UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Análise combinatória: Uma abordagem para o sexto ano do Ensino Fundamental

Juvino Pereira dos Santos Júnior

Instituto de Matemática

Maceió, Agosto de 2016

PROFMAT

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT

JUVINO PEREIRA DOS SANTOS JÚNIOR

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM PARA O SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Maceió – AL

2016

JUVINO PEREIRA DOS SANTOS JÚNIOR

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA ABORDAGEM PARA O SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Matemática da Universidade de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise Combinatória

ORIENTADOR: Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo

Maceió – AL

2016

Catalogação na fonte

Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Janaina Xisto de Barros Lima

S237c Santos Júnior, Juvino Pereira dos.
Análise combinatória: uma abordagem para o sexto ano do ensino fundamental / Juvino Pereira dos Santos Júnior. – 2016.
96 f. : il.

Orientador: Vânio Fragoso de Melo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2016.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Análise combinatória. 3. Raciocínio combinatório. 4. Resolução de problemas. I. Título.

CDU: 511.178

Folha de Aprovação

JUVINO PEREIRA DOS SANTOS JÚNIOR

ANÁLISE COMBINARTÓRIA: UMA ABORDAGEM PARA O SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 24 de agosto de 2016.

Banca Examinadora:

Vanio Fragoso de Melo

Prof. Dr Vânio Fragoso de Melo - UFAL (Presidente)

Amauri da Silva Barros

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros - UFAL

Vicente Francisco de Souza Neto

Prof. Dr Vicente Francisco de Souza Neto - UNICAP

À minha falecida mãe, que com seus ensinamentos motivou-me a ser professor.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS, pela força, coragem e paciência me dada para chegar até aqui.

À minha esposa, pela paciência que teve nos meus momentos de dificuldades.

Ao prof. Dr. Vânio Fragoso, orientador do meu trabalho final, e que me ajudou ao longo de todo o curso.

A todos os professores e colegas de curso que muito me ajudaram e me inspiraram a melhorar minha metodologia em sala de aula.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, pela oportunidade dada aos professores de Matemática da educação básica de todo o país a obterem o título de Mestre.

Aos meus gestores Almir Bezerra e Maria Almeida que ajudaram a formar o profissional que sou.

E aos professores Glaucia Noronha, Luedja Barros, Jaine Keila e José Dnart que me deram assistência na aplicação das atividades.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção”.

Paulo Freire

RESUMO

Ao observar as dificuldades que existem no ensino-aprendizagem de matemática, propomos neste trabalho uma abordagem à Análise Combinatória para o 6° (sexto) ano do ensino fundamental de forma intuitiva, indutiva e, em um primeiro momento, sem formalidades, favorecendo o desenvolvimento cognitivo do aluno. Percebemos ao longo do nosso trabalho docente que a aprendizagem de Análise Combinatória se mostra como um obstáculo aos alunos devido à forma como esse conteúdo é abordado, na quase totalidade das vezes através de fórmulas matemáticas, o que faz perder o sentido da resolução de problemas. Nossa proposta é utilizar a resolução de problemas e as técnicas do princípio fundamental de contagem, que normalmente é citado apenas no início do estudo de Análise Combinatória no segundo ano do Ensino Médio para em seguida enunciar as fórmulas de arranjos, combinações e permutações, para o desenvolvimento do raciocínio combinatório em alunos do sexto ano do ensino fundamental, melhorando desta maneira, o ensino e a compreensão de matemática. Tivemos como principais fontes de pesquisa, livros, os Parâmetros Curriculares Nacionais, artigos em revistas, dissertações e teses que tratam do tema.

Palavras-Chave: Análise Combinatória. Raciocínio Combinatório. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

Noting the difficulties that exist in the teaching and learning of mathematics, we propose in this paper an approach to Combinatorial Analysis to the sixth grade of elementary school, inductive and intuitively, in a first moment, without formality, favoring the cognitive development of the student. We noticed along our learning staff who work Combinatorics shown as an obstacle to students due to the way that content is discussed in almost all of the time through mathematical formulas, which makes losing the sense of problem solving. Our proposal is to use the resolution of problems and techniques of fundamental principle of counting, which is usually in the second year of high school is quoted only at the beginning of the study of Combinatorics to then list the formulas of arrangements, combination and permutation, combinatorial reasoning development in students of the sixth grade of elementary school, improving this way the teaching and understanding of mathematics. We had as main sources of research, books, the National curricular parameters, magazine articles, dissertations and theses that deal with the subject.

Keywords: Combinatorics. Combinatorial Reasoning. Troubleshooting.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO:

É tendo em vista que o papel do professor de matemática é fazer com que a aprendizagem dessa disciplina se torne algo fundamental para a formação da cidadania, de forma a preparar o sujeito para enfrentar os problemas do seu cotidiano, que apresentamos este trabalho sobre Análise Combinatória. Tema este, trabalhado por nós professores, de forma geral, no segundo ano do ensino médio, mas que aqui o abordaremos no sexto ano do ensino fundamental.

Nos dias atuais, podemos perceber que nossa sociedade requer pessoas que tenham a capacidade de analisar e propor soluções para problemas de forma prática e rápida. Para tal, seria necessário que nossas instituições de ensino tivessem uma matriz curricular voltada para a resolução de problemas. Contudo, não é isso que observamos ao nos depararmos com uma educação voltada para a memorização de fórmulas e o ensino de algoritmos, sequências de instruções bem definidas que podem ser executadas mecanicamente. Identificamos nas escolas uma educação matemática voltada para a resolução de questões sem aplicabilidade e sem significado, o que impossibilita ao aluno um real aprendizado. Ao não identificar a contextualização dos conteúdos e das respectivas questões em seu cotidiano, o aluno simplesmente "aprende" para ser aprovado no final do ano letivo, isso quando consegue assimilar os conteúdos estudados dessa forma.

Segundo CARRAHER (1986):

> "Os problemas de Matemática, dos quais o aluno tem que utilizar precisamente as fórmulas que acabou de estudar, não são verdadeiros problemas que exijam reflexão, mas sim, exercícios que exigem apenas memória; não lhe é exigida compreensão dos conceitos matemáticos, nem que faça relações entre o que já aprendeu e a possível solução do problema. Nestes casos, os problemas são tratados mecanicamente, sem que, muitas vezes, o aluno compreenda o que está fazendo. Esta abordagem não exige estímulo do raciocínio do aluno".

É concordando com CARRAHER em relação ao uso de fórmulas como ponto de partida na resolução de problemas de Análise Combinatória que STURM (1999) expõe também em sua pesquisa uma abordagem alternativa, na qual as fórmulas apresentam-se como decorrência da experiência do aluno, inseridas em um processo de resolução de problemas de contagem.

Portanto, segundo STURM (1999):

> "[...] o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações-problemas. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser

> construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação”.

A dicotomia teoria/prática, ensino/aprendizado, muitas das vezes se dá devido à falta de preparo e atualização profissional da equipe docente e pedagógica nas escolas, onde se faz necessária a busca de um novo paradigma para que, dessa forma, seja substituído o debilitado processo ensino-aprendizagem baseado numa educação tradicional que, apesar de ter funcionado por um bom tempo, não se aplica nos dias atuais.

Acreditamos que a Análise Combinatória seja uma das mais importantes ferramentas de resolução de problemas, parte importante do estudo das Probabilidades e que desenvolve o raciocínio lógico-matemático de forma plena e eficaz, fazendo com que o aluno consiga desenvolver diversas outras capacidades de resolução de problemas.

Portanto, é ciente das dificuldades encontradas não somente pelos alunos, mas também por muitos colegas professores, que pretendemos mostrar uma abordagem diferenciada para o ensino da Análise Combinatória, tirando do foco a metodologia da fórmula-aplicação e incentivando o uso das técnicas de contagem para a resolução de problemas. Sabemos que não existe um caminho único e correto para o ensino desse conteúdo, mas é necessário aprimorar técnicas pedagógicas para que sejam desencadeadas mudanças notáveis no modo como o aluno aprende, para que seja percebida a real construção do conhecimento feito pelo próprio discente, aprendendo a matemática de uma forma contextualizada e significativa, desenvolvendo um raciocínio dedutivo e lógico que será útil para a resolução dos mais diversos problemas que podem surgir ao longo da vida.

Entendemos que os Problemas de Contagem (conceitos básicos de Análise Combinatória) tratam de estabelecer procedimentos e estratégias próprios de raciocínio que envolve ideias da operação de multiplicação de números naturais – o raciocínio combinatório – para a contagem de casos presentes em situações-problema de agrupamentos de objetos que contenham determinado número de elementos.

Nos PCN’s (1997, 1998, 1999) foi criado um Bloco de Conteúdos denominado Tratamento da Informação, que contempla-os dando ênfase nos problemas de contagem – envolvendo o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo – e neles estão prescritas claras recomendações quanto ao desenvolvimento de atividades que contemplem tais conteúdos, como se pode constatar na citação a seguir:

> Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidades de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória (BRASIL, 1997, p.53).

Já nos anos iniciais do Ensino Fundamental os problemas de contagem – parte integrante da combinatória – deveriam ser mais desenvolvidos com os alunos, valorizando o raciocínio combinatório.

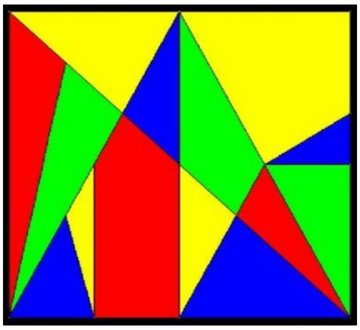
Para tal, aplicamos algumas atividades em sala de aula que tinham como objetivos, por um lado, proporcionar condições aos alunos para apropriarem-se de conhecimentos, procedimentos, estratégias e habilidades relacionados às noções básicas de Combinatória com a construção e a compreensão dos dados presentes em uma representação gráfica, que permitem a contagem de possibilidades para a obtenção da solução a um dado problema de contagem proposto, e, por outro lado, sem a necessidade de explorar aspectos formais e algorítmicos no encaminhamento da solução. Nessas atividades foi utilizada uma linguagem clara nos enunciados de tal maneira que diminuíssem as dificuldades apresentadas por parte dos alunos para compreender o que estava sendo solicitado na resolução de cada situação-problema.

Por fim, a ideia deste trabalho tem como objetivo mostrar como o Princípio Fundamental da contagem e as técnicas de resolução de problemas, quando trabalhados de forma planejada e correta, atingem resultados surpreendentes relacionados aos aspectos cognitivos dos alunos nessa área da matemática.

2. CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA:

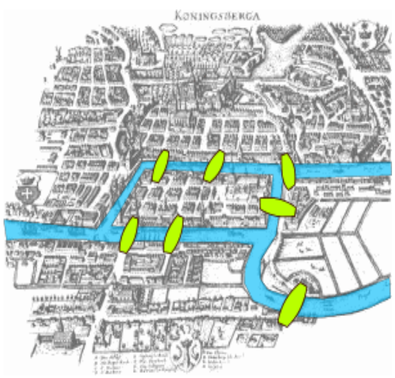
Aqui faremos uma análise histórica da Análise Combinatória, bem como um breve comentário sobre a vida e a obra de alguns dos principais nomes que contribuíram para o desenvolvimento dessa área. Em qualquer ramo de atuação, a contagem faz parte do cotidiano das pessoas. Porém, podemos perceber ao longo da História da matemática que contar não é sempre uma tarefa tão simples, como pode parecer à primeira vista. Contar unidades uma a uma, que é o processo elementar, não é viável em muitas situações. Por isso é necessário estabelecer métodos de contagem que atinjam resultados mais rapidamente. Obter tais métodos é o objetivo principal da Análise Combinatória. A Análise Combinatória é alicerçada no princípio fundamental da contagem.

Acredita-se que a Análise Combinatória tenha se originado ainda na Antiguidade, quando o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.E.C. – 212 a.E.C.) propôs um problema geométrico que se tornou famoso, chamado *Stomachion* (palavra derivada do grego *stomachos*,em português, 'estômago') que consistia em determinar de quantos modos poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado (conforme a figura ao lado).



Entretanto, o grande desenvolvimento da Análise Combinatória se deve aos jogos de azar (jogos de cartas, dados ou moedas), por serem instigantes e desafiadores.

Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) resolveu um famoso problema que havia surgido na cidade de Königsberg, na Prússia (atual Kaliningrado, Rússia), conhecida por suas sete pontes, das quais cinco ligavam o continente a uma ilha. Denominado "As sete pontes de Königsberg", o problema consistia em descobrir se era possível caminhar ao redor de toda a cidade passando sobre cada ponte uma única vez.



Levando-se em conta a quantidade de maneiras possíveis de passar por todas as pontes apenas uma vez, pode-se concluir que o problema exige o conhecimento de combinatória. Apesar de Euler ter provado que a solução para esse problema não existia, ele deu origem, mais tarde, à teoria dos grafos, com grandes aplicações na Ciência da computação. A "técnica de contar" e suas extensões nos preparam para um campo de grande aplicação da Matemática, a Estatística.

2.1 CARDANO: O intelectual jogador

O perfil biográfico traçado por vários historiadores o colocaria folgadamente na galeria dos célebres crápulas da história. Contudo há uma tendência hoje a se considerar que tais historiadores foram demasiado severos para com ele ou pelo menos que não levaram na devida conta todo o conjunto de circunstâncias (e infortúnios) de sua vida. Mas num ponto há unanimidade: Girolamo Cardano (1501 – 1576) merece figurar, por vários motivos, na companhia dos grandes matemáticos de todos os tempos.

O próprio ato de nascimento de Cardano, em Pávia (Itália), pode ter sido seu primeiro infortúnio. Segundo parece, seus pais, que não eram casados, fizeram de tudo para que ele não nascesse. Pelo menos para o bem da matemática, não foram felizes nesse intento.

O pai de Girolamo era um intelectual de certa projeção que se dedicava à medicina, à advocacia, à matemática e... às ciências ocultas. O filho também enveredou pela medicina (depois de Versalius foi o médico mais renomado da Europa em seu tempo) e pela matemática. Mas não ficou só nisso...

Um dos “pecados” atribuídos a Cardano foi o vício do jogo. De fato, em sua autobiografia, *De própria vita*, ele confessa ter jogado diariamente: xadrez por mais de quarenta anos e dados por mais de vinte e cinco. Deve – se levar em conta porém que no século XVI o jogo era o passatempo dominante. E, como se jogava a dinheiro, iniciou – se nessa atividade ainda estudante universitário para prover sua manutenção.

Outro “estigma” de Cardano foi sua condição de astrólogo. Ocorre porém que naquele tempo a astrologia ocupava uma posição muito diferente no panorama cultural. Haja vista que muitos governantes mantinham astrólogos em suas cortes e que muitos professores universitários faziam predições baseadas na astrologia. Porém, ainda era considerado normal que matemáticos e astrônomos se dedicassem a essa pseudociência. O próprio Johann Kepler (1571 – 1631) às vezes recorria a ela para completar seus ganhos.

A obra matemática mais conhecida de Cardano é a *Ars magna* (A arte maior), onde aparecem impressas pela primeira vez as soluções gerais das equações cúbica e quártica. Mas ironicamente, como quase tudo em sua vida, um pequeno manual do jogador, intitulado *Liber de ludo aleae (O livro dos jogos de azar)*, que ele sequer considerava digno de publicação, pode ter sido sua contribuição maior à matemática.

Na parte técnica do livro, Cardano discutiu equiprobabilidade, esperança (o montante correto da aposta a ser feita por um jogador que tem probabilidade *p* de ganhar a importância *s*), estabeleceu a lei $p_n = p^n$, que dá a probabilidade de que um evento de probabilidade *p* ocorra independentemente *n* sucessivas vezes, achou tábuas de probabilidades para dados e usou a chamada lei dos grandes números (de modo rudimentar) – questões em que foi o pioneiro.

É verdade também que Cardano ensinava no livro a trapacear no jogo. Mas o que importa isso em face ao vanguardismo de sua obra?

2.2 PASCAL E A TEORIA DAS PROBABILIDADES

Somente cerca de cem anos depois de Girolamo Cardano escrever seu *Liber de ludo aleae* (em torno de 1550), obra que foi considerada o marco inicial da teoria das probabilidades, seria dado o passo seguinte (e decisivo) para a criação dessa área da matemática.

O cenário agora era a França, onde o requintado nobre francês Antoine Gambaud, o Chevalier de Méré, como Cardano um inveterado jogador, estava às voltas com problemas como: “Dois jogadores de igual habilidade resolvem interromper o jogo antes do término. Sendo conhecido o número de pontos de cada um até essa altura, em que proporção devem ser divididas as apostas?”. Apesar de possuir várias ideias aritméticas sobre o assunto, fruto de sua experiência e perspicácia, Gambaud decidiu recorrer ao grande matemático francês Blaise Pascal (1623 – 1662). Este se entusiasmou tanto com as questões que até iniciou correspondência a respeito com seu conterrâneo Pierre de Fermat, resultando desse episódio as bases da moderna teoria das probabilidades.

Órfão de mãe aos 3 anos de idade, Pascal foi educado por seu pai, um intelectual respeitado, com ideias pedagógicas não muito convencionais. Assim é que, segundo seus preceitos, considerando a débil saúde do filho, achava que este só deveria começar a aprender geometria aos 15 anos de idade. Mas o jovem, aos 12, contrariando a proibição, pôs-se a querer reinventar o assunto por conta própria, comoveu o pai e acabou ganhando um exemplar dos *Elementos* de Euclides. Aos 14 passou a frequentar as reuniões científicas promovidas pelo matemático M. Mersenne (1588 – 1648) das quais participavam Descartes, Roberval, Desagues e seu pai, entre outros. Dois anos depois apresentava uma contribuição notável: a memória “Essay pour les coniques”, uma obra-prima da geometria projetiva em uma folha impressa apenas.

Em 1642, portanto com 17 anos de idade, para aliviar seu pai dos exaustivos cálculos que era obrigado a fazer, como fiscal na Normandia, planejou uma máquina de calcular. A Pascaline, como veio a se chamar, cujo modelo definitivo é de 1652, chegou a ser comercializada (embora sem o sucesso previsto por Pascal) e representa um dos mais antigos protótipos de calculadoras mecânicas.

Em 1654, depois de se dedicar por algum tempo à física experimental, Pascal voltou à matemática em duas frentes. De um lado para escrever a “Obra completa sobre cônicas” (certamente uma continuação do pequeno “Essay”), que nunca foi impressa e acabou se perdendo. A outra frente foi a teoria das probabilidades.

Embora sem transformar em livro sua correspondência sobre o assunto com Fermat (a qual seria aproveitada por Huygens), em 1654 redige seu *Tratado do triângulo aritmético*, uma exposição das propriedades dos coeficientes binomiais e relações entre eles (a primeira sistemática a ser feita – daí o triângulo estar associado ao nome de Pascal), com alguns princípios de probabilidade. Por exemplo, a soma dos termos da terceira diagonal representa o número de possibilidades no lançamento de três moedas; e esses termos, as ocorrências possíveis: uma possibilidade de três caras; três possibilidades de duas caras e uma coroa; etc. O triângulo da figura é apresentado segundo o modelo de Pascal.

1	1	1	1	1
1	2	3	4	
1	3	6		
1	4			
1				

Depois disso Pascal se recolheu à meditação religiosa, voltando à matemática apenas uma vez mais, em 1658, para trabalhar febrilmente, movido por razões místicas, na geometria da ciclóide. O mesmo misticismo que fez com que Pascal fosse, dentre os grandes matemáticos, aquele que provavelmente menos empenhou toda a genialidade de que era dotado a serviço de sua ciência.

2.3 OS IRMÃOS JACQUES E JEAN BERNOULLI

Importantes campos novos da matemática, como o Cálculo, a Geometria Analítica e a Teoria das Probabilidades, despontaram em sua forma moderna no século XVII. Mas, obviamente, considerando inclusive o estágio da matemática na época, de maneira incipiente e até meio tosca. Explorar as potencialidades desses campos e fundamentá – los seria uma tarefa longa. E já no século XVII esse trabalho se inicia revelando nomes de grande talento matemático, como os irmãos Jacques Bernoulli (1654 – 1705) e Jean Bernoulli (1667 – 1748), da Basiléia, na Suíça.

A família Bernoulli pertencia à burguesia comercial da Basiléia, onde se fixara, vinda em fuga da Antuérpia no final do século XVI, após esta cidade ter sido conquistada pela Espanha católica (os Bernoulli eram huguenotes). Cerca de meio século depois, por alguma mutação difícil de explicar, a família começou a produzir cientistas (não sem decepcionar alguns patriarcas) de maneira talvez inédita na história da humanidade. Só matemáticos, até a primeira metade do século XIX, contam – se nada menos que treze. Mas possivelmente nenhum tenha superado em brilho os irmãos Jacques e Jean já citados.

Jacques graduou – se em teologia em 1676 na Universidade da Basiléia, atendendo aos desejos do pai. Os seus próprios desejos aparecem no lema que posteriormente adotou: "Invito patre sidera verso" (Estudo as estrelas contra a vontade de meu pai).

Assim, entende-se por que desde os tempos de estudante dedicava o melhor de seu tempo à matemática e à astronomia. De 1676 a 1682 percorre França, Inglaterra e Holanda para se atualizar cientificamente e na volta à Basiléia funda uma escola de matemática e ciência. Cinco anos depois assumiu a cadeira de Matemática da Universidade local, onde ficou até a morte.

No que se refere ao Cálculo, Jaques o estudou na forma idealizada por Leibniz, sendo aliás um dos primeiros matemáticos a dominar os artigos em que este lançou as bases de suas idéias sobre o assunto. Ao contrário de Newton, Leibniz era aberto à troca de informações científicas, com o que conseguiu muitos seguidores e correspondentes, entre os quais Jacques.

Dentre as múltiplas contribuições de Jacques à matemática, talvez a que o tenha tornado mais conhecido seja seu livro *Ars conjectandi (A arte de conjecturar)* no qual trabalhou cerca de 20 anos (sem completá-lo totalmente) e que só foi publicado após sua morte (em 1713). Trata-se da primeira obra substancial sobre a teoria das probabilidades.

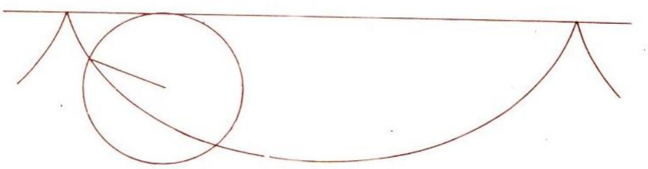
O *Ars conjectandi* está dividido em quatro partes. Na primeira reproduz a breve introdução de Huygens ao assunto. A segunda é um apanhado geral dos resultados básicos sobre permutações e combinações. Nela figura inclusive a primeira demonstração correta (por indução) do teorema binomial para expoentes positivos. A terceira apresenta 24 problemas sobre jogos de azar muito populares na época. A última termina com o célebre "teorema de Bernoulli" ou "Lei dos grandes números" (Jacques não viveu para incluir nela as aplicações à economia e à política que tinha em vista).

Jean Bernoulli, segundo os planos de seu pai, deveria sucedê-lo à testa dos negócios da família. Contudo, sem vocação comercial, conseguiu dissuadir o velho de suas intenções concordando em fazer medicina. Mas, simultaneamente, era orientado pelo irmão para o caminho que aspirava trilhar – o da matemática e das ciências físicas. Tanto quanto Jacques, logo dominou os métodos do cálculo de Leibniz, tornando-se um dos maiores expoentes e divulgadores do assunto em sua época. Após 10 anos como professor de Matemática da Universidade de Groningen (Holanda), em 1705 sucedeu o falecido irmão na Universidade da Basiléia, onde também ficou até a morte.

Um episódio que marcou a vida de Jean foi seu relacionamento com o Marquês de L'Hospital (1661 – 1704). Este nobre francês, desejando dominar o

Cálculo, então uma novidade científica, contratou para tanto os serviços de Jean, o qual, sabe-se lá por que, concordou até com que o Marquês usasse como lhe aprouvesse as descobertas que fazia e que a ele comunicava. E em 1696 L'Hospital lançou o livro *Analyse des infiniment petits*, o primeiro texto de Cálculo a ser publicado, não sem agradecimentos especiais, embora genéricos, ao "jovem professor de Groningen". O livro teve muito sucesso, o que chegou a envaidecer Jean. Mas este, após a morte do autor, passou a reivindicar a paternidade de boa parte do conteúdo do livro – tudo indica que com razão. Por exemplo, o teorema sobre limites de quocientes, conhecido hoje como *regra de L'Hospital*, muito provavelmente é de Jean Bernoulli.

A matemática, que foi um elo de ligação a mais entre os irmãos Jacques e Jean, acabou por estremecer as relações entre ambos, dado o zelo com que se empenhavam em suas pesquisas. O pivô da desavença entre ambos pode ter sido o problema da *braquistócrona* (nome derivado das palavras gregas: *menor* e *tempo*) com que a certa altura Jean desafiou a comunidade matemática do mundo. Dever-se-ia encontrar a curva que uma partícula descreve para descer, sob a ação de gravidade, no menor espaço de tempo possível, de um ponto *A* a um ponto *B* (não diretamente abaixo de *A*). A solução do problema é o arco (único) da *ciclóide invertida* unindo *A* com *B*. A ciclóide é a curva descrita por um ponto de uma circunferência que roda sem deslizar sobre uma reta – ver figura.



A ciclóide (invertida).

Somente cinco matemáticos da época chegaram a resposta acertadamente: Newton, Leibniz, L'Hospital e os irmãos Bernoulli. Segundo algumas versões, a resolução inicial de Jean não era satisfatória, o que o teria levado a tentar usar, de alguma maneira, a do irmão. Daí talvez o atrito. Mas sua solução final, além de original, tinha um alcance maior que a de Jacques, sendo considerada, inclusive, o ponto de partida de um novo ramo da matemática: o cálculo de variações.

3. ANÁLISE COMBINATÓRIA: CONCEITOS PRELIMINARES

3.1 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem

De modo geral, podemos dizer:

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é **m** e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é **n**, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto m . n.

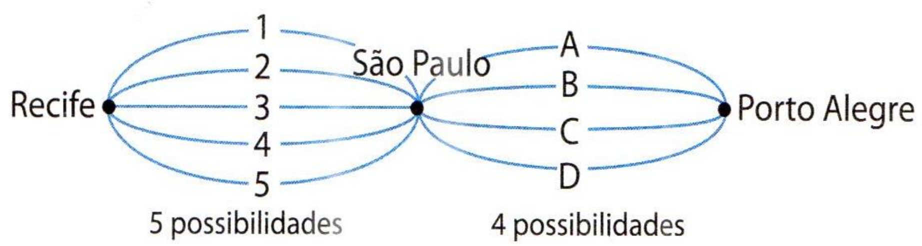
Esse é o princípio fundamental da contagem.

Observação: O produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes.

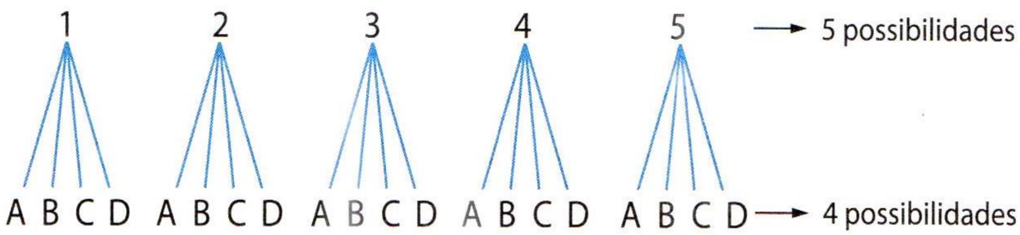
Acompanhe a seguir a resolução de alguns problemas:

1°) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

Para facilitar a compreensão vamos utilizar os esquemas seguintes:



ou

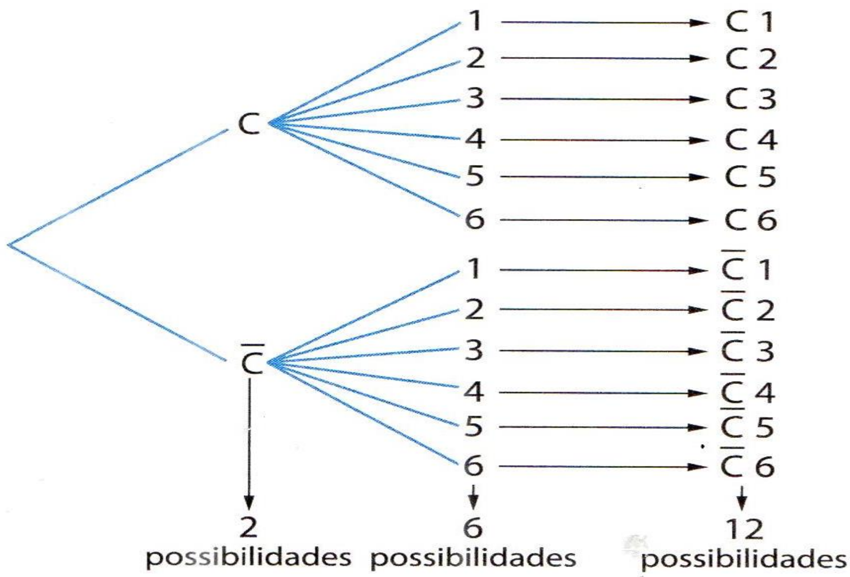


Total de possibilidades: 5 . 4 = 20.

São elas: 1A, 1B, 1C, 1D, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C, 3D, 4A, 4B, 4C, 4D, 5A, 5B, 5C, 5D.

Portanto, há 20 maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre, passando por São Paulo.

2º) Ao lançarmos uma moeda e um dado, temos as seguintes possibilidades para o resultado (sendo C: cara e $\overline{C}$: coroa):



Observe que o evento tem duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 2 . 6 = 12 possibilidades.

3º) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

$\overline{centena} \quad \overline{dezena} \quad \overline{unidade}$

Há 7 possibilidades para a centena (0 não é permitido), 8 para a dezena e 8 para a unidade. Portanto, podemos formar 7 . 8 . 8 = 448 números.

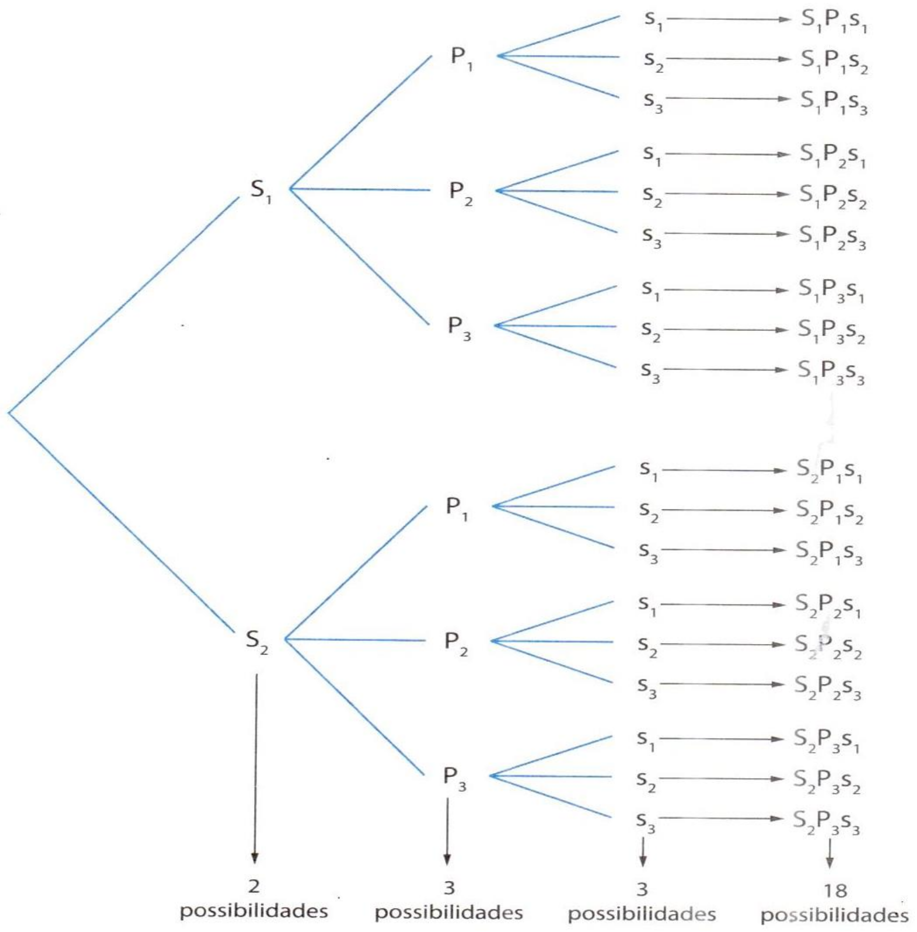
b) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

$\overline{centena} \quad \overline{dezena} \quad \overline{unidade}$

Com 3 algarismos distintos, há 7 possibilidades para a centena, 7 para a dezena e 6 para a unidade. Portanto, podemos formar 7 . 7 . 6 = 294 números de 3 algarismos distintos com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

4º) Num restaurante há 2 tipos de salada, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

Representando por $\boldsymbol{S_1}\ e\ \boldsymbol{S_2}$ os dois tipos de salada ; por $\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}\ e\ \boldsymbol{P_3}$ os três tipos de pratos quentes; e por $\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}\ e\ \boldsymbol{s_3}$ os três tipos de sobremesa, temos:



Portanto, o número total de possibilidades é 2 . 3 . 3 = 18.

3.2 Permutações simples e fatorial de um número

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, de trocar objetos de posição.

De modo geral:

Se temos **n** elementos distintos, quantas filas podemos formar? Podemos escolher o primeiro elemento da fila de **n** maneiras. Agora, de quantas maneiras podemos escolher o segundo elemento da fila? De n – 1 maneiras. Prosseguindo desta forma e usando o princípio multiplicativo, fica claro que o número de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos esses **n** elementos é dado por:

n . (n – 1) . (n – 2). ... . 3 . 2 . 1

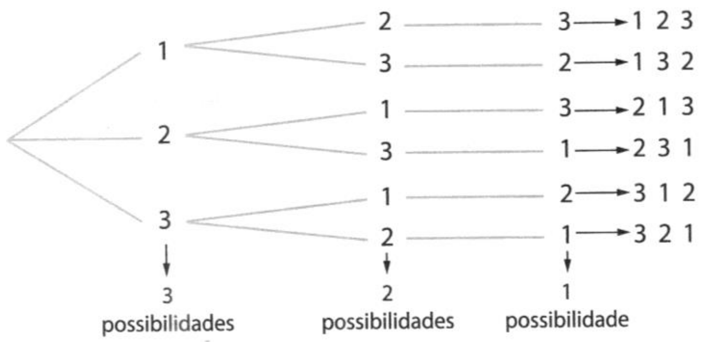
Esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) recebem o nome de permutação simples. Indicamos por $\boldsymbol{P_n}$ o número de permutações simples de **n** elementos:

P_n = n . (n – 1) . (n – 2). ... . 3 . 2 . 1

Vejamos agora quantos agrupamentos é possível formar quando temos **n** elementos e todos serão usados em cada agrupamento. Observe os exemplos:

1º) Quantos números de 3 algarismos (sem repetí-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

Podemos resolver por tentativa. Assim temos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Concluímos então que são seis os números procurados. Podemos também fazer uma árvore de possibilidades:



Pelo princípio fundamental da contagem temos 3 . 2 . 1 = 6 possibilidades.

Observe que a ordem dos algarismos é muito importante. Todos os números diferem entre si pela ordem de seus algarismos.

2º) Quantos são os anagramas (diferentes disposições de letras de uma palavra) da palavra ANEL?

_______ _______ _______ _______

Considerando as quatro letras: **a, n, e** e **l**, há 4 possibilidades para a primeira posição, 3 possibilidades para a segunda, 2 possibilidades para a terceira e 1 possibilidade para a quarta posição.

Pelo princípio fundamental da contagem temos 4 . 3 . 2 . 1 = 24 possibilidades, ou seja, são 24 anagramas.

3.3 Fatorial

O valor obtido com $\boldsymbol{P_n}$ é também chamado de fatorial do número natural **n** e indicado por **n!** (lê-se “fatorial de **n**” ou “**n** fatorial”).

Assim temos n! = n . (n – 1) . (n – 2) . ... . 3 . 2 . 1, para n ≥ 1.

Considera-se 0! = 1.

Exemplos:

1º) $P_5 = 5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 120$

5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

2º) $P_4 = 4! = 4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 24$

3º) $P_2 = 2! = 2\,.\,1 = 2$

4º) Vamos calcular quantos são os anagramas:

a) da palavra PERDÃO.

Basta calcular $P_6 = 6! = 6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 720$.

b) da palavra PERDÃO que iniciam com **P** e terminam em **O**.

P ___ ___ ___ ___ O

Devemos permutar as 4 letras não fixas, ou seja, calcular $\boldsymbol{P_4}$.

$P_4 = 4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 24$

Portanto, há 24 anagramas da palavra PERDÃO iniciados com **P** e terminados em **O**.

c) da palavra PERDÃO em que as letras **A** e **O** aparecem juntas e nessa ordem (ÃO).
É como se a expressão ÃO fosse uma só letra: PERD<u>ÃO</u>; assim, temos que calcular $\boldsymbol{P_5}$**:**
P_5 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

d) da palavra PERDÃO em que **P** e **O** aparecem nos extremos.
P ___ ___ ___ ___ O
O ___ ___ ___ ___ P
Temos então $2P_4 = 2\,.\,4! = 48$ anagramas.

e) Da palavra PERDÃO em que as letras PER aparecem juntas, em qualquer ordem.
Considerando PER como uma só letra, <u>PER</u>DÃO, temos que calcular $\boldsymbol{P_4}$**:**
P_4= 4! = 24

Como as 3 letras de PER podem aparecer em qualquer ordem, temos $P_3 = 3! = 6$ possibilidades de escrevê-las juntas.

Assim, o número total de anagramas pedido é:

$P_4 \,.\, P_3$=24 . 6 = 144 anagramas

5º) Vamos simplificar as expressões:

a) $\frac{20!}{18!}$

$$\frac{20!}{18!} = \frac{20\,.19\,.\cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380$$

b) $\frac{48!+49!}{50!}$

$$\frac{48!+49!}{50!} = \frac{48!+(49\,.\,48!)}{50!} = \frac{\cancel{48!}(1+49)}{50\,.49\,.\cancel{48!}} = \frac{\cancel{50}}{\cancel{50}\,.49} = \frac{1}{49}$$

c) $\frac{n!}{(n+1)!}$

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

3.4 Arranjos simples

Vimos que permutação simples de **n** elementos é qualquer agrupamento ordenado desses **n** elementos. Agora, tendo **n** elementos, vamos estudar os agrupamentos ordenados de 1 elemento, de 2 elementos, de 3 elementos, ..., de **p** elementos, com p ≤ n.

Observe os exemplos:

1º) Usando os algarismos 2, 3, 5, 7 e 9, quantos números naturais de 3 algarismos distintos podemos formar?

$\overline{centena}\ \ \overline{dezena}\ \ \overline{unidade}$

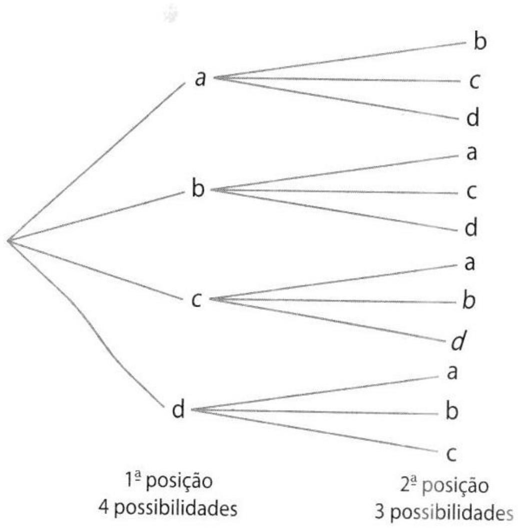
Há 5 possibilidades para o primeiro algarismos, 4 para o segundo e 3 para o terceiro.

No total podemos então formar 5 . 4 . 3 = 60 números.

Dizemos neste exemplo que fizemos arranjos de 5 elementos 3 a 3, e o número desses arranjos é 60.

Indicamos assim: $A_{5,3}$= 5 . 4 . 3 = 60.

2º) Consideremos as letras **a, b, c** e **d**. Quais e quantos agrupamentos ordenados diferentes de 2 letras distintas é possível formar com elas?



Na primeira posição temos 4 possibilidades (pois temos 4 elementos disponíveis). Na segunda posição, 3 possibilidades (pois temos 3 elementos disponíveis).

Pelo princípio fundamental da contagem, há, no total, 4 . 3 = 12 possibilidades.

Os 12 agrupamentos ordenados diferentes são:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Esses agrupamentos são chamados de arranjos simples. Arranjamos 4 elementos 2 a 2, e o número desses arranjos foi 12. Escrevemos então:

$A_{4,2}$= 4 . 3 = 12 (arranjo de 4 elementos tomados 2 a 2 é igual a 12)

Fórmula dos arranjos simples

Vejamos como calcular o número total desses agrupamentos no caso geral de **n** elementos arranjados **p** a **p**, com n $\geq$ p, ou seja, como calcular $A_{n,p}$ (lê-se: arranjo de **n** elementos tomados **p** a **p**).

Para n = p, temos $A_{n,n}$ = P_n = n!, já estudado.

Para n $>$ p, temos **n** elementos distintos e vamos arranjá-los **p** a **p**. Construindo a árvore de possibilidades, obtemos:

- Na primeira posição: **n** possibilidades (pois temos n elementos disponíveis)
- Na segunda posição: (n – 1) possibilidades (pois temos (n – 1) elementos disponíveis)
- Na terceira posição: (n – 2) possibilidades (pois temos (n – 2) elementos disponíveis

⋮ ⋮

- Na p-ésima posição: n – (p – 1) possibilidades (pois temos n – (p – 1) elementos disponíveis

Aplicando o princípio fundamental da contagem, temos que o número total de possibilidades é dado por:

$$A_{n,p} = \underbrace{n\ .\ (n-1).(n-2)\ .\ \ldots\ .[n-(p-1)]}_{p\ fatores}$$

Podemos ainda indicar $A_{n,p}$ por meio de fatoriais. Observe:

$A_{n,p}$ = n . (n – 1) . (n – 2) . ... . (n – p + 1)

Multiplicando esse número por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:

$A_{n\,,p}$ = n . (n – 1) . (n – 2) . ... . (n – p + 1) . $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ =

$$= \frac{n\ .\ (n-1).\ (n-2).\ \ldots\ .\ (n-p+1)\ .\ (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Portanto:

$$A_{n\,,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Resumindo:

Arranjos simples de **n** elementos tomados **p** a **p** (p ≤ n) são os agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com **p** dos **n** elementos dados.

Indica-se por $A_{n\,,p}$ ou A_n^p o total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$A_{n,p}$ = n . (n – 1) . (n – 2) . ... . (n – p + 1)

ou

$$A_{n\,,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Observação: Você pode usar tanto o conceito de arranjo como o princípio fundamental da contagem para resolver problemas, como veremos nos exemplos a seguir. Mais importante do que decorar uma fórmula e aplica-la é compreender o que está sendo feito.

Exemplos:

1°) Quantos números de dois algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

1ª maneira: usando a fórmula

Procuramos agrupamentos de 2 elementos em que a ordem é importante, pois, por exemplo, 12 ≠ 21. Temos 9 elementos para serem arranjados 2 a 2. Assim, temos que calcular:

$$A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9\,.\,8\,.\,\cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 72$$

Portanto, existem 72 números de dois algarismos diferentes que podem ser escritos com os algarismos de 1 a 9.

2ª maneira: sem usar a fórmula

Para o algarismo das dezenas temos 9 opções, e para o algarismo das unidades, apenas 8 opções, pois não podemos repetir algarismos. Assim, temos 9 . 8 = 72 possibilidades. Portanto, são 72 números.

2°) Responda às seguintes questões:

a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?

P_8 = 8! = 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 40 320

b) Quantas “palavras” de 4 letras distintas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?

1ª maneira: sem usar a fórmula

Temos 8 possibilidades para a 1ª letra, 7 para a 2ª, 6 para a 3ª e 5 para a 4ª letra. Assim, temos 8 . 7 . 6 . 5 = 1 680 palavras

2ª maneira: usando a fórmula

$A_{8,4}$ = 8 . 7 . 6 . 5 = 1 680

c) Quantas dessas “palavras” começam com E?

1ª maneira: sem usar a fórmula

Fixando E como 1ª letra, restam 7 possibilidades para a 2ª letra, 6 para a 3ª letra e 5 para a 4ª letra. Assim, temos 7 . 6 . 5 = 210

2ª maneira: usando a fórmula

Fixando E como 1ª letra, temos que arranjar as 3 restantes das 7 que sobraram. Assim:

$A_{7,3}$ = 7 . 6 . 5 = 210

d) Quantas terminam com TA?

1ª maneira: sem usar a fórmula

Fixando TA como 3ª e 4ª letras, restam 6 possibilidades para a 1ª letra e 5 para a 2ª. Assim, temos 6 . 5 = 30 palavras.

2ª maneira: usando a fórmula

Fixando as duas últimas como sendo TA, temos que arranjar as 2 iniciais das 6 que sobraram. Assim:

$A_{6,2}$ = 6 . 5 = 30

e) Quantas contêm a letra M?

1ª maneira: sem usar a fórmula

Fixando M como 1ª letra, restam 7 possibilidades para a 2ª letra, 6 para a 3ª e 5 para a 4ª letra. Assim, temos 7 . 6 . 5 = 210 palavras com o M na 1ª posição. Da mesma forma, teremos 210 possibilidades para o M na 2ª, na 3ª e na 4ª posição. Assim, temos 4 . 210 = 840 palavras

2ª maneira: usando a fórmula

Colocado o M temos $A_{7,3}$ = 7 . 6 . 5 = 210 possibilidades para as outras letras. Como podemos colocar o M de quatro maneiras diferentes:

_M_ __ __ __ ; __ _M_ __ __ ; __ __ _M_ __ ; __ __ __ _M_, temos:

4 . 210 = 840

f) Quantas não contêm a letra M?

1ª maneira: sem usar a fórmula

Sem o M, teremos 7 letras para compor a palavra: 7 possibilidades para a 1ª letra, 6 para a 2ª, 5 para a 3ª e 4 para a 4ª letra. Assim, temos 7 . 6 . 5 . 4 = 840 palavras.

2ª maneira: usando a fórmula

Retirando o M, passamos a ter 7 letras. Como os anagramas devem conter 4 letras, temos:

$A_{7,4}$ = 7 . 6 . 5 . 4 = 840

Observação: Também poderíamos ter feito 1 680 – 840 para obter 840, subtraindo o número de palavras obtido em e do número total obtido em b.

3º) De quantas maneiras 5 meninos podem se sentar num banco que tem apenas 3 lugares?

1ª maneira: usando a fórmula

Estamos interessados nos agrupamentos ordenados de 3 elementos, retirados de 5 elementos, ou seja:

$A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Portanto, há 60 maneiras possíveis.

2ª maneira: sem usar a fórmula

5 meninos são possíveis para o 1º lugar do banco, 4 para o 2º e 3 para o 3º. Então, são 5 . 4 . 3 = 60 possibilidades.

4º) Quantas frações diferentes (e não iguais a 1) podemos escrever usando os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13?

1ª maneira: usando a fórmula

Nesse caso estamos procurando agrupamentos de dois elementos nos quais a ordem deles é importante $\left(\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}\right)$ e nos quais um mesmo número não pode ser repetido na mesma fração $\left(\frac{3}{3} = 1\right)$.

Esses agrupamentos de 2 elementos devem ser formados com os 6 elementos: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Logo, temos:

$A_{6,2} = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

Portanto podemos formar 30 frações nessas condições.

2ª maneira: sem usar a fórmula

Para o denominador temos 6 opções e, para o numerador, 5 opções. Então, 6 . 5 = 30 frações.

5º) Quantos números ímpares de 4 algarismos não repetidos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

1ª maneira: sem usar a fórmula

Para que o número seja ímpar, devemos ter como algarismo das unidades uma das 5 opções apresentadas (1, 3, 5, 7 ou 9). Para a dezena, temos 8 opções, pois não podemos repetir o algarismo usado nas unidades. Para a centena, 7 opções; para o milhar, 6 opções. Assim, 6 . 7 . 8 . 5 = 1680 números.

2ª maneira: usando a fórmula

Dos 9 algarismos, 5 deles são ímpares. Terminando com um desses 5 algarismos (por exemplo, ___ ___ ___ 1) podemos escrever $A_{8,3}$ números de 4 algarismos.

Como são 5 as possibilidades para a última posição, podemos escrever:

$5 \,.\, A_{8\,,3}$ = 5 . $\frac{8!}{5!}$ = 5 (8 . 7 . 6) = 1 680

Portanto, há 1 680 números ímpares de 4 algarismos não repetidos com os dígitos 1 a 9.

6º) Um estudante tem 5 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele poderá pintar os estados da região Sul do Brasil, cada um de uma cor?

1ª maneira: sem usar a fórmula

São 3 estados: Rio Grande do Sul, Paraná e Santa Catarina. Para pintar o Rio Grande do Sul há 5 possibilidades, para o Paraná há 4 possibilidades e para Santa Catarina há 3 possibilidades. Logo, 5 . 4 . 3 = 60 possibilidades.

2ª maneira: usando a fórmula

Os estados do Sul do Brasil são 3: Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul. Logo, devemos calcular $A_{5\,,3}$.

$A_{5\,,3}$= $\frac{5!}{2!}$ = 5 . 4 . 3 = 60

Portanto, há 60 maneiras diferentes de pintar os estados do Sul usando 5 cores.

7º) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números de 3 algarismos distintos maiores do que 350 podemos formar?

Temos as possibilidades:

$$\left.\begin{array}{lll} 6 & \_ & \_ \\ 5 & \_ & \_ \\ 4 & \_ & \_ \end{array}\right\} 3 \,.\, A_{5\,,2}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 3 & 5 & \_ \\ 3 & 6 & \_ \end{array}\right\} 2 \,.\, A_{4\,,1}$$

Então o total de números é:

$3 \,.\, A_{5\,,2} + 2 \,.\, A_{4\,,1}$ = 3 . (5 . 4) + 2 . 4 = 68

3.5 Combinação simples

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos.

Observe com atenção estes dois exemplos:

1º) Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?

Representemos por A: Ane; E: Elisa; R: Rosana; F: Felipe; e G: Gustavo. Precisamos determinar todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 5 elementos {A, E, R, F, G}. A ordem em que os elementos aparecem nesses subconjuntos não importa, pois Ane-Elisa, por exemplo, é a mesma dupla que Elisa-Ane.

Então, os subconjuntos de 2 elementos são: {A, E}, {A, R}, {A, F}, {A, G}, {E, R}, {E, F}, {E, G}, {R, F}, {R, G}, {F, G}.

A esses subconjuntos chamamos de combinação simples de 5 elementos tomados com 2 elementos, ou tomados 2 a 2, e escrevemos: $C_{5,2}$.

Como o número total dessas combinações é 10, escrevemos $C_{5,2}$= 10.

2º) Consideremos um conjunto com 5 elementos e calculemos o número de combinações simples de 3 elementos, ou seja, o número de subconjuntos com 3 elementos.

Conjunto com 5 elementos: {a, b, c, d, e}.

Combinação simples de 3 elementos: {a, b, c}, {a, b, d}, {a, b, e}, {a, c, d}, {a, c, e}, {a, d, e}, {b, c, d}, {b, c, e}, {b, d, e}, {c, d, e}.

Cada combinação dessas dá origem a 6 arranjos, permutando de todos os modos possíveis seus 3 elementos. Por exemplo: ao permutar todos os elementos da combinação {a, b, c} encontramos os arranjos: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Isso significa que o número de arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3 é seis vezes o número de combinações de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja: $A_{5,3} = 6 \,.\, C_{5,3}$.

Como o 6 foi obtido fazendo permutações dos 3 elementos de, por exemplo, {a, b, c}, temos P_3= 6. Logo,

$$A_{5,3} = P_3 \,.\, C_{5,3}$$

ou

$$C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{P_3} = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3!} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5\,.\,4\,.\,3!}{3!\,2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Fórmula das combinações simples

A cada combinação de n elementos tomados p a p correspondem p! arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Então:

$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$ ou $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.

Indica-se por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$ o número total de combinações de n elementos tomados p a p e calcula-se por $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ou $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$.

Observações:

1ª) Como são subconjuntos de um conjunto, a ordem dos elementos não importa. Só consideramos subconjuntos distintos os que diferem pela natureza dos seus elementos.

2ª) Como foi observado acima, do mesmo modo que se obtém a fórmula da combinação por meio da divisão de um arranjo pela permutação, podemos obter a combinação sem usar a fórmula, calculando o arranjo sem a fórmula e dividindo o resultado pela permutação dos elementos escolhidos.

Uma propriedade importante das combinações

Observemos que:

$C_{3,2} = C_{3,1}$, pois $C_{3,2} = 3$ e $C_{3,1} = 3$

$C_{5,3} = C_{5,2}$, pois $C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!} = \frac{5\,.\,4\,.\,3}{3\,.\,2\,.\,1} = 10$ e $C_{5,2} = \frac{A_{5,2}}{2!} = \frac{5\,.4}{2\,.1} = 10$

De modo geral, vale a propriedade:

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

pois:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!\big(n-(n-p)\big)!} = C_{n,n-p}$$

Essa propriedade é muito útil para simplificar os cálculos e é conhecida por igualdade de combinações complementares.

Veja:

$$C_{100,98} = C_{100,2} = \frac{100 . 99}{2 . 1} = 4\,950$$

$$C_{43,42} = C_{43,1} = 43$$

Exemplos:

1º) Vamos calcular o valor de:

a) $C_{6,3}$

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 . 5 . 4 . \cancel{3!}}{3!\cancel{3!}} = \frac{6 . 5 . 4}{3 . 2 . 1} = 20$$

ou

$$C_{6,3} = \frac{A_{6,3}}{3!} = \frac{\cancel{6} . 5 . 4}{\cancel{3} . \cancel{2} . 1} = 20$$

b) $\binom{4}{2}$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 . 3}{2} = 6 \text{ ou } \binom{4}{2} = \frac{A_{4,2}}{2!} = \frac{4 . 3}{2 . 1} = 6$$

2º) De quantas maneiras diferentes um técnico pode escalar seu time de basquete tendo à sua disposição 12 atletas que jogam em qualquer posição?

1ª maneira: usando a fórmula

Procuramos o número total de subconjuntos (ou combinações) com 5 elementos tirados de um conjunto de 12 elementos. A ordem não importa; cada subconjunto difere um do outro apenas pela natureza dos seus elementos. Assim, procuramos:

$$C_{12,5} = \frac{A_{12,5}}{5!} = \frac{12 . 11 . 10 . 9 . 8}{5 . 4 . 3 . 2 . 1} = 11 . 9 . 8 = 792$$

Portanto, podemos formar 792 times de basquete diferentes com 12 atletas.

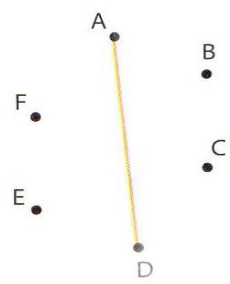
2ª maneira: sem usar a fórmula

São 5 jogadores a serem escolhidos entre 12. Então, 12 . 11 . 10 . 9 . 8 = 95 040 possibilidades se estivéssemos calculando um arranjo. Como é uma combinação, então devemos dividir o resultado pelo fatorial dos elementos escolhidos (5 elementos):

$\frac{12\,.11\,.10\,.9\,.8}{5!} = 792$ possibilidades

3º) Em um plano marcamos 6 pontos distintos, dos quais 3 nunca estão em linha reta.

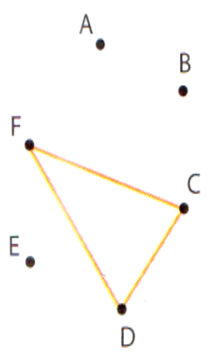
a) Quantos segmentos de reta podemos traçar ligando-os 2 a 2?



Marcamos 6 pontos em um plano, onde não existem 3 alinhados.

Como em cada segmento temos 2 extremos e, por exemplo, o segmento $\overline{AD}$ é o mesmo que o segmento $\overline{DA}$, o número de segmentos é $C_{6\,,2} = \frac{6\,.5}{2} = 15.$

b) Quantos triângulos podemos formar tendo sempre 3 deles como vértices?



Como cada triângulo fica determinado por 3 pontos não colineares, temos, independentemente da ordem deles:

$C_{6\,,3} = \frac{6\,.5\,.4}{3\,.2\,.1} = 5\,.\,4 = 20$

Logo, podemos formar 20 triângulos.

4º) Quantas diagonais tem um hexágono convexo?

O número de segmentos que unem 2 vértices é, como no exemplo anterior, $C_{6,2} = 15$. Nesses 15 segmentos, além das diagonais, estão inclusos os 6 lados do hexágono. Então:

$$C_{6,2} - 6 = 15 - 6 = 9$$

Logo, o número de diagonais do hexágono convexo é 9.

5º) No jogo de truco, cada jogador recebe 3 cartas de um baralho de 40 cartas (são excluídas as cartas 8, 9 e 10). De quantas maneiras diferentes um jogador pode receber suas 3 cartas?

As 3 cartas diferem entre si pela natureza delas e não pela ordem. Como a ordem não importa, o problema fica resolvido calculando:

$$C_{40,3} = \frac{40 \,.\, 39 \,.\, 38}{3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 9\ 880$$

Portanto, cada jogador pode receber suas 3 cartas de 9 880 maneiras diferentes.

6º) O conselho desportivo de uma escola é formado por 2 professores e 3 alunos. Candidataram-se 5 professores e 30 alunos. De quantas maneiras diferentes esse conselho pode ser eleito?

Se escolhermos os professores de x maneiras e os alunos de y maneiras, pelo princípio fundamental da contagem escolheremos os professores e os alunos de xy maneiras. Assim:

- Escolha dos professores: $C_{5,2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \,.\, 4 \,.\, \cancel{3!}}{2!\cancel{3!}} = \frac{5 \,.\, 4}{2 \,.\, 1} = 10$

- Escolha dos alunos: $C_{30,3} = \frac{30!}{3!27!} = \frac{30 \,.\, 29 \,.\, 28 \,.\, \cancel{27!}}{3!\cancel{27!}} = \frac{30 \,.\, 29 \,.\, 28}{3 \,.\, 2} = 4\ 060$

Logo:

$$C_{5,2} \,.\, C_{30,3} = 10 \,.\, 4\ 060 = 40\ 600$$

Portanto, o conselho pode ser eleito de 40 600 maneiras diferentes.

7º) De quantas maneiras podemos colocar 10 bolas em 3 urnas, de modo que fiquem 2 bolas na primeira urna, 3 bolas na segunda urna e 5 bolas na terceira?

Há $C_{10,2}$ maneiras de escolher as 2 bolas que ficarão na primeira urna. Para cada maneira há $C_{8,3}$ possibilidades de escolher as 3 bolas que ficarão na segunda urna. Pelo princípio fundamental da contagem há, então, $C_{10,2} \,.\, C_{8,3}$ maneiras de distribuir as 2 bolas na primeira urna e as bolas na segunda urna. Para cada uma dessas possibilidades, há $C_{5,5}$ maneiras de colocar as 5 bolas na terceira urna.

Portanto, novamente pelo princípio fundamental da contagem, há $C_{10,2}\,.\,C_{8,3}\,.\,C_{5,5}$ maneiras diferentes de colocar 2 bolas na primeira urna, 3 bolas na segunda urna e 5 bolas na terceira urna.

$\boxed{1^{\underline{a}}\ urna}$	$\boxed{2^{\underline{a}}\ urna}$	$\boxed{3^{\underline{a}}\ urna}$
2 bolas em 10	3 bolas em 8	5 bolas em 5

$$C_{10,2}\,.\,C_{8,3}\,.\,C_{5,5} = \frac{10!}{2!8!}\,.\,\frac{8!}{3!5!}\,.\,\frac{5!}{5!0!} = \frac{10\,.9\,.8!}{2\,.1\,.8!}\,.\,\frac{8\,.7\,.6\,.5!}{3\,.2\,.1\,.5!}\,.\,\frac{1!}{0!} = 45\,.\,56\,.\,1 = 2\,520$$

Portanto, existem 2 520 possibilidades para fazer essa distribuição.

3.6 Permutação com repetição

Consideremos os exemplos:

1º) Quantos são os anagramas da palavra BATATA?

Se os **As** fossem diferentes e os **Ts** também, teríamos as letras ***B,*** $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{A_3}, \boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}$, e o total de anagramas seria P_6= 6!.

Mas as permutações entre os 3 **As** não produzirão novo anagrama. Então precisamos dividir $\boldsymbol{P_6}$ por $\boldsymbol{P_3}$. O mesmo ocorre com os dois **Ts**: precisamos dividir também por $\boldsymbol{P_2}$.

Portanto, o número de anagramas da palavra BATATA é:

$$\frac{P_6}{P_3\,.\,P_2} = \frac{6!}{3!\,.\,2!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3!}{3!\,.\,2!} = 60$$

2º) Quantos anagramas tem a palavra PAPA?

Se a palavra tivesse as 4 letras distintas, teríamos P_4 = 4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24. Como a letra **A** e a letra **P** aparecem 2 vezes, devemos então fazer:

$$\frac{P_4}{P_2\,.\,P_2} = \frac{4!}{2!\,.\,2!} = \frac{4\,.\,3\,.\,2!}{2\,.\,2} = 6$$

Logo, a palavra PAPA tem 6 anagramas.

Generalizando:

A permutação de **n** elementos dos quais α é de um tipo, β é de outro e γ é de outro, com $\alpha + \beta + \gamma =$ n, é dada por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\,.\,\beta!\,.\,\gamma!}$$

Exemplos:

1º) Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

Nesse caso, há 3 letras A, 2 letras **R** e um total de 5 letras. Então:

$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\ .\ 4\ .\ 3!}{3!2!}$ = 10

Logo, são 10 os anagramas da palavra ARARA.

2º) Quantos são os anagramas da palavra DEZESSETE?

Nesse caso, há 4 letras **E**, 2 letras **S** e uma vez as letras **D, Z** e **T**, num total de 9 letras. Então, temos:

$P_9^{4,2,1,1,1} = \frac{9!}{4!2!} = \frac{9\ .\ 8\ .\ 7\ .\ 6\ .\ 5\ .\ 4!}{4!2!}$ = 7 560

Logo, são 7 560 os anagramas da palavra DEZESSETE.

3º) Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam com a letra **C**?

Fixamos a letra **C** como 1ª letra e fazemos:

$P_7^{4,1,1,1} = \frac{7!}{4!}$ = 7 . 6 . 5 = 210

Portanto, são 210 anagramas de CAMARADA que começam com **C**.

4º) Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam com **A**?

Fixamos uma letra **A** e fazemos os possíveis anagramas com as demais: $A\,\underbrace{CAMARAD}$

$P_7^{3,1,1,1,1} = \frac{7!}{3!}$ = 7 . 6 . 5 . 4 = 840

Logo, 840 anagramas de CAMARADA começam com **A.**

3.7 Números binomiais

Chama-se número binomial o número $\binom{n}{p}$, com **n** e **p** naturais, n ≥ p, tal que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (**n** é o numerador e **p** é a classe do número binomial).

Exemplo:

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\ .\ 4\ .\ 3!}{2\ .\ 1\ .\ 3!}$ = 10

Propriedade:

Dois números binomiais são iguais se tiverem o mesmo numerador e:

- suas classes forem iguais, ou
- a soma de suas classes for igual ao numerador (binomiais complementares).

Exemplo:

Vamos obter o valor de **x** sabendo que $\binom{7}{3} = \binom{7}{x}$.

Sabemos que a igualdade acontece em duas situações: x = 3 ou 3 + x = 7. Se 3 + x = 7, então x = 4. Logo, os valores de **x** são: x = 3 ou x = 4.

3.8 Binômio de Newton

Toda potência da forma $(x+y)^n$, com x ∈ R, y ∈ R e n ∈ N, é conhecida como binômio de Newton.

O desenvolvimento do binômio de Newton é simples em casos como os seguintes, que você já estudou no ensino fundamental:

- $(5x-7)^0 = 1$
- $(2x+y)^1 = 2x + y$
- $(x+y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y)^3 = (x+y)^2 (x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Em casos como $(x+y)^7$, $(2x-y)^5$, $(x+2)^{10}$ e outros, vamos recorrer aos conhecimentos adquiridos na análise combinatória.

Observe nos exemplos seguintes os binômios de Newton desenvolvidos e veja como são os coeficientes de cada termo:

1º) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2 = \binom{2}{0} x^2y^0 + \binom{2}{1} x^1y^1 + \binom{2}{2} x^0y^2$

2º) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3 = \binom{3}{0} x^3y^0 + \binom{3}{1} x^2y^1 + \binom{3}{2} x^1y^2 + \binom{3}{3} x^0y^3$

3º) $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4 = \binom{4}{0} x^4y^0 + \binom{4}{1} x^3y^1 + \binom{4}{2} x^2y^2 + \binom{4}{3} x^1y^3 + \binom{4}{4} x^0y^4$

Fórmula do binômio de Newton

A fórmula do binômio de Newton é a fórmula que dá o desenvolvimento de $(x+y)^n$. Ela é encontrada fazendo o produto:

$$\underbrace{(x+y).(x+y).\ldots.(x+y)}_{\boldsymbol{n}\ vezes}$$

O termo genérico do produto é obtido tomando em **p** dos fatores (p = 0, 1, 2, ..., n) a segunda parcela e tomando nos restantes n – p fatores a primeira parcela. Como isso pode ser feito de $C_n^p \left(ou \quad \binom{n}{p}\right)$ modos, o termo genérico do produto é $C_n^p y^p x^{n-p} \left(ou \ \binom{n}{p} y^p x^{n-p}\right)$ e

$$(x+y)^n = C_n^0 y^0 x^n + C_n^1 y^1 x^{n-1} + C_n^2 y^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^n y^n x^0$$

ou

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \cdots + \binom{n}{n} y^n$$

Note que os expoentes de **x** começam em **n** e decrescem de 1 em 1 até 0, enquanto os expoentes de **y** começam em 0 e crescem de 1 em 1 até **n**.

Observação: Dados os números naturais **n** e **p**, com n ≥ p, o número $\binom{n}{p}$ é chamado de número binomial **n** sobre **p**.

Lembre que:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo:

Vamos efetuar o desenvolvimento de:

a) $(x+a)^5$

$$(x+a)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 a + \binom{5}{2} x^3 a^2 + \binom{5}{3} x^2 a^3 + \binom{5}{4} x a^4 + \binom{5}{5} a^5$$

Portanto:

$$(x+a)^5 = x^5 + 5x^4 a + 10x^3 a^2 + 10x^2 a^3 + 5xa^4 + a^5$$

b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^6$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^6 = \left[x + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^6 = \binom{6}{0} x^6 + \binom{6}{1} x^5 \left(-\frac{1}{2}\right) + \binom{6}{2} x^4 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{3} x^3 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{6}{4} x^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{6}{5} x \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^6$$

Calculando $\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1; \binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6; \binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15; \binom{6}{3} = 20$, temos:

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^6 = x^6 - \frac{6}{2}x^5 + \frac{15}{4}x^4 - \frac{20}{8}x^3 + \frac{15}{16}x^2 - \frac{6}{32}x + \frac{1}{64} = x^6 - 3x^5 + \frac{15}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{15}{16}x^2 - \frac{3}{16}x + \frac{1}{64}$

Termo geral do binômio

No desenvolvimento de $(x + y)^n$ vimos que:

$$(x+y)^n = \underbrace{\binom{n}{0} x^n}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1} x^{n-1}y}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2} x^{n-2}y^2}_{T_3} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{k} x^{n-k}y^k}_{T_{k+1}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n} y^n}_{T_{n+1}}$$

Assim, o termo geral é dado por:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$$

Observe que o desenvolvimento tem (n + 1) termos.

Exemplos:

1º) Qual é o 5º termo do desenvolvimento de $(x + 3)^5$ de acordo com as potências decrescentes de **x**?

Procuramos o valor de $\boldsymbol{T_5}$. Como 5 = k + 1⇒ k = 4, temos:

$$T_5 = \binom{5}{4} x^{5-4} .\ 3^4 = \frac{5!}{4!1!}\ x\,.81 = 405x$$

Portanto, o 5º termo de $(x + 3)^5$ é 405x.

2º) Vamos calcular o termo independente de **x** no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$.

$$T_{k+1} = \binom{6}{k} x^{6-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{6}{k} x^{6-k}\,.x^{-k} = \binom{6}{k} x^{6-2k}$$

O termo independente de **x** é o de $\boldsymbol{x^0}$, ou seja, 6 – 2k = 0 ⇒ k = 3.

Logo, o termo independente de **x** é: $T_4 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,\cancel{3!}}{\cancel{3!}3!} = 20.$

3º) Qual é o termo médio (ou central) no desenvolvimento de $(x - 3)^6$?

Como o binômio está elevado à 6ª potência, o desenvolvimento tem 7 termos.

Procuramos então o 4º termo, que o termo central: k + 1 = 4 ⇒ k = 3.

$$T_4 = \binom{6}{3} x^{6-3}(-3)^3 = -\binom{6}{3} 27x^3 = -20\,.27x^3 = -540x^3$$

4º) Qual é o termo em $\boldsymbol{x^5}$ no desenvolvimento $(x+3)^8$?

O termo geral é dado por $T_{k+1} = \binom{8}{k} x^{8-k} . 3^k$.

O termo em $\boldsymbol{x^5}$ ocorre quando 8 – k = 5, ou seja, quando k = 3.

Assim, o termo em $\boldsymbol{x^5}$ é dado por: $T_4 = \binom{8}{3} x^{8-3} . 3^3 = 56 . 27x^5 = 1\,512x^5$.

3.9 O triângulo de Pascal

Os coeficientes dos desenvolvimentos de:

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = 1x + 1y$

$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

$(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$

...

podem ser colocados nas seguintes formas “triangulares”:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...

ou

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...

De modo geral:

$(x+y)^0$: $\binom{0}{0}$

$(x+y)^1$: $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{0}$

$(x+y)^2$: $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$(x+y)^3$: $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$(x+y)^4$: $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

... ...

$(x+y)^n$: $\binom{n}{0}$ $\binom{n}{1}$ $\binom{n}{2}$ $\binom{n}{3}$ $\cdots$ $\binom{n}{n}$

Essa maneira de dispor tais coeficientes é conhecida por triângulo de Pascal.

Propriedades dos números binomiais

Observando o triângulo de Pascal podemos tirar as seguintes propriedades:

1ª) Por exemplo:

$$\binom{3}{1} = \binom{3}{2} \rightarrow 1 + 2 = 3$$

$$\binom{4}{1} = \binom{4}{3} \rightarrow 1 + 3 = 4$$

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} \rightarrow 2 + 3 = 5$$

De modo geral, como já foi visto no estudo dos números binomiais:

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \rightarrow p + (n-p) = n$ (binomiais complementares ou combinações complementares)

Prova: O número de modos de escolher, entre **n** objetos, **p** objetos para usar é igual ao de escolher n – p objetos para não usar.

2ª) Observe:

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$$

$$\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{4}{3}$$

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$$

Considere um conjunto **A** com 4 elementos. Podemos formar $\binom{4}{2}$ subconjuntos de 2 elementos. Considere agora **x** um dos elementos de **A**. **x** está presente em $\binom{3}{1}$ subconjuntos de **A** e **x** não está presente em $\binom{3}{2}$ subconjuntos de **A**.

Logo, $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$.

1

1 1 (Somando dois elementos lado

1 2 1 a lado no triângulo obtém-se

1 3 3 1 o elemento situado abaixo

1 4 6 4 1 no meio deles).

1 5 10 10 5 1

...

De modo geral:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \text{ (relação de Stifel)}$$

Prova: Considere que **x** é um dos elementos de um conjunto **A** de **n** elementos. O número de subconjuntos de **A** com **p** elementos é $\binom{n}{p}$. Esse número é igual à soma do número de subconjuntos nos quais **x** não figura, $\binom{n-1}{p}$, com o número de subconjuntos nos quais **x** figura, $\binom{n-1}{p-1}$.

3ª) Observe a soma dos elementos de uma mesma linha no triângulo de Pascal:

$$\binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1$$

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

Qual seria o valor de $\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$?

De modo geral, temos:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

Prova: Observe que os dois membros são iguais ao número de subconjuntos de um conjunto com **n** elementos.

Exemplo:

Uma casa tem 3 portas de entrada. De quantos modos esta casa pode ser aberta?

Há $\binom{3}{1}$ modos de abrir a casa abrindo uma só porta, $\binom{3}{2}$modos de abrir a casa abrindo duas portas e $\binom{3}{3}$ modos de abrir a casa abrindo as três portas.

Logo:

$$\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=2^3-\binom{3}{0}=8-1=7$$

4. PROPOSTAS DE ATIVIDADES A SEREM REALIZADAS

ATIVIDADE 1

Para a atividade 1 procuramos explorar situações que envolvessem o conceito de Princípio Multiplicativo e a ideia de arranjos simples.

Propomos a pintura de algumas bandeiras, sabendo que cada bandeira é composta de duas listras. Essa primeira situação-problema foi elaborada com o propósito de inicializar o aluno com as primeiras ideias relacionadas com o raciocínio combinatório enquanto compreende os procedimentos necessários para a construção de diversas representações gráficas, as quais mostram todas as possibilidades que atendem à solução (agrupamentos) para um mesmo problema de contagem. As maneiras como as cores para a pintura das listras de uma bandeira podem ser escolhidas e combinadas determina, igualmente, a totalidade de diferentes bandeiras que podem ser pintadas, nas quais as “combinações de escolhas cores para a pintura das listras de bandeira” favorecem o desenvolvimento do raciocínio combinatório enquanto são obtidas todas as diferentes possibilidades em que as pinturas de uma bandeira podem ser feitas.

Para esta atividade temos como objetivos: Apresentar diferentes representações gráficas que podem ser utilizadas para resolver problemas de contagem, de modo que o aluno conheça as características que permitem a construção de cada uma delas; Oferecer procedimentos que favoreça ao aluno identificar os diferentes agrupamentos de objetos envolvidos em cada situação-problema; Criar condições para que o aluno enumere todos os agrupamentos de objetos envolvidos na situação-problema, após ter construído qualquer uma representação e, a partir daí, efetue a contagem direta desses agrupamentos para concretizar a resolução do problema de contagem proposto; Permitir que quando da construção de uma árvore de possibilidades, por exemplo, o aluno identifique em todas as suas “folhas”, todos os diferentes agrupamentos de objetos e as características que os diferem entre si, certificando-se de que estabeleceu a enumeração de todas as possibilidades.

A resolução da primeira ficha de atividades pode ser realizada de quatro maneiras: Enumeração das possibilidades (de seus agrupamentos), Tabela de dupla entrada, Produto Cartesiano e Árvore de Possibilidades.

Na primeira maneira de resolver a atividade proposta utilizamos a Enumeração das possibilidades. Quando queremos determinar a quantidade total de possibilidades diferentes de se fazer algo dizemos que estamos diante de um problema de contagem, como é o caso da atividade apresentada. O objetivo de um Problema de Contagem é contabilizar a totalidade das diferentes possibilidades que se pode considerar para a situação-problema que está sendo proposta resolver.

Uma segunda maneira de resolver o problema proposto é utilizando uma tabela de dupla entrada. Uma tabela de dupla entrada também pode ser utilizada quando não se tem todas as bandeiras desenhadas e disponíveis para colorir e quando tratar-se de bandeiras que têm duas listras e se deseja conhecer o total de possibilidades de fazer pinturas distintas, não importando o total de cores disponíveis para se utilizar na pintura. A tabela de dupla entrada também é útil quando se deseja apresentar todas as possibilidades para colorir as diferentes bandeiras que têm duas listras e se dispõe de quatro cores para a pintura, ou então nos casos em que se dispõe de uma só cor, duas ou três cores, e é possível deixar de pintar uma listra ou as duas listras, e considerar "pinturas diferentes" entre as bandeiras. Nesse caso, deixar de pintar uma listra corresponde a usar uma segunda cor na pintura, que indicamos como "cor branca".

Na terceira forma de resolver o problema proposto utilizaremos o Produto Cartesiano. Em um produto cartesiano fazemos a indicação das possibilidades de pintura "associando" as possibilidades de colorir as listras da bandeira, por meio de um tracejado. Para que se tenha um Produto Cartesiano é preciso que cada "elemento" que está no conjunto A (o conjunto das cores que serão utilizadas na pintura da 1ª listra) se "relacione" com todos os "elementos" do conjunto B (o conjunto das cores que serão utilizadas na pintura da 2ª listra), de maneira a identificar todas as diferentes bandeiras que podem ser pintadas.

Após fazer a associação de cada elemento do conjunto A com todos os elementos do conjunto B, conta-se o total de "pares associados" que utilizou para essas associações e tem o total de possibilidades de colorir essas diferentes bandeiras, quando dispõe de quatro cores. O mesmo se aplica quando se tem mais de quatro cores e bandeiras com duas listras.

O Produto Cartesiano entre os conjuntos A e B é indicado como A x B. O conjunto A x B é formado por "pares ordenados", onde o primeiro elemento de cada par ordenado pertence ao conjunto A e o segundo elemento de cada par ordenado pertence ao conjunto B. Observemos que o total de elementos A x B, ou seja, o total de pares ordenados presentes no produto cartesiano, são todas as possibilidades diferentes que podemos pintar uma bandeira com duas listras quando dispomos de quatro cores diferentes e todas as listras devem ser pintadas.

O quarto modo de se resolver o problema apresentado é dado pela árvore das possibilidades. Ela recebe esse nome porque sua representação gráfica se assemelha ao de uma árvore em que é possível mostrar cada um de seus "galhos" e as suas "folhas", que seriam as partes terminais da árvore. Em cada "folha" indica-se a cor que foi utilizada para a pintura da última listra de uma bandeira e, por essa razão, a construção de uma "folha" e a indicação de sua cor coincide com a escolha da cor que será usada na pintura de cada uma das bandeiras.

ATIVIDADE 2

Na segunda atividade exploramos o Princípio Multiplicativo. Propomos a pintura de bandeiras com três listras dispondo de dois bastões de giz de cera. Apresentamos ainda duas tabelas de dupla entrada, a primeira tabela para o preenchimento das duas primeiras listras e a segunda tabela relaciona o resultado da primeira tabela com as possibilidades de cores para a pintura da terceira listra. É proposto ainda o preenchimento de uma árvore de possibilidades de modo a conhecer as diferentes possibilidades para a pintura de uma bandeira com três listras horizontais.

Os objetivos da atividade 2 são o de identificar se os alunos apresentam algum padrão sistemático para efetuar as pinturas das bandeiras e construir duas tabelas de dupla entrada, uma vez que há três ações a serem feitas, quais sejam as escolhas das cores das três listras das bandeiras.

A utilização de duas Tabelas de dupla entrada e uma árvore de possibilidades, é dada de tal maneira que os alunos possam comparar vantagens e desvantagens na construção entre as duas possibilidades do uso de uma representação gráfica para determinar todas as possibilidades de pintura de uma bandeira com três listras horizontais.

A partir daí os alunos poderão certificar-se de que a escolha da Tabela de dupla entrada como representação gráfica para apresentar todas as possibilidades de solução para esta situação-problema obriga-os à construção de duas Tabelas de dupla entrada, enquanto a opção pela construção de uma árvore de possibilidades é o bastante para determinar a solução.

A construção da árvore de possibilidades também pode indicar ao aluno alguma padronização de pintura das listras na qual ele poderia ter se baseado enquanto efetuava as pinturas das listras da bandeira, uma vez que essa padronização guarda relação direta entre as ações utilizadas quando da construção dos “galhos” da árvore de possibilidades e o estabelecimento de suas “folhas”.

A árvore de possibilidades permite que os alunos reflitam sobre as informações que ali estão contidas e acerca da viabilidade de utilizá-la quando da resolução de problemas de contagem, podendo vir a adotá-la com frequência.

Pode ocorrer que o aluno efetue as pinturas das listras das bandeiras sem que ele tenha estabelecido algum padrão sistemático de pintura. Mas, enquanto constrói a árvore de possibilidades e ao identificar todos os agrupamentos (que são as possibilidades de pintura das faixas da bandeira) ele pode vir a fazer correlações entre a sequência das ações estabelecidas quando da pintura das listras e a ordenação dos elementos, presentes nos agrupamentos.

No momento da pintura de listras de bandeira com três listras, com a condição de que listras adjacentes não possam ser pintadas com a mesma cor o quantitativo de bandeiras, a maior exige que o aluno utilize-se de alguma estratégia que permite identificar esse fato, razão porque salientamos a proposição de situações semelhantes, como uma das razões para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Durante os momentos de construção de árvore de possibilidades pelos alunos ele está desenvolvendo o raciocínio combinatório enquanto decide acerca das ações necessárias e o quantitativo destas para o estabelecimento dos agrupamentos de objetos (sequência das cores das listras das bandeiras) que devem ser consideradas.

ATIVIDADE 3

Nesta atividade também foi explorado o Princípio Multiplicativo. Para a atividade 3 são dadas 16 (dezesseis) bandeiras com três listras horizontais. Ao dispor de três bastões de giz cera nas cores azul, verde e vermelho, pedimos aos estudantes que apresentassem todas as possibilidades que identificassem as diferentes pinturas de bandeiras entre si levando em conta que em cada bandeira que eles considerassem, duas listras que estejam juntas não poderão ser pintadas com as mesmas cores.

Nessa atividade procuramos explorar a construção da árvore de possibilidades em que o quantitativo de bandeiras que foram disponibilizadas para pintura são em número maior que o necessário, bem como colocamos uma restrição de que listras adjacentes não tenham a mesma cor com o objetivo de verificar se o aluno estabelece alguma estratégia de raciocínio de maneira que ele compreenda o que é preciso fazer para encontrar todas as possibilidades.

ATIVIDADE 4

Para a resolução da atividade 4 utilizamos os conceitos de Princípio Multiplicativo e Arranjos Simples. Na atividade 4 foram desenhadas 8 (oito) bandeiras com mastros, contendo duas listras horizontais cada uma. Pedimos aos estudantes que apresentassem todas as diferentes maneiras de colorir as listras horizontais de cada bandeira de tal maneira que todas as duas listras de cada bandeira sejam pintadas e se obtenha o maior número de bandeiras pintadas de modos diferentes, dispondo para isso, de três bastões de giz de cera nas cores verde, amarelo e vermelho.

Exploramos nessa atividade a construção de uma árvore de possibilidades, em dois momentos: no primeiro deles transferimos ao aluno a responsabilidade de construir a árvore de possibilidades desde o início, de maneira que ele se confronte com a necessidade de tomar decisões em cada uma das etapas durante a construção da árvore, o que contribui para que ele compreenda, se aproprie e desenvolva o raciocínio combinatório enquanto estabelece as tomadas de decisões para a construção dos “galhos” e das “folhas” da árvore. Em um segundo momento, também se tem o propósito de explorar a construção da árvore de possibilidades, nas situações com ou sem a possibilidade de repetição de uma cor nas duas listras da bandeira.

Também objetivamos – ao transferir para o aluno a responsabilidade de construir a árvore de possibilidades desde o início – oferecer autonomia para que se habitue a construir árvores de possibilidades com segurança, desde as primeiras situações-problema propostas.

Nessa atividade, disponibilizamos um quantitativo de bandeiras menor que o necessário para atender todas as possibilidades que devem ser consideradas para a solução da situação com o objetivo de verificar se o aluno constata que há necessidade de construir mais uma bandeira igual às anteriores. Se assim for é porque ele está exercitando e desenvolvendo o raciocínio combinatório como deve ser, nestas situações.

ATIVIDADE 5

Na atividade 5 utilizou-se o Princípio Multiplicativo. Para a realização da atividade 5 desenhamos 16 (dezesseis) “trevos de quatro folhas cada” e dispomos aos estudantes bastões de giz de cera nas cores verde e vermelho. Pedimos aos estudantes que apresentassem todas as possibilidades que identificassem as diferentes pinturas dos trevos entre si, considerando que nenhuma folha poderá deixar de ser pintada em cada trevo considerado.

Propomos também aos alunos a construção de uma árvore de possibilidades com maior número de possibilidades e fazemos perguntas que têm o objetivo de verificar como o aluno raciocina para responde-las, ou se ainda recorre aos desenhos das bandeiras que foram pintadas por ele em situações-problema presentes nas Fichas de atividades anteriores. Assim, o objetivo dessa situação-problema é o de retornar àquilo que foi apresentado na atividade 4, qual seja a de verificar se o aluno já se apercebe da necessidade de estabelecer um padrão sistemático (ou procedimento) de pintura que dê conta de pintar todas as possíveis pinturas das bandeiras – sem que, necessariamente ele tenha de fazê-las -, certificando-se de que o procedimento que foi utilizado por ele para essas pinturas lhe dá garantias de que assim procedendo ele vá contemplar todas as diferentes possibilidades de pintura das diferentes bandeiras.

Na atividade proposta, entende-se que pintar trevos de quatro folhas equivale à pintar bandeiras com quatro listras horizontais, apresentada em situação-problema anterior, e por essa razão podemos comparar os procedimentos que cada aluno utiliza nos dois casos, ou seja, se houve alguma sistematização similar entre as pinturas solicitadas nas duas situações-problema.

ATIVIDADE 6

Para a atividade 6 foram utilizados a aplicação do Princípio Multiplicativo e Arranjos Simples. Para esta atividade dispomos de uma bandeira com três listras horizontais apenas. Propomos a pintura da bandeira utilizando três cores de giz de cera utilizando repetição ou não de cores. Começamos também a colocar algumas “restrições” para a pintura desta, entre as quais a de não poder desenhar outras bandeiras nem tampouco pintá-las.

Para essa atividade esperamos atingir os seguintes objetivos: (i) em um primeiro momento que o aluno leia com atenção os enunciados de cada item e perceba a necessidade de utilizar cores em todas as listras da bandeira em um dos itens; (ii) em um segundo momento, em outro item, de que o aluno certifique-se de que pode haver uma ou mais listras da bandeira sem ser pintada e em outro item de que listras adjacentes não podem ter a mesma cor, do mesmo modo que não existe a possibilidade de deixar listras da bandeira em branco. Também objetiva que o aluno identifique que a situação em que listras da bandeira podem ser deixadas em branco é similar à situação em que outra cor de giz de cera estivesse disponível para a pintura das bandeiras; depois, em um terceiro momento, o objetivo é de levar o aluno a compreender que para pintar as três listras da bandeira (ou deixar uma ou mais listras sem pintar) ele precisa tomar três decisões, uma a seguir da outra, considerando que há três listras da bandeira que podem ou não ser pintadas, em cada item considerado e, para cada uma dessas decisões, ele precisa certificar-se do número de modos diferentes de fazê-las, considerando cada uma daquelas que tenham sido tomadas.

Para atingir tais objetivos é importante que durante a resolução da atividade, o estudante, diante de cada listra da bandeira que precisa ou não ser pintada, questione-se: de quantas maneiras distintas é possível pintar ou não essa listra, no caso de obrigatoriamente ter de pintar a listra com uma cor diferente daquela usada na listra anterior, ou no caso de poder deixá-la sem pintura, ou no caso de poder repetir a cor que foi usada na listra anterior? Também é importante que o aluno compreenda que a decisão de pintar uma bandeira pode ser tomada iniciando-se a pintura por qualquer uma das listras (desde que não haja restrições a respeito, colocadas no enunciado). Ainda nessa atividade voltamos a trabalhar com a construção da árvore de possibilidades com os possíveis resultados para a situação dada, com o objetivo de amadurecer/consolidar o conhecimento que vem sendo construído.

ATIVIDADE 7

Para a atividade 7 apresentamos uma bandeira retangular com um círculo em seu interior, cuja proposta é pintar as regiões interior/exterior ao círculo com cores diferentes dispondo de quatro cores de giz de cera.

Nosso objetivo para essa atividade é certificar-se de que as ações quanto ao número de possibilidades para pintar as duas regiões da bandeira dada podem ser feitas começando por qualquer uma das regiões, seja ela exterior ou interior ao círculo.

Para esta atividade foram utilizados os conceitos de Princípio Multiplicativo e Arranjos Simples.

ATIVIDADE 8

O Princípio Multiplicativo e a noção de Arranjos Simples foram utilizados nesta atividade. Para a atividade 8 retornamos com pinturas de bandeiras com duas listras, agora dispondo de um quantitativo maior de cores que aquele da atividade anterior de maneira que os alunos possam explicar como precedem para dar continuidade às pinturas considerando que a quantidade de bandeiras que foram disponibilizadas é menor que aquele necessário para contemplar todas as diferentes possibilidades possíveis. Com a aplicação dessa atividade tivemos a oportunidade de conhecer e identificar como o aluno desenvolve o raciocínio combinatório, em cada um dos momentos ao longo da resolução. Assim, o objetivo dessa atividade ainda é o de verificar a existência ou não de algum padrão sistemático de pintura que dê conta do raciocínio combinatório associado à situação proposta, contando com uma dificuldade adicional em relação a situações anteriores, qual seja: o aumento do quantitativo de opções de cores disponíveis para a pintura.

ATIVIDADE 9

Para a atividade 9 retornamos com trevos, agora de três folhas cada, de maneiras a continuar a acompanhar o raciocínio combinatório dos alunos e identificar se eles já apresentam algum método sistemático de pintura em cada trevo. Continuamos fazendo perguntas que restringem as opções de pintura das folhas do trevo de maneira a identificar se os alunos utilizam de alguma estratégia para respondê-las ou se recorrem às pinturas que fizeram. Assim, um dos objetivos desta situação-problema é verificar se o aluno sente a necessidade de estabelecer um padrão próprio sistematizado de pintura das folhas do trevo considerando o grande quantitativo de trevos a serem pintados, diferentemente de outras situações anteriores que contém um menor número de possibilidades de diferentes pinturas. O Princípio Multiplicativo foi a parte de Análise Combinatória utilizada nesta atividade.

ATIVIDADE 10

Para a atividade 10, dispomos uma bandeira retangular tendo em seu interior outro retângulo menor e um círculo no interior do retângulo menor, formando assim três regiões. Utilizando três bastões de giz de cera diferentes fizemos alguns questionamentos e exploramos a construção de árvore de possibilidades com restrições de escolha de cores em determinadas regiões da bandeira, fazendo com que essas árvores não sejam muito cansativas de serem feitas pelos alunos. Elas têm como propósito levar o aluno à leitura atenta dos enunciados das situações, a construção de árvores de possibilidades com o desenvolvimento do raciocínio combinatório e, por meio de operações multiplicativas para a contagem de possibilidades, preparar o aluno para a aplicação do Princípio Multiplicativo, nos anos seguintes do Ensino Fundamental. Temos como objetivo para essa atividade proposta a construção de diversas árvores de possibilidades para determinar o quantitativo de agrupamentos possíveis quando 3 (três) cores estão disponíveis para a pintura de bandeiras que têm três regiões distintas, em situações restritivas quanto à escolha das cores para serem usadas nessas regiões, de maneira que o aluno faça uso do raciocínio combinatório enquanto constrói as árvores e quando determina o total de possibilidades sem se valer da árvore. Nessa atividade é utilizada a ideia de Arranjos Simples e o Princípio Multiplicativo.

ATIVIDADE 11

Para a atividade 11 dispomos de três situações-problema. Para a primeira situação-problema, temos como propósito levar o aluno à leitura atenta dos enunciados das situações, a construção de árvores de possibilidades com o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Para a segunda situação-problema temos como objetivo discutir com o nosso estudante as possibilidades de obter diferentes números a partir de certo quantitativo de algarismos disponíveis e que o total de possibilidades está associado ao fato de que um mesmo algarismo assume diferentes valores em função da posição que ele ocupe na formação do número, ou seja, está ligado ao uso do princípio do valor posicional na obtenção de todos os diferentes números a partir de um dado quantitativo de algarismos disponíveis. Para a terceira situação-problema temos como objetivo sistematizar aspectos relacionados com a apropriação do raciocínio combinatório, combinando com a construção de diferentes tipos de árvores de possibilidades e a aplicação do Princípio Multiplicativo. A contagem final das possibilidades depende de duas ou mais etapas de escolha, configurando situações-problema associadas à problema de contagem, as quais exigem formas sistematizadas para obtê-la, em cada um das diferentes situações propostas.

Utilizamos, na resolução dessa atividade, os conceitos de Princípio Multiplicativo, Arranjos Simples e Combinação Simples.

ATIVIDADE 12

A atividade 12 é propicia a estabelecer condições para que os alunos, mais uma vez, possam exercitar os conhecimentos relacionados com a compreensão do sistema de numeração decimal e estabelecer as inúmeras possibilidades que podem surgir para aprofundar os conceitos relacionados ao princípio do valor posicional. Nesta atividade podemos discutir ainda com nossos alunos as possibilidades de obter diferentes números a partir de certo quantitativo de algarismos disponíveis e que, em prosseguimento, os alunos possam concluir que o total de possibilidades está associado ao fato de que um mesmo algarismo assume diferentes valores em função da posição que ele ocupe na formação do número, ou seja, está ligado ao uso do princípio do valor posicional na obtenção de todos os diferentes números a partir de um dado quantitativo de algarismos disponíveis.

Utilizamos nessa atividade os conceitos de Princípio Multiplicativo e Arranjos Simples.

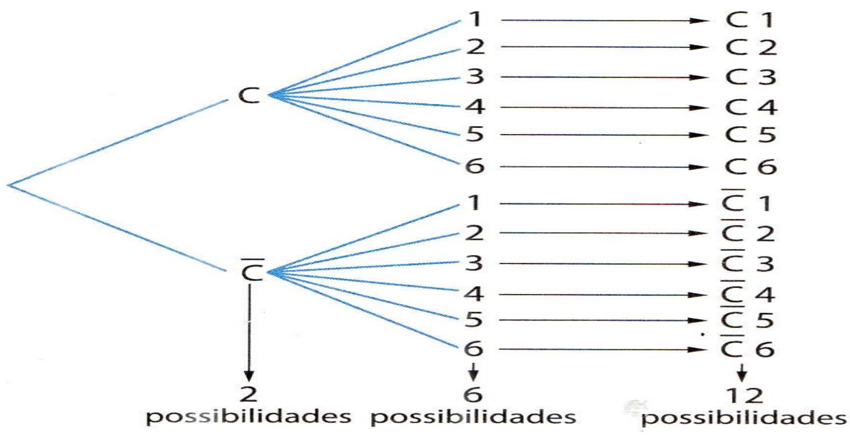
5. RELATÓRIO DAS ATIVIDADES REALIZADAS

Aos vinte e nove dias de fevereiro de 2016 aplicamos uma aula/atividade (ATIVIDADE 1) envolvendo o estudo de análise combinatória com base na resolução de problemas no sexto ano do ensino fundamental, na turma do 6° ano A. Essa turma consta de 35 estudantes matriculados.

A atividade foi desenvolvida em etapas.

Na primeira etapa foi realizada uma explanação de alguns conceitos de combinatória, bem como, os objetivos da atividade a ser realizada. Foi dito que os objetivos da atividade são: Apresentar diferentes representações gráficas que podem ser utilizadas para resolver problemas de contagem, de modo que o aluno conheça as características que permitem a construção de cada uma delas; Oferecer procedimentos que favoreça ao aluno identificar os diferentes agrupamentos de objetos envolvidos em cada situação-problema; criar condições para que o aluno enumere todos os agrupamentos de objetos envolvidos na situação-problema, após ter construído qualquer uma representação e, a partir daí, efetue a contagem direta desses agrupamentos para concretizar a resolução do problema de contagem proposto; e permitir que quando da construção de uma árvore de possibilidades, por exemplo, o aluno identifique em todas as suas "folhas", todos os diferentes agrupamentos de objetos e as características que os diferem entre si, certificando-se de que estabeleceu a enumeração de todas as possibilidades. Utilizamos o seguinte exemplo, para mostrar-lhes o que seria uma árvore de possibilidades, bem como, o que seria o princípio multiplicativo, e abri as discussões:

Ao lançarmos uma moeda e um dado, temos as seguintes possibilidades para o resultado (sendo C: cara e $\bar{C}$: coroa):



Observe que o evento tem duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 2 . 6 = 12 possibilidades.

A seguir apresentamos 16 bandeiras cada uma com duas listras. Foram entregues aos estudantes três bastões de giz de cera nas cores verde, azul e vermelho e pediu-se para que os alunos pintassem o maior número possível de bandeiras utilizando as três cores; após todos concluírem, foram feitos alguns questionamentos, tais como, o número de bandeiras pintadas, o número de bandeiras em que as duas listras tinham a mesma cor, o número de bandeiras em que as duas listras tinham cores diferentes, entre outras.

Após esses questionamentos, foi entregue um quarto giz de cera, na cor amarela, a todos os estudantes, e pediu-se para combinar a cor amarela com as outras cores antes citadas, e pintaram-se as bandeiras restantes.

Repetindo os questionamentos de quando haviam três cores, os estudantes concluíram que o total de bandeiras pintadas é em número de m . m, se dispomos de m cores para pintá-las, e de m . (m – 1) para pintar as bandeiras utilizando cores distintas. Perceberam também que as bandeiras nas cores (azul – vermelho) e (vermelho – azul), por exemplo, são bandeiras distintas, mostrando aí a diferença entre combinação e arranjo.

Na segunda etapa da atividade apresentamos uma tabela de dupla entrada. Mostramos com isso que não seria preciso desenhar todas as bandeiras e pintá-las para obter todas as possíveis combinações. Para obter as combinações na tabela de dupla entrada representamos a entrada 1 com as cores da primeira listra da bandeira e a entrada 2 com as cores da segunda listra da bandeira. Ao todo, percebemos que o total de entradas é igual ao número total de bandeiras pintadas.

Apresentamos ainda numa terceira etapa dois diagramas com as cores utilizadas na pintura das bandeiras. Elaboramos assim um Produto Cartesiano, obtendo a ideia de par ordenado e relação de conjuntos. Para isso, os estudantes relacionaram cada elemento do diagrama A (representando a cor da 1ª listra) com cada elemento do diagrama B (representando a cor da 2ª listra), formando assim um par ordenado, onde, o primeiro elemento do par ordenado é a cor da primeira listra, enquanto que o segundo elemento do par ordenado é a cor da segunda listra da bandeira.

Na quarta etapa montamos uma árvore de possibilidades, mostrando que as cores da 1ª linha funcionam como “galhos” e as cores da 2ª listra funcionam como “folhas”, por isso, utilizamos o nome árvore de possibilidades.

Percebemos que independente do método utilizado, a quantidade total de combinações obtidas é igual ao número total de bandeiras pintadas utilizando a mesma cor ou cores distintas. Mostramos aos estudantes que para resolver um problema conforme o modelo de atividade proposta, utilizamos o princípio multiplicativo da análise combinatória.

Como resultado da atividade podemos perceber a surpresa/espanto, quando o ensino de matemática foi abordado de forma inusitada (situação-problema) e pintura de bandeiras, dos estudantes ao serem colocados de frente com algo novo.

As formas como a situação-problema foi abordada permitiram que fosse possível identificar variadas estratégias na construção de esquemas, representações e de efetuar cálculos na busca das soluções à situação proposta. Essas estratégias nos permitiram identificar, acompanhar e intervir (por vezes) no processo de aprendizagem desses alunos, favorecendo a apropriação dos conceitos, fazendo associações entre os padrões de sistematização utilizados quando da pintura das listras das bandeiras com as etapas de ações e tomadas de decisões pertinentes ao uso do raciocínio combinatório.

Podemos perceber ainda um bom desenvolvimento de atitudes e rendimento frente às atividades propostas, bem como um responsável senso para trabalhar em grupo, tendo em vista a ajuda dada de uns aos outros.

É de se destacar a maneira como os alunos se empenharam na busca das soluções às situações-problema propostas, expondo suas ideias e dúvidas. Acreditamos firmemente de que as dificuldades que os alunos encontraram para resolver as situações propostas são bastante normais para o universo de crianças nessa faixa etária.

O oferecimento dessas situações-problema a crianças dessa faixa etária dá início a um novo olhar pelas crianças: de que há situações-problema em Matemática cuja solução pode ser obtida de diferentes maneiras, e isso é bastante significativo para o crescimento delas não somente em relação à Matemática, como também para que percebam a existência de diversas alternativas para a solução de outros problemas, que muitas vezes a vida nos apresenta.

Aos vinte e sete dias do mês de abril de 2016 aplicamos nas turmas indicadas acima a ATIVIDADE 2. Assim como a ATIVIDADE 1, esta também foi aplicada em algumas etapas, tais como:

Na primeira etapa propomos a pintura de bandeiras com três listras dispondo de dois bastões de giz de cera. Foram entregues bastões de giz de cera nas cores azul e vermelho e pedimos que os alunos apresentassem todas as possibilidades que identificassem as diferentes pinturas de bandeiras entre si, considerando que nenhuma listra poderia deixar de ser pintada em cada bandeira considerada. Após a pintura das diferentes bandeiras foram feitos alguns questionamentos, tais como, se todas as bandeiras desenhadas foram pintadas e quantas possibilidades diferentes de pinturas foram obtidas dispondo do material citado acima.

Na segunda etapa apresentamos ainda duas tabelas de dupla entrada, a primeira tabela para o preenchimento das duas primeiras listras e a segunda tabela relaciona o resultado da primeira tabela com as possibilidades de cores para a pintura da terceira listra. Questionou-se quantas bandeiras têm a primeira listra pintada de verde, quantas das bandeiras têm a segunda listra pintada de verde e quantas das bandeiras têm duas listras pintadas de vermelho. Foi perguntado ainda a interpretação quanto a indicação do terno (vermelho , verde , verde) apresentada na segunda Tabela de dupla entrada, entre outros.

Na etapa seguinte é proposto ainda o preenchimento de uma árvore de possibilidades de modo a conhecer as diferentes possibilidades para a pintura de uma bandeira com três listras horizontais, quando se dispõe de duas cores: vermelho e azul.

Concluímos questionando aos estudantes a totalidade de possibilidades de se pintar uma bandeira com três listras horizontais dispondo de duas cores distintas de giz de cera. Os questionamentos acima foram respondidos pelos estudantes após receberem as devidas orientações e sempre que surgiam dúvidas, estas eram discutidas em sala de aula.

Aos quatro dias do mês de maio de 2016 foi aplicada nas turmas indicadas acima a ATIVIDADE 3. Esta atividade foi aplicada em duas etapas.

Na primeira etapa foi aplicada uma lista com dezesseis bandeiras desenhadas contendo três listras horizontais cada. Foram entregues três bastões de giz de cera nas cores azul, verde e vermelho e pedimos que pintassem as listras das bandeiras apresentando todas as possibilidades que identificassem as diferentes pinturas de bandeiras entre si levando em conta que em cada bandeira que você considerar, duas listras que estejam juntas não poderão ser pintadas com as mesmas cores. Após todos terminarem a pintura das bandeiras foram feitos alguns questionamentos entre os quais: Todas as bandeiras que estão desenhadas acima foram pintadas por você? Quantas possibilidades diferentes de pinturas das bandeiras que têm três listras horizontais você obteve, quando se dispõe de três cores de giz de cera para a pintura e quando duas listras adjacentes (juntas), em cada bandeira, não podem ter a mesma cor? Quantas das bandeiras têm a primeira listra pintada de verde? Quantas das bandeiras têm a segunda listra pintada de verde? Quantas das bandeiras têm duas listras pintadas de vermelho? Quantas das bandeiras têm duas listras pintadas com a mesma cor?

Na segunda etapa foi feita a construção de uma árvore de possibilidades indicando cada agrupamento solução, ou seja, cada terno ordenado ou tripla ordenada. Após a construção da árvore de possibilidades foram feitos os seguintes questionamentos: De quantas maneiras diferentes você pode tomar a decisão de pintar a primeira listra da bandeira? Para cada uma das decisões em relação à pintura da primeira listra da bandeira, de quantas maneiras a decisão de pintar a segunda listra pode ser tomada? Para cada uma das decisões em relação à pintura da primeira e da segunda listra da bandeira, de quantas maneiras a decisão de pintar a terceira listra pode ser tomada?

Concluímos indicando o número total de possibilidades de pintar essa bandeira com três listras quando se dispõe de três distintas cores de giz de cera e respeitando a condição de que listras adjacentes da bandeira não podem ser coloridas com a mesma cor. Os questionamentos acima foram respondidos pelos estudantes após receberem as devidas orientações e sempre que surgiam dúvidas, estas eram discutidas em sala de aula.

Aos onze dias do mês de maio de 2016 foi aplicada a ATIVIDADE 4. Essa atividade também foi aplicada em duas etapas.

Na primeira etapa foi entregue uma lista com oito bandeiras, sendo que cada bandeira dispunha de duas listras horizontais. Foram ofertados ainda três bastões de giz de cera nas cores verde, amarelo e vermelho e pediu-se que os estudantes apresentassem todas as diferentes maneiras de colorir as listras horizontais de cada bandeira de tal maneira que todas as duas listras de cada bandeira sejam pintadas e que obtivessem o maior número de bandeiras pintadas de modo diferente. Após concluírem a atividade proposta foram feitos alguns questionamentos entre os quais: Todas as bandeiras foram pintadas? Em caso positivo, faltou desenhar mais alguma bandeira para computar todas as diferentes possibilidades de pintura de bandeiras com duas listras horizontais quando se dispõe de três cores de giz de cera? Ainda em caso positivo, quantas bandeiras a mais precisariam ser desenhadas para completar o total de possibilidades? Desenhe e faça a pintura das listras das bandeiras que faltam.

Na segunda etapa pedimos para construir uma árvore de possibilidades mostrando assim todas as possibilidades da pintura de uma bandeira com duas listras horizontais quando se dispõe de três cores. Após a construção da árvore de possibilidades questionamos aos estudantes: de quantas são as possibilidades de pintar bandeiras com duas listras horizontais dispondo para tal pintura de três cores de giz de cera? De quantas diferentes possibilidades de pintar bandeiras com duas listras existem quando há três cores de giz de cera disponíveis para a pintura, sabendo que nenhuma listra pode ficar sem ser pintada e as duas cores não podem ser pintadas com a mesma cor? De quantas maneiras diferentes “você” pode tomar a decisão de pintar a primeira listra da bandeira? Para cada uma das decisões em relação à pintura da primeira listra da bandeira, de quantas maneiras a decisão de pintar a segunda listra pode ser tomada? Os questionamentos acima foram respondidos pelos estudantes após receberem as devidas orientações e sempre que surgiam dúvidas, estas eram discutidas em sala de aula.

Aos dezoito dias do mês de Maio foi aplicada a ATIVIDADE 5.

Para esta atividade foi entregue aos estudantes uma ficha com dezesseis trevos de quatro folhas desenhados. Foram entregues também dois giz de cera nas cores verde e vermelho e pediu-se que apresentassem o maior número possível de diferentes pinturas dos trevos entre si, considerando que nenhuma folha poderia deixar de ser pintada em cada trevo considerado. Após a conclusão da atividade foram feitos alguns questionamentos, entre os quais: todos os trevos que estão desenhados foram pintados? Escreva uma quádrupla ordenada em que a segunda e a quarta folhas estão pintadas com a cor vermelho. Qual o total de trevos que têm a segunda e a quarta folhas pintadas de vermelho? Escreva as quádruplas que representam a totalidade dos trevos em que a segunda e a quarta folhas foram pintados de vermelho. Após debate em sala de aula e resolução das questões propostas na atividade, pedimos para construir uma árvore de possibilidades mostrando todas as possibilidades de colorir um trevo com quatro folhas, quando se dispõe de duas cores (verde e vermelho, por exemplo), e em seguida responder alguns questionamentos, tais como: o número total de diferentes possibilidades para pintar um trevo de quatro folhas dispondo de duas cores e não deixando nenhuma folha sem pintar; o número de diferentes trevos de quatro folhas pintados com duas cores, sabendo que as folhas opostas desse trevo de quatro folhas deve ter a mesma cor, escrevendo todas essas quádruplas; e indicar o número de trevos de quatro folhas que tiveram suas folhas opostas pintadas com cores diferentes dispondo de duas cores de giz de cera, escrevendo essas quádruplas. Os questionamentos acima foram respondidos pelos estudantes após receberem as devidas orientações e sempre que surgiam dúvidas, estas eram discutidas em sala de aula.

Aos oito dias do mês de Junho aplicamos a ATIVIDADE 6 nas turmas indicadas acima.

Para o desenvolvimento dessa atividade aplicamos uma ficha de exercício com alguns questionamentos, tendo como foco a análise da pintura de uma bandeira com três listras horizontais, dispondo para a sua pintura de três bastões de giz de cera nas cores verde, vermelho e azul. Na atividade, deixamos claro que não se deve desenhar todas as possíveis diferentes bandeiras obtidas e tampouco pintá-las. Os questionamentos realizados foram os seguintes: Quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da primeira listra da bandeira? Quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da segunda listra da bandeira? Quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da terceira listra da bandeira? Qual o total de possibilidades distintas para pintar uma bandeira com três listras dispondo de três cores disponíveis para a pintura? Dispondo de três cores de giz de cera e utilizando-as distintamente, ou seja, sem repeti-las, para a pintura de uma bandeira com três listras horizontais, responda: (i) Quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da primeira listra? (ii) Quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da segunda listra? (iii) Quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da terceira listra? (iv) Qual o total de possibilidades de se pintar uma bandeira com três listras horizontais dispondo de três cores, sendo que as cores devem ser distintas (diferentes)? Perguntamos ainda: Quantas são as diferentes bandeiras com o formato indicado que podem ser pintadas de maneiras diferentes, desde que listras adjacentes (juntas uma a outra) não sejam pintadas com a mesma cor, quando se dispõe de bastões de giz de cera disponíveis em três cores (verde, vermelho e azul), e não é permitido haver bandeiras com listras em branco? Pedimos também para que os estudantes escrevessem, usando a notação de ternos ordenados, todas as possibilidades de pintura das bandeiras que tinham a listra central deixada na cor azul, dispondo das três cores disponíveis, bem como, escrever todas as possibilidades de pintura das bandeiras que têm a listra central pintada na cor verde, dispondo para isso das três cores dadas, usando-as distintamente. Concluímos a atividade construindo uma árvore de possibilidade para as duas situações dadas que foram a pintura da bandeira com três listras horizontais dispondo de três cores para isso, usando-as de forma distintas ou não, de acordo com cada situação dada. Os questionamentos acima foram respondidos pelos estudantes após receberem as devidas orientações e sempre que surgiam dúvidas, estas eram discutidas em sala de aula.

Aos quinze dias do mês de Junho aplicamos junto às turmas indicadas a ATIVIDADE 7.

Para a atividade 7 apresentamos uma bandeira retangular com um círculo em seu interior, formando assim duas regiões: interior ou exterior ao círculo. Nossa proposta de atividade é: considerando bandeiras como a que está apresentada no desenho, levando em conta que as duas regiões do desenho deverão ser pintadas com cores diferentes dentre quatro cores de bastões de giz de cera que temos disponíveis nas cores verde, vermelho, azul ou preto, responda aos seguintes itens: (i) De quantas maneiras é possível pintar a região interior do círculo, conforme o desenho indicado quando quatro cores de giz de cera estão disponíveis? (ii) Uma vez que a região interior já tenha sido pintada por uma das quatro cores disponíveis, de quantos modos é possível pintar a região externa do círculo e interior ao retângulo, conforme o desenho indicado? (iii) De quantas maneiras diferentes é possível pintar bandeiras que têm o desenho e as condições indicadas? (iv) De quantas maneiras é possível pintar a região exterior do círculo e interior ao retângulo, conforme o desenho indicado, quando quatro cores de giz de cera estão disponíveis? (v) Uma vez que a região exterior do círculo e interior ao retângulo já tenha sido pintada por uma das quatro cores disponíveis, de quantos modos é possível pintar a região interior do círculo, conforme o desenho indicado? (vi) Você vê alguma diferença em começar pintando a região interior do círculo e depois a região externa do círculo e interna do retângulo, ao invés de começar pintando a região externa ao círculo e interior ao retângulo e depois a região interna do círculo? Após esses questionamentos construímos uma árvore de possibilidades apresentando todas as diferentes maneiras de pintar uma bandeira com o desenho indicado quando se dispõe de quatro diferentes cores para realizar as pinturas, considerando que as duas regiões do desenho devem ser pintadas com cores diferentes. Os questionamentos acima foram respondidos pelos estudantes após receberem as devidas orientações e sempre que surgiam dúvidas, estas eram discutidas em sala de aula.

Aos vinte e dois dias do mês de Junho aplicamos a ATIVIDADE 8 junto às turmas envolvidas em nosso projeto.

Para esta atividade apresentamos uma ficha com nove bandeiras, onde cada bandeira era composta de duas listras horizontais cada. Foram disponibilizados quatro bastões de giz de cera nas cores verde, amarelo, azul e vermelho, e pedimos que fosse feita a pintura dessa bandeiras utilizando as quatro cores de forma distintas ou não. Após os estudantes concluírem a pintura foram feitos alguns questionamentos, tais quais: (i) de quantas maneiras diferentes você pode pintar as listras de uma bandeira que tem duas listras horizontais, como aquelas que foram desenhadas acima, dispondo de quatro bastões de giz de cera nas cores verde, amarelo, azul e vermelho? (ii) considere as bandeiras que foram desenhadas acima e apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si; (iii) quantas bandeiras ainda precisam ser desenhadas e pintadas para obter a quantidade que podem ser pintadas de maneiras diferentes uma bandeira com duas listras horizontais, dispondo para isso de quatro cores de giz de cera? (iv) quantas possibilidades diferentes de pinturas de bandeira com duas listras horizontais você obtém quando dispõe de quatro cores de giz de cera para a pintura e quando considera que as duas listras não podem ter a mesma cor? (v) construção de uma árvore de possibilidades mostrando todas as possibilidades de se pintar uma bandeira com duas listras horizontais, desde que as duas listras não sejam pintadas com a mesma cor, quando se dispõe das cores amarelo, azul, verde e vermelho. Os questionamentos acima foram respondidos pelos estudantes após receberem as devidas orientações e sempre que surgiam dúvidas, estas eram discutidas em sala de aula.

Aos vinte e nove dias do mês de Junho, desenvolvemos a ATIVIDADE 9 junto às turmas participantes desse projeto.

Para esta atividade apresentamos como parte inicial vinte e sete trevos de três folhas que deveriam ser pintados, apresentando o maior número possível de diferentes trevos pintados, tendo disponíveis três bastões de giz de cera nas cores verde, amarelo e vermelho. Após a pintura dos trevos foram feitos e respondidos alguns questionamentos, entre os quais: (i) todos os trevos foram pintados? (ii) qual o número de trevos diferentes podemos pintar, tendo disponíveis três bastões de giz de cera nas cores verde, amarelo e vermelho? (iii) qual o número de trevos diferentes podemos pintar, tendo disponíveis três bastões de giz de cera nas cores verde, amarelo e verde, não repetindo a cor em um mesmo trevo? (iv) quantas diferentes possibilidades de pintar trevos com três folhas existem quando há três diferentes cores de giz de cera disponíveis para a pintura, nenhuma folha pode ficar sem ser pintada e as duas folhas opostas não podem ser pintadas com a mesma cor? (v) construa uma árvore de possibilidades para mostrar todas as possibilidades de pintura de um trevo com três folhas quando se dispõe de três cores para a pintura e quando as duas folhas opostas não podem ser pintadas coma mesma cor. Os questionamentos acima foram respondidos pelos estudantes após receberem as devidas orientações e sempre que surgiam dúvidas, estas eram discutidas em sala de aula.

Aos seis dias do mês de Julho foi aplicada a ATIVIDADE 10 junto às turmas que fazem parte da construção desse projeto.

Nesta atividade foi apresentada uma bandeira retangular contendo em seu interior um retângulo menor, e no interior deste retângulo menor um círculo dividindo a bandeira em três regiões. Essas regiões devem ser pintadas de cores diferentes. Perguntamos na atividade proposta: utilizando-se 3 (três) cores diferentes de bastões de giz de cera, escolhidas dentre as cores verde, vermelho e azul, quantas são as diferentes maneiras que se pode pintar as três regiões presentes na bandeira indicada; pedimos também para que fosse construída uma árvore de possibilidades que mostre todas as diferentes maneiras segundo as bandeiras com o formato indicado (três regiões distintas) podem ser pintadas, obedecendo às condições de pintura que foram impostas. Os questionamentos acima foram respondidos pelos estudantes após receberem as devidas orientações e sempre que surgiam dúvidas, estas eram discutidas em sala de aula.

Aos sete dias do mês de Julho aplicamos a ATIVIDADE 11 junto às turmas participantes do nosso projeto.

A atividade 11 foi composta de três situações-problema. Na primeira situação-problema dispomos uma tabela com preços de alguns brinquedos e decide-se que serão gastos no máximo, R$ 5,00 com presentes para cada criança. Foram realizados alguns questionamentos, tais quais: (i) quantos presentes diferentes (contendo dois brinquedos cada um) ela poderá formar para gastar os R$ 5,00 de que dispõe para cada aluno? (ii) representar por meio de árvore de possibilidades todas as diferentes maneiras de “montar” presentes contendo dois brinquedos diferentes em cada um deles, gastando R$ 5,00 em cada um deles; (iii) representar por meio de uma árvore de possibilidades todas as diferentes maneiras que a professora dispõe para “montar” presentes contendo três brinquedos diferentes em cada um deles, gastando R$ 5,00 em cada um deles; (iv) representar por meio de uma árvore de possibilidades todas as diferentes maneiras de “montar” presentes contendo um, dois ou até três brinquedos diferentes em cada um deles, gastando valores até o máximo de R$ 5,00 em cada um dos presentes possíveis. Para a situação-problema 2 dispomos de 5 algarismos e pedimos para formar números de dois algarismos obedecendo as seguintes condições: (i) construa uma tabela de dupla entrada mostrando todos os números com dois algarismos que podem formar, dispondo desses algarismos: 1, 2, 3, 4 e 7; (ii) quantos números com dois algarismos podem ser formados atendendo às condições do item (i)? (iii) construa uma árvore de possibilidades mostrando todos os números pares com dois algarismos que podemos formar quando se dispõe dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 7; (iv) quantos números com dois algarismos podem ser formados atendendo às condições do item (iii)? (v) construa uma árvore de possibilidades mostrando todos os números ímpares com dois algarismos diferentes que podemos formar, quando se dispõe dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 7; (vi) quantos números com dois algarismos podem ser formados atendendo às condições do item (v)? (vii) quantos números com dois algarismos, maiores que 40, podem ser formados quando se dispõe dos algarismos 1, 3, 4, 6 e 9?. Para a situação-problema 3 propõe-se a pintura de um avião (dividido em quatro partes, cabine, asas e cauda) dispondo de quatro cores. Questiona-se: (i) quantos aviõezinhos diferentes, combinando suas cores como quiser podem ser pintados, dispondo de tintas nas cores azul, vermelho, amarelo e verde? (ii) desenhar uma árvore de possibilidades que contenha todos os diferentes aviõezinhos conforme as condições indicadas em (i); (iii) quantos aviõezinhos diferentes podem ser pintados, combinando suas cores como quiser, mas tendo as duas asas do aviãozinho pintadas com a mesma cor, dispondo de tintas nas cores azul, vermelho, amarelo e verde? (iv) desenhe uma árvore de possibilidades que contenha todos os diferentes aviõezinhos conforme as condições estabelecidas no item (iii). Os questionamentos acima foram respondidos pelos estudantes após receberem as devidas orientações e sempre que surgiam dúvidas, estas eram discutidas em sala de aula.

Aos oito dias do mês de Julho aplicamos junto às turmas participantes desse projeto a ATIVIDADE 12.

A atividade 12 foi composta de uma questão apenas, na qual foi apresentada ao estudante uma cartela contendo os algarismos de 0 a 9 em quatro colunas. Dividimos a turma em grupos de três alunos, cada aluno recebendo uma cartela completa, e pedimos para que os estudantes recortassem todos os números obtendo assim quatro repetidos algarismos, de 0 a 9. Pedimos ainda que os alunos separassem somente os algarismos 6, 7 e 9. Cada aluno do grupo fará uma atividade. O primeiro aluno deverá encontrar todos os números com três algarismos, sem repetição, que podem ser formados com esses três algarismos e formar todos os números maiores que 600 e menores que 700, ordenando-os em ordem crescente. O segundo aluno do grupo deverá encontrar todos os números com três algarismos que podem ser formados com esses três algarismos, sem repetição de algarismos, e formar todos os números maiores que 700 e menores que 900, ordenando-os em ordem crescente. Enquanto que o terceiro aluno do grupo deverá encontrar todos os números com três algarismos que podem ser formados com esses três algarismos, sem repetição de algarismos, e formar números maiores que 900 e menores que 980, ordenando-os em ordem crescente. Após essa etapa da atividade efetuamos alguns questionamentos, tais quais: (i) O primeiro aluno do grupo encontrou quantos números? (ii) O segundo aluno do grupo encontrou quantos números? (iii) O terceiro aluno do grupo encontrou quantos números? (iv) Qual o total de números com três algarismos, segundo as condições dadas nos itens (i), (ii) e (iii)? (v) Dados três quaisquer algarismos, diferentes de zero, quantos números é possível formar utilizando os três algarismos, sem repartição? (vi) Se um dos três algarismos fosse o algarismo zero, a quantidade de números com esses três diferentes algarismos será menor que aquela que foi obtida no item (v), pois números começados pelo algarismo zero não são considerados como números que têm três algarismos. Nesta situação, quantos diferentes números será possível formar, sem repetição, utilizando os algarismos 0, 1 e 5, por exemplo? (vii) Dados os algarismos 1, 3, 5, 6 e 8, quantos números com três algarismos, sem repetição, é possível formar? (viii) Dados os algarismos 1, 3, 5, 6 e 8, quantos números com três algarismos, sem repetição, são maiores do que 500? (ix) Faça uma árvore de possibilidades que mostre todos os números com três algarismos, sem repetição, que são maiores do que 500 e possíveis de serem formados com o uso dos algarismos 1, 3, 5, 6 e 8. (x) Dados os algarismos 1, 3, 5, 6 e 8, quantos números com três algarismos, sem repetição, são menores do que 653? (xi) Faça uma árvore de possibilidades que mostre todos os números com três algarismos, sem repetição, que são menores do que 653 e possíveis de serem formados com o uso dos algarismos 1, 3, 5, 6 e 8. Os questionamentos acima foram respondidos pelos estudantes após receberem as devidas orientações e sempre que surgiam dúvidas, estas eram discutidas em sala de aula.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Acreditamos que a resolução de problemas de Análise Combinatória é fonte de motivação à aprendizagem, pois, se apresenta como um dos pilares de uma aprendizagem significativa da matemática. Assim sendo, julgamos que utilizar a resolução de problemas como modalidade didática para ensinar Análise Combinatória, é um dos caminhos que apresenta significado e contextualização dos conceitos abordados no campo desta área da Matemática. Além disso, o uso predominante do Princípio Fundamental da Contagem nestas resoluções torna o uso das fórmulas de Arranjo, Combinação e Permutação uma ferramenta que favorece a mobilização e aquisição de conhecimentos significativos neste domínio. Com efeito, o aluno pode participar da construção das fórmulas e perceber que o uso das mesmas não é um conhecimento mecânico, e sim, requer do sujeito desenvolver competências necessárias para alcançar os resultados esperados a partir dos cálculos, passando pela interpretação dos problemas considerando, se necessário, diversas representações (por tabelas, enumeração, árvore de possibilidades, etc.) favorecendo, por conseguinte, a construção do raciocínio combinatório.

A aplicação de uma sequência de atividades tinha como objetivo investigar se os alunos percebem semelhanças entre as situações-problema dadas e associam os mesmos procedimentos. Mesmo que algum aluno não tenha estabelecido uma sistemática para resolver as situações propostas, esperamos que a sequência de atividades o convença a estabelecer algum procedimento apropriado, principalmente quando esteja diante da necessidade de resolver situações-problema envolvendo o estudo de análise combinatória. As atividades ainda tinham como objetivo fazer com que os alunos conseguissem distinguir conceitos simples de tópicos da Análise Combinatória, tais quais, princípio multiplicativo, permutação, arranjos e combinação simples.

Consideramos importante a presença da Análise Combinatória no ensino de Matemática. Contudo, para que o seu ensino dissemine o envolvimento dos alunos e a aprendizagem, é necessário que o professor faça uma escolha da metodologia apropriada, tal como da resolução de problemas engajando os alunos em situações - problemas do seu cotidiano, influenciando desta forma no desenvolvimento do seu modo de pensar matemático. Esperamos assim com este trabalho, contribuir com a prática efetiva do professor que ensina Análise Combinatória.

Assim como também é de suma importância a apresentação dos conteúdos fazendo uma abordagem histórica. Portanto utilizando-se de recursos tais como à História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode-se oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. 3. ed. Brasília: Secretaria da Educação Fundamental. 2001.

CARRAHER, David. Educação Tradicional e Educação Moderna. Em: CARRAHER, D.; NUNES, T. (Org.). **Aprender pensando:** contribuições da psicologia cognitiva para a educação. Petrópolis: Vozes, 1986.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**, 5. 7ª ed. São Paulo: Atual, 1993.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

STURM, Wilton. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa.** Campinas, 1999, 132 p. Dissertação (Mestrado em educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, 1999.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. **Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014.

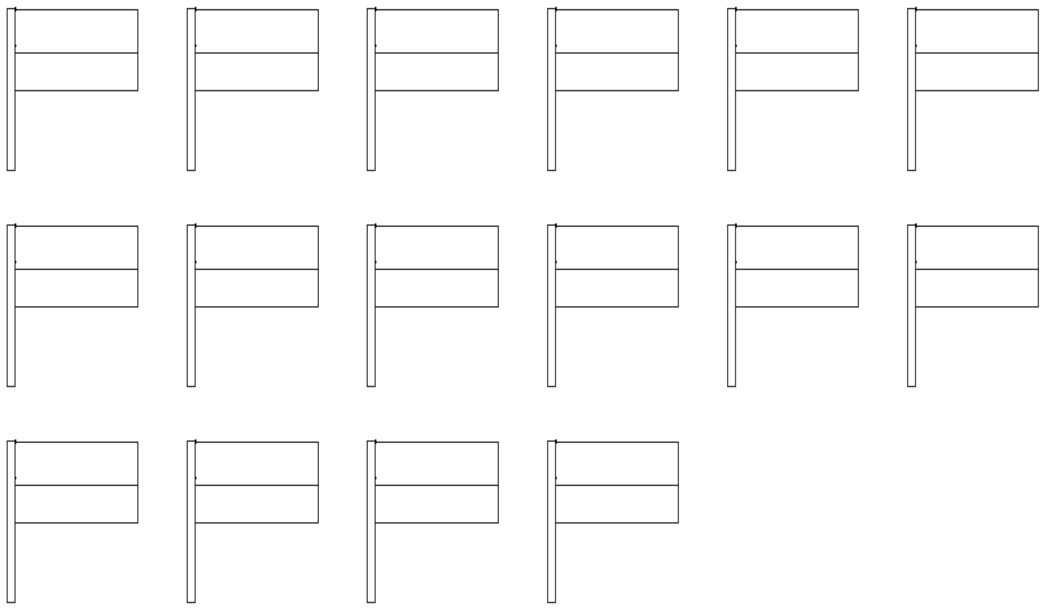
ANEXOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

ATIVIDADE 1[*]

São dadas 16 bandeiras com mastros, contendo duas listras horizontais cada uma. Dispondo de três bastões de giz de cera nas cores azul, vermelho e verde, faça o que se pede:

a) Apresente todas as diferentes maneiras de se colorir as listras horizontais de cada bandeira, de modo que se obtenha o maior número de bandeiras pintadas diferentemente.



Responda o que se pede a seguir:

b) Todas as bandeiras que estão desenhadas acima foram pintadas? Quantas dessas bandeiras não foram pintadas?

c) Quantas bandeiras foram pintadas utilizando cores diferentes?

d) Acrescentando um quarto bastão de giz de cera numa cor diferente das apresentadas no enunciado, apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si, considerando que

[*] Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

nenhuma listra poderá deixar de ser pintada em cada bandeira considerada. Pinte as diferentes bandeiras.

e) Quantas possibilidades diferentes de pinturas das bandeiras você obteve quando dispõe de quatro cores de giz de cera disponíveis para a pintura, se nenhuma listra pode ficar sem ser pintada?

f) Quantas possibilidades diferentes de pinturas das bandeiras você obteve quando dispõe de quatro cores de giz de cera disponíveis para a pintura, se nenhuma listra pode ficar sem ser pintada e as listras pintadas devem ter cores distintas (diferentes)?

g) Se você não tivesse as bandeiras desenhadas e também não quisesse ter o trabalho de desenhá-las, escreva como você procederia para mostrar para um amigo quantas e quais são as bandeiras com duas listras que podem ser pintadas de maneiras diferentes entre si, quando você dispõe de giz de cera nas quatro cores indicadas para fazer as pinturas?

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

ATIVIDADE 1ª

PROFMAT

TABELA DE DUPLA ENTRADA

Cor da 2ª listra / Cor da 1ª listra	Verde	Vermelho	Azul	Amarelo
Verde	( )	( )	( )	( )
Vermelho	( )	( )	( )	( )
Azul	( )	( )	( )	( )
Amarelo	( )	( )	( )	( )

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

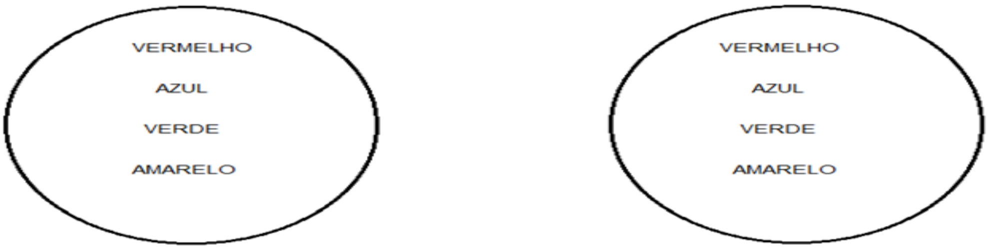
ATIVIDADE 1ª

PROFMAT

PRODUTO CARTESIANO

COR DA 1ª LISTRA

COR DA 2ª LISTRA



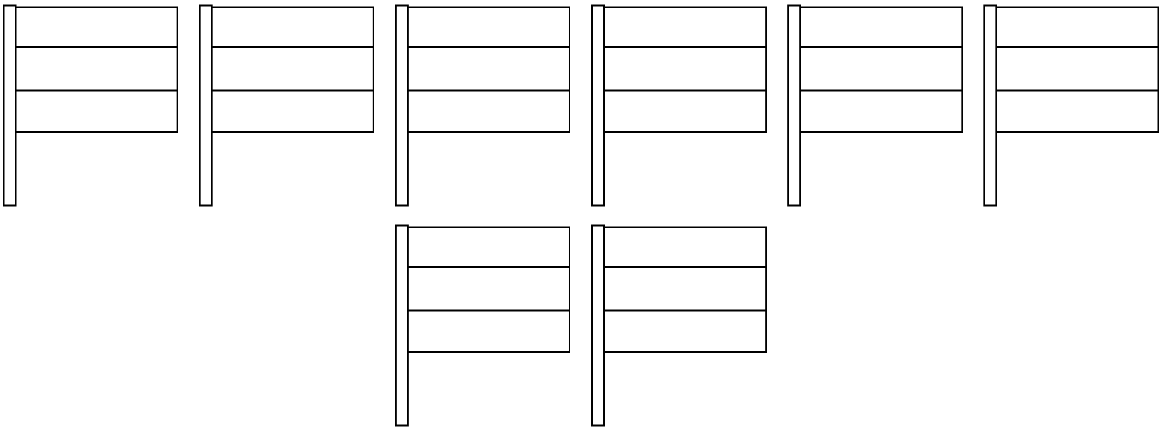
A X B = {(.), (.), (.), (.), (.),
(.), (.), (.), (.), (.),
(.), (.), (.), (.), (.),
(.)}

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

ATIVIDADE 2*

São dadas 8 bandeiras com mastros, contendo três listras horizontais cada uma. Dispondo de dois bastões de giz de cera nas cores azul e vermelho, faça o que se pede:

a) Apresente todas as diferentes maneiras de se colorir as listras horizontais de cada bandeira, de modo que se obtenha o maior número de bandeiras pintadas diferentemente entre si, considerando que nenhuma listra poderá deixar de ser pintada em cada bandeira considerada.



b) Todas as bandeiras que estão desenhadas acima foram pintadas por você? ________________

c) Quantas possibilidades diferentes de pinturas das bandeiras que têm três listras horizontais você obteve, quando dispõe de duas cores de giz de cera para a pintura e nenhuma listra pode ficar sem ser pintada? ________

Tabela de Dupla Entrada

Abaixo apresentamos uma Tabela de Dupla Entrada. Você deve completar a tabela colocando nos espaços em branco a combinação das cores em que as duas primeiras listras das bandeiras poderão ser pintadas de maneiras diferentes.

cor da 2ª listra / cor da 1ª listra	cor azul	cor vermelho
cor azul	(__________ , __________)	(__________ , __________)
cor vermelho	(__________ , __________)	(__________ , __________)

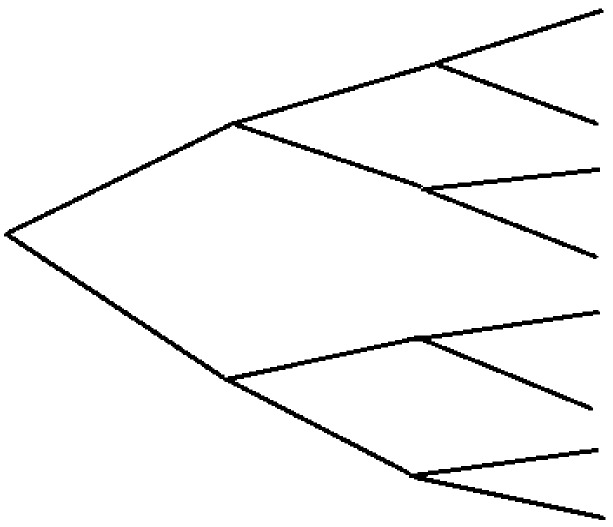
* Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Precisamos de uma nova Tabela de Dupla Entrada para indicar as cores que foram utilizadas para pintar as três listras de cada uma das bandeiras. Você completar a tabela abaixo colocando nos espaços em branco a combinação das cores que já foram feitas por você para as duas primeiras listras das bandeiras, as quais estão indicadas em uma das entradas da tabela de dupla entrada. A outra cor refere-se àquela que se destina a pintar a terceira listra da bandeira de modo que se obtenha todas as possibilidades diferentes que se têm de pintar uma bandeira com três listras horizontais, quando se dispõe de duas cores: azul e vermelho.

Cor da 3ª listra / Cores das 1ª e 2ª listras da bandeira	cor Azul	cor Vermelho
(_____,_____)	(_____,_____,_____)	(_____,_____,_____)
(_____,_____)	(_____,_____,_____)	(_____,_____,_____)
(_____,_____)	(_____,_____,_____)	(_____,_____,_____)
(_____,_____)	(_____,_____,_____)	(_____,_____,_____)

Preencha a árvore de possibilidades desenhada abaixo de modo a conhecer as diferentes possibilidades que se tem de pintar uma bandeira com três listras horizontais, quando se dispõe de duas cores: azul e vermelho.

Cor da 1ª listra	Cor da 2ª listra	Cor da 3ª listra	Cores das três listras de cada bandeira



(_____,_____,_____)

(_____,_____,_____)

(_____,_____,_____)

(_____,_____,_____)

(_____,_____,_____)

(_____,_____,_____)

(_____,_____,_____)

(_____,_____,_____)

Concluindo: se uma bandeira tem três listras e queremos determinar todas as possibilidades de pintar essa bandeira quando se dispõe de duas distintas cores de giz de cera, o total de diferentes possibilidades para se pintar essa bandeira é de ____________ maneiras.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

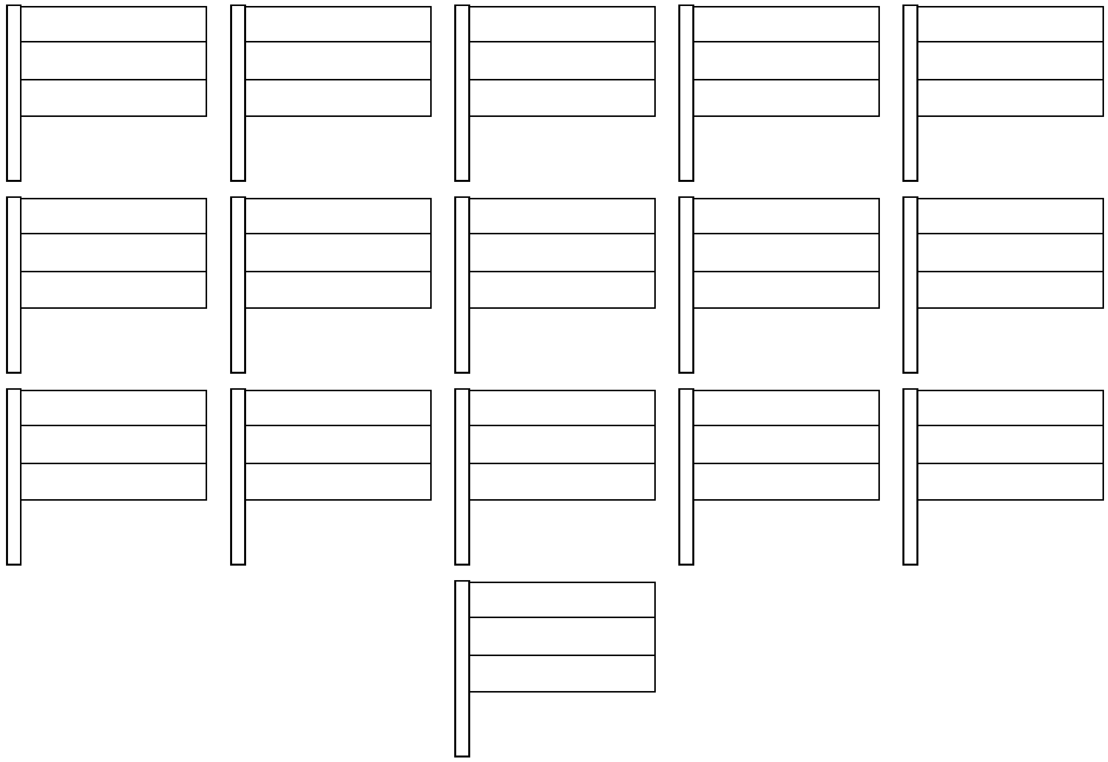
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

PROFMAT

ATIVIDADE 3*

São dadas 16 bandeiras com mastros, contendo três listras horizontais cada uma. Dispondo de três bastões de giz de cera nas cores azul, verde e vermelho, faça o que se pede:

a) Apresente todas as diferentes maneiras de se colorir as listras horizontais de cada bandeira, de modo que se obtenha o maior número de bandeiras pintadas diferentemente entre si, levando em conta que em cada bandeira que você considerar, duas listras que estejam juntas não poderão ser pintadas com as mesmas cores.



b) Todas as bandeiras que estão desenhadas acima foram pintadas por você? _________________

c) Se sua resposta foi não, e sobraram bandeiras sem serem pintadas, quantas das bandeiras não foram pintadas por você? ________________

d) Quantas possibilidades diferentes de pinturas das bandeiras que têm três listras horizontais você obteve, quando se dispõe de três cores de giz de cera para a pintura e quando duas listras adjacentes (juntas), em cada bandeira, não podem ter a mesma cor? ___________

* Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

e) Quantas das bandeiras têm a 1ª listra pintada de verde? ________ Quantas das bandeiras têm a 2ª listra pintada de verde? _________ Quantas das bandeiras têm duas listras pintadas de vermelho? _________ Quantas das bandeiras têm duas listras pintadas com a mesma cor? _________

Construa uma árvore de possibilidades como a indicada a seguir, em que apenas indicamos as possibilidades que você deve considerar nesta construção, de maneira a facilitar o seu trabalho.

Cor da 1ª listra	Cor da 2ª listra	Cor da 3ª listra	Cores das três listras de cada bandeira
			(________,________,_________)

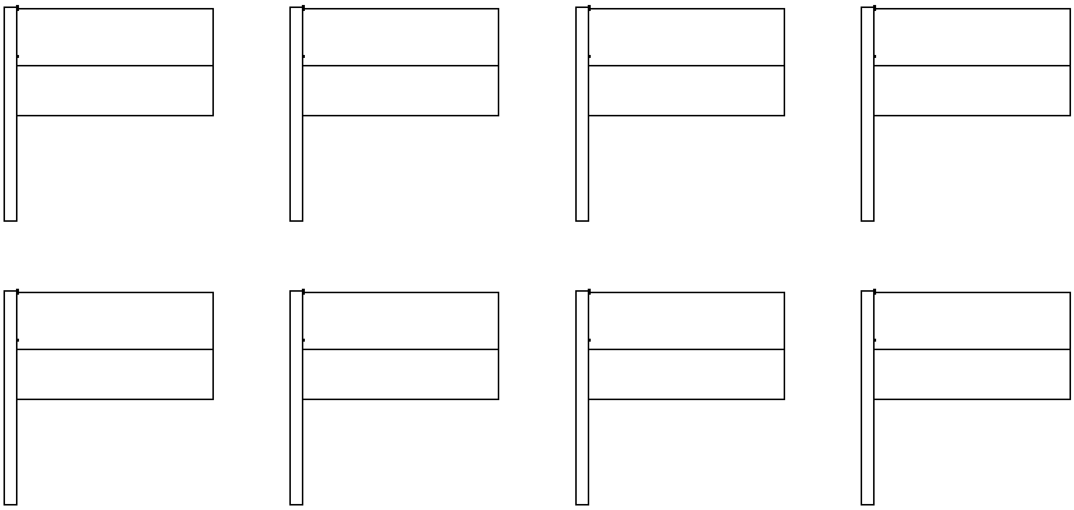
De quantas maneiras diferentes você pode tomar a decisão de pintar a primeira listra da bandeira? __________ Para cada uma das decisões em relação à pintura da primeira listra da bandeira, de quantas maneiras a decisão de pintar a segunda listra pode ser tomada? _________ Para cada uma das decisões em relação à pintura da primeira e da segunda listra da bandeira, de quantas maneiras a decisão de pintar a terceira listra pode ser tomada? _______

Portanto, se uma bandeira tem três listras e queremos determinar todas as possibilidades de pintar essa bandeira quando se dispõe de três distintas cores de giz de cera e respeitando a condição de que listras adjacentes da bandeira não podem ser coloridas com a mesma cor, o total de diferentes maneiras de se pintar essa bandeira é: _______

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

ATIVIDADE 4*

Abaixo foram desenhadas 8 (oito) bandeiras com mastros contendo duas listras horizontais cada uma.



a) Se você dispõe de três bastões de giz de cera nas cores verde, amarelo e vermelho apresente todas as diferentes maneiras de colorir as listras horizontais de cada bandeira de tal maneira que todas as duas listras de cada bandeira sejam pintadas e se obtenha o maior número de bandeiras pintadas de modos diferentes.

b) Todas as bandeiras que estão desenhadas acima foram pintadas por você? ________

c) Se a sua resposta foi não, quantas bandeiras deixaram de ser pintadas? _________

d) Se a sua resposta foi sim, faltou desenhar mais alguma bandeira para computar todas as diferentes possibilidades de pintura de bandeiras com duas listras, quando se dispõe de três cores de giz de cera? ______ Quantas bandeiras a mais precisam ser desenhadas para complementar o total de possibilidades? ________ Desenhe abaixo as bandeiras que faltam e faça a pintura das listras.

* Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Construa uma árvores de possibilidades como a iniciada a seguir, na qual apenas indicamos as possibilidades que você deve considerar nesta construção, de maneira a facilitar o seu trabalho. Com a árvore de possibilidades poderemos conhecer todas as diferentes maneiras que se tem de pintar uma bandeira com duas listras horizontais quando se dispõe de três cores: vermelho, amarelo e verde e em seguida contar diretamente todas essas possibilidades.

Cor da 1ª listra	Cor da 2ª listra	Cores das listras de cada bandeira

(___________ , ____________)

e) Quantas diferentes possibilidades de pintar bandeiras com duas listras existem quando há três cores de giz de cera disponíveis para a pintura, nenhuma listra pode ficar sem ser pintada e as duas listras não podem ser pintadas com a mesma cor? _____________
f) De quantas maneiras diferentes você pode tomar a decisão de pintar a primeira listra da bandeira? _______ Para cada uma das decisões em relação à pintura da primeira listra da bandeira, de quantas maneiras a decisão de pintar a segunda listra pode ser tomada? ______

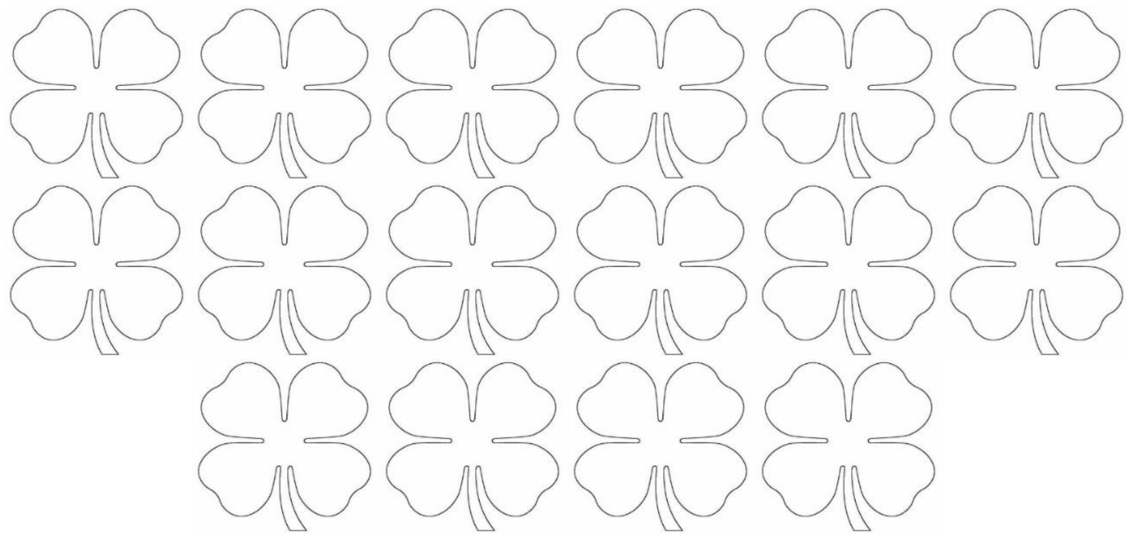
Portanto, se uma bandeira tem duas listras e queremos determinar todas as possibilidades de pintar essa bandeira quando se dispõe de três distintas cores de giz de cera e respeitando a condição de que listras adjacentes da bandeira não podem ser coloridas coma mesma cor, o total de diferentes maneiras de se pintar essa bandeira é: __________

Indique o total de possibilidades na forma de uma soma, levando em conta a disposição das “folhas” da árvore de possibilidades: ___________________

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

ATIVIDADE 5*

Abaixo foram desenhadas 16 (dezesseis) “trevos de quatro folhas cada”.



a) Se você dispõe de bastões de giz de cera nas cores verde e vermelho, considere os trevos de quatro folhas desenhados acima e apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas dos trevos entre si, considerando que nenhuma folha poderá deixar de ser pintada em cada trevo considerado. Pinte todos os diferentes trevos entre si.

b) Todos os trevos que estão desenhadas acima foram pintadas por você? _________

c) Cada pintura feita em um trevo pode ser representada por uma “quádrupla ordenada”, uma vez que os trevos têm quatro folhas cada um.
Escreva uma quádrupla em que a segunda e a quarta folhas estão pintadas com a cor vermelho: (____________ , _____________, ____________ , _____________). Qual o total de trevos que têm a segunda e a quarta folhas pintadas de vermelho? ________ . Escreva as quádruplas que representam a totalidade dos trevos pintados dessa maneira: ____
____
____
_______________________________________.

* Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

d) Uma maneira que se tem de apresentar todas as possibilidades de colorir um trevo com quatro folhas, quando se dispõe de duas cores, por exemplo, verde e vermelho, é por meio de uma árvore de possibilidades. Construa a árvore de possibilidades abaixo, iniciada para facilitar que você a complete, de modo a conhecer as diferentes possibilidades que se tem de pintar um trevo com quatro folhas quando se dispõe de duas cores: vermelho e verde, para a pintura.

Cor da 1ª folha	Cor da 2ª folha	Cor da 3ª folha	Cor da 4ª folha	Cores das quatro folhas de cada trevo

(_____ , ____ , _____ , _______)

Se um trevo tem quatro folhas e queremos determinar todas as possibilidades de pintar esse trevo quando se tem duas distintas cores de giz de cera, o total de diferentes possibilidades para se pintar esse trevo é: _______

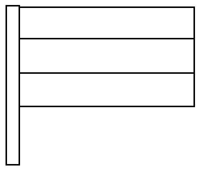
Considerando que as "folhas opostas de um trevo de quatro folhas" devem ser pintadas com a mesma cor, quantos diferentes trevos de quatro folhas devem ser pintados quando se dispõe de giz de cera de duas cores: verde e vermelho? ________ . Escreva todas as quádruplas que representam a totalidade dos trevos pintados dessa maneira: ________________________________
____
____

Considerando que as "folhas opostas de um trevo de quatro folhas" devem ser pintadas com cores diferentes, quantos diferentes trevos de quatro folhas devem ser pintados, quando se dispõe de duas cores de giz de cera: verde e vermelho? ________ . Escreva todas as quádruplas que representam a totalidade dos trevos pintados dessa maneira: ________________________________
____
____

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

ATIVIDADE 6*

O desenho abaixo representa o formato de uma bandeira que possui 3 (três) listras horizontais. Para pintar bandeiras com esse formato têm-se bastões de giz de cera disponíveis nas cores verde, vermelho e azul. Você **não deve desenhar** todas as possíveis diferentes bandeiras e, a seguir, pintá-las.



a) Quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da primeira listra da bandeira? ________ . Quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da segunda listra da bandeira? _________ . Quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da terceira listra da bandeira? ________ . Qual o total de possibilidades distintas para pintar uma bandeira com três listras dispondo de três cores disponíveis para a pintura? _______ .

b) Para efetuar a pintura de uma bandeira de três listras são disponíveis giz de cera em três cores, azul, verde e vermelho. Utilizando cores distintas (diferentes) em cada bandeira, quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da primeira listra? _____ . Quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da segunda listra? ______ . Quantas são as possibilidades de escolhas para a pintura da terceira listra? ______ . Qual o total de possibilidades de se pintar uma bandeira de três listras dispondo de três cores, sendo que as cores devem ser distintas (diferentes)? _______ .

c) Quantas são as diferentes bandeiras com o formato acima que podem ser pintadas de maneiras diferentes, desde que listras (juntas uma a outra) não sejam pintadas com a mesma cor, quando se dispõe de bastões de giz de cera disponíveis nas cores verde, vermelho e azul, e não é permitido haver bandeiras com listras em branco? ________________ .

d) Escreva todas as possibilidades de pintura das bandeiras que têm a listra central deixada na cor azul, nas condições impostas no item (a), usando a notação de ternos ordenados, como já visto em outras situações anteriores: ....

* Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

....
....
....
....

e) Escreva todas as possibilidades de pintura das bandeiras que têm a listra central pintada na cor verde, nas condições impostas no item (b), usando a notação de ternos ordenados, como já visto em outras situações anteriores: ....
....
....

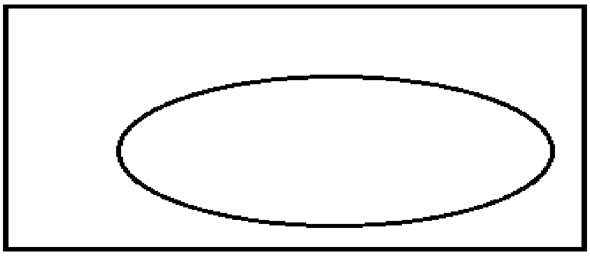
f) Construa uma árvore de possibilidades mostrando todas as possibilidades obtidas no item (a):

g) Construa uma árvore de possibilidades mostrando todas as possibilidades obtidas no item (b):

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

ATIVIDADE 7[*]

Considere bandeiras como a que está apresentada no desenho a seguir, levando em conta que as duas regiões do desenho deverão ser pintadas com cores diferentes dentre 4 (quatro) cores de bastões de giz de cera que temos disponíveis nas cores verde, vermelho, azul ou preto.



a) De quantas maneiras é possível pintar a região interior do círculo, conforme o desenho acima, quando quatro cores de giz de cera estão disponíveis? ....

b) Uma vez que a região interior já tenha sido pintada por uma das quatro cores disponíveis, de quantos modos é possível pintar a região externa do círculo e interior ao retângulo, conforme o desenho acima? ....

c) De quantas maneiras diferentes é possível pintar bandeiras que têm este desenho? ....

Você não deve desenhar todas as possíveis diferentes bandeiras e, a seguir, pintá-las.

d) De quantas maneiras é possível pintar a região exterior do círculo e interior ao retângulo, conforme o desenho acima, quando quatro cores de giz de cera estão disponíveis? ....

e) Uma vez que a região exterior do círculo e interior ao retângulo já tenha sido pintada por uma das quatro cores disponíveis, de quantos modos é possível pintar a região interior do círculo, conforme o desenho acima? ....

f) Você vê alguma diferença em começar pintando a região interior do círculo e depois a região externa do círculo e interna do retângulo, ao invés de

[*] Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

começar pintando a região externa ao círculo e interior ao retângulo e depois a região interna do círculo? ....

g) Construa uma árvore de possibilidades, apresentando todas as diferentes maneiras de pintar uma bandeira com o desenho acima quando se dispõe de quatro diferentes cores para realizar as pinturas, considerando que as duas regiões do desenho devem ser pintadas com cores diferentes.

Cor da região interna do círculo	Cor da região externa do círculo e interior ao retângulo	Cores das duas regiões de cada bandeira

(.............. , ...)

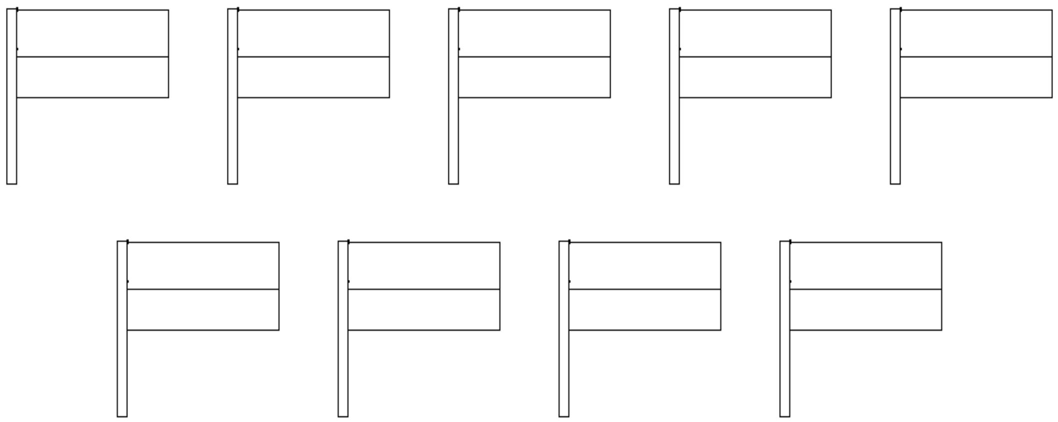
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

PROFMAT

ATIVIDADE 8*

Abaixo foram desenhadas 9 (nove) bandeiras e os mastros, as quais contém duas listras horizontais cada.



a) Se você dispõe de quatro bastões de giz de cera nas cores verde, amarelo, azul e vermelho, de quantas maneiras diferentes você pode pintar as listras de uma bandeira que tem duas listras horizontais, como aquelas que foram desenhadas acima? ________

b) Considere as bandeiras que foram desenhadas acima e apresente todas as possibilidades que identificam as diferentes pinturas de bandeiras entre si.

c) Quantas bandeiras ainda precisam ser desenhadas e pintadas para obter a quantidade de bandeiras que podem ser pintadas de maneiras diferentes? _________

d) Utilizando a notação de duplas ordenadas, indique as bandeiras que precisariam ser pintadas para completar o total de bandeiras:

(................ , ...), (................. , ...), ...
....
....
....

e) Quantas possibilidades diferentes de pinturas de bandeiras com duas listras horizontais você obtém quando dispõe de quatro cores de giz de

---

* Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

cera para a pintura e quando considera que as duas listras não podem ter a mesma cor? _________

f) Construa uma árvore de possibilidades como a iniciada a seguir, em que apenas indicamos as possibilidades que você deve considerar nesta construção, para mostrar todas as possibilidades de se pintar uma bandeira com duas listras horizontais, desde que as duas listras não sejam pintadas com a mesma cor, quando você dispõe das cores amarelo, azul, verde e vermelho.

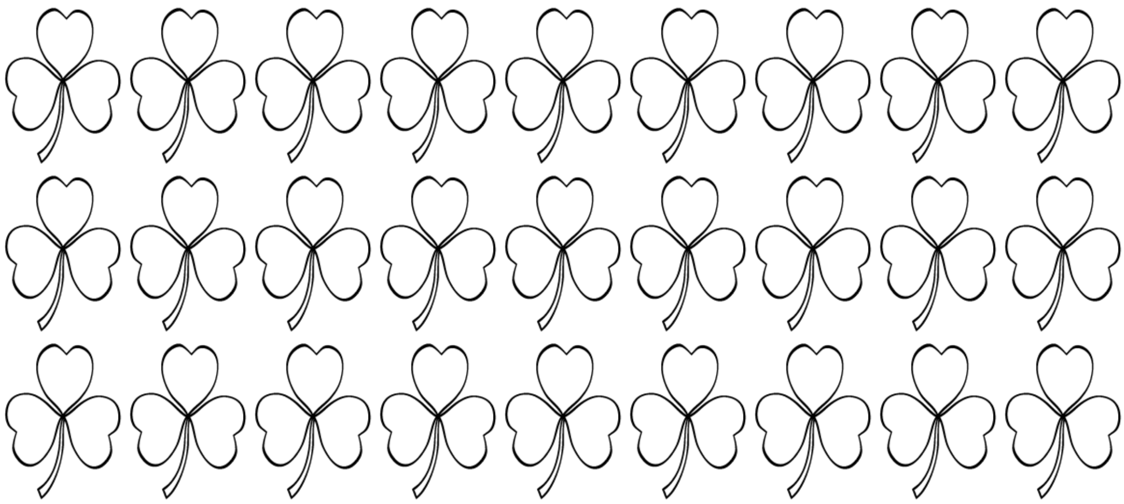
Cor da 1ª listra	Cor da 2ª listra	Cores das listras de cada bandeira

(........................ , ...)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

ATIVIDADE 9[*]

Abaixo foram desenhas 27 (vinte e sete) “trevos de três folhas”.



a) Se você dispõe de três bastões de giz de cera nas cores verde, amarelo e vermelho, apresente todas as diferentes maneiras de colorir as “folhas” dos trevos de três folhas desenhados acima, de tal maneira que todas as folhas de cada trevo sejam pintadas e se obtenha o total de diferentes trevos pintados de modos diferentes.

b) Todos os trevos que estão desenhados acima foram pintados por você? ____________

c) De quantas maneiras diferentes você pode tomar a decisão de pintar a primeira folha de um trevo que tem três folhas, quando dispõe de três diferentes cores para a pintura? .... Para cada uma das decisões em relação à pintura da primeira folha do trevo, de quantas maneiras a decisão de pintar a segunda folha pode ser tomada? .... Para cada uma das decisões em relação à pintura da primeira e da segunda folha do trevo, de quantas maneiras pode ser tomada a decisão de pintar a terceira folha? .... De quantas maneiras diferentes podemos pintar um trevo de três folhas dispondo de três bastões de giz de cera nas cores verde, amarelo e vermelho ....

d) Quantas diferentes possibilidades de pintar trevos com três folhas existem quando há três diferentes cores de giz de cera disponíveis para a pintura,

[*] Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

nenhuma folha pode ficar sem ser pintada e as duas folhas opostas não podem ser pintadas coma mesma cor? ....

e) Construa uma árvore de possibilidades como a que foi iniciada a seguir, na qual apenas indicamos as possibilidades que você deve considerar nesta construção.

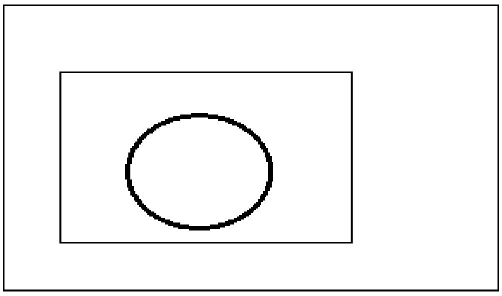
Cor da 1ª folha	Cor da 2ª folha	Cor da 3ª folha	Cores das três folhas de cada trevo

(................ , ... , ...)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

ATIVIDADE 10*

O desenho a seguir representa o formato de uma bandeira que possui três distintas regiões a serem pintadas com cores diferentes.



Você **não deve desenhar** todas as possíveis diferentes bandeiras e a seguir pintá-las, de modo a responder às questões seguintes.

a) Utilizando-se 3 (três) cores diferentes de bastões de giz de cera, escolhidas dentre as cores verde, vermelho e azul, quantas são as diferentes maneiras que se pode pintar as três regiões presentes na bandeira acima? ....

b) Indique uma operação aritmética que você pode utilizar para determinar o total de possibilidades de efetuar diferentes pinturas em bandeiras com o mesmo formato da bandeira desenhada acima nas quais não é permitida a repetição de alguma cor na pintura de todas as regiões, quando se dispõe de bastões de giz de cera nas cores vermelho, verde e azul: ....

c) Construa uma árvore de possibilidades que mostre todas as diferentes maneiras segundo as bandeiras com o mesmo formato acima (três regiões distintas) podem ser pintadas, obedecendo às condições de pintura que foram impostas nos itens (a) e (b).

* Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

ATIVIDADE 11*

Análise as situações-problema indicadas a seguir:

Situação-problema 1: A professora do 5° ano A foi a um Mercado popular de sua cidade para comprar presentes para seus alunos por ocasião do "Dia das Crianças". Ela decidiu que gastaria, no máximo, R$ 5,00 pelo presente de cada uma das crianças. Ela foi anotando os preços dos presentes que gostaria de selecionar para distribuir aos seus alunos e registrou-os na tabela a seguir:

Brinquedos que vai poder comprar	Preço unitário
Bolas de gude	R$ 1,50
Carrinho plástico	R$ 2,00
Jogo de damas	R$ 3,00
Jogo de dominó	R$ 2,50
Jogo de varetas	R$ 1,50
Bola plástica	R$ 2,50
"iô-iô"	R$ 2,00
Boneca plástica	R$ 3,50

a) Quantos presentes diferentes (contendo dois brinquedos cada um) ela poderá formar para gastar os R$ 5,00 de que dispõe para cada aluno?

b) Represente por meio de uma árvore de possibilidades todas as diferentes maneiras que a professora dispõe para "montar" presentes contendo dois brinquedos diferentes em cada um deles, gastando R$ 5,00 em cada um deles.

c) Represente por meio de uma árvore de possibilidades todas as diferentes maneiras que a professora dispõe para "montar" presentes contendo três brinquedos diferentes em cada um deles, gastando R$ 5,00 em cada um deles.

d) Represente por meio de uma árvore de possibilidades todas as diferentes maneiras que a professora dispõe para "montar" presentes contendo um, dois ou até três brinquedos diferentes em cada um deles, gastando valores até o máximo de R$ 5,00 em cada um dos presentes possíveis.

* Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Situação-problema 2: Considere que você dispõe dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 7 para formar números de dois algarismos.

a) Construa uma tabela de dupla entrada mostrando todos os números com dois algarismos que podemos formar, dispondo desses algarismos: 1, 2, 3, 4 e 7.

b) Quantos números com dois algarismos podem ser formados atendendo às condições do item (a)?

c) Construa uma árvore de possibilidades mostrando todos os números pares com dois algarismos que podemos formar quando se dispõe dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 7.

d) Quantos números com dois algarismos podem ser formados atendendo às condições do item (c)?

e) Construa uma árvore de possibilidades mostrando todos os números ímpares com dois algarismos diferentes que podemos formar, quando se dispõe dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 7.

f) Quantos números com dois algarismos podem ser formados atendendo às condições do item (e)?

g) Quantos números com dois algarismos, maiores que 40, podem ser formados quando se dispõe dos algarismos 1, 3, 4, 6 e 9?

Situação-problema 3: Carlos constrói aviõezinhos de brinquedo em madeira e, depois de pintados, eles estão prontos para serem vendidos na feira. Carlos dispõe de latas de tinta nas cores azul, vermelho, verde e amarelo. Carlos vai pintar a cabine do avião, as asas direita e esquerda e a cauda do avião, todos em cores diferentes.

a) Quantos “aviõezinhos de brinquedo em madeira” diferentes, combinando suas cores como quiser podem ser pintados, dispondo de tintas nas cores azul, vermelho, amarelo e verde?

b) Desenhe uma árvore de possibilidades que contenha todos os diferentes “aviõezinhos de brinquedo em madeira” conforme as condições estabelecidas no item (a).

c) Quantos “aviõezinhos de brinquedo em madeira” diferentes podem ser pintados, combinando suas cores como quiser, mas tendo as duas asas do aviãozinho pintadas coma mesma cor, dispondo de tintas nas cores azul, vermelho, amarelo e verde?

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

ATIVIDADE 12*

Analise as situações-problema indicadas a seguir:

Situação-problema 1: Considere a cartela desenhada a seguir, contendo os algarismos, de 0 a 9.

0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

Essa situação-problema deve ser resolvida em grupos de 3 alunos, cada. Cada aluno recebe uma cartela completa e, após recortar todos os retângulos, terá em mãos 4 repetidos algarismos, de 0 a 9. Inicialmente, os alunos deverão separar somente os algarismos 6, 7 e 9.

- O 1° aluno do grupo deverá encontrar todos os números com três algarismos, sem repetição, que podem ser formados com esses três algarismos e formar todos os números maiores que 600 e menores que 700, ordenando-os em ordem crescente.
- O 2° aluno do grupo deverá encontrar todos os números com três algarismos que podem ser formados com esses três algarismos, sem repetição de algarismos, e formar todos os números maiores que 700 e menores que 900, ordenando-os em ordem crescente.
- O 3° aluno do grupo deverá encontrar todos os números com três algarismos que podem ser formados com esses três algarismos, sem repetição de algarismos, e formar números maiores que 900 e menores que 980, ordenando-os em ordem crescente.

* Atividade adaptada, proposta pelo professor Paulo Jorge Magalhães Teixeira no livro Resolvendo Problemas de Análise Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

a) O 1° aluno do grupo encontrou quantos números? ....

b) O 2° aluno do grupo encontrou quantos números? ....

c) O 3° aluno do grupo encontrou quantos números? ....

d) Qual o total de números com 3 algarismos, segundo as condições anteriores? ....

e) Agora responda: dados três quaisquer algarismos, diferentes de zero, quantos números é possível formar utilizando os três algarismos, sem repetição? ....

f) Se um dos três algarismos fosse o algarismo zero, a quantidade de números com esses três diferentes algarismos será menor que aquela que foi obtida no item (e), pois números começados pelo algarismo zero não são considerados como números que têm três algarismos. Nesta situação, quantos diferentes números será possível formar, sem repetição, utilizando os algarismos 0, 1 e 5, por exemplo? ....
....

g) Dados os algarismos 1, 3, 5, 6 e 8, quantos números com três algarismos, sem repetição, é possível formar? ....

h) Dados os algarismos 1, 3, 5, 6 e 8, quantos números com três algarismos, sem repetição, são maiores do que 500? ....

i) Faça uma árvore de possibilidades que mostre todos os números com três algarismos, sem repetição, que são maiores do que 500 e possíveis de serem formados com o uso dos algarismos 1, 3, 5, 6 e 8.

j) Dados os algarismos 1, 3, 5, 6 e 8, quantos números com três algarismos, sem repetição, são menores do que 653? ....
....

k) Faça uma árvore de possibilidades que mostre todos os números com três algarismos, sem repetição, que são menores do que 653 e possíveis de serem formados com o uso dos algarismos 1, 3 5, 6 e 8.