UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT

LÉLIO ANTÔNIO DE OLIVEIRA LEITE

TRIGONOMETRIA COMO UMA FERRAMENTA NO AUXÍLIO DO CÁLCULO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS

VITÓRIA

2015

LÉLIO ANTÔNIO DE OLIVEIRA LEITE

TRIGONOMETRIA COMO UMA FERRAMENTA NO AUXÍLIO DO CÁLCULO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Doutor Domingos Sávio Valério Silva.

VITÓRIA

2015

AGRADECIMENTOS

Quero manifestar aqui minha sincera gratidão a todos que de alguma forma me ajudaram a conquistar mais essa vitória, dentre os quais destaco:

- primeiramente a Deus, pelo amparo e pela força necessária para vencer todos os obstáculos durante o curso;
- a minha esposa Kétssia, sempre muito prestativa, incentivadora e companheira;
- a minha filha Nicole que veio ao mundo para me dar mais alegria e responsabilidade;
- aos meus pais Antomária e Nilamon por me ajudarem a moldar o meu caráter para que eu pudesse entender a verdadeira importância da educação;
- ao meu Orientador Professor Doutor Domingos Sávio Valério Silva pelo seu apoio e dedicação no auxílio da realização desse trabalho e por seus ensinamentos em várias disciplinas em que tive o prazer em ser seu aluno, na graduação e no mestrado;
- aos meus colegas de curso, pelos muitos momentos agradáveis de estudo em sua companhia, em especial Juniano, Mateus e Michelly;
- aos meus professores do PROFMAT, em especial Professor Doutor Moacir Rosado Filho por sua disponibilidade em ajudar a todos e suas palavras de encorajamento;
- aos meus alunos do 3° Ano do Centro Educacional Santa Rita de Cássia pela participação em uma atividade prática.
- aos meus colegas de trabalho, em especial, professor Rogério pelo apoio técnico e professora Cláudia que me alertou para a inscrição na prova de acesso do PROFMAT;
- Finalmente, quero agradecer ao departamento de matemática da UFES por me proporcionar essa oportunidade de aprimorar meus estudos através desse mestrado e a CAPES pelo incentivo financeiro.

Ao Senhor Nosso Deus eu peço, em nome de Jesus, que abençoe e proteja a todos vós.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal fornecer material de apoio para os professores e alunos de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio e o foco são as aplicações da trigonometria. Iniciamos com algumas definições e resultados sobre esse tema e abordamos diversas situações problemas, visando exemplificar para o leitor a importância da trigonometria como uma ferramenta no auxílio do cálculo de distâncias inacessíveis.

ABSTRACT

This work aims to provide background material for math teachers and students of elementary and high schools and the focus is on applications of trigonometry. We begin with some definitions and results on this topic and approach different situations problems to illustrate to the reader the importance of trigonometry in the aid calculation inaccessible distances.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo principal apresentar ao leitor, principalmente aos professores e alunos dos Ensinos Fundamental e Médio, aplicações práticas da trigonometria como uma ferramenta no auxílio do cálculo de distâncias inacessíveis. Para tanto, dividimos o trabalho em capítulos.

No capítulo 1, introduzimos a definição de semelhança de triângulos, que é um dos requisitos para o estudo da trigonometria, demonstramos o teorema de Pitágoras, utilizando as relações métricas existentes no triângulo retângulo e apresentamos exemplos de aplicação.

No capítulo 2, abordamos as funções trigonométricas do ângulo agudo, suas relações fundamentais e apresentamos exemplos de aplicação.

No capítulo 3, trabalhamos a trigonometria na circunferência e abordamos a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, com suas respectivas demonstrações e exemplos de aplicação.

No capítulo 4, estudamos um pouco sobre o teodolito, um importante instrumento de medição de ângulos, apresentando uma maneira de confecção de um teodolito caseiro bem como algumas aplicações do mesmo na resolução de problemas envolvendo distâncias inacessíveis, incluindo uma atividade prática realizada em sala de aula.

1 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Neste capítulo faremos uma abordagem sobre a semelhança de triângulos, que é um dos requisitos básicos para a trigonometria.

Dois triângulos são semelhantes se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais e os lados correspondentes sejam proporcionais.

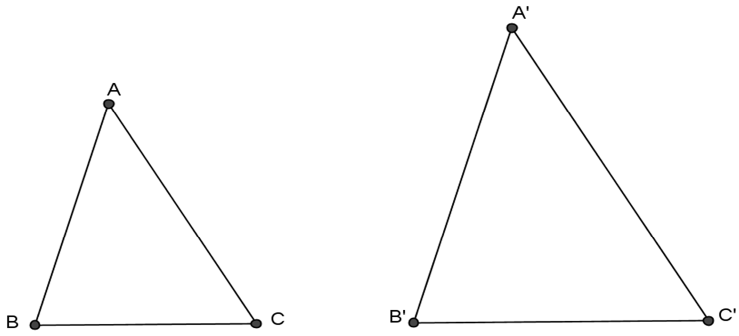


Figura 1: Semelhança de triângulos

Se $ABC \ e \ A'B'C'$ são dois triângulos semelhantes e se $A \rightarrow A', B \rightarrow B' e \ C \rightarrow C'$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então, valem simultaneamente as seguintes igualdades:

$$\hat{A} = \widehat{A'}, \hat{B} = \widehat{B'} \ e \ \hat{C} = \widehat{C'}$$

e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade entre os dois triângulos.

Usaremos a notação $ABC \sim A'B'C'$ para indicar que os dois triângulos são semelhantes e a correspondência entre os vértices é dada exatamente na ordem que eles aparecem.

Dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade igual a um, e, reciprocamente, dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade igual a um são também congruentes.

1.1 CASOS DE SEMELHANÇA

I) CASO AAA. Se em dois triângulos $ABC\ e\ A'B'C'$, tem-se:

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}, \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \text{ e } \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$$

então, $ABC \sim A'B'C'$.

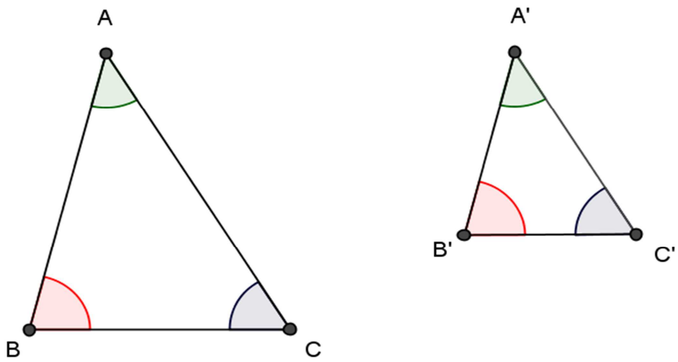


Figura 2: Caso AAA de semelhança

II) CASO LAL. Se dois triângulos $ABC\ e\ A'B'C'$ são tais que

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$$

e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{A'B'}}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{\overline{A'C'}}},$$

então, $ABC \sim A'B'C'$.

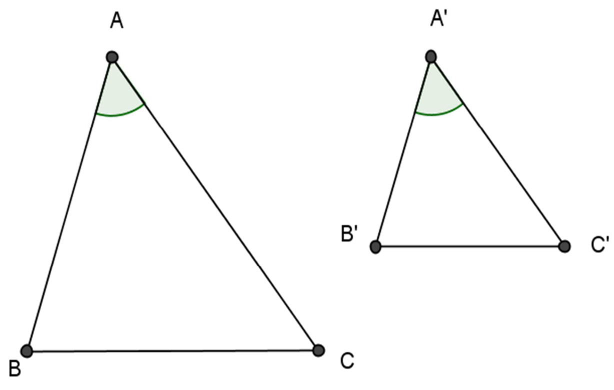


Figura 3: Caso LAL de semelhança

III) CASO LLL. Se em dois triângulos ABC e $A'B'C'$,tem-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}},$$

então, $ABC \sim A'B'C'$.

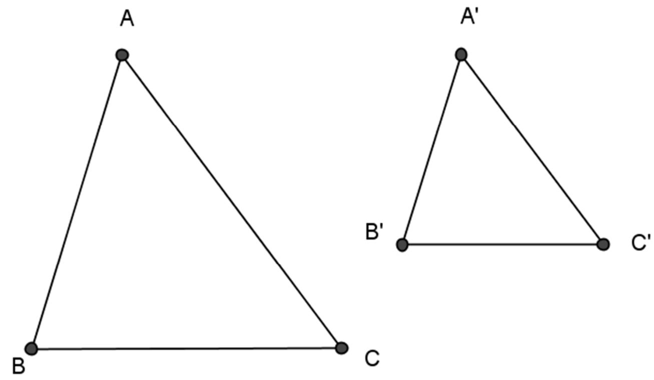


Figura 4: Caso LLL de semelhança

1.2 TRIÂNGULO RETÂNGULO

Um triângulo ABC é retângulo quando um de seus ângulos internos é um ângulo que mede $90°$(ângulo reto).

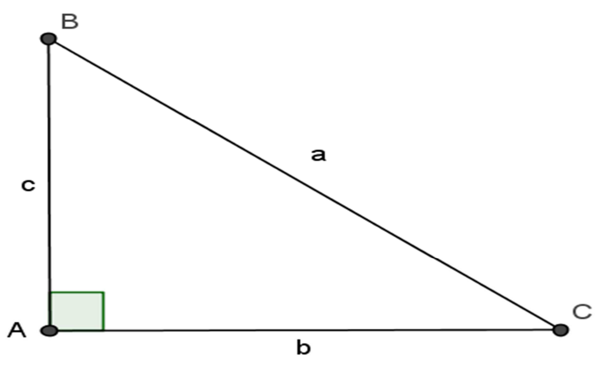


Figura 5: Triângulo retângulo

O lado $\overline{BC} = a$, oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa e os lados $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$, adjacentes ao ângulo reto, são chamados catetos do triângulo ABC.

I) RELAÇÕES MÉTRICAS

Seja ABC um triângulo retângulo em A e seja $\overline{AH} = h$ a altura relativa ao lado BC. Ao traçarmos a altura AH surgem dois novos triângulos retângulos

(AHB e AHC). Além disso, a hipotenusa $\overline{AC} = a$ fica dividida em dois segmentos ($\overline{BH} = m$ e $\overline{CH} = n$), conforme a figura 6.

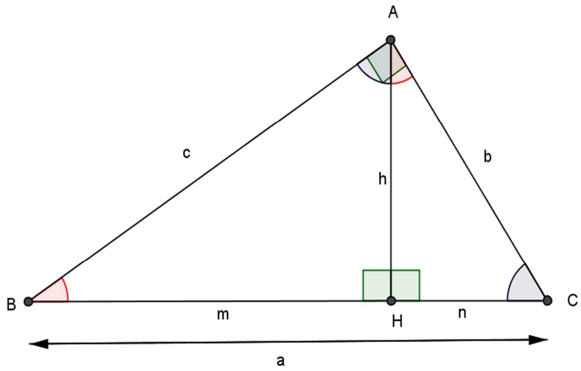


Figura 6: Relações métricas

Dividindo a figura 6 em três triângulos (figura 7), notamos que os triângulos ABC, HBA e HAC são semelhantes dois a dois ($ABC \sim HBA, ABC \sim HAC$ e $HBA \sim HAC$), pois possuem os mesmos ângulos ($\hat{A} = \widehat{AHB} = \widehat{AHC}, \hat{B} = \widehat{HBA} = \widehat{HAC}$ e $\hat{C} = \widehat{HAB} = \widehat{HCA}$), devido ao fato da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo, resultar em $180°$.

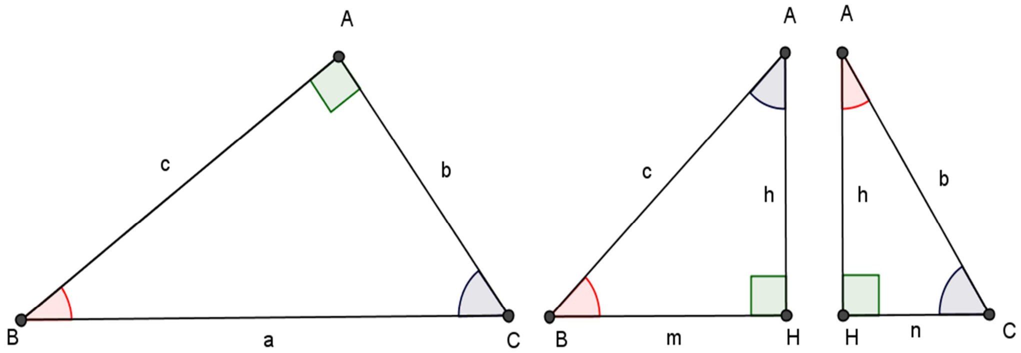


Figura 7: Divisão da figura 6 em 3 triângulos

Assim, obtemos as seguintes igualdades:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} = \frac{b}{h}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CH}} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{h} = \frac{b}{n}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} \rightarrow \frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

Podemos então, destacar algumas relações decorrentes dessas igualdades.

$$c^2 = a\,.\,m\ (1)$$

$$b^2 = a\,.\,n\ (2)$$

$$a\,.\,h = b\,.\,c\ (3)$$

$$h^2 = m\,.\,n\ (4)$$

Somando-se as igualdades $(1) e\ (2)$, obtemos:

$$c^2 +\ b^2 = a\,.\,m + a\,.\,n = a\,.\,(m+n) = a\,.\,a =\ a^2$$

E assim, demonstramos a relação métrica mais importante, conhecida como Teorema de Pitágoras:

$$a^2 +\ b^2 = c^2\ (5)$$

1.3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO:

1) A semelhança de triângulos na construção de um túnel:

Vamos analisar o problema de furar um túnel partindo das duas extremidades, com as frentes de trabalho se encontrando.

Para evitar questões topográficas, imaginemos o problema de ir dos pontos C ao ponto S, na mesma horizontal, um de cada lado do morro, o segundo na cidade, mas em linha reta, através da montanha, partindo simultaneamente dos dois pontos.

Para isso, consideremos um terceiro ponto O, acessível aos pontos $C\ e\ S$.

Nessas condições é possível medir diretamente os segmentos $\overline{OC}, \overline{OS}$ e o ângulo interno $\widehat{COS}$.

Vamos supor que $\overline{OC} = 2\ km, \overline{OS} = 3\ km\ e\ \widehat{COS} = \beta = 53°$ (figura 8).

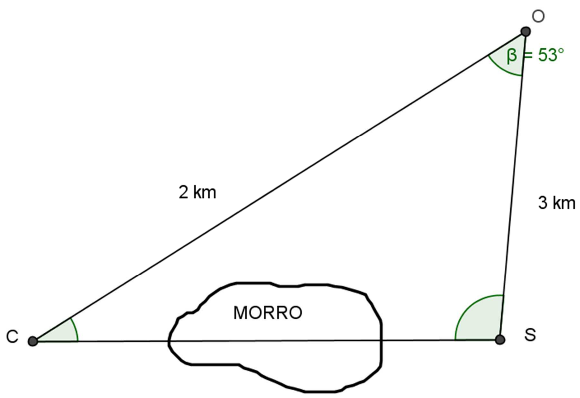


Figura 8: Triângulo OCS

Para ligar C a S em linha reta é preciso determinar os ângulos $O\widehat{C}S$ e $O\widehat{S}C$, os quais não podem ser medidos diretamente, uma vez que o segmento $\overline{CS}$ passa pelo interior do morro.

Usando uma escala conveniente $(1 : 1000)$ podemos traçar o triângulo $O_1C_1S_1$ (figura 9) semelhante ao triângulo OCS da seguinte maneira:

$$C_1\widehat{O_1}S_1 = C\widehat{O}S = \beta = 53°, \overline{O_1C_1} = 2\ m \ e \ \overline{O_1S_1} = 3\ m.$$

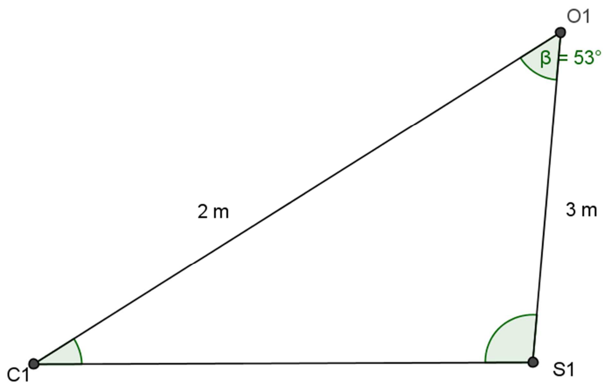


Figura 9: Triângulo O1C1S1

Assim,

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{O_1C_1}} = \frac{2000\ m}{2\ m} = 1000 \ e \ \frac{\overline{OS}}{\overline{O_1S_1}} = \frac{3000\ m}{3\ m} = 1000.$$

Os triângulos OCS e $O_1C_1S_1$ são semelhantes (caso LAL) e daí, segue que

$$O\widehat{C}S = O_1\widehat{C_1}S_1 \ e \ O\widehat{S}C = O_1\widehat{S_1}C_1.$$

Então, as aberturas de $O_1\widehat{C_1}S_1$ e $O_1\widehat{S_1}C_1$ podem ser transportadas para a figura 8, formando os ângulos $O\widehat{C}S$ e $O\widehat{S}C$ que precisamos, indicando a trajetória a ser seguida a partir das duas extremidades.

2) Como medir a altura aproximada de um prédio, de uma árvore, de um poste? Você poderia medir essas alturas indiretamente utilizando semelhança de triângulos. Como fazer isso? Examine esse exemplo.

Vamos medir a altura aproximada de uma cesta de basquete.

Para isso, usaremos a metade de uma folha de papel quadrada, como mostra a figura 10 abaixo:

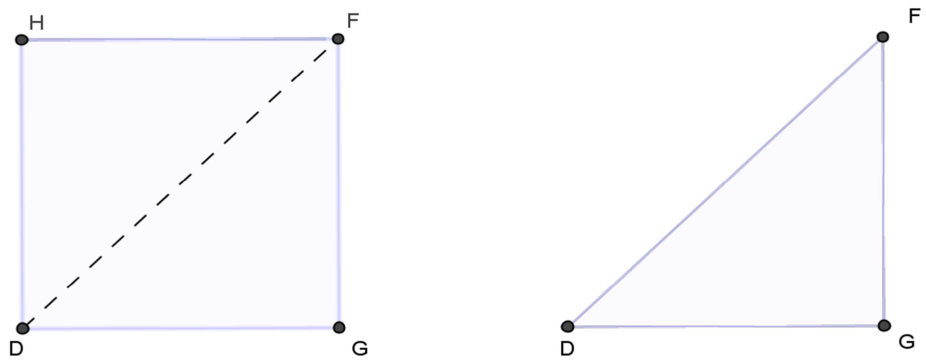


Figura 10: Metade de uma folha de papel quadrada

Mire o topo da cesta conservando a parte inferior da folha (DG) paralela ao chão. Talvez você precise afastar-se ou aproximar-se da cesta para que isto ocorra (figura 11).

Meça a distância entre você e a perpendicular ao chão que passa pela cesta: $\overline{AB} = 140\ cm$..

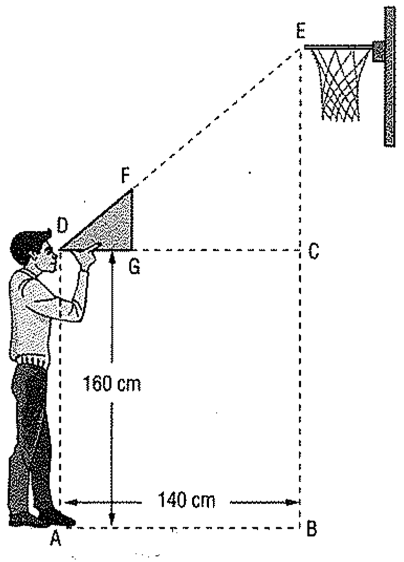


Figura 11: Problema da altura da cesta

Observe que $\overline{AB} = \overline{DC} = 140\ cm$.

Meça agora a distância do chão aos seus olhos: $\overline{AD} = 160\ cm$.

Observe que $\overline{AD} = \overline{BC} = 160\ cm$.

Os triângulos $DCE\ e\ DGF$ são semelhantes $\widehat{FDG} = \widehat{FDG}, \widehat{DFG} = \widehat{DEC}\ e\ \widehat{DGF} = \widehat{DCE}$, pois são ângulos correspondentes.

Da semelhança desses triângulos, concluímos:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{FG}}$$

Observando a última igualdade e sabendo que $\overline{DG} = \overline{FG}$, concluímos que $\overline{DC} = \overline{EC}$.

Assim, a altura da cesta de basquete é dada por:

$$\overline{BC} + \overline{EC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 160\ cm + 140\ cm = 300\ cm = 3\ m.$$

.

3) Paulo está com uma dúvida e vamos ajuda-lo a esclarecê-la:

Figura 12: Problema da boia

Para responder a essa questão, Paulo precisa saber a que distância da praia está a boia (figura 12).

Ele faz, então, o seguinte: finca verticalmente uma estaca de um metro de altura bem na beirada da água, em A; depois, coloca-se a certa distância atrás da estaca, no ponto P, de onde ele pode alinhar o olho, em O, com a extremidade da estaca, em S, e com a boia, em B.

Paulo mede a distância $\overline{AP}$ e obtém $30\ m$. Ele avalia a altura em que seu olho está em relação á superfície da água e obtém $1{,}6\ m$.

Agora é só calcularmos a distância $\overline{AB}$ para conhecer a distância da boia em relação á praia.

Usando o esquema apresentado na figura 13 e utilizando os conhecimentos sobre semelhança de triângulos, calculamos facilmente essa distância.

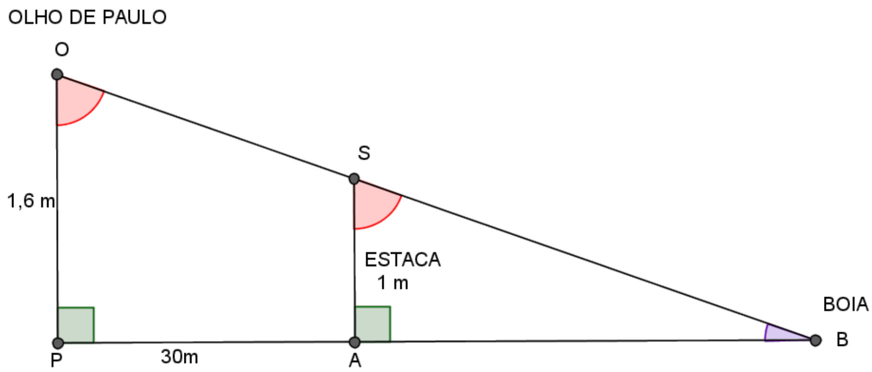


Figura 13: Esquema do problema da boia

Os triângulos $OPB\ e\ SAB$ são semelhantes (caso AAA).

Daí, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{OP}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{30 + \overline{AB}} = \frac{1}{1{,}6}$$

$$1{,}6\,\overline{AB} = 30 + \overline{AB}$$

$$0{,}6\,\overline{AB} = 30$$

$$\overline{AB} = \frac{30}{0,6} = 50\ m$$

Logo, a distância da boia à praia é de $50\ m$.

4) Para medir a profundidade de um poço com $1,2\ m$ de largura, uma pessoa cujos olhos estão a $1,8\ m$ do chão posiciona-se a $0,6\ m$ de sua borda. Dessa forma, a borda do poço esconde exatamente seu fundo, como mostra a figura 14.

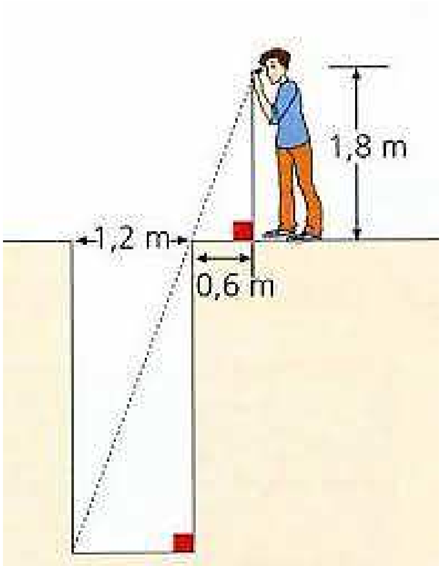


Figura 14: Problema da profundidade do poço

Com os dados acima e aplicando os conhecimentos sobre semelhança de triângulos, encontraremos facilmente essa medida.

Temos que a altura da pessoa está para a altura h do poço assim como a distância da pessoa até a borda do poço está para a largura do poço. Assim,

$$\frac{1,8}{h} = \frac{0,6}{1,2}$$

$$0,6\ h = 2,16$$

$$h = \frac{2,16}{0,6} = 3,6\ m.$$

Logo, a profundidade do poço é de $3,6\ m$.

5) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto em Brasília, tem $4\,m$ de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que após caminhar $12{,}3\,m$ sobre a rampa está a $1{,}5\,m$ de altura em relação ao solo.

a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita (figura 15).

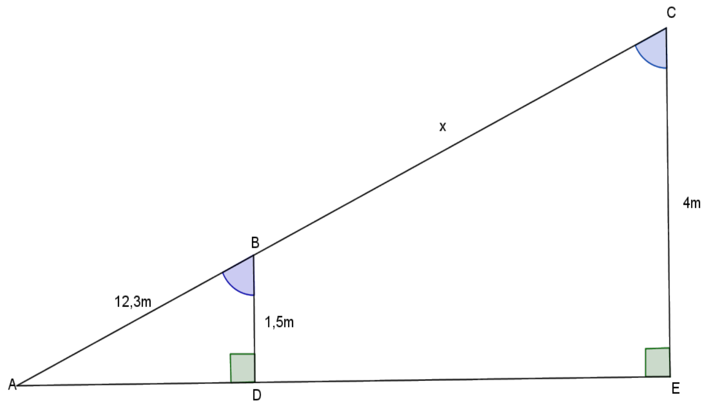


Figura 15: Esquema do problema da rampa

b) Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.

Pela semelhança entre os triângulos $ABD\ e\ ACE$ (caso AAA), temos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{1{,}5}{4} = \frac{12{,}3}{12{,}3 + x}$$

$$18{,}45 + 1{,}5\,x = 49{,}2$$

$$1{,}5\,x = 30{,}75$$

$$x = \frac{30{,}75}{1{,}5} = 20{,}5\,m.$$

Logo, a pessoa deve caminhar $20{,}5\,m$ para atingir o ponto mais alto da rampa.

6) No esquema abaixo (figura 16), a reta $\overleftrightarrow{AB}$ representa a trajetória de um navio e no ponto I localiza-se uma ilha. Quando o navio se encontra no ponto A, $\overline{AI} = 60\,km$ e quando o navio está em B, $\overline{BI} = 48\,km$. Se $\overline{BI}$ é a menor das distâncias do navio á ilha, quando o navio estiver em C, a distância dele à ilha será de quantos quilômetros?

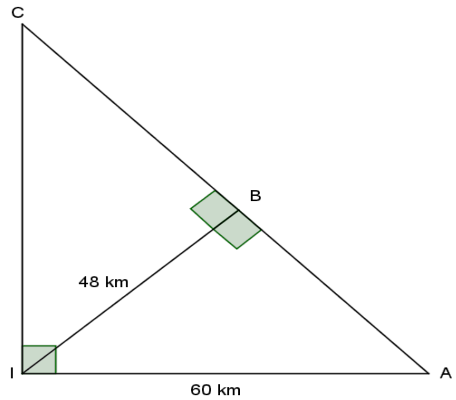


Figura 16: Esquema do problema do navio

Como BI é a menor distância entre B e I, temos que BI é a altura do triângulo retângulo AIC, relativa ao vértice I.

Utilizaremos as relações métricas existentes nos triângulos retângulos $AIC\ , ABI\ e\ CBI$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABI, temos:

$$\overline{AI}^2 = \overline{BI}^2 + \overline{AB}^2$$

$$60^2 = 48^2 + \overline{AB}^2$$

$$\overline{AB}^2 = 3600 - 2304 = 1296$$

$$\overline{AB} = 36\ km.$$

Utilizando a relação métrica (4) no triângulo AIC, temos:

$$\overline{BI}^2 = \overline{AB}.\overline{BC}$$

$$48^2 = 36\ .\overline{BC}$$

$$\overline{BC} = \frac{2304}{36} = 64\ km.$$

Finalmente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CBI, temos:

$$\overline{CI}^2 = \overline{BI}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{CI}^2 = 48^2 + 64^2$$

$$\overline{CI}^2 = 2304 + 4096 = 6400$$

$$\overline{CI} = 80\ km.$$

Logo, quando o navio estiver no ponto C a sua distância à ilha será de $80\ km$.

2 AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO ÂNGULO AGUDO

Consideremos agora um ângulo $\widehat{AOB} = \alpha$, $0° \lt \alpha \lt 90°$ e tracemos, a partir dos pontos $A_1, A_2, A_3, etc.$, da semirreta $\overrightarrow{AO}$, perpendiculares $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, etc.$, à semirreta $\overrightarrow{OB}$. Os triângulos $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, etc.$, são semelhantes por terem os mesmos ângulos (figura 17).

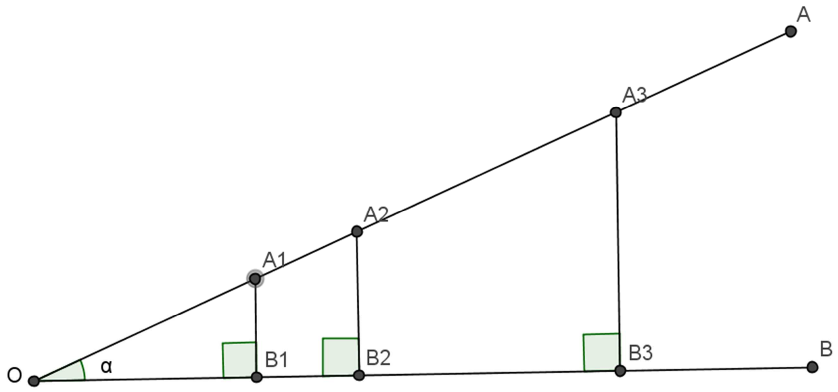


Figura 17: Funções trigonométricas

Podemos portanto escrever:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}}$$

Esta relação depende apenas do ângulo α e não dos comprimentos envolvidos. Convém dar um nome a esta função de α assim construída e definir para $0° \lt \alpha \lt 90°$,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = sen\ \alpha$$

que se lê seno de α.

Voltando aos triângulos semelhantes da figura 17, vemos que as relações

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots$$

e

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \cdots,$$

também dependem apenas do ângulo α. Definiremos então as funções para $0° \lt \alpha \lt 90°$,

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \cos\alpha$$

e

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = tg\ \alpha$$

que se chamam cosseno de α e tangente de α, respectivamente.

Essas funções são chamadas funções trigonométricas e não são independentes. Duas relações aparecem naturalmente:

$$(1)\ sen^2\ \alpha + \ cos^2\ \alpha = 1\ (relação\ fundamental).$$

$$(2)\ tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}.$$

Para demonstrá-las, consideremos um ângulo α de vértice O e um triângulo OAB, retângulo em B, como mostra a figura 18.

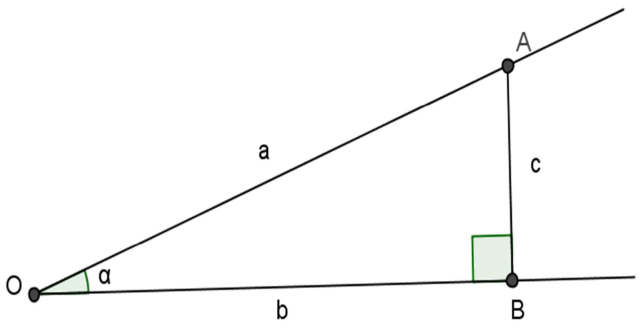


Figura 18: Relações entre as funções trigonométricas

Fazendo, para facilitar, $\overline{OA} = a, \overline{OB} = b\ e\ \overline{AB} = c$ e lembrando o teorema de Pitágoras, $a^2 = \ b^2 + c^2$, temos:

$$sen^2\alpha + \ cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

e

$$\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = tg\ \alpha.$$

Como $sen\ \alpha, \cos\alpha\ e\ tg\ \alpha$ são números positivos, vemos ainda que se uma dessas funções de α for conhecida, podemos calcular as outras duas. Ainda, se um triângulo retângulo tem um ângulo α e hipotenusa de comprimento a, então os catetos desse triângulo medem $a\,.\,sen\,\alpha$ (o cateto oposto a α) e $a\,.\cos\alpha$ (o cateto adjacente a α) , como na figura 19.

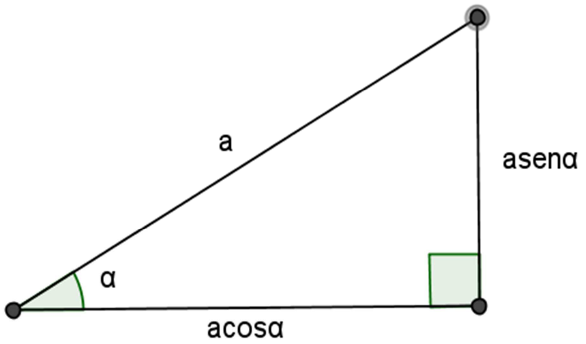


Figura 19: Medida dos catetos

I) PROPOSIÇÃO1: Se dois ângulos $\alpha\ e\ \beta$ são complementares ($\alpha +\ \beta = 90°$), então $sen\,\alpha = \cos\beta$ (o cosseno de um ângulo é o seno do seu ângulo complementar) e $tg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\beta}$ (a tangente de um ângulo é o inverso da tangente do seu ângulo complementar).

Aplicando as definições no triângulo da figura 20 temos:

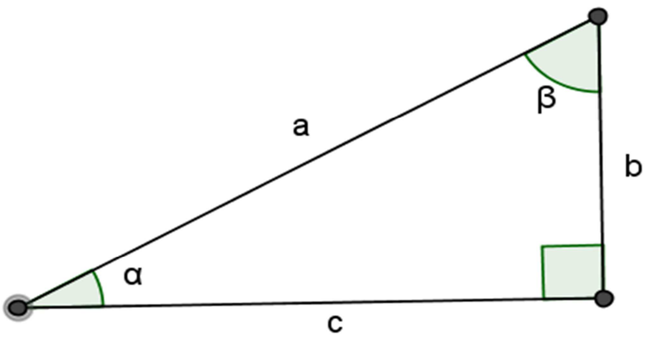


Figura 20: Ângulos complementares

$$sen\,\alpha = \frac{b}{a} = \cos\beta$$

e

$$tg\,\alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{tg\,\beta}.$$

2.1 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1) Para prolongar uma estrada reta r deve-se perfurar um túnel em um morro. É conveniente que duas equipes trabalhem simultaneamente nos pontos de entrada E e de saída S do túnel. Descrever um processo pelo qual, sem sair do plano do terreno, é possível marcar o ponto S e a direção r de saída (admita que, com exceção do morro, o terreno é plano).

Esse problema é semelhante ao exemplo de aplicação 1, resolvido no primeiro capítulo.

Resolveremos dessa vez, utilizando os conhecimentos sobre razões trigonométricas.

Solução:

Seja r a reta que representa a estrada que contém os pontos E de entrada e S de saída do túnel.

Seja B um ponto pertencente a r tal que B localiza-se á esquerda de E, isto é, B não pertence ao morro.

Traça-se a reta s de inclinação $\theta < 90°$, em relação a r, tal que s não intersecte o morro.

Tomamos um ponto A sobre s tal que a reta t perpendicular a s, que passa por A não intersecte o morro (figura 21).

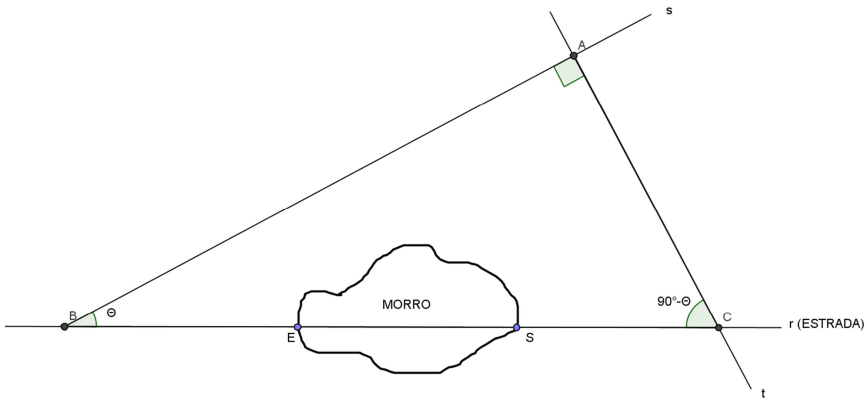


Figura 21: Problema do túnel

A reta t intersecta r em um ponto C, pois do contrário t seria paralela a r e θ mediria $90°$, o que é impossível.

O triângulo ABC formado é retângulo em A e daí, temos:

$$tg\ \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AC} = \overline{AB}\,.\,tg\ \theta.$$

Assim determinamos um ponto C sobre a reta r tal que C está á direita de S, isto é, C não pertence ao morro.

Para marcar o ponto E de entrada devemos partir de B em direção ao morro de forma que o ângulo formado entre as retas r e t seja $\theta < 90°$.

Para marcar o ponto S de saída devemos partir de C em direção ao morro de forma que o ângulo formado entre as retas r e t seja $(90° - \theta)$.

2) Para medir a largura de um rio de margens paralelas sem atravessá-lo, um observador no ponto A visa um ponto fixo B na margem oposta (suponha que AB é perpendicular às margens). De A, ele traça uma perpendicular à linha AB e marca sobre ela um ponto C, distando $30\ m$ de A (figura20). Em seguida ele se desloca para C, visa os pontos $B\ e\ A$, e mede o ângulo $\widehat{BCA} =$ $70°$ (figura 22). Sabendo que a distância, sobre AB, de A à margem M do rio é de $3\ m$ e que $tg\ 70° = 2{,}75$, calcular a largura do rio.

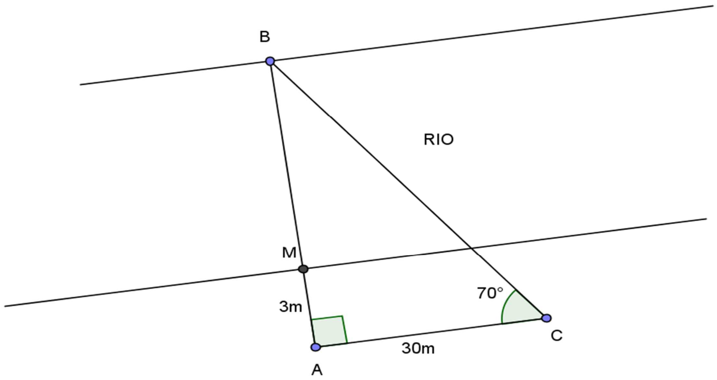


Figura 22: Problema da largura do rio

<u>Solução:</u>

Aplicando a definição de tangente no ângulo de $70°$, temos:

$$tg\ 70° = \frac{\overline{BM} + 3}{30}$$

$$2{,}75 = \frac{\overline{BM} + 3}{30}$$

$$\overline{BM} + 3 = 82{,}5$$

$$\overline{BM} = 79{,}5\ m.$$

Logo, a largura do rio é de $79,5\ m$.

3) Um dos cálculos que, no passado, mais fascinaram os matemáticos era o da medida do raio da Terra. O engenhoso processo que vamos descrever já tinha sido imaginado pelos gregos da antiguidade, mas, na época, não dava bons resultados porque os instrumentos de medida eram bastante precários. Sobe-se a uma torre de altura h e mede-se o ângulo α que faz a reta $\overline{BC}$ do horizonte de B com a vertical $\overline{BO}$ do lugar.

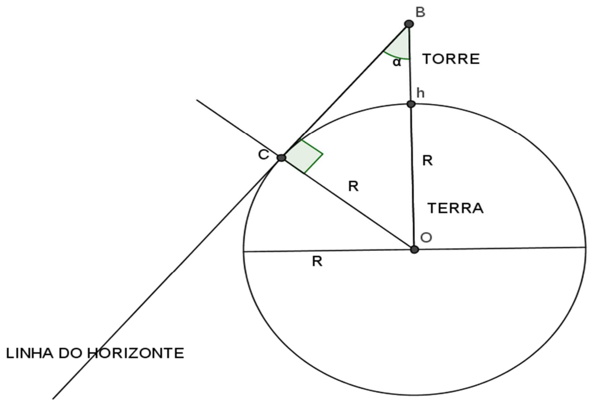


Figura 23: Problema do raio da Terra

Pela figura 23, vê-se que $sen\,\alpha = \frac{R}{R+h}$ em que R, o raio da Terra, é a nossa incógnita.

Então,

$$(h + R).sen\,\alpha = R$$
$$h\,.sen\alpha + R\,.sen\,\alpha = R$$
$$h\,.sen\,\alpha = R - R\,.sen\,\alpha$$
$$h\,.sen\,\alpha = R\,.(1 - sen\,\alpha)$$
$$R = \frac{h\,.sen\,\alpha}{1 - sen\,\alpha}.$$

Observe que conhecendo a altura h e o ângulo α podemos calcular o raio da Terra usando essa fórmula, mas, na prática, existem dificuldades. A altura h será sempre muito pequena em relação ao raio da Terra. Para se obter R com precisão, é preciso medir o ângulo α também com muita precisão, pois um pequeno erro na medida de α acarretará um erro muito grande na medida de R. Hoje, existem instrumentos eletrônicos que medem ângulos com precisão de 1 milésimo de grau, e as calculadoras científicas fornecem os senos dos ângulos com a necessária exatidão. Por exemplo, se uma pessoa A está a uma altura de $2\,km$ em relação ao nível do mar, o ângulo será de $88{,}657$ graus. Com uma calculadora científica, encontramos o seno desse ângulo igual a $0{,}9996872$ e o raio da Terra aproximadamente igual a $6390\,km$.

4) Um astronauta em órbita vê uma fração da superfície da terra chamada calota esférica. O diâmetro desta calota é visto pelo observador segundo um ângulo 2α. Determine em função de α e do raio R da Terra, a área da superfície do planeta vista pelo astronauta. (A área de uma calota esférica é dada por $A = 2\pi Rh$, onde R é o raio da esfera e h é a altura da calota).

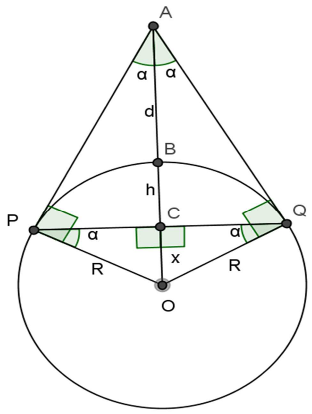


Figura 24: Problema do astronauta

Solução:

Sejam O e A os pontos que representam o centro da Terra e a localização do astronauta no espaço, respectivamente, e PQ o segmento que representa o diâmetro da calota vista por ele (figura 24).

Os triângulos AQO e APO são retângulos em Q e P, respectivamente, pois AQ e AP são tangentes aos raios OQ e OP, daí, como $\overline{OQ} = \overline{OP} = R$ e AO é hipotenusa comum aos dois triângulos, temos que $\overline{AQ} = \overline{AP}$ e os triângulos são semelhantes (caso LAL).

Assim, AO é bissetriz do ângulo $\widehat{PAQ} = 2\alpha$. Os triângulos QOC e POC são semelhantes (caso LAL) e daí, os ângulos $\widehat{PCO}$ e $\widehat{QCO}$ são iguais e suplementares, isto é, ambos são ângulos retos, e pela soma dos ângulos internos de um triângulo, concluímos que $\widehat{OQC} = \widehat{OPC} = \alpha$.

Logo,

$$sen\,\alpha = \frac{x}{R} \rightarrow x = R\,.\,sen\,\alpha$$

Mas,

$$x + h = R \rightarrow h = R - x$$

Portanto,

$$A = 2\pi Rh = 2\pi R\,.\,(R - x) = 2\pi R\,.\,(R - R\,.\,sen\,\alpha),$$

isto é,

$$A = 2\pi R^2\,.\,(1 - sen\,\alpha).$$

Logo, a área da superfície do planeta vista pelo astronauta depende do raio R da Terra e do ângulo α (metade do ângulo de visualização do astronauta).

5) Um astronauta encontra-se numa nave espacial que gira numa órbita em torno da Terra (raio da Terra é aproximadamente $6400\,km$). No momento em que a nave está $20200\,km$ acima da superfície da Terra, que fração da superfície da Terra é visível para o astronauta? Neste caso, quanto mede o ângulo de visualização sobre a Terra?

Solução:

Utilizaremos a figura 24 acima e os resultados do exercício 4.

A fração F da superfície da Terra vista pelo astronauta é dada por:

$$F = \frac{Área\ da\ calota\ esférica}{Área\ da\ Terra} = \frac{2\pi R^2.(1 - sen\,\alpha)}{4\pi R^2} = \frac{1 - sen\,\alpha}{2}.$$

Como,

$$sen\,\alpha = \frac{x}{R}$$

e

$$\frac{x}{R} = \frac{R}{d + R}$$

(devido á semelhança entre os triângulos $AOQ\ e\ QOC$, pois possuem os mesmos ângulos),

segue que,

$$F = \frac{1 - \frac{R}{d + R}}{2} = \frac{1}{2}\,.\,\frac{d}{d + R} = 0{,}5\,.\,\frac{20200}{20200 + 6400} = 0{,}379,$$

isto é, cerca de $37{,}9\%$.

Assim,

$sen\ \alpha = \frac{R}{d+R} = \frac{6400}{20200+6400} = 0{,}24 \rightarrow \alpha = 14°$ aproximadamente.

Portanto, o ângulo de visualização 2α é aproximadamente $28°$.

Para saber mais:

Os resultados do exercício acima nos levam a citar como curiosidade o GPS (Global Positioning System), que é formado por uma constelação de 24 satélites, orbitando em torno da Terra a uma altura aproximada de $20200\ km$ acima do nível do mar.

Os satélites percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada satélite tem $28°$ de visualização sobre a Terra. O leitor pode buscar maiores informações em [8].

6) Sabendo que $sen\ \alpha\ .\ tg\ \alpha = 0{,}45\ e\ 0° ‹ \alpha ‹ 90°$, calcule $\cos\alpha$.

Solução:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$$

Daí,

$$\text{sen}\ \alpha\ .\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = 0{,}45$$

$$\frac{sen^2\alpha}{\cos\alpha} = 0{,}45$$

$$sen^2\alpha = 0{,}45\ .\ cos\alpha$$

Mas,

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$cos^2\alpha + 0{,}45\ .\cos\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = 0{,}8, pois\ 0 ‹ \alpha ‹ 90°.$$

Logo, $\cos\alpha = 0{,}8$.

3 TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

No capítulo anterior estudamos as razões trigonométricas em um triângulo retângulo.

Nós vamos, nesse capítulo, fazer a extensão dos conceitos de seno e cosseno para ângulos maiores ou iguais a $90°$.

Esse estudo será feito sobre a circunferência de raio 1.

Antes disso, faremos uma breve exposição a respeito de arcos e ângulos , pré-requisitos necessários ao estudo da Trigonometria na circunferência.

3.1 ARCOS E ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

I) ARCO

Toda corda divide a circunferência em duas partes chamadas arcos.

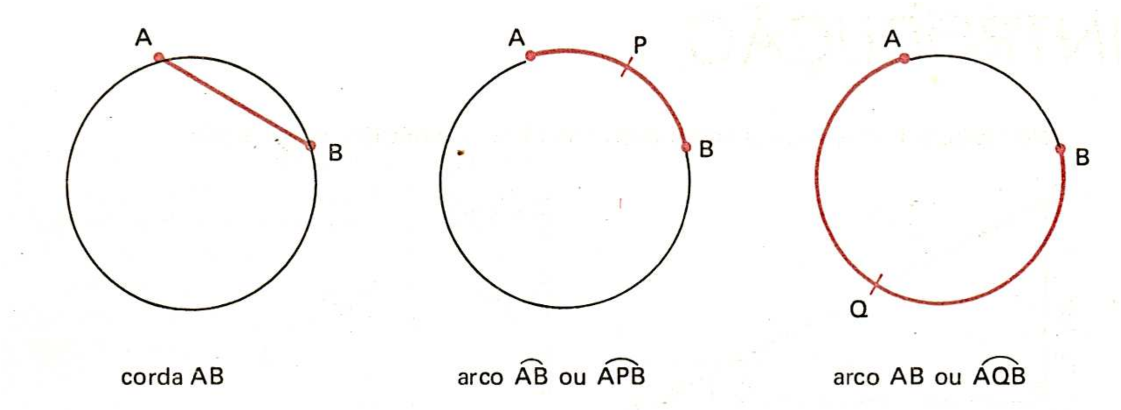


Figura 25: Corda e arcos

Uma semicircunferência é um arco determinado por um diâmetro.

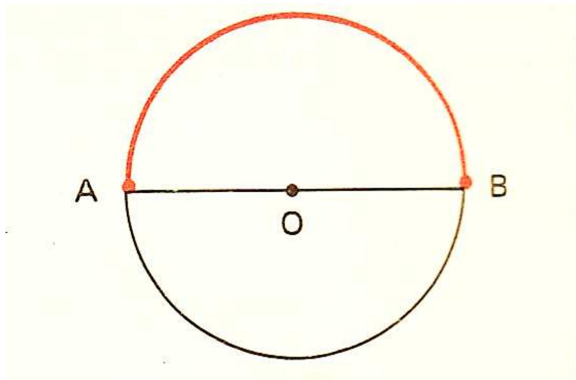


Figura 26: Semicircunferência

Quando os pontos $A \; e \; B$ coincidem, eles determinam na circunferência o arco nulo ou o arco de uma volta.

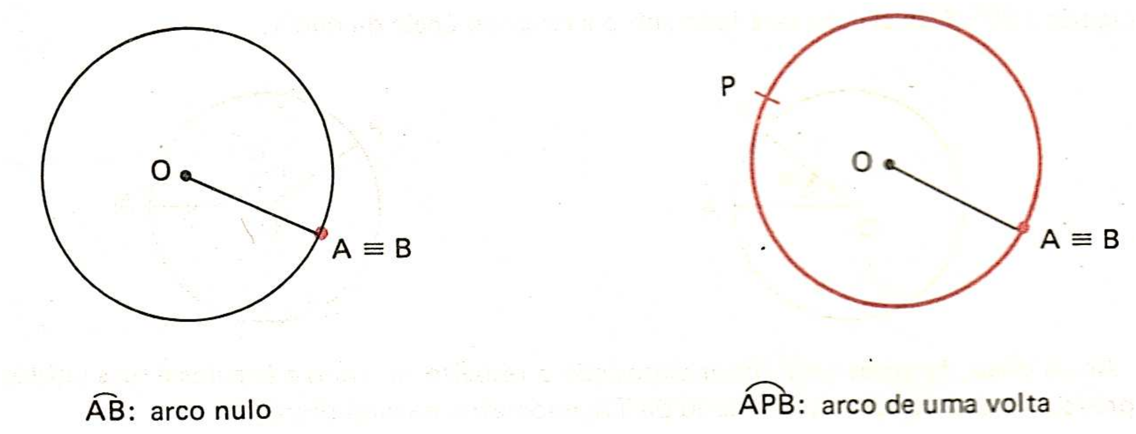


Figura 27: Arco nulo ou de meia volta

II) ÂNGULO CENTRAL

Um ângulo é dito central quando possui o vértice no centro da circunferência.

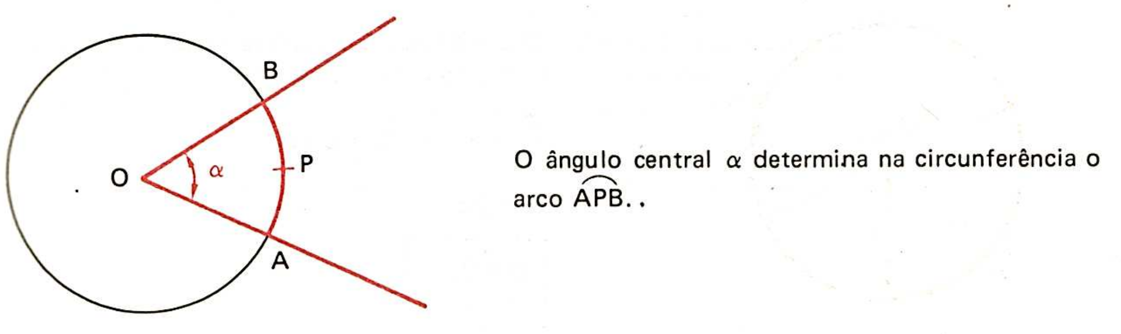


Figura 28: Ângulo central

III) MEDIDA DE ARCO

A medida de um arco de circunferência é a medida do ângulo central.

É importante não confundir a medida de um arco com a medida do comprimento desse arco.

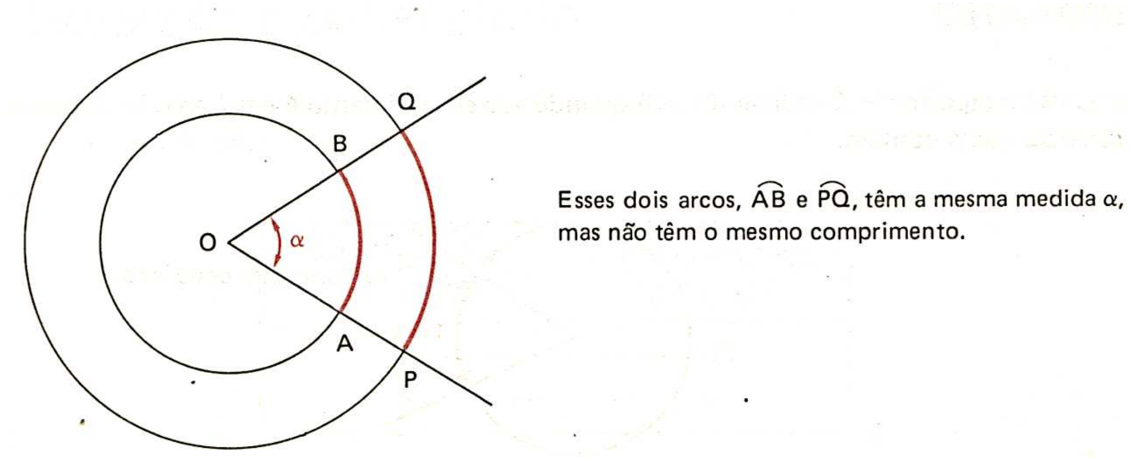


Figura 29: Medida de arco

IV) COMPRIMENTO DE CIRCUNFERÊNCIA

Em qualquer circunferência, a razão entre seu comprimento e seu diâmetro é constante. Essa constante é o número π ($\pi \cong 3{,}14$).

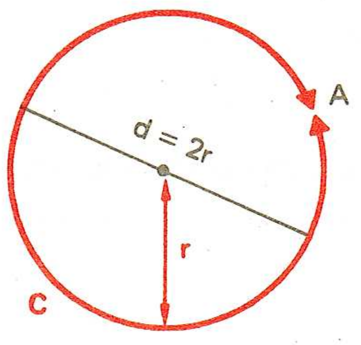


Figura 30: Comprimento de circunferência

Chamando de C o comprimento desse arco de uma volta, temos:

$$\frac{C}{d} = \pi \rightarrow C = d\,.\,\pi$$

Mas,

$$d = 2\,.\,r$$

Daí,

$$C = 2\pi r$$

3.2 A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Considere num plano um sistema de coordenadas cartesianas XOY e uma circunferência de raio unitário com centro na origem dos eixos.

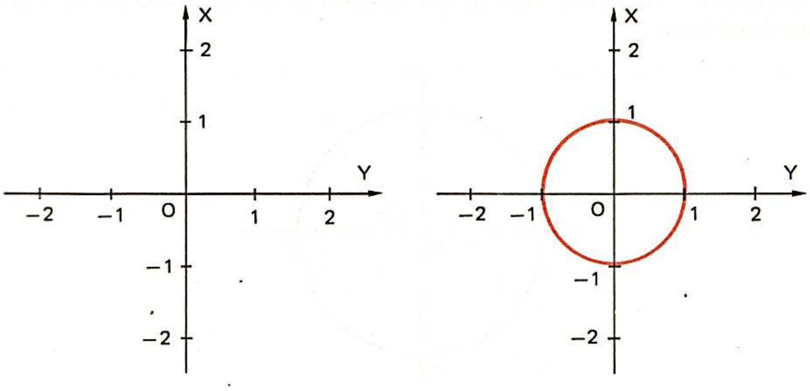


Figura 31: Circunferência de raio unitário com centro na origem dos eixos

Nessas condições os pontos A, B, C e D, interseções da circunferência com os eixos cartesianos, terão as seguintes coordenadas:

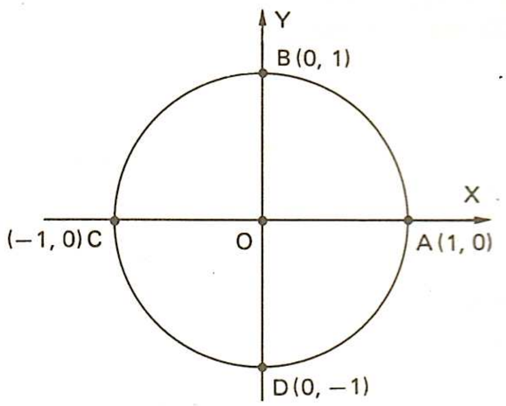


Figura 32: Circunferência trigonométrica

Estudaremos as razões trigonométricas com os arcos localizados sobre esta circunferência.

Vamos então convencionar que o ponto A será a origem dos arcos da circunferência e que os arcos percorridos no sentido anti-horário a partir de A terão medida positiva.

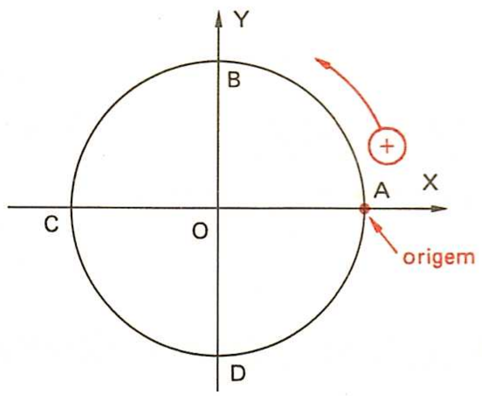


Figura 33: Arcos de medida positiva

A essa circunferência orientada, chamamos ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica.

Cada ponto P dessa circunferência será extremidade de um arco $\widehat{\mathrm{AP}}$ de medida igual à do ângulo central α.

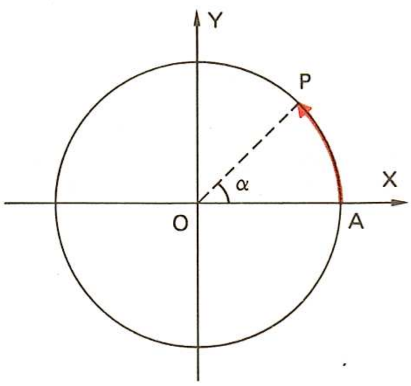


Figura 34: Arco de medida igual ao ângulo central

Os pontos $A, B\ , C\ e\ D$ dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes chamadas quadrantes:

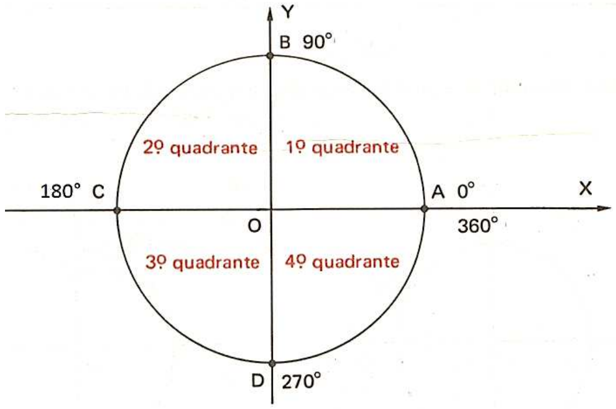


Figura 35: Quadrantes

Ao ponto A, origem da circunferência trigonométrica associamos o arco de $0°$. Aos pontos $B, C\ e\ D$ associamos, respectivamente, as extremidades dos arcos de $90°, 180°\ e\ 270°$, todos com origem em A.

Observação:

Em Trigonometria, podemos falar em arcos negativos e em arcos maiores do que $360°$.

Os arcos negativos são os que, partindo de A, percorrem a circunferência trigonométrica no sentido horário.

Exemplo:

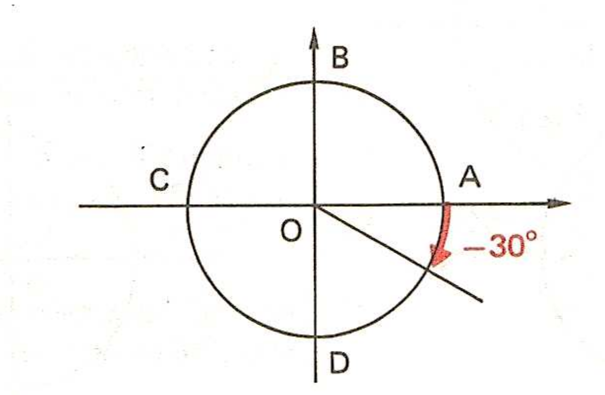


Figura 36: Arcos negativos

Os arcos maiores do que $360°$, são os que ultrapassam uma volta na circunferência trigonométrica.

Exemplo:

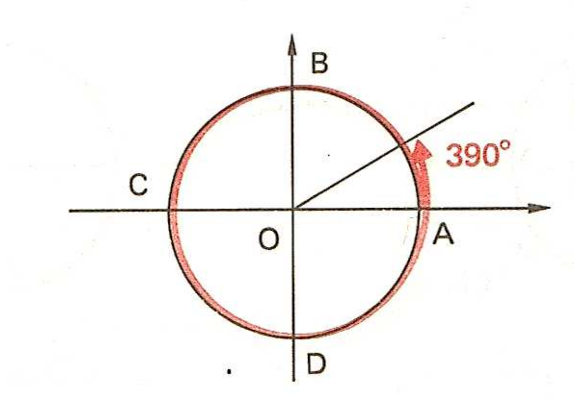


Figura 37: Arcos maiores que 360°

3.3 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

SENO E COSSENO

Tomemos na circunferência trigonométrica um ponto P, extremidade de um arco $\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{P}$. Esse ponto tem coordenadas (x_p, y_p).

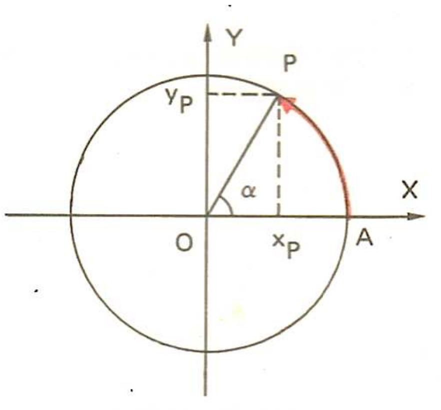


Figura 38: Ponto P tomado sobre a circunferência trigonométrica

Para o triângulo retângulo OPQ, valem as seguintes igualdades:

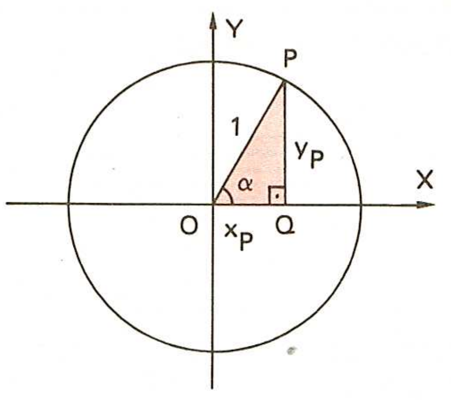


Figura 39: Triângulo OPQ

$$\cos\alpha = \frac{x_p}{1} \rightarrow x_p = \cos\alpha$$

$$sen\ \alpha = \frac{y_p}{1} \rightarrow y_p = sen\ \alpha$$

Podemos então definir:

O cosseno de α é a abcissa do ponto P.

O seno de α é a ordenada do ponto P.

Exemplo:

Para um arco $\widehat{AP} = 30°$.

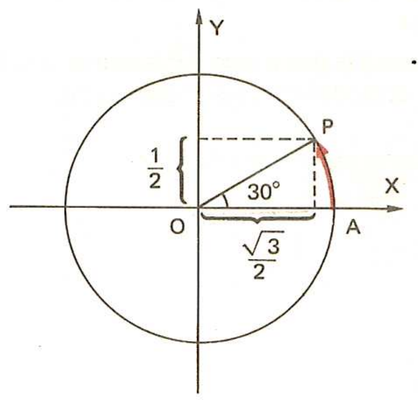


Figura 40: Abcissa e ordenada do arco de 30°

A abcissa de P vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$, portanto: $cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A ordenada de P vale $\frac{1}{2}$, portanto: $sen\ 30° = \frac{1}{2}$.

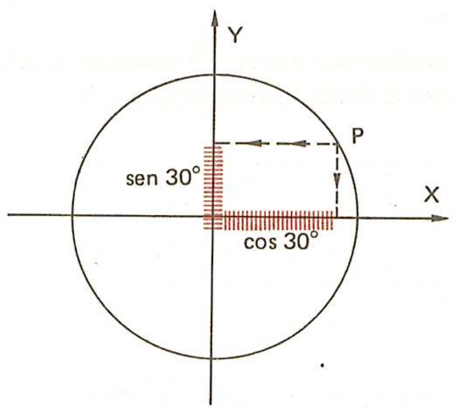


Figura 41: Seno e cosseno de um arco de 30°

3.4 REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

Uma tabela de razões trigonométricas fornece valores para ângulos de $0°\ a\ 90°$.

Apresentaremos agora um método para calcular as razões trigonométricas de ângulos maiores que $90°$.

Exemplos:

1) Vamos calcular $sen\ 150°$.

Inicialmente, localizemos o arco $\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{P} = 150°$ na circunferência trigonométrica. Vemos que P se encontra no $2º$ quadrante.

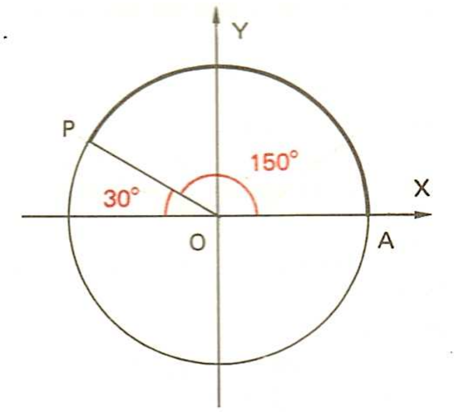


Figura 42: Arco de 150°

Note que o Ponto P_1, do $1º$ quadrante, é simétrico a P em relação ao eixo OY.

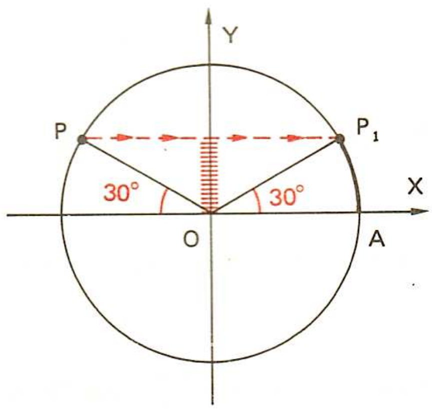


Figura 43: Seno de 150°

Como $P_1\ e\ P$ têm ordenadas iguais, então os arcos $\widehat{A}P_1$ e $\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{P}$ têm o mesmo seno:

$$sen\ 150° = sen\ 30°$$

ou seja,

$$sen\ 150° = \frac{1}{2}$$

O que fizemos, então, foi reduzir o arco de $150°$ ao $1º$ quadrante, para obter $sen\ 150°$.

2) Vamos calcular $\cos 240°$.

Para tanto, localizemos o arco $\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{P} = 240°$ na circunferência trigonométrica.

Vemos que P se encontra no $3º$ quadrante.

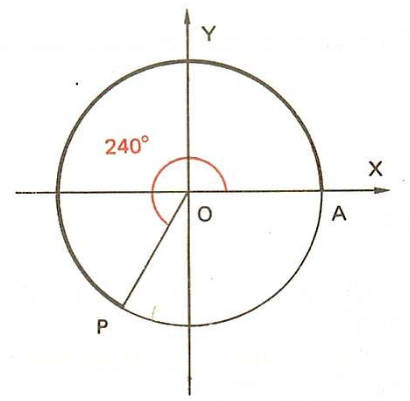


Figura 44: Arco de 240°

Note que o ponto P_1, do $1º$ quadrante, é simétrico a P em relação à origem O.

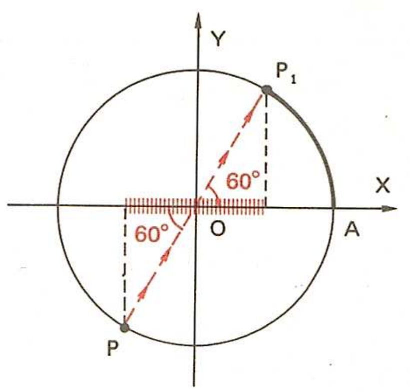


Figura 45: Cosseno de 240°

Como as abcissas de $P_1 e\ P$ têm sinais contrários, mas são iguais em módulo, podemos concluir que:

$$\cos\ 240° = -\cos 60°$$

ou seja,

$$\cos\ 240° = -\ \frac{1}{2}$$

3) Vamos calcular $sen\ 315°$.

Vemos que a extremidade do arco $\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{P} = 315°$ está no $4^{\underline{o}}$ quadrante.

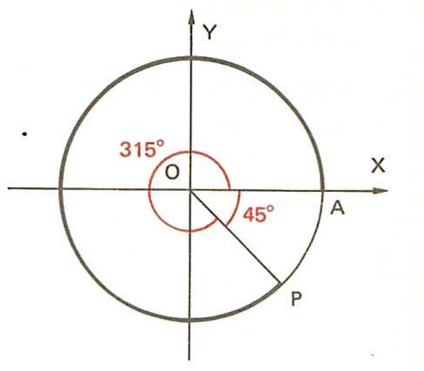


Figura 46: Arco de 315°

O ponto P_1, do $1^{\underline{o}}$ quadrante, é simétrico a P em relação ao eixo OX.

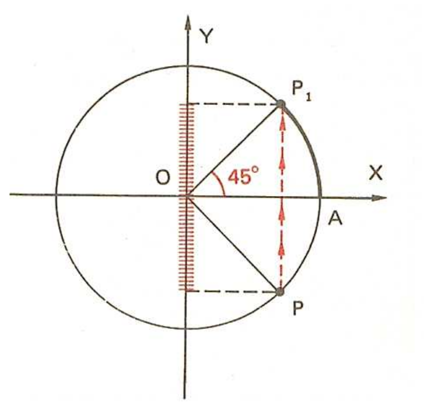


Figura 47: Seno de 315°

Como as ordenadas desses pontos têm o mesmo módulo, mas sinais contrários, concluímos que:

$$sen\,315° = -sen\,45°$$

ou seja,

$$sen\,315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Podemos generalizar esses exemplos da seguinte forma:

I) Para arcos com extremidade no 2º quadrante:

$$sen\,\alpha = sen\,(180° - \alpha)$$

$$\cos\alpha = -\cos\,(180° - \alpha)$$

II) Para arcos com extremidade no 3º quadrante:

$$sen\,\alpha = -sen\,(\alpha - 180°)$$

$$\cos\alpha = -\cos\,(\alpha - 180°)$$

III) Para arcos com extremidades no 4º quadrante:

$$sen\,\alpha = -sen\,(360° - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \cos\,(360° - \alpha)$$

3.5 A LEI DOS SENOS

Seja ABC um triângulo qualquer com lados $a, b\ e\ c$ e ângulos $\alpha, \beta\ e\ \theta$, opostos aos lados $a, b\ e\ c$ respectivamente. Vamos demonstrar que:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\theta}.$$

a) Se um dos ângulos é reto (figura 48), digamos $\alpha = 90°$, isto é, $sen\,\alpha = 1$, temos:

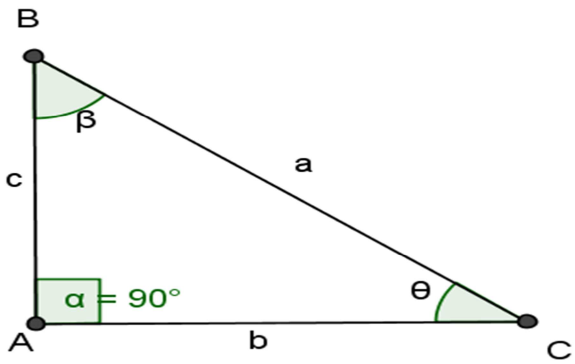


Figura 48: Lei dos senos ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{90}°$)

$$sen\ \beta = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{sen\ \beta}$$

e

$$sen\ \theta = \frac{c}{a} \rightarrow a = \frac{c}{sen\ \theta}$$

daí,

$$a = \frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \theta},$$

como queríamos demonstrar.

b) Se os três ângulos são agudos, traçamos a altura $h = \overline{BH}$ relativa ao lado $\overline{AC}$ (figura 49), e obtemos:

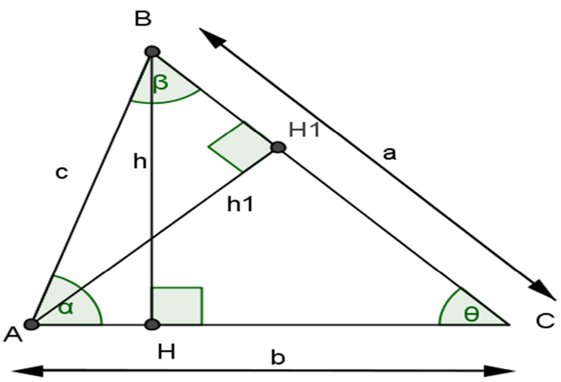


Figura 49: Lei dos senos ($\boldsymbol{\alpha} \text{‹} \mathbf{90}°$)

$$sen\,\alpha = \frac{h}{c} \rightarrow h = c\,.\,sen\,\alpha$$

e

$$sen\,\theta = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\,.\,sen\,\theta$$

daí,

$$h = c\,.\,sen\,\alpha = a\,.\,sen\,\alpha$$

isto é,

$$\frac{c}{sen\,\theta} = \frac{a}{sen\,\alpha}$$

Analogamente, se traçarmos a altura $h_1 = \overline{AH_1}$ relativa ao lado $\overline{BC}$, obtemos:

$$sen\,\beta = \frac{h_1}{c} \rightarrow h_1 = c\,.\,sen\,\beta$$

e

$$sen\,\theta = \frac{h_1}{b} \rightarrow h_1 = b.\,sen\,\theta$$

e daí,

$$h_1 = c.\,sen\,\beta = b\,.\,sen\,\theta$$

Isto é,

$$\frac{c}{sen\,\theta} = \frac{b}{sen\,\beta}$$

Assim,

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\theta}$$

como queríamos demonstrar.

c) Se um dos ângulos é obtuso, digamos $\alpha \rangle 90°$ (figura 50), isto é, $sen\,(180° - \alpha) = sen\,\alpha,$ traçamos a altura $h = \overline{BH}$, relativa ao lado $AC,$ e obtemos:

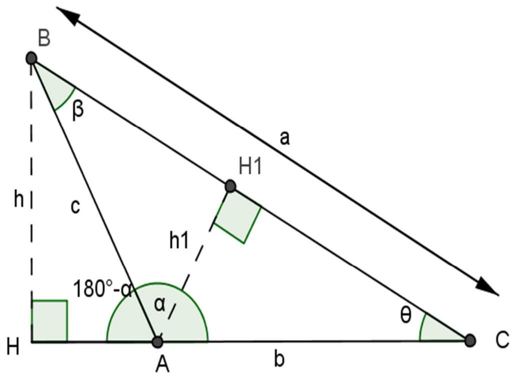


Figura 50: Lei dos senos ($\alpha > 90°$)

$$sen\,(180° - \alpha) = sen\,\alpha = \frac{h}{c} \rightarrow h = c\,.\,sen\,\alpha$$

e

$$sen\,\theta = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\,.\,sen\,\theta$$

daí,

$$h = c\,.\,sen\,\alpha = a\,.\,sen\,\theta \rightarrow \frac{c}{sen\,\theta} = \frac{a}{sen\,\alpha}$$

Analogamente, se traçarmos a altura $h_1 = \overline{AH_1}$, relativa ao lado BC, obtemos:

$$sen\,\theta = \frac{h_1}{b} \rightarrow h_1 = b\,.\,sen\,\theta$$

e

$$sen\,\beta = \frac{h_1}{c} \rightarrow h_1 = c\,.\,sen\,\beta$$

daí,

$$h_1 = b\,.\,sen\,\theta = c\,.\,sen\,\beta \rightarrow \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\alpha}$$

Assim,

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\theta},$$

como queríamos demonstrar.

3.6 A LEI DOS COSSENOS

Seja ABC um triângulo qualquer com lados a, b e c e ângulos α, β e θ, opostos aos lados a, b e c respectivamente. Vamos demonstrar que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

a) Se um dos ângulos é reto, digamos $\alpha = 90°$ (figura 51), isto é, $cos\ \alpha = 0$, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 (Teorema\ de\ Pitágoras).$$

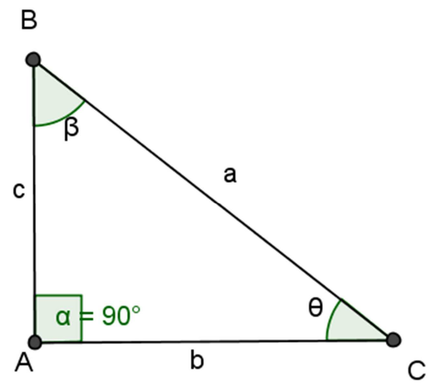


Figura 51: Lei dos cossenos ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{90}°$)

b) Se os três ângulos são agudos (figura 52), traçamos a altura $h = \overline{BH}$ relativa ao lado AC e considerando $\overline{AH} = x$, obtemos:

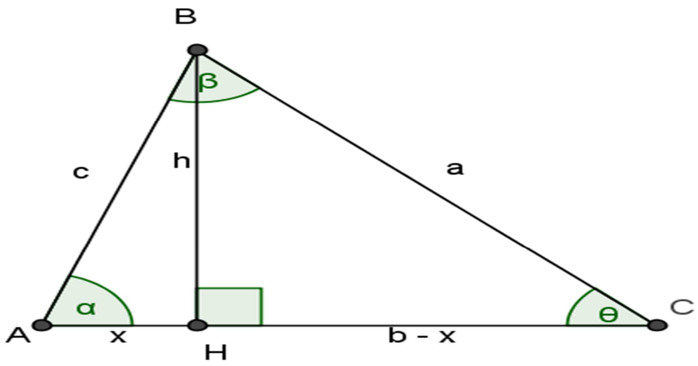


Figura 52: Lei dos cossenos ($\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{90}°$)

$$c^2 = h^2 + x^2 \rightarrow h^2 = c^2 - x^2$$

e

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 \rightarrow a^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

daí,

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2 \ \rightarrow \ a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

mas,

$$\cos\alpha = \frac{x}{c} \rightarrow x = c\,.\cos\alpha$$

daí,

$$a^2 = \ b^2 + c^2 - 2bc\,.cos\alpha$$

como queríamos demonstrar.

c) Se um dos ângulos é obtuso, digamos $\alpha \rangle 90°$ (figura 53), isto é, $cos\,(180° - \alpha) = -cos\,\alpha$, traçamos a altura $h = \overline{BH}$, relativa ao lado AC e considerando $\overline{AH} = x$, obtemos:

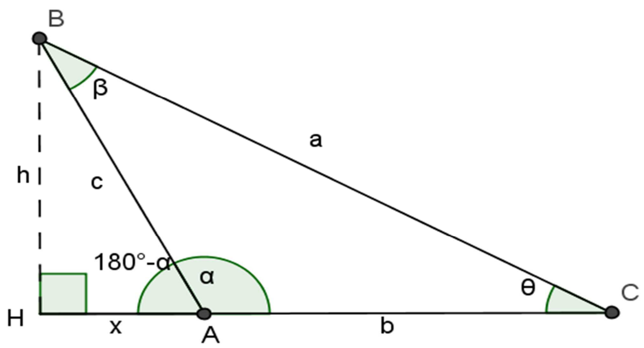


Figura 53: Lei dos cossenos ($\boldsymbol{\alpha \rangle 90}$°)

$$c^2 = h^2 + x^2 \ \rightarrow \ h^2 = \ c^2 - \ x^2$$

e

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2$$
$$a^2 = \ c^2\text{-}x^2 + b^2 + 2bx + x^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$$

mas,

$$cos\,(180° - \alpha) = \frac{x}{c} \rightarrow x = -c\,.cos\alpha$$

daí,

$$a^2 = \ b^2 + c^2 - 2bc\,.cos\alpha$$

como queríamos demonstrar.

3.7 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1) Para mostrar uma aplicação, consideremos o problema de calcular a distância de um ponto para o outro, inacessível. Por exemplo, um observador está em um ponto A e deseja conhecer a distância deste ponto a um ponto O, situado na outra margem de um rio, como na figura 54.

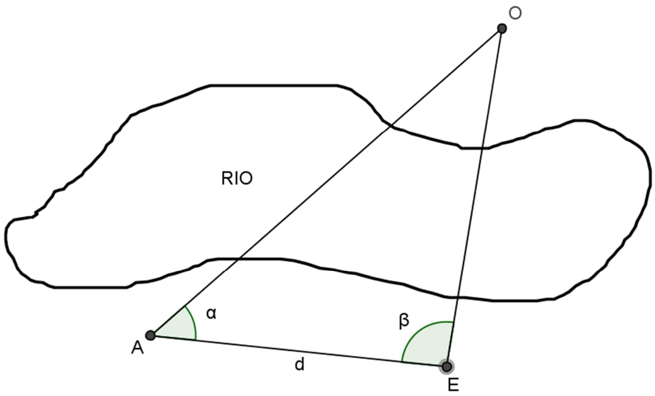


Figura 54: Problema da distância entre dois pontos

<u>Solução:</u>

Como a medida não pode ser feita diretamente, o observador escolhe um ponto E qualquer, na mesma margem de A (desde que O possa ser visto de E) e mede a distância $\overline{AE} = d$ e os ângulos $\widehat{OAE} = \alpha \; e \; \widehat{OEA} = \beta$. Aplicando então a Lei dos Senos no triângulo $OAE,$ temos:

$$\frac{\overline{OA}}{sen\,\beta} = \frac{d}{sen\,(180° - \alpha - \beta)}$$

ou seja,

$$\overline{OA} = \frac{d\,.\,sen\,\beta}{sen\,(180° - (\alpha + \beta))}$$

mas,

$$sen\,(180° - (\alpha + \beta)) = sen\,(\alpha + \beta)$$

daí,

$$\overline{OA} = \frac{d\,.\,sen\,\beta}{sen\,(\alpha + \beta)}\,.$$

Logo, a distância $\overline{OA}$ será facilmente calculada, pois as medidas dos ângulos $\alpha\ e\ \beta$ e da distância d são acessíveis.

2) Entre os pontos $A\ e\ B$, situados em uma fazenda, existe um morro. Um instrumento para medição de ângulos é colocado no ponto O e consegue mirar tanto A quanto B (figura 55). Sabendo que $\overline{OA} = 76\ m$, $\overline{OB} = 90\ m$ e $\widehat{AOB} = 126°$, calcule a distância $\overline{AB}$.

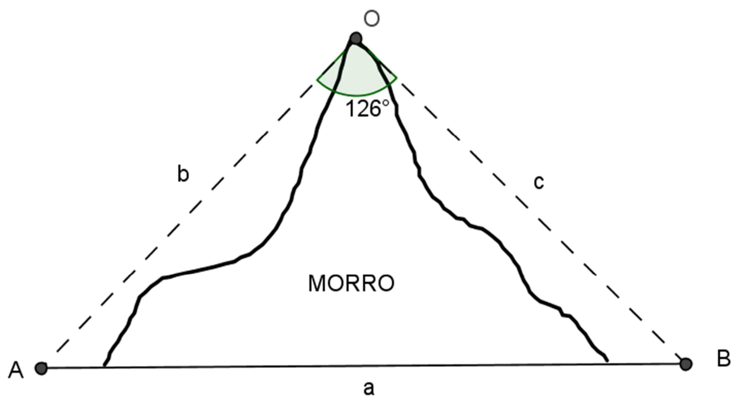


Figura 55: Problema da fazenda

<u>Solução:</u>

Fazendo $\overline{AB} = a, \overline{AO} = b\ e\ \overline{OB} = c$ e aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos 126°$$
$$a^2 = 76^2 + 90^2 - 2.76.90\,.\cos 126°$$
$$a^2 = 5776 + 8100 - 13680\,.(-\cos 54°)$$
$$a^2 = 13876 - 13680\,.(-0{,}5878)$$
$$a^2 = 21917{,}1$$
$$a = 148\ m.$$

Logo, a distância $\overline{AB}$ é de $148\ m$.

3) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa-d'água a $50\ m$ de distância. A casa está a $80\ m$ de distância da caixa-d'água e o ângulo formado pelas direções caixa-d'água-bomba e caixa-d'água-casa é de $60°$. Se pretendemos bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento serão necessários?

Solução:

A situação do problema está representada na figura 56.

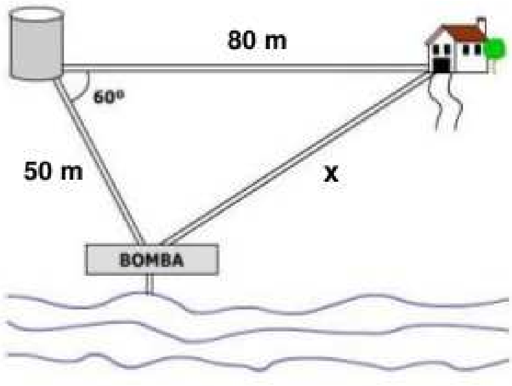


Figura 56: Problema do sítio

Aplicando a Lei dos Cossenos, temos:

$$x^2 = 50^2 + 80^2 - 2.50.80.\cos 60°$$

$$x^2 = 2500 + 6400 - 8000.0,5$$

$$x^2 = 4900$$

$$x = 70\ m.$$

Logo, serão necessários $70\ m$ de encanamento.

4) Para determinar a distância entre dois pontos $A\ e\ B$ situados além de um rio, marcaram-se dois pontos $C\ e\ D$ aquém do rio e mediram-se os ângulos $\widehat{ACB} = 35, \widehat{BCD} = 20°, \widehat{CDA} = 18°, \widehat{ADB} = 41°\ e\ \overline{CD} = 320\ m$ (figura 57). Calcular a distância $\overline{AB}$.

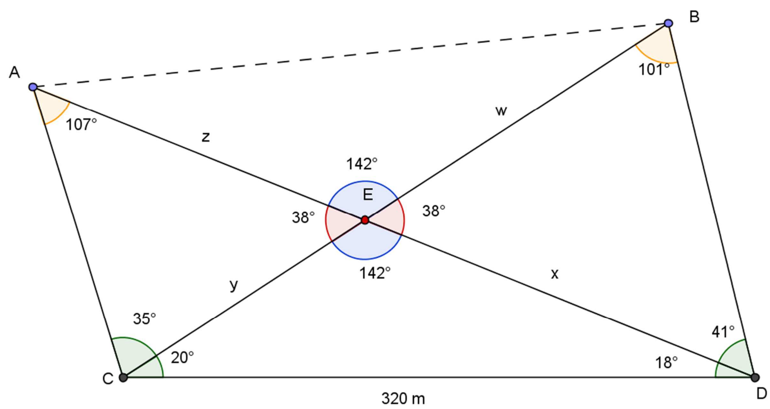


Figura 57: Problema do rio

Solução:

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em $180°$, temos:

$$\widehat{CED} = 142°,$$

e daí,

$$\widehat{DEB} = \widehat{AEC} = 180° - 142° = 38°.$$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo CED, temos:

$$\frac{x}{sen\ 20°} = \frac{320}{sen\ 142°} = \frac{y}{sen\ 18°}$$

$$x = \frac{320\ .sen\ 20°}{sen\ 142°}$$

$$x = 177{,}77\ m.$$

e

$$y = \frac{320\ .sen\ 18°}{sen\ 142°}$$

$$y = 160{,}62\ m.$$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo AEC, temos:

$$\frac{y}{sen\ 107°} = \frac{z}{sen\ 35°}$$

$$z = \frac{160{,}62\ .sen\ 35°}{sen\ 107°}$$

$$z = 96{,}34\ m.$$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo BED, temos:

$$\frac{x}{sn\ 101°} = \frac{w}{sen\ 41°}$$

$$w = \frac{177{,}77\ .sen\ 41°}{sen\ 101°}$$

$$w = 118{,}81m.$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo AEB, temos:

$$\overline{AB}^2 = z^2 + w^2 - 2zw\ .\cos 142°$$

$$\overline{AB}^2 = 96{,}34^2 + 118{,}81^2 - 2.96{,}34.118{,}81\,.\,(-\cos 38°)$$

$$\overline{AB}^2 = 9281{,}39 + 14115{,}81 - 22892{,}31\,.\,(-0{,}788)$$

$$\overline{AB}^2 = 41436{,}34$$

$$\overline{AB} = 203{,}56\ m.$$

Logo, a distância $\overline{AB}$ é de $203{,}56\ m$.

4 O USO DO TEODOLITO COMO UMA FERRAMENTA NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Agora, mostraremos métodos para o cálculo de distâncias inacessíveis, que vão utilizar os conceitos de trigonometria. A aplicação desses métodos necessita de um instrumento capaz de medir ângulos, usado por agrimensores, topógrafos e engenheiros: o teodolito.

O teodolito é um instrumento de precisão óptico que mensura ângulos verticais e horizontais, aplicado em diversos setores como na navegação, na construção civil, na agricultura e na meteorologia.

“Eles podem ser utilizados para medir distâncias que relacionadas com os ângulos verticais permitem obter tanto a distância horizontal entre dois pontos quanto á diferença de nível entre os mesmos” (SOUZA, 2010, p. 44).

4.1 CONSTRUINDO UM TEODOLITO CASEIRO

I) MATERIAL NECESSÁRIO

Um copo de plástico com tampa, cópia de um transferidor, cola, tubo oco (canudo), fita adesiva, um pedaço de arame fino, tesoura, pedaço de papelão, clips, um pedaço de linha.

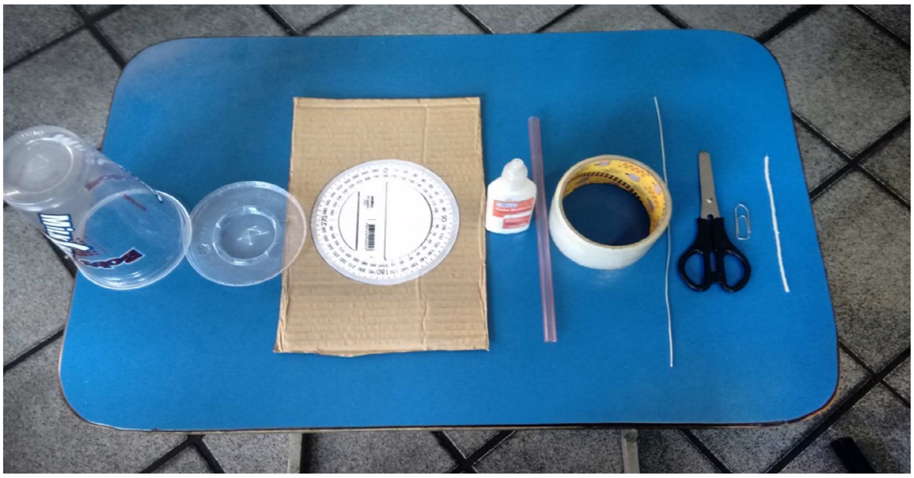


Figura 58: Materiais para confecção do teodolito caseiro

II) O TOQUE DE PRECISÃO

A tampa do copo servirá de base para a rotação do teodolito e deverá ser colada, de cabeça para baixo, de modo que seu centro coincida com o centro da cópia do transferidor, que está colada no pedaço de papelão, o que dará mais precisão ao teodolito caseiro. Para encontrar o centro da tampa, trace nela dois diâmetros. Faça um furo onde eles se cruzarem.

Na figura 59, os alunos optaram por pintar o pedaço de papelão com uma tinta verde.

Figura 59: Toque de precisão

III) O PONTEIRO

O pedaço de arame fino será o ponteiro do teodolito que permitirá fazer a leitura em graus no transferidor. Para instalá-lo, faça dois furos (rasgos) diametralmente opostos na lateral do copo, próximo de sua boca, e passe o arame fino pelos furos deixando-o atravessado no copo.

Figura 60: O ponteiro

IV) A MIRA

O tubo oco (canudo) será a mira por onde você avistará os pontos a serem medidos. Cole o tubo na base do copo, de forma que ele fique paralelo ao ponteiro (pedaço de arame fino). Para refinar essa mira, cole na extremidade do tubo oco (canudo) dois pedaços de linha formando uma cruz.

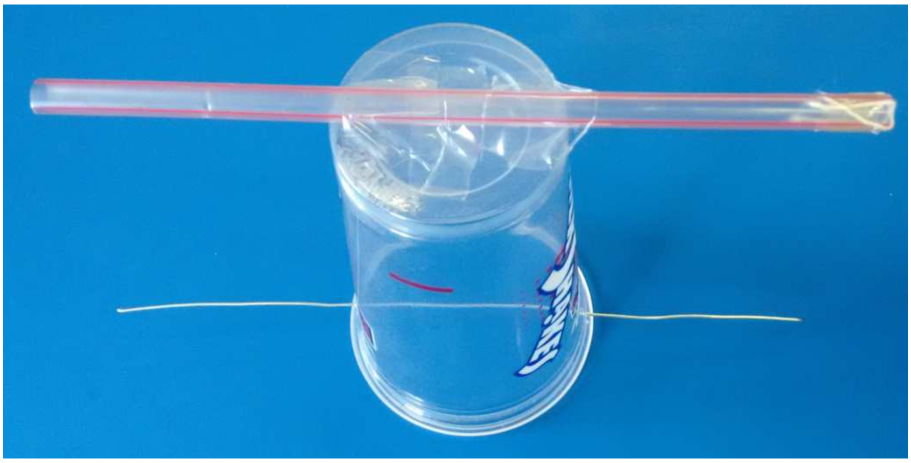


Figura 61: A mira

V) PRONTO PARA USAR

Com ele, você mede, a partir da sua posição, o ângulo formado entre dois outros pontos. Na horizontal ou na vertical, basta alinhar a indicação 0° do transferidor com um dos pontos e girar a mira até avistar o outro ponto. O ponteiro indicará de quantos graus é a variação.

Figura 62: O teodolito caseiro

VI) MODO DE USO

Posicione o teodolito caseiro de modo que a sua base fique perpendicular ao objeto que vamos medir a altura. Medimos a distância do objeto até o teodolito com um metro. Através do tubo oco, miramos o pico do objeto (o ponto mais alto), com isso o arame fino marcará um ângulo na cópia do transferidor. Com esse ângulo usamos a trigonometria para medir a altura, uma vez que a tangente do ângulo é igual ao cateto oposto (altura) dividido pelo cateto adjacente (distância do objeto ao teodolito).

4.2 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ALUNOS

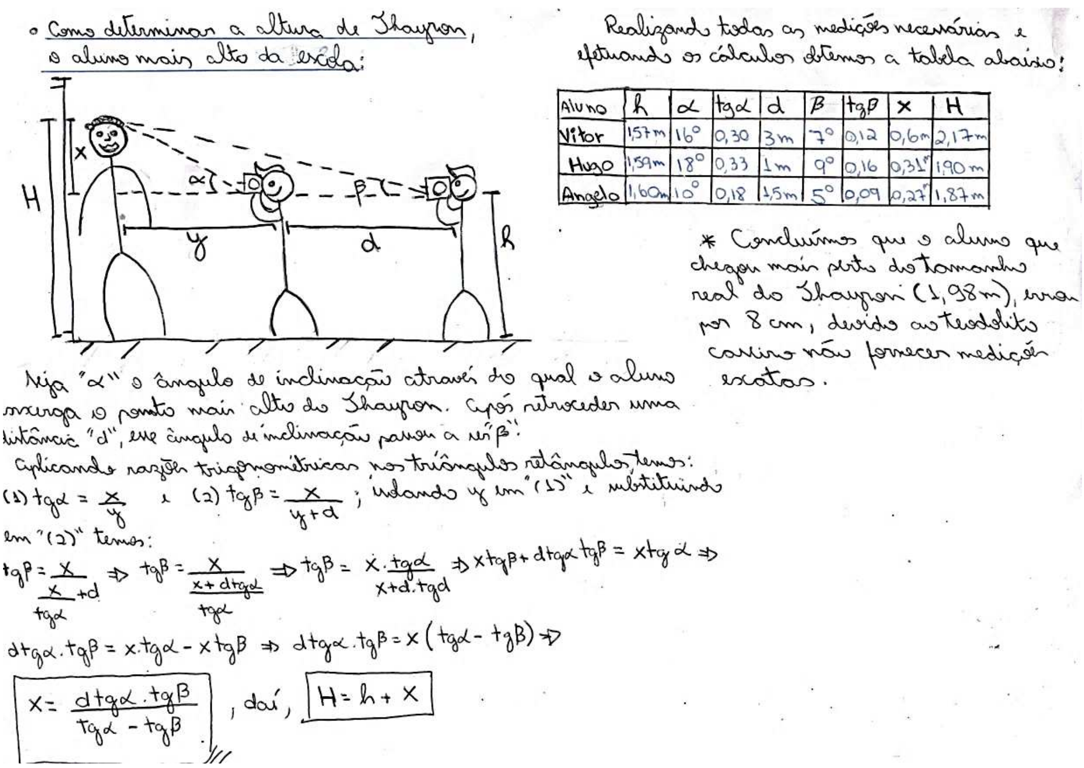
Após a construção dos teodolitos pelos 3 grupos, os alunos serão desafiados a obterem algumas medidas inacessíveis existentes dentro do espaço da escola, utilizando os teodolitos caseiros construídos e aplicando os seus conhecimentos sobre trigonometria. Dentre as várias opções foram escolhidas as seguintes atividades: o grupo 1 optou por encontrar a altura do Thayron, o aluno mais alto da escola, o grupo 2 escolheu determinar a altura de um brinquedo(escorregador) que se encontra nas dependências da escola e o grupo 3 resolveu simular a situação do cálculo da distância entre dois pontos, imaginando que existia um rio entre eles. O resultado esperado é que os alunos de posse dos dados obtidos percebam que as figuras geométricas que estão sendo construídas são triângulos e para determinar as medidas solicitadas utilizarão esses triângulos e os conceitos trabalhados nos capítulos anteriores.

Durante o processo de medição o professor deverá estar atento à realização, ouvindo atentamente as possíveis arguições dos alunos durante o processo, estimulando-os ao uso de suas percepções e intuições. O professor deverá mediar à ação do aluno, resgatando e elaborando conceitos matemáticos para posterior compreensão e sistematização.

Findado o processo de medições, o professor deverá prosseguir com uma roda de discussão dos resultados com todos os alunos participantes em cada grupo. O professor deverá resgatar os conceitos trabalhados e então por fim, os alunos serão orientados a realizar a sistematização dos conceitos de maneira formal.

I) EXPOSIÇÃO DAS ATIVIDADES

Grupo 1:



• Como determinar a altura de Thayron, o aluno mais alto da escola:

Realizando todas as medições necessárias e efetuando os cálculos obtemos a tabela abaixo:

Aluno	h	α	$tg\alpha$	d	β	$tg\beta$	x	H
Vitor	1,57m	16°	0,30	3m	7°	0,12	0,6m	2,17m
Hugo	1,59m	18°	0,33	1m	9°	0,16	0,31m	1,90m
Angelo	1,60m	10°	0,18	1,5m	5°	0,09	0,27m	1,87m

* Concluímos que o aluno que chegou mais perto do tamanho real do Thayron (1,98m), errou por 8 cm, devido ao teodolito caseiro não fornecer medições exatas.

Seja "α" o ângulo de inclinação através do qual o aluno enxerga o ponto mais alto do Thayron. Após retroceder uma distância "d", esse ângulo de inclinação passou a ser "β".

Aplicando razões trigonométricas nos triângulos retângulos, temos:

(1) $tg\alpha = \frac{x}{y}$ e (2) $tg\beta = \frac{x}{y+d}$; isolando y em "(1)" e substituindo em "(2)" temos:

$tg\beta = \frac{x}{\frac{x}{tg\alpha}+d} \Rightarrow tg\beta = \frac{x}{\frac{x+d\,tg\alpha}{tg\alpha}} \Rightarrow tg\beta = x.\frac{tg\alpha}{x+d.tg\alpha} \Rightarrow x\,tg\beta + d\,tg\alpha\,tg\beta = x\,tg\alpha \Rightarrow$

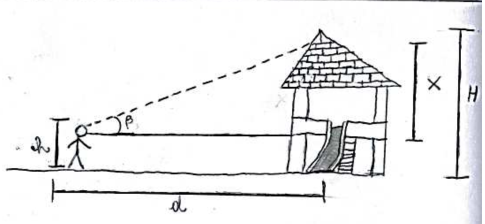
$d\,tg\alpha.tg\beta = x.tg\alpha - x\,tg\beta \Rightarrow d\,tg\alpha.tg\beta = x\,(tg\alpha - tg\beta) \Rightarrow$

$\boxed{x = \frac{d\,tg\alpha.tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}}$, daí, $\boxed{H = h + x}$

Figura 63: Atividade do grupo 1

Grupo 2:

Como determinar a altura de um brinquedo (escorregador) situado em uma área de recreação dentro da escola



Com o auxílio do Teodolito caseiro, construído em sala de aula, podemos determinar o ângulo β (ângulo pelo qual o aluno visualiza o ponto mais alto do brinquedo). Seja "d" a menor distância entre o aluno e o brinquedo.

Aplicando razões Trigonométricas no Triângulo retângulo, Temos:

$Tg\,\beta = \frac{X}{d} \Rightarrow \boxed{X = d \cdot Tg\,\beta}$

Daí, $\boxed{H = h + X}$

Utilizando todos os integrantes do grupo e realizando as medições necessárias, construímos uma Tabela.

Ao findarmos a atividade, concluímos que o aluno que obteve a altura mais aproximada da altura do brinquedo (2,64 m) errou por 7cm, erro já esperado por nós devido a utilização de um Teodolito caseiro.

Alunos	h	d	β	tgβ	X	H
Maria	1,58	4,5	17°	0,305	1,38	2,86
Gabriel	1,69	5	10°	0,176	0,88	2,57
Hallyson	1,49	5,5	11°	0,194	1,07	2,56
Matheus	1,62	6	12°	0,212	1,27	2,89

As medidas de h, d, X e H, apresentados na Tabela acima, estão em metros.

Figura 64: Atividade do grupo 2

Grupo 3:

Como determinar a distância entre dois pontos situados em margens opostas de um rio:

* Seja A um ponto em uma margem do rio e B um ponto na margem oposta. Queremos encontrar a distância $\overline{AB}$.

* Seja C um ponto situado na mesma margem de B. Com o auxílio de uma trena, encontramos facilmente a distância de $\overline{BC} = X$

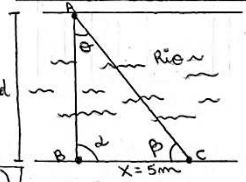
* Utilizando o teodolito caseiro por nós confeccionado, encontramos as medidas dos ângulos $B\hat{C}A = \beta$ e $C\hat{B}A = \alpha$. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é = 180°, determinamos então o ângulo $B\hat{A}C = \theta$, isto é, $\boxed{\theta = 180° - (\alpha + \beta)}$

* Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC, temos: $\frac{X}{sen\,\theta} = \frac{d}{sen\,\beta} \Rightarrow$

* $sen.\theta = d.sen\,\beta \Rightarrow \boxed{d = \frac{X.sen\,\beta}{sen\,\theta}}$

* Considerando X = 5 m e realizando as medições necessárias com o teodolito podemos preencher a seguinte tabela:

Alunos	α	β	θ	Sen β	Sen	d
Jessika	64°	75°	41°	0,966	0,656	7,4m
Kassiane	69°	78°	33°	0,978	0,545	9,0m
Gabriela	64°	78°	38°	0,978	0,616	7,9m
Amanda	67°	82°	31°	0,990	0,515	9,6m



* Concluímos que o aluno que chegou mais perto da real distância $\overline{AB}$ = 8,6 m errou por apenas 30 cm, fato já esperado por nós, devido a imprecisão do teodolito.

Figura 65: Atividade do grupo 3

II) ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Devemos deixar claro neste tipo de atividade onde se busca trabalhar o assunto de forma mais concreta que as aproximações obtidas não seriam adequadas a outros tipos de trabalhos onde se necessita de resultados mais precisos, para isso temos as tabelas trigonométricas disponíveis nos livros didáticos, calculadoras científicas, etc. Temos o teodolito usado por exemplo em levantamentos topográficos, contudo para essa finalidade didática os materiais utilizados nesta experiência foram satisfatórios, já que parte dos nosso alunos encontram-se em um estágio de aprendizagem onde necessitam de materiais manipuláveis para facilitar a compreensão de alguns conteúdos do Ensino Básico, entre eles noções básicas de trigonometria

III) DEPOIMENTO DOS ALUNOS A RESPEITO DAS ATIVIDADES

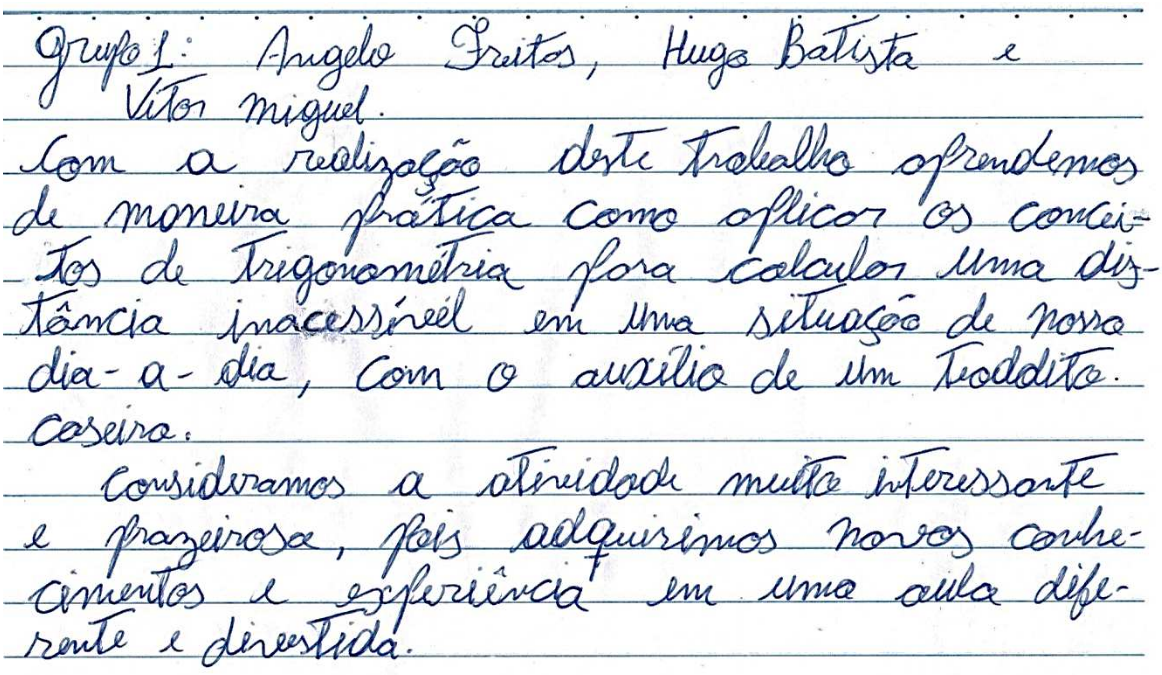

Grupo 1: Angelo Freitas, Hugo Batista e Vitor miguel.
Com a realização deste trabalho aprendemos de maneira prática como aplicar os conceitos de Trigonometria para calcular uma distância inacessível em uma situação de nosso dia-a-dia, com o auxílio de um Teodolito caseiro.
Consideramos a atividade muito interessante e prazeirosa, pois adquirimos novos conhecimentos e experiência em uma aula diferente e divertida.

Figura 66: Depoimento do grupo 1

Grupo 2: Maria Eduarda, Matheus, Gabriel e Hallyson.

Este trabalho foi muito interessante, pois tivemos a oportunidade de confeccionar e utilizar um teodolito caseiro, através de uma aula prática realizada no "playground" da escola. Consideramos a experiência muito proveitosa e por isso agradecemos ao nosso professor Lélio pelos ensinamentos adquiridos durante a atividade e por ter escolhido a nossa turma para participar de sua dissertação de mestrado.

Figura 67: Depoimento do grupo 2

Grupo: 3 – Amanda, Gabriela, Jéssika, Kassiane.

Depoimento:

O trabalho que realizamos em sala de aula sob orientação do professor Lélio pôde nos trazer uma experiência nova através da confecção e manuseio de um teodolito caseiro, que nunca tínhamos usado antes. Considerando que a aula ficou mais dinâmica e divertida, e agradecemos a oportunidade de apreder diversos conceitos de trigonometria durante a realização dessa atividade.

Figura 68: Depoimento do grupo 3

4.3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Exemplo1: Para determinar a altura de um prédio, o topógrafo colocou seu teodolito na praça em frente. Com uma trena, ele mediu a distância do teodolito ao prédio e encontrou $27\ m$. Mirando o alto do prédio, ele verificou, na escala do teodolito, que o ângulo formado por essa linha visual com a horizontal é de $58°$. Se a luneta do teodolito está a $1{,}7\ m$ do chão, qual é a altura do prédio?

Solução:

Na figura 69 abaixo, $\overline{AB}$ é a altura do teodolito e $\overline{CD}$ é a altura do prédio.

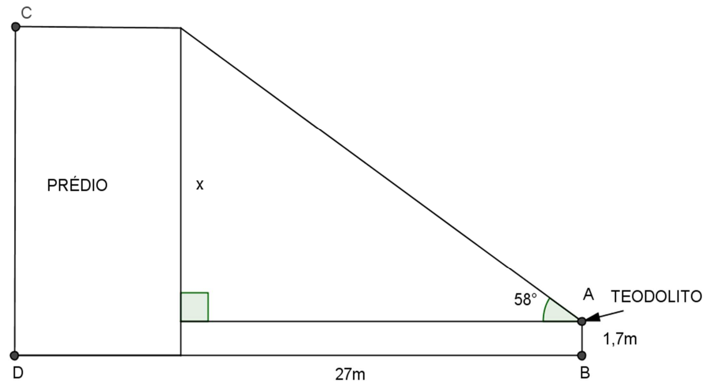


Figura 69: Problema do prédio

Vamos calcular o cateto x do triângulo retângulo que aparece na figura. Temos:

$$tg\ 58° = \frac{x}{27}\ .$$

Da tabela trigonométrica obtemos que a tangente de $58°$ é aproximadamente $1{,}6$.

Assim,

$$\frac{x}{27} = 1{,}6\ \rightarrow x = 1{,}6\ .\ 27 = 43{,}2\ m.$$

A altura total do prédio será igual a esse valor mais $1{,}7\ m$, que é a altura da luneta do teodolito.

Portanto, $\overline{CD} = 43{,}2\ m + 1{,}7\ m = 44{,}9\ m$.

A altura desse prédio é, então, de 44 metros e 90 centímetros, ou seja, aproximadamente 50 metros.

Exemplo 2: Neste exemplo determinaremos a altura de um morro em relação a uma região plana que existe em volta. Para isso, foi preciso fazer duas medições com o teodolito. Inicialmente, o teodolito foi colocado em um ponto A. Mirando o ponto V, o mais alto do morro, verificamos que o ângulo dessa linha visual com a horizontal era de $10°$. Em seguida, o topógrafo aproximou-se do morro e fixou o teodolito no ponto B. Nessa posição, mirando o ponto V, o mais alto do morro, ele verificou que o ângulo da linha visual com a horizontal passou a ser de $26°$. Sabendo que a distância $\overline{AB}$ (medida com a trena) era de $100\ m$, qual é a altura do morro?

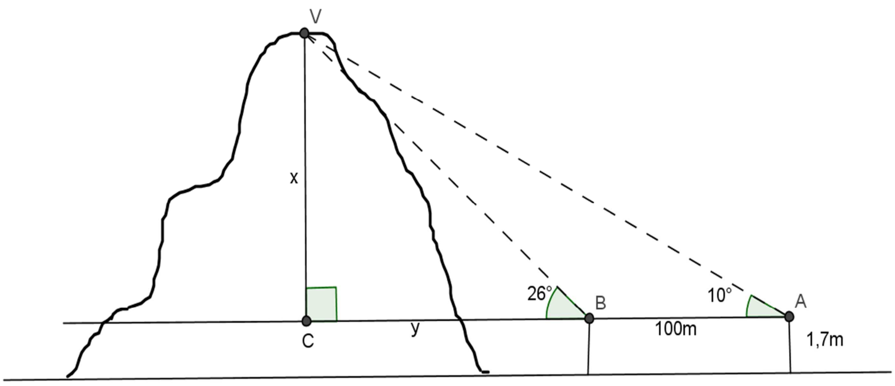


Figura 70: Problema do morro

Solução:

Com os dados obtidos pelo topógrafo, vamos calcular a altura do morro, utilizando a figura 70 acima.

Determinando $\overline{BC} = y\ e\ \overline{VC} = x$, temos as relações:

$$\frac{\overline{VC}}{\overline{\overline{AC}}} = tg\ 10°$$

$$\frac{x}{100 + y} = 0{,}1763(1)$$

e

$$\frac{\overline{VC}}{\overline{BC}} = tg\ 26°$$

$$\frac{x}{y} = 0{,}4877(2)$$

Da relação (1) tiramos:

$$x = y\ .\ 0{,}1763 + 17{,}63.$$

Da relação (2) tiramos:

$$x = y \,.\, 0{,}4877.$$

Igualando, temos:

$$y \,.\, 0{,}4877 = y \,.\, 0{,}1763 + 17{,}63$$

$$y \,.\, (0{,}4877 - 0{,}1763) = 17{,}63$$

$$y \,.\, 0{,}3114 = 17{,}63$$

$$y = \frac{17{,}63}{0{,}3114}$$

$$y = 56{,}62\ m.$$

e

$$x = y \,.\, 0{,}4877 = 27{,}61\ m.$$

Somando a esse valor a altura do teodolito $(1{,}7\ m)$, concluímos que a altura do morro em relação à região plana em volta é de $27{,}61\ m + 1{,}7\ m = 29{,}31\ m$, aproximadamente.

5 CONCLUSÃO

No presente trabalho realizamos um estudo das aplicações da trigonometria devido à necessidade de se ter um material de apoio para enriquecer e dinamizar as aulas, considerando que na abordagem desse tema os problemas de aplicação não devem ser deixamos para o final, mas devem ser o motivo e o contexto para que o aluno aprenda a importância da trigonometria no auxílio do cálculo de distâncias inacessíveis, pois permitem que o ensino se estruture através dos muitos exemplos. Realizar esse estudo sobre trigonometria contribuiu muito para a minha formação, pois pude me deparar com novos conhecimentos e diversas situações onde a trigonometria é aplicada. Exemplo disso foi á resolução do problema da construção do túnel, resolvido de duas maneiras diferentes nos capítulos 1 e 2. Outro exemplo que posso citar foi a construção e utilização do teodolito caseiro para a resolução de algumas atividades envolvendo distâncias inacessíveis, desenvolvida pelos alunos do Ensino Médio do Centro Educacional Santa Rita de Cássia.

"Uma relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às suas aplicações. Especialmente para o aluno que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que devem ser asseguradas são as aplicações, garantindo a compreensão da Matemática como ciência" (BRASIL, PCN Ensino Médio, p.44).

REFERÊNCIAS

[1] CARMO, Manfredo; MORGADO, Augusto; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria e Números Complexos.** Rio de Janeiro: SBM, 1992.

[2] ANTUNES, Fernando. **Matemática por assunto,** vol 3. São Paulo: Editora Scipione, 1989.

[3] BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

[4] BRASIL/MEC**. Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática, terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEMTEC, 1998.

[5] AYRES JR, Frank. **Trigonometria. Coleção Schaum,** Rio de Janeiro: Livro Técnico S.A., 1962.

[6] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio**. Matemática e realidade,** 8ªEd, São Paulo, 2013.

[7] LIMA, ELON LAGES. **A Matemática do Ensino Médio -** volume 1. Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cesar Morgado. Coleção do Professor de Matemática, 9ª Ed, Rio de Janeiro. SBM, 2006.

[8] ALVES, Sérgio. **A Geometria do globo terrestre.** Apostila 6, OBMEP, 2009.

[9] DANTE, Luis Roberto. **Matemática,** Volume 1, Ensino Médio, Editora Ática, São Paulo, 2004, Livro do professor.

[10] IMENES, Luiz M; LELLIS, Marcelo. **Matemática Imenes e Lellis,** 7ªsérie, Editora Scipione, São Paulo, 1999.

[11] GIOVANNI, José Rui; CASTRUCCI, Benedito. **A conquista da Matemática,** 8ª série, FTD, São Paulo, 1985.

[12] JOUCOSKI, Emerson. **Construindo um teodolito caseiro.** <http://people.ufpr.br/~joucoski/ufpr_litoral/atividade_2008-1_01_teodolito.pdf> Acesso em 10/12/2014.