quadrado perfeito.

Para que isso ocorra, devemos ter:

$$B^2-4(2w-A)(w^2-C)=0$$

Ou seja

$$8w^3-4Aw^2-8Cw+(4AC-B^2)=0,$$

Que é uma equação cúbica em w, cuja solução já foi demonstrada.

Sendo $x_1=x_2=\frac{B}{2(2w-A)}$ tem-se que

$$(2w-A)x^2-Bx-C+w^2=(2w-A)\left(x-\frac{B}{2(2w-A)}\right)^2.$$

Daí a equação: $(x^2+w)^2-\left((2w-A)x^2-Bx-C+w^2\right)=0$ passa a ser:

$$(x^2+w)^2-(2w-A)\left(x-\frac{B}{2(2w-A)}\right)^2=0.$$

Que é equivalente á: $(x^2+w)^2-\sqrt{\left((2w-A)\right)^2}\left(x-\frac{B}{2(2w-A)}\right)^2=0.$

Podemos ainda escrever:

$$(x^2+w)^2-\left(x\sqrt{2w-A}\ -\frac{B\sqrt{2w-A}}{2\sqrt{(2w-A)}}\right)=0 \text{ ou}$$

$$(x^2+w)^2-\left(x\sqrt{2w-A}\ -\frac{B}{2\sqrt{2w-A}}\right)^2=0.$$

Portanto, a equação pode ser escrita na forma:

$$\left(x^2+w+x\sqrt{2w-A}\ -\frac{B}{2\sqrt{2w-A}}\right).\left(x^2+w-x\sqrt{2w-A}\ +\frac{B}{2\sqrt{2w-A}}\right)=0.$$

Portanto,

$$x^2+w+x\sqrt{2w-A}\ -\frac{B}{2\sqrt{2w-A}}=0, ou\ \ x^2+w-x\sqrt{2w-A}\ +\frac{B}{2\sqrt{2w-A}}=0.$$

As raízes da primeira equação satisfazem a equação de 2º grau em U:

$$U^2+U\sqrt{2w-A}+\left(w-\frac{B}{2\sqrt{2w-A}}\right)=0.$$

E a segunda equação satisfaz a equação em V;

$$V^2+V\sqrt{2w-A}+\left(w-\frac{B}{2\sqrt{2w-A}}\right)=0.$$

Assim, a solução da equação reduzida de 4º grau são as soluções das equações nas variáveis U e V, e para resolver as equação na forma canônica, precisamos resolver as duas de 2º grau, onde w é uma solução da cúbica;

$$8w^3-4Aw^2-8Cw+(4AC-B^2)=0.$$

As soluções da quártica reduzida são:

$$x_1=U_1=-\frac{1}{2}.\sqrt{2w-A}+\frac{1}{2}.\sqrt{-A-2w+\frac{2B}{\sqrt{2w-A}}},$$

$$x_2=U_2=-\frac{1}{2}.\sqrt{2w-A}-\frac{1}{2}.\sqrt{-A-2w+\frac{2B}{\sqrt{2w-A}}}.,$$

$$x_3=V_1=\frac{1}{2}.\sqrt{2w-A}+\frac{1}{2}.\sqrt{-A-2w-\frac{2B}{\sqrt{2w-A}}}\ \text{ e}$$

$$x_4 = V_2 = -\frac{1}{2}.\sqrt{2w - A} - \frac{1}{2}.\sqrt{-A - 2w - \frac{2B}{\sqrt{2w-A}}}.$$

As soluções da equação de 4º grau na forma canônica:

$$ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$$

São dadas por:

$$y_i = x_i - \frac{b}{4a}, \text{com } i \in \{1; 2; 3; 4\} \blacksquare$$

Exemplo: Seja a equação $3x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 6x - 3 = 0$, com $a = 3, b = 6, c = 9\,, d = -6, e = -3$.

Calculando os coeficientes da equação reduzida:

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$x = y - \frac{b}{4a} = y - \frac{1}{2}$$

Obtida pela substituição

$$A = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^3}, B = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}\ , C = \frac{e}{a} - \frac{3b^4}{256a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2}$$

$A = \frac{3}{2}$, $B = -4$ e $C = \frac{9}{16}$.

A equação cúbica auxiliar é:

$$8s^3 - 4As^2 - 8Cs + (4AC - B^2) = 0$$

$$8s^3 - 6s^2 - \frac{9}{2}s - \frac{101}{8} = 0$$

Sendo os coeficientes da equação cúbica: $a = 8, b = -6, c = -\frac{9}{2}, d = -\frac{101}{8}$.

Pondo

$$s = t - \frac{b}{3a} = t + \frac{1}{4}$$

Transformando-se em

$$t^3 - \frac{3}{4}t - \frac{7}{4} = 0$$

Visto que

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = -\frac{3}{4}$$

e

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = -\frac{7}{4}$$

Uma solução da equação cúbica é

$$s_1 = \left(-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{24}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{b}{3a}.$$

As soluções da equação de 4º grau são então:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s_1 - A} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s_1 - A + \frac{2B}{\sqrt{2s_1 - A}}} - \frac{b}{4a}$$

$$x_1 \cong -1{,}2 + 1{,}6i$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s_1 - A} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s_1 - A + \frac{2B}{\sqrt{2s_1 - A}}} - \frac{b}{4a}$$

$$x_2 \cong -1{,}2 - 1{,}6i$$

$$x_3 = +\frac{1}{2}\sqrt{2s_1 - A} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s_1 - A - \frac{2B}{\sqrt{2s_1 - A}}} - \frac{b}{4a}$$

$$x_3 \cong 0{,}7$$

$$x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s_1 - A} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s_1 - A + \frac{2B}{\sqrt{2s_1 - A}}} - \frac{b}{4a}$$

$$x_4 \cong -0{,}4.$$

4 Sequência Didática Para a Resolução de Equações Polinomiais

4.1 A SEQUÊNCIA

Nesta seção apresentamos a descrição de uma sequência didática que se destina ao ensino da resolução de equações polinomiais e algumas questões acerca do tema que pode ser desenvolvida no ensino médio.

O estudo a ser desenvolvido em sala de aula, sob a mediação do docente, na disciplina específica Matemática na Educação Básica, poderá contribuir na melhoria do ensino aprendizagem do tema em questão.

Assim, discorrerá como proposta e indicações estratégicas em duas modalidades a seguir:

I. Elaborar propostas de atividades educacionais o que ensinar;

II. Aplicar as atividades em sala de aula, observação e avaliação dos resultados.

Dessa forma, proponho trabalhar com a resolução de equações polinomiais no ensino médio.

Objetivos

Apresentar uma proposta didática para o ensino de resolução de equações polinomiais até quarto grau e suas aplicações, com enfoque para a fórmula de Cardano-Tartaglia, a fim de contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem do tema em questão.

Público alvo

Alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Pré-requisitos

A proposta do trabalho partirá do pressuposto de que os alunos do 3º ano do Ensino Médio já construíram conceitos básicos que envolvem o conteúdo de equação, em especial, sobre operações e propriedades, relação de dependência entre duas grandezas. Além disso, eles devem saber resolver problemas utilizando as operações básicas e conseguir identificar um polinômio determinando seu grau, calculando um valor numérico e efetuando operações com polinômios e as propriedades dos números reais.

Materiais

Os materiais necessários para o desenvolvimento e execução das aulas são: cópias das atividades para cada aluno; papel para rascunho para resolução dos exercícios; lápis; borracha; giz e quadro negro.

Recomendações metodológicas

As atividades devem ser trabalhadas individualmente, mas com as discussões em grupos de até três estudantes. O professor assumirá o papel de mediador das atividades, fazendo intervenções em conversas e questionamentos, levantamento dos conhecimentos prévios dos discentes, com o intuito de identificar dificuldades e criar condições para a construção do conhecimento do conteúdo novo abordado.

Dificuldades previstas

Como a proposta desta sequência didática é trabalhar com alunos do 3º ano do ensino médio, é provável que a maioria desses alunos não se recorde de alguns conteúdos citados nos pré-requisitos, então caberá ao professor fazer uma breve revisão, para que a dificuldades seja superadas ou sanadas.

Descrição geral

A sequência didática foi planejada e dividida em quatro etapas: análise diagnóstica; retomada de conceitos; desenvolvimento do conceito novo e avaliação final acumulativa (consiste em exame de desempenho discente cujos propósitos são verificar competências, habilidades e conhecimentos adquiridos no decorrer do tempo em que e o tema foi desenvolvido).

Todas as atividades poderão ser aplicadas em 15 aulas de 50 minutos cada. A turma poderá ser dividida em pequenas equipes, sendo livre a formação dos grupos. No entanto, cada aluno deverá registrar suas anotações e atividades.

Da Análise Diagnóstica

No primeiro momento, sugerimos que o professor trabalhe com os alunos, algumas questões auxiliadas por conversas, questionamentos e exercícios sobre alguns conhecimentos adquiridos em séries anteriores e que, consequentemente, serão necessários para obtenção de um novo conceito, como por exemplo: expressões numéricas, tradução de problemas em linguagem corrente para a linguagem matemática, operações com números reais.

Assim, indico como primeira atividade que o professor faça uma aplicação de uma lista de exercícios que busque obter respostas sobre os seguintes pontos:

1. Verificar se os alunos conseguem traduzir problemas em linguagem corrente para a linguagem matemática.

2. O que os alunos já sabem sobre equações polinomiais de 1º e 2º graus (valor numérico e calculo de raízes).

É bom lembrar que o ponto de partida para que o estudo de equações polinomiais seja concretizado é o cálculo de suas raízes. Então, a sugestão é iniciar com situações de problemas simples, conforme atividades a seguir, a serem desenvolvidas em quatro aulas.

Cabe ao professor entregar a cada aluno as questões seguintes, para serem respondidas individualmente.

Ao final do tempo destinado para a resolução, procederá a correção de modo que todos ou a grande maioria dos alunos diga os caminhos que o levou a chegar e a tal resposta.

4.2 ATIVIDADE I

1. Para cada problema abaixo, transcreva para a linguagem matemática e resolva a equação:

a) Qual é o número que adicionado a 3 é igual a sua metade mais 7?

b) O triplo de um número menos 4 é igual a sua metade mais 19. Qual é esse número?

c) Três números consecutivos somam 36. Determine o menor deles.

d) Três números pares consecutivos somam 60. Determine o maior deles.

e) Três números ímpares e consecutivos somam 309. Determine o maior deles.

f) A soma de um número com sua terça parte é igual à metade desse número acrescida de 6. Qual é esse número?

2. Sabe-se que o preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, que é denominada bandeirada, e uma parcela variável, que é função da distância percorrida. Se o preço da bandeirada é R$ 5,00 e o quilômetro rodado é R$ 1,20. Sabendo que distância da casa de Pedro até o shopping é de 12 km, quanto ele vai gastar? Se um passageiro pagou R$ 31,40, de quantos quilômetros foi a corrida?

3. Para transformar graus Fahrenheit em graus Celsius usa-se a fórmula $C = \frac{5F}{9} - \frac{32}{9}$ em que F é o número de graus Fahrenheit e C é o número de graus Celsius.

a) Transforme 40 graus Celsius em graus Fahrenheit.

b) Qual a temperatura (em graus Celsius) em que o número de graus Fahrenheit é o dobro do número de graus Celsius?

4. Um vendedor recebe de salário mensal um valor fixo de R$ 1700,00 mais um adicional de 2% das vendas efetuadas por ele durante o mês. Com base nisso:

a) Escreva uma equação que represente o salário mensal desse vendedor em função do valor x de suas vendas mensais.

b) determine o total de suas vendas desse vendedor em um mês em que seu salário foi de R$ 4.320,00.

5. Já foi explicado e aplicado a formula de resolução de equações de 2º grau, a tal formula de Bhaskara. Siga os comandos para resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0\ com\ a \neq 0$.

a) Divida as parcelas da equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a**:**

b) Substitua os temos $\frac{b}{a}\ e\ \frac{c}{a}$por B e C respectivamente:

c) Substitua x por $y - \frac{B}{2}$ e determine os possíveis valores de y (o denominador 2 representa o grau da equação):

d) Substitua agora os valores de y, B e C em $x = y - \frac{B}{2}$, obtendo assim a solução da equação. (Se parece com algo que já foi estudado?).

6. Resolva as equações abaixo, seguindo os passos descritos nos exercício anterior.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $2x^2 - 8x - 4 = 0$

c) $-4x^2 + 4x + 5 = 0$

d) $-x^2 + 6x - 16 = 0$

e) $5x^2 + 30x - 40 = 0$

7. Em anos anteriores foi explicado e trabalhado que se a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possuir duas raízes diferentes, então ela pode ser escrita sob a forma $x^2 - Sx + P = 0$, onde S é a soma das raízes ($S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$) e P o produto das raízes ($P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$).

Verifique que as raízes $x_1\ ex_2$ podem ser obtidas pela expressão: $x = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$.

8. Mostre que não existem dois números reais que:

a) o produto seja 10 e sua soma 5.

b) cuja soma seja 6 e o produto 12.

5. Determine dois números tais que:

a) o produto seja 8 e a soma 6.

b) a soma e o produto sejam respectivamente 10 e 21.

9. A soma de um número com o seu quadrado é 90. Calcule esse numero.

10. A soma do quadrado de um número com o próprio número é 12. Calcule esse numero

11. O quadrado menos o dobro de um número é igual a -1. Calcule esse número.

12. A diferença entre o quadrado e o dobro de um mesmo número é 80. Calcule esse número.

13. Calcule a valor numérico de:

a) $x^2 + 2x + 3\ para\ x = 2$

b) $2x^2 - 5x - 3\ para\ x = -1$

c) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}x + 3\ para\ x = 1$

Da Retomada de Conceitos

Ao analisar os resultados obtidos na atividade I, o professor saberá como está o nível de conhecimento da turma e poderá usar duas aulas para fazer uma revisão dos conceitos.

A revisão de conceitos é importante para uma aprendizagem significativa, pois: os temas da nova situação de aprendizagem devem ser bem organizados; as novas ideias e conceitos devem ser significativos para o aluno e, ao fixar novos conceitos nas já existentes estruturas cognitivas do aluno fará com que os antigos conceitos sejam relembrados, transformando o conhecimento sistematizado, constituindo ligações deste novo conhecimento com os conceitos relevantes que ele já possui.

Do Desenvolvimento do Conceito Novo

Dando procedimento, sugerimos o bloco de atividades II e também umas questões envolvendo situações-problemas. No entanto, cabe ao professor verificar se serão necessárias outras atividades de nível fácil ou mais complexo.

Essas adaptações deverão ser feitas de acordo com a realidade da turma a fim de que beneficie uma melhor compreensão dos problemas. A próxima sequencia de exercícios inicia-se com dedução da fórmula de Cardano-Tartaglia que é o modo como se resolve as equações de 3º e 4º graus. Seria interessante que o professor contasse a história da descoberta da tal fórmula.

As questões a seguir são uma adaptação do caderno de matemática do professor do 3º ano do ensino médio do estado de São Paulo.

4.3 ATIVIDADE II

1. No século XVI, dois grandes matemáticos Cardano-Tartaglia, elaboraram uma sequência de passos para se resolver uma equação de 3º grau incompleta, resultante da eliminação do termo de grau 2, que são as equações do tipo:

$$y^3 + My + N = 0.$$

Siga os comandos, pois agora é com você caro aluno:

a) Desenvolva o binômio: $(p + q)^3 = 0$.

b) Reescreva a igualdade de modo que se torne igual a:

$$(p+q)^3 - p^3 - 3p^2q - 3pq - q^3 = 0.$$

c) Evidencie $-3pq$

d) Faça uma comparação agora com as equações: $y^3 + My + N = 0$ e

$$(p+q)^3 - p^3 - 3p^2q - 3pq - q^3 = 0$$

(Espera-se que o aluno conclua que $M = -3pq$ e $N = -(p^3 + q^3)$, então $y = p + q$).

e) Tentem encontrar dois números p e q tais que $p^3 \cdot q^3 = \left(-\frac{M}{27}\right)$ e $p^3 + q^3 = -N$. Tais números $p^3\ e\ q^3$ têm soma e produto conhecido, devem ser as raízes da equação de 2º grau $z^2 + Nz - \frac{M^3}{27} = 0$.

f) Logo, os valores de p e q, são respectivamente iguais a:

g) Substitua p e q em $y = p + q$, que é a solução da equação: $y^3 + My + N = 0$.

2. Mediante a fórmula de Cardano-Tartaglia, ache as raízes da equação: $x^3 + 63x - 316 = 0$.

3. Dada a equação cúbica na forma irredutível $x^3 - 63x - 162 = 0$, use como ferramenta a fórmula de Cardano-Tartaglia.

4. Encontre as raízes de cada equação abaixo, usando o passo a passo que foi aplicado no exercício 1.

a) $y^3 - 3y - 2 = 0$

b) $2y^3 - 2y - 12 = 0$

c) $y^3 - 5y - 1 = 0$

d) $3x^3 + 6x - 3 = 0$

e) $-5x^3 - 10x = 5$

5. Um carpinteiro vai construir duas piscinas uma com forma de um cubo de aresta x, e outra na forma de um paralelepípedo reto retângulo, de lados 3 e 5 metros respectivamente, e de altura igual ao do cubo. A altura do cubo deve ser de tal forma que o volume seja $4m^3$ maior que a do paralelepípedo.

Escreva a equação correspondente e calcule a solução usando a fórmula de Cardano-Tartaglia.

4.4 ATIVIDADE III

Nesta atividade sugerimos algumas aplicações com equações polinomiais a fim de consolidar a aprendizagem de resolução de equações.

1. Polinômio e eletricidade

O técnico em eletrônica, Carlos, está montando um sistema elétrico com três resistores, de resistências $R_1, R_2 \; e \; R_3$ associados em paralelo. Ao final da montagem ele percebeu que poderia substituir os três resistores em paralelo por um equivalente de resistência R, com as seguintes características:

i) A medida da resistência R aos três resistores, associados em paralelo, satisfazem a relação: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

(ii) Os valores das resistências dos resistores $R_1, R_2 \; e \; R_3$, são as raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - 14x^2 + 32x - 24$.

2. Polinômio e geometria

O reservatório de água da escola onde Tales estuda, possui a forma de um paralelepípedo reto retângulo com dimensões $x + 1, x + 2 \; e \; x + 3$ dadas em metros. Determine as medidas do reservatório em metros, sabendo que o volume do reservatório é de $v = 24m^3$.

3. Polinômio e altitude

O INPA (Instituto Nacional de Pesquisa da Amazônia) faz uso de balões meteorológicos para o monitoramento do clima na região. Certo balão responsável para medir o índice de poluição teve sua altura (h) monitorada por certo período, os pesquisadores modelaram esta altura descrevendo pelo polinômio $h(t) = t^4 - 30t^3 + 243t + 24$, com $h(t)$ dado em metros e t em minutos.

No instante do lançamento $(t = 0)$ sua altura era de 24m, no período de 24 h o balão atingirá 24m em algum outro instante?

4. Polinômio e agricultura

Com a preocupação com o meio ambiente e também com as reservas de combustíveis não renováveis, o Brasil de destaca na produção de combustível biodegradável que é o álcool (etanol), derivado da cana-de-açúcar. A cana-de-açúcar também é responsável pela geração de energia elétrica com a queima de resíduos sólidos gerados pelo seu processamento e o seu cultivo tem aumentado consideravelmente ao longo dos anos, assim como a produção de álcool. O aumento da produção de álcool de 2001 a 2008 foi de aproximadamente de 280 milhões de toneladas, a variação da área plantada é modelada pelo polinômio $p(t) = 0{,}03t^4 - 0{,}021t^3 + 0{,}031t^2 + 0{,}58$.

Em que t é o tempo desde 2001 $(2001 \text{ é } t = 1)$ e $p(t)$ é a área plantada em milhões de hectares.

Os valores obtidos por meio do polinômio são valores aproximados.

Determine a variação de área plantada de cana-de-açúcar no período entre 2001 a 2008.

5. Polinômio e matemática financeira

João Pedro é administrador de uma pequena fábrica, e ele faz o controle da receita e da despesa por meio de polinômios, sendo r(x) o polinômio da receita e d(x) o polinômio da despesa, que são respectivamente dados por: $r(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 8x^2 + \frac{65}{2}x \;\; e \quad d(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{19}{4}x^2 + \frac{91}{4}x$.

Em x representa o mês do ano dado em ordem cronológica e r(x) e d(x) em milhares de reais.

a) Sabendo que lucro ou prejuízo é dado pela diferença entre receita e despesa, escreva um polinômio f(x) que represente o lucro ou o prejuízo da fábrica, para um mês qualquer.

b) Lucro o prejuízo no mês de janeiro?

4.5 DA AVALIAÇÃO FINAL

A avaliação fica a critério do professor, podendo ser cumulativa, contínua (recomendação da LDB), pois, o objetivo maior dela é o de se obter informações sobre os avanços e as dificuldades de cada aluno, sendo também um norte para o planejamento das ações do professor visando uma melhor compreensão dos temas trabalhados em sala de aula, constituindo-se em um procedimento constante de ajuda ao processo de ensino/aprendizagem.

Possíveis continuações

Para dar continuidade ou complementar o tema, sugiro ao professor que apresente questões com um grau mais elevado de dificuldade, se possível acrescentar fatos históricos, como por exemplo: as equações que foram propostas na época. No entanto, fará com que o educando construa suas evidencias de forma sistematizada e sucessivamente elevará o grau de complexidade das informações e questões problematizadas.

4.6 ANÁLISE QUALITATIVA DA APLICAÇÃO DA SEQUENCIA DIDÁTICA

A sequência didática foi aplicada aos alunos do 3º colegial da Escola Estadual Marina Amarante Ribeiro Vasques Sanches, situada à Rua Gonçalo Miranda nº 134, município de Presidente Epitácio no estado de São Paulo.

Na aplicação do primeiro bloco de atividades foi necessário utilizar 5 aulas de 50 minutos, onde foi disponibilizado aos alunos 2 aulas para a resolução das atividades e 3 aulas para a correção das mesmas, sendo esta feita de maneira participativa, sempre questionando ao aluno o porquê de tal procedimento.

Notou-se que quase a totalidade dos alunos não sabia ou não lembrava como equacionar e resolver as questões, sendo necessária a interferência do professor para que os alunos tentassem chegar a uma solução.

O fato de não lembrarem, ou não saberem resolver as equações de primeiro e segundo graus, levou-nos a aplicação de outra lista de exercícios, sendo gastos mais 4 aulas de 50 minutos, duas para as resoluções e duas para as correções.

Observou-se que, quando se trata de problemas ‘’envolvendo situações reais’’, uma parcela dos alunos chega ao resultado esperado, mas a maior parte dos alunos não são “capazes” de resolver as equações. Ficando clara a necessidade de um número maior de atividades se possível com situações-problemas.

Tal defasagem talvez se justifique por dois motivos:

1- A organização do currículo - O primeiro contato com equações de 1º grau ocorre no 4º bimestre do 7º ano do fundamental II e, equações de 2º grau, no 2º bimestre do 9º ano. No ensino médio, no 2º bimestre da 1ª série estudam-se funções polinomiais de 1º e 2º graus, no 3º bimestre do 2º ano sistemas lineares, finalmente, no 3º ano estudam-se problemas lineares e máximos e mínimos no 1º bimestre e as equações polinomiais de 3º grau no 2º bimestre.

2- O sistema de ensino - A promoção ‘’automática’’ no ensino fundamental II pode ser considerada como uma influência negativa na motivação da aprendizagem (aprender para quê? Se vou passar de ano).

Na aplicação do bloco II de atividades, foi gasto um total de 12 aulas de 50 minutos cada, esta foi trabalhada em conjunto com os alunos principalmente as questões envolvendo demonstrações, uma vez que os alunos não têm grande familiaridade com tais atividades. É importante que o professor tenha um cuidado especial ao explicar todas as passagens das demonstrações enfocando as propriedades que a envolvem, por mais simples que possam parecer, para que não fiquem dúvidas nos passos das demonstrações.

Na questão cinco é conveniente que não se tenha pressa, pois a demonstração é longa e há muito que se rever com os alunos, se assim não o fizer dificilmente haverá entendimento, então, recomendamos que tal atividade seja proposta em duas aulas em sequencia (100 minutos), para que não haja quebra no seu desenvolvimento..

Um exemplo que se deve atentar é na passagem dos passos d e e**.** Veja:

d) Espera-se que o aluno conclua que $M = -3pq \ e \ N = -(p^3 + q^3)$, então $y = p + q$.

O que observar: a variável incógnita na equação $y^3 + My + N = 0$ é y e, que por comparação à variável da equação $(p + q)^3 = 0$ é $p + q$ tem-se $y = p + q$, onde y é a raiz procurada por ser a variável da equação. Usando o artificio de elevar M ao cubo, nos leva a solução de uma equação de segundo grau, onde a soma de suas raízes é $S = (p^3 + q^3) = -N$ e o produto é $P = p^3q^3 = -\frac{M^3}{27}$, e isto está diretamente ligada a solução de uma equação do segundo grau do tipo: $z^2 + Nz - \frac{M^3}{27} = 0$.

Para o professor a passagem é de fácil entendimento, o que não ocorre com os alunos, por isso a preocupação com todos os detalhes de uma demonstração.

Quanto a aplicação da fórmula de resolução, foi sem grandes problemas, já que se trata de apenas substituir os valores de p e q que a solução esteja pronta.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Trabalhar com equações polinomiais de primeiro e segundo graus na educação básica funciona quase como um paradigma. O que se aprende no ensino fundamental relativo às equações polinomiais, normalmente, é repetido no ensino médio, quero dizer, o aluno passa 12 anos, juntando o ensino médio com o fundamental, resolvendo esses tipos de equações.

Para que o aluno tenha uma melhor formação, se faz necessário romper com tal paradigma. Primeiramente, se faz necessário desde o ensino fundamental proporcionar aos alunos um estudo mais aprofundado a respeito das expressões algébricas e suas operações. Trabalhar constantemente polinômios de grau maior que dois assim o aluno começará a se familiarizar com essas representações, ao calcular valor numérico de um polinômio atentar para os polinômios de terceiro, quarto, quinto graus e até maiores.

Apresentamos neste trabalho, definições, teoremas e ferramentas e observações acompanhados de exemplos que aplicados em sala de aula possibilitarão ao aluno resolver equações de até quarto grau.

Para as equações polinomiais cúbicas, apresentamos a Regra de Cardano-Tartaglia que faz o uso de radicais, que junto ao processo basta à eliminação do termo quadrático, possibilitando assim a solução das equações cúbicas completas.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTHUR, F. Coxford Aberto P. Shulte. **As idéias da álgebra**. trad. Domingues Hygino H. São Paulo: Atual, 1995.

BOYER, Carl B. **História da matemática** . São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996.

CARNEIRO, Raylson dos Santos. **Métodos de Resolução de Equações de 3º Grau.** Palmas : [s.n.], 27 de março de 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática volume unico.**1.ed. São Paulo: Ática s.a, 2005.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. trad. Domingues Hygino H.Campinas: Unicamp, 2004.

FARIAS, Robson Fernandes de. **História da matemática**.Campinas, SP: Átomo, 2013.

GOUVÊA, William P. Berlinghoff e FERNANDO Q. **A Matemática Através dos Tempos**. trad. CASTRO Elza F. Gomida e HELENA. 2.ed. São Paulo: Blucher, 2010.

GUELLI, Oscar. **Contando a História da Matemática**:**História da Equação de 2° grau**.São Paulo,SP: Ática,2011.

GRANJA, Carlos Eduardo de Souza Campos et al [Org.]. **Caderno do professor de Matemática, 3ª série Vol 1**. Material de apoio ao curriculo do Estado de São paulo: São Paulo: R2 Editorial, 2014.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**.vol.6. 7.ed.São Paulo: Atual, 2002.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5.edRio de Janeiro: SBM, 2001.