UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Osvaldo Gebra Júnior

Uma proposta de Sequência Didática para o ensino de Combinações Simples no Ensino Médio através da Resolução de Problemas

Ilha Solteira
Julho/2016

Osvaldo Gebra Júnior

Uma proposta de Sequência Didática para o ensino de Combinações Simples no Ensino Médio através da Resolução de Problemas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre junto ao Profmat – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, Polo Ilha Solteira.

Orientador: Prof. Dr. José Marcos Lopes.

Ilha Solteira
Julho/2016

Gebra Júnior, Osvaldo.
Uma proposta de sequência didática para o ensino de combinações simples no ensino médio através da resolução de problemas / Osvaldo Gebra Júnior. -- São José do Rio Preto, 2016
39 f. : il.

Orientador: José Marcos Lopes
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Análise combinatória. 3. Combinações (Matemática) 4. Aprendizagem baseada em problemas. 5. Matemática – Metodologia. I. Lopes, José Marcos. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 519.1(076)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Osvaldo Gebra Júnior

Uma proposta de Sequência Didática para o ensino de Combinações Simples no Ensino Médio através da Resolução de Problemas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre junto ao Profmat – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, Polo Ilha Solteira.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. José Marcos Lopes
UNESP – Ilha Solteira
Orientador

Profa. Dra. Roseli Arbach Fernandes de Oliveira
UNESP – Ilha Solteira

Profa. Dra. Tatiana Bertoldi Carlos
UFMS - Paranaiba

Ilha Solteira
Julho/2016

Dedico esse trabalho primeiramente a Deus,
Que me move e guia nos caminhos da vida,
Aos meus pais, esposa, filho, irmão e tia
Pela força e incentivo nos momentos difíceis,
Que não foram poucos

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. José Marcos Lopes pelo apoio, incentivo, paciência, atenção, dedicação, confiança e disponibilidade na orientação deste trabalho, nas aulas durante o curso e por não me deixar desistir nos momentos difíceis.

A todos os professores que foram parte desse curso, pelas excelentes aulas ministradas, trocas de experiências e incentivos.

Aos colegas de curso da turma PROFMAT – 2012, pelos momentos de muita alegria, cooperação e força uns com os outros, em especial Charles e Leandro pela ajuda, convivência e companhia nas viagens semanais.

Aos colegas da turma PROFMAT – 2015, apesar de ter sido menor a convivência, foi bastante gratificante.

Aos meus alunos que se prontificaram a participar de maneira entusiasmada e com muito empenho na aplicação da sequência didática, sem questionamentos ou condições.

Aos meus pais, sogros, minha tia Maria e minha prima Márcia, pelo incentivo e animo durante as adversidades.

Ao amigo Marcelo, pelo apoio, incentivo e pela revisão do texto.

A Ana Lúcia, minha companheira, amiga e esposa, por se fazer presente e estar ao meu lado em todos os momentos.

Ao meu filho Pedro Afonso por entender os momentos de ausência com as viagens e estudos sempre de maneira muito carinhosa.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino aprendizagem para introdução do conceito de Combinações Simples, através de uma sequência didática utilizando a resolução de problemas como forma metodológica, aplicado em uma série de 2° Ano do Ensino Médio. Trata-se de uma sequência didática em que os problemas apresentam uma ordem crescente de dificuldade. Apresentamos antes uma breve introdução, com conceitos históricos, do uso de problemas como forma metodológica, outra de situação problema e, uma rápida revisão dos conteúdos de Análise Combinatória, estudados durante o Ensino Médio, para organizar e ambientar nosso trabalho. Da mesma forma como já aparece no Caderno do Aluno, fornecido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, propomos a utilização da sequência didática, em sala de aula, através do uso da metodologia de resolução de problemas, em que o aluno deve chegar ao conceito matemático por meio de suas descobertas. Aplicamos em sala de aula a sequência didática acima citada, com os alunos em grupos, onde foi apresentado problema por problema, entre eles sempre se colhiam os resultados e discutíamos em plenária para que fosse possível identificar os acertos e transformar os erros em aprendizado. Além de trabalhar Análise Combinatória, que já é um assunto que traz algumas dificuldades para professores e alunos, a principal habilidade necessária para a resolução de problemas também é trabalhada, a leitura e interpretação, pois cada problema era lido e interpretado por cada um dos grupos, trazendo então as discussões e trocas de experiências entre os grupos e o professor que somente mediava as discussões e sistematiza os resultados. Esperamos que o nosso trabalho sirva para desmistificar o conceito e trazer novas práticas que podem ser ajustadas para as nossas salas de aula.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Resolução de Problemas. Problemas de Combinações Simples. Sequência Didática. Ensino médio.

ABSTRACT

This paper presents a learning teaching proposal to introduce the concept of simple combinations, through a didactic sequence using problem solving as a methodological way, applied in a 2nd year of high school. This is a didactic sequence in which problems are an increasing degree of difficulty. We presented before a brief introduction with historical concepts, using problems as a methodological way, another problem situation and a quick review of Combinatorial Analysis of content studied during high school to organize and situate our work. As already appears in the Student Notebook, provided by the Secretaria do Estado de São Paulo, we propose the use of didactic sequence in the classroom through the use of Problem-Solving Methodology, in which the student must reach the mathematical concept through their discoveries. We apply in the classroom the Didactic Sequence mentioned here, the students divided into groups, where it was presented issue by issue, among them always reaped the results and discussed in plenary, so that it was possible to identify the successes and turn mistakes into learning. Besides working Combinatorial Analysis, which is already a subject that brings some difficulties for teachers and students, the main skill required for Problem-Solving is also worked, the reading and the interpretation, because each problem was read and interpreted by each group, bringing the discussions and exchanges of experience among the groups, which before, the teacher was the one who only mediated the discussions and systematized the results. We hope our work will serve to demystify the concept and bring new practices that can be adjusted to our classrooms.

Keywords: *Combinatorial Analysis. Problem-Solving Methodology. Simple Combinations of Problems. Didactic Sequence. High school.*

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

I – INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é um dos núcleos centrais da Matemática Discreta e parte importante da Probabilidade, na Educação Básica, onde de acordo com os PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais é necessário o raciocínio combinatório na formação do aluno do Ensino Médio, tanto para as Ciências da Natureza quanto para as Ciências Humanas, que carrega inúmeros obstáculos no processo ensino aprendizagem, principalmente porque o ensino tem ocorrido através de fórmulas ou padronizações de resoluções, não se tornando atrativo para os alunos.

Seu ensino se inicia nos anos finais do Ensino Fundamental, com problemas de contagens simples, principalmente o *Princípio Multiplicativo*, continua durante o 2° ano do Ensino Médio ampliando Princípio Multiplicativo e Aditivo, introduzindo os conceitos de fatorial, permutações, arranjos e combinações e, em muitos casos, retomado durante o 3° ano do Ensino Médio.

Ainda de acordo com os PCN, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino, pois se confrontando com situações-problemas, os alunos buscam novas estratégias e soluções para enfrentá-las, passam a planejar as etapas, estabelecer relações, verificar as regularidades, buscam corrigir seus erros e, com isso, passam a adquirir autoconfiança, ampliam sua autonomia e capacidade de argumentação.

O uso da Resolução de Problemas como Estratégia de Ensino é algo que já vem sendo estudado e partilhado por campos da Matemática, principalmente na Educação Matemática, a partir da década de 80 do século passado, buscando novas formas de ensinar Matemática e a melhoria dos índices alcançados pelos alunos durante a Educação Básica.

Alguns projetos de Ensino não trazem mais o conteúdo de forma sequencial, surgindo também agora na forma de espiral, o que nos remete a pensar que as formas metodológicas trabalhadas até então não são mais tão eficazes, surgindo assim a sequência didática como outra estratégia metodológica.

Tendo em vista essas argumentações, esse trabalho traz uma visão diferenciada para o ensino de Combinações Simples, partindo do princípio que já tenham sido trabalhados os conceitos de Princípio Multiplicativo, Permutações Simples e Arranjos, utilizando a Resolução de Problemas através de uma sequência Didática, levando o aluno a construir o conceito de Combinações Simples.

No capítulo II, é retratado um breve histórico do uso de problemas no ensino da Matemática até chegar a Resolução de Problemas como estratégia central do ensino.

O capítulo III consiste em uma breve descrição do conceito de sequência didática proposto por Zabala (1998) e nos moldes do currículo do Estado de São Paulo.

No capítulo IV apresentamos uma pequena revisão sobre os conceitos iniciais de combinatória, como Princípio Multiplicativo, Permutações Simples, Arranjos e Combinações Simples.

No capítulo V formulamos uma proposta de sequência didática para se trabalhar o conceito de Combinações Simples.

O capítulo VI traz relatos sobre a aplicação da sequência didática em sala de aula e a visão dos alunos após o trabalho concluído.

Já o capitulo VII mostra as considerações finais sobre o trabalho, onde tentamos mostrar as vantagens e dificuldades da utilização dessa metodologia de ensino de Matemática.

II – A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas é algo diretamente ligado à Matemática e ao currículo de Matemática escolar desde a antiguidade, e, de acordo com a história antiga dos egípcios, chineses e gregos, é encontrada de forma natural nos livros de matemática dos séculos XIX e XX. No entanto, era considerada um desafio a ser atingido e assumia uma visão vaga e limitada da aprendizagem de resolver problemas.

Até pouco tempo, e ainda hoje para algumas salas de aulas, o contexto se baseia em apresentar uma situação-problema a ser alcançada e, às vezes, incluir um exemplo como uma técnica operatória específica. Ocorre que a dificuldade com a resolução de problemas por parte dos alunos permanece, sendo necessárias outras formas de se fazer Matemática nas salas de aula.

As metodologias das aulas de Matemática mudaram bastante com o passar do tempo. No início do século XX, por exemplo, o ensino da Matemática era baseado na repetição e na memorização. Anos depois visou-se a aprender com compreensão, claro que contando com a dificuldade de os professores não serem preparados para esse trabalho em sala de aula. Porém, os resultados não foram tão satisfatórios, pois não atingiam a maioria dos alunos, e sim apenas aqueles que possuíam certa facilidade com a aprendizagem de Matemática.

Acontece que foi também nesse período que começou a se falar na resolução de problemas como método de aprendizagem de Matemática. Segundo Andrade (1998):

> A primeira vez em que a resolução de problema é tratada como um tema de interesse para professores e alunos, nos níveis superiores, foi a partir do livro *How to solve it*, de Polya, cuja primeira edição data de 1945. Antes desse período, entretanto, houve algumas experiências e alguns estudos enfatizando os produtos da resolução de problemas. As experiências mais remotas e significativas podem ser creditadas a Dewey, entre 1896 e 1904. Nessas experiências, as crianças estudavam através de projetos que reproduziam as situações socioeconômicas (estudo/resolução de problemas de interesse da comunidade). Dewey sugeria que essa orientação pedagógica, centrada em projetos, pudesse contribuir para o desenvolvimento do espírito crítico das crianças, capacitando-as a colaborar para o desenvolvimento de uma sociedade democrática (Fiorentini, 1994, p.188).Segundo Gazire (1989, p.71 – 73), os estudos sobre resolução de problemas realizados até o final da década de 1950, nos Estados Unidos, em sua maioria indicavam que a criança, para desenvolver sua capacidade de resolução de problemas, deveria exercitar-se ostensivamente na solução de uma grande quantidade de problemas. Bloom e Broder, ainda na década de 1950, questionavam as pesquisas, até então desenvolvidas sobre a solução de problemas, pela ênfase que vinha sendo dadas aos produtos das soluções em vez de valorizar os processos implícitos da resolução criativa dos problemas. Estes pesquisadores, para melhorar captarem as estratégias de resolução, estudaram os processos de resolução utilizados pelos estudantes bem-sucedidos. Para que isso fosse possível, os alunos deveriam pensar em voz alta durante o processo. Com base em suas pesquisas, defenderiam que o ensino de resolução de problemas, pois acreditavam que os hábitos de resolução de problemas

> poderiam ser alterados ou aprimorados por uma adequada formação e prática. (ANDRADE, 1998, p.7 – 8).

Já entre as décadas de 1960 e 1970, surgiu um movimento de renovação do ensino de Matemática intitulado Matemática Moderna e o Brasil e diversos outros países seguiram essa tendência. Esse movimento, como os outros, não contou com o professor da sala de aula e ele deixava de lado os métodos anteriores para apresentar um currículo apoiado em uma estrutura lógica, algébrica, topológica e de ordem, que enfatizava a teoria dos conjuntos. Apesar da preocupação com propriedades, linguagem matemática universal e precisa, abusava das abstrações matemáticas e terminologia complexa, o que prejudicava o aprendizado.

Conforme Onuchic (1999):

> Nesta reforma o professor falava, porém muitas vezes não seguro daquilo que dizia. O aluno não percebia a ligação que todas aquelas propriedades enunciadas tinham a ver com a matemática dos problemas e, principalmente, com a matemática usada fora da escola. Embora procurasse usá-las em exercícios de aplicação, repetindo o que havia sido feito em classe e dizendo o nome daqueles novos símbolos matemáticos que lhe eram apresentados, com frequência não conseguia lhe dar significado. Esse ensino passou a ter preocupação excessiva com formalização, distanciando-se das questões práticas. (ONUCHIC, 1999, p. 203).

Paralelamente a esse movimento, começa a ganhar espaço o ensino da Resolução de Problemas. Em 1980, a NCTM – National Concil of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática) publicou a An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's, que chamava todos a juntar forças na busca por uma melhor educação matemática e recomendava que "resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar para os anos 80". Conforme Andrade (1998):

> Nessa década a ATM (Association of Teachers of Mathematics), entidade inglesa, estabeleceu que a habilidade em resolução de problemas fosse o centro do ensino de matemática e que deveria substituir a aritmética elementar como tema principal nas classes elementares. Na metade da década de 1980, Resolução de Problemas passa a ocupar a atenção de quase todos os congressos internacionais. É nessa década que o Brasil, de fato, começa a trabalhar sobre Resolução de Problemas. Fiorentini (1994, p.189) disse que "os estudos relativos ao ensino de resolução de problemas só seriam iniciados, de modo mais efetivo, a partir da segunda metade da década de 80. Esses estudos restringem-se quase que absolutamente, a trabalhos traduzidos em dissertações de Mestrados e teses de Doutorado". (ANDRADE, 1998, p. 9).

Durante toda a década de 1980, muito material foi desenvolvido para auxiliar o professor na sala de aula, como coleção de problemas, estratégias, sugestões de como avaliar, porém, o foco das aulas era a busca de soluções, o que não ocasionou resultados satisfatórios.

Schroeder e Lester (1989) apresentam três maneiras de abordar o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas:

1. Ensinar sobre resolução de problemas;
2. Ensinar a resolver problemas;
3. E ensinar Matemática por meio da resolução de problemas.

Analisando essas maneiras, podemos refletir sobre elas e suas diferenças:

1. O primeiro modelo aproxima-se bastante do modelo de Polya e criam-se métodos ou caminhos para se resolver um problema;
2. O segundo ensina a resolver problemas, abrange o que está sendo ensinado em Matemática e como pode ser aplicado na resolução de problemas, ou seja, aproxima-se do modelo implementado nos anos 1980;
3. Já o terceiro ensina Matemática por meio da resolução de problemas. É o modelo ao qual iremos nos ater neste trabalho, pois consiste em utilizar de problemas matemáticos como ponto de partida na construção de conceitos.

Conforme Andrade (1998):

> A resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de ensinar matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob este enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação na linguagem matemática formal. O foco está na ação por parte do aluno. (ANDRADE, 1998, p. 12).

Mesmo sabendo que mudanças na prática da sala de aula são muito mais trabalhosas para o professor, pois ele sai de sua zona de conforto, esta técnica, além de tornar muito mais agradável e significativo o aprendizado em sala de aula, o que é uma vantagem enorme em aplicá-la, ainda segue as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

> Os movimentos de reorientação curricular ocorridos no Brasil, a partir dos anos 20, não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista desse ensino, bem como melhorar sua qualidade. Em nosso país o ensino de matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão. (BRASIL, 1997, p. 19).

Essa dificuldade surge para o professor porque não basta apresentar o problema e corrigi-lo depois, ele precisa pensar sobre o conteúdo, sobre as características da sala, e ainda motivar os alunos antes de propor o problema. Além disso, deve mediar os conflitos que surgirão durante as discussões dos alunos, sem interferir muito para que eles alcancem um denominador comum; continuar motivando-os durante a resolução; avaliar a conduta, a participação e empenho na resolução e, depois disso, formalizar os conceitos matemáticos.

Neste processo é essencial o papel do professor, não como o detentor de todo conhecimento ou aquele que é apenas um transmissor, mas como um mediador cuja eficiência vai, além disso, como descreve Van de Walle (2001):

> Gostar da disciplina Matemática, o que significa fazer Matemática com prazer; compreender como os alunos aprendem e constroem suas ideias; ter habilidade em planejar e selecionar tarefas e, assim, fazer com que os alunos aprendam matemática num ambiente de Resolução de Problemas; ter habilidade em integrar diariamente a avaliação com o processo de ensino afim de melhorar esse processo e aumentar a aprendizagem. (VAN DE WALLE, 2001 citado por ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 219).

Logo, existem inúmeras razões para o empenho do professor na aplicação da resolução de problemas como metodologia de ensino, algumas delas citadas por Onuchic e Alevato (2004):

> - Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias e sobre o “dar sentido”. Ao resolver problemas alguns alunos necessitam refletir sobre ideias que são inerentes e/ou ligadas ao problema;
> - Resolução de problemas desenvolve o “poder matemático”. Os estudantes, ao resolver problemas em sala de aula, se engajam em todos os cinco padrões de procedimentos descritos no *Standards* 2000: Resolução de problema; raciocínio e prova; comunicação; conexões e representação, que são os processos de fazer Matemática, além de permitir ir bem além na compreensão do conteúdo que está sendo construído em sala de aula;
> - Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que Matemática faz sentido. Cada vez que o professor propõe uma tarefa com problemas e espera pela solução ele diz aos estudantes “Eu acredito que vocês podem fazer isso! ” Cada vez que a classe resolve um problema, a compreensão, a confiança e a autovalorização dos estudantes são desenvolvidas;
> - Resolução de problemas provê dados de avaliação continua que podem ser usados para tomar decisões instrucionais, ajuda os alunos a ter sucesso e informar os pais;
> - É gostoso! Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca voltam a ensinar do modo “ensinar dizendo”. A excitação de desenvolver a compreensão dos alunos através de seu próprio raciocínio vale todo o esforço e, de fato, é divertido, também para os alunos;
> - A formalização de toda a teoria Matemática pertinente a cada tópico construído, dentro de um programa assumido, feita pelo professor no final da atividade, faz mais sentido para os alunos. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 233-234).

Neste trabalho, propomos uma Sequência Didática composta por seis problemas que levam o aluno a refletir, discutir formas de resolução e formular o conceito de Combinações Simples, e principalmente, diferenciá-lo de Arranjos Simples, que é uma das maiores dificuldades encontradas na vida discente ao trabalhar esses conceitos de Análise Combinatória.

III – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Desde a implantação do Currículo do Estado de São Paulo, os conteúdos não são mais apresentados de forma sequencial, com começo, meio e fim, que se iniciava com um conceito e este era discutido até que fosse esgotado todo o conteúdo. Agora, eles são apresentados na forma de espiral e são desenvolvidos em consonância com o grau de dificuldade do aluno e de seu cognitivo, dando ênfase em situações de aprendizagens, que contemplam as chamadas habilidades que o aluno deve alcançar, de acordo com a Base Nacional Curricular Comum de Objetivos de Aprendizagem. Assim, um conteúdo aparece em determinadas séries escolares, mudando a ênfase dada ao assunto e contemplando habilidades distintas e necessárias para a fase onde se encontra o aluno.

Essa metodologia é pautada na ordenação de atividades que trabalham os diversos conteúdos propostos pelo componente curricular nas diversas etapas ou séries. Contudo a atuação do professor não é mais daquele que transmite o conhecimento, e sim daquele que busca os conhecimentos prévios de seus alunos, favorece a sala de aula para que seja um local de conhecimento, que media dúvidas, instiga a busca por soluções e aprofundamentos dos conteúdos estudados e sintetiza o que foi estudado, formalizando as definições, conceitos e conclusões.

Para que sejam alcançados os objetivos propostos, torna-se essencial que este trabalho seja realizado na forma de Sequência Didática que, segundo Zabala (1998, p. 18), é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos pelo professor e pelos alunos". Ainda temos que essa sequência é uma maneira de situar as atividades a serem aplicadas e não podem ser vistas somente como um tipo de tarefa, pois torna-se necessário antes de mais nada, que sejam analisadas as características da sala na qual vai ser aplicada, pois "é preciso insistir que tudo quando fazemos em aula, por menor que seja, incide em maior ou menor grau na formação de nossos alunos" (Zabala, 1998, p. 29).

As Sequências Didáticas são planejadas favorecendo o ensino do conteúdo, etapa por etapa, devem ser organizadas de acordo com os objetivos que o professor almeja alcançar, envolvem atividades de aprendizagem e avaliação, permitindo, assim, ao professor intervir nas atividades elaboradas, introduzir mudanças de rotas ou novas atividades para aperfeiçoar sua aula e torná-la facilitadora do processo da aprendizagem.

Assim, conforme Panutti (2003), a sequência deve ser:

> uma outra modalidade organizativa que se constitui numa série de ações planejadas e orientadas com o objetivo de promover uma aprendizagem especifica e definida. Estas ações são sequências de forma a oferecer desafios com o grau de complexidade crescente, para que as crianças possam colocar em movimento suas habilidades, superando-as e atingindo novos níveis de aprendizagem. (PANUTTI, 2003, p. 04).

O uso da Sequência Didática como um recurso pedagógico permite ao professor um novo olhar sobre a organização do conteúdo, do qual pode partir para a problematização que leva o aluno a conferir seu conhecimento prévio com o conhecimento apresentado e apropriar-se de novos significados, métodos e novos processos.

Para Zabala (1998), algumas relações interativas são necessárias, favorecem o processo de ensino-aprendizagem e devem ser enfatizadas no planejamento do professor. São elas:

- planejar a atuação docente de uma maneira suficiente flexível para permitir a adaptação às necessidades dos alunos em todo o processo de ensino-aprendizagem;
- contar com a contribuição e os conhecimentos dos alunos, tanto no início das atividades como durante sua realização;
- ajudá-los a encontrar sentido no que estão fazendo para que conheçam o que tem que fazer, sintam que podem fazê-lo e que é interessante fazê-lo;
- estabelecer metas ao alcance dos alunos para que possam ser superadas com o esforço e a ajuda necessária;
- oferecer ajudas adequadas, no processo de construção do aluno, para os progressos que experimenta e para enfrentar os obstáculos com os quais se depara;
- promover atividade mental auto estruturante que permita estabelecer o máximo de relações como o novo conteúdo, atribuindo-lhe significado no maior grau possível e fomentando os processos de metacognição que lhe permitam assegurar o controle pessoal sobre os próprios conhecimentos e processos durante a aprendizagem;
- estabelecer um ambiente e determinadas relações presididos pelo respeito mútuo e pelo sentimento de confiança, que promovam a autoestima e autoconceito;
- promover canais de comunicação que regulem os processos de negociação, participação e construção;
- potencializar progressivamente a autonomia dos alunos na definição de objetivos, no planejamento das ações que os conduzirão a eles e em sua realização e controle, possibilitando que aprendam a aprender;
- avalia os alunos conforme suas capacidades e seus esforços, levando em conta o ponto pessoal da partida e o processo por meio do qual adquirem conhecimento e incentivando a auto avaliação das competências como meio para favorecer as estratégias de controle e regulação da própria atividade. (ZABALA, 1998, p. 92-93).

Ao abordar conteúdos, Zabala (1998) os traz divididos em três categorias, que são:

1. Conteúdos conceituais – Referem-se à construção ativa de capacidades intelectuais, ao operacionar símbolos, imagens, ideias e representações, permitindo assim organizar suas realidades, ou seja, lida com conceitos abstratos;
2. Conteúdos procedimentais – Referem-se às ações coordenadas necessárias para a realização de um objetivo; ou seja, ler, desenhar, observar, calcular, classificar,

traduzir, recortar, inferir etc. Logo são ações necessárias, ordenadas e dirigidas para um fim;

3. Conteúdos atitudinais – Referem-se à formação de valores em relação às informações recebidas, possibilitando ao aluno que faça uma reflexão sobre a sua atividade e seu desenvolvimento.

Trabalhar com Sequência Didática utilizando a metodologia da resolução de problemas auxilia muito o aluno a consolidar e ampliar aprendizagens, conceitos, procedimentos e dar significado aos conceitos matemáticos trabalhados e aprendidos.

Zabala (1998) nos fala que o planejamento e a avaliação de uma Sequência Didática são diretamente ligados a atuação do professor em sala de aula, e sugere que:

> o planejamento e a avaliação dos processos educacionais são um aparte inseparável da atuação docente, já que o que acontece nas aulas, a própria intervenção pedagógica, nunca pode ser entendida sem uma análise que leve em conta as intenções, as previsões, as expectativas e a avaliação dos resultados. (ZABALA, 1998, p. 17).

Assim, ao elaborar uma Sequência Didática em Matemática, o professor deve ter em vista as noções matemáticas que quer discutir, se a problematização proposta está dentro do que ele pretende atingir, se está bem dosada para a sala de maneira quantitativa, quanto ao tempo de execução e qualitativa, em relação ao nível de conhecimento dos alunos, se propicia o processo de ensino-aprendizagem e facilita ao aluno a apropriar-se do conhecimento que deve ser alcançado.

Quanto à execução, é necessário que se tenha em vista que o aluno é o sujeito da aprendizagem no momento em que ele argumenta e constrói seu próprio conhecimento, partindo da interação com seus colegas e com o professor, que nesse momento é um mediador das discussões em sala, e deve dirigi-las para alcançar o objetivo traçado e sintetizar, ao final, o conhecimento atingido e, se for o caso, formular o conceito que se quer atingir.

Já a avaliação do aluno pode ser feita pelo professor durante todo o processo de execução da Sequência Didática, servindo até mesmo para a mudança de rota, e ao final verificar se os objetivos propostos foram alcançados quanto à aquisição das habilidades pretendidas para seus alunos, de forma individual e coletiva.

IV – NOÇÕES BÁSICAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

O ensino de Análise Combinatória ocorre, normalmente, durante o 2º ano do Ensino Médio e, nas escolas públicas do Estado de São Paulo durante a primeira metade do segundo semestre do 2º Ano do Ensino Médio. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), deve ser trabalhada durante os três últimos anos da Educação Básica, ou seja, o Ensino Médio, e, deve desenvolver as seguintes habilidades:

> • decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos;
> • identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem;
> • identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (BRASIL, 2002, p. 127).

Já conforme o currículo proposto pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, a parte de combinatória deve contemplar as seguintes habilidades:

> • compreender os raciocínios combinatório aditivo e multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento;
> • saber calcular a probabilidade de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas especiais. (SÃO PAULO: SEE, 2010, p. 68).

Ainda sobre o Currículo do Estado de São Paulo, o assunto Combinatória é trabalhado conjuntamente com Probabilidade, assunto este que não é muito bem visto por alunos e por professores, pois é sempre trabalhado repleto de fórmulas surgindo assim a dificuldade uma vez que a interpretação não depende dessas fórmulas. A introdução da Combinatória não depende de conhecimentos prévios, porém durante o Ensino Fundamental, normalmente é trabalhada uma iniciação ao Princípio Multiplicativo, não sendo sistematizado, ficando a cargo do Ensino Médio.

De acordo com a História da Matemática, o desenvolvimento da Matemática ocorreu devido à necessidade do homem de contar. A primeira técnica matemática aprendida pelas crianças em seu contato inicial com a disciplina é a contagem, partindo-se da computação dos elementos de um conjunto e, em seguida, aprendendo as operações aritméticas com o mesmo intuito. (MORGADO *et al.*, 2004).

Já o ensino de Combinatória estende essa necessidade, pois trabalha com uma grande quantidade de possibilidades de soluções, permitindo a qualquer aluno ter bom desempenho.

Nesse sentido, o aluno utiliza como ferramenta o domínio das quatro operações básicas, ou seja, adição, subtração, multiplicação e divisão, porém, é essencial a competência leitora e a interpretação de problemas, para ocorrer um bom desempenho no processo ensino-aprendizagem.

Cabe ao professor, durante o processo de ensino-aprendizagem, não abusar de fórmulas e sim empenhar-se na interpretação dos problemas para a resolução das situações propostas, promovendo a construção e ampliação do raciocínio dedutivo e combinatório,

Como situação inicial, recordamos e ampliamos o Princípio Multiplicativo que, segundo Morgado *et al.* (2004, p. 18), é melhor definido por: "Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é x.y".

Após essa introdução, apresenta-se a noção de Fatorial, definem-se as Permutações e após, os Arranjos e as Combinações Simples e, tenta-se diferenciar um do outro, o que é uma das maiores dificuldades durante o processo ensino-aprendizagem desse conteúdo. Finalmente Permutação com Repetição e Combinações com Repetição.

A Árvore de Possibilidades é outra excelente ferramenta para auxiliar a organização do raciocínio combinatório e auxílio dos cálculos.

Temos que a Permutação é utilizada para calcular o número de possibilidades de reorganização de elementos sem escolha, como, por exemplo: "de quantas maneiras podemos montar uma fila de 5 lugares se temos 5 pessoas para formar essa fila" ou ainda, " quantos anagramas possui a palavra amor?".

O Arranjo e a Combinação são técnicas para a escolha a partir de um conjunto mais amplo, onde se alterarmos a ordem dos elementos de cada escolha, teremos uma nova possibilidade de escolha, então temos um Arranjo e, caso contrário, se a ordem dos elementos de cada escolha não altera o elemento encontrado teremos, então, uma combinação simples, como por exemplo: "Precisamos escolher dois alunos, em uma sala de 40 alunos, para representá-los em uma reunião. De quantas maneira podemos fazer essa escolha? ", ou ainda, "Precisamos escolher o líder e o vice-líder entre os alunos de uma sala de 40 alunos. De quantas maneira podemos fazer essa escolha?".

No primeiro problema temos que a dupla "Joãozinho e Pedrinho" ou "Pedrinho e Joãozinho" é a mesma, então a mudança na ordem dentro do agrupamento não forma um novo elemento, temos assim o conceito de combinação simples. Já em outra hipótese, se escolhermos

Joãozinho como líder e Pedrinho como vice-líder, ou Pedrinho como líder e Joãozinho como vice-líder, as escolhas são diferentes, logo a mudança na ordem muda o agrupamento. Temos assim o conceito de arranjo simples.

Para o trabalho com conteúdos de Análise Combinatória não necessitamos de fórmulas. Entretanto, depois de compreendidos os conceitos, o uso da fórmula adequada pode produzir uma solução mais rápida e elegante para o problema. Abaixo apresentamos as principais fórmulas para o trabalho com conteúdos de contagem no Ensino Médio. Usamos a notação P_n para indicar o número de *permutações simples* de n elementos distintos; $A_{n,p}$ para indicar o número de *arranjos simples* de n elementos distintos tomados p a p; $C_{n,p}$ para indicar o número de *combinações simples* de n elementos distintos tomados p a p; $P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ para indicar o número de *permutações com repetição* de n elementos onde $\alpha_1+\alpha_2+\ \ldots\ +\alpha_n=n$ e $CR_{n,p}$ para indicar o número de *combinações com repetição* de n elementos tomados p a p.

$$P_n = n!$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\ \alpha_n!}$$

$$CR_{n,p} = C_{(n+p-1,p)}$$

Ocorre que Permutação com Repetição e Combinação com Repetição não são citados entre as habilidades mínimas para o Estado de São Paulo, cabendo ao professor apresentá-los aos seus alunos. No que diz respeito à forma como foram trabalhadas a Permutação Simples e a Combinação Simples, é comum surgirem questionamentos por parte dos alunos, e cabe ao professor apresentar as diferenças entre os conteúdos já estudados, além de expor as formas para a resolução das questões e até demonstrar aos alunos o surgimento da fórmula.

V – UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Apresentamos neste capítulo a Sequência Didática que foi utilizada para introduzir o conceito de Combinações Simples. A sequência é constituída de seis problemas e para cada um deles fornecemos comentários e sugestões de como o professor pode utilizar este material em sala de aula. O professor deve entender que são sugestões que podem ser modificadas ou melhoradas, em função de seus alunos, no que se refere ao nível de conhecimento prévio, à interação e participação. Afinal, ninguém conhece melhor seus alunos do que o próprio professor. Para algumas salas talvez seja necessário trabalhar mais alguns problemas. Assim, sugerimos que o professor esteja preparado para enfrentar essas situações.

Problema 1. Quantos produtos podemos obter se tomarmos 2 fatores distintos escolhidos entre 2, 3, 5 e 7?

Solução e comentários.

Um possível produto é 6 pois 2 x 3 = 6. O produto 4 não é possível pois não existem dois números distintos escolhidos entre 2, 3, 5 e 7 de tal forma que o seu produto seja igual a 4. Entretanto, observe que a *ordem dos fatores não altera o produto*, assim obtemos o mesmo produto se fazemos 3 x 2, em outras palavras a ordem dentro do agrupamento não altera o produto. Outros possíveis produtos são: 10, 15, 35 etc.

Usando uma Árvore de Possibilidades podemos descrever todos os produtos possíveis. Veja a figura 1.

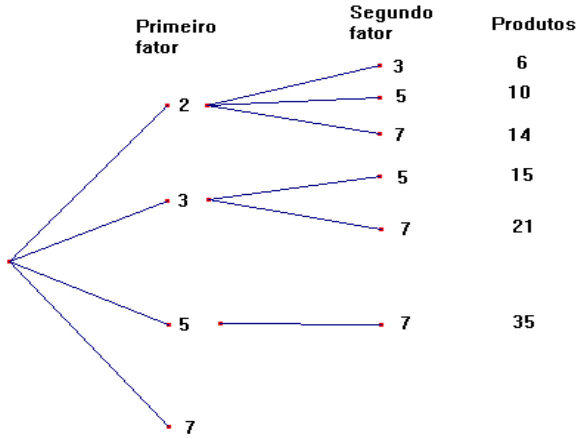


Figura 1. Produtos possíveis com 2 fatores distintos entre os algarismos 2, 3, 5 e 7.

Portanto podemos formar 6 produtos de 2 fatores distintos se escolhemos entre os algarismos 2, 3, 5 e 7.

Caso fossem permitidos fatores iguais, teríamos também os possíveis produtos 4, 9, 25 e 49. Neste caso, o conceito combinatório é o de Combinações Completas ou Combinações com Repetição. Assim $CR_{4,2} = C_{4+2-1,2} = C_{5,2} = 10$. Esta observação é útil neste momento apenas para o professor e não deve ser feita aos alunos.

Problema 2. Cinco amigos se encontram em uma festa. Cada um deles deseja apertar a mão dos demais. Quantos apertos de mão irão ocorrer?

Solução e comentários.

Vamos denotar os cinco amigos por A, B, C, D e E. É preciso observar que, neste caso, a *ordem dentro do agrupamento não importa*, pois se A apertou a mão de B é porque B apertou a mão de A. Temos assim os apertos de mãos entre: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE e DE num total de 10. Pode-se também construir uma Árvore de Possibilidades análoga à do *problema 1*.

Este problema pode ser resolvido escolhendo-se 5 alunos, solicitando que se cumprimentem com um aperto de mão e anotando todos os apertos de mão.

Problema 3. Quantos segmentos de reta podemos formar com os vértices de um pentágono regular?

Solução e comentários.

A solução para este problema pode ser obtida contando-se diretamente os segmentos de reta do pentágono regular da figura 2. A resposta é, obviamente, 10.

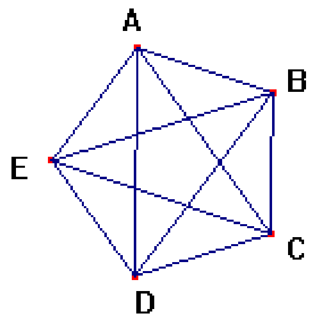


Figura 2. Pentágono regular com seus vértices, diagonais e lados.

Como os alunos já trabalharam o Princípio Multiplicativo, outra solução que auxilia na definição do número de Combinações Simples é como segue: para formar um segmento de reta devemos escolher dois vértices do pentágono. Pelo Princípio Multiplicativo o primeiro vértice pode ser escolhido de 5 modos e o segundo vértice de 4 modos. Assim, a resposta parece ser 5 x 4 = 20, o que está obviamente incorreto. Devemos observar que os vértices A, B e B, A formam o mesmo segmento de reta, ou seja, a ordem dentro do agrupamento não altera o segmento. Estamos contando o mesmo segmento como se fossem dois segmentos diferentes. Assim, como cada segmento pode ser escrito em $P_2 = 2! = 2$ ordens, devemos dividir 20 por 2!. Portanto, a resposta é:

$$\frac{5.4}{2!} = \frac{5.4.(3.2.1)}{2!.(3.2.1)} = \frac{5!}{2!.(5-2)!} = 10.$$

A resposta neste caso é o número de combinações simples de 5 elementos tomados dois a dois. A notação de Fatorial e a maneira que representamos o número 10 (a resposta do problema) tem por objetivo fazer com que os alunos já comecem a habituar-se com a expressão geral que fornece o número de Combinações Simples.

Problema 4. Quantas diagonais tem um pentágono regular?

Solução e comentários.

Da solução do *problema 3* sabemos que um pentágono regular possui 10 segmentos de reta formados por seus vértices. Como desses segmentos 5 são os lados do pentágono, então a resposta é 10 – 5 = 5.

Outra solução pode ser obtida contando-se diretamente as diagonais do pentágono regular da figura 2.

Problema 5. Quantos triângulos são possíveis de serem construídos com os vértices de um pentágono regular?

Solução e comentários.

Um pentágono possui 5 vértices (figura 2) e para a construção de um triângulo devemos usar três desses vértices. Observar que a *ordem dos vértices não muda o triângulo.* Denotando os vértices por A, B, C, D e E, temos os triângulos formados por três vértices: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE e CDE num total de 10 triângulos.

A solução poderá também ser obtida por meio da Árvore de Possibilidades. Veja a figura 3.

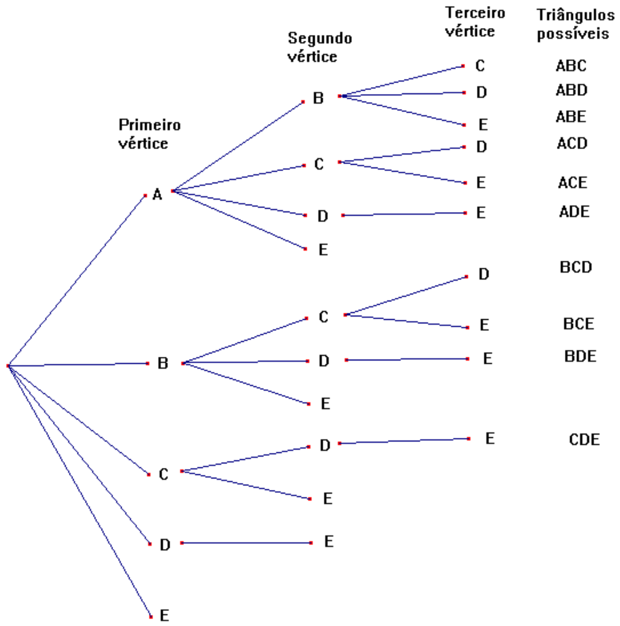


Figura 3. Triângulos formados com 3 vértices de um pentágono regular.

Da mesma forma que foi feito no *problema 3*, caso nenhum grupo apresente a solução usando o Princípio Multiplicativo é conveniente apresentar a seguinte solução: para formar um triângulo devemos escolher 3 vértices. A escolha do primeiro vértice pode ser feita de 5 modos, a do segundo, de 4 modos, e a do terceiro, de 3 modos. Assim, a resposta parece ser 5 x 4 x 3 = 60. Entretanto, se considerarmos os vértices A, B e C estamos contando os triângulos ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA como se fossem diferentes, mas esses três vértices sempre representam o mesmo triângulo, independentemente da ordem em que são considerados. Observe que esses três vértices podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens diferentes. Assim, a resposta é:

$$\frac{5.4.3}{3!} = \frac{5.4.3.(2.1)}{3!.(2.1)} = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = 10.$$

A resposta neste caso é o número de combinações simples de 5 elementos tomados três a três. E vale aqui a mesma observação feita no final da solução do *problema 3* sobre o uso da notação de Fatorial.

Problema 6. Quantas diagonais tem um polígono regular de n lados?

Solução e comentários.

Este problema é uma generalização do *problema 4*. Para este caso a resposta deve ser obtida por meio de um método (ou fórmula), pois não é possível descrever todas as diagonais e depois contá-las.

Alguns alunos poderão resolver este problema usando os conceitos da Geometria Plana. Sabemos que o número de diagonais é dado por $\frac{n\,.\,(n-3)}{2}$.

O objetivo aqui é resolver este problema por meio dos conceitos da Análise Combinatória. Especificamente, queremos utilizar o problema para que os alunos reconstruam o conceito de Combinações Simples.

Vamos inicialmente determinar o número de segmentos de reta que possui um polígono regular de n lados e, depois desse número, subtrair n, que é o número de lados do polígono.

Para determinar um segmento de reta devemos escolher dois vértices. O primeiro pode ser escolhido de n modos e o segundo de $n-1$ modos. Logo o número de segmentos é dado por: $\frac{n\,.\,(n-1)}{2!}$.

O número de diagonais será então dado por: $\frac{n\,.\,(n-1)}{2!} - n = \frac{n\,.\,(n-3)}{2}$.

Da mesma forma que fizemos nos problemas anteriores é conveniente observar que $\frac{n\,.\,(n-1)}{2!} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$. Esta observação será útil quando da definição do conceito de Combinações Simples.

Após o trabalho com vários problemas da forma dos apresentados anteriormente, o professor poderá ter mais facilidade para definir e sistematizar o conceito de Combinações Simples.

Definição: Dado um conjunto E com n elementos distintos, qualquer subconjunto com k elementos de E é uma Combinação Simples dos elementos de E, tomados k a k.

Notação: $C_{n,k}$ denota o número de combinações simples de n elementos tomados k a k.

Duas combinações são idênticas desde que sejam formadas pelos mesmos elementos, *não importando a ordem* em que estejam dispostos.

Teorema**:** O número de combinações simples de n elementos tomados k a k é dado por:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Prova: Sabemos que existem $C_{n,k}$ subconjuntos de k elementos escolhidos no conjunto E. Efetuando em cada um desses subconjuntos as k! permutações possíveis, obteremos todos os arranjos simples de n elementos tomados k a k. Logo,

$$A_{n,k} = P_k . C_{n,k}$$

ou

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ \dots\ \big(n-(k-1)\big)}{k\,!} \quad \text{ou}$$

$$C_{n,k} = \frac{n\,(n-1)\ \dots\ \big(n-(k-1)\big)}{k\,!} . \frac{(n-k)\,!}{(n-k)\,!} = \frac{n\,!}{k!\,(n-k)\,!}$$

Portanto,

$$C_{n,k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}.$$

A partir deste momento, o professor poderá trabalhar a solução de alguns problemas usando a fórmula de Combinações Simples. Tradicionalmente, os professores oferecem as fórmulas da Análise Combinatória e começam a resolver exemplos envolvendo estes conceitos. O que propomos é fazer com que os próprios alunos redescubram as fórmulas. Elas são importantes, mas não devem ser “jogadas” no início da aula. Esse procedimento acaba por mistificar a matemática como uma ciência difícil e para poucos cérebros “iluminados”. O que, obviamente, não é verdade.

VI – RELATOS DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A Sequência Didática foi aplicada no dia 27/10/15, uma terça-feira, durante a 5ª e 6ª aulas do período da manhã, na Escola Estadual Manoel Bento da Cruz, em Araçatuba – SP, no 2º Ano do Ensino Médio - Turma A, que é participativa, aberta a discussões e adepta do trabalho diferenciado.

Antecedendo a aplicação da Sequência Didática, já haviam sido trabalhados em sala os conceitos de Princípio Multiplicativo, Permutações Simples, Fatorial e Arranjos Simples, todos de maneira tradicional, ou seja, apresentado a definição, os exemplos de aplicação e exercícios de fixação para serem resolvidos pelos alunos.

Os alunos já haviam sido preparados previamente, durante a aula anterior, para a aplicação da Sequência Didática, em que foi exposto para o grupo que iriam realizar um trabalho, resolvendo problemas propostos, diferentes dos que já havíamos resolvido nas aulas anteriores e que iríamos juntos (professor e alunos) redescobrir um novo conceito, diferente dos já estudados, incluindo o fato de que a atividade seria objeto do trabalho de conclusão de curso deste autor, o que foi aceito de imediato por todos quanto à participação.

A sala de aula foi dividida em grupos contendo de três a quatro alunos, no máximo, em cada grupo, grupos esses formados pelos próprios alunos, sem a interferência do professor ou critérios pré-estabelecidos. Formaram-se de forma espaçada, dentro da sala, para que os grupos não pudessem se comunicar durante a resolução dos problemas e a comunicação fosse somente entre os integrantes do grupo.

Foi passado para todos os grupos o primeiro problema e pedido para que cada um pudesse ler, buscar entre eles a solução e devolver uma resolução do problema para o professor. Durante a resolução dessa questão, vários grupos tentaram “arrancar” uma solução ou uma resposta do professor, porém, a resposta sempre foi com outra pergunta, para que os mesmos conseguissem olhar de outra maneira sua dúvida. Os questionamentos foram quase que na totalidade sobre produto, se poderiam repetir os resultados etc. Após a entrega das resoluções de todos os grupos, passamos ao momento da plenária, em que ocorreu a partilha dos resultados e soluções encontradas entre os grupos. Os grupos, quase em sua totalidade, aplicaram o Princípio Multiplicativo, pois a resolução foi feita de forma mecânica, sem a percepção de encontrarem produtos duplicados.

A figura 4 apresenta a solução de um dos grupos. Os alunos desse grupo aplicaram equivocadamente o conceito de arranjos simples.

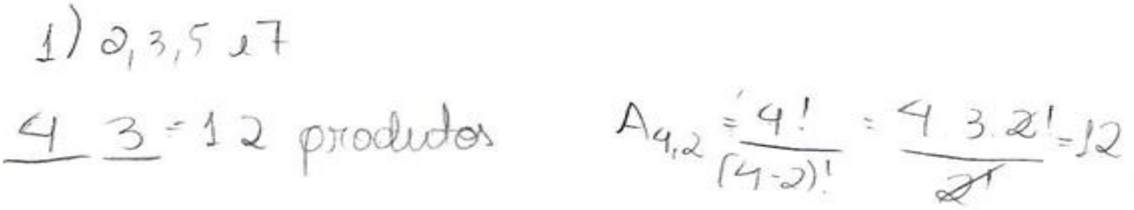


Figura 4. Resolução apresentada por um dos grupos.

Apenas um grupo tentou descrever os produtos, cometendo o erro de não excluir produtos com fatores iguais, conforme figura 5.

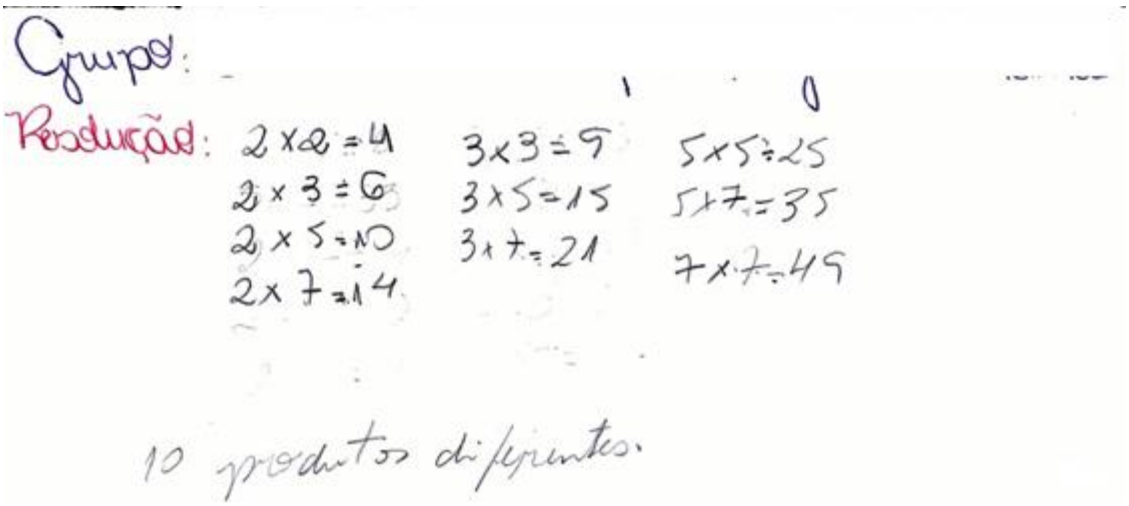


Figura 5. Resolução apresentada por um dos grupos.

Nenhum grupo procurou usar recursos como a Árvore de Possibilidades, tirando o grupo acima que descreveu todos os produtos, logo não foi possível perceber a duplicidade dos resultados, então, ao desenhar a Árvore de Possibilidades na lousa, dois grupos rapidamente perceberam o erro que haviam cometido. Um grupo de imediato quis usar uma fórmula para efetuar o cálculo, ou tentar sistematizá-la, porém novamente intervi pedindo para que tivessem calma e pudéssemos chegar a esse ponto juntos, pois ainda era cedo para essa resolução, e afirmando que até o final da atividade conseguiríamos chegar a alguma conclusão.

Este professor entregou então o segundo problema para os grupos e novamente pediu para que se concentrassem nele. A caminhada do professor pela sala ajudou a visualizar e analisar como estavam tentando resolvê-lo. A tentativa de arrancar uma resposta do professor começou a cessar. Notou-se que alguns grupos insistiam em encontrar um resultado de forma "mágica", calculando um Arranjo Simples ou simplesmente o Fatorial, conforme figura 6.

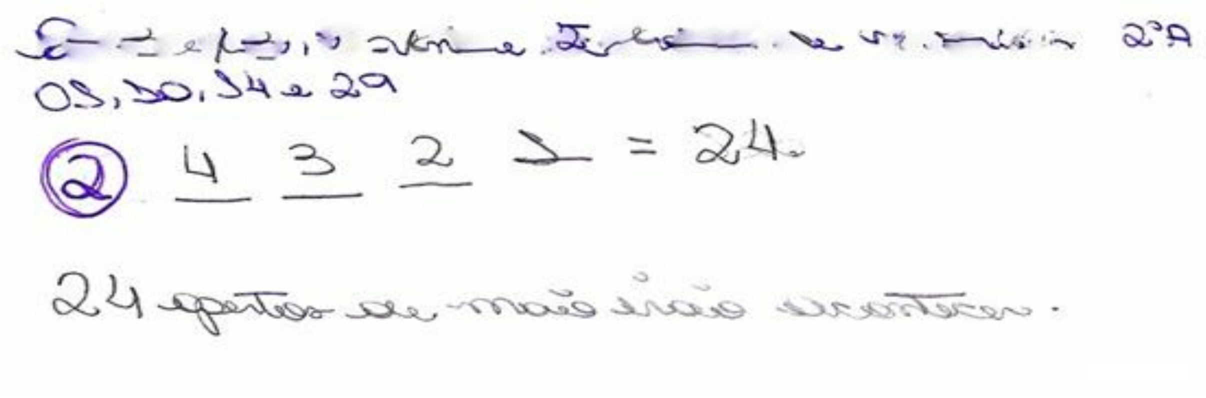


Figura 6. Resolução apresentada por um dos grupos.

A grande maioria dos grupos passou a tentar organizar a situação por meio do desenho da Árvore de Possibilidades ou escrever os possíveis resultados, porém quase sempre se perdiam na resolução, devido à quantidade de pessoas no problema. Então, este professor interveio pedindo para que pensassem em um caso menor, ou seja, menos pessoas, e depois retornassem ao problema, conforme figura 7. Após a entrega das respectivas soluções, passou-se à partilha em plenária, momento em que se notaram três resultados diferentes entre os grupos. A maioria chegou ao resultado exato, e a maioria dos grupos utilizou a Árvore de Possibilidades para a resolução e na plenária, muito rapidamente, os grupos conseguiram identificar qual era a solução correta. As respostas encontradas foram determinadas da seguinte forma: uma por meio do Princípio Multiplicativo, outra usou a Árvore de Possibilidades e multiplicou os resultados, em vez de somá-los e os demais fizeram a Árvore de Possibilidades e somaram os resultados, chegando ao resultado correto.

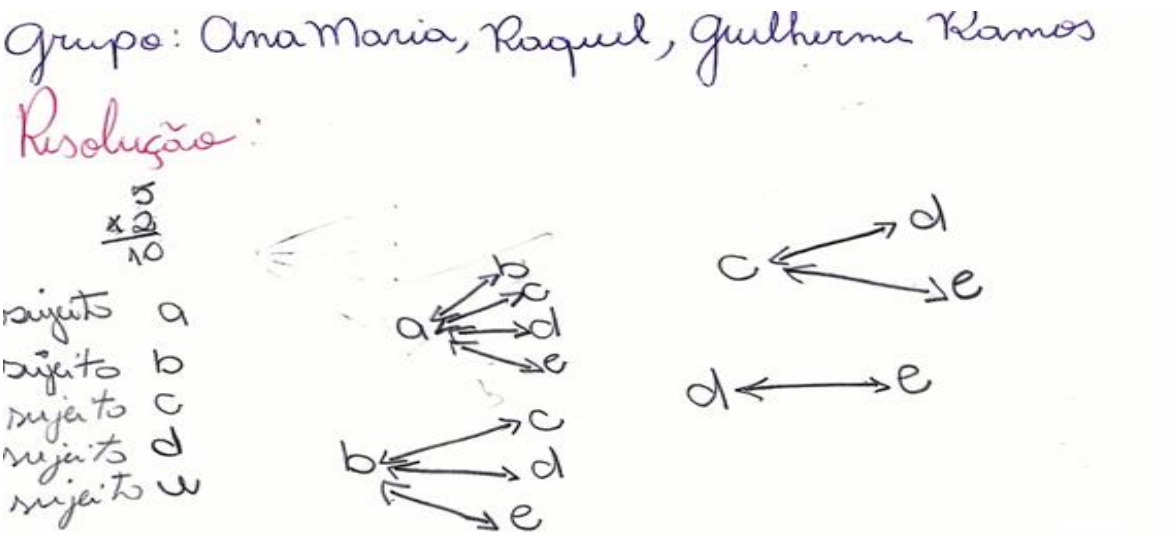


Figura 7. Resolução apresentada por um dos grupos.

No terceiro problema, ao recebê-lo, inicialmente alguns grupos estavam em dúvida entre a diferença do conceito de segmento de reta e o conceito de reta e, alguns não conseguiram identificar o que é um pentágono regular. Passada essa situação inicial, bem rapidamente perceberam a semelhança entre esse problema e o problema anterior, ao montar a Árvore de Possibilidades, e chegaram ao resultado correto. Na plenária ainda existiam dúvidas entre, por exemplo, o segmento de reta AB e o segmento de reta BA, mas a maioria resolveu o problema usando semelhança com a resolução do exercício anterior, conforme figura 8.

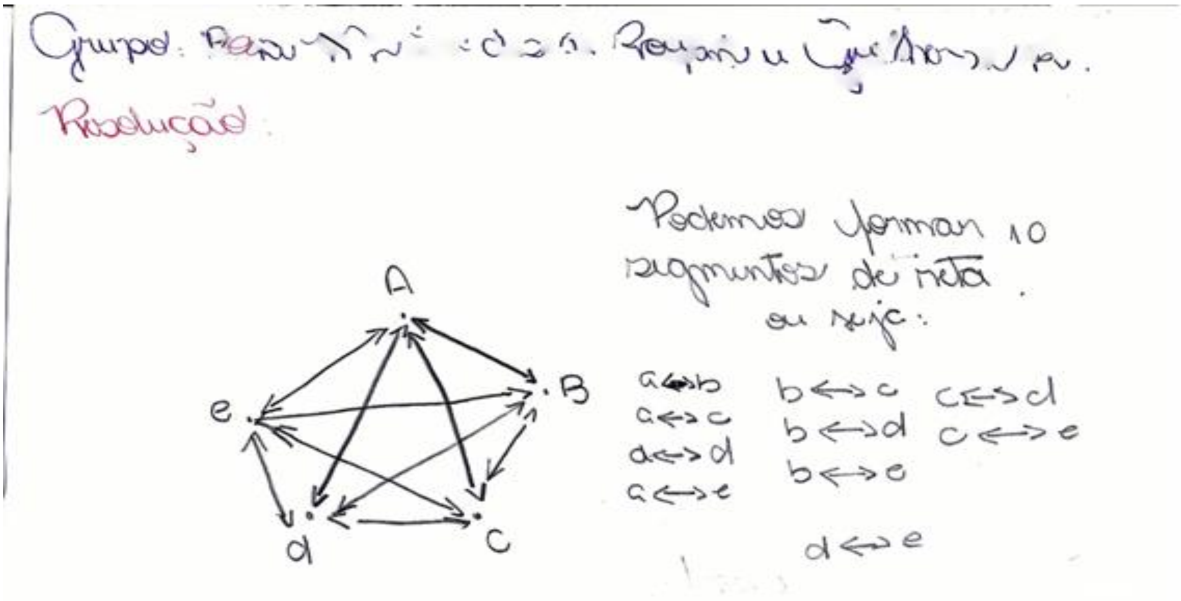


Figura 8. Resolução apresentada por um dos grupos.

Para o quarto problema, surgiu a dúvida do que seria diagonal no pentágono e o que seria lado do pentágono. Todos os grupos desenharam o pentágono, contaram e determinaram o resultado, diferente dos problemas iniciais, no qual todos queriam aplicar um cálculo e determinar o resultado. Nenhum grupo aplicou qualquer cálculo, conforme figura 9, porém, no momento de partilha, dois alunos de um dos grupos identificaram que os resultados eram a razão entre o arranjo e 2, sem identificar ainda que era o quociente entre o número de Arranjos Simples de 5 elementos tomados 2 a 2 pelo número de Permutações Simples de dois elementos. Ainda na plenária, um grupo percebeu que o número de diagonais era a diferença entre o total de segmentos encontrado no exercício anterior e o total de lados do polígono, diferença essa que a maioria dos grupos aceitou, quase que de imediato, como uma boa resolução para o problema.

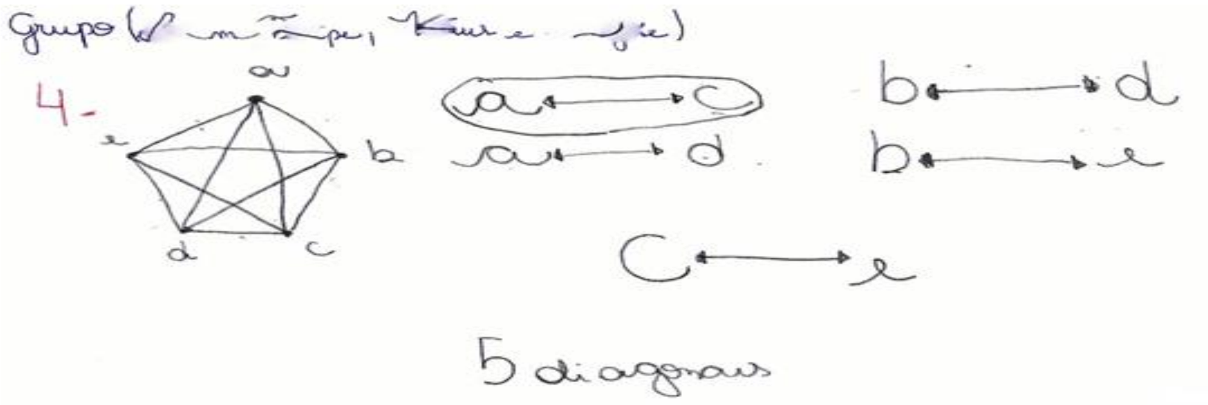


Figura 9. Resolução apresentada por um dos grupos.

O problema cinco foi o mais complicado para os grupos, pois quase todos estavam contando triângulos internos no pentágono, assim como também aqueles que não eram formados pelos vértices do pentágono. De forma geral, os grupos tentaram resolver o problema por meio da contagem dos triângulos em um único desenho, mas não conseguiram localizar todos os triângulos, conforme figura 10, então os resultados obtidos não coincidiram com o resultado correto. Na plenária, dois grupos rapidamente encontraram os erros e o resultado correto, utilizando-se de um desenho para cada triângulo. Então, os alunos que estavam tentando chegar à fórmula, perceberam que nesse problema, não era mais dividido por 2 e sim por 6, e um desses alunos chegou à Permutação Simples dos três elementos, o que os demais também aceitaram como resposta.

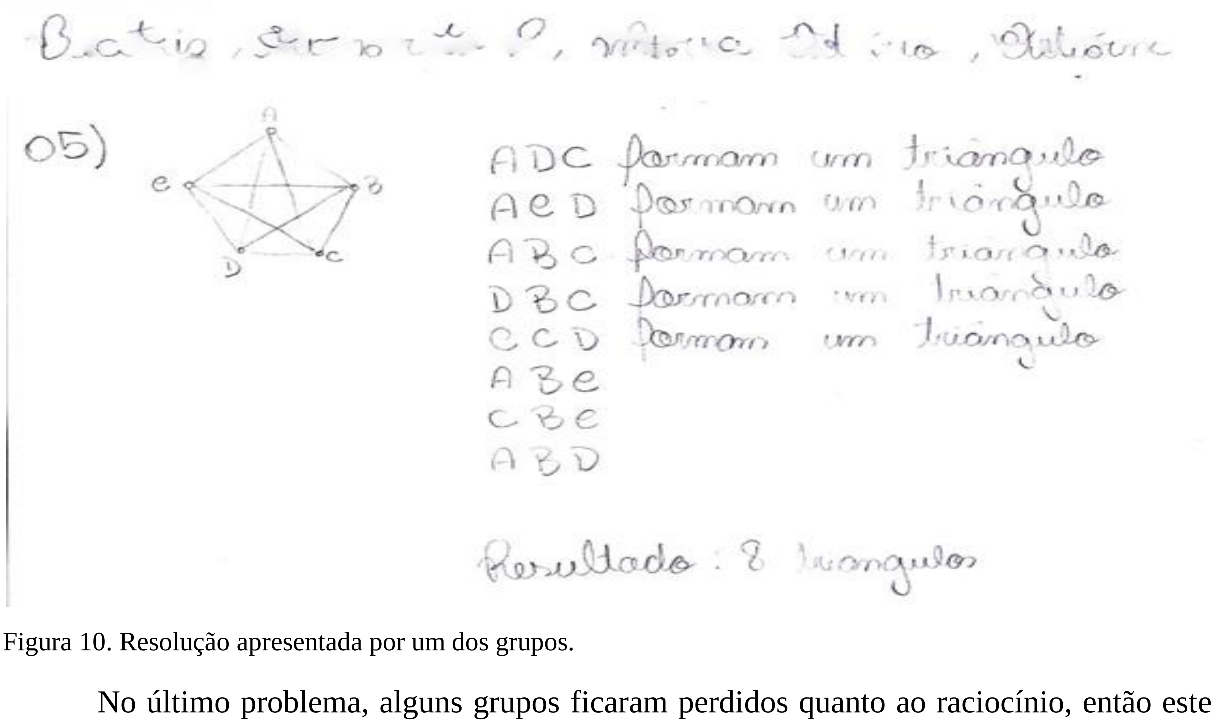


Figura 10. Resolução apresentada por um dos grupos.

No último problema, alguns grupos ficaram perdidos quanto ao raciocínio, então este professor sugeriu que pensassem em n = 4, 5, 6, ... para que concluíssem, generalizando para n lados. Dois dos grupos conseguiram identificar e chegaram à "fórmula" do número de diagonais de um polígono regular de n lados, sendo que, inclusive, um deles se lembrou dessa relação, que foi trabalhada no Ensino Fundamental. A figura 11 ilustra os exemplos de dois grupos, um deles se perdeu na construção e não conseguiu concluir a relação entre o número de lados e o número de diagonais. O outro grupo conseguiu concluir a relação, relacionando o número de lados ou de vértices e o número total de diagonais. Na plenária os demais grupos "aceitaram" o que os dois grupos argumentaram, sendo pedido para que um integrante do grupo que chegou à relação mostrasse na lousa para os colegas como chegaram à conclusão. Mostradas as devidas regularidades, os demais grupos se convenceram da resposta encontrada pelos colegas.

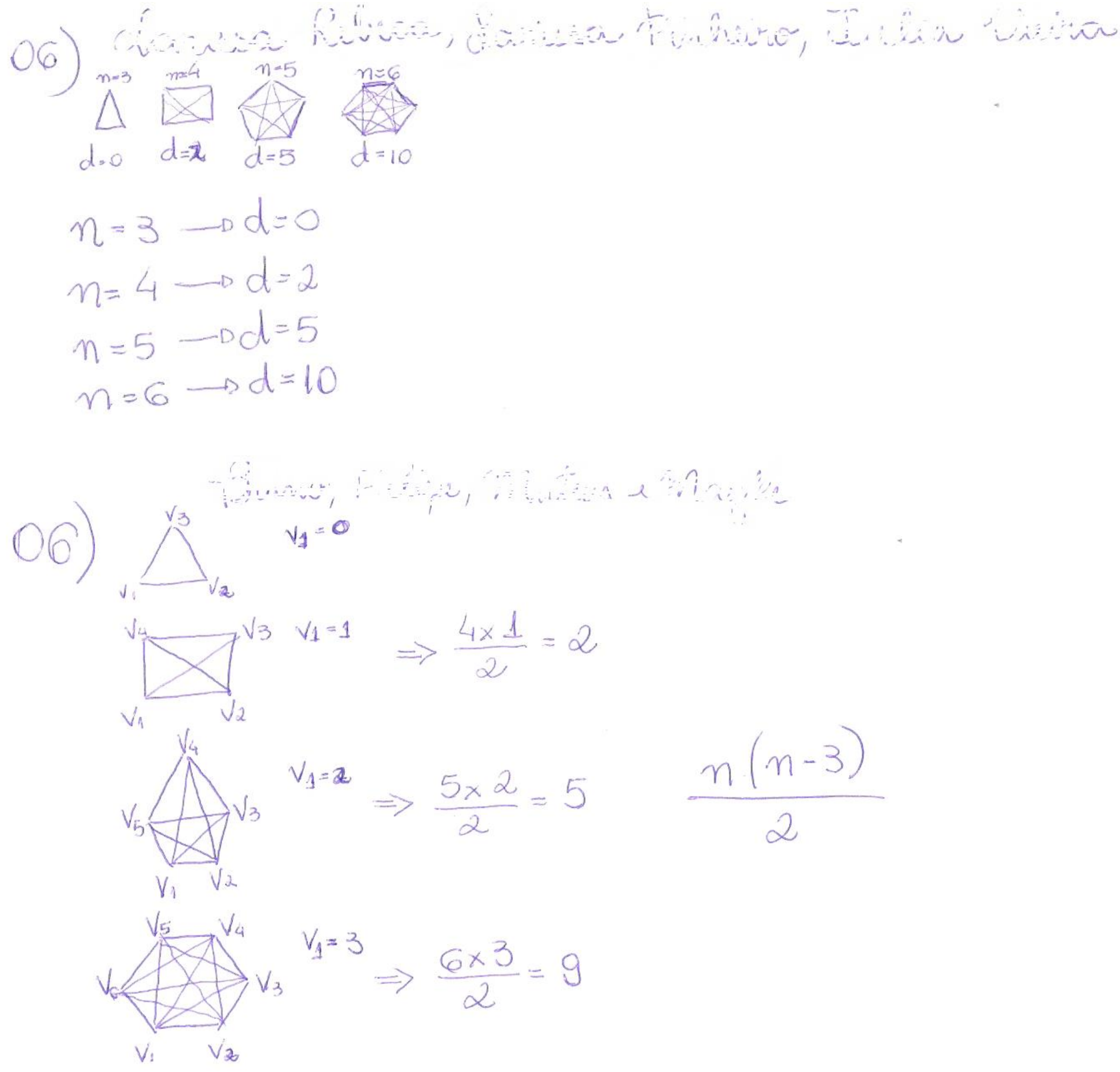


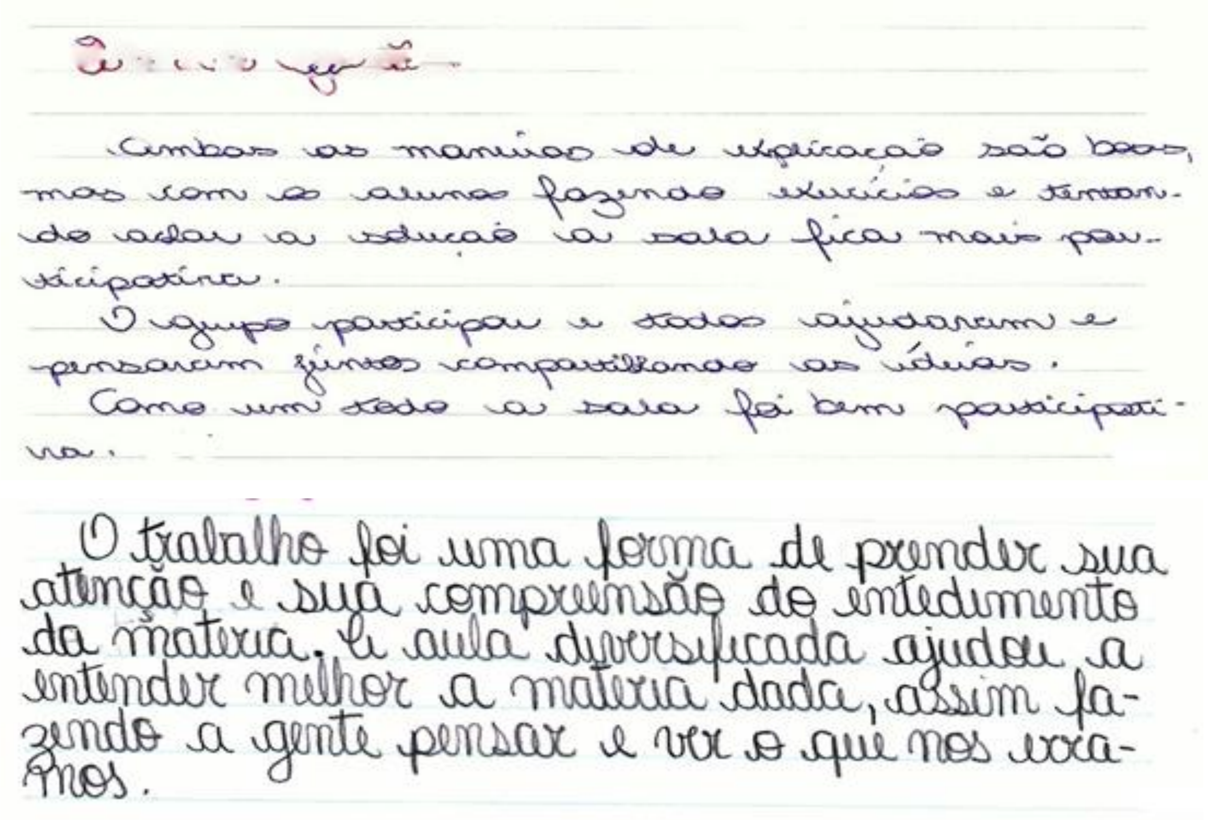
Figura 11. Resolução apresentada por dois dos grupos.

Devido à proximidade do término da aula, o tempo foi suficiente apenas para que conseguíssemos definir juntos o conceito de Combinações Simples que alguns alunos já haviam identificado na resolução dos problemas e, com isso, formalizar e deduzir a fórmula que determina o número de Combinações Simples de n elementos tomados p a p.

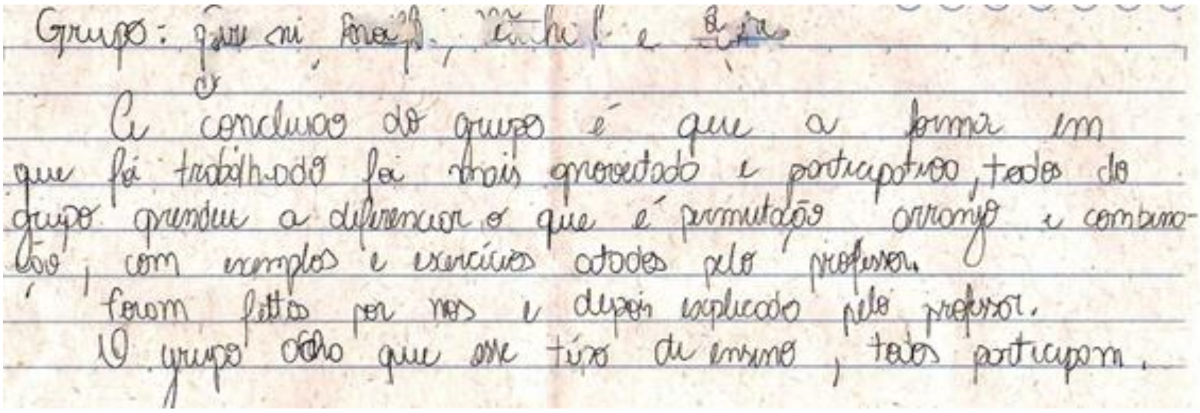
Na aula seguinte, dois dias após a aplicação da Sequência Didática, esse conceito foi retomado com os alunos, sendo verificadas as dúvidas relativas à resolução dos problemas da Sequência Didática. Os alunos, de uma forma geral, conseguiram identificar as diferenças entre os problemas trabalhados anteriormente de maneira tradicional (Princípio Multiplicativo ou Arranjos Simples e Permutações Simples) com o conceito de Combinações Simples apresentado nessa Sequência Didática, principalmente quanto a sua aplicabilidade.

Foi feita uma avaliação sobre como eles viam o trabalho realizado pelos grupos e pelo professor, a diferença entre como forma trabalhadas as atividades da Sequência Didática até chegar ao conceito, com as aulas ministradas de maneira tradicional, e ainda uma auto avaliação, na qual cada aluno pôde perceber também sua conduta como pessoa atuante em sua própria aprendizagem e na de seus colegas da sala.

Temos abaixo na figura 12 alguns exemplos das respostas oferecidas pelos alunos quanto aos questionamentos sobre a aplicação dessa metodologia de ensino. Veja:


Ambos as maneiras de explicação são boas, mas com os alunos fazendo exercícios e tentando achar a solução a sala fica mais participativa.
O grupo participou e todos ajudaram e pensaram juntos compartilhando as idéias.
Como um todo a sala foi bem participativa.

O trabalho foi uma forma de prender sua atenção e sua compreensão do entedimento da materia. A aula diversificada ajudou a entender melhor a materia dada, assim fazendo a gente pensar e ver o que nos erramos.


Grupo: [illegible]

A conclusão do grupo é que a forma em que foi trabalhado foi mais aproveitado e participativo, todos do grupo aprendeu a diferenciar o que é permutação arranjo e combinação, com exemplos e exercícios dados pelo professor.
Foram feitos por nós e depois explicado pelo professor.
O grupo achou que esse tipo de ensino, todos participam.

Figura 12. Respostas oferecidas por alguns dos grupos.

VII -CONSIDERAÇÕES FINAIS

A prática de ensino de Matemática em sala de aula é algo que mudou bastante, e a aplicação da metodologia da resolução de problemas pode ter sua aplicação como um facilitador do processo ensino-aprendizagem, pois favorece para se prender a atenção dos alunos e a auxiliar a participação em sala de aula.

Senti-me extremamente realizado com a aplicação dessa Sequência Didática em sala de aula, a participação dos alunos foi muito boa, o interesse e o empenho em resolver as questões também, porém, difere completamente de minha formação que foi de certo modo bastante tradicional.

O Currículo Oficial do Estado de São Paulo, que é apresentado através do caderno do aluno (SÃO PAULO, 2014) e do professor (SÃO PAULO, 2016), traz os conteúdos em espiral e na forma de sequência-didática e é um importante aliado do professor no preparo e aplicação de suas aulas e de todo o processo ensino aprendizagem hoje em dia em nosso estado, assim nosso trabalho não foge do processo de ensino e torna-se completamente aplicável.

Acredito que assim como eu me sentia inicialmente, muitos também não se sentem completamente à vontade em trabalhar dessa forma, pois por homologia de processo, temos uma tendência em seguir a forma como fomos formados, ou seja, de forma tradicional, o que é algo muito normal, porém é necessário dar o primeiro passo para uma mudança, e querermos implementá-la para que ela ocorra.

Para se trabalhar de forma cooperativa em sala de aula, é essencial que nos preparemos antecipadamente, pois apesar de ter papel de mediador, é essencial termos domínio do conteúdo a ser trabalhado, conhecermos os nossos alunos em suas especificidades e ter bem claro o que almejamos alcançar ao término de nosso trabalho para, se necessário, recalcularmos a rota a fim de que os objetivos sejam alcançados.

Ao elaborarmos uma sequência didática, precisamos levar em conta alguns dados, como:

- A proposta deve ser preparada para uma sala, de acordo com os alunos que fazem parte dela. Assim, a mesma proposta não pode ser aplicada da mesma forma em duas salas diferentes, caso haja a necessidade, precisa ser adaptada. Deve ser dosada para os alunos de acordo com o nível de ensino que se encontram.

- Ao aplicá-la, o professor deve estar preparado para não responder qualquer pergunta durante a execução ou responder uma pergunta com outra pergunta sempre, fazendo com que os alunos alcancem os objetivos propostos.
- Ao final, sistematizar o conceito a que se pretende alcançar após a aplicação da sequência.

Através de nossa experiência profissional, como professor da rede estadual de ensino e da rede privada, acreditamos ser adequada a aplicação desta proposta de ensino em sala de aula e utilizando-se a resolução de problemas como uma forma para se ensinar matemática, conforme preconizada por Onuchic (1999) e Van de Walle (2009).

O Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/regimento estabelece em seu artigo 25 que "O Trabalho de Conclusão de Curso versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula." Assim, entendemos que nosso trabalho de conclusão de curso está de acordo com o estabelecido nas normas do PROFMAT.

Este trabalho não pretende produzir inovações no ensino de Combinações Simples ou Análise Combinatória, mas trazer discussões novas para que as aulas não sejam apenas de guardar e aplicar fórmulas prontas, o que para os alunos é extremamente monótono, mas uma proposta em que os alunos interajam e façam parte da construção de seu próprio conhecimento, desmistificando assim o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Esperamos ainda que este trabalho sirva para o professor como um facilitador, um aliado para as aulas de Análise Combinatória, na introdução dos conceitos como uma melhor participação e empenho dos alunos nas aulas.

VIII - REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. **Ensino – aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas.** 1998. 295 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática:** o caso da produção científica em cursos de pós-graduação. 1994. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1994.

GAZIRE, E. S. **Resolução de Problemas:** perspectivas em Educação Matemática. 1989. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e probabilidade:** com a solução dos exercícios. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2004. 343 p.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP. 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R. ALLEVATO , N. S. G. Novas Reflexões sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

PANUTTI, M. R. V. **Caminhos da prática pedagógica**. TVE Brasil. Rio de Janeiro. julho de 2003. Disponível em: <http://tvebrasil.com.br/SAUTO/boletins2004/ei/text1.htm>. Acesso em: 25 nov. 2013.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Currículo do estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias. São Paulo: SE, 2010.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do aluno:** 2ª Série Ensino Médio, São Paulo: SE, 2014.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. Matriz da Avaliação Processual: matemática; encarte do professor. São Paulo: SE, 2016.

SCHROEDER, T. L.; LESTER Jr. F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.) **New directions for elementary school mathematics**. National of Teachers of Mathematics, 1989. 245 p.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and middle school mathematics.** New York: Longman, 2001. 576 p.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584 p.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p.