



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus São José do Rio Preto**

Maria Aparecida Flores de Sousa Junqueira de Andrade

**Uma proposta de introdução e ensino de matemática financeira no
ensino médio com uso de calculadoras científica e financeira**

Ilha Solteira

2016



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus São José do Rio Preto**

Maria Aparecida Flores de Sousa Junqueira de Andrade

**Uma proposta de introdução e ensino de matemática financeira no
ensino médio com uso de calculadoras científica e financeira**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof^a. Dra. Roseli Arbach
Fernandes de Oliveira

Ilha Solteira

2016

Andrade, Maria Aparecida Flores de Sousa Junqueira de.

Uma proposta de introdução e ensino de matemática financeira no ensino médio com uso de calculadoras científica e financeira / Maria Aparecida Flores de Sousa Junqueira de Andrade. -- São José do Rio Preto, 2016

72 f. : il., tabs.

Orientador: Roseli Arbach Fernandes de Oliveira

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Educação financeira. 3. Matemática financeira - Estudo e ensino. 4. Tecnologia educacional. 5. Economia. I. Arbach, Roseli. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Maria Aparecida Flores de Sousa Junqueira de Andrade

Uma proposta de introdução e ensino de matemática financeira no ensino médio com uso de calculadoras científica e financeira

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof^a. Dra. Roseli Arbach Fernandes de Oliveira

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Roseli Arbach Fernandes de Oliveira
UNESP – Ilha Solteira
Orientadora

Prof. Dr. José Marcos Lopes
UNESP – Ilha Solteira

Prof. Dr. Régis Leandro Braguim Stábile
IFSP - Birigui

Ilha Solteira
Julho/2016

Ao Deus soberano toda a honra, toda a glória, toda a adoração, todo o louvor e ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo, dedico.



A minha família, meu marido José Luís Junqueira de Andrade modelo de companheirismo e de paciência. Meus filhos José Luís Junqueira de Andrade Filho e José Eugênio Junqueira de Andrade Sobrinho, pela confiança, paciência, compreensão, incentivo, amor e pelo apoio incondicional em todos os momentos desta jornada.

Não teria conseguido sem vocês!

“Deleita-te também no Senhor, e ele te concederá o que deseja o teu coração. Entrega o teu caminho ao Senhor; confia nele, e ele tudo fará. E ele fará sobressair a tua justiça como a luz, e o teu direito como o meio-dia.”

(Salmo 37:4-6)

AGRADECIMENTOS

Minha gratidão a Deus pela misericórdia e condução no caminho.

À Professora Roseli Arbach Fernandes de Oliveira, pela orientação, pela confiança na minha capacidade e, sobretudo, pela sua paciência, encorajamento e cuidado em todos os momentos da elaboração e execução desta dissertação.

Aos professores do PROFMAT da Faculdade de Engenharia – UNESP – Ilha Solteira, Prof^o Dr^o Edson Donizete de Carvalho, Prof^o Dr^o Ernandes Rocha de Oliveira, Prof^o Dr^o José Marcos Lopes, Prof^a Dr^a Lilian Yuli Isoda, Prof^o Dr^o Luciano Barbanti, Prof^o Dr^o Luis Antonio Fernandes de Oliveira, Prof^o Dr^o Pedro Toniol Cardin, Prof^a Dr^a Roseli Arbach Fernandes de Oliveira, Prof^a Dr^a Silvia Regina Vieira da Silva, pelos ensinamentos, paciência, força e incentivo.

Aos companheiros de jornada do PROFMAT: Ademir Teixeira de Araújo, Adriana Batista da Silva Oliveira, Charles James Leite Martins, Fernando Bruniera Oliveira, Franklin Emanuel Barros Soukeff, João Francisco Medina Araújo, Joseane Gregório Gomes, Juliana Silva Silveira, Leandro Ramiro, Luis Caio Ferreira, Luzia Francisca Pedrazzi Righetto, Marcelo da Silva Pereira, Marcia Terumi Cunita Lourenço, Mário Pinto Carneiro Junior, Marli Solera Sales, Mauro José dos Santos, Nadia Marques Ikeda Pereira, Osvaldo Gebra Júnior, Rosilaine Sanches Martins, Saulo Portes dos Reis, Talita Hélien Silva Miranda, Tiago Henrique Pereira da Silva, Valmir Ancelmo Dias, Victor Alonso Negro, Willian dos Santos Rodrigues pela troca de experiências, união e amizade durante esta jornada.

Agradeço especialmente ao colega José Luís Duarte pela amizade e generosidade em compartilhar seus conhecimentos.

Aos funcionários da Faculdade de Engenharia – UNESP – Ilha Solteira e do IBILCE pelos serviços prestados.

Ao PROFMAT pela oportunidade de realizar o sonho do mestrado e ao Conselho de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Ao meu melhor amigo Jesus Cristo, sempre e incondicionalmente ao meu lado. É necessário ter fé. A fé é um sentimento de total crença em alguém, ainda que não haja nenhum tipo de evidência que comprove a veracidade da proposição em causa. É uma atitude contrária à dúvida e está intimamente ligada à confiança. “Ora, sem fé é impossível agradar a Deus; porque é necessário que aquele que se aproxima Dele creia que Ele existe, e que é galardoador dos que o buscam” (Hebreus 11:6).

À filha de coração Karin Hirano Mota e neta Maria Clara Hirano Mota e ao genro de coração Hamilcar Mota pelo incentivo e ajuda em todo tempo.

Aos meus amigos e irmãos em Cristo Sônia Regina Ferreira Manoel, Carmem Lúcia Carrion Cajal, Denise Mancine, Sônia Mancine, Roselene Flores Douaki, Verlaine Sarlo Rocha Franchi, Rosangela Zaia, Silvana Fernandes Rodrigues pelas orações, pela amizade sincera sempre, pelo socorro e apoio desmedido em momentos nebulosos de minha vida e trajetória acadêmica. Entre estes amigos, tantos outros que não cito neste momento, porém não menos importantes. Abençoados os que possuem amigos, os que os têm sem pedir, porque amigo não se pede, não se compra, nem se vende. Amigo a gente sente! Benditos os que sofrem pelos amigos, os que falam com o olhar, porque amigo não se cala, não questiona, nem se rende. Amigo a gente entende! Benditos sejam os amigos que acreditam na tua verdade ou te apontam a realidade.

Agradeço especialmente a amiga e irmã em Cristo Rita de Cássia Alves Nunes, pelo apoio e contribuição.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas graças a DEUS, não sou o que era antes.”

(Martin Luther King)

RESUMO

A Matemática Financeira tem um papel importante na vida dos estudantes, pois colabora para a formação de cidadãos autônomos e conscientes de sua relação com a economia. A proposta dessa monografia é destinada a professores do ensino médio e tem por objetivo mostrar a importância do ensino da Matemática Financeira nos anos finais do Ensino Básico, inserindo os principais conceitos e nomenclaturas utilizados no mundo financeiro para o entendimento do processo de Capitalização e Financiamento. São apresentados também os conceitos preliminares, como Progressão Aritmética e Progressão Geométrica, seguidos de exemplos contextualizados, o que facilita a compreensão de cada conteúdo.

Palavras-chave: administração financeira. economia. ensino básico.

ABSTRACT

The Financial Mathematics plays an important role in the lives of students, as it helps in the formation of autonomous citizens who are aware of their relationship with the economy. The purpose of this monograph is aimed at high school teachers and aims to show the importance of teaching Financial Mathematics in the final years of basic education, by inserting the key concepts and terminology used in the financial world to understand the capitalization and financing process. They are also presented preliminary concepts like Arithmetic Progression and Geometric Progression, followed by contextualized an example which facilitates the understanding of each content.

Keywords: basic education. economy. financial management.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 -	Calculadora Científica.	40
FIGURA 2 -	Comparação entre Juros Simples e Juros Compostos.	45
FIGURA 3 -	Calculadora Financeira.	47
FIGURA 4 -	Representação Esquemática da Série Uniforme	48

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 -	Fluxo de Caixa de um Financiamento.	24
TABELA 2 -	Sistema SAC.	27
TABELA 3 -	Sistema PRICE.	28
TABELA 4 -	Prestação -SAM.	29
TABELA 5 -	Sistema SAM.	29
TABELA 6 -	Sistema SAA.	30
TABELA 7 -	Ilustração de Juros Simples e Juros Compostos.	46
TABELA 8 -	Representação Esquemática da tabela PRICE	57
TABELA 9 -	Planilha de Amortização – PRICE	58
TABELA 10 -	Planilha de Amortização PRICE	59
TABELA 11 -	Planilha de Amortização PRICE	60
TABELA 12 -	Representação Esquemática da Tabela SAC	61
TABELA 13 -	Planilha de Amortização – SAC	62
TABELA 14 -	Planilha de Amortização – SAC	63

Sumário

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 UM POUCO DE HISTÓRIA	14
2 TERMOS E CONCEITOS UTILIZADOS NA MATEMÁTICA FINANCEIRA.....	18
DEFINIÇÃO 2.1. AGENTES ECONÔMICOS	18
DEFINIÇÃO 2.2. OPERAÇÕES FINANCEIRAS	18
DEFINIÇÃO 2.3. CAPITAL	18
DEFINIÇÃO 2.4. MONTANTE	19
DEFINIÇÃO 2.5. JUROS.....	19
<i>Definição 2.5.1. Juros Simples.....</i>	<i>19</i>
<i>Definição 2.5.2. Juros Compostos</i>	<i>19</i>
DEFINIÇÃO 2.6. TAXA DE JUROS	20
<i>Definição 2.6.1. Relação Entre As Taxas Nominais, Taxas Proporcionais E Taxas Efetivas</i> <i>Equivalentes</i>	<i>20</i>
DEFINIÇÃO 2.7. DESCONTO.....	23
DEFINIÇÃO 2.8. FLUXO DE CAIXA	24
DEFINIÇÃO 2.9. EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA DE CAPITAIS	24
DEFINIÇÃO 2.10. RENDAS CERTAS OU ANUIDADES	26
DEFINIÇÃO 2.11. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS.....	26
<i>Definição 2.11.1. Sistema de Amortização Constante - SAC</i>	<i>26</i>
<i>Definição 2.11.2 Sistema de Amortização Francês – SAF (Tabela PRICE).....</i>	<i>27</i>
<i>Definição 2.11.3. Sistema de Amortização Misto.....</i>	<i>28</i>
<i>Definição 2.11.4. Sistema de Amortização Americano</i>	<i>30</i>
3 APLICANDO CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO – P.A. E P.G. NA MATEMÁTICA FINANCEIRA	31
3.1. PROGRESSÃO ARITMÉTICA E JUROS SIMPLES	31
3.2 SOMA DOS TERMOS DE UMA PA FINITA	31
3.3 APLICAÇÕES DA PA NO CÁLCULO DE JUROS SIMPLES.....	34
3.4 JUROS SIMPLES – USO DA FÓRMULA	35
3.5 CÁLCULO DO MONTANTE OU VALOR FUTURO	36
3.6 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E JUROS COMPOSTOS.....	37
3.7 SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. FINITA.....	38
3.8 APLICAÇÕES DA PG NA MATEMÁTICA FINANCEIRA – JUROS COMPOSTOS	41
3.9 JUROS COMPOSTOS – USO DA FÓRMULA.....	44
4 CALCULADORA FINANCEIRA	47
4.1 SÉRIES UNIFORMES DE PAGAMENTO	47
4.3 APRESENTAÇÃO DE PARCELAMENTO - SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES NA LINGUAGEM FINANCEIRA COM O USO DE FÓRMULAS E COM O USO DAS FUNÇÕES FINANCEIRAS DA CALCULADORA FINANCEIRA	48
4.3.1 <i>Séries Uniformes Postecipadas</i>	<i>48</i>

4.3.2 <i>Séries Uniformes Antecipadas</i>	49
4.3.3 <i>Séries Uniformes Diferidas</i>	49
4.4 VALOR PRESENTE DE SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES POSTECIPADAS	49
4.5 VALOR PRESENTE DE SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES ANTECIPADAS	54
5 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÕES	56
5.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (SAF) - TABELA PRICE	56
5.2 SISTEMA DE AMORTIZAÇÕES CONSTANTES - SAC	61
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
REFERÊNCIAS.....	65
ANEXOS	66
MEMÓRIA TRANSITÓRIA (X, Y, Z E T)	66
A TECLA ENTER.....	66
A TECLA $X \leftrightarrow Y$	67
AS TECLAS CHS E CLX	67
A TECLA $R \downarrow$	67
AS TECLAS +, -, \times E \div	68
AS TECLAS DOURADA (F) E AZUL (G)	68
FIXANDO O NÚMERO DE CASAS DECIMAIS.....	69
FUNÇÃO RND	69
TROCANDO O PONTO DECIMAL PELA VÍRGULA	70
AS FUNÇÕES Δ DYS E DATE	70
AS TECLAS STO E RCL	71
LIMPEZA DAS MEMÓRIAS DA CALCULADORA.....	72

1 INTRODUÇÃO

1.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

O surgimento da Matemática Financeira ocorreu de acordo com as necessidades, ainda na época do escambo, sistema de troca de serviços e produtos, meio pelo qual o comércio e a economia se movimentavam.

Práticas que incluíam Matemática em suas aplicações, eram os impostos e a valorização e desvalorização de produtos da época, conceitos extremamente ligados à aplicação dos juros.

A prática da aplicação de juros foi um dos primeiros passos, para o que hoje conhecemos como Matemática Financeira. Nas civilizações antigas como dos povos sumérios¹, em que o escambo era o sistema econômico, os juros eram intimamente ligados a colheita. Adquiria-se empréstimos para ajudar a plantar uma safra, e o pagamento aconteceria na próxima colheita, já com a aplicação dos juros.

A criação dos bancos que também está associada à Matemática Financeira, ocorreu em um momento de grande desenvolvimento comercial no mundo. Passou-se a comercializar também ouro e prata e os países passaram a desenvolver sua própria moeda. Essas moedas eram de circulação local, o que levou a um problema de diferença de moedas entre países vizinhos.

Assim surgiram os primeiros cambistas. Eles faziam a troca entre as diferentes moedas.

Os cambistas ficavam em bancos de madeira nas praças, mercados da época. O fato de estarem sempre sentados nesses bancos acabou criando o termo *banqueiros* e *banco* como conhecemos hoje. Conforme crescia a procura pelos serviços, começaram a estipular um valor que deveria ser dado a eles como forma de pagamento do empréstimo ou do serviço de guardar o dinheiro alheio. Os cambistas já tinham a noção de ganho, ou seja, de lucro, que é um conceito fundamental na Matemática Financeira. Depois de um certo tempo, os cambistas já tinham ganho dinheiro o suficiente para guardarem e emprestarem. Neste momento esse serviço já era comum, pois os cambistas davam segurança ao dinheiro das pessoas.

¹ Sumérios: adj. Da Suméria.

Adj. e s.m. Natural ou habitante dessa antiga região da baixa Mesopotâmia.

Desde então, o sistema monetário foi se alterando, devido a ocorrência das mudanças no cenário econômico. Junto com essas mudanças a Matemática Financeira foi buscando novos pensamentos, modelos e fórmulas para a resolução de problemas decorrentes do desenvolvimento da economia mundial.

1.2 MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

Faz-se necessário no Ensino Médio, a inserção da Matemática Financeira, dada a importância desse conteúdo para a vida adulta de um cidadão. Já na infância, as pessoas têm desejos como de possuir determinados brinquedos, calçados, roupas, aparelhos eletrônicos, entre outros. Nesse momento, é importante que seja trabalhada a relação consumo x consumismo, mostrando para a criança que qualquer compra deve ser devidamente planejada e não ser feita de maneira impulsiva. A escola deve perceber que, por se tratar de uma parte da Matemática com grande aplicabilidade no cotidiano, a Matemática Financeira pode e deve ser inserida de forma gradual de acordo com a idade e capacidade cognitiva do aluno.

Como trabalhar a Educação Financeira na escola e ajudar os alunos a resolver suas dificuldades, planejar melhor suas vidas para que consigam ter mais condições de alcançarem metas e sonhos?

Verificamos que nas Escolas Públicas do Estado de São Paulo, de acordo com os Conteúdos Pedagógicos do Ensino Médio, há uma introdução desse assunto, no Caderno do Aluno – Volume 1, da 1ª série, com sequência no Caderno do Aluno - Volume 2.

Por outro lado, na Rede Privada de Ensino, tem-se que parte das escolas apenas trabalham a Matemática Financeira na 3ª série do Ensino Médio, reservando pouco espaço para esse tema nos materiais utilizados, negligenciando o seu ensino, por ser este, um assunto muito mais voltado para o futuro do aluno como cidadão consumidor do que para as provas de vestibular para ingresso nas faculdades.

No Ensino Médio, é muito comum os alunos perguntarem durante as aulas de Matemática em que o professor está ensinando assuntos como polinômios ou trigonometria, por exemplo, onde eles irão usar o conteúdo que está sendo ensinado. O mesmo questionamento, também é feito em muitos outros temas. Já em relação aos assuntos Progressões Aritméticas – PA e Progressões Geométricas – PG, Funções Exponenciais e Logarítmicas, o professor deve em seu início, informar a

aplicabilidade dos mesmos, no ensino da Matemática Financeira, como mostraremos no decorrer desse trabalho.

A vantagem de se ministrar os tópicos relacionados a Matemática Financeira é justamente por estes serem trabalhados com facilidade devido ao grande número de exercícios contextualizados que despertam o interesse e estimulam o raciocínio. Quando o aluno percebe a utilidade de um determinado conteúdo, ele se sente motivado a compreender, pois para ele, aquele aprendizado não é útil apenas para responder a uma avaliação, e sim para a sua vida, o seu futuro.

Vivemos em um país capitalista, e o crescimento da renda per capita trouxe consigo um maior poder de consumo e, conseqüentemente, um aumento no número de pessoas endividadas. A falta de conhecimento na área, faz com que muitas pessoas não se planejem devidamente e acabem caindo na tentação que é a grande oferta de crédito do mercado atual.

Educação financeira sempre foi importante aos consumidores, para auxiliá-los a orçar e gerir a sua renda, a poupar e investir, e a evitar que se tornem vítimas de fraudes. No entanto, sua crescente relevância nos últimos anos vem ocorrendo em decorrência do desenvolvimento dos mercados financeiros, e das mudanças demográficas, econômicas e políticas. (SAVOIA, 2007, p.2)

A educação financeira dos alunos nas escolas, pode contribuir para uma economia familiar equilibrada, de maneira significativa, pois eles podem levar esse conhecimento para suas famílias em um efeito multiplicador.

1.3 OS CAMINHOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Alguns conteúdos são fundamentais e básicos para o bom entendimento da Matemática que deve ser trabalhada no Ensino Médio. A Escola deve garantir que um aluno saia do Ensino Fundamental com os seguintes conteúdos trabalhados: Razão e Proporção, Porcentagem, Regra de Três Simples e Composta. Os professores, do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental, devem trabalhar questões que façam os alunos irem além da simples aplicação das regras que envolvem esses conteúdos. É extremamente importante que as situações problema levem o aluno a pensar e traçar “caminhos” de resolução para responder as questões.

Desta forma, no Ensino Médio, serão tratados assuntos específicos e relacionados com a Matemática Financeira, como algumas Funções, Progressão

Aritmética e Progressão Geométrica levando o professor a atingir resultados mais satisfatórios, ao transmitir os conhecimentos de Matemática Financeira para os seus alunos.

Antes de apresentar um paralelo entre os conteúdos Matemáticos e a Matemática Financeira, deve-se apresentar ao aluno termos e conceitos inerentes ao mundo financeiro.

2 TERMOS E CONCEITOS UTILIZADOS NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Definição 2.1. Agentes Econômicos

O estudo da Matemática Financeira traz alguns termos que devem ser definidos precisamente. Dentre eles estão os agentes econômicos, que são citados por Puccini como sendo:

Agente econômico é qualquer entidade física ou jurídica capaz de praticar um ato econômico. Assim, entende-se por agente econômico qualquer pessoa, empresa ou instituição que possa praticar um ato econômico: uma venda, uma compra, um empréstimo ou quaisquer operações que tenham consequências financeiras. (PUCCINI, 2007, p.13)

A partir dessa definição, podemos dizer que os agentes econômicos são tomadores de decisões que influenciam diretamente na economia.

Definição 2.2. Operações Financeiras

Caracterizam-se por serem uma transferência de capital, onde certo agente econômico X que possui capital o transfere a outro agente econômico Y. Tais operações financeiras geralmente envolvem acordos que asseguram a devolução do capital a X. Esses acordos são garantias de pagamento apresentadas pelo agente Y, nas quais ficam definidos os prazos e as formas de devolução do capital, bem como a remuneração que deverá ser paga a X.

Definição 2.3. Capital

O capital (C) vem a ser “[...] o valor de um ativo representado por moeda e/ou direitos passíveis de uma expressão monetária, no início de uma operação financeira” (PUCCINI, 2007, p.14). Assim sendo, o capital é uma determinada quantia (valor) que será aplicada através de algum ato econômico.

Definição 2.4. Montante

Em uma operação financeira, o montante (M) é caracterizado, por ser um valor acumulado através da adição de determinado capital aos juros produzidos sobre este capital.

Definição 2.5. Juros

Os juros (J) são rendimentos adquiridos sobre um empréstimo, ou sobre um valor poupado em uma Instituição Financeira. Quando se faz um empréstimo, ou uma poupança de determinada quantia, é pago um acréscimo² pelo valor emprestado ou poupado. Esse acréscimo é o que chamamos de juros.

Segundo Assaf Neto (2009), os juros devem gerar um lucro (ou ganho) ao proprietário do capital como forma de compensá-lo pela privação desse capital por determinado período de tempo.

O valor dos juros é estabelecido de acordo com alguns fatores como: contrato fixado pelo credor (aquele que tem algo a receber) e a inflação em vigência.

Definição 2.5.1. Juros Simples

Os juros simples se dão quando, a porcentagem referente aos juros incide somente sobre o valor principal, ou seja, somente sobre o valor aplicado inicialmente. Nesse caso não ocorrerá uma capitalização dos juros. Sendo assim, só o capital inicial renderá juros.

Definição 2.5.2. Juros Compostos

Os juros são gerados a cada período, e adicionados ao capital inicial, para se calcular novos juros no período subsequente. Nesse caso ocorrerá a capitalização dos juros, chamados juros sobre juros. O valor da dívida é sempre revisto e a taxa de juros é calculada novamente sobre o capital inicial acrescido dos juros, para assim obter uma nova base de cálculo para o próximo período.

² Acréscimo: s.m. Aumento. A parte que foi aumentada ou acrescida ao todo.

Definição 2.6. Taxa De Juros

Denominada como o “preço do dinheiro”, a taxa de juros tem relação com o capital e os juros produzidos em uma operação financeira, e diretamente ligada a estipulado período de tempo. As unidades de temporalidade da taxa podem ser: ao ano, ao mês, ao dia, ao semestre, ao trimestre entre outros.

Existem duas maneiras de representação das taxas, sendo **taxa percentual** (referente a porcentagem do capital) e **taxa unitária** (resultante da divisão por 100, onde transforma-se em um número decimal representativo de uma parte da unidade percentual).

No contexto taxa de juros, temos as taxas: nominal e efetiva. A **taxa nominal** ao contrário da efetiva, ocorre quando a unidade de tempo é diferente da unidade de tempo do período de capitalização, como por exemplo 3% a.a. com capitalização mensal.

A **taxa efetiva** se dá quando sua unidade de tempo é igual à unidade do tempo do período de capitalização, como por exemplo 5% a.m. com capitalização mensal.

Definição 2.6.1. Relação Entre As Taxas Nominais, Taxas Proporcionais E Taxas Efetivas Equivalentes

A palavra **efetiva** significa real, verdadeira, que produz efeito. Isto quer dizer que para efeitos de cálculo utilizamos a taxa efetiva. A taxa nominal não é utilizada para estes fins.

Analisa-se a seguinte situação: Você vai ao banco investir R\$ 100.000,00 em uma aplicação financeira e o gerente lhe informa que para a aplicação escolhida a taxa de juros anual é de 24% a.a., capitalizados mensalmente. Note que o período de formação e acréscimo dos juros ao capital difere do período de tempo da taxa. Temos uma taxa anual, mas os juros são calculados e acrescidos mês a mês. Nestas condições a taxa de juros é denominada taxa nominal.

Se a taxa nominal é de 24% a.a. e visto que a capitalização é mensal, qual será a taxa de juros ao mês?

Como um ano tem 12 meses a taxa será de:

$$24\% \div 12 = 2\%$$

A taxa mensal referente a uma taxa nominal de 24% a.a. é de 2% a.m. Estas duas taxas são ditas taxas proporcionais, pois utilizando meses como a unidade de tempo, temos a seguinte proporção: 24% está para 12 meses, assim como 2% está para 1 mês, isto é:

$$\frac{24}{12} = \frac{2}{1}$$

A taxa de 2% a.m. além de ser proporcional à taxa de 24% a.a., é denominada taxa efetiva mensal.

Verificaremos que as taxas de 24% a.a. e de 2% a.m. são taxas **proporcionais** quando aplicadas no regime de Capitalização Simples.

Como dito anteriormente, você vai ao banco investir R\$ 100.000,00 em uma aplicação financeira e o gerente lhe informa que para a aplicação escolhida a taxa de juros anual é 24% a.a. supondo um prazo de aplicação de 2 anos. Vejamos se as taxas são equivalentes.

Aplicando o principal à taxa efetiva de 2% a.m. e pelo prazo de 2 anos, ou seja, 24 meses, teremos:

$$J_1 = R\$ 100.000,00 \times 0,02 \times 24 = \mathbf{R\$ 48.000,00}$$

Se aplicarmos o principal à taxa de 24% a.a. e pelo prazo de 2 anos teremos:

$$J_2 = R\$ 100.000,00 \times 0,24 \times 2 = \mathbf{R\$ 48.000,00}$$

Note que no regime de Capitalização Simples taxas **proporcionais**, produzem o mesmo montante quando aplicadas a um mesmo capital e período.

Sabendo que a taxa efetiva de juros é 2% a.m. e que o capital é de R\$ 100.000,00, vamos calcular qual será o novo capital após um ano de aplicação, a juros compostos.

Teorema 2.1. *No regime de juros compostos de taxa i , um principal C transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante : (MORGADO, 1999, p.44)*

$$M = C (1+i)^n$$

Prova: Para cada K, seja C_k a dívida após K períodos de tempo.

Temos que:

$$C_{k+1} = C_k + iC_k$$

$$C_{k+1} = C_k \times (1 + i)$$

Daí, (C_k) é uma progressão geométrica de razão $(1 + i)$ e $C_n = C_1 \times (1 + i)^n$.

Se $C_n = M$ e $C_1 = C$ então, $M = C(1 + i)^n$

Substituindo tais incógnitas por seus respectivos valores temos que, como o capital é de R\$ 100.000,00, os juros serão de R\$ 26.824,18, uma vez que:

$$M - C = 126.824,18 - 100.000 = 26.824,18$$

Então, a taxa efetiva anual será de 26,82418% a.a., pois

$$\frac{26.824,18}{100.000} \times 100\% = 26,82418\%$$

Observamos que, uma taxa efetiva de 2% a.m. equivale a 26,82418% a.a. e não a 24% a.a. Na Capitalização composta, taxas que produzem montantes iguais, quando aplicadas a um mesmo capital e um período de tempo de mesma duração, são chamadas de **taxas equivalentes**.

Assim, taxas proporcionais e taxas equivalentes se diferem exclusivamente pelo regime de juros considerado. As taxas proporcionais se baseiam em juros simples, e as taxas equivalentes em juros compostos.

O montante mensal (M_m) e o montante anual (M_a), são iguais, obtidos a partir das taxas efetivas equivalente mensal (i_m) e anual (i_a), respectivamente e período mensal (n_m) e anual (n_a). Generalizando podemos concluir que:

$$M_a = C(1 + i_a)^{n_a}$$

Da igualdade entre M_m e M_a obtemos a fórmula para transformar a taxa efetiva mensal (i_m) a partir da taxa efetiva anual (i_a):

$$i_m = \sqrt[n_m]{(1 + i_a)^{n_a}} - 1$$

E na fórmula seguinte obtemos a taxa efetiva anual (i_a) a partir da taxa efetiva mensal (i_m):

$$i_a = \sqrt[n_a]{(1 + i_m)^{n_m}} - 1$$

Como podemos notar, ambas as fórmulas diferem entre si apenas nos índices das variáveis, então retirando o índice das variáveis referentes à taxa que queremos obter e atribuindo o índice 0 (zero) às variáveis referentes à taxa que possuímos, chegamos à seguinte fórmula:

$$i = \sqrt[n]{(1 + i_0)^{n_0}} - 1$$

Ou, se preferirmos eliminar o radical trabalhando apenas com uma potência, temos esta fórmula:

$$i = (1 + i_0)^{\frac{n_0}{n}} - 1$$

Definição 2.7. Desconto

O desconto é conceituado como uma dedução no valor de um título de crédito (nota promissória, duplicata, fatura) quando este é pago com antecedência ao seu vencimento. No mercado financeiro o desconto é uma operação corriqueira. Dentre os tipos de descontos há o **desconto racional (ou por dentro)**, equivalente ao juro gerado pelo valor presente da dívida em uma taxa determinada e no período correspondente. Há também o **desconto bancário (ou comercial, ou por fora)**, onde a taxa de desconto incidirá sobre o valor futuro da dívida, levando-se em conta o montante e o número de períodos até o vencimento do título.





Definição 2.8. Fluxo De Caixa

O fluxo de caixa é uma sequência de entradas e saídas de dinheiro ao longo do tempo que são executadas por empresas, instituições ou indivíduos.

Sua finalidade é facilitar os estudos e a compreensão da análise de determinada aplicação, podendo ser um empréstimo, investimento, financiamento.

Esse fluxo de entradas e saídas, podem ser representados graficamente por meio do diagrama de fluxo de caixa (representação gráfica ou em tabela de um fluxo de caixa). Observa-se na tabela 1 um exemplo de fluxo de caixa:

Tabela 1: Fluxo de Caixa de um Financiamento.

Fluxo de Caixa de um Financiamento			
	E_1 	E_2 	E_3 
$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
 S_0			

Fonte: Elaborado pela autora

$t = 0$ indica o tempo (dia atual da operação).

E_1, E_2, E_3 = Entrada de capital em um determinado período.

S_0 = Saída de capital em um determinado período.

Definição 2.9. Equivalência Financeira De Capitais

São chamados capitais equivalentes, dois ou mais capitais com vencimentos em datas diferentes, transferidos para uma mesma data e taxa, gerando valores iguais.

Por exemplo, \$120,00 vencíveis daqui a um ano e \$ 100,00, hoje, são equivalentes a uma taxa de juros simples de 20%, uma vez que os \$ 100,00, capitalizados, produziram \$ 120,00 dentro de um ano, ou os \$120,00, do final do primeiro ano, resultariam em \$ 100,00 se atualizados para hoje. Ou seja, ambos os capitais produzem, numa data de comparação (data focal) e a taxa de 20% ao ano, resultados idênticos. (ASSAF NETO, 2009, p.10).

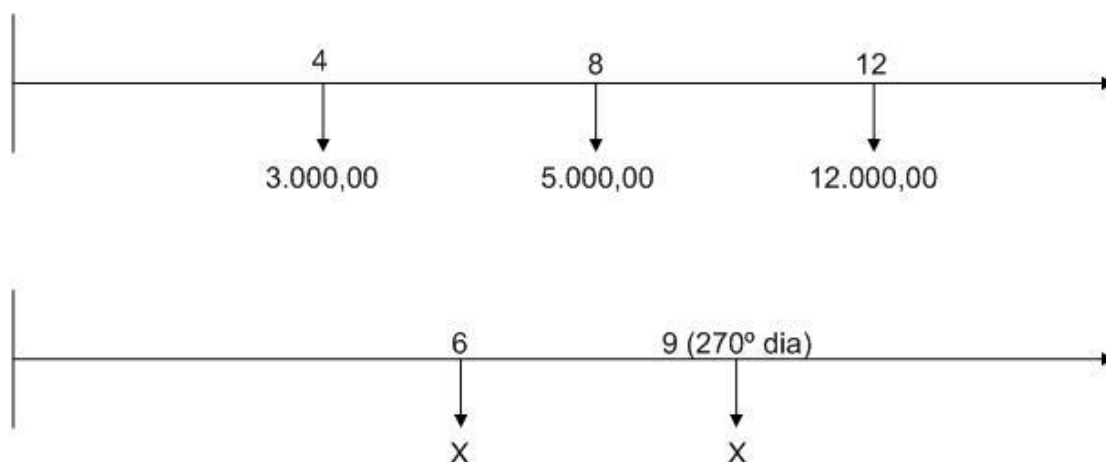
No caso de capitalização simples (juros simples), a definição da data focal, que se refere a data que se considera como base de comparação dos valores referidos a datas diferentes (FERREIRA, 2011), influenciará na resolução do problema. Já no regime de juros compostos a data é irrelevante, como mostra o exemplo abaixo:

Um empresário tem os seguintes compromissos a pagar:

- R\$ 3.000,00 daqui a 4 meses
- R\$ 5.000,00 daqui a 8 meses
- R\$ 12.000,00 daqui a 12 meses

O empresário propõe trocar esses débitos por dois pagamentos iguais, um para daqui a 6 meses e outro para daqui a 9 meses. Considerando a taxa de juros simples de 5% a.m. e a data focal no 270° dia, calcule o valor de cada pagamento.

Solução: Utilizando o Fluxo de caixa, para melhor compreensão:



Como tomamos o 270° dia como data focal, levaremos cada capital até essa data:

$$x \times (1 + 0,05 \times 3) + x = 3.000 \times (1 + 0,05 \times 5) + 5.000 \times (1 + 0,05 \times 1) + \frac{12.000}{(1+0,05 \times 3)}$$

$$1,5x + x = 3.750 + 5.250 + 10.434,78$$

$$2,15x = 19.434,78$$

$$x = \frac{19.434,78}{2,15}$$

$$x = R\$ 9.039,43$$

Definição 2.10. Rendas Certas Ou Anuidades

Rendas certas ou anuidades são pagamentos ou recebimentos sucessivos, ou seja, é uma renda ou capital que se utiliza para aplicação em determinado investimento ou para a quitação de dívidas. São utilizados vários critérios para o estabelecimento de classificação das rendas podendo ser classificadas da seguinte maneira:

- **Renda certa temporária:** quando o fluxo for por período limitado.
- **Renda certa permanente:** quando o fluxo for por período ilimitado.
- **Renda certa uniforme:** quando as prestações são iguais.
- **Renda certa variável:** quando as prestações são diferentes.
- **Renda certa periódica:** prestações com períodos iguais.
- **Renda certa não periódica:** prestações com períodos diferentes.

Definição 2.11. Sistemas de Amortização de Empréstimos e Financiamentos

Os sistemas de amortização constituem-se de métodos pelos quais será paga uma dívida.

Tanto um empréstimo, como um financiamento, ambos devem ser devolvidos aos credores de capital, sendo assim a amortização trata-se do pagamento do capital emprestado, que geralmente ocorre através de parcelas periódicas. Porém há exceções, onde o pagamento poderá ser efetuado em uma única parcela ao final de um período. A amortização é a quantia que realmente será paga da dívida no decorrer dos períodos.

Definição 2.11.1. Sistema de Amortização Constante - SAC

No sistema de amortização SAC – Sistema de Amortização Constante, a amortização do valor principal deverá ser sempre igual durante todo o processo da amortização da dívida. Os juros acrescidos ao capital são calculados somente uma vez e divididos para serem pagos em várias parcelas durante determinado período (tabela 2), seu uso comum é no Sistema Financeiro da Habitação. Veja no exemplo a

seguir: Um empréstimo de R\$ 700.000,00, feito à taxa de 5% a.m., por cinco meses, devendo ser pago no Sistema SAC.

Tabela 2: Sistema SAC

Sistema SAC (amortizações constantes)				
n	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0	-	-	-	700.000,00
1	140.000,00	35.000,00	175.000,00	560.000,00
2	140.000,00	28.000,00	168.000,00	420.000,00
3	140.000,00	21.000,00	161.000,00	280.000,00
4	140.000,00	14.000,00	154.000,00	140.000,00
5	140.000,00	7.000,00	147.000,00	0
TOTAIS	700.000,00	105.000,00	805.000,00	

Fonte: Elaborado pela autora

Definição 2.11.2 Sistema de Amortização Francês – SAF (Tabela PRICE)

Outro sistema muito utilizado é o SAF – Sistema de Amortização Francês - tabela PRICE. Nesse sistema as prestações a serem pagas é que deverão ser sempre iguais, sendo a soma da amortização com juros do período, o valor da prestação. A amortização aumenta a cada período e os juros diminuem (tabela 3), seu uso comum é no Financiamento em geral de bens de consumo. Observe o exemplo: Um empréstimo de R\$ 700.000,00, feito à taxa de 5% a.m., por cinco meses, devendo ser pago no Sistema PRICE.

Tabela 3: Sistema PRICE

Sistema PRICE (amortizações progressivas)				
n	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0	-	-	-	700.000,00
1	161.682,32	35.000,00	126.682,32	573.317,47
2	161.682,32	28.665,88	133.016,44	440.301,03
3	161.682,32	22.015,04	139.667,28	300.633,77
4	161.682,32	15.031,70	146.650,62	153.983,15
5	161.682,32	7.699,17	153.983,15	0
TOTAIS	808.411,79	108.411,79	700.000,00	

Fonte: Elaborado pela autora

Nestes tipos de sistemas utilizados (PRICE e SAC) existem vantagens e desvantagens apresentadas a seguir:

É vantagem da tabela PRICE, as primeiras prestações serem menores em comparação com as prestações da tabela SAC. E é vantagem da tabela SAC, o saldo devedor diminuir de maneira significativa em relação à tabela PRICE.

A desvantagem da tabela PRICE é que o saldo devedor diminui pouco em relação à tabela SAC. E a desvantagem da tabela SAC, é a primeira prestação ser maior em relação à tabela PRICE.

Definição 2.11.3. Sistema de Amortização Misto

O SAM – Sistema de Amortização Misto, é um sistema onde só se obtém o valor das prestações, depois de calculado os valores das prestações no SAC e no SAF, pois o valor da prestação no SAM é a média aritmética desses valores, ou seja, $(SAC + SAF) / 2$. Seu uso comum é também no Financiamento do Sistema Financeiro da Habitação.

Utilizando os valores do SAC (tabela 2) e tabela PRICE (tabela 3), determinaremos os valores das prestações a serem pagos pelo sistema MISTO (tabela 4).

Tabela 4: Prestação do Sistema de Amortização Misto

Prestação -SAM				
n	Prestação PRICE	Prestação SAC	Soma	Prestação SAM
1	161.682,32	175.000,00	336.682,32	168.341,16
2	161.682,32	168.000,00	329.682,32	164.841,16
3	161.682,32	161.000,00	322.682,32	161.341,16
4	161.682,32	154.000,00	315.682,32	157.841,16
5	161.682,32	147.000,00	308.682,32	154.341,16

Fonte: Elaborado pela autora

É um sistema proveitoso para quem está pagando, pois ele não possui valores elevados como no SAF, e para quem está recebendo ele não possui valores tão baixos como no SAC. Utilizando os mesmos valores dos exemplos anteriores, teremos a planilha a seguir (tabela 5):

Tabela 5: Sistema MISTO

Sistema de Amortização Misto - SAM				
n	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0	-	-	-	700.000,00
1	168.341,16	35.000,00	133.341,16	566.658,74
2	164.841,16	28.332,94	136.508,22	430.150,62
3	161.341,16	21.507,53	139.833,63	290.316,99
4	157.841,16	14.515,85	143.325,31	146.991,68
5	154.341,16	7.349,48	146.991,68	0
TOTAIS	806.705,80	106.705,80	700.000,00	

Fonte: Elaborado pela autora

Definição 2.11.4. Sistema de Amortização Americano

Sistema de Amortização Americano – SAA (tabela 6), esse é o sistema que permite o pagamento do valor principal em uma única parcela ao final do período estipulado por contrato. Podendo os juros serem pagos periodicamente ou capitalizados e reembolsados juntamente com o valor principal. Veja o exemplo: Um empréstimo de R\$ 700.000,00, feito à taxa de 5% a.m., por cinco meses, devendo ser pago no Sistema SAA.

Tabela 6: Sistema SAA

Sistema de Amortização Americano - SAA				
n	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0	-	-	-	700.000,00
1	0,00	35.000,00	35.000,00	700.000,00
2	0,00	35.000,00	35.000,00	700.000,00
3	0,00	35.000,00	35.000,00	700.000,00
4	0,00	35.000,00	35.000,00	700.000,00
5	700.000,00	35.000,00	875.000,00	0
TOTAIS	700.000,00	175.000,00	875.000,00	

Fonte: Elaborado pela autora

3 APLICANDO CONTEÚDOS DO ENSINO MÉDIO – P.A. E P.G. NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

3.1. PROGRESSÃO ARITMÉTICA E JUROS SIMPLES

Definição 3.1.1. Progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais que, a partir do segundo elemento, cada termo (elemento) é obtido através da soma do seu antecessor com uma constante que chamamos de razão r .

Então conclui-se que, partindo do primeiro termo, para avançar um termo na sequência, deve-se adicionar a razão r , isto é:

$$a_2 = a_1 + r$$

Da mesma forma, para avançar dois termos, adiciona-se $2.r$ ao primeiro termo, obtendo $a_3 = a_1 + 2.r$ e assim por diante. Por esse processo, se quisermos obter o 20º elemento, deve-se adicionar $19.r$ ao primeiro termo e escrever:

$$a_{20} = a_1 + 19.r$$

Assim, o termo geral é dado por: $a_n = a_1 + (n - 1).r$

Exemplo 3.1.1: Dada a PA (3, 5, 7,...) , determine seu quarto termo.

Resolução: Usando a fórmula acima, teremos:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r, \text{ onde } a_1 = 3 \text{ e } r = 2$$

$$a_4 = 3 + 3 \times 2$$

$$a_4 = 9$$

3.2 Soma dos Termos de Uma PA Finita

O cálculo da soma dos termos de uma PA pode inicialmente ser introduzido aos alunos, retomando e aprofundando a noção de algoritmo em Matemática, pois podemos entender o cálculo da soma da PA, como um cálculo realizado a partir de

certa ordenação de procedimentos que conduzem, com eficiência, ao resultado procurado.

Para se obter a soma dos n primeiros termos de uma PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, pode-se explorar a propriedade da equidistância dos termos extremos, isto é, $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$, a fim de desenvolver estratégias para o cálculo da soma de seus termos em um trabalho que antecede a construção e utilização da fórmula da soma dos termos de uma PA.

Como exemplo dessa estratégia, calcularemos a soma dos 200 primeiros números naturais, indicada por:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 198 + 199 + 200$$

Observa-se que:

$$1 + 200 = 2 + 199 = 3 + 198 = 4 + 197 = 201$$

Observa-se também que a soma anterior contém 100 parcelas iguais a 201. Então conclui-se que:

$$S_{200} = 100 \times 201 = 20100$$

No caso de sequências que apresentam um número ímpar de termos, como a sequência $(1, 4, 7, 10, 13, 16, 19)$ de sete termos, somando-se os extremos, percebemos que o número 10, que é o termo central, não foi adicionado.

$$1 + 19 = 4 + 16 = 7 + 13 = 20$$

Assim, a soma dos termos será obtida da seguinte forma:

$$S = 3 \times 20 = 70$$

Essa sequência de passos para se obter a soma dos n primeiros termos de uma P.A. pode ser vista como um algoritmo que permite rapidez e precisão no cálculo

e, por isso mesmo, pode e deve ser bem compreendida e utilizada sempre que possível.

Mas, podemos generalizar a estratégia que usamos, em uma ou outra sequência, para uma sequência qualquer.

Teorema 3.1. *A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_n) = (a_1, a_1, a_1, \dots, a_1)$ é igual a:* (MORGADO; WAGNER; ZANI, 1999, p.4)

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

Prova:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \text{e}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

E daí segue:

$$2S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1).$$

Observe que, de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r , o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$.

Logo:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \times n \quad \text{e} \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

Exemplo 3.2.1: Calcularemos a soma dos 10 primeiros termos da PA (13, 20, 27, ...).

Resolução: Temos que $a_1 = 13$, $r = a_2 - a_1 = 7$ e, portanto, $a_{10} = a_1 + 9r = 76$. Logo:

$$S_{10} = \frac{(13 + 76) 10}{2}$$

$$S_{10} = \frac{89 \times 10}{2} = 445$$

3.3 Aplicações da PA no Cálculo de Juros Simples

O crescimento de um capital a uma taxa constante de juros simples se caracteriza por envolver uma série de termos que formam uma PA. Levando-se em conta um capital inicial C , acrescido de 5% ao mês, ao final de quatro meses teremos:

Capital inicial: C

Depois de um mês: $1,05 \times C = C + 0,05 \times C$

Depois de dois meses: $1,10 \times C = 1,05 \times C + 0,05 \times C$

Depois de três meses: $1,15 \times C = 1,10 \times C + 0,05 \times C$

Depois de quatro meses: $1,20 \times C = 1,15 \times C + 0,05 \times C$

Observa-se que a cada mês, temos um montante que é resultado da adição, ao montante do mês anterior, de uma constante $0,05 \times C$. Dessa forma obtém-se uma PA, na qual o primeiro termo a_1 é C e a razão r é $0,05 \times C$.

Como a fórmula do termo geral da PA é dada pela expressão:

$a_n = a_1 + (n - 1) \times r$, trocando as incógnitas, teremos:

$C_n = C_1 + (n - 1) \times r$, onde C_n é o montante em cada mês.

Fazendo: $C + 1,05 \times C + 1,10 \times C + 1,15 \times C + 1,20 \times C = 5,5 \times C$ que representa dos cinco primeiros termos dessa PA.

Isto é possível verificar com a aplicação da fórmula da soma dos termos da PA, com cinco termos:

$$S_5 = \frac{(C + 1,20 \times C) \times 5}{2}$$

$$S_5 = \frac{2,2 \times C \times 5}{2}$$

$$S_5 = 5,5 \times C$$

Traduzindo para a linguagem da Matemática Financeira, 5,5.C seria o montante ao final dos cinco meses. Tendo mostrado a evolução de um capital inicial C , quando submetido a juros simples, o professor pode agora transferir essa linguagem usando os termos do mundo financeiro.

A linguagem da Matemática Financeira, é assim representada:

PV o capital inicial ou valor presente;

FV o montante ou valor futuro;

j o juro simples;

n o tempo de aplicação;

r a taxa percentual;

i a taxa unitária.

3.4 Juros Simples – Uso da Fórmula

Após se conhecer os termos da linguagem financeira, podemos utilizar, para cálculo de juros simples, a seguinte fórmula:

$$J = PV \times n \times r$$

Lembrando que:

$$i = \frac{r}{100}$$

$$J = PV \times n \times \frac{r}{100}$$

Dessa forma, os juros simples são calculados através da fórmula:

$$J = PV \times n \times i$$

É importante observar que a fórmula anteriormente citada só pode ser aplicada **se o prazo de aplicação n for expresso na mesma unidade de tempo a que a taxa i for considerada**. Observe o exemplo:

Tomou-se emprestada a importância de R\$ 12.000,00, pelo prazo de 2 anos à taxa de 30% ao ano. Quanto será o valor do juro a ser pago?

Solução:

$$PV = 12.000$$

$$n = 2 \text{ anos}$$

$$r = 30\% \text{ a.a. ou } i = 0,30 \text{ a.a.}$$

E, como:

$$J = PV \times n \times i$$

$$J = 12.000 \times 0,30 \times 2$$

$$J = 7.200$$

Isto é, o valor dos juros a serem pagos é de R\$ 7.200,00.

3.5 Cálculo do Montante ou Valor Futuro

O montante ou valor futuro é igual a soma do capital inicial com os juros relativos ao período de aplicação, isto é:

Montante = Capital inicial + Juros

Ou seja:

Valor Futuro = Valor Presente + Juros

$$FV = PV + j$$

Substituindo os juros por:

$$J = PV \times n \times i$$

Obtém-se:

$$FV = PV \times (1 + n \times i)$$

Exemplo 3.5.1: Que montante receberá um aplicador que tenha investido R\$ 2.800,00 durante 15 meses, à taxa de 3% ao mês?

Solução:

$$PV = 2.800$$

$$n = 15 \text{ meses}$$

$$i = 0,03 \text{ a.m.}$$

$$FV = PV \times (1 + n \times i)$$

$$FV = 2.800 \times (1 + 15 \times 0,03)$$

$$FV = 4.060,00$$

Isto é, o montante a receber é de: R\$ 4.060,00.

3.6 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA e JUROS COMPOSTOS

Definição 3.6.1. Chamamos Progressão Geométrica (P.G.) a uma sequência de números reais, formada por termos, que a partir do segundo, são obtidos multiplicando-se o termo anterior por uma constante q dada, chamada de **razão** da P.G.

Dada uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$, então se ela for uma P.G., teremos:

$$a_n = a_{n-1} \times q, \text{ com } n \geq 2 \text{ e } n \in \mathbb{N}, \text{ onde:}$$

$$a_1 \text{ é o } 1^\circ \text{ termo}$$

$$a_2 = a_1 \times q$$

$$a_3 = a_2 \times q$$

$$a_4 = a_3 \times q$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1} \times q$$

Vamos considerar uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$. Pela definição temos:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \times q$$

$$a_3 = a_2 \times q$$

$$a_4 = a_3 \times q$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1} \times q$$

Multiplicando membro a membro das igualdades:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times \dots \times a_n = a_1 \times a_1 \times q \times a_2 \times q \times a_3 \times q \times \dots \times a_{n-1} \times q$$

$$a_n = a_1 \times q \times q \times q \times q \times q \times \dots \times q \times q$$

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

Assim a fórmula do termo geral de uma PG é: $a_n = a_1 \times q^{n-1}$

3.7 Soma dos Termos de uma P.G. Finita

Dada a P.G. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n)$, de razão $q \neq 0$ e $q \neq 1$.

Teorema 3.1. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é igual a:*

$$S_n = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}$$

Prova: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$ e, multiplicando por q , obtemos:

$$q \times S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n) \times q$$

$$q \times S_n = a_1 \times q + a_2 \times q + a_3 \times q + a_4 \times q + \dots + a_n \times q$$

E daí segue:

$$q \times S_n - S_n = (a_1 \times q + a_2 \times q + a_3 \times q + a_4 \times q + \dots + a_n \times q) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n)$$

E como:

$a_i \times q = a_{i+1}$ para $i \geq 1$, temos que:

$$S_n \times (q - 1) = (a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \times q) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n)$$

Portanto:

$$S_n \times (q - 1) = a_n \times q - a_1$$

Substituindo-se $a_n \times q$ por $a_1 \times q^{n-1} - 1$, obtém-se:

$$S_n \times (q - 1) = a_1 \times (q^n - 1) \quad \text{e}$$

$$S_n = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}$$

para $q \neq 1$

Exemplo 3.7.1: Calcular a soma dos 10 primeiros termos da PG (2,6,18, ...)

Solução: Temos que $a_1 = 2$, $q = \frac{a_2}{a_1} = 3$ e $n = 10$

$$S_{10} = \frac{2 \times (3^{10} - 1)}{3 - 1}$$

$$S_{10} = \frac{2 \times (3^{10} - 1)}{2}$$

$$S_{10} = 3^{10} - 1$$

Observação: O aluno deve ser orientado pelo professor a deixar o resultado como está ($S_{10} = 3^{10} - 1$) ou usar uma calculadora científica para os cálculos como será apresentado a seguir.

Somente um profissional ou estudante da área de exatas, terá contato com uma dessas calculadoras. As calculadoras científicas são equipamentos dedicados a facilitar a vida de quem lida com cálculos complexos (Figura 1). Diferentemente da calculadora financeira, que é destinada a um público mais específico, a calculadora científica está habilitada a realizar as funções mais comuns da Matemática.

Comparando com calculadoras simples, há o diferencial do armazenamento, enquanto os modelos mais comuns não costumam guardar resultados e operações mais utilizadas, a maioria das calculadoras científicas pode ser programada para realizar uma função macro, ou seja, uma determinada conta definida pelo usuário. Além disso, conta com outras funções como trigonometria, conversões de medidas, gráficos booleanos e outros recursos ligados à Matemática, Ciência, Estatística e Programação.

Uma calculadora científica é indispensável para quem necessita executar cálculos complexos. Dependendo do modelo, tem um preço bem acessível, sendo possível sua aquisição pelo aluno, o que já não acontece com a calculadora financeira, da qual falaremos no decorrer do trabalho.

O professor deverá apresentar e orientar o aluno sobre as funções que serão utilizadas nos cálculos propostos.

Na figura 1 encontra-se uma calculadora científica bastante utilizada pelos alunos.

Figura 1: Calculadora Científica



Fonte: www.submarino.com.br/produto/369015/calculadora-cientifica-

Para efetuar o cálculo de $3^{10} - 1$ procede-se assim:

Pressionam-se as teclas $3 \wedge 10 =$ e aparecerá no visor o resultado correspondente: 59049.

Desse modo o resultado final seria:

$$S_{10} = 3^{10} - 1$$

$$S_{10} = 5049 - 1$$

$$S_{10} = 5048$$

3.8 Aplicações da PG na Matemática Financeira – Juros Compostos

No cálculo do crescimento de um capital a uma taxa constante de juros compostos, aparece uma PG.

Então levando-se em conta um capital C , acrescido de 5% ao mês, ao final de quatro meses teremos:

Capital inicial: C

Depois de um mês: $1,05 \times C = C + \frac{5}{100} \times C$

Depois de dois meses: $1,05^2 \times C = 1,05 \times C + \frac{5}{100} \times 1,05 \times C$

Depois de três meses: $1,05^3 \times C = 1,05^2 \times C + \frac{5}{100} \times 1,05^2 \times C$

Depois de quatro meses: $1,05^4 \times C = 1,05^3 \times C + \frac{5}{100} \times 1,05^3 \times C$

Observa-se que a cada mês, obtém-se um montante que é resultado da multiplicação do montante anterior pela constante 1,05, portanto uma PG de primeiro termo C e razão $q = 1,05$.

Analogamente ao que mostramos na PA, temos que a fórmula do termo geral de uma PG e dada pela expressão:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Note na expressão anterior que $a_n = C_n$, $a_1 = C_1$ e $q = \frac{i}{100} + 1$ e obtemos assim:

$$C_n = C_1 \cdot \left(\frac{i}{100} + 1\right)^{n-1}, \text{ onde } C_n \text{ é o montante em cada mês.}$$

Vamos agora, calcular a soma dos cinco primeiros termos da PG em estudo:

$$\begin{aligned} C + 1,05 \times C + 1,05^2 \times C + 1,05^3 \times C + 1,05^4 \times C &= C \times (1 + 1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4) \\ &= 5,52 \times C \end{aligned}$$

Um outro modo de verificar esse resultado é aplicando-se a fórmula da soma dos termos de uma PG. Nesse caso, soma de cinco termos da PG de razão 1,05.

$$S_5 = \frac{(1,05^5 - 1)}{1,05 - 1}$$

$$S_5 = 5,52 \times C$$

Traduzindo para a linguagem da Matemática Financeira, $5,52 \times C$ seria o montante a juros compostos do capital C ao final dos cinco meses.

A seguir, veremos exemplos da aplicação do conceito de P.G. na Matemática Financeira.

Exemplo 3.8.1: Segundo um plano de capitalização de um banco, depositando mensalmente R\$ 1.000,00 durante 12 meses, à uma taxa de 2% de juros compostos ao mês, quanto se resgatará ao final do período?

Resolução: Trata-se de calcular a soma de termos em P.G. :

$$S = 1.000 \times 1,02 + 1.000 \times 1,02^2 + 1.000 \times 1,02^3 + \dots + 1.000 \times 1,02^{12}$$

$$S = 1.000 \times (1,02 + 1,02^2 + 1,02^3 + \dots + 1,02^{12})$$

$$S = \frac{1.000 \times (a_n \times q - a_1)}{q - 1}$$

$$S = \frac{1.000 \times (1,02^{12} \times 1,02 - 1,02)}{1,02 - 1}$$

$$S = \frac{1.000 \times 1,02 \times (1,02^{12} - 1)}{0,02}$$

$$S = 1.000 \times 51 \times 0,268241794$$

$$S = 13.680,33$$

Portanto, o resgate será de R\$ 13.680,33.

Exemplo 3.8.2: Guardou-se, mensalmente a quantia de R\$ 200,00 em um banco que remunerou o dinheiro à base de 4% ao mês no regime de capitalização composta. Ao final de 8 meses de aplicação, usou-se o montante como entrada em um pacote de viagem que custava, à vista, R\$ 5.000,00. Pretende-se financiar o saldo devedor em 5 vezes, em parcelas iguais e fixas, à taxa de 2% ao mês.

- Qual o valor pago de entrada no pacote de viagem?
- Qual o valor da parcela mensal fixa do financiamento do saldo do pacote de viagem?

Resolução: a) O valor total capitalizado exige o cálculo de uma soma de termos em P.G.

$$S = 200 \times 1,04 + 200 \times 1,04^2 + 200 \times 1,04^3 + \dots + 200 \times 1,04^8$$

$$S = 200 \times (1,04 + 1,04^2 + 1,04^3 + \dots + 1,04^8)$$

$$S = \frac{200 \times (1,04^8 \times 1,04 - 1,04)}{1,04 - 1}$$

$$S = \frac{200 \times 1,04 \times (1,04^8 - 1)}{0,04}$$

$$S = 200 \times 26 \times 0,36856905$$

$$S = 1.916,56$$

Portanto, o valor da entrada será de R\$ 1.916,56.

b) O valor financiado é igual a diferença entre R\$ 5 000,00 e R\$ 1.916,56 ou seja, R\$ 3.083,44. Esse valor, em 5 meses, a 2% ao mês, fica:

$$M = 3.083,44 \times 1,02^5 = 3.4041,37 \text{ que será parcelado.}$$

Uma parcela fixa P, paga todo mês e corrigida à base de 2% ao mês, deve, ao final, gerar montante equivalente a R\$ 3.404,37.

$$3.404,37 = P \times (1,02 + 1,02^2 + 1,02^3 + 1,02^4 + 1,02^5)$$

$$3.404,37 = \frac{P \times (1,02^5 \times 1,02 - 1,02)}{1,02 - 1}$$

$$3.404,37 = \frac{P \times 1,02 \times (1,02^5 - 1)}{0,02}$$

$$3.404,37 = P \times 51 \times 0,104080803$$

$$3.404,37 = P \times 5.308120963$$

$$P = 641,35$$

Portanto, a parcela fixa será igual a R\$ 641,35.

Analogamente ao que foi feito para o cálculo dos Juros Simples, faremos para o cálculo dos Juros Compostos, isto é, utilizaremos fórmulas e a linguagem do mundo financeiro. Posteriormente, falaremos também de Parcelamento, ou seja, Séries Periódicas Uniformes.

3.9 Juros Compostos – Uso da Fórmula

Como já visto anteriormente a nomenclatura dos termos nos moldes da Matemática Financeira, temos a fórmula para cálculo do montante FV no regime de Juros Compostos.

$$FV = PV(1 + i)^n$$

Lembremos sempre que a taxa e o tempo devem estar na mesma unidade de tempo.

Exemplo 3.9.1: Aplica-se R\$ 1.000,00, por 10 anos a juros de 5% a.a.. Quanto será obtido no final?

Solução:

$$PV = 1.000$$

$$n = 10 \text{ anos}$$

$$i = 0,05 \text{ ao ano}$$

$$FV = PV(1 + i)^n$$

$$FV = 1.000 \times (1 + 0,05)^{10}$$

$$FV = 1.628,89$$

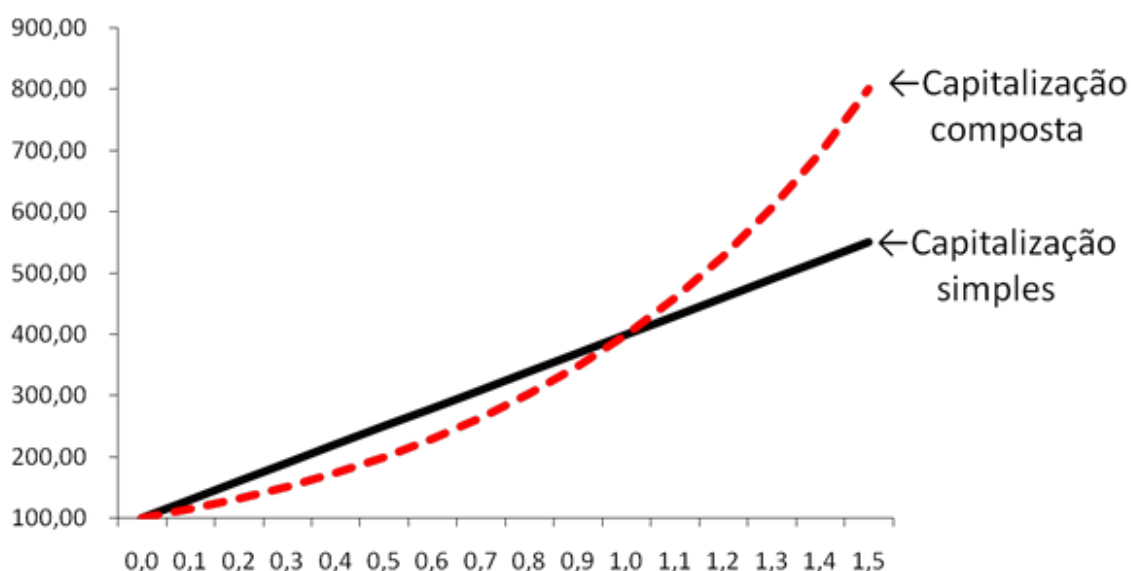
Portanto, ao final de 10 anos, teremos o montante de: R\$ 1.628,89.

Este cálculo em sala de aula deve ser feito com o uso da calculadora científica, devidamente apresentada anteriormente.

Após relacionar juros simples e juros compostos com os conteúdos abordados, o professor deve mostrar para seus alunos em quais situações eles são aplicados, relatando que os juros simples são usados em situações de curto prazo, por render mais, e, principalmente em um período menor do que 1, uma vez que seu crescimento é **linear** (figura 2). Pode se observar exemplos dessa aplicação nos juros cobrados por atraso no pagamento de boletos bancários de mensalidades escolares, condomínios, entre outros. Desta forma, a taxa é dada ao mês, mas os cálculos dos juros são por dia de atraso, o que torna a utilização da capitalização simples mais vantajoso para o credor.

O crescimento dos rendimentos na capitalização composta é exponencial, por isso a aplicação dos juros compostos é mais utilizada no dia a dia, uma vez que a maior parte das operações é feita por períodos maiores do que 1. Um exemplo de aplicação do regime de capitalização composta, é o que ocorre com a dívida de cartão de crédito, que a faz crescer cada vez mais com o passar do tempo, com o agravante de termos as taxas de juros muito altas no nosso país.

Figura 2: Comparação Entre Juros Simples e Compostos



Fonte: <http://educacao.globo.com/matematica/assunto/matematica-basica/juros-compostos.html>

Observando o gráfico, o professor deve mostrar ao aluno que, para $n = 1$, o juro obtido na capitalização simples é o mesmo que na capitalização composta. O que pode ser facilmente demonstrado algebricamente:

Capitalização simples: para $n = 1$

$$M_1 = C + C \times i \times 1$$

$$M_1 = C + C \times i$$

Capitalização composta: para $n = 1$

$$M_2 = C \times (1 + i)^1$$

$$M_2 = C + C \times i$$

Note que $M_1 = M_2$

Vamos ilustrar a diferença entre os crescimentos de um capital através de juros simples e juros compostos, demonstrados na figura 2.

Exemplo 3.9.2: Suponha que R\$ 1.000,00 são empregados a uma taxa de 30% a.a., por um período de 3 anos a juros simples e compostos. Teremos:

$$C = \text{R\$ } 1.000,00$$

$$i = 30\% \text{ a.a}$$

$$t = 3 \text{ anos}$$

Tabela 7: Ilustração de Juros Simples e Juros Compostos

t	Juros Simples		Juros Compostos	
	Juros por período	Montante	Juros por período	Montante
0	1.000,00	-	-	1.000,00
1	$1.000,00 \times 0,3 = 300,00$	1.300,00	$1.000,00 \times 0,3 = 300,00$	1.300,00
2	$1.000,00 \times 0,3 = 300,00$	1.600,00	$1.300,00 \times 0,3 = 390,00$	1.690,00
3	$1.000,00 \times 0,3 = 300,00$	1.900,00	$1.690,00 \times 0,3 = 507,00$	2.197,00

Fonte: Elaborado pela autora

Antes de apresentarmos as fórmulas e tipos de parcelamento, apresentaremos a calculadora financeira para mostrar o quão prático é esse instrumento para o mundo financeiro.

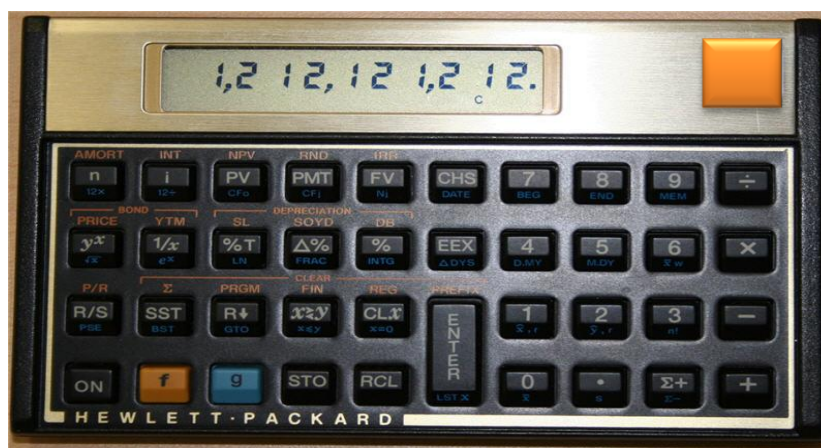
4 CALCULADORA FINANCEIRA

A calculadora financeira é mais usada por profissionais da área Financeira, uma vez que é específica para essa área.

O professor deve levar alguns exemplares em sala de aula para mostrar as funções financeira básicas e proporcionar o manuseio dela.

Para isto, deve fazer uma breve demonstração de como se usa esse instrumento (Anexo A).

Figura 3: Calculadora Financeira



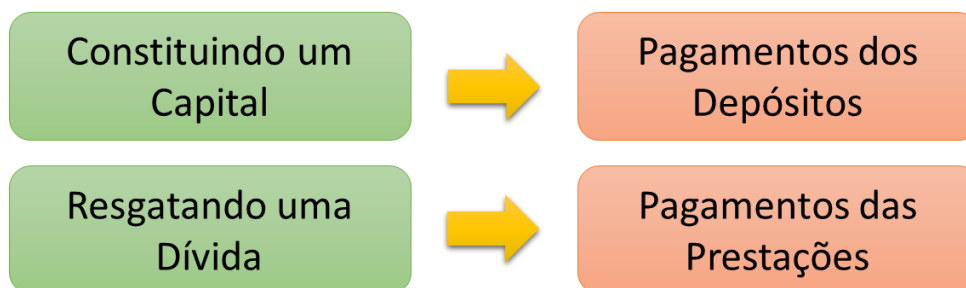
Fonte: www.multisom.com.br

Da mesma forma que se procedeu nos cálculos dos Juros Simples e Compostos, fazendo o paralelo entre a linguagem Matemática (P.A. e P.G) e a linguagem da Matemática Financeira, utilizaremos fórmulas e a linguagem do mundo financeiro para o cálculo do parcelamento à juros compostos, ou seja, com as Séries Periódicas Uniformes, que são as séries que se apresentam no dia-a-dia das pessoas.

4.1 Séries Uniformes de Pagamento

Uma série de pagamentos pode ser usada para constituir um capital ou pagar uma dívida de forma parcelada. Cada um dos valores são chamados de termo ou parcela da série de pagamento (Figura 4).

Figura 4: Representação Esquemática da Série Uniforme de Pagamento



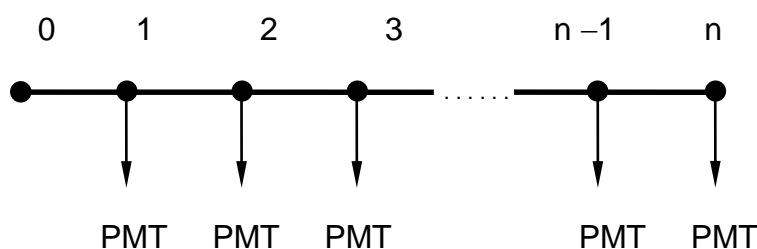
Fonte: Adaptado de http://www2.anhembibr/html/ead01/mat_financeira

4.3 Apresentação de Parcelamento - Séries Periódicas Uniformes na linguagem Financeira com o uso de Fórmulas e com o uso das funções financeiras da Calculadora Financeira

As rendas ou também chamadas séries periódicas uniformes podem ser divididas em séries postecipadas, séries antecipadas e diferidas. As séries postecipadas são aquelas em que os pagamentos ocorrem no fim de cada período e não na origem, por exemplo, pagamentos de fatura de cartão de crédito. Nas séries antecipadas, os pagamentos são feitos no início de cada período respectivo, por exemplo, financiamento com a primeira parcela à vista. Nas séries diferidas, o período de carência constitui-se em um prazo que separa o início da operação do período de pagamento da primeira parcela, por exemplo, promoções do tipo “compre hoje e comece a pagar daqui a x dias”.

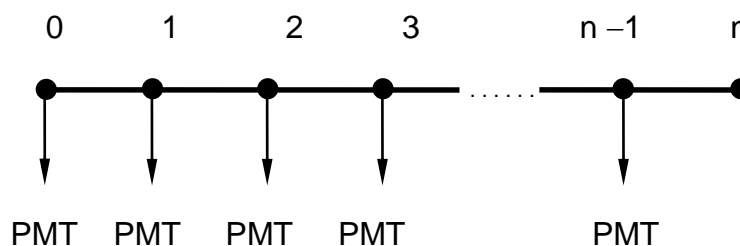
4.3.1 Séries Uniformes Postecipadas

Na série postecipada, os pagamentos ocorrem no final (End) de cada período. Pagamentos ou recebimentos podem ser chamados de prestação, representada pela sigla “PMT” que vem do Inglês “Payment” e significa pagamento ou recebimento. (BRANCO, 2002).



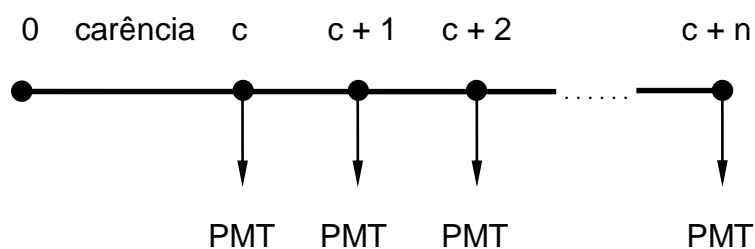
4.3.2 Séries Uniformes Antecipadas

Na série antecipada, os pagamentos ocorrem no início (Begin) de cada período:



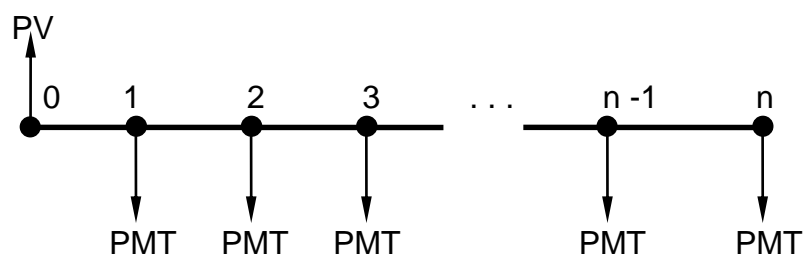
4.3.3 Séries Uniformes Diferidas

Na série diferida temos um período de carência mais uma série antecipada:



4.4 VALOR PRESENTE DE SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES POSTECIPADAS

As séries uniformes de pagamento postecipados são aqueles em que o primeiro pagamento ocorre no momento 1; este sistema é também chamado de sistema de pagamento ou recebimento sem entrada.



O valor presente dos termos da série é dado por:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \dots + \frac{PMT}{(1+i)^n}$$

Colocando em evidência o valor o PMT, obtemos a seguinte expressão:

$$PV = PMT \times [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n}]$$

O somatório entre colchetes representa a soma dos termos de uma progressão geométrica finita. Utilizando a fórmula conhecida para soma das progressões geométricas,

$$S_{PG} = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$$

e substituindo: a_1 que é o primeiro termo da série por $(1+i)^{-1}$; a_n que é o enésimo termo da série por $(1+i)^{-n}$; e q que é a razão da série por $(1+i)^{-1}$, obtemos a seguinte expressão para o valor presente de uma série uniforme com n termos postecipados capitalizados à taxa efetiva i :

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}} \right]$$

Efetuando alguns cálculos algébricos, a expressão acima se transforma em:

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

As fórmulas acima permitem calcular o valor presente (PV) de séries uniformes postecipadas e o valor unitário dos termos da série (PMT). A expressão matemática entre colchetes é conhecida como **fator de valor presente (FVP)** de séries uniformes.

Exemplo 4.4.1: Um empresário pretende fazer um investimento no exterior que lhe renderá R\$ 100.000,00, por ano, nos próximos 10 anos. Qual o valor do investimento, sabendo-se que o empresário trabalha com taxas de 6% ao ano?

Solução: Usando a Calculadora Científica comum:

$$PMT = R\$ 100.000,00$$

$$n = 10 \text{ parcelas}$$

$$i = 6\% \text{ a.a.}$$

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

$$PV = 100.000 \times \left[\frac{\left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10} - 1}{\left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10} \times \frac{6}{100}} \right]$$

$$PV = 100.000 \times 7,36009$$

$$PV = 736.008,7055$$

Portanto o valor do investimento é de: R\$ 736.008,71.

Exemplo 4.4.2: Uma loja vende uma geladeira em 12 prestações mensais de R\$ 120,55 ou em 24 prestações mensais de R\$ 76,76. Qual é a forma de financiamento mais vantajosa para o comprador, se a taxa de juros for de 3 % a.m.?

Solução: Utilizando as funções financeiras da calculadora financeira HP 12C, nos dois casos, obteremos o preço à vista da geladeira.

1º Caso

f Fin

120,55 PMT

12 n

3 i

PV

Aparecerá na tela o valor 1.199,96.

Portanto o valor da geladeira à vista é de: R\$ 1.199,96.

2º Caso

f Fin

76,76 PMT

24 n

3 i

PV

Aparecerá na tela o valor 1.299,97.

Portanto o valor da geladeira à vista é de: R\$1.299,97.

No primeiro caso o financiamento tem preço à vista menor, essa é a melhor opção de compra.

Exemplo 4.4.3: Qual é a taxa mensal de um financiamento de R\$ 13.500,00 a ser pago em 12 prestações de R\$ 1.800,00?

Solução: Cálculos com o uso das funções financeiras da calculadora.

f Fin
13.500,00 CHS PV
1.800,00 PMT
12 n
i

Aparecerá na tela o valor 8,09% .

Portanto, o valor da taxa será de 8,09%a.m.

Exemplo 4.4.4: Um apartamento, à vista, custa R\$ 101.513,84, podendo ser adquirido em 6 prestações mensais, sendo a primeira paga um mês após a compra à taxa de 5% ao mês. Calcule o valor de cada prestação

Solução: Cálculos sem o uso das funções financeiras da Calculadora.

PV = R\$ 101.513,84

n = 6 parcelas

i = 5% a.m.

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

$$101.513,84 = PMT \times \left[\frac{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 - 1}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 \times \frac{5}{100}} \right]$$

$$101.513,84 = PMT \cdot 5,07569$$

$$PMT = \frac{101.513,84}{5,07569}$$

$$PMT = 19.999,99974$$

Portanto o valor da parcela é de: R\$ 20.000,00.

Exemplo 4.4.5: Um microcomputador que custa R\$ 1.015,14, à vista, será vendido em parcelas mensais de R\$ 200,00. Sabendo-se que a taxa de mercado é de 5% a.m., em quantas prestações deve ser financiado?

Solução: Cálculos com o uso das funções financeiras da calculadora.

f Fin
1.015,14 CHS PV
200,00 PMT
5 i
n

Aparecerá na tela o valor 6.

Portanto, o financiamento deverá ser realizado em 6 parcelas.

Exemplo 4.4.6: A propaganda de uma grande loja de eletrodomésticos anuncia: “Compre tudo e pague em 10 vezes. Leve hoje e só comece a pagar daqui a 3 meses”. Se a taxa de financiamento é de 3% a.m., qual é o valor da prestação de uma geladeira cujo preço à vista é de R\$ 2.800,00?

Solução: Como o problema apresenta um período de carência, que é o tempo para pagamento da primeira parcela (no caso 3 meses) devemos calcular os juros desse período e usar o valor do montante obtido como o novo valor a ser financiado. Assim teremos:

Cálculo do valor depois dos 3 meses, na calculadora financeira:

f Fin
2.800,00 CHS PV
3 n
3 i
FV

Aparecerá na tela o valor 3.059,64 que será o valor a ser financiado.

Segue o cálculo das parcelas na calculadora financeira.

f Fin
3.059,64 CHS PV
10 n
3 i
PMT

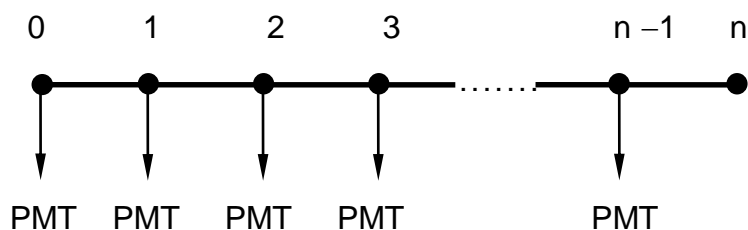
Aparecerá na tela o valor 358,68.

Portanto o valor da parcela será de R\$ 358,68.

4.5 VALOR PRESENTE DE SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES ANTECIPADAS

As séries uniformes de pagamentos antecipadas são aquelas em que o primeiro pagamento ocorre na data focal 0 (zero). Este tipo de sistema de pagamento é também chamado de sistema de pagamento com entrada. (BRANCO, 2002).

A partir dessa definição, podemos dizer que na série antecipada, os pagamentos ocorrem no início (Begin) de cada período:



Nesse sistema antecipado, ocorre a necessidade de descapitalizar um período, sendo assim a equação é escrita da seguinte maneira:

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] \times (1+i)$$

Exemplo 4.5.1: Um apartamento, à vista, custa R\$ 101.513,84. Sabendo que ele pode ser adquirido em 6 prestações mensais, sendo a primeira paga no ato da compra à taxa de 5% ao mês, calcule o valor de cada prestação

Solução: Usando a fórmula.

$$PV = \text{R\$ } 101.513,84$$

$$n = 6 \text{ parcelas}$$

$$i = 5\% \text{ a.m.}$$

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] \times (1+i)$$

$$101.513,84 = PMT \times \left[\frac{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 - 1}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 \times \frac{5}{100}} \right] \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)$$

$$101.513,84 = PMT \times 5,32948$$

$$PMT = \frac{101.513,84}{5,32948}$$

$$PMT = 19.047,61879$$

Portanto o valor da parcela de: R\$ 19.047,62.

Segue o mesmo cálculo utilizando as funções financeiras da calculadora.

Deve-se acionar a tecla **g seguida da 7**. Aparecerá no visor a palavra **BEGIN**, que traduzida do inglês, significa começo.

f Fin

101.513,84 CHS PV

6 n

5 i

PMT

Aparecerá na tela o valor 19.047,62.

Portanto, o valor de cada prestação será de R\$ 19.047,62.

5 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÕES

Para melhor compreensão, daremos as seguintes definições:

Amortização é "extinguir a dívida aos poucos ou em prestações" ou "abater dívidas, efetuando o pagamento correspondente".

Prestação é o valor da amortização, acrescido dos juros em um determinado período de tempo.

Saldo Devedor é o valor atual da dívida em um determinado momento, após o pagamento de uma prestação a título de amortização, ou seja, é o valor da prestação subtraído os juros.

Como citado anteriormente, os Sistemas de Amortizações mais utilizados são:

- Sistema de Amortização Francês (**PRICE**);
- Sistema de Amortização Constante (**SAC**);
- Sistema de Amortização Misto (**SAM**);
- Sistema de Amortização Americano (**SAA**).

Falaremos sobre os dois mais difundidos Sistemas de Amortizações do Mercado: Sistema de Amortização Progressivo (SAP, PRICE, ou Sistema Francês) e Sistema de Amortização Constante (SAC).

5.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (SAF) - TABELA PRICE

Esse sistema caracteriza-se por pagamentos do principal em prestações iguais, periódicas e sucessivas. É o mais utilizado pelas instituições financeiras e pelo comércio em geral. Como os juros incidem sobre o saldo devedor que, por sua vez, decresce à medida que as prestações são pagas, eles são decrescentes e conseqüentemente, as amortizações do principal são crescentes.

Suponha-se o empréstimo de PV, feito à taxa i para ser pago em n prestações, pelo Sistema PRICE. As prestações são calculadas como se fossem os termos PMT de uma renda imediata cujo valor presente é PV (sistema postecipado): (SOARES,2012)

$$PMT = PV \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Como o Sistema PRICE prevê pagamento da dívida de forma parcelada, é conveniente para o devedor e também para o credor que se elabore um demonstrativo ou planilha que mostre o estado da dívida em cada período do prazo fixado. Não existe um modelo único de demonstrativo e cada instituição financeira adota o seu modelo, de acordo com os seus interesses ou com as exigências legais de cada caso. O modelo mais simples seria um quadro, como o reproduzido a seguir, com colunas para data (0, 1, 2, 3, ..., n), valor dos pagamentos (PMT), valor dos juros (J_1, J_2, \dots, J_n), valor das amortizações (A_1, A_2, \dots, A_n) e saldos devedores (SD_1, SD_2, \dots, SD_n)

Tabela 8: Representação Esquemática da Tabela PRICE

N	PAGAMENTO PMT	JUROS $J_n = SD_{n-1} \cdot i$	AMORTIZAÇÃO $A = PMT - J$	SALDO DEVEDOR $SD_n = SD_{n-1} - A$
0	-	-	-	$SD_0 = PV$
1	PMT	$J_1 = SD_0 \cdot i$	$A_1 = PMT - J_1$	$SD_1 = SD_0 - A_1$
2	PMT	$J_2 = SD_1 \cdot i$	$A_2 = PMT - J_2$	$SD_2 = SD_1 - A_2$
.				
.				
.				
n	PMT	$J_n = SD_{n-1} \cdot i$	$A_n = PMT - J_n$	$SD_n = 0$

Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo 5.1.1: Foi feito um empréstimo de R\$ 100.000,00, à taxa de 10% a.m. por quatro meses, que deverá ser pago no Sistema PRICE. Determinar o pagamento mensal e fazer um demonstrativo do estado da dívida nesses quatro meses.

Solução:

$$PV = R\$ 100.000,00$$

$$n = 4$$

$$i = 10\% \text{ a.m.}$$

Sendo:

$$PMT = PV \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Temos:

$$PMT = 100.000 \times \left[\frac{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^4 \times \frac{10}{100}}{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^4 - 1} \right]$$

$$PMT = 100.000 \times 0,31547$$

$$PMT = 31.547,08$$

Portanto a parcela PMT é de R\$ 31.547,08.

Tabela 9: Planilha de amortização Price

N	PAGAMENTO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	SALDO DEVEDOR
0	-	-	-	100.000,00
1	31.547,08	10.000,00	21.547,08	78.452,92
2	31.547,08	7.845,29	23.701,79	54.751,13
3	31.547,08	5.475,11	26.071,97	28.679,16
4	31.547,08	2.867,92	28.679,16	0,00

Fonte: Elaborado pela autora

Pode-se observar que os juros são cada vez menores, uma vez que são calculados sobre o saldo devedor, que decresce com o tempo é menor. Conseqüentemente, as amortizações são cada vez maiores para que, somadas aos juros, totalizem prestações iguais.

O termo “carência” designa o período que vai desde a data de concessão do empréstimo até a data em que será paga a primeira prestação. Este período é negociado entre o credor e o mutuário (ou devedor). Qualquer sistema de amortização pode ter, ou não, prazo de carência. O exemplo a seguir ilustra este fato.

Exemplo 5.1.2: Um empréstimo de R\$200.000,00 será pago pelo Sistema PRICE de Amortização em 4 parcelas mensais, com um período de carência de 3 meses em que seriam pagos unicamente os juros contratados de 10 % a.m.. Construir a Planilha de Amortização.

Sendo:

$$PMT = PV \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Temos:

$$PMT = 200.000 \times \left[\frac{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^4 \times \frac{10}{100}}{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^4 - 1} \right]$$

$$PMT = 200.000 \times 0,31547$$

$$PMT = 63.094,16074$$

Portanto a parcela será de R\$ 63.094,16.

Tabela 10: Planilha de Amortização Price

N	PAGAMENTO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	SALDO DEVEDOR
0	-	-	-	200.000,00
1	20.000,00	20.000,00	-	200.000,00
2	20.000,00	20.000,00	-	200.000,00
3	63.094,16	20.000,00	43.094,16	156.905,84
4	63.094,16	15.690,00	47.403,40	109.502,26
5	63.094,16	10.950,26	52.143,93	57.358,33
6	63.094,16	5.735,89	57.358,33	0,00

Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo 5.1.3: No exemplo anterior, se durante o período de carência os juros forem capitalizados e incorporados ao principal para serem amortizados nas prestações, teremos a nova planilha de amortização.

O empréstimo começará a ser amortizado no fim do 3º mês de carência. Logo, o saldo devedor do empréstimo deverá ser capitalizado à taxa de 10% durante 2 meses.

$$SD_2 = 220.000,00 \times (1,10)^2 = 242.000,00$$

As prestações são calculadas sobre o empréstimo capitalizado até o segundo mês.

Sendo:

$$PMT = PV \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Temos:

$$PMT = 242.000 \times \left[\frac{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^4 \times \frac{10}{100}}{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^4 - 1} \right]$$

$$PMT = 242.000 \times 0,31547$$

$$PMT = 76.343,93450$$

Portanto a parcela será de R\$ 76.343,93.

Tabela11: Planilha de Amortização Price

N	PAGAMENTO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	SALDO DEVEDOR
0	-	-	-	200.000,00
1	-	-	-	220.000,00
2	-	-	-	242.000,00
3	76.343,93	24.200,00	52.143,93	189.856,07
4	76.343,93	18.985,62	57.358,33	132.497,74
5	76.343,93	13.249,80	63.094,16	69.403,58
6	76.343,93	6.940,40	69.403,58	0,00

Fonte: Elaborado pela autora

5.2 SISTEMA DE AMORTIZAÇÕES CONSTANTES - SAC

Pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), o principal é reembolsado em quotas de amortização iguais. Dessa maneira, diferente do que ocorre na Tabela PRICE, em que as prestações são iguais, no Sistema SAC as prestações são decrescentes, já que os juros diminuem a cada prestação. A amortização é calculada dividindo-se o valor do principal pelo número de períodos de pagamento. Esse tipo de sistema às vezes é usado pelo Sistema Financeiro de Habitação (SFH), pelos bancos comerciais em seus financiamentos imobiliários e também, em certos casos, em empréstimos às empresas privadas através de entidades governamentais.

$$A = \frac{PV}{n}$$

Tabela 12: Representação Esquemática da Tabela SAC

N	AMORTIZAÇÃO $A = \frac{PV}{n}$	JUROS $J_n = SD_{n-1} \cdot i$	PAGAMENTO $PMT = A + J$	SALDO DEVEDOR $SD_n = SD_{n-1} - A$
0	-	-	-	$SD_0 = PV$
1	A	$J_1 = SD_0 \cdot i$	$R_1 = A + J_1$	$SD_1 = SD_0 - A$
2	A	$J_2 = SD_1 \cdot i$	$R_2 = A + J_2$	$SD_2 = SD_1 - A$
3	A	$J_3 = SD_2 \cdot i$	$R_3 = A + J_3$	$SD_3 = SD_2 - A$
.				
.				
.				
n	A	$J_n = SD_{n-1} \cdot i$	$R_n = A + J_n$	$SD_n = 0$

Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo 5.2.1: Foi feito um empréstimo de R\$ 100.000,00, à taxa de 10% a.m. por quatro meses, que deverá agora ser pago no Sistema SAC. Fazer um demonstrativo do estado da dívida nesses quatro meses.

Sendo:

$$A = \frac{PV}{n}$$

$$A = \frac{100000}{4}$$

$$A = 25.000,0$$

Tabela 13: Planilha de Amortização SAC

N	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PAGAMENTO	SALDO DEVEDOR
0	-	-	-	100.000,00
1	25.000,00	10.000,00	35.000,00	75.000,00
2	25.000,00	7.500,00	32.500,00	50.000,00
3	25.000,00	5.000,00	30.000,00	25.000,00
4	25.000,00	2.500,00	27.500,00	0

Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo 5.2.2: Um empréstimo de R\$ 200.000,00 será pago pelo Sistema SAC em 3 parcelas mensais postecipados, com um período de carência de 3 meses. As amortizações serão calculadas sobre o valor inicial emprestado mais os juros capitalizados durante a carência. Considerando uma taxa de juros contratados de 10% a.m., construir a Planilha de Amortização.

Como o empréstimo começará a ser amortizado no fim do 3º mês de carência, o saldo devedor do empréstimo deverá ser capitalizado à taxa de 10% durante 2 meses.

$$SD_2 = 200.000,00 \times (1,10)^2 = 242.000,00$$

Portanto, as parcelas de amortização serão:

Sendo:

$$A = \frac{PV}{n}$$

Temos:

$$A = \frac{242000}{3}$$

$$A = 80.666,67$$

Tabela 14: Planilha de Amortização SAC

N	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PAGAMENTO	SALDO DEVEDOR
0	-	-	-	200.000,00
1	-	-	-	220.000,00
2	-	-	-	242.000,00
3	80.666,67	24.200,00	104.866,67	161.333,33
4	80.666,67	16.133,33	96.800,00	80.666,67
5	80.666,67	8.066,67	88.733,33	-

Fonte: Elaborado pela autora

Depois de exposto todo o conteúdo, o professor deverá propor listas de exercícios para resolução em sala de aula.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que esta proposta possa contribuir para o ensino da Matemática, tornando mais interessante e atrativa a aprendizagem de alguns conceitos de Matemática Financeira. A abordagem do desenvolvimento deu-se sobre os fundamentos da Matemática Financeira de maneira resumida, portanto há muito a se aprofundar neles.

No atual cenário de economia globalizada, nenhum planejamento prossegue sem que sejam empregados todos os aspectos financeiros essenciais. Levando-se em consideração esses aspectos, foram expostos alguns conceitos totalmente pertinentes a planejamentos financeiros, com o objetivo de levar o aluno a entender o desenvolvimento do processo de capitalização e torná-lo mais reflexivo e apto a gerir suas finanças podendo, dessa forma, exercer sua cidadania com responsabilidade.

São muitas as facilidades para induzir às compras. O parcelamento é uma delas, entre outras. A propaganda é muito grande e leva o consumidor a comprar pelo impulso, sem priorizar suas necessidades. O consumo consciente depende de uma boa educação financeira.

Dessa forma, acreditamos que seja através do conhecimento dos conceitos contidos neste texto que se alcançará de maneira eficaz e ágil o sucesso nos procedimentos e planejamentos realizados.

REFERÊNCIAS

ASSAF NETO, A. **Matemática Financeira e suas Aplicações**. 11. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

BRANCO, A. C. C. **Matemática Financeira Aplicada**. São Paulo: Pioneira Thompson, 2002.

CRESPO, A. A. **Matemática comercial e financeira**. 11. ed. São Paulo: Saraiva, 1996.

FERREIRA, I. **Glossário financeiro**. 2011. Disponível em:
<http://www.posugf.com.br/noticias/todas/877-glossario-financeiro-ivone-a-ferreira>.
Acesso em: 17 maio 2016.

MATEMÁTICA **Financeira**. Disponível em:
http://www2.anhembri.br/html/ead01/mat_financeira/site/lu07/lo1/index.htm. Acesso em: 17 maio 2016.

MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; ZANI, S.C.; **Progressões e Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: Solgraf Publicações Ltda, 1999.

PUCCINI, A. L. **Matemática Financeira Objetiva e Aplicada**; São Paulo: Saraiva, 6ª ed., 2007.

SAVOIA, J. R. F.; SAITO, A. T.; SANTANA, F. A. **Paradigmas da educação financeira no Brasil**. Revista de Administração Pública (RAP) Rio de Janeiro, 2007.

SOARES, A. R. Apostila **Matemática Financeira**; Tupã, 2012.

ANEXOS

Anexo – A

MEMÓRIA TRANSITÓRIA (X, Y, Z E T)

A Calculadora HP-12C dispõe de quatro memórias temporárias (X, Y, Z e T), que operam como se fossem uma pilha de quatro valores, com as seguintes características:

- a) A memória X é sempre aquela cujo o conteúdo aparece no visor;
- b) As demais memórias, Y, Z e T, estão “empilhadas” em cima da memória X, nesta ordem sequencial;
- c) Todas as operações aritméticas são efetuadas com os conteúdos das memórias X e Y;
- d) Os conteúdos dessas quatro memórias são movimentadas nos seguintes casos:
 - quando a tecla ENTER é acionada;
 - quando são efetuadas operações aritméticas (+, -, ×, ÷, etc);
 - quando são acionadas as teclas $R\downarrow$, ou $X\rightleftarrows Y$.
- e) O conteúdo de cada memória só é destruído quando um novo valor é colocado em seu lugar.

Assim, quando o conteúdo da memória X é transferido para a memória Y, temos:

- a memória Y passa a conter o valor anteriormente existente na memória X;
- a memória X continua com seu valor inalterado.

A TECLA ENTER

Quando um número é digitado, ele passa a ocupar a memória, que é a única cujo conteúdo aparece no visor.

Ao se acionar a tecla ENTER são desencadeadas as seguintes transferências de valores entre as memórias transitórias:

- a) O conteúdo da memória X é transferido para a memória Y, mas permanece na memória X;
- b) O conteúdo da memória Y é transferido para a memória Z;
- c) O conteúdo da memória Z é transferido para a memória T;

d) O conteúdo da memória T é perdido.

Todos os conteúdos da pilha de memória sobem de nível, sendo que o conteúdo da última memória (T) é perdido. Acionada a tecla ENTER, o valor inicialmente digitado no visor (memória X) passa a ser conteúdo das memórias X e Y, onde são realizadas todas as operações aritméticas.

A TECLA X \leftrightarrow Y

Essa tecla permuta os valores das memórias X e Y, permanecendo as memórias Z e T sem qualquer alteração.

AS TECLAS CHS E CLX

A tecla CHS troca o sinal (change sing) do conteúdo da memória X, ou seja, do número que aparece no visor.

A tecla CLX limpa o conteúdo da memória X (no inglês clear X).

A TECLA R \downarrow

Essa tecla promove uma “troca” nos conteúdos das quatro memórias transitórias conforme indicado a seguir:

- a) o conteúdo da memória X é transferido para a memória T;
- b) o conteúdo da memória T é transferido para a memória Z;
- c) o conteúdo da memória Z é transferido para a memória Y;
- d) o conteúdo da memória Y é transferido para a memória X.

Assim, o acionamento dessa tecla por quatro vezes consecutivas permite conhecer os conteúdos das quatro memórias temporárias X, Y, Z e T (ao passarem pelo visor), e devolver a pilha de memórias sua posição inicial.

AS TECLAS +, -, × e ÷

Essas quatro teclas efetuam as operações aritméticas com o conteúdo das memórias X e Y, conforme mostram os exemplos:

Exemplo 1: Calcular a expressão: $2 + 8 - 1$.

Isso é alcançado pelas operações indicadas a seguir:

2	ENTER
8	+
1	-

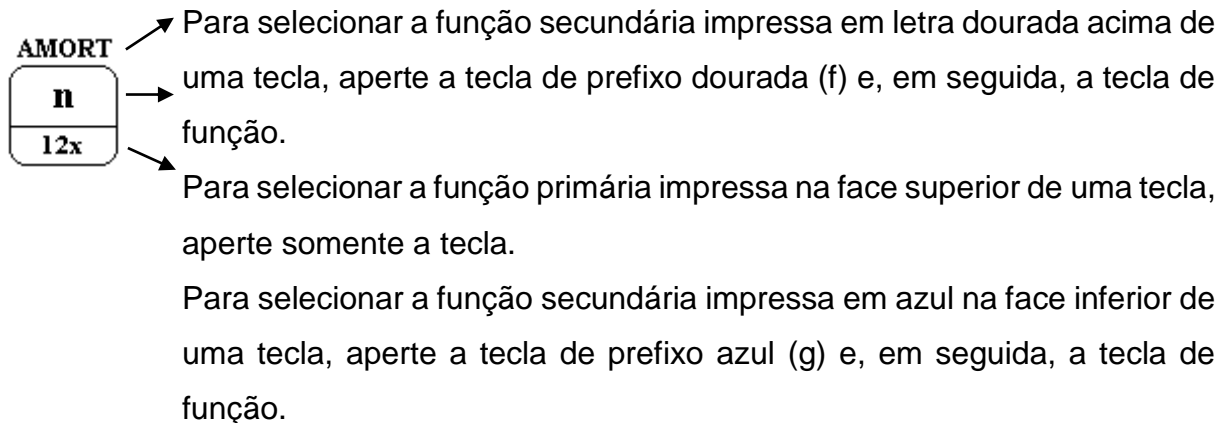
que fornece no visor o resultado final igual a 9,00.

A tabela a seguir mostra a evolução do conteúdo das memórias temporárias, na medida em que as teclas são pressionadas.

Memórias Temporárias	Teclas Digitadas					
	2	ENTER	8	+	1	-
T	0	0	0	0	0	0
Z	0	0	0	0	0	0
Y	0	2	2	0	10	0
X - Visor	2	2	8	10	1	9

AS TECLAS DOURADA (F) E AZUL (G)

Muitas das teclas da Calculadora HP-12C executam duas ou até três funções. A função primária de uma tecla é indicada pelos caracteres impressos em branco na sua face superior. As funções secundárias de uma tecla são indicadas pelos caracteres impressos em letra dourada acima da tecla e em letra azul na sua face inferior. Essas funções secundárias são selecionadas apertando a tecla de prefixo apropriada antes da tecla de função.



Apertando a tecla de prefixo f ou g o indicador de estado correspondente – **f** ou **g** – é ligado no mostrador. Os indicadores de estado são desligados quando você aperta uma tecla de função (executando a função secundária da tecla). Se você apertar a tecla de prefixo f ou g por engano, pode cancelá-la apertando f CLEAR PREFIX.

FIXANDO O NÚMERO DE CASAS DECIMAIS

Para fixar o número de casas decimais que aparece no visor, basta acionar a tecla dourada f e, em seguida, o número de casas decimais desejado (de 0 a 9).

A fixação de casas decimais não elimina o número de casas decimais utilizado internamente pela calculadora.

FUNÇÃO RND

A função RND permite eliminar as casas decimais da memória X, que não são mostradas no visor, mediante critério de arredondamento matemático.

Exemplo 1: Efetuando a divisão $8/3$ com duas casas decimais temos o seguinte resultado 2,67 como resposta. Entretanto, conforme mostrado anteriormente a HP-12C mantém internamente essa resposta com um número muito maior de casas decimais.

Vamos agora executar a função RND acionando as teclas f e RND

O visor continua indicando 2,67, entretanto as demais casas decimais foram transformadas em zeros. Para isso ser confirmado, basta aumentar o número de casas decimais a serem mostradas no visor. Por exemplo, se acionarmos as teclas f e 4 o visor apresentará o número 2,6700.

TROCANDO O PONTO DECIMAL PELA VÍRGULA

A Calculadora HP-12C oferece a possibilidade de se trocar o ponto decimal pela vírgula, mediante a seguinte sequência de operações:

- a) desligar a calculadora pressionando a tecla ON;
- b) com a calculadora desligada, pressionar ao mesmo tempo a tecla ON e a tecla do ponto decimal;
- c) soltar primeiro a tecla ON e depois a tecla do ponto decimal.

Se quisermos voltar à situação original, basta repetir a mesma sequência de teclas.

AS FUNÇÕES Δ DYS E DATE

Essas funções de cor azul possibilitam as seguintes operações com datas de calendário:

- a) a função Δ DYS permite o cálculo exato do número de dias entre duas datas de calendário;
- b) a função DATE permite somar algebricamente uma data de calendário com o número de dias.

As datas podem ser informadas nas sequências dia-mês-ano ou mês-dias-ano. Para entrar com as datas na forma dia-mês-ano é preciso, previamente acionar as teclas g e D.MY, e essas letras serão mostradas no visor. Caso queira entrar com as datas na formas mês-dia-ano é necessário, previamente acionar as teclas g e M.DY.

Para que no visor mostre as datas digitadas, de forma completa, é necessário fixar em seis o número de casas decimais, mediante acionamento das teclas f e 6.

Exemplo 1: Calcular o número de dias entre 19/07/1999 e 25/12/2000.

Entrando com as datas na forma dia-mês-ano

f	6
g	D.MY
19.171999	ENTER
25.123000	
g	Δ DYS

que fornece no visor o resultado final igual a 525 dias.

Após a conclusão da operação Δ DYS o visor (memória X) mostra o número exato de dias entre as duas datas consideradas, e a memória Y contém o número de dias na base do ano comercial de 360 dias.

Exemplo 2: Somar 135 dias a data 25/12/2000.

Entrando com as datas na forma dia-mês-ano

f	6
g	D.MY
25.122000	ENTER
135	
g	DATE

que fornece no visor o resultado final igual a 9.05.2001 3.

A data futura obtida é 09/05/2001. O número 3 no canto direito do visor indica que essa data cai numa quarta-feira (segunda-feira é o dia número 1).

AS TECLAS STO E RCL

A tecla STO serve para guardar (no inglês store) e operar valores nas 20 memórias fixas da Calculadora HP-12C. Essas memórias são indexadas de 0 a 9 e de .0 a .9.

Exemplo 1: Usando a tecla STO

30	STO 1	(o número 30 e guardado na memória 1)
80	STO + 3	(soma 80 ao conteúdo da memória 3 e guarda na própria memória 3)

A tecla RCL serve para chamar (recall) os valores das 20 memórias fixas (0 a 9 e .0 a .9) para o visor da Calculadora HP-12C.

A tecla RCL é também utilizada para chamar para o visor os valores contidos nas cinco memórias financeiras (n, i, PV, PMT e FV), o que permite uma revisão de todos os valores usados na solução dos problemas.

A tecla RCL, quando utilizada em conjunto com as funções CF_0 , CF_j e N_j . Permite a revisão dos valores dos fluxos de caixa não homogêneos que estão registrados na Calculadora.

Exemplo 2: Usando a tecla RCL

RCL 1	(coloca no visor o conteúdo da memória 1)
RCL i	(coloca no visor o valor da taxa de juros i)

LIMPEZA DAS MEMÓRIAS DA CALCULADORA

A limpeza da memória da Calculadora HP-12C é feita de diversas maneiras, conforme indicado a seguir:

- a) tecla CLX : limpa apenas a memória X, isto é, o visor;
- b) teclas f e FIN : limpa apenas as cinco memórias financeiras (n, i, PV, PMT e FV);
- c) teclas f e REG : limpa, de uma só vez, todas as memórias da Calculadora HP-12C;
- d) teclas f e PRGM : limpa os programas que estão gravados na Calculadora HP-12C.

Para que essa limpeza tenha efeito é indispensável que a Calculadora HP-12C seja previamente colocada em fase de programação, com o acionamento das teclas f e P/R;

- e) teclas f e Σ : limpa apenas as memórias estatísticas (R1 a R6), memória da pilha e mostrador.