UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de presidente Prudente

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

EMANUELI VALLINI DA LUZ

A GEOMETRIA FRACTAL COMO FATOR MINIMIZADOR DAS DIFICULDADES REFERENTES A CONCEITOS GEOMÉTRICOS

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

2016

EMANUELI VALLINI DA LUZ

A GEOMETRIA FRACTAL COMO FATOR MINIMIZADOR DAS DIFICULDADES REFERENTES A CONCEITOS GEOMÉTRICOS

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de Presidente Prudente.
Orientador: Prof. Dr. José Roberto Nogueira

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

2016

Luz, Emanueli Vallini da.
A geometria fractal como fator minimizador das dificuldades referentes a conceitos geométricos / Emanueli Vallini da Luz. -- São José do Rio Preto, 2016
81 f. : il., tabs.

Orientador: José Roberto Nogueira
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria euclidiana - Estudo e ensino. 3. Fractais. 4. Matemática - Metodologia. I. Nogueira, José Roberto. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513.81(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Emanueli Vallini da Luz

A GEOMETRIA FRACTAL COMO FATOR MINIMIZADOR DAS DIFICULDADES REFERENTES A CONCEITOS GEOMÉTRICOS.

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de Presidente Prudente.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. José Roberto Nogueira - UNESP - Presidente Prudente
Orientador

Prof. Dr. Daniel Dos Santos Viais Neto – FATEC – Presidente Prudente

Prof. Dra. Cristiane Nespoli Morelato França – UNESP – Presidente Prudente

Presidente Prudente
12 de agosto de 2016

Àqueles que apesar de todas as dificuldades sempre acreditaram que eu seria capaz de alcançar este objetivo.

Eu te dedico!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me proporcionar a graça de mais esta conquista, me ensinando a superar cada dificuldade durante todo este curso; por não me deixar esquecer que Ele em mim habita, que é a força que dá vida a minha alma e por me possibilitar ter tantas pessoas a quem agradecer.

Agradeço aos responsáveis por cada sucesso obtido, meus pais, João Julino da Luz e Vera Lucia Vallini da Luz, sou grata por todo incentivo, confiança e auxílio a cada momento de minha vida.

Agradeço a minha avó Nair, por todo carinho e orações.

Agradeço a todos professores do curso por todos os ensinamentos, experiências e tempo disponibilizados, mas agradeço principalmente pelas palavras de estímulo nos momentos de insegurança.

Agradeço ao Prof. Dr. José Roberto Nogueira que acreditou em mim aceitando-me como orientanda, atendeu prontamente a cada chamado e partilhou suas ideias, experiências e conhecimentos. Quero expressar o meu reconhecimento e gratidão por ser um profissional extremamente qualificado e pela forma compassiva que conduziu minha orientação.

Agradeço aos amigos do curso que foram essenciais para esta conquista, pois trocamos experiências, conhecimentos, confidências, mas acima de tudo criamos um laço de amizade tão intenso que hoje às sextas-feiras possuem uma lacuna. Do mesmo modo à Camila Akemi Abe, que não mediu esforços para me apoiar.

Agradeço a equipe gestora da escola E.E Cel. José Joaquim Bittencourt por permitir que eu aplicasse as atividades, principalmente a coordenação pedagógica, uma vez que apresentou grande interesse pelo projeto e imediatamente considerou meu pedido.

Agradeço aos alunos que participaram dessa pesquisa com respeito e interesse.

Agradeço a Capes pela contribuição financeira.

Das leis mais simples nascem infinitas maravilhas que se repetem indefinidamente.

Bernoit Mandelbrot
(1924-2010)

RESUMO

É incontestável a importância da Geometria Euclidiana para a vida e a evolução da humanidade, e em consequência da defasagem dos alunos em relação a este conteúdo, o presente trabalho, desenvolvido no âmbito da Educação Matemática, iniciou-se com a finalidade de inserir a Geometria Fractal no ensino básico, de modo a viabilizar o processo de ensino e aprendizagem de conceitos da Geometria Clássica, minimizando as dificuldades e promovendo reflexões a respeito da sua generalização, visto que o conhecimento da Geometria Fractal permite observar e arquitetar a noção geométrica. Para embasar nossa pesquisa, nos pautamos nas obras de autores que acreditam no emprego em sala de aula da Geometria Fractal, como forma de promover um ensino geométrico eficaz, do mesmo modo, possibilita o desenvolvimento da capacidade crítica e criativa do aluno, assim como seu senso estético. Partindo dessa hipótese e tendo como sujeitos de pesquisa os alunos do Ensino Médio de uma escola estadual do interior do Estado de São Paulo, optou-se por aplicar duas atividades, a construção, com o uso de régua e compasso, do fractal clássico triângulo de Sierpinski, e a construção do cartão fractal Degraus Centrais, de modo a trabalhar conceitos geométricos de forma contextualizada e diversificada. Verificou-se por meio do questionário diagnóstico, respondido antes da realização das atividades, um baixo rendimento frente aos conceitos da Geometria Euclidiana, após as atividades propostas foi possível verificar, por meio de questionário similar ao inicial, uma melhora significativa nos índices avaliados. Portanto no que se refere aos resultados, pode-se constatar que a Geometria Fractal pode apresentar resultados satisfatórios ao ser aplicada no Ensino da Matemática, visto que pode ser empregada não somente como estímulo para que o aluno apresente interesse pela Matemática, mas também como elemento facilitador da aprendizagem.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana. Fractais. Matemática. Ensino.

ABSTRACT

It is incontestable the importance of Euclidean geometry and the evolution of humanity and in consequence of the gap of students in relation to this content, this study, developed within the Mathematics Education, it began with the purpose of inserting the fractal Geometry in a basic education, so to facilitate the process of teaching and learning concepts of classical geometry, because the knowledge of fractal geometry allows us to observe and architect in the geometric sense. To support our search, with base in the works of authors who believe in the job in the classroom of fractal geometry, as a means of promoting effective geometric education, likewise, allows the development of critical and creative capacity of the student, as well as its aesthetic sense. Based on this hypothesis, with the research subjects, students in a high school from a state school in the state of São Paulo, two activities were implemented, the construction of the Sierpinski triangle fractal using ruler and compass and building of cards fractals, to work geometric concepts in context and diversified. It was found through a questionnaire diagnosis a low income compared to the concepts of Euclidean geometry, after the proposed activities was possible to find a significant improvement in the indices obtained. So with regard to the results, it can be find that the fractal geometry can provide satisfactory results when applied to mathematics education, as it can be used not only as a stimulus for the student to interest for this school subject, but also as part facilitator of learning.

Keyworks: Euclidean Geometry. Fractals. Mathematics.Teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

É perceptível o descontentamento dos alunos em relação a escola como um todo, na disciplina de Matemática, especificamente, esse desagrado aumenta conjuntamente com a dificuldade da aprendizagem.

Com base em minha prática didática e na troca de experiências com outros docentes da área, acredita -se que isso ocorra em virtude das particularidades e complexidades da disciplina que exigem do educando habilidades de leitura, articulação e interpretação dos símbolos em distintas representações e linguagens: equações, fórmulas, sentenças, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas; e nos faz presenciar assim, a insatisfação do aluno sendo disseminada através de atitudes indisciplinares, desinteresse e um alto índice de ausências e evasão, que por sua vez, refletem diretamente no processo de ensino e aprendizagem.

Como educadores conscientes da importância da disciplina nas diversas ciências e engajados a oferecer aos educandos uma educação de qualidade, esses índices são preocupantes, no decorrer dos anos letivos nos deparamos com classes, nas quais os alunos se encontram em diferentes níveis de conhecimentos, o que dificulta ainda mais a prática educacional e considerando o número de alunos por sala de aula, sabemos que é praticamente impossível estabelecer um ensino individualizado.

Em busca de uma solução para esta inquietação, que atinge um número considerável de educadores, empregou-se uma metodologia pautada na Geometria Fractal, que relacionou de forma atrativa o ensino da Matemática com elementos fora do ambiente educacional, motivando os discentes a se tornarem-se ativos na construção do seu próprio conhecimento; suprindo suas expectativas e interesses em relação a escola.

Embora seja inegável o reconhecimento da Geometria Euclidiana dentro da Matemática e na vida das pessoas, visto que por meio dela aprende-se figuras comuns e simples, como polígonos e poliedros, que facilmente são encontradas no cotidiano, através de estruturas com esses padrões regulares, como construções, edifícios e objetos industrializados, na natureza existem outras formas que se esquivam a esta regra, sendo inoportuno descrevê-las e analisá-las partindo dos conceitos dessa Geometria, neste impasse nos deparamos com outros sistemas axiomáticos, como a Geometria dos Fractais.

Assim, a motivação para trabalhar com a Geometria Fractal surgiu de sua ampla integração e contribuição com a própria Matemática e com as diversas extensões do conhecimento, como: Medicina, Biologia, Física, Geologia, Economia, etc. Pois, além de ser possível representar e compreender o mundo em que vivemos, ela traz benefícios para a vida da população.

Na Medicina, podemos citar várias áreas em que os fractais se encontram, a dimensão fractal, por exemplo, está sendo usada para diagnóstico quantitativo e objetivo de diversas patologias, como os tumores, que baseados nos seus padrões de crescimento torna possível comparar células sadias e células cancerígenas. Alguns componentes do corpo humano como os pulmões, o sistema circulatório e a superfície dos tecidos, seguem padrões fractais, do mesmo modo, na área cardíaca "sabe-se que taquicardia e fibrilação estão ligadas à regularidade das batidas do coração e esta regularidade pode ser representada por modelos fractais" (SWIDERSKI, 2015, p. 15)

Outro fator que nos motiva é a beleza incontestável dos fractais, Barbosa (2005, p.14), nos conta que "ver e sentir o belo e apresentar um senso estético é talvez propriedade inerente a alguns poucos temas da matemática; entre outros, muitos são áridos e desinteressantes". No entanto o conhecimento dos fractais, estimula nossa imaginação e nos conduz a explorar terrenos que não desconfiávamos existir.

"O despertar e desenvolver do senso estético pode muito bem ser cuidado e aproveitado com o tema *fractais*, quer apreciando o belo irradiante, quer observando a regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades" (BARBOSA, 2005, p.14). Nesse embasamento, surge a questão norteadora de nossa pesquisa: Que contribuições a Geometria Fractal pode proporcionar ao ensino em nível Médio, em relação ao ensino e a aprendizagem da Geometria?

A questão acima apresenta-se muito ampla e de modo a facilitar sua análise, optamos por decompô-la nas seguintes questões auxiliares:

- Como os alunos interagem com os materiais manipuláveis e com as dobraduras ao construir fractais na sala de aula?
- Como os alunos elaboram, buscam e discutem suas conjecturas em relação à procura dos resultados dos cálculos relacionados a área, perímetro e volume?
- Como os alunos validam suas soluções?

Mediantes as questões estabelecidas, acredita-se que quando incluída no ensino de forma contextualizada e utilizando-se materiais manipuláveis, a Geometria Fractal permitirá ao aluno ampliar a sua compreensão sobre os fenômenos naturais e a Geometria de objetos não tradicionais, desenvolvendo a curiosidade e espírito experimental.

Todas essas hipóteses estão diretamente de acordo com os objetivos da Matemática para o Ensino Médio, contidos nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNs):

> No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. [...]
> [...]Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 1997, p.8)

Em síntese, o objetivo geral do trabalho é averiguar quais as contribuições que a Geometria fractal pode proporcionar ao ensino dos alunos do Ensino Médio, em relação aos conceitos da Geometria Euclidiana, apresentando ao aluno a matemática de forma diferenciada da qual estão habituados, por meio da utilização de materiais manipuláveis, sem desviar-nos dos conteúdos estabelecidos pelo Currículo do Estado de São Paulo. Além disso, pretendemos:

- Apresentar ao aluno a geometria fractal, a noção de recursividade, os fractais clássicos e suas características, assim como explorar a ideia de infinito.
- Tornar as aulas de matemática mais atrativas;
- Minimizar as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos;
- Promover reflexões a respeito da generalização de conceitos matemáticos.

Para uma melhor compreensão do tema abordado, o trabalho é composto em capítulos e cada capítulo possui suas seções.

No primeiro capítulo, é relatado de modo sucinto os aspectos históricos do nascimento da Geometria Euclidiana, enfatizando os postulados de Euclides, em virtude do destaque que possuem na história da Geometria Euclidiana, no Ensino Básico e principalmente pela contribuição para a procura e descobrimento de novas Geometrias. Em seguida, é discorrido sobre os matemáticos que descobriram uma das Geometrias não-Euclidianas, a Geometria hiperbólica, visto que a partir desse período as portas estavam abertas para o nascimento de outras Geometrias. E por fim, discutimos sobre a forma como o ensino da Geometria é vista no ambiente escolar e fora dele, de acordo com pesquisadores como Lorenzato (1995) e Brasil (1998).

No segundo capítulo, é discorrido sobre o nascimento da Geometria Fractal e seu criador, assim como as características que compõem um fractal e os define. Depois, é exposto dois métodos para o cálculo da dimensão de um fractal, visto que diferentemente da Geometria Euclidiana que apresenta dimensões sempre inteiras, na Geometria fractal geralmente a dimensão é um número fracionário. O método mais conhecido e utilizado é a dimensão de Hausdorff, que recebeu esse nome em homenagem ao seu criador, o matemático alemão Felix Hausdorff (1868 - 1942). Posteriormente são apresentados e construídos alguns dos fractais mais conhecidos e em cima deles é feita uma análise em relação a dimensão, quantidade de segmentos, seu comprimento, medida de área, etc. Finalizando, é apresentada de forma sucinta o que é a música fractal, uma outra aplicabilidade da Geometria fractal. Vale salientar que nosso interesse é mostrar a existência de aplicabilidade dos fractais na música e não detalhar cada uma das técnicas citadas para a sua criação, no entanto para aqueles que pretendem se aprofundar no assunto, sugerimos o trabalho de Queiroz e Kon (2013).

No terceiro capítulo são apresentadas sugestões de atividades que podem ser facilmente exploradas em sala de aula, relacionando a teoria com a prática. Em seguida é apresentada a pesquisa de campo, realizada com alunos da segunda série do Ensino Médio, expondo cada etapa da aplicação, a metodologia selecionada e a análise de dados obtidos que derivam dos questionários respondidos, apresentando os resultados.

Ao encerrar este trabalho, retomamos e respondemos as indagações iniciais da pesquisa, expondo as considerações finais.

1 O ENSINO DA GEOMETRIA

“As leis da natureza não são senão os pensamentos de Deus”
Euclides de Alexandria

1.1 Principais aspectos históricos da Geometria Euclidiana

A Geometria como tudo pertencente a matemática, surgiu da necessidade do homem de entender o mundo ao seu redor. Segundo Brás (2009), foi a partir de Tales de Mileto (600 a.C., aproximadamente) que a dedução de fatos geométricos começou a ser testada. Já as primeiras academias foram estabelecidas na Grécia, em torno de 500 a.C., onde majorava a busca por conhecimentos sobre Geometria. No entanto, os conhecimentos de Geometria se desenvolveram como ciência dedutiva, graças a Euclides, por volta de 300 a.C.

Os detalhes da vida de Euclides são desconhecidos, não se sabe sobre sua naturalidade e nem onde ocorreu a sua formação acadêmica. Deduz-se que estudou em Atenas, na Academia de Platão, devido à similar particularidade entre o desinteresse de ambos pelas aplicações práticas. “Euclides eventualmente se estabeleceu em Alexandria, Egito, onde o soberano Ptolomeu I havia criado um importante instituto científico conhecido como Museu. No Museu, Euclides tornou-se um bom educador, com reconhecida habilidade como expositor” (BRÁS, 2009, p.10)

É conhecido até os tempos atuais como o pai da Geometria, visto que por meio da reunião dos estudos consolidados anteriormente aos dele, organização e formalização dos mesmos, é que podemos conhecer uma matemática tão bem sistematizada em princípios dedutivos e, ao mesmo tempo, dirigida pelo mais fervoroso rigor matemático.

> Sabe-se que a obra mais influente de Euclides, Os Elementos, escrita por volta de 300 a.C., é uma compilação de teoremas conhecidos e demonstrados. Euclides sistematizou a grande massa de conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo do tempo, dando ordem lógica e estabelecendo o conceito de lugar geométrico (BRÁS, 2009, p.11)

Essa obra é formada por 13 livros, contendo 465 proposições ou teoremas, abrangendo Geometria plana e espacial, álgebra e teoria dos números. Na seção que se refere a Geometria, sua estrutura é composta por cinco postulados e cinco axiomas. Foi considerada uma obra tão admirável que permaneceu praticamente inalterada durante aproximadamente 2000 anos.

A seguir são apresentados os cinco postulados de Euclides, uma observação válida a se fazer, é que o quinto postulado de Euclides, também conhecido como postulado das paralelas, não parece tão evidente ou intuitivo como os anteriores.

I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando dois pontos.

II. Pode-se prolongar (de uma única maneira) uma reta finita continuamente em uma linha reta.

III. Pode-se traçar um círculo com centro qualquer e raio qualquer.

IV. Todos os ângulos retos são iguais.

V. Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos.

Regida por esses postulados, surgiu a Geometria Euclidiana, que recebeu esse nome em homenagem a Euclides, sendo o embrionário e mais duradouro padrão para o espaço físico. Além disso, aparentavam um encadeamento logico perfeito. No entanto, “com base na análise das propriedades de um sistema axiomático, percebe-se que as demonstrações de Euclides eram cheias de apelos à intuição com hipóteses implícitas, fazendo-se necessário uma reconstrução” (BRÁS, 2009, p.13).

Dessa forma, em obra publicada em 1899, “Fundamentos da Geometria”, David Hilbert (1862-1943), matemático alemão, expõe um dos trabalhos de maior estima, entre aqueles que procuravam aperfeiçoar a Geometria de Euclides sob o ponto de vista de estruturação lógica. Nesta obra, se solidificaram termos como: conceitos primitivos e a divisão dos axiomas em grupo.

1.2 O nascimento de uma nova Geometria

De todos os postulados criados por Euclides, o quinto é o mais polêmico. Segundo Brás (2009, p.14), “o quinto postulado tornou-se alvo de críticas dos *Elementos* no tempo de Euclides e durante 2.000 anos inúmeras tentativas foram feitas para demonstrá-lo. Uma das consequências foi a produção de vários outros equivalentes denominados *substitutos*”. A preocupação dos matemáticos em relação a esse postulado ocorreu, “devido ao fato da propriedade axiomática da independência, não estar tão evidente uma vez que o ponto de interseção poderia ocorrer a milhares de quilômetros” (CARDOSO; SOUSA, 2009, p. 10).

Todos esses esforços para demonstrar o quinto postulado de Euclides possibilitaram aos matemáticos a descoberta de uma nova Geometria, a Geometria não-euclidiana.

O primeiro a denominar de Geometria não-Euclidiana foi Gauss (1777-1855), o maior matemático de sua época. Poucos foram os resultados de Gauss que ficaram conhecidos durante sua vida, por causa das preocupações com a pressão realizada pela inquisição para com os estudiosos. "Sabe-se da descoberta da nova Geometria por Gauss graças as suas anotações e correspondências que trocava com alguns matemáticos da época. Muitos de seus resultados foram divulgados dessa forma" (BRÁS 2009, p. 22).

Por Barbosa (2002 apud BRÁS, 2009, p. 23), é possível ler um fragmento da carta de Gauss a F.A. Taurinus, em 8 de novembro de 1824, na cidade de Gottingem:

> "... A hipótese que a soma dos ângulos é menor que 180º leva a uma geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente, a qual desenvolvi a um ponto que me satisfaz plenamente, no sentido de que posso resolver qualquer problema nela, com exceção da determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori. ...
> .... Os teoremas dessa geometria parecem paradoxais e absurdos para um não iniciado; mas reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contém nada de impossível. ...
> ... Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não euclidiana não tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe a nossa concepção é que se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medida linear (desconhecida por nós). ..."

Desse modo, pode-se verificar que foi na segunda década do século XIX que Gauss começou a formular a Geometria não-Euclidiana, composta de teoremas e conceitos, em que não era válido o quinto postulado de Euclides. Juntamente com Gauss, outros dois matemáticos contribuíram para a formulação da nova Geometria. Um deles tratava-se de Johann Boylai (1802 - 1860), filho do húngaro Wolfgang Boylai (1775 - 1856), o qual era amigo de Gauss e com o qual este trocava correspondências sobre o quinto postulado de Euclides, um jovem matemático, que se dedicou ao estudo das paralelas e "em 1820, resolveu negar o quinto postulado de Euclides e resultados interessantes começaram a aparecer. Ele acreditou na possibilidade da existência de uma geometria geral, na qual a Geometria Euclidiana seria um caso particular" (BRÁS, 2009, p. 24).

O outro matemático que contribuiu para o descobrimento da nova Geometria, é considerado o maior matemático russo de seu tempo, Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793 - 1856) publicou suas conclusões sobre a geometria não-Euclidiana dois anos antes da publicação de Johann Boylai. Brás (2009, p.25-26) nos esclarece que:

> Lobachewsky, Gauss e J. Boylai desenvolveram a geometria não- Euclidiana ao mesmo tempo, mas Lobachewsky foi o primeiro a comunicar suas descobertas. [...]
> Grandes matemáticos continuaram o estudo da Geometria não-Euclidiana, como Beltrami, Poincare, Klein e Riemann, desenvolvendo o assunto e aplicando em outras áreas da matemática.
> A independência do postulado das paralelas trouxe uma nova visão sobre a geometria e como Gauss havia previsto, a aceitação dessas novas ideias seria lenta. Em 1868, Beltrami provou definitivamente que não era possível provar o quinto postulado.

Essa primeira Geometria não-Euclidiana foi chamada de Geometria hiperbólica, e se apresenta tão consistente quanto a Geometria Euclidiana, não podendo ser contrariada. É importante lembrar que apesar dela não ser o foco de estudo dessa pesquisa, ela foi a introdutora para a origem das demais Geometrias não-Euclidianas.

1.3 O ensino da Geometria no ambiente escolar

O Movimento da Matemática Moderna, desencadeado no Brasil, nas décadas de 60 e 70, gerou mudanças significativas nas práticas escolares. De acordo com Sampaio (2010), esse movimento surgiu nos Estados Unidos em 1952, com o intuito de melhorar o processo de ensino e aprendizagem, devido ao baixo desempenho dos alunos; minimizando a distância entre o ensino realizado na Universidade e o ensino desenvolvido na educação básica.

O ensino da Geometria era pautado no livro de Euclides e adotava a mesma técnica dedutiva, porém os educadores do Movimento da Matemática Moderna questionavam a falta de rigor no processo dedutivo.

Para Kline (1976, p.72), “a geometria euclidiana – como a maioria dos adultos a aprendeu na escola superior que é essencialmente a própria apresentação de Euclides em seus *Elementos* cerca de 300 A.C., é dedutiva. Contudo, não rigorosa”. Para que o raciocínio do aluno se tornasse dedutivo em relação aos axiomas e teoremas, houve, de acordo com Sampaio (2010) a criação de novos e desnecessários axiomas e teoremas. Infelizmente, a reforma sugerida pelo movimento trouxe numerosos problemas.

Lorenzato (1995, p.4) adverte que “o Movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcantemente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam”. No entanto, a reforma eliminou o formato anterior e criou uma lacuna nas práticas pedagógicas.

O Movimento durou até meados dos anos 80, nos informa Sampaio (2010), até que foi proposto, pelo Conselho Nacional Professores de Matemática dos Estados Unidos, que o ensino da Matemática estivesse relacionado com a resolução de problemas; influenciando novamente as mudanças mundiais no ensino da Matemática.

Apesar de todas as mudanças que ocorreram nessas décadas, o ensino da Geometria ao ser comparado com o ensino de outros conteúdos da Matemática, é o que está mais abandonado, principalmente por aqueles que não possuem domínio para compreendê-la.

> Alunos, professores, autores de livros didáticos, educadores e pesquisadores, de tempos em tempos, têm se deparado com modismos fortemente radicalizantes, desde o formalismo impregnado de demonstrações apoiadas no raciocínio lógico- dedutivo, passando pela algebrização e indo até o empirismo inoperante. No Brasil, já fomos mais além: a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula. Vários trabalhos de pesquisadores brasileiros, entre eles Peres (1991) e Pavanelo (1993), confirmam essa lamentável realidade educacional (LORENZATO, 1995, p.3).

Lorenzato (1995) também relata que inúmeros são os problemas para esse descaso com o ensino da Geometria, mas, aponta dois como sendo os mais proeminentes O primeiro deles está relacionado a insuficiência de conhecimentos necessários dos professores para a prática didática; ele ainda acrescenta que o professor que desconhece a Geometria, também desconhece os benefícios que ela agrega na vida do cidadão, desse modo, para esses professores o dilema está entre ensinar a Geometria, apesar dessa falta de conhecimento ou não ensiná-la. O segundo problema está no uso excessivo de livros didáticos, visto que em muitos a Geometria é apresentada como um aglomerado de definições, propriedades, fórmulas e nomes, sem nenhuma aplicabilidade, descontextualizados do mundo real; definida por meio de banais aplicações do mundo físico. Defendendo firmemente o Ensino da Geometria na sala Lorenzato (1995, p. 5) ainda argumenta:

> Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. "A Geometria está por toda parte", desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la ... mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria.

Lorenzato (1995) nos faz compreender, que a Geometria possui uma importância incontestável na vida do ser humano. Portanto, com empenho, é possível proporcionar um ensino de Geometria mais envolvente, concreto e contextualizado.

Em consonância com o pensamento de Lorenzato (1995), os PCNs do Ensino Fundamental apontam que os estudos geométricos no Ensino Fundamental, incluídos no bloco espaço e forma, devem ser "explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permitam ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento" (BRASIL, 1998, p. 51). O estudo da Geometria é um campo produtivo para trabalhar com situações-problema, visto que favorece o desenvolvimento da aptidão argumentativa e a construção de demonstrações, além de ser um tema pelo qual os alunos tendem a se interessar facilmente. Entretanto, nas aulas de matemática, seu destaque tem sido mínimo. "Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (BRASIL, 1998, p. 122).

As atividades de Geometria são muito favoráveis para que o educador arquitete em conjunto com seus alunos um caminho para a compreensão da relevância da prova para legitimar as hipóteses levantadas, partindo de experiências palpáveis.

No Ensino Médio, segundo os PCNs a Geometria "trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas: Geometrias plana, espacial, métrica e analítica" (BRASIL, 1997, p. 123). Temos ainda, que as propriedades referentes ao que a Geometria aborda são associadas tanto à posição relativa das formas, quanto as medidas.

A primeira associação citada é marcada pela identificação de propriedades relacionadas ao paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas; a segunda está relacionada a quantificação de comprimentos, áreas e volumes. Vale lembrar que o ensino das propriedades métricas não deve substituir as relações geométricas em si, visto que é apenas uma seção do trabalho com a Geometria que relaciona o ensino das formas geométricas e a quantificação de grandezas.

Assim, em acordo com o a Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo "a interpretação de que a geometria plana é assunto do Ensino Fundamental e a espacial e analítica são do Ensino Médio é muito frequente em propostas curriculares, mas não traduz a necessidade permanente de imbricação de tais temas nos dois níveis de ensino" (SÃO PAULO, 2008, p. 46). A geometria deve ser tratada nos sete anos da grade curricular, por meio da abordagem em espiral, que significa que todos os temas pertencentes a este conteúdo podem aparecer nas séries fundamentais e médias, a distinção se fará pelo aprofundamento ao tema.

Nota-se ainda que não é discutido nem orientado o ensino das Geometrias não-Euclidianas nos PCNs e na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, diferentemente do Estado do Paraná, por exemplo. Nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, no ensino fundamental, o aluno deve entender "noções de geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais". Já no ensino médio o professor deve aprofundar esses conceitos. (PARANÁ, 2008, p. 56)

Em relação a Geometria fractal, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná, prevê o estudo dos fractais clássicos: "o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades" (PARANÁ, 2008, p. 57).

Apesar da Geometria não-Euclidiana ainda não ter um espaço reservado no Currículo do Estado de São Paulo, ela atende aos objetivos descritos nos PCNs do Ensino Médio, dentre os quais citamos:

> No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. [...]
> [...] Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 1997, p.108)

Percebemos, portanto, que o Estado de São Paulo ainda tem muito a evoluir quanto ao ensino da Geometria, principalmente em oferecer ao aluno o conhecimento das Geometrias-Euclidianas, pois apesar das pesquisas que vêm constatando que a Geometria tem sofrido grande descaso, sobretudo devido à falta de domínio e compreensão do professor em relação ao conteúdo, nos PCNs do Ensino Fundamental e Médio, é frisado que o ensino da Geometria deve estar voltado para a contextualização com o mundo físico, para que o aluno compreenda sua relevância e tenha capacidade de perceber sua utilidade nas outras áreas do conhecimento.

2 GEOMETRIA FRACTAL

“Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca das árvores não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta"

Benoit Mandelbrot

2.1 Aspectos históricos da Geometria Fractal

As geometrias não-Euclidianas, como visto na Seção 1.2, foram criadas por volta da segunda década do século XIX, na tentativa de buscar soluções para problemas em que as definições da geometria Euclidiana fracassavam. Com os fractais não foi diferente, a sua linhagem emana da impossibilidade de medir o tamanho de objetos com as propriedades advindas de Euclides.

O termo “fractal”, como será visto adiante, foi formalizado por Benoit Mandelbrot, no entanto, desde a antiguidade, existem vestígios de formas que se assemelham ao que se denominavam “fractais”: “os egípcios utilizavam padrões fractais simples, na Índia encontram-se arquiteturas antigas com o mesmo padrão mostrando o uso e estudo inconsciente de estruturas fractais bem antes da teoria ser consolidada e apresentada formalmente ao mundo” (SWIDERSKI, 2015, p. 8). Também há diversas curvas e figuras criadas por matemáticos conhecidos, que antecedem em anos sua inclusão na categoria dos fractais, já que possuem as características que os define. Retomando as indagações de Swiderski (2015) segue, em ordem cronológica, os primeiros estudos propostos sobre fractais por matemáticos notáveis; estes estudos possuíam finalidades diversas e possivelmente contribuíram para a criação de Mandelbrot.

Helge Von Koch descreveu uma curva contínua sem tangentes. Giuseppe Peano, para estudar nuvens, criou e utilizou práticas de curvas de preenchimento espacial. Albert Einstein concluiu que o movimento browniano é ocasionado por movimentos térmicos aleatórios das moléculas de um líquido e Gaston Julia pesquisou funções iterativas que diretamente se relacionam aos fractais.

Ainda de acordo com o autor supracitado, Karl Weierstass foi o primeiro estudioso a exemplificar a construção analítica de uma função contínua e não diferenciável. Isso ocorreu em 1872 e o gráfico gerado por essa função é o que conhecemos hoje por fractal. George Cantor, em 1883, publicou exemplos de subconjuntos da reta real com propriedades incomuns e, ao final desse mesmo século, Felix Klein e Henri Poincaré desenvolveram alguns fractais.

Em 1904, Helge Von Koch definiu geometricamente uma curva semelhante ao gráfico da função de Karl Weierstass. Waclaw Sierpinski, em 1915, construiu o triângulo de Sierpinski e no ano seguinte o tapete de Sierpinski.

Em 1918, Pierre Fatou e Gaston Julia expuseram independentes comportamentos fractais relacionados aos números complexos e funções. No mesmo ano Felix Hausdorff definiu a dimensão dos fractais. Os dois acontecimentos neste ano tiveram grande contribuição na evolução dos fractais. Paul Levy, desenvolveu a curva de Levy, um dos primeiros fractais em curva. O conhecido mundialmente pela elaboração da 'Escala Richter", Charles Francis Richter, descobriu em 1954, que as frequências de magnitude estatística de terremotos equivale a associação fractal entre o tamanho característico de ruptura e o número de terremotos.

Diversos foram os trabalhos que estavam associados aos fractais, contudo na época em que foram gerados alguns dos conjuntos citados acima, como o conjunto de Cantor, a curva de Weiertrass e de Peano eram chamados "entes patológicos" ou "monstros matemáticos", pois não havia fundamentação teórica que os referisse. "A partir de 1960, com auxílio da computação que esta ciência conseguiu se desenvolver plenamente. Isto devido o poder de cálculo e as possibilidades de representações gráficas que os computadores conseguem executar" (SWIDERSKI 2015, p. 9).

Bernoit Mandelbrot foi um dos precursores na implementação da computação gráfica nas pesquisas sobre os fractais. Nascido em Varsóvia, em 1924, Mandelbrot enfrentou dificuldades na guerra, devido a ocupação alemã, quando morava em Paris, por volta de 1936. Quando a guerra se abrandou submeteu-se aos exames de admissão da Escola Normal e da Escola Politécnica, iniciando seus estudos na Escola Normal passando, em pouco tempo, a estudar na Escola politécnica. Nesta época uniu-se ao grupo Bourbaki, formado por jovens que tinham como objetivo a reconstrução da matemática francesa. Segundo Barbosa (2005, p. 11):

> As preocupações do grupo Bourbaki, talvez iniciadas como reação ao grande pensador Poincaré, que não tinha muitas exigências em relação ao rigor, visavam uma matemática formal e pura, sem influências possivelmente enganosas pelo visual geométrico. As ideias se propagavam por vários países, atingindo inclusive os Estados Unidos, e nós brasileiros chegamos a ter mesmo excessos, principalmente na educação, de muitos de seus adeptos fanáticos. A matemática tornou-se mais rigorosa, pautando-se pelo método axiomático. É claro que os preceitos de Bourbaki tornaram-se quase obrigatoriedade e trouxeram louros para a própria matemática, desvinculando-a de outras ciências, ressaltando o seu primado entre elas.

Como havia uma dominação da abstração imposta por Bourbaki, Mandelbrot, abandonou o grupo, e no ano 1948 foi estudar Ciência Espacial nos Estados Unidos, passando a trabalhar na IBM- Centro de pesquisas Thomas Watson, com problemas de economia. Enquanto trabalhava na IBM percebeu “questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em rede entre os computadores. Mandelbrot soube dos engenheiros que algum ruído não podia ser eliminado e interferia nos sinais; a aleatoriedade e a irregularidade dos ruídos afastavam os engenheiros na busca de soluções” (BARBOSA, 2005, p.12).

Mandelbrot resolveu o problema com que foi deparado associando os erros de transmissão, usando um dos conjuntos apresentados em um antigo trabalho de Georg Cantor. Então, durante anos buscou aplicar suas ideias em diversas conjunturas e modelos, até mesmo de outras áreas do conhecimento, visto que em torno de 1960, apesar dele reconhecer essas figuras cada vez que as via, elas ainda consistiam em uma lívida visão da realidade.

Nesse impasse, surgiram diversas definições para os fractais, porém a que serviu como junção para todas elas, foi a introduzida por Mandelbrot, que tem origem no adjetivo em latim fractus, que significa irregular ou quebrado. Analogamente, o verbo em latim frangere tem como significado: quebrar, criar fragmentos irregulares, apropriadamente pode-se dizer que fractus também significa irregular.

> Eu criei fractal de origem do adjetivo latim fractus. Que corresponde ao verbo Latino frangere que quer dizer “quebrar:” para criar fragmentos irregulares. Isso é portanto prático e apropriado para nossas necessidades! que, em adição “ fragmentado” (como infração ou refração) fractal deve também dizer “irregular”, ambos dizendo sendo preservado em fragmento (MANDELBROT, 1977, p.4, tradução nossa).

Ainda de acordo com o autor, os fractais são objetos geométricos repletos de abstrações que possuem padrões complexos que se repetem indefinidamente, estando limitados a uma área finita ou não. Esses padrões existentes nas formas geométricas, têm semelhantes características e uma relação peculiar com as formas encontradas na natureza.

> As formas fractais podem ser percebidas em todos os lugares do universo, seja nos recônditos infinitesimais da estrutura átomo, nos arranjos moleculares das proteínas e dos aminoácidos, nas células do organismo, na organização dos diferentes tecidos, no arranjo íntimo dos cristais inorgânicos, seja nos arroubos espontâneos de tamanho indeterminado, como o são os recortes geográficos das linhas costeiras, as efêmeras imagens abstraídas dos movimentos das nuvens, os sólidos e harmônico contorno das montanhas, o inusitado trajeto percorrido pela fumaça do incenso, as fantásticas formações estalactites e estalagmites encontradas no mundo das cavernas, as mandálicas galáxias que povoam o Universo de formas estelares mirabolantes... (PIMENTEL;URBAN, 2003, p.18)

Além disso, um fractal é determinado a partir de uma fórmula matemática aplicada iterativamente, produzindo resultados fascinantes. Temos duas categorias em que os fractais se enquadram: geométricos e aleatórios. Os fractais aleatórios são construídos com o auxílio dos computadores, como exemplo podemos citar os terrenos fractais e o voo de Levy; já os fractais geométricos repetem continuamente uma mesma regra de construção, por esse motivo possuem uma estrutura auto semelhante.

A autossemelhança ou autossimilaridade, assim como a complexidade infinita e a dimensão fracionária são características presentes nos fractais. A autossimilaridade é um aspecto geométrico que é invariante por escala. Nas palavras de Silva e Souza (2010, p. 3), "é uma das características dos fractais de apresentar cópias de si mesmo em seu interior em diferentes tamanhos. Uma pequena parte é semelhante ao todo, ou seja, uma fração de um fractal é uma réplica do todo". Swiderski (2015) acrescenta que Mandelbrot também chamava a autossimilaridade de homotetia interna e autossemelhança estrita quando as réplicas são sempre iguais e adquiridas usando um mesmo fator de redução. Em alguns fractais, como a curva de Peano, o floco de neve de Koch, o triângulo de Sierpinski e a esponja de Menger a autossimilaridade é gritantemente visível.

A complexidade, na fala de Silva e Souza (2010, p. 3), "é uma propriedade dos fractais a qual significa que nunca se pode representá-los completamente, pois os detalhes dos mesmos são infinitos. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores". A autossimilaridade e complexidade infinita podem ser vistas nas figuras 1 e 2. A dimensão fractal difere da dimensão euclidiana, podendo ser fracionária e, portanto, será melhor detalhada na Seção 2.3.

Figura 1 – Exemplo de autossimilaridade e complexidade na natureza

Fonte: https://www.flickr.com/photos/28481088 @N00/31812

Figura 2 – Exemplo de autossimilaridade e complexidade na natureza

Fonte: https://www.flickr.com/photos/28481088 @N00/3179200750/in/photostream/

2.2 Conjunto de Mandelbrot

Antes de definirmos o conjunto de Mandelbrot é conveniente nos lembrarmos de Pierre Fatou (1878-1929) e Gaston Julia (1893-1978), uma vez que, como afirma Barbosa (2005, p.45), os resultados obtidos por esses dois matemáticos franceses "forneceram as bases matemáticas para Mandelbrot, que soube aproveitá-los e desenvolvê-los com recursos computacionais para seu conjunto conhecido hoje como Conjunto de Mandelbrot".

Fatou e Julia tiveram como campo de estudo os sistemas dinâmicos complexos, analisando processos iterativos de funções, ou seja, observaram o comportamento da imagem da função $f(z) = z^2 + c$, onde z é um número no plano complexo e c é um complexo constante, conforme as sucessivas iterações, além disso para cada ponto z_0 será obtido um valor ao qual chamamos de órbita de z_0.

> Devemos analisar duas situações de resultados para a órbita de z_0, uma quando é atraída para o infinito e a outra quando é atraída para um círculo em torno da origem. No primeiro caso, chamamos z_0 de ponto de escape, então, ele não pertence a nenhum conjunto de Julia. No segundo caso, chamamos z_0 de ponto prisioneiro, então, ele pertence a algum conjunto de Julia. Esses dois conjuntos (o conjunto dos pontos de escape - conjunto escape - e o conjunto dos pontos prisioneiros - conjunto prisioneiro) formam o conjunto de Julia, pois ambas as fronteiras dos dois conjuntos são simultâneas (ZAMBELLI, 2013 p.30).

No discurso de Miranda (2012, p.114) o conjunto de Julia é "a fronteira da coleção de pontos cujas órbitas escapam para o infinito. Isto significa que pontos em um conjunto de Julia têm órbitas que não escapam para o infinito, mas arbitrariamente muito perto existem pontos cujas órbitas escapam" e nos apresenta um exemplo de conjunto de Julia:

Dada a função $T(z) = z^2$, onde $z = a + bi$ é um número complexo. Logo:

$$T(a + bi) = a^2 - b^2 + 2abi. \tag{1}$$

Substituindo o valor de z na função obtém-se um novo número complexo denominado z^2. Desse modo a órbita de determinado número complexo nesta função é um conjunto de pontos complexo.

Com o auxílio do computador a autora plotou apenas pontos que permanecem no interior do quadrado $|a| \leq 2$ e $|b| \leq 2$ e descreveu o comportamento da órbita de um ponto inicial $a_0 + ib_0$ da função. Assim:

$$|T\,(a_0 + ib_0)\,| = |\,(a_0{}^2 - b_0{}^2) + 2a_0b_0i\,|$$
$$= \sqrt{(a_0^2 - b_0^2)^2 + (2a_0b_0)^2}$$
$$= \sqrt{a_0{}^4 + b_0{}^4 - 2a_0{}^2b_0{}^2 + 4a_0{}^2b_0{}^2}$$
$$= \sqrt{a_0{}^4 + 2a_0{}^2b_0{}^2 + b_0{}^4}$$
$$= \sqrt{(a_0^2 + b_0{}^2)^2}$$
$$= a_0{}^2 + b_0{}^2$$

Logo,

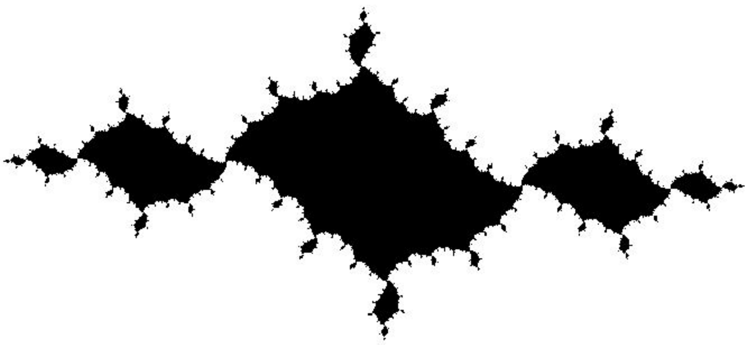
$$|\,T\,(a_0 + ib_0)\,| = |\,a_0 + b_0i|^2. \qquad (2)$$

De $|\,T\,(a_0 + ib_0)\,| = |\,a_0 + b_0i|^2$ deriva que:

1) Se $|\,a_0 + b_0i| < 1$, as órbitas convergem para zero;
2) Se $|\,a_0 + b_0i| > 1$, as órbitas tendem para o infinito.

Dentre estes pontos há pontos com módulo 1. O conjunto de Julia de T é a coleção dos pontos em que suas órbitas permanecem num círculo de raio 1 no plano complexo.

Figura 3 – Conjunto de Julia



Fonte: Miranda, 2012, p.116

Baseados nos estudos acima, Mandelbrot, com o apoio de recursos computacionais desenvolveu o conjunto que será descrito a seguir.

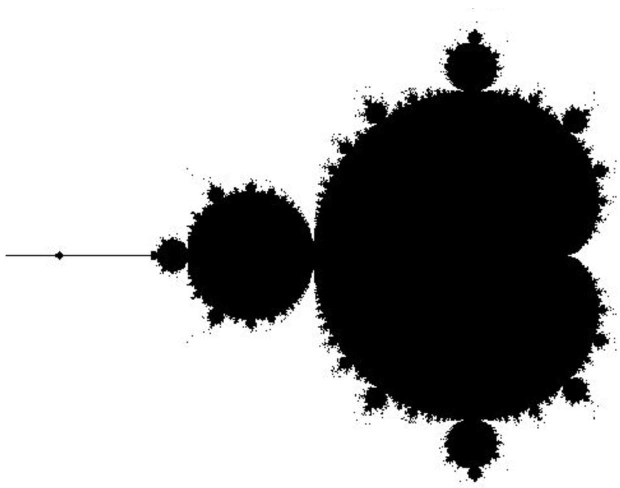
O conjunto de Mandelbrot consiste no conjunto de pontos c no plano complexo para o qual a sequência definida iterativamente: $z_{n+1} = z_n{}^2 + c$, onde $z_0 = 0$ e c é um número complexo da forma c = a+ bi. Veja o conjunto de Mandelbrot na Figura 3.

Conforme Miranda (2012, p.116) “conjuntos de Mandelbrot é uma figura no plano dos valores de c, e não no plano dos complexos z, onde estão os conjuntos de Julia”. Ou seja, cada um dos pontos do conjunto de Mandelbrot gera um conjunto de Julia, podemos considerar então o conjunto de Mandelbrot como um “universo” de todos os conjuntos de Julia.

Para complementar o que foi discorrido acima, temos que Mandelbrot (1977, apud ZAMBELLI, 2013) relata sobre seu conjunto que:

> embora pareça possuir partes isoladas do todo, na verdade é uma união de conjuntos que pode ser dividido em um conjunto infinito de figuras pretas, sendo a maior delas um cardioide localizado ao centro do plano complexo e uma infinidade de quase-círculos (o maior deles é a única figura que, de fato, é um círculo exato e localiza-se à esquerda do cardioide) que tangenciam o cardioide e variam de tamanho com raio tendendo a zero, além de conjuntos formados por sequências ilimitadas, as partes coloridas. Cada ponto no plano complexo corresponde a um conjunto de Julia diferente, os pontos que pertencem ao conjunto de Mandelbrot são os conjuntos de Julia conexos e os que ficam fora são os desconexos.

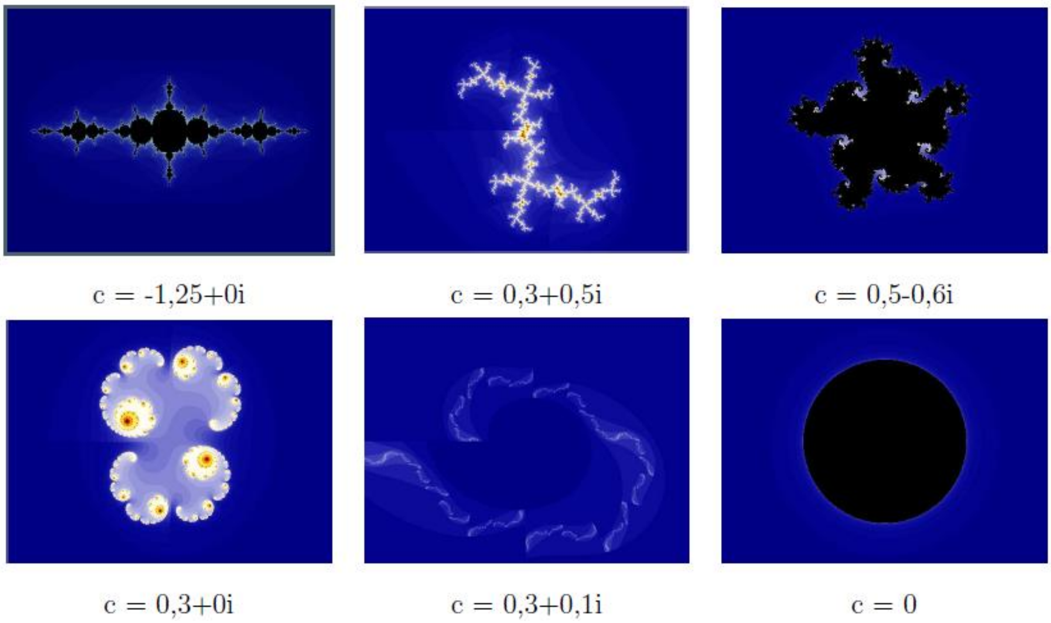
Figura 4 – Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Miranda, 2012, p.118

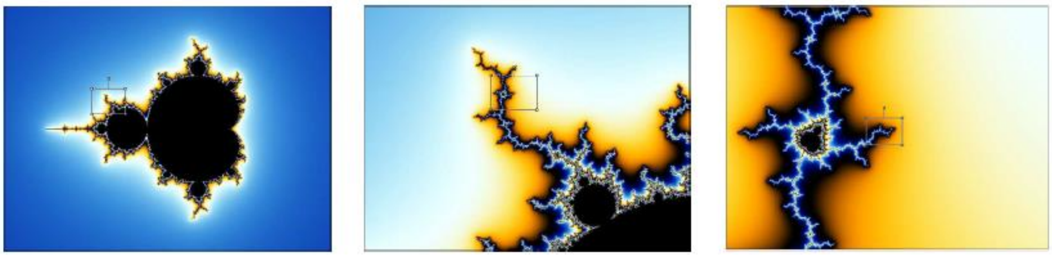
Matematicamente as imagens dos conjuntos de Julia e de Mandelbrot são em preto e branco, porém é possível que as imagens sejam geradas coloridas, veja nas Figuras 5 e 6:

Figura 5 – Exemplos de conjuntos de Julia



Fonte: Nunes 2006, p.49

Figura 6 – Aplicações do Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Nunes 2006, p.52

2.3 Dimensão de um fractal

De modo geral, pode-se dizer que a dimensão de uma figura está relacionada com a quantidade de espaço que ela ocupa. Na geometria Euclidiana a dimensão está relacionada a conceitos de altura, comprimento e largura, os quais abrangem os objetos ditos "perfeitos", por isso é sempre um número inteiro, por exemplo, um ponto não possui dimensão, pois não ocupa espaço, assim sua dimensão é considerada zero, já uma reta, apresenta dimensão um, uma figura plana, como um triângulo ou quadrado possui dimensão dois e uma figura tridimensional, como um cubo, apresenta dimensão três.

A dimensão fractal é uma das características presentes nos fractais e difere da dimensão Euclidiana, visto que o espaço que a figura ocupa, geralmente, é um número não inteiro. Este número "corresponde ao grau de irregularidade em diferentes escalas e, por isso são objetos chamados muitas vezes de "imperfeitos"" (PEREIRA, 2013, p. 40).

Para o cálculo da dimensão fractal serão apresentados, em seguida, dois métodos, que serão descritos em linguagem de fácil compreensão, visando o entendimento de um aluno do ensino médio. O primeiro método é a dimensão de Hausdorff, que possui grande facilidade de manipulação. Segundo Andrade e Silva (2014, p. 9), " a mais antiga e provavelmente a mais importante é a definição de Hausdorff, baseado na construção Carathéodory. A dimensão de Hausdorff tem a vantagem sobre a dimensão Box, a ser vista posteriormente, por estar definida para qualquer conjunto, limitado ou não. " E o segundo método descrito é o método Box-Counting citado acima.

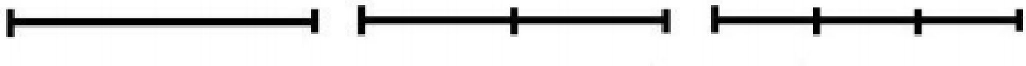
2.3.1 Método de dimensão de Hausdorff

A dimensão de um fractal pelo método Hausdorff é dada pela fórmula $D = \frac{\log N}{log \frac{C}{L}}$, da qual "D é a dimensão; N o número de partes em cada etapa da divisão; C é o comprimento inicial (ou medida do lado) do objeto ou figura que foi dividido em n partes iguais e L é o comprimento de cada segmento obtido através da divisão" (PEREIRA, 2013 p. 43).

Com a finalidade de mostrarmos a origem da fórmula apresentada, nos pautaremos no processo exposto por Pereira (2013).

Primeiramente deve-se considerar um segmento de comprimento C e dividi-lo em N partes idênticas, observe o exemplo apresentado na Figura 7.

Figura 7 – Segmentos C divididos em N = 1, 2 e 3 partes idênticas



Fonte: SILVA; SOUZA, 2010, p. 9

Seja L o comprimento de cada uma das partes em que o segmento foi dividido. É fácil perceber que o comprimento de l é dado por L = $\frac{C}{N}$. Reescrevendo a equação acima, obtemos a equação:

$$N = \frac{C}{L}. \tag{3}$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação temos

$$\log N = \log \frac{C}{L}. \tag{4}$$

Reescrevendo a equação acima

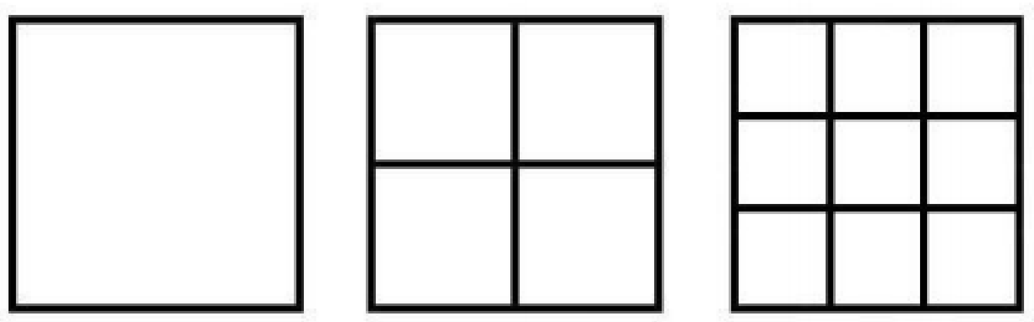
$$1 = \frac{\log N}{\log \frac{C}{L}}. \tag{5}$$

Pela Geometria Euclidiana temos que a reta é unidimensional. Logo a dimensão D é 1

$$D = 1 = \frac{\log N}{\log \frac{C}{L}}. \tag{6}$$

Agora, para um quadrado de lado C, aplica-se o mesmo processo realizado anteriormente. Divide-se em n partes idênticas cada um dos lados do quadrado, observe o exemplo na Figura 8.

Figura 8 – Quadrado de lado C dividido em N = n^2 partes idênticas, com n = 1, 2 e 3



Fonte: SILVA; SOUZA, 2010, p.9

Assim temos que n = $\frac{C}{L}$. Além disso, N = n² quadrados semelhantes ao original. Desse modo obtemos a seguinte fórmula L = $\frac{C}{\sqrt{N}}$. Reescrevendo-a e aplicando o logaritmo de ambos os lados da equação temos:

$$\log N = \log \left(\frac{C}{L}\right)^2. \qquad (7)$$

Que pode ser reescrita como:

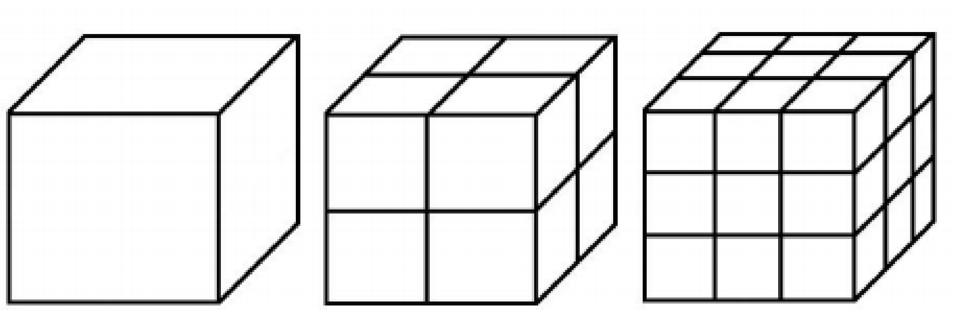
$$\log N = 2 \log \frac{C}{L}. \qquad (8)$$

Novamente recorrendo a geometria euclidiana temos que o quadrado é uma figura bidimensional, ou seja, sua dimensão é igual a 2. Assim

$$D = 2 = \frac{\log N}{\log \frac{C}{L}}. \qquad (9)$$

Por fim, tomando um cubo de aresta C, o processo se repete. Divide-se em n partes idênticas cada uma das arestas do Cubo, veja Figura 9.

Figura 9 - Cubo de aresta C, divididos em N = n³ partes idênticas, com n = 1, 2, e 3.



Fonte: SILVA; SOUZA, 2010, p.9

Assim temos que n = $\frac{C}{L}$. Ainda, N = n³ cubos semelhantes ao tomado inicialmente. Desse modo obtemos a seguinte fórmula $\sqrt[3]{N} = \frac{C}{L}$.

Reescrevendo a equação e aplicando o logaritmo de ambos os lados temos:

$$\log N = 3 \log \frac{C}{L}. \tag{10}$$

A dimensão de um cubo, na geometria Euclidiana, é 3. Desse modo:

$$D = 3 = \frac{\log N}{\log \frac{C}{L}}. \tag{11}$$

Observando os processos acima e estendendo para os fractais temos que a dimensão de Hausdorff é calculada pela seguinte fórmula:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{C}{L}}. \tag{12}$$

2.3.2 Método Box-Counting

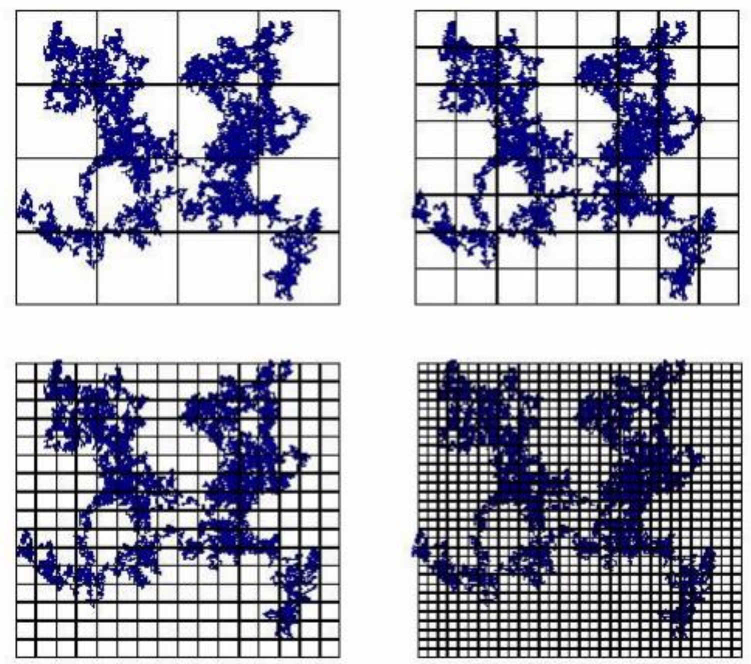
Para a aplicação do método de Box-Couting é necessário cobrir toda a figura fractal com uma grade de malha de tamanho U, fazendo a contagem do número N de caixas que possui qualquer parte da figura. Isto gera um certo número N dependente do tamanho U. Após essa etapa, diminui-se o tamanho de U e aplica-se esta nova malha sobre a figura, é possível verificar que a quantidade de caixas N que cobrem a figura aumentará (ver Figura 10).

A dimensão fractal é medida por meio da relação entre a quantidade de caixas utilizadas para cobrir a imagem à medida que a malha vai sendo refinada. “Posteriormente para cada iterada n; constrói-se o gráfico no plano log (N (U)) x log ($\frac{1}{U}$) e marcamos os pontos (log(Nn(U)); log($\frac{1}{Un}$)), (log(Nn+1(U)); log($\frac{1}{U_{n+1}}$)), ... com n = 0; 1; 2, ... e encaixa-se uma linha reta nos pontos do diagrama” (SILVA; SOUZA, 2010, p.12).

Desse modo, a dimensão de Box-Counting é calculada por meio da seguinte fórmula:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log(N_{n+1}(U)) - \log(N_n(U))}{\log(\frac{1}{U_{n+1}})^{n+1} - \log(\frac{1}{U_n})}. \tag{13}$$

Figura 10 - Representação gráfica do método Box-Couting



Fonte: http://www.portalsaberlivre.com.br/manager/uploads/publicacoes/1332864903.pdf

2.4 Fractais clássicos e seus fundadores

As construções dos fractais descritas a seguir estão pautadas nas obras de Barbosa (2005).

2.4.1 Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor, também conhecido como poeira de Cantor, é definido como a interseção dos intervalos fechados produzidos por meio de um processo iterativo a partir do intervalo [0, 1]. Este conjunto foi criado pelo matemático russo, nascido em São Petersburgo, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), professor na Universidade de Halle e doutor em matemática pela Universidade de Berlim ,1867. De acordo com Eves (2011, p.615),

> Os primeiros interesses de Cantor se voltavam para a teoria dos números, equações indeterminadas e séries trigonométricas. A sutil teoria das séries trigonométricas parece tê-lo inspirado a se enfronhar nos fundamentos da análise. Criou então uma bela abordagem dos números irracionais, que utiliza sequências convergentes de números racionais e difere radicalmente do inspirado tratamento de Dedekind, e em 1874 começou seu revolucionário trabalho em teoria dos conjuntos e teoria do infinito. Com este último trabalho, Cantor criou um campo novo da pesquisa matemática. Em seus artigos ele desenvolveu a teoria dos números transfinitos, baseado num tratamento matemático do infinito atual e criou uma aritmética dos números transfinitos análoga a aritmética dos números finitos.

Devido aos seus estudos e descobertas, algumas citadas acima, Cantor ficou famoso por elaborar a moderna teoria dos números. Atualmente a teoria dos conjuntos de Cantor se tornou parte de quase todos os ramos da matemática e tendo uma importância particular na topologia e nos fundamentos da teoria das funções reais.

A construção do Conjunto de Cantor, considerado como um exemplo excepcional de um dos monstros matemáticos, teve, de acordo com Barbosa (2005), sua a primeira aparição em 1883, na publicação de um trabalho de Cantor. A construção do conjunto de Cantor será descrita em sequência.

- Construção algébrica

Para a construção algébrica do conjunto, deve-se primeiramente dividir o intervalo fechado [0, 1], em três partes idênticas e retirar o terço central aberto deste intervalo, ou seja, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Assim, obtém-se o conjunto união $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, em que cada um dos intervalos fechados tem comprimento igual a $\frac{1}{3}$. Esse processo é chamado de "primeira iteração". Após essa etapa, divide-se em três partes iguais cada um dos dois intervalos criados anteriormente e novamente retira-se o terço do meio, obtendo o conjunto união $C_2 == [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{3}, 1]$, em que cada um dos intervalos fechados tem comprimento igual a $\frac{1}{9}$. Esse processo é chamado de "segunda iteração". O mesmo processo segue indefinidamente.

Desse modo, a cada iteração n, divide-se em três partes idênticas cada um dos intervalos construídos na iteração n - 1 e retira-se o terço do meio, obtendo-se um conjunto união C_n dos pontos que não foram retirados. O conjunto interseção de todos os C_n é definido como Conjunto de Cantor

$$C = C_1 \cap C_2 \cap C3 \cap ... \cap C_n. \tag{14}$$

Este conjunto ainda pode ser escrito por

$$C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n. \tag{15}$$

- Construção geométrica

Para a construção geométrica do conjunto de Cantor (ver Figura 11), deve-se seguir os seguintes passos:

Passo 1: Considere um segmento de reta;

Passo 2: Divida o segmento em três partes iguais e elimine a parte central;

Passo 3: Repita a cada segmento a construção do passo 2 sucessivamente e indefinidamente.

Figura 11 – Conjunto de Cantor

Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/Conjunto_de_Cantor.png

- Número e comprimento dos intervalos a cada iteração

Para facilitar a compreensão do que ocorre com o número de intervalos e o comprimento de cada um deles a cada iteração, apresentaremos as informações obtidas na construção algébrica do conjunto de Cantor na Tabela 1.

Tabela 1 - Número e comprimento dos intervalos a cada iteração do conjunto de Cantor

Número de iterações (n)	Número de intervalos	Comprimento de cada intervalo
0	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$
2	4	$\frac{1}{9}$
3	8	$\frac{1}{27}$
4	16	$\frac{1}{81}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	2^n	$\frac{1}{3^n}$

Fonte: Próprio autor

Intuitivamente averiguamos que a cada iteração o número de intervalos dobra em relação ao número de intervalos obtidos na iteração anterior. Também é possível verificar que que o comprimento dos intervalos obtidos a cada iteração fica dividido por três em comparação com o comprimento do intervalo do passo anterior. Logo, o conjunto de Cantor possui exatamente 2^n intervalos fechados de comprimento iguais a $\frac{1}{3^n}$, que pode ser facilmente comprovada utilizando o princípio da Indução Finita. Dessa forma o comprimento total de todos os fragmentos do conjunto é dado por $2^n \cdot \frac{1}{3^n} = (\frac{2}{3})^n$, o qual no infinito apresenta comprimento 0, pois a cada iteração seu comprimento é reduzido por um fator $\frac{2}{3}$

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \qquad (16)$$

- Dimensão do conjunto

De acordo com os dados genéricos contidos na Tabela 1, vemos que em cada iteração são formados $N = 2^n$ segmentos, de comprimento 3^{-n}. Calculando a Dimensão de Hausdorff temos:

$$D = \frac{log\ 2^n}{\log\frac{1}{3^{-n}}} = \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0{,}63. \qquad (17)$$

Podemos perceber que o Conjunto de Cantor apresenta dimensão menor do que a dimensão de uma reta e maior do que a dimensão de um ponto.

2.4.2 Curva de Koch

A curva de Koch, tal como o floco de neve, que serão construídas posteriormente, foi criada pelo matemático sueco Helge Von Koch (1870 – 1924). Koch foi um excelente professor na Universidade de Estocolmo e seu primeiro estudo consistia na teoria dos determinantes de matrizes infinitas, que tinha por base os trabalhos publicados pelo matemático francês Henri Poincaré (1854-1912). “Seus trabalhos nesse campo são utilizados na Álgebra Linear, com importantes aplicações no estudo da mecânica quântica. Koch também trabalhou na hipótese de Riemann e na teoria dos números primos” (REIS, 2014, p.23).

De acordo com Barbosa (2005, p.38):

> Em 1904 e 1906 introduziu uma curva que hoje recebe seu nome:
> - Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géomètrique élèmentaire. In Akiv für Mathematik 1 (1904), 681-704
> - Une methode géomètrique élèmentaire pour courbes planes, In: Acta Mathematics 30 (1906) 145-174

Ainda de acordo com o autor acima a curva de Koch é um admirável exemplo de curva sem tangente, e pode ter inspirado Mandelbrot, pois lembra uma linha costeira.

- Construção

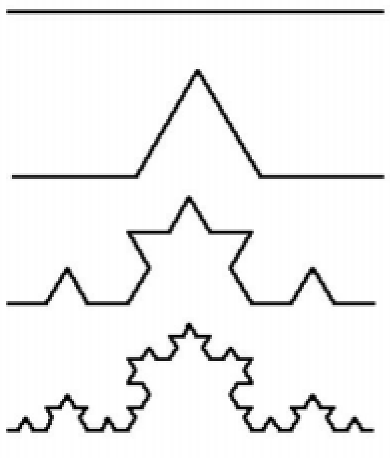
Para a construção da curva de Koch (ver Figura 12), deve-se seguir os seguintes passos:

Passo 1: Considere um segmento de reta;

Passo 2: Divida o segmento em três partes iguais e substitua o segmento central por um triângulo equilátero sem base;

Passo 3: Repita para cada um dos segmentos formados na construção do passo 2 sucessivamente e indefinidamente.

Figura 12 – Curva de Koch



Fonte: SILVA; SOUZA, 2010, p.4

- Número e comprimento dos segmentos a cada iteração

A Tabela 2 apresentar as informações obtidas ao analisarmos o que ocorre com o número de segmentos e o comprimento de cada um deles a cada iteração.

Tabela 2 - Número e comprimento dos segmentos a cada iteração da curva de Koch

Número de iterações (n)	Número de segmentos	Comprimento de cada segmento
0	1	x
1	4	$\frac{1}{3}$x
2	16	$(\frac{1}{3})^2$ x
3	64	$(\frac{1}{3})^3$ x
4	256	$(\frac{1}{3})^4$ x
⋮	⋮	⋮
N	4^n	$(\frac{1}{3})^n$ x

Fonte: Próprio autor

Intuitivamente vemos que a cada iteração o número de segmentos quadruplica em relação ao número de segmentos obtidos na iteração anterior. Também é possível verificar que que o comprimento dos intervalos obtidos a cada iteração fica dividido por três em comparação com o comprimento do intervalo do passo anterior. Logo, a curva de Koch possui exatamente 4^n segmentos de comprimento iguais a $\frac{1}{3^n}$ x, onde x é a medida do comprimento inicial, que pode ser naturalmente comprovada utilizando o princípio da Indução Finita. Dessa forma, se tomarmos na iteração 0 o segmento unitário, temos que o comprimento total de todos os fragmentos do conjunto é dado por $4^n \cdot \frac{1}{3^n} = (\frac{4}{3})^n$, o qual no infinito apresenta comprimento ∞, pois a cada iteração seu comprimento é aumentado por um fator $\frac{4}{3}$

$$C = \lim_{n\to\infty} 3.\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty. \tag{18}$$

- Dimensão

De acordo com os dados contidos na Tabela 2, vemos que em cada iteração são formados $N = 4^n$ segmentos, de comprimento 3^{-n}. Calculando a Dimensão de Hausdorff temos:

$$D = \frac{\log 4^n}{\log \frac{1}{3^{-n}}} = \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1{,}26. \tag{19}$$

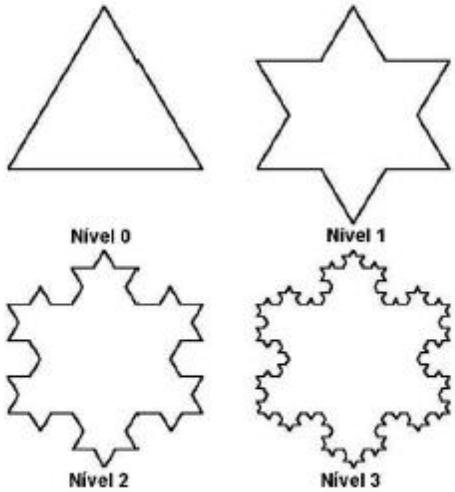
Podemos perceber que a curva de Koch apresenta dimensão maior do que a dimensão de uma reta e menor do que a dimensão de uma figura plana.

2.4.3 Floco de neve de Koch

- Construção

A curva de Koch originou o Floco de neve de Koch (ver Figura 13) cuja construção é análoga a curva de Koch, porém tem como ponto de partida um triângulo equilátero, e ao meio de cada lado desse triângulo acrescenta-se novos triângulos equiláteros sem base medindo um terço do tamanho do triângulo inicial, obtendo assim uma figura no formato de uma estrela. O processo se repete indefinidamente a cada novo triângulo formado.

Figura 13 – Floco de neve de Koch



Fonte: SILVA; SOUZA, 2010, p.5

- Área da figura a cada iteração

Vamos analisar a área da figura que se forma a cada iteração. Na iteração 0 temos um triângulo equilátero de lado l, logo sua área $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2. \tag{20}$$

Na iteração 1 além do triângulo equilátero inicial, temos três novos triângulos equiláteros com medida lateral igual a $\frac{1}{3}$ de l. A área de cada um desses triângulos é $\frac{\sqrt{3}}{4}.(\frac{1}{3} l)^2$, ou seja, $\frac{1}{9} A_0$. Então, a área total da figura é:

$$A_1 = A_0 + 3.\ \frac{1}{9} A_0. \tag{21}$$

Na iteração 2 surgem 12 novos triângulos equiláteros de lado medindo $\frac{1}{9}$ de l. Desse modo a área de cada um desses triângulos é $\frac{\sqrt{3}}{4}.(\frac{1}{9} l)^2$, ou seja $\frac{1}{9^2} A_0$. Assim a área total da figura é

$$A_2 = A_0 + 3.\ \frac{1}{9} A_0 + 4.\ 3.\ \frac{1}{9^2} A_0. \tag{22}$$

Na iteração 3 temos 48 novos triângulos equiláteros com lados medindo $\frac{1}{27}$ de l. A área de cada triângulo será $\frac{\sqrt{3}}{4}.\ (\frac{1}{27} l)^2$, ou seja $\frac{1}{27^2} A_0$. Mas, $\frac{1}{27^2} = \frac{1}{9^3}$. Assim a área total da figura é:

$$A_3 = A_0 + 3.\ \frac{1}{9} A_0 + 4.\ 3.\ \frac{1}{9^2} A_0 + 4.\ 4.\ 3\ .\ \frac{1}{9^3} A_0. \tag{23}$$

Intuitivamente, a partir dessa iteração é possível estabelecer uma relação entre as áreas e o número de iterações.

Na iteração n teremos $4^{n-1}.3$ novos triângulos equiláteros e a área total da figura A_n será dada por

$$A_n = A_0 + 3.\ \frac{1}{9} A_0 + 4.\ 3.\ \frac{1}{9^2} A_0\ + 4^2.\ 3\ .\ \frac{1}{9^3} A_0 + 4^3.\ 3\ .\ \frac{1}{9^4} A_0 + \ldots + 4^{n-1}.3.\ \frac{1}{9^n} A_0. \qquad (24)$$

Reescrevendo a equação temos

$$A_n = A_0 + \frac{4}{4}.\ 3.\ \frac{1}{9}\ A_0 + \frac{4^2}{4}.\ 3.\ \frac{1}{9^2} A_0\ + \frac{4^3}{4}.\ 3\ .\ \frac{1}{9^3} A_0 + \frac{4^4}{4}.\ 3\ .\ \frac{1}{9^4} A_0 + \ldots + \frac{4^n}{4}.\ 3.\ \frac{1}{9^n} A_0. \qquad (25)$$

Temos uma progressão geométrica a partir do segundo termo de razão $\frac{4}{9}$. Somando os termos da PG temos

$$Sn = \frac{a1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}A0}{1-4/9} = \frac{9}{15} A_0. \qquad (26)$$

Logo

$$A_n = A_0 + \frac{9}{15} A_0 = \frac{8}{5} A_0. \qquad (27)$$

- Dimensão

O cálculo da dimensão do floco de neve de Koch é igual ao da curva de Koch. Ou seja:

$$D = \frac{\log 4^n}{\log \frac{1}{3^{-n}}} = \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1{,}26. \qquad (28)$$

2.4.4 Triângulo de Sierpinski

O triângulo e o tapete de Sierpinski, foram criados pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). Segundo Reis (2014, p.22)

> Sierpinski estudou na Universidade de Varsóvia, em 1900, rapidamente seus professores descobriram o seu talento para a Matemática, o que lhe rendeu ao final da formatura uma medalha de ouro em Matemática. Depois de formado, ele tornou-se professor de Matemática e física de uma escola para meninas em Varsóvia. Ao longo de sua carreira, Sierpinski publicou mais de setecentos trabalhos, a grande maioria sobre a teoria dos conjuntos e teoria dos números. Seus estudos continham novos e importante contribuições para a Matemática.

Sierpinski teve enorme reputação, em 1916 exibiu em seu estudo um dos seus famosos “monstros”: ““Sur une courbe cantorienne qui contente une image biunivoquet et continue de toute courbe donée, Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris, 162 (1916) p.629-632", que complementava uma publicação anterior de 1915" (BARBOSA, 2005, p.41).

- Construção

Para a construção do triângulo de Sierpinski (ver Figura 14), deve-se seguir os seguintes passos:

Passo 1: Considere um triângulo equilátero;

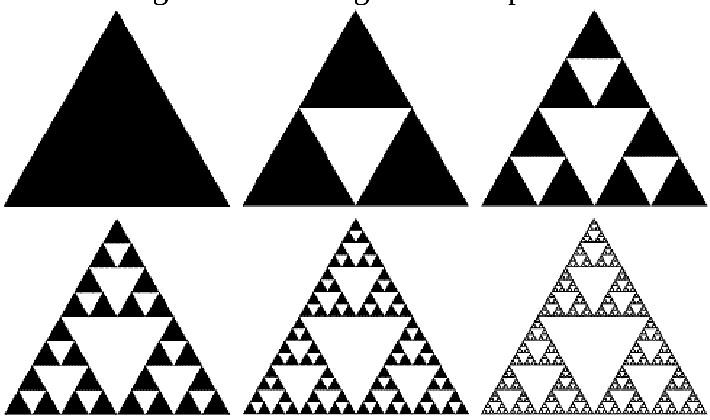
Passo 2: Marque os segmentos dos pontos médios formando quatro triângulos equiláteros;

Passo 3: Remova o triângulo central;

Passo 4: Repita para cada um dos triângulos não eliminados na construção do passo 3

Passo 5: Repita a operação 4 sucessivamente e indefinidamente.

Figura 14 - Triângulo de Sierpinski



Fonte: http://matemalouco.blogspot.com.br/

- Número e comprimento dos triângulos a cada iteração

Para facilitar a compreensão do que ocorre com o número de intervalos e o comprimento de cada um deles a cada iteração, apresentaremos as informações obtidas na construção do triângulo de Sierpinski na Tabela 3.

Tabela 3 - Número e comprimento dos triângulos a cada iteração do triângulo de Sierpinski

Número de iterações (n)	Número de triângulos	Comprimento do lado do triângulo
0	1	1
1	3	$\frac{1}{2}$
2	9	$\frac{1}{4}$
3	27	$\frac{1}{8}$
⋮	⋮	⋮
N	3^n	$\frac{1}{2^n}$.

Fonte: Próprio autor

- Análise da área da figura

Vamos analisar a área da figura que se forma a cada iteração. Na iteração 0 temos um triângulo equilátero de lado l, logo sua área $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$.

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2. \tag{29}$$

Na iteração 1 como a figura é dividida em quatro triângulos congruentes temos que a área da figura (considerando a parte preta) é

$$A_1 = \frac{3}{4} A_0. \tag{30}$$

Na iteração 2 cada um dos triângulos pretos da iteração anterior é dividido novamente em quatros partes iguais, logo a área é

$$A_2 = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} A_0\right). \tag{31}$$

Na iteração 3 ocorre o mesmo processo realizado na iteração 2, logo a área da figura é

$$A_3 = \frac{3}{4}\ (\frac{3}{4}\ (\frac{3}{4}\ A_0)). \tag{32}$$

Nesse momento já é possível perceber que ocorre um padrão. Na iteração n a área da figura será

$$A_n = (\frac{3}{4})^n A_0. \tag{33}$$

Como o processo segue infinitamente. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0. \tag{34}$$

Desse modo é possível perceber que a área da figura original, quando o número de iterações tende ao infinito, vai para zero.

- Dimensão

De acordo com a Tabela 3 em cada etapa tem-se $N = 3^n$ triângulos de lado $U = \frac{1}{2^n} = 2^{-n}$. Aplicando os estes dados na fórmula de Hausdorff, tem-se:

$$D = \frac{log\ 3^n}{\log \frac{1}{2^{-n}}} = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1{,}584 \ldots \tag{35}$$

2.4.5 Tapete de Sierpinski

- Construção

Para a construção do tapete de Sierpinski (ver Figura 15), deve-se seguir os seguintes passos:

Passo 1: Considere um quadrado;

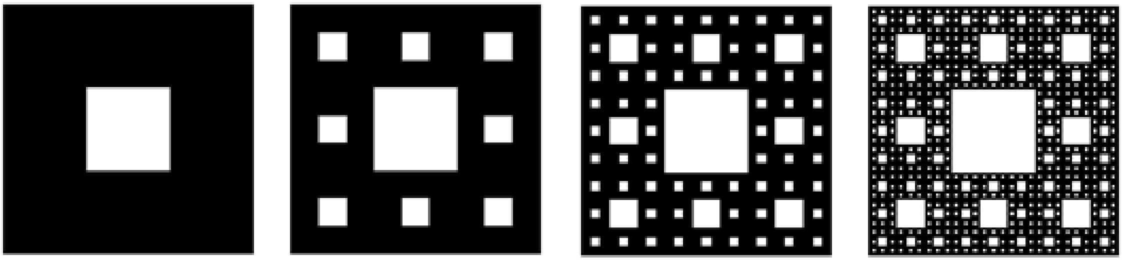
Passo 2: Divida-o em 9 quadrados congruentes;

Passo 3: Remova o quadrado central;

Passo 4: Repita o mesmo procedimento para cada um dos quadrados não eliminados no passo 3

Passo 5: Repita a operação 4 sucessivamente e indefinidamente.

Figura 15 - Tapete de Sierpinski



Fonte: http://www.ceticismoaberto.com/ciencia/2139/fractais-uma-nova-viso-da-natureza

- Número e comprimento dos lados dos quadrados a cada iteração

Para facilitar a compreensão do que ocorre com o número de quadrados e o comprimento do lado de cada um deles a cada iteração, apresentaremos as informações obtidas na construção do tapete de Sierpinski na Tabela 4.

Tabela 4 - Número e comprimento dos quadrados a cada iteração do tapete de Sierpinski

Número de iterações (n)	Número de quadrados	Comprimento do lado do quadrado
0	1	1
1	8	$\frac{1}{3}$
2	64	$\frac{1}{9}$
3	512	$\frac{1}{27}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	8^n	$\frac{1}{3^n}$.

Fonte: Próprio autor

- Análise da área da figura

Vamos analisar a área da figura que se forma a cada iteração. Na iteração 0 temos um quadrado de lado l, logo sua área $A_0 = l^2$

$$A_0 = l^2. \tag{36}$$

Na iteração 1 como a figura é dividida em nove novos quadrados, logo temos que a área da figura (considerando a parte preta) é

$$A_1 = \frac{8}{9} A_0. \tag{37}$$

Na iteração 2 cada um dos quadrados pretos da iteração anterior é dividido novamente em nove partes iguais, logo a área da parte preta é

$$A_2 = \frac{8}{9} \left(\frac{8}{9} A_0 \right). \tag{38}$$

Na iteração 3 ocorre o mesmo processo realizado na iteração 2, logo a área da figura é

$$A_3 = \frac{8}{9} \left(\frac{8}{9} \left(\frac{8}{9} A_0 \right) \right). \tag{39}$$

Nesse momento já é possível perceber que ocorre um padrão. Na iteração n a área da figura será

$$A_n = \left(\frac{8}{9} \right)^n A_0. \tag{40}$$

Como o processo segue infinitamente. Temos

$$A_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{8}{9} \right)^n = 0. \tag{41}$$

Desse modo, assim como o triângulo de Sierpinski, é possível perceber que a área da figura original do tapete de Sierpinski, quando o número de iterações tende ao infinito, vai para zero.

- Dimensão

De acordo com a Tabela 4 em cada etapa tem-se que para cobrir o tapete de Sierpinski precisa-se de N = 8^n caixas de comprimento U = $\frac{1}{3^n}$ = 3^{-n}. Aplicando os estes dados na fórmula de Box-Couting, tem-se:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{log\, 8^{n+1} - log\, 8^n}{log\, 8^{n+1} - \log 3^n} = \frac{\log 8}{\log 3} \cong 1{,}89\ ... \tag{42}$$

2.5 Música Fractal

A música fractal, assim como os fractais, é obtida por meio de um processo repetitivo no qual um algoritmo é aplicado inúmeras vezes para compor a sua produção anterior.

Queiroz e Kon (2013) nos relata que a relação entre a Geometria Fractal e a música começou a ser analisada já na década de 1970, logo após os estudos sobre as dimensões fracionárias, ruídos *1/f* (onde *f* representa a frequência) e autossimilaridade publicados por Bernoit Mandelbrot.

A título de exemplo, podemos citar as pesquisas de Voss e Clarke (1975; 1978 apud QUEIROZ; KON, 2013, p.12) que "trazem análises de sinais de áudio de fragmentos musicais os mais diversos, todos revelando as mesmas características de ruídos *1/f*, o que sugere o caminho inverso: o da composição musical (estocástica) a partir da informação contida nos mesmos ruídos". Devido as publicações dessas pesquisas, vários músicos e cientistas se propuseram a criar novas associações entre os fractais e os conceitos musicais, com o intuito de análise e composição.

> As associações incluem a transposição de construções geométricas (como a curva de Koch ou o triângulo de Sierpinski) para o plano melódico, o uso de ruídos com características fractais na geração de parâmetros musicais, tais como altura, duração, intensidade e timbre, o uso de sistemas dinâmicos, sistemas de funções iteradas e atratores para a construção de partituras completas. (QUEIROZ; KON, 2013 p. 12)

Atualmente, os fractais têm oferecido efeitos muito interessantes, devido a isso cada vez mais autores pesquisam novas músicas fractais.

3 A GEOMETRIA FRACTAL NA SALA DE AULA

Atualmente vários pesquisadores dedicados a Educação Matemática têm incentivado e defendido o uso dos fractais em sala de aula. Como já mencionado a Geometria Fractal não faz parte do Currículo do Estado de São Paulo, no entanto sua inserção pode estar atrelada a diversos conteúdos tanto do Ensino Fundamental, quanto do Ensino Médio. No Ensino Fundamental é possível estudar conceitos da geometria Euclidiana, como área e perímetro de figuras planas e regularidades de figuras geométricas. No Ensino Médio a quantidade de conceitos majora, neste nível de ensino é possível trabalhar área e perímetro, progressão aritmética e geométrica e probabilidade geométrica.

Para Barbosa (2005) há duas maneiras espontâneas de se abordar os fractais em sala de aula, a primeira delas está direcionada a alunos do Ensino Médio, e se refere ao estudo das relações numéricas de seus elementos a cada iteração, como: contagem, perímetro, áreas e volumes. A outra maneira é fazer com que o aluno aprecie e compreenda as harmonias existentes em um fractal, desenvolvendo ou despertando o seu senso estético.

Os fractais também podem ser explorados através de construções fractais, realizadas de diferentes formas: utilizando régua e compasso, softwares educacionais, materiais manipuláveis, dobraduras e recortes. Essas construções são adequadas a toda a educação básica, desde que os objetivos intrínsecos estejam de acordo com as competências e habilidades de cada série.

As construções com régua e compasso, compõem uma disciplina, denominada Desenho Geométrico que, de acordo com Marinho et al. (2010), trata-se de um conjunto de técnicas e métodos para construções de figuras geométricas. Oliveira (2016) nos acrescenta que o desenho geométrico "é uma interpretação de realidade geométrica, visual, emocional ou intelectual, feito por meio da representação gráfica. É uma linguagem e como tal, é acessível a todos. Ele possui uma natureza específica, particular em sua forma de comunicar uma ideia uma imagem, um signo".

Em sua pesquisa Marinho et al (2010) realça, pela visão de outros autores, a importância do Desenho Geométrico para o discente, visto que permite a criatividade, compreensão e retenção de conhecimento. Além disso quando os alunos desenham sem interferência, libertam sua capacidade de planejamento, projeção e abstração, uma vez que necessita buscar alternativas para obter a figura esperada, arquitetando construções, analisando interconexões, exercitando, dessa forma, o raciocínio.

A partir de 1970 essa disciplina deixou de ser obrigatória no ensino básico. Isso ocorreu devido a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 5692, onde houve uma separação em dois grupos, um composto por disciplinas obrigatórias e outro por disciplinas optativas, esta última integrava a parte diversificada do currículo. O mesmo ocorreu nos vestibulares de Arquitetura e Engenharia, em que as construções geométricas, nas quais eram usados régua e compasso, deixaram de ser obrigatórias. Esses dois fatores contribuíram para que as escolas de ensino básico abandonassem o desenho geométrico, apenas "algumas escolas mantiveram as construções geométricas nas aulas de Educação Artística. Essa situação confirma a valorização dos traçados geométricos por determinados grupos, os quais prestigiam e legitimam estes conhecimentos" (OLIVEIRA, 2016)

Hoje há materiais que apresentam alguma situação, fora de contexto, em que é necessário realizar desenhos geométricos, no entanto é possível verificar que diversos alunos nunca tiveram contato com o compasso, não sabem como manipulá-lo e desconhecem suas contribuições para a compreensão de diversos conceitos embutidos nas construções das figuras. A inserção do compasso em sala de aula pode trazer uma motivação a mais, pois se esquiva da rotina a qual o aluno está habituado.

Além dessa vantagem, Oliveira (2016, p.6) nos aponta os principais benefícios em se trabalhar com o desenho geométrico

> a) O Desenho permite concretizar os conhecimentos teóricos da geometria, confirmando graficamente as propriedades das figuras geométricas.
> b) Ao estudar as demais matérias, os alunos aprendem as linguagens verbal e simbólica. Ao estudar Desenho, aprende a linguagem gráfica, precisa e concisa, a mais antiga das linguagens. A criatividade técnico-científica, que é a capacidade de pesquisar e encontrar soluções consegue-se com uma teoria mínima, curta e inesquecível do Desenho. É como se estivéssemos desemaranhando um fio. Numa ponta do fio: o que se sabe. Na outra ponta: o que se quer.
> c) Nada melhor que o desenho geométrico para resolver capacidades importantes como: organização, autodisciplina, iniciativa, serenidade e capricho.
> d) Com exercícios de Desenho apropriados para estimular a conexão de neurônios cerebrais, desenvolve-se a visão espacial.

Em relação a abordagem da tecnologia enquanto conteúdo curricular, os PCNs apontam que "a**s** tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas" (BRASIL, 1998, p. 44), além disso a tecnologia tem grande influência na escrita, leitura e aprendizagem dos indivíduos. No âmbito escolar, seu uso eficaz pode estabelecer uma relação de afabilidade, interação e colaboração entre professor e aluno. Nesse cenário, deixa de existir a visão em que o professor é o único detentor dos conhecimentos, tornando a aprendizagem participativa e coletiva.

Em acordo com o PCNs, para Pereira (2013) o ensino dos fractais aliados a tecnologia permite aos alunos construírem seu conhecimento de modo autônomo, tendo a liberdade para testar suas hipóteses e a visão do professor como mediador. De modo equivalente consente ao professor aprender, ensinar, estimular a curiosidade ou ainda produzir excelentes trabalhos, aperfeiçoando assim as suas aulas. Com o intuito de promover um ensino mais aprazível o autor sugere atividades acerca da Geometria Fractal por meio da utilização de um software gratuito de matemática dinâmica, o Geogebra[1], para ele o ensino dinâmico pode trazer grandes benefícios para o ensino da Matemática. Vale ressaltar que existem outros softwares educacionais que também atende aos benefícios citados, como por exemplo: LOGO, Cabrì Geometry e Nfract.

O emprego de materiais manipuláveis associado a construção de fractais pode ser uma ótima escolha para a sala de aula, devido a seu baixo custo e fácil acessibilidade. Para Reys (1971 apud Lorenzato, 2009) entende-se por materiais manipuláveis os artefatos em que haja a possibilidade dos alunos de tocar, sentir, manusear e mobilizar. Estes objetos podem ter aplicabilidade no cotidiano ou ser usados para simular um conceito. Segundo Lorenzato (2009) sua utilização teve grande extensão após a origem do movimento Escola Nova, que possuía o objetivo de proporcionar aos alunos uma aprendizagem que partisse do concreto, no entanto houve uma compreensão um tanto restrita dessa metodologia, já que os professores acreditavam que bastava a simples manipulação do objeto para que os alunos compreendessem o que se esperava.

A maior justificativa apresentada pelos docentes para o uso desses materiais está relacionada ao fator motivacional, em geral, é esperado que as dificuldades possam ser atenuadas com o apoio da materialidade, mas essa expectativa deve ser superada, visto que nenhum objeto tem validade isoladamente. Para que a inserção dos materiais concretos possa trazer benefícios para os discentes é necessário que ela esteja inserida em uma metodologia em que os objetivos estejam claramente definidos, para que o professor formule questões pertinentes as suas intenções implícitas.

[1] O software Geogebra está disponível para download em: http://www.geogebra.org/

> Qualquer material pode servir para apresentar situações as quais os alunos enfrentam relações entre os objetos que poderão fazê-los refletir conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma que possam ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às suas ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam. (LORENZATO 2009, p.81)

Entre os diversos benefícios relatados por esses pesquisadores, pode-se enfatizar o estimulo a criatividade, o aumento do interesse em relação a disciplina de matemática, o desenvolvimento do raciocínio logico e a aprendizagem de conceitos contidos na geometria Euclidiana.

Uma outra forma para se construir fractais trata-se das dobraduras e recortes. Quando falamos de dobraduras pensamos logo na arte tradicional e milenar japonesa de dobrar papéis, o Origami. De acordo com Martins (2008, p. 24-25), por meio desta arte, “pode se explorar a geometria estruturada na escola, onde através das dobras e formação das figuras e objetos tridimensionais, os praticantes estão desenvolvendo o raciocínio, trabalhando a matemática intuitiva, definições geométricas, conceitos matemáticos no geral. ”

No entanto, para atender as nossas necessidades em relações as construções dos fractais nos deparamos com uma outra arte de origem japonesa, o Kirigami. O Kirigami, variação do Origami, se define pela a arte de recortar papéis, na qual são criadas representações de objetos, formas ou seres, visto que se baseia “nas dobras básicas do origami para propagação de um padrão pré-determinado. ” Temos também que essa arte é bastante usada na criação de cartões “tridimensionais” (MARTINS, 2008, p.30)

A seguir são apresentados exemplos de atividades que podem ser exploradas em sala de aula na construção de fractais e um jogo. As duas primeiras atividades consistem na construção de um cartão fractal, ambos os cartões apresentam fundamentos na arte do Kirigami e características existentes nos fractais.

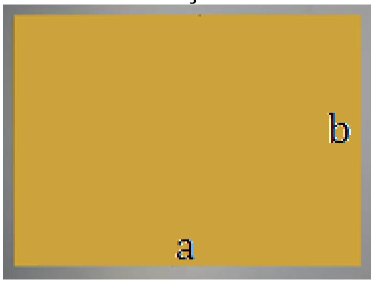
3.1 SUGESTÃO DE ATIVIDADES

3.1.1 Cartão fractal: Degraus Centrais

Para a construção do cartão Degraus Centrais deve-se seguir os seguintes passos:

1° Passo: Comece com uma folha de papel, de comprimento a e largura b. Sugerimos a folha sulfite de tamanho A4, devido a sua fácil acessibilidade, veja Figura 16.

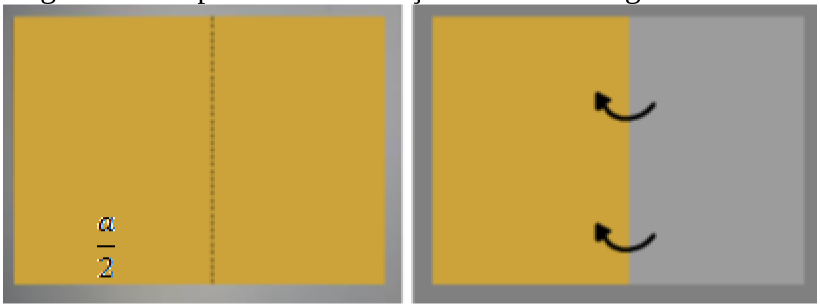
Figura 16 - 1º passo da construção do cartão Degraus Centrais



Fonte: GOI, DAHLKE, 2015

2° Passo: Dobre a folha ao meio, veja Figura 17.

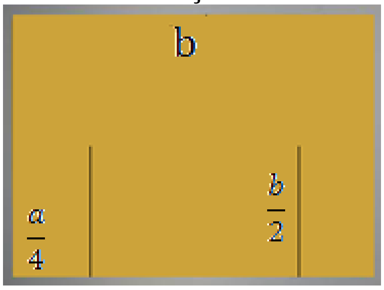
Figura 17 - 2º passo da construção do cartão Degraus Centrais



Fonte: Próprio autor

3° Passo: Com a folha dobrada, faça dois cortes verticais simétricos de altura igual a $\frac{b}{2}$, a uma distância de $\frac{a}{4}$ do extremo da folha, veja Figura 18.

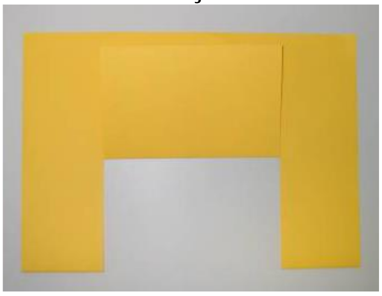
Figura 18 - 3º passo da construção do cartão Degraus Centrais



Fonte: Próprio autor

4º Passo: Dobre o retângulo formado para cima, fazendo um vinco na dobra, veja Figura 19.

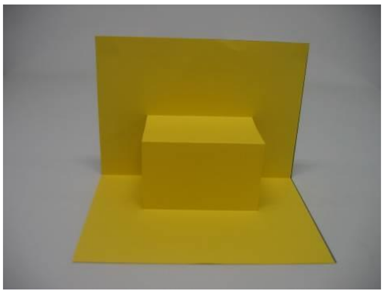
Figura 19 - 4º passo da construção do cartão Degraus Centrais



Fonte: GOI, DAHLKE, 2015

5º Passo: Retorne para a posição inicial o retângulo dobrado e puxe o centro da figura em relevo. Após esse passo, teremos a iteração zero do cartão fractal, veja Figura 20.

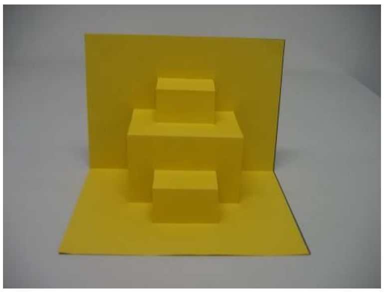
Figura 20 - Primeira iteração do cartão Degraus Centrais



Fonte: GOI, DAHLKE, 2015

6º Passo: Para obter a segunda iteração, deve-se dobrar novamente a folha, conforme se encontrava no passo 4, e repetir os passos de 3 até 5 somente para a parte da figura dobrada. Em seguida volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe a figura em relevo. Obtemos assim a segunda iteração do cartão fractal, veja Figura 21.

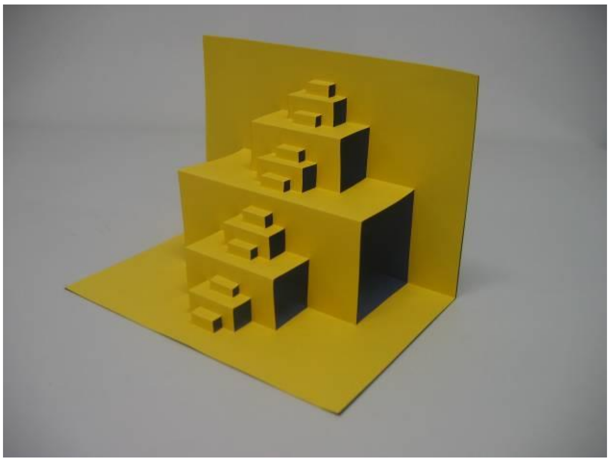
Figura 21 - Segunda iteração do cartão Degraus Centrais



Fonte: GOI, DAHLKE, 2015

7º Passo: Para gerar novas iterações, repita o mesmo processo enquanto for possível fazer os cortes e as dobraduras no papel, repetindo os passos de 3 a 5. Ao final, desdobre todos os recortes e puxe as figuras em relevo, veja o cartão fractal Degraus Centrais com 4 iterações na Figura 22.

Figura 22 - Cartão fractal Degraus Centrais com 4 iterações



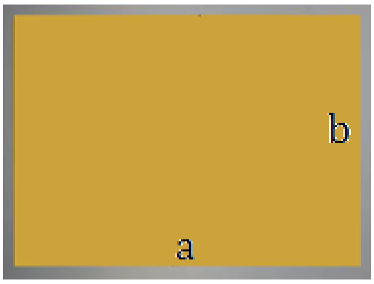
Fonte: GOI, DAHLKE, 2015

3.1.2 Cartão fractal: Triângulo de Sierpinski

Para a construção do cartão Triangulo de Sierpinski deve-se seguir os seguintes passos:

1° Passo: Como na construção do cartão Degraus Centrais, pegue uma folha de papel, de comprimento a e largura b, veja Figura 23.

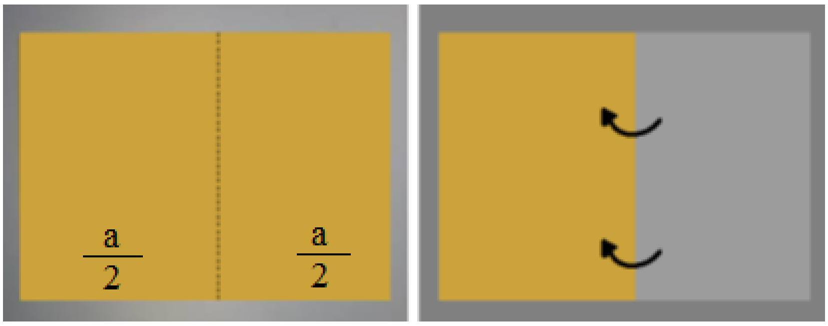
Figura 23 - 1º passo da construção do cartão Triângulo de Sierpinski



Fonte: GOI, DAHLKE, 2015

2° Passo: Dobre a folha ao meio, veja Figura 24.

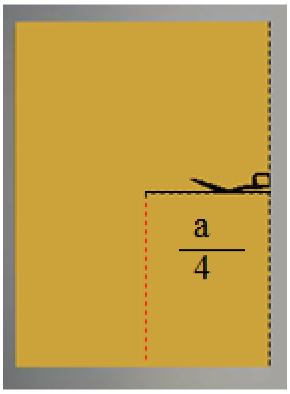
Figura 24 - 2º passo da construção do cartão Triângulo de Sierpinski



Fonte: Próprio autor

3° Passo: Após dobrar a folha corte-a ao meio, como mostra a Figura 25.

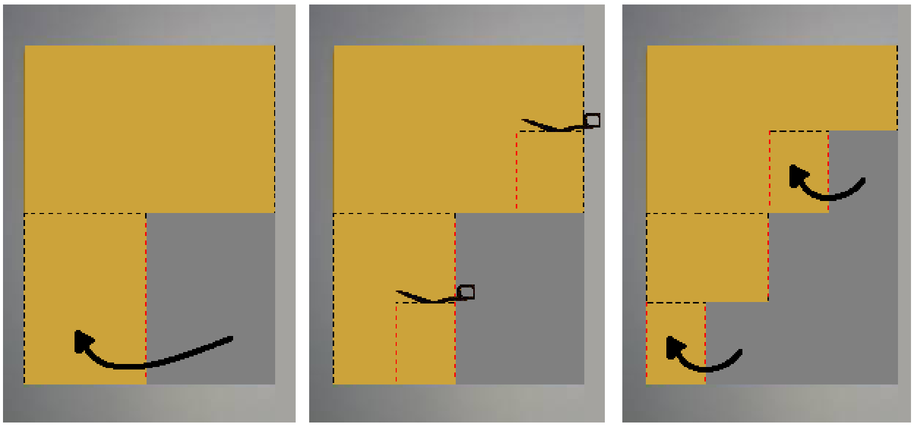
Figura 25 - 3º passo da construção do cartão Triângulo de Sierpinski



Fonte: http://www.ebah.com.br/content/ABAAABmIQAF/texto-construindo-fractais?part=2

4° Passo: Dobre a parte que foi cortada para dentro de si, veja Figura 26.

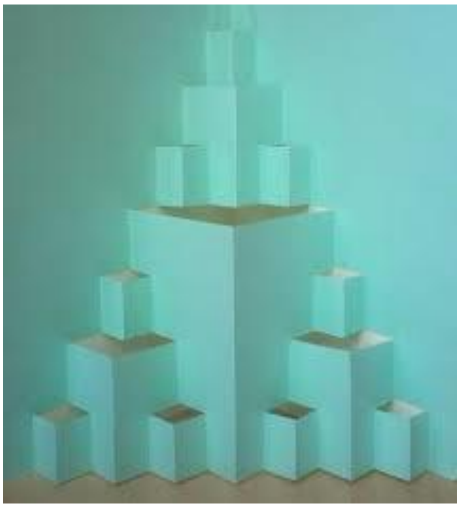
Figura 26 - 4º passo da construção do cartão Triângulo de Sierpinski



Fonte: http://www.ebah.com.br/content/ABAAABmIQAF/texto-construindo-fractais?part=2

5º Passo: Repita o processo descrito nos passos anteriores quantas vezes forem possíveis. Veja na Figura 27 um cartão fractal Triângulo de Sierpinski com 3 iterações.

Figura 27: Cartão fractal triângulo de Sierpinski com 3 iterações



Fonte: http://www.pibid.ufpr.br/pibid_new/uploads/matematica2011/arquivo/674/Geometria_Fractal.pdf

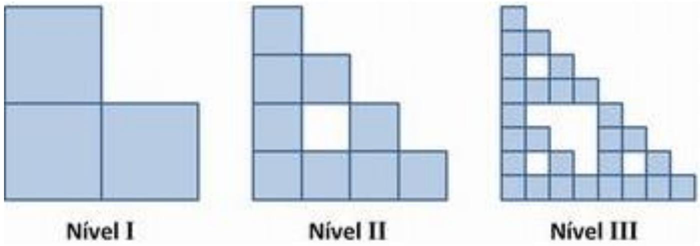
3.1.3 Fractal triminó

Barbosa (2005, p.91) nos apresenta algumas atividades nas quais são criados fractais utilizando-se materiais concretos manipuláveis. "O material necessário mais adequado para as atividades é um conjunto de peças quadradas, de madeira (com pequena espessura), cuja confecção por um carpinteiro é fácil e barata".

Diferentemente da construção dos fractais clássicos, como o triângulo e o tapete de Sierpinski, em que a construção ocorre pela redução adequada em escala para a passagem de um nível ao nível consecutivo, a construção dos fractais tipo poliminó, ocorre por ampliação de escala para os níveis consecutivos.

O fractal triminó em nível 1, será obtido considerando-se o triminó não reto, construído pela conexão de três quadrados. Para o nível 2 devem ser substituídas cada peça quadrada por um triminó igual ao do nível 1. Para os próximos níveis o mesmo processo deve ser repetido, veja três níveis do fractal triminó na Figura 28.

Figura 28: Fractal triminó



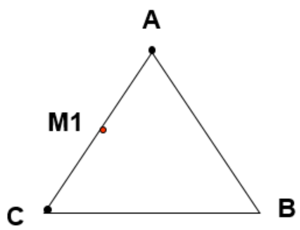
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br

3.1.4 Jogo do Caos

O jogo do Caos trata-se de um algoritmo criado em 1988 pelo matemático Michael Fielding, pode ser jogado individualmente ou em grupos. Para o início do jogo necessita-se de um dado e um triângulo equilátero de vértices A, B e C. A cada um dos vértices são atribuidos dois valores possíveis, resultantes do lançamento do dado. Pode-se definir, por exemplo, que A é o vértice escolhido se for sorteado no dado o número um ou dois, B é o vértice selecionado se for sorteado no dado o número três ou quatro ou que C foi o "vencedor" se sair o número cinco ou seis.

As regras do jogo são simples, lança-se inicialmente o dado e vê-se o resultado. Deve ser marcado o vértice que corresponde ao sorteio do dado. Supondo que tenha saído o número dois, deve marcar-se o ponto A. Novamente lança-se o dado, supondo agora que o número verificado seja o 5, a partir desse momento os pontos que deverão ser marcados devem correponder aos pontos médios entre os dois vértices. No exemplo dado acima, deve ser marcado o ponto médio correspondente ao lado AC do triângulo (veja Figura 29).

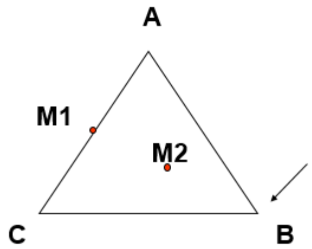
Figura 29: Ilustração da regra do jogo I



Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/5029580/

Lançando o dado mais uma vez, supondo que o vértice que deverá ser selecionado seja o B, deve ser marcado o ponto correspondente ao ponto médio do segmento M1B (veja Figura 30).

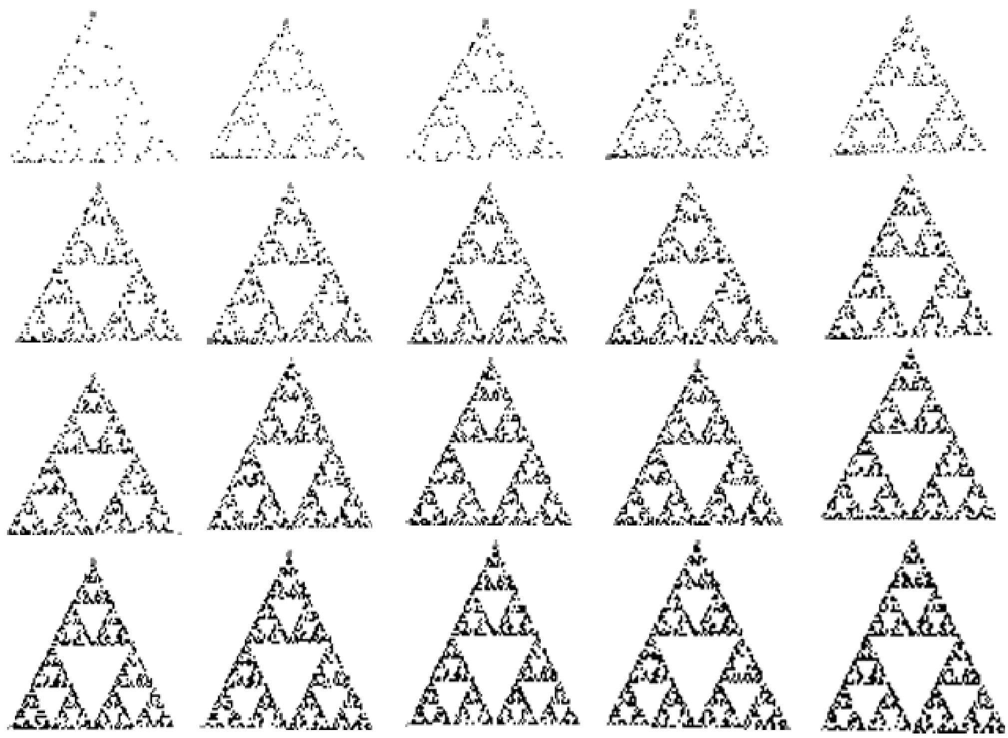
Figura 30: Ilustração da regra do jogo II



Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/5029580/

O processo segue quantas vezes o jogador definir, marcando sempre os pontos médios dos segmentos correspondente ao ponto da última posição e o vértice sorteado no dado. Os pontos obtidos no jogo do Caos, seguem um padrão inconfundível e podem ser vistos na Figura 31.

Figura 31: Evolução do Jogo do Caos



Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/5029580/

3.2 PESQUISA DE CAMPO

A pesquisa foi realizada com uma classe composta por 32 alunos da segunda série do Ensino Médio, matriculados na escola pública da rede estadual de ensino, EE. Cel. José Joaquim Bittencourt, localizada na cidade de Palmital, interior do estado de São Paulo, que atende alunos no ensino regular, divididos nos três períodos: matutino, vespertino e noturno, e possui uma classe de Educação de Jovens e Adultos (EJA).

3.2.1 Desenvolvimento da pesquisa

Inicialmente os alunos receberam um questionário diagnóstico (vide apêndice A), composto por 11 questões, com o objetivo de verificar os conhecimentos prévios em relação aos conceitos da Geometria Fractal e também elencar os conceitos da Geometria Euclidiana os quais eles se recordam, como cálculo de área, perímetro, volume, classificação de triângulo, etc.

O experimento foi dividido em três etapas. A primeira etapa consistia em motivar e transportar o aluno para o mundo dos fractais, para isso, eles foram conduzidos até a sala de vídeo e assistiram a uma apresentação explicativa e ilustrativa, criada no *Software Microsoft PowerPoint*, sobre a Geometria Fractal e seus conceitos. Para esta atividade esperou-se que os alunos fossem capazes de:

- Identificar um fractal;
- Relacionar a Geometria Fractal com elementos do cotidiano;
- Compreender os elementos que caracterizam um fractal: autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fracionária;
- Reconhecer o matemático, Benoit Mandelbrot, criador do termo fractal;
- Conhecer alguns “monstros matemáticos”, assim como os seus precursores;
- Apreciar a beleza dos fractais;
- Diferenciar a Geometria Euclidiana da Geometria Fractal.

Na segunda etapa os alunos, sentados em grupos, foram instruídos a construírem o cartão fractal: Degraus Centrais, o qual sua construção foi apresentada passo a passo na Seção 3.1.1. Para esta etapa os seguintes materiais foram necessários: folha sulfite, tesoura, régua, lápis ou caneta. A cada etapa (iteração) da construção dos cartões, os alunos receberam instruções para o cálculo do perímetro, áreas e volumes a cada iteração, das figuras formadas. Para esta etapa, esperou-se que os alunos alcançassem os seguintes objetivos:

- Construir um cartão fractal;
- Despertar o senso estético;
- Entender a autossimilaridade presente nos fractais;
- Compreender os seguintes conceitos da Geometria Euclidiana: ponto médio, comprimento de um segmento, área e volume.

Para a terceira etapa, foram necessários: folha sulfite, compasso, régua e lápis. Nesta atividade os alunos aprenderam a construir um triângulo equilátero usando apenas compasso e régua, do mesmo modo, aprenderam a determinar a mediatriz e o ponto médio de um segmento. Em seguida, construíram usando estes materiais, o triângulo de Sierpinski. Em consonância com a construção citada, serão estudados conceitos da Geometria Euclidiana, desse modo, esperou-se que esta atividade possibilitasse ao aluno:

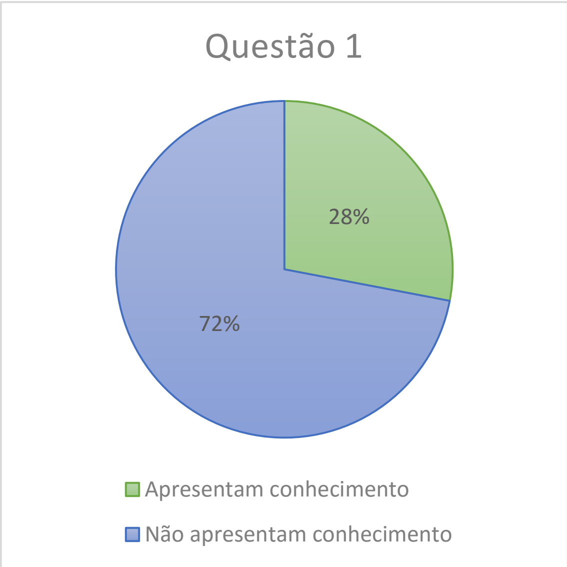
- Adquirir conhecimentos sobre Desenho Geométrico como: construção um triângulo equilátero, localização da mediatriz e ponto médio de um segmento usando apenas compasso e régua;
- Entender os elementos que caracterizam o triângulo de Sierpinski: autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fracionária;
- Construir o triângulo de Sierpinski com os conhecimentos adquiridos do desenho geométrico;
- Compreender conceitos da Geometria Euclidiana: ponto médio, área e volume.

Ao final das atividades propostas os alunos responderam a um questionário similar ao inicial, com o intuito de verificar se houve evolução em relação ao que foi verificado no primeiro questionário.

3.2.2 Resultados do teste inicial

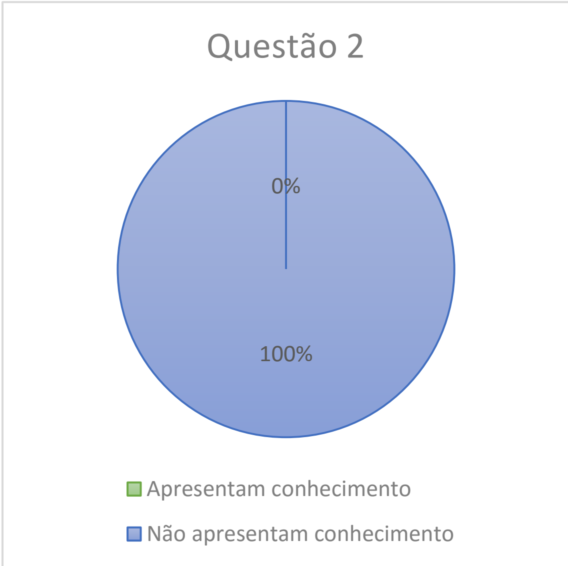
Antes da aplicação da pesquisa os alunos foram comunicados sobre as atividades que seriam aplicadas, assim como a data em que ocorreriam. No dia da realização do primeiro teste apenas 25 alunos estavam presentes. Os resultados estão expostos nos gráficos a seguir:

Gráfico 1 - Resultado da questão 1, teste 1



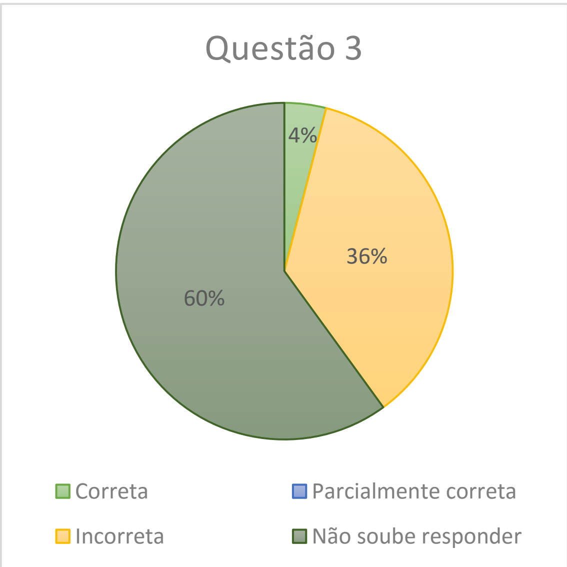
Fonte: Próprio autor

Gráfico 2 - Resultado da questão 2, teste 1



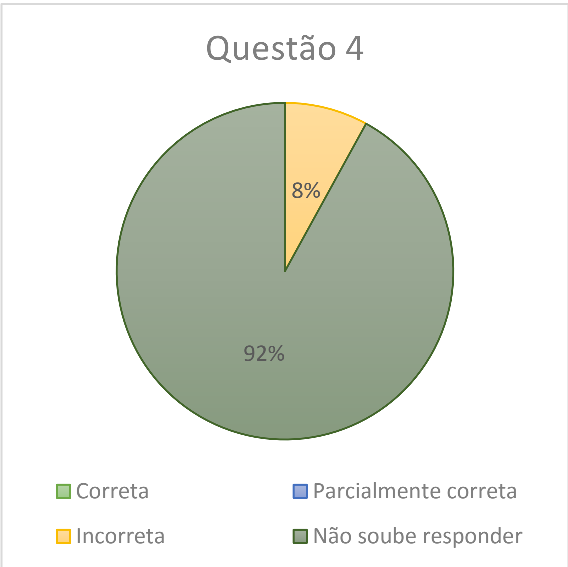
Fonte: Próprio autor

Gráfico 3 - Resultado da questão 3, teste 1



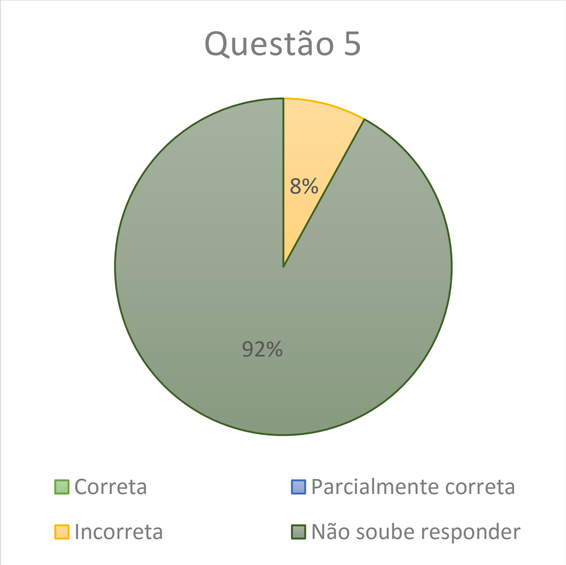
Fonte: Próprio autor

Gráfico 4 - Resultado da questão 4, teste 1



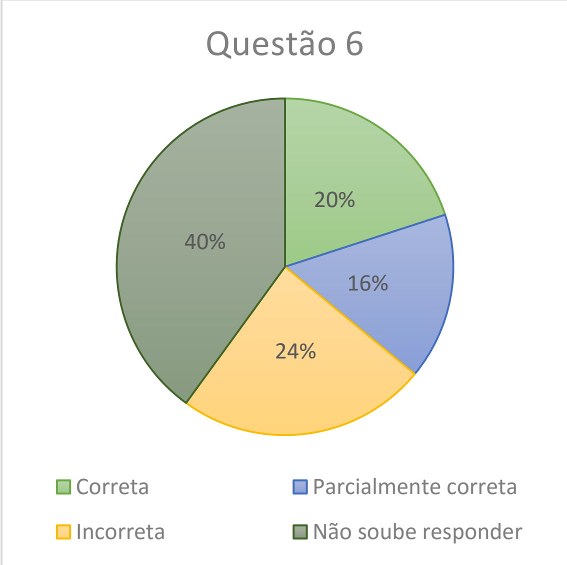
Fonte: Próprio autor

Gráfico 5 - Resultado da questão 5, teste 1



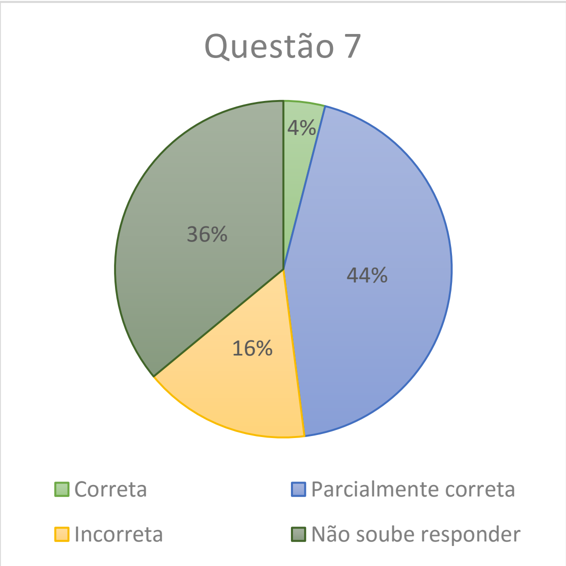
Fonte: Próprio autor

Gráfico 6 - Resultado da questão 6, teste 1



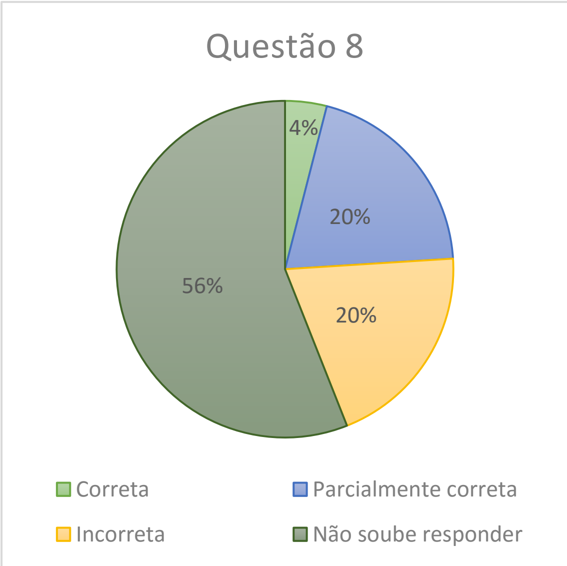
Fonte: Próprio autor

Gráfico 7 - Resultado da questão 7, teste 1



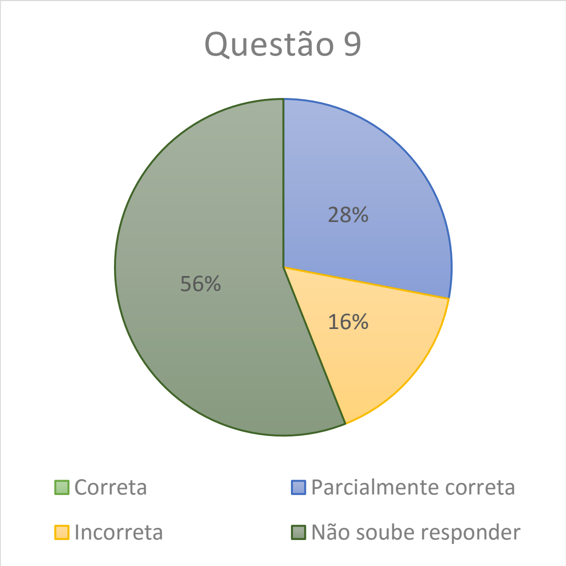
Fonte: Próprio autor

Gráfico 8 - Resultado da questão 8, teste 1



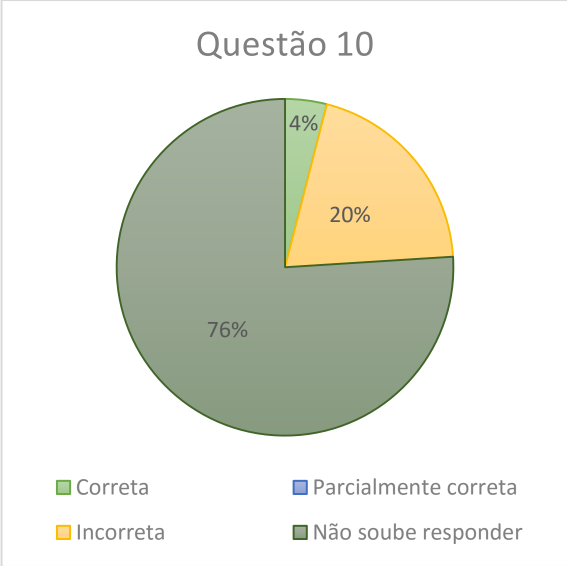
Fonte: Próprio autor

Gráfico 9 - Resultado da questão 9, teste 1



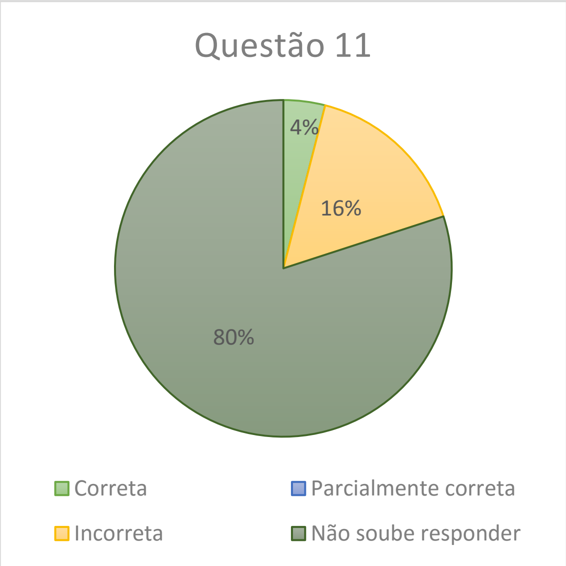
Fonte: Próprio autor

Gráfico 10 - Resultado da questão 10, teste 1



Fonte: Próprio autor

Gráfico 11 - Resultado da questão 11, teste 1



Fonte: Próprio autor

3.2.3 Análise dos resultados do teste inicial

A coleta de dados realizada antes das atividades propostas envolvendo a Geometria Fractal, expostas nos gráficos conforme mostrados na Seção 3.2.2, nos permite observar que:

Na questão 1 ao serem questionados sobre seus próprios conhecimentos sobre Geometria, era esperado que os alunos refletissem e elaborassem uma resposta, no entanto podemos observar, por meio do Gráfico 1, que 72 % dos alunos deixaram a questão em branco e apenas 28% dos alunos apresentam algum conhecimento sobre Geometria. Com bases nesses dados e na reação dos alunos durante a aplicação do teste, vemos que possuem grande dificuldade e insegurança em expor seus conhecimentos.

Na questão 2 ao serem indagados sobre a Geometria Fractal, 100% dos alunos não apresentaram conhecimentos sobre o assunto, veja Gráfico 2. Alguns responderam que já haviam ouvido falar sobre a Geometria Fractal, mas isso ocorreu pela exposição do termo pelo cronograma das atividades a serem propostas.

Na questão 3 foi apresentado um triângulo com três lados de medidas iguais, com o intuito de que o aluno o classificasse conforme essas medidas, por meio do Gráfico 3, vemos que apenas um aluno (4%) respondeu corretamente à questão e 9 alunos (36%) apontaram que os lados eram iguais, mostrando que não compreenderam o que estava sendo questionado.

Na questão 4 foi abordado o conceito de dimensão Euclidiana, foram apresentadas a figura de um ponto, uma reta e um plano, para que os alunos identificassem sua dimensão, 100% dos alunos não apresentavam conhecimento sobre o assunto (ver Gráfico 4).

Na questão 5 pergunta-se o que é o ponto médio de um segmento. É possível ver no Gráfico 5 que 92% dos alunos deixaram a questão em branco e 8% responderam incorretamente. Sabemos que grande parte dos alunos tem conhecimento sobre o significado da palavra médio, no entanto, não tentaram sequer relacioná-la com o conceito matemático esperado.

A questão 6 era questionado sobre a generalização do cálculo da área e do perímetro do quadrado. Do total de alunos, observe no Gráfico 6 que 20% responderam corretamente, 16% responderam parcialmente correta, ou seja, ou acertaram o cálculo do perímetro ou da área; 64% responderam incorretamente ou não souberam responder.

Na questão 7 foram expostos dois quadrados em que os alunos deveriam aplicar os conhecimentos da questão anterior. Apenas um aluno (4%) acertou completamente a questão, 11 alunos (44%) apresentaram algum erro em sua solução. Nesta questão ainda, por meio dos questionários respondidos, foi possível ver que alguns dos alunos que não conseguiram descrever uma solução para a questão 6, realizaram um dos cálculos corretamente (ver Gráfico 7). Outros acertaram a questão 6, mas erraram a 7. Desse modo, vemos que os alunos têm dificuldade em relacionar a teoria com a aplicação.

Na questão 8 os alunos deveriam generalizar o cálculo da área e do perímetro de um triângulo. Veja no Gráfico 8 que somente um aluno (4%) respondeu corretamente, 5 alunos (20%) acertaram a questão parcialmente, ou seja, apresentaram somente um dos conceitos corretos, também 5 alunos (20%) apresentaram de forma incorreta o cálculo, o restante deixou as questões sem responder.

A questão 9 tratava-se da aplicação dos conceitos estabelecidos na questão anterior, para isso foram apresentados um triângulo equilátero e um retângulo, no triângulo equilátero só era fornecida a medida lateral. Nenhum aluno conseguiu responder corretamente à questão, veja no Gráfico 9, só 28% dos alunos responderam apenas um dos conceitos correto, dentre eles, a maioria acertou o cálculo do perímetro.

A questão 10 abordava a generalização do cálculo do volume de um paralelepípedo, 96% dos alunos não tinham conhecimento do aluno, ou seja, apenas 4% dos alunos apresentou compreender a noção de volume, veja Gráfico 10.

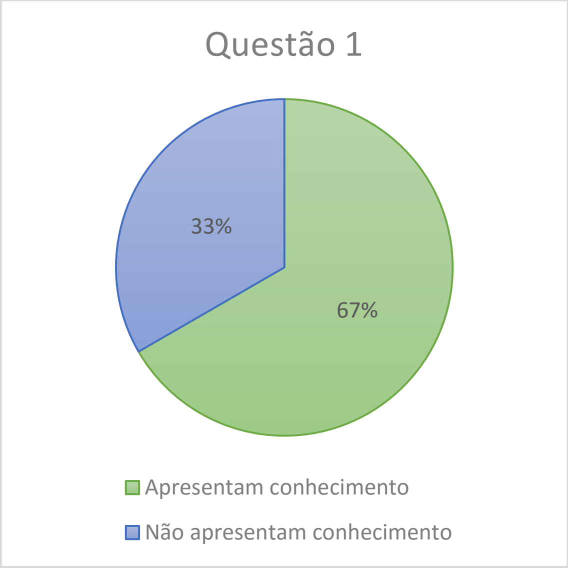
Por fim, a questão 11 pedia que fosse calculado o volume de um cubo, o mesmo aluno que apresentou conhecimento na questão anterior, conseguiu realizar o cálculo do volume do cubo, o restante não soube responder, veja os resultados referentes a esta questão no Gráfico 11.

Os dados apresentados após este primeiro teste nos mostram, de modo geral, o quanto os alunos dessa classe estão defasados em relação aos conhecimentos referentes a conceitos da geometria, conhecimentos estes que são aprendidos no Ensino Fundamental. Do mesmo modo, é possível apontar uma grande insegurança ao responder as questões, isso pode ser verificado pelo alto índice de questões deixadas em branco, a justificativa para isso pode estar relacionada a três fatores: o receio de estarem errados, a falta de compreensão do enunciado da questão e o desinteresse.

3.2.4 Resultados do teste final

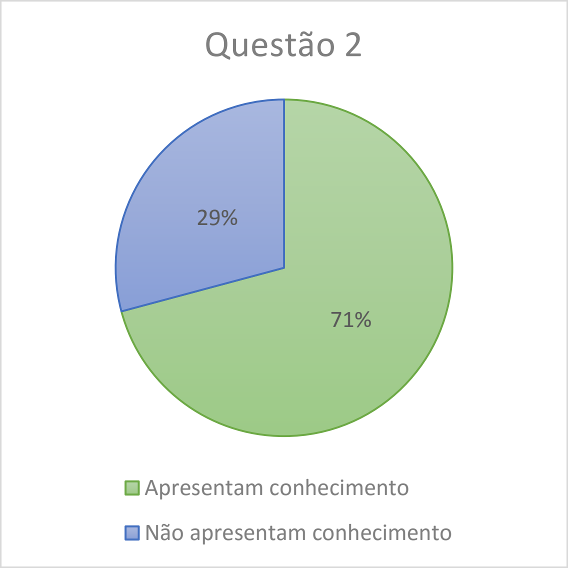
No dia da realização do segundo teste apenas 24 alunos estavam presentes. Para expor os resultados optamos por gráficos semelhantes aos apresentados na Seção 3.2.2.

Gráfico 12 - Resultado da questão 1, teste 2



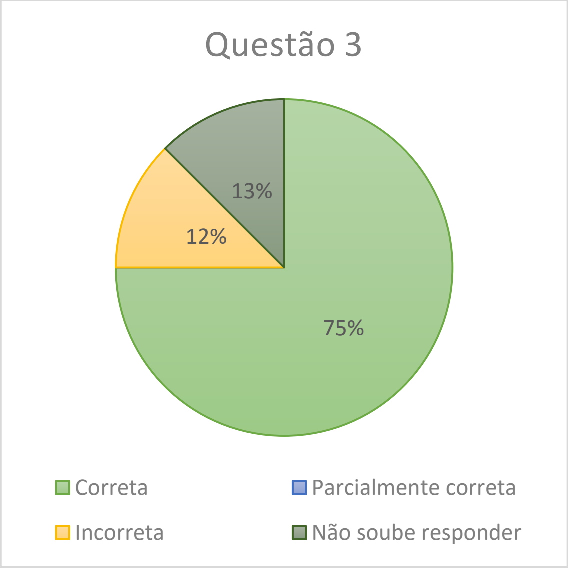
Fonte: Próprio autor

Gráfico 13 - Resultado da questão 2, teste 2



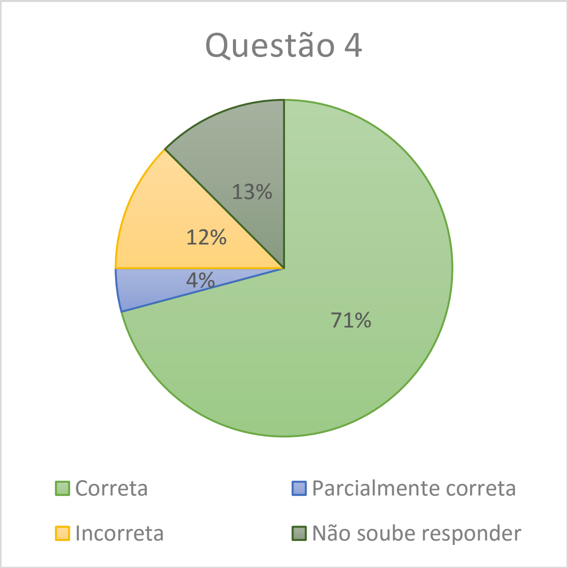
Fonte: Próprio autor

Gráfico 14 - Resultado da questão 3, teste 2



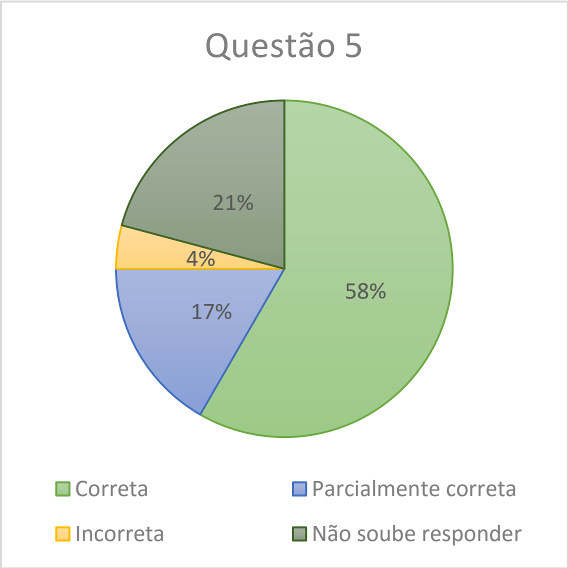
Fonte: Próprio autor

Gráfico 15 - Resultado da questão 4, teste 2



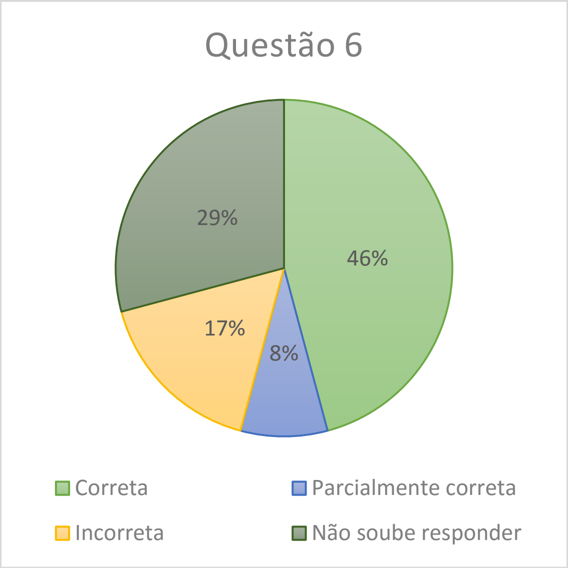
Fonte: Próprio autor

Gráfico 16 - Resultado da questão 5, teste 2



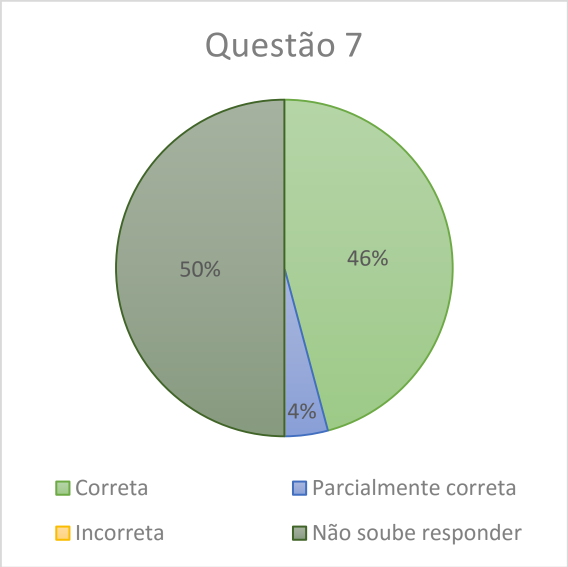
Fonte: Próprio autor

Gráfico 17 - Resultado da questão 6, teste 2



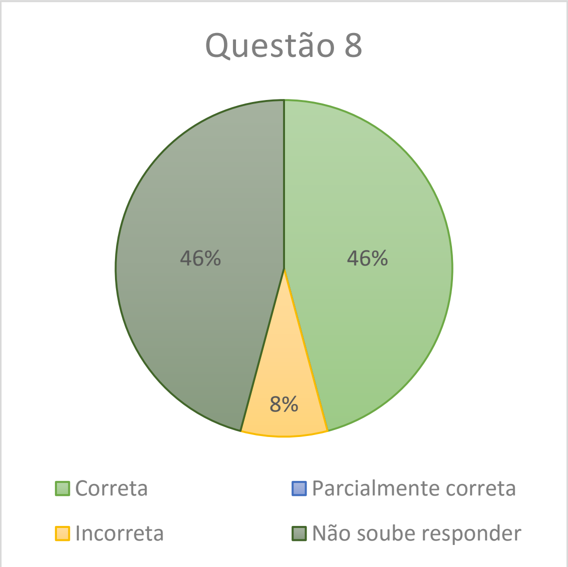
Fonte: Próprio autor

Gráfico 18 - Resultado da questão 7, teste 2



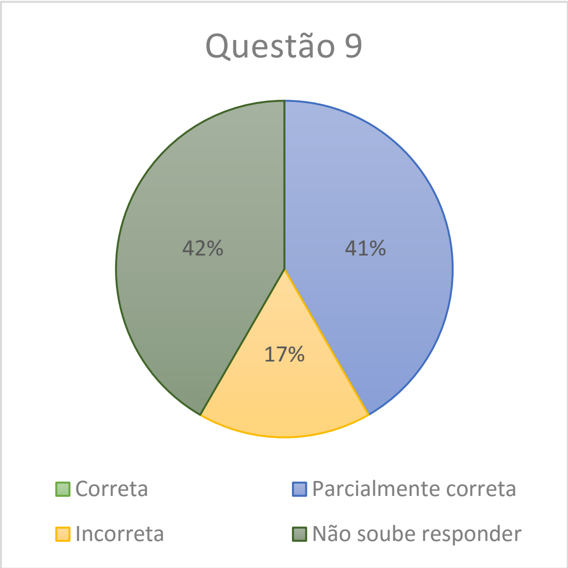
Fonte: Próprio autor

Gráfico 19 - Resultado da questão 8, teste 2



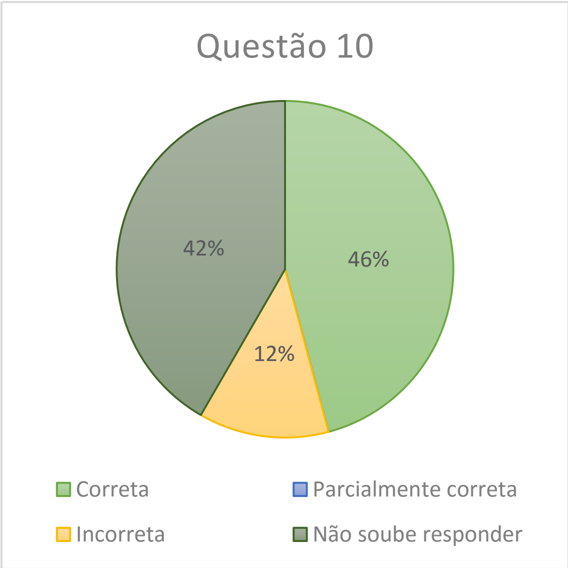
Fonte: Próprio autor

Gráfico 20 - Resultado da questão 9, teste 2



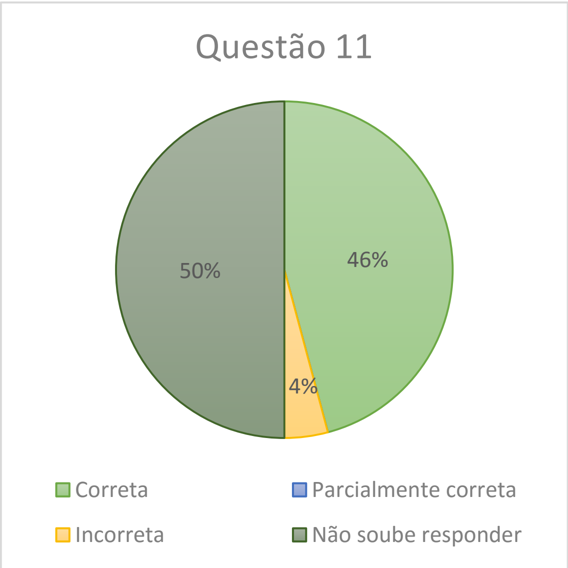
Fonte: Próprio autor

Gráfico 21 - Resultado da questão 10, teste 2



Fonte: Próprio autor

Gráfico 22 - Resultado da questão 11, teste 2



Fonte: Próprio autor

3.2.5 Análise dos resultados do teste final

A coleta de dados realizada posteriormente as atividades propostas, expostas nos gráficos conforme mostrados na Seção 3.2.5, em comparação com os dados referentes ao teste inicial nos permite observar que:

Em relação a questão 1, no primeiro teste 72% dos alunos não apresentaram conhecimento sobre Geometria, já no teste final esse número abaixou para 33% aproximadamente (ver Gráfico 12). E em relação a questão 2 o primeiro teste mostrou que nenhum aluno apresentava conhecimentos sobre a Geometria Fractal. Após o segundo teste é possível verificar que esse índice subiu para, aproximadamente, 71%, veja no Gráfico 13.

Houve uma elevação bastante significativa no índice de aquisição de conhecimentos, para essas questões, no entanto esses dados ainda não são os esperados, visto que as respostas para as questões citadas deveriam ser formuladas a partir de conhecimentos próprios do aluno e durante as atividades foram trabalhados diversos conceitos na qual eles poderiam se apoiar.

Em relação a classificar um triângulo pela medida dos seus lados no primeiro teste apenas um aluno acertou, já neste segundo 18 alunos responderam corretamente, o que gera um aumento de 71% no número de acertos, veja nos Gráficos 3 e 14.

Sobre a dimensão Euclidiana 100% dos alunos, não conheciam este conceito antes das atividades. Após as atividades esse número caiu para 25%, aqui estamos considerando o número de alunos que responderam incorretamente e deixaram a questão sem responder, veja no Gráfico 15.

Comparando os Gráficos 5 e 16, é possível perceber que houve um aumento de aproximadamente 58% na quantidade de alunos que conseguiram definir corretamente o que é ponto médio de um segmento e 17% conseguiram definir parcialmente, por meio de imagens que apontavam um segmento e o ponto médio do mesmo.

Na questão 6, a qual pedia a definição do cálculo da área e do perímetro do quadrado, o número de acertos passou de 20% para 46%, já em relação a quantidade de respostas parcialmente corretas não houve mudanças expressivas (ver Gráfico 17).

Na questão seguinte, aplicação da questão anterior, pode-se perceber que o aumento de acertos foi de 42%, veja Gráficos 7 e 18.

Na questão 8, ao observarmos o Gráfico 19, é possível apontar que 46 % dos alunos foi capaz de generalizar o cálculo da área e do perímetro de um triângulo, acreditamos que esse índice deveria ser maior, visto que foi bastante discutido durante as atividades.

Na questão 9, em que a generalização da questão anterior deveria ser aplicada em um cálculo numérico, nenhum aluno respondeu corretamente. Vale salientar que cerca de 41% responderam parcialmente correta, desse total foi possível perceber que a grande dificuldade dos alunos foi a de determinar a altura do triângulo equilátero, para em seguida calcular sua área.

Em relação a generalização e ao cálculo do volume de um paralelepípedo, houve um aumento de 41% de acertos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É possível inferir ao término da análise dos dados coletados, anteriormente a inserção da sequência de atividades selecionada, que o baixo rendimento obtido, vem em concordância com a vasta deficiência, no que se refere ao ensino e aprendizagem da Geometria, apontada pelos autores Lorenzatto (1995) e Sampaio (2010).

Como visto na Seção 1.3, Lorenzato concluiu, por meio de suas pesquisas, que as causas para um deficitário ensino e aprendizagem da geometria abrange duas vertentes: a formação dos professores e a utilização de livros didáticos compostos por conteúdos que não pertençam a realidade. Contrária a opinião apresentada pelo autor, Sampaio (2010, p.93) observa que:

> A realidade verificada por Lorenzato não é mesma realidade vista atualmente. Ao analisarmos a quantidade de questões que envolvem a Geometria em concursos públicos para o cargo de professor verificamos que é necessário um razoável conhecimento de geometria por parte do professor para que possa passar em um concurso deste tipo. Assim verificamos que na atual realidade o problema está mais relacionado à metodologia aplicada no processo de ensino, do que o conteúdo possuído pelos professores.

Em comum acordo com a posição de Sampaio (2010), notamos que o ensino desse conteúdo merece então, reflexões mais profundas, de forma a explorá-lo em situações práticas nas quais é possível diferençar-se das atividades com caráter teórico usualmente adotadas, visto que a ausência de conexão com a realidade externa a escola pode corroborar para uma aprendizagem ineficaz.

Ademais, acrescentamos outro fator prejudicial que temos enfrentado no ensino e na aprendizagem, que independe da metodologia selecionada pelo professor e se estende a outros conteúdos da disciplina de matemática e também das diferentes áreas do conhecimento, trata-se do desinteresse do aluno pela educação escolar em geral.

Essa constatação pode inicialmente ser comprovada pela baixa frequência habitual sem justificativas. Esta pesquisa, por exemplo, realizada com uma classe composta por 32 alunos, teve uma média diária de 76,5% de frequentes na semana de aplicação das atividades. Temos também que durante o primeiro questionário realizado, presenciamos alunos que mal leram as perguntas e já entregaram, apesar de serem orientados a fazerem uma leitura atenta e explicarem com suas palavras caso não recordassem as definições formais.

Posteriormente a estas etapas foi possível perceber uma melhoria em relação a participação dos alunos, durante a atividade de construção do cartão fractal, eles permaneceram atentos a explicação dos passos e cooperaram uns com os outros, visto que alguns alunos apresentaram grandes dificuldades, tendo que recomeçar diversas vezes, no entanto todos conseguiram concluir a atividade. Após a construção do cartão fractal os alunos realizaram cálculos de área e perímetro das figuras em relevo formadas, nesta etapa foi permitido o uso da calculadora como apoio, pois o intuito era a compreensão e a aquisição da abstração do cálculo da área de figuras planas e o volume do paralelepípedo.

Do mesmo modo que na atividade anterior, na construção do triângulo de Sierpinski, os alunos demonstraram intenso interesse, vimos que isso ocorreu principalmente pelo fato da maioria nunca ter usado compasso em uma aula de Matemática. Nesta atividade os alunos precisaram de uma atenção individual maior, pois houve grandes dificuldades ao manusear o compasso, por isso foram realizadas menos iterações do triângulo de Sierpinski do que estava previsto, além disso, vale ressaltar que para o cálculo da área do triângulo equilátero, a base e a altura do triângulo foram determinadas com régua e não utilizando o teorema de Pitágoras, devido à falta de tempo para explicar as duas maneiras.

Feitas as considerações necessárias retomamos as seguintes questões auxiliares que nortearam esta pesquisa:

- Como os alunos interagem com os materiais manipuláveis e com as dobraduras ao construir fractais na sala de aula?

Temos que por meio do relato sobre as atividades empregadas, podemos afirmar que a maioria dos educandos apresentaram grande interesse ao trabalhar com material manipulável, pois participaram com empolgação da atividade, nesta pesquisa utilizamos o compasso como material manipulável. Com a dobradura não foi diferente, os alunos ficaram animados ao verem o resultado final de seu cartão fractal.

- Como os alunos elaboram, buscam e discutem suas conjecturas em relação à procura dos resultados dos cálculos relacionados a área, perímetro e volume?

No decorrer das atividades os alunos buscavam os resultados necessários por meio da colaboração dos colegas ou solicitando minha ajuda. Ao responderem o teste II, apresentaram um pouco de dificuldade em relacionar as definições e os cálculos realizados na prática com as questões selecionadas. Consequentemente é possível perceber que a abstração dos cálculos necessita de um trabalho mais profundo, visto que a grande dificuldade dos alunos está em relacionar os cálculos práticos com a linguagem matemática. Outro conteúdo que necessita ser trabalhado, está relacionado ao cálculo de área de um triângulo equilátero, no questionário exigia o cálculo de um triângulo equilátero em que era mostrado apenas a medida do lado, desse modo os alunos deveriam determinar o valor da altura por meio do teorema de Pitágoras, como não houve tempo para retomar esse conteúdo, todos os alunos erraram este cálculo em ambos os testes.

- Como os alunos validam suas soluções?

Infelizmente observamos que os alunos não têm o costume de validar suas soluções, para eles a resolução é suficiente estando correta ou não, dessa forma, buscamos inserir a conferência dos resultados em todas as atividades, no início pela comparação dos resultados com os colegas, e em seguida através de questionamentos sobre a possibilidade de ocorrência de determinados resultados.

Em suma pode-se difundir uma metodologia utilizando materiais a qual estes alunos nunca tiveram a oportunidade de operar nas aulas de matemática, como no caso do compasso. Tal fato despertou curiosidades, que se estenderam ao interesse Matemático. Portanto, respondendo à questão principal de nosso trabalho que questiona sobre as contribuições que a Geometria fractal pode proporcionar ao ensino dos alunos do Ensino Médio, em relação ao ensino e a aprendizagem da Geometria, podemos garantir que os resultados quantitativos obtidos nos levam a concluir que a Geometria Fractal pode servir como artifício para minimizar as dificuldades associadas aos conceitos geométricos aprendidos no Ensino Fundamental, visto que ao apresentá-la em uma sequência de atividades bem planejadas, foi dado condições para que o aluno adquirisse conhecimentos matemáticos por intermédio de atividades práticas e que se distinguiu da qual estava acostumado, o que gerou uma melhoria considerável em cada item avaliado, como pode ser visto no capítulo anterior.

Conjuntamente, a inserção da Geometria Fractal traz condições, ao aluno, de questionar e compreender o mundo em que vive, por meio do formato e dimensão de elementos presentes na natureza, os quais a geometria Euclidiana não pode explicar. Essa descoberta atende as recomendações dos PCNs do Ensino Médio, para o conteúdo de geometria em que realça que:

> A abordagem tradicional, que se restringe à métrica do cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos, não é suficiente para explicar a estrutura de moléculas e cristais em forma de cubos e outros sólidos, nem tampouco justifica a predominância de paralelepípedos e retângulos nas construções arquitetônicas ou a predileção dos artistas pelas linhas paralelas e perpendiculares nas pinturas e esculturas. Ensinar Geometria no ensino médio deve possibilitar que essas questões aflorem e possam ser discutidas e analisadas pelos alunos. (BRASIL, 1997, p.119)

Não podemos deixar de citar que estas mesmas atividades aplicadas em outro âmbito escolar podem apresentar resultados diferentes, sugerimos que seja feita uma investigação sobre os conhecimentos prévios dos alunos, tanto em relação as suas experiências com materiais concretos e dobraduras, quanto as dificuldades conceituais, pois só com o claro conhecimento dos alunos é possível estabelecer uma metodologia que tenha implicações positivas no processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Emerson Rodrigues; SILVA Telles Timóteo. **Geometria Fractal e Outros Tópicos Relacionados: novos conteúdos e atividades a serem explorados na Educação Básica**. 2014. 37 p. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Universidade Federal de São João Del Rei, Minas Gerais, São João Del Rei, 2014.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a geometria fractal: para a sala de aula**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRÁS, Fernanda Martins. **História da Geometria hiperbólica**. 2009. 34 p. Trabalho de conclusão de curso (Especialização em Matemática). Instituto de Ciências Exatas - Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.

__ Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Média – Matemática. Orientações complementares. Brasília: Secretaria de Educação MEC/SEF, 1.997. 141 p.

CARDOSO, Maria Dolores Costa Lhamas; SOUSA, Gisele Costa de. **De Euclides e os elementos aos nossos dias**. 2009. Sociedade Brasileira de Educação Matemática Regional do Rio Grande do Norte. Disponível em <http://www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/comunica/doc/comunica19.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática.** Howard Eves, tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

GOI, Senhorinha da Silva; DAHLKE, Marsoé Cristina. **A geometria dos fractais no ensino: uma nova forma de visualizar o mundo.** 2015. Universidade Cruzeiro. Disponível em: http://unicruz.edu.br/mercosul/pagina/anais/2014/DIREITO%20A%20EDUCACAO/ARTIGO/ARTIGO%20%20A%20GEOMETRIA%20DOS%20FRACTAIS%20NO%20ENSINO%20UMA%20NOVA%20FORMA%20DE%20VISUALIZAR%20O%20MUNDO.PDF. Acesso em: 19 mai. 2016

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. Tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: Editora IBRASA, 1976.

LORENZATO, Sérgio. **Por quê não ensinar Geometria?** In: Educação Matemática em Revista, SBEM, n. 4, pp. 3-13, 1995.

__ O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. 2 ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

MANDELBROT, Benoit B. **The fractal geometry of nature**. 1997.

MARINHO, Jéssica, et al. **A importância do desenho geométrico no ensino básico e técnico de nível médio.** In: 1ª Jornada de Iniciação Científica e Extensão do IFTO, 2010, Palmas. JICE 2010 - Inovação e Sustentabilidade: Um caminho para o Desenvolvimento Sustentável. Palmas: IFTO, 2010. v. 1. p. 53-59.

MARTINS, Jayson Adjamur. **Uma proposta teórica para futura implementação do Origami Arquitetônico no ambiente "a arte das dobraduras"**. 2008. 81 p. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

MIRANDA, Aldicio J. **Fractais: Conjuntos de Julia e Conjuntos de Mandelbrot.** I Semana da Matemática da Unfal-MG, 2012, Alfenas, Sigmae, 2012 v.1, n.1, p. 110-117.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. 78 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, Porto 2006.

OLIVEIRA, Clezio Lemes de. **Importância do Desenho Geométrico.** Universidade Católica Brasileira. Disponível em https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/ClezioLemesdeOliveira.pdf > Acesso em: 29 fev. 2016

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática**. Paraná, PR: Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2008.

PEREIRA, Alceu Sergio. **Fractais Circulares: Algumas considerações e atividades**. 2013. 81 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Paraná, Londrina, 2013.

PIMENTEL, Homero; URBAN, Paulo. **Fractais da História: A Humanidade no Caleidoscópio**. São Paulo: Madras, 2003.

QUEIROZ, Marcelo; KON, Fabio. **Música fractal: um painel de técnicas de geometria fractal aplicadas em música.** *Opus*, Porto Alegre, v. 19, n. 2, p. 9-38, dez. 2013.

REIS, Jakson Ney da Costa Reis. **"Fractais no Ensino Médio: da observação de padrões da natureza ao uso do Geogebra"** 2014. 92 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT), Universidade Federal Rural do Semiárido, Rio Grande do Norte, Mossoró, 2014.

SAMPAIO, Luiz Francisco Batista. **Instrumentos antigos como apoio no ensino aprendizagem da geometria.** 2010. 208 p. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura Plena em Matemática). Fundação Educacional do Município de Assis – FEMA/Instituto Municipal de Ensino Superior de Assis – IMESA, São Paulo, Assis, 2010.

SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática.** / Coord. Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008.

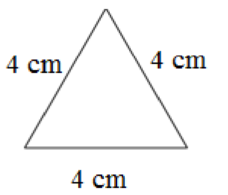
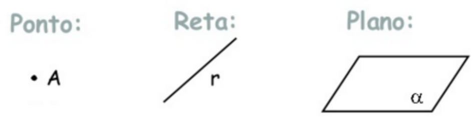
SILVA, Míriem Martins da; SOUZA, Wallysonn Alves de. **Dimensão Fractal**. 2010. Revista Eletrônica de Matemática. Disponível em <http://matematicajatai.com/rematFiles/2-2010/dimfractal.pdf> Acesso em: 07 fev. 2016.

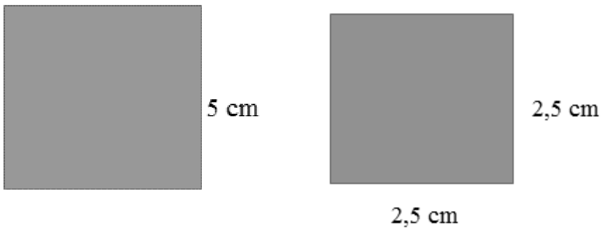
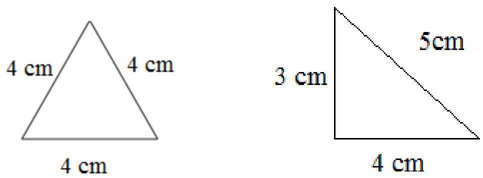
SWIDERSKI, Sandro Adir. **O estudo de alguns aspectos da geometria fractal**. 2015. 71 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso, Mato Grosso, Cuiabá, 2015.

ZAMBELLI, Juliana Alonso Gabi de Jong. **Fractais no ensino médio: a valorização da geometria a partir de uma nova experiência em sala de aula.** 2013. 51 p. Trabalho de conclusão de curso (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do ABC, São Paulo, Santo André, 2013.

APÊNDICE A

Questionário inicial

1. O que você entende sobre Geometria?	
2. Você já ouviu falar de Geometria Fractal ou de Fractais?	
3. Qual é a classificação desse triângulo em relação aos seus lados? 	
 4. Qual a dimensão de cada um desses elementos?	
5. Você sabe o que é ponto médio de um segmento?	
6. Explique como se calcula a área de um quadrado? E o perímetro?	

7. Calcule a área e o perímetro desses quadrados: 	
8. Explique como se calcula a área de um triângulo? E o perímetro?	
9. Calcule a área e o perímetro de cada um dos triângulos: 	
10. Como se calcula o volume de um paralelepípedo?	
11. Qual o volume desse cubo?