UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

THIAGO BOLDRINI

ÁREAS SOB CURVAS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

VITÓRIA
2015

THIAGO BOLDRINI

ÁREAS SOB CURVAS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim.

VITÓRIA
2015

FOLHA DE APROVAÇÃO

AGRADECIMENTOS

Um dos maiores prazeres do ser humano é a obtenção da vitória. Uma vida sem lutas ou desafios não vale a pena ser vivida. Acompanhado de uma família que sempre lutou e acreditou no meu potencial, tenho neste trabalho a certeza de que mais uma etapa foi vencida, uma etapa que não acreditaria conquistar, até a pouco tempo.

Em primeiro lugar, agradeço Deus pela oportunidade de ingressar no mestrado e, mesmo com todas a dificuldades e tribulações enfrentadas, por continuar a me iluminar em todos os momentos.

Com muito carinho, agradeço a meus pais, Luiz Antônio Boldrini e Cecília Altoé Boldrini, pelos princípios recebidos de uma educação exemplar e pela fé em todas as etapas pelas quais passamos.

À minha esposa, Lívia Toscano Barbosa, por estar a meu lado em todos os desafios vividos durante esse processo, bons ou ruins, sempre procurando propiciar momentos de motivação para que pudesse alcançar meus objetivos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim pela paciência e atenção durante a elaboração do trabalho, e a todos os professores deste Mestrado, pelo conhecimento transmitido e pela incrível experiência de convívio.

A meus alunos, que deram estímulo a esta obra através de suas dificuldades e curiosidades, no árduo processo diário de aprendizagem.

Aos colegas de turma, que compartilharam suas valiosas experiências durante o convívio das aulas.

"Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende."

Leonardo da Vinci

RESUMO

Proponho a continuação do estudo de funções, no Ensino Médio, através da inserção do estudo de áreas sob gráficos e aplicações em algumas áreas, como Física e Economia. Apresento o conteúdo na forma de atividades, para serem desenvolvidas com o auxílio do professor, a definição de logaritmo natural como área sob um gráfico e atividades para explorar a compreensão.

Palavras-chave: Área sob uma Curva, Logaritmo Natural, Sequência Didática, Ensino Médio.

ABSTRACT

I propose the continuation of the studies of functions on high school by inserting the study of areas under graphics and applications in some subjects such as physics and economics. I present the content as activities to be developed with the teacher's help, the definition of natural logarithm as area under a graph and activities to explore the understanding.

Key-words: Area under a Curve, Natural Logarithm, Didactic Sequence, High School.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os atuais currículos de Matemática do Ensino Médio encontram-se muito limitados, possibilitando pouco avanço no estudo de funções. Muitas aplicações não podem ser desenvolvidas, por falta de ferramentas, muitas restritas a disciplinas de Ensino Superior.

O trabalho aqui apresentado tem o objetivo de mostrar a possibilidade de inserção de conteúdos até então não contemplados nos currículos da educação básica, mas que um dia já fizeram parte desta. O assunto em questão é o estudo de áreas sob gráficos, base para o estudo de integral como área, sob o desenvolvimento de uma sequência didática, como alternativa para enriquecimento do estudo de funções.

Por meio da sequência didática, o aluno terá a oportunidade de desenvolver de forma intuitiva o que é proposto, fazendo suas próprias descobertas e formulando conceitos. Cada passo foi planejado com cuidado para contemplar todos os alunos de uma turma regular de segundo ano do Ensino Médio de escola pública, independente da diversidade encontrada ou das dificuldades prévias. Cada atividade funciona como degrau de uma escada que procura levar a uma considerável evolução na percepção do estudo de funções.

O primeiro capítulo compreende o desenvolvimento da sequência didática para a construção do conteúdo de áreas sob curvas.

As atividades iniciais apresentam grau mais elementar de dificuldade, buscando uma aprimoração trivial do conceito de função, com a intenção de aproximar todos os alunos daquilo que será desenvolvido, principalmente os que possuem maior dificuldade ou determinada aversão à disciplina.

Algumas questões possuem certo grau de repetição, buscando pouca evolução em relação ao que foi desenvolvido anteriormente, com o objetivo de fixação de ideias. Isso torna-se importante quando pensamos em alunos do Ensino Médio, pois muitos destes precisam construir uma base sólida afim de avançar de forma mais segura e eficaz no que se pretende.

Esta primeira parte apresenta aplicações do estudo de áreas sob curvas em algumas áreas de conhecimento, como Física e Economia. Devemos ter a percepção que para um aluno de educação básica, o significado da aplicação será um pouco diferente daquele esperado para alunos de ensino profissionalizante, sendo que este já possui uma base teórica mais profunda da área em que estuda. Porém, a inserção das aplicações pode despertar o interesse e a curiosidade em matemática dos alunos do Ensino Médio, mostrando que ela pode e deve ser prazerosa em todos os níveis.

No segundo capítulo apresento uma aplicação mais específica: o estudo do logaritmo natural.

No segundo ano do Ensino Médio, o conteúdo de logaritmos já foi apresentado, como expoente desconhecido em uma potência e como função inversa da função exponencial. Geralmente, o logaritmo é aprendido de maneira puramente mecânica, sendo o estudante privado de uma visão mais ampla do que se pode alcançar.

Então apresento o logaritmo natural do ponto de vista geométrico, com adaptações referentes ao nível de ensino em que o aluno se encontra e como aplicação do cálculo de áreas sob curvas. Ao fim do capítulo, uma atividade é proposta visando a interação do estudante com o que foi apresentado, possibilitando que faça suas próprias análises.

O terceiro capítulo procura colocar em prática o que foi estudado, possibilitando esclarecimentos mais precisos sobre pontos que tornarem-se necessários. Busco não focar simplesmente em repetições, mas sim em possibilitar que o aluno perceba se o conteúdo trabalhando foi realmente apropriado. Por esse motivo não é uma lista de exercícios vasta, já que todo o assunto foi trabalhado em atividades.

O professor tem papel fundamental no trabalho proposto: será o responsável pelas indagações a respeito do que está sendo desenvolvido. Função fundamental, uma vez que o professor tem uma visão mais ampla do horizonte que se pretende alcançar, consequência de sua formação. Deve-se sempre adotar uma postura democrática em relação a todos os questionamentos, independente da relevância da dúvida, procurando sempre manter o foco.

Cada passo desta sequência é como uma pequena peça de um quebra cabeça, que formulei com base em minha experiência na educação básica e também no Ensino Superior. Muitos alunos chegam ao terceiro grau muito imaturos em conteúdos matemáticos elementares, muitas vezes com uma visão extremamente limitada. Percebe-se que tudo foi trabalhado de forma pouco crítica, com foco apenas em desenvolvimentos de questões e em como alcançar o resultado mais rápido, acarretando a aprovação no vestibular.

1. ÁREA SOB UMA CURVA

1.1 Introdução ao estudo do cálculo da área sob uma curva

A maior parte do estudo do Cálculo baseia-se em torno dos conceitos fundamentais de derivada e integral. Ambos conceitos tem origem motivada na geometria:

> [...] a derivada tem origem geométrica: está ligada ao problema de traçar a tangente a uma curva. A integral também tem uma origem geométrica: está ligada ao problema de determinar a área de uma figura plana delimitada por uma curva qualquer. (ÁVILA, 2003, p. 239).

O foco da sequência didática é o cálculo da área sob uma curva, em particular, no ensino médio.

O estudo de áreas com formas não poligonais data desde a antiguidade. Os gregos calculavam áreas com contornos curvos, trabalhavam com figuras bem mais gerais que formas poligonais. Porém, somente com o surgimento dos recursos da Geometria Analítica, no século XVIII, que métodos mais generalistas puderam ser desenvolvidos.

Baseado nas ideias de Stewart (2009), dada uma função contínua $f: I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é intervalo, podemos entender a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b como a porção do plano cartesiano limitada pelo gráfico da função f, as retas verticais $x = a$ e $x = b$, e o eixo das abscissas.

Em termos práticos, podemos definiar uma função contínua como uma função real que, ao traçarmos seu gráfico no sistema cartesiano ortogonal, não precisamos retirar a "caneta do papel".

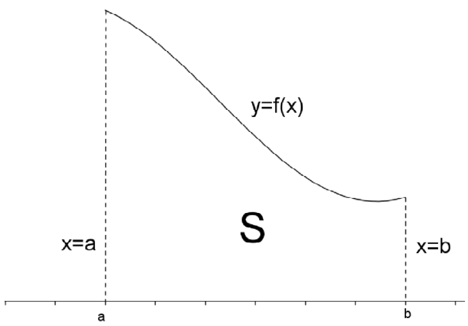


Figura 1: área sob a curva

1.2 Desenvolvimento da sequência didática

Para o aprendizado de cálculo de áreas sob curvas, desenvolvi a sequência de questões a seguir. Cada questão deve ser desenvolvida com bastante atenção, buscando explorar ao máximo os conceitos que estão implícitos. O professor tem papel fundamental nesse processo.

Questão 1:

Com base na definição de área sob uma curva, calcule a área delimitada pelos seguintes gráficos e os eixos coordenados nos intervalos $[a, b]$ definidos:

(a) Intervalo $[0,5]$

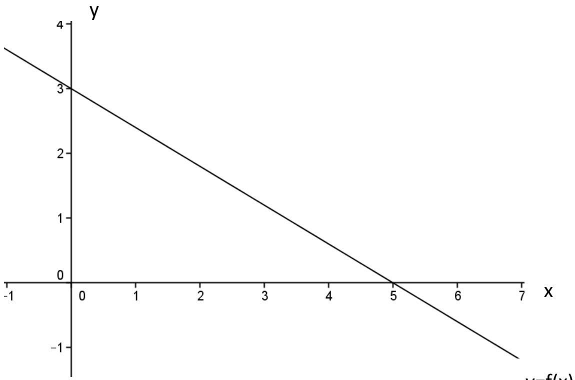


Figura 2

(b) Intervalo $[0,6]$

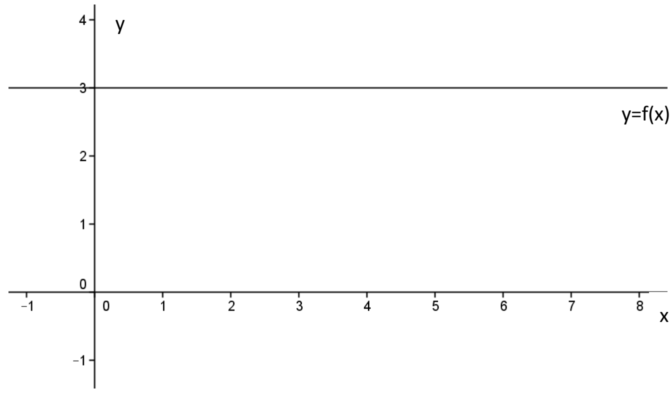


Figura 3

(c) Intervalo $[0,7]$

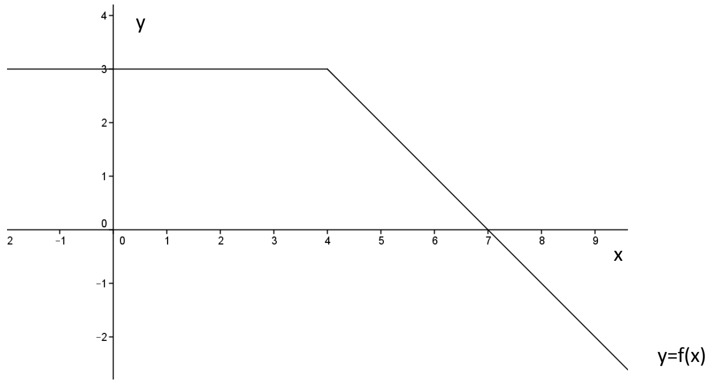


Figura 4

(d) Intervalo $[0,7]$

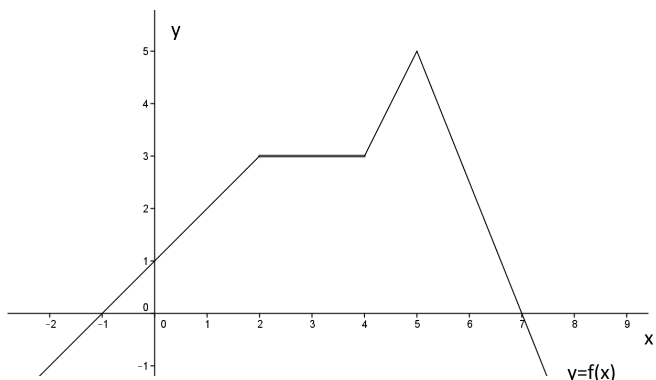


Figura 5

Resolução comentada:

Nesta primeira questão, busco uma aproximação significativa entre o estudo de áreas visto, principalmente, no 9° ano (8ª série) e os conhecimentos adquiridos no estudo de funções na 1ª série do ensino médio. É interessante que o aluno perceba com clareza que as formas estudadas no cálculo de áreas podem ser utilizadas com relativa facilidade para determinar outras áreas, que podem ser decompostas, como no caso de regiões delimitadas por curvas e os eixos coordenados.

Para o desenvolvimento do trabalho, consideremos u.c. sendo a abreviação para unidade de comprimento e u.a., unidade de área, sendo u.a.=(u.c.)².

(a) Como os eixos coordenados são ortogonais, temos que a região é delimitada por um triângulo retângulo com catetos 3 u.c. e 5 u.c (figura 6). Portanto:

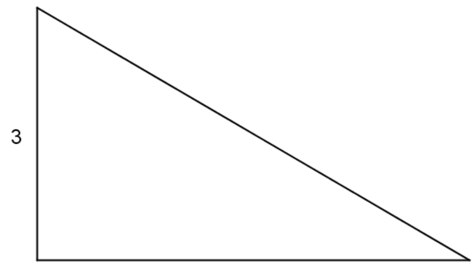


Figura 6

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{base .altura}}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{5\ .3}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = 7{,}5 \text{ u. a.}$$

(b) Neste caso, temos a representação de uma função constante no intervalo $[0{,}6]$. Para que haja uma figura fechada, é necessário nos atentarmos às retas verticais $x = 0$ e $x = 6$ que delimitam a figura.

Temos, então, a região delimitada por um retângulo de dimensões 6 u.c. e 3 u.c. (figura 7).

Assim:

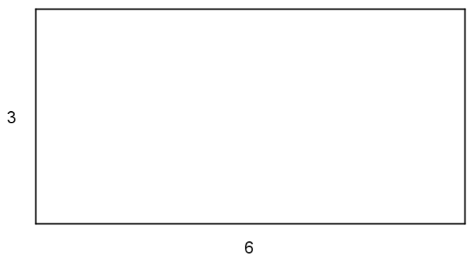


Figura 7

$$A_{\text{retângulo}} = \text{base . altura}$$

$$A_{\text{retângulo}} = 6\ .\ 3 = 18 \text{ u. a.}$$

(c) Neste caso, a área da região delimitada pode ser vista de diferentes maneiras, como:

- Um retângulo com dimensões 4 u.c. por 3 u.c. (figura 8) e um triângulo retângulo com catetos 3 u.c. e 3 u.c. (figura 9).
- Um trapézio de altura 3 u.c. e bases 4 u.c. e 7 u.c.

É interessante destacar a decomposição de uma área em outras áreas menores e conhecidas, como no caso do trapézio visto como a associação de um retângulo e um triângulo retângulo. Em algumas situações futuras ficará evidente o quão conveniente é a a decomposição de uma área em outras áreas menores e conhecidas.

Assim, usando o primeiro modo:

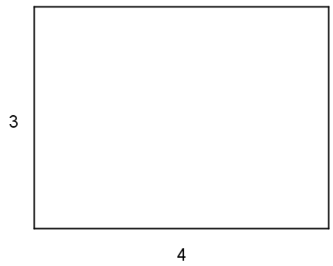


Figura 8

$$A_{\text{retângulo}} = \text{base . altura}$$
$$A_{\text{retângulo}} = 4 \,.\, 3 = 12 \text{ u.a.}$$

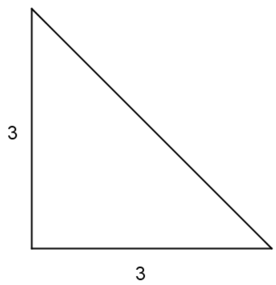


Figura 9

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{cateto . cateto}}{2}$$
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{3\,.\,3}{2} = 4{,}5 \text{ u.a.}$$

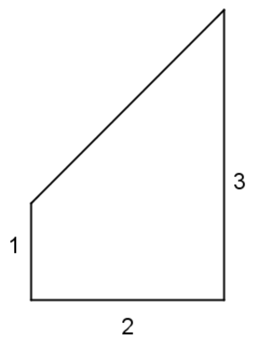
Composição das áreas $= 12 + 4{,}5 = 16{,}5 \text{ cm}^2$

(d) No intervalo $[0,7]$ temos a representação de um polígono não convexo, sendo uma opção para o cálculo da área a decomposição em figuras menores e conhecidas.

Logo, fazendo adequadamente a decomposição, temos:

- Trapézio de altura 2 u.c. e bases 1 u.c. e 3 u.c. (figura 10).
- Retângulo de dimensões 2 u.c. e 3 u.c. (figura 11).
- Trapézio de altura 1 u.c. e bases 3 u.c. e 5 u.c. (figura 12).
- Triângulo retângulo com catetos 2 u.c. e 5 u.c. (figura 13).

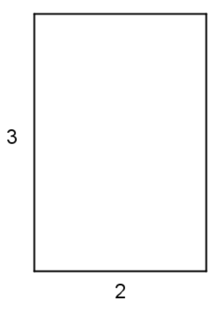
Assim sendo:



$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor})\ .\ \text{altura}}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(3+1)\ .\ 2}{2} = 4\ \text{u.a.}$$

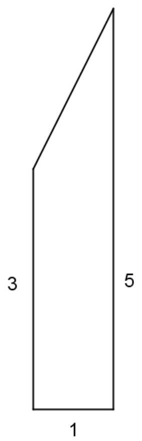
Figura 10



$$A_{\text{retângulo}} = \text{base}\ .\ \text{altura}$$

$$A_{\text{retângulo}} = 2\ .\ 3 = 6\ \text{u.a.}$$

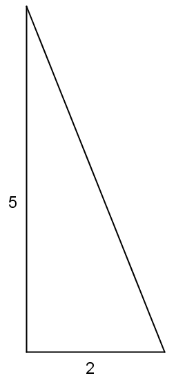
Figura 11



$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor})\ .\ \text{altura}}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(5+3)\ .\ 1}{2} = 4\ \text{u.a.}$$

Figura 12



$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{cateto}\ .\ \text{cateto}}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{2\ .5}{2} = 5\ \text{u.a.}$$

Figura 13

Composição de áreas $= 4 + 6 + 4 + 5 = 19\ \text{u.a.}$

Ao concluir essa atividade, é razoável esperar que um percentual considerável dos alunos tenham se atentado a certas particularidades do estudo de áreas sob gráficos, principalmente em indagações de como seria possível o cálculo quando o gráfico é uma linha curva.

Questão 2:

Calcule a área da região sob o gráfico da função $y = x - 2$ no intervalo $[3,5]$.

Resolução comentada:

Vamos, agora, associar o cálculo de áreas sob curvas ao estudo de funções, no aspecto de representações gráficas. A partir de agora, o aluno começará a trabalhar com representação gráfica para analisar as figuras formadas no plano cartesiano e decidir a melhor forma de calcular área pretendida.

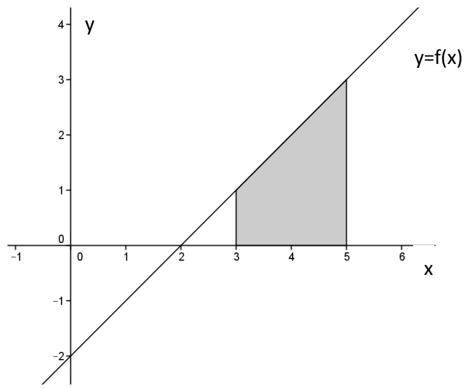
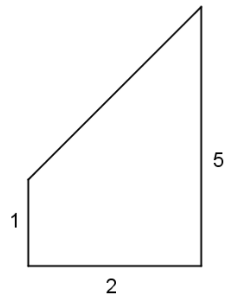


Figura 14

Observando a representação gráfica (figura 14), temos um trapézio retângulo com altura 2 u.c. e bases 1 u.c. e 3 u.c. (figura 15). Então:



$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(\text{base maior}+\text{base menor})\ .\ \text{altura}}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(3+1)\ .\ 2}{2} = 4\ \text{u.a.}$$

Figura 15

Ao chegarmos à resolução deste problema, uma visão mais ampla do cálculo de áreas sob curvas será concretizada, porém surge margem para uma observação interessante: e quando a figura estiver abaixo do eixo das abscissas?

Questão 3:

Calcule a área entre o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} -2, \text{se } x < 2 \\ x-4, \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

no intervalo $[-2, \frac{5}{2}]$.

Resolução comentada:

Essa é a primeira questão utilizando o cálculo de áreas na porção abaixo do eixo das abscissas, além de trazer à discussão função definida por duas sentenças.

Assim:

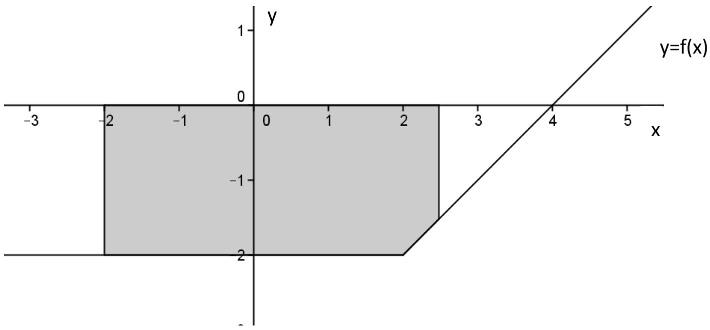
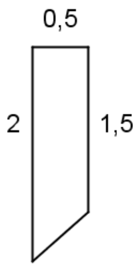


Figura 16

Temos uma composição de um retângulo com dimensões 4 u.c. e 2 u.c. (figura 17) e um trapézio de altura 0,5 u.c. e bases 2 u.c. e 1,5 u.c. (figura 18). Segue:

$$A_{\text{retângulo}} = \text{base} \, . \, \text{altura}$$
$$A_{\text{retângulo}} = 4 \, . \, 2 = 8 \, \text{u.a.}$$

Figura 17



$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \, . \, \text{altura}}{2}$$
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(2+1,5) \, . \, 0,5}{2} = 0,875 \, \text{u.a.}$$

Figura 18

Composição das áreas $= 8 + 0,875 = 8,875 \, \text{u.a.}$

Uma reflexão adequada para este momento pode ser feita sobre a noção do que é área, como a medida da porção do plano ocupada por uma figura, como defendida por Carvalho e outros (2010). Desta forma, é plausível compreender que mesmo estando abaixo do eixo das abscissas ou à esquerda do eixo das ordenadas, a área sempre será positiva.

Questão 4:

Determine a área da região sob o gráfico da função $f(x) = -x + 3$, no intervalo $[1,4]$.

Resolução comentada:

Estamos diante de um problema onde a área se encontra acima do eixo das abscissas em uma parte do intervalo e abaixo em outra. Partindo do pressuposto de que a área será sempre positiva:

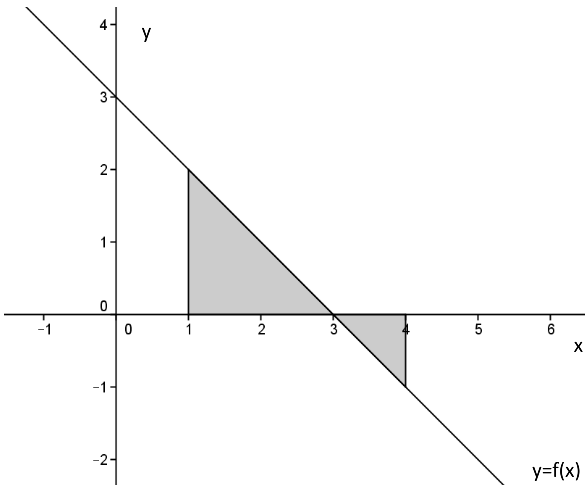


Figura 19

Nesse caso, basta calcular a área dos triângulos retângulos e isósceles de catetos 2 u.c. (figura 20) e 1 u.c. (figura 21). Segue:

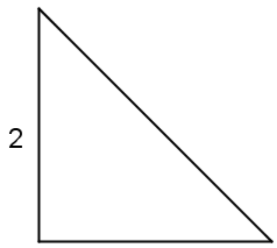


Figura 20

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{cateto . cateto}}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{2\ .\ 2}{2} = 2\ \text{u.a.}$$

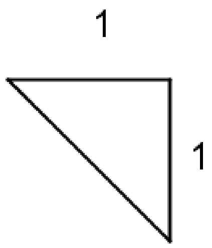


Figura 21

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1\ .\ 1}{2} = 0{,}5\ \text{u.a.}$$

Composição das áreas $= 2 + 0{,}5 = 2{,}5\ \text{u.a.}$

Alcançamos, nesse estágio, a percepção de que a área sob uma curva pode ser vista como a soma de áreas distintas, independente do sinal do eixo das ordenadas.

Questão 5:

Calcule o valor da área entre os gráficos das funções nos intervalos dados:
(a) $y = x + 2$ e $y = -x + 2$ no intervalo $[1,2]$;
(b) $y = -3x$ e $y = |x|$ no intervalo $[-\frac{5}{2}, -1]$.

Resolução comentada:

(a) Inicialmente, vamos analisar a representação gráfica:

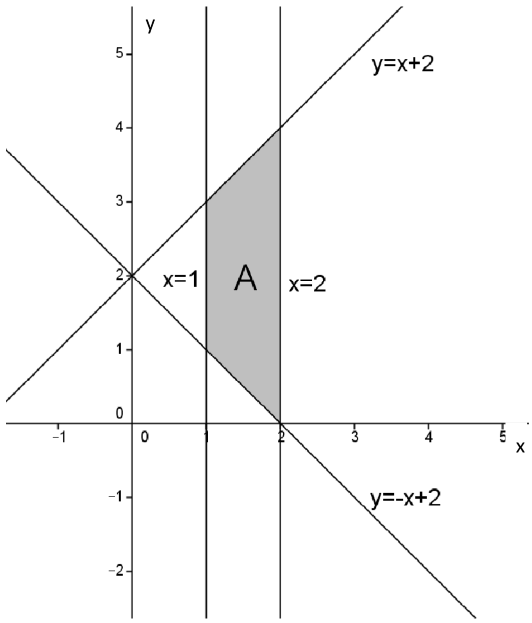
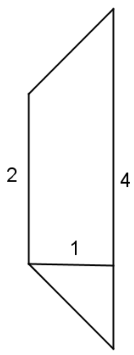


Figura 22

Essa questão começa a explorar um pouco mais o raciocínio do estudante. Poderíamos visualizar a questão de duas formas:

- Temos um trapézio isósceles de bases 4 u.c. e 2 u.c., e altura 1 u.c. (figura 23). Então:



$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(\text{base maior}+\text{base menor})\ .\ \text{altura}}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(4+2)\ .\ 1}{2} = 3\ \text{u.a.}$$

Figura 23

- Temos a área entre duas curvas, logo buscamos o complemento da área sob o gráfico de $y = -x + 2$ na área sob $y = x + 2$ (figura 22). Portanto, a subtração entre as áreas seria adequada:

Área maior: trapézio de altura 1 u.c. e bases 3 u.c. e 4 u.c.

$$A_{\text{maior}} = \frac{(4+3)\ .\ 1}{2} = 3{,}5\ \text{u.a.}$$

Área menor: triângulo retângulo isósceles de catetos 1 u.c.

$$A_{menor} = \frac{1\ .\ 1}{2} = 0{,}5\ \text{u.a.}$$

Área entre as retas:

$$A = A_{maior} - A_{menor}$$
$$A = 3{,}5 - 0{,}5 = 3\ \text{u.a.}$$

Deve-se salientar para o aluno que a segunda visão pode ser mais prática, visto que nem sempre a área delimitada pela figura que surge entre os gráficos é fácil de ser calculada.

Em situações como essa, em que a área procurada é a área complementar de uma figura em relação a outra, o módulo da diferença entre as áreas torna-se uma ferramenta de extrema agilidade. Na 1ª série do ensino médio, o aluno traz conhecimentos da determinação de áreas através da subtração de áreas (quando uma está contida na outra) desenvolvidos nas séries anteriores, o que torna mais simples essa assimilação.

Visto que a diferença entre dois números, em módulo, é a mesma independente da ordem, a utilização do módulo garante a obtenção da área correta, independente da ordem escolhida.

(b) Vamos desenvolver esse item utilizando o cálculo da área através do módulo entre as áreas.

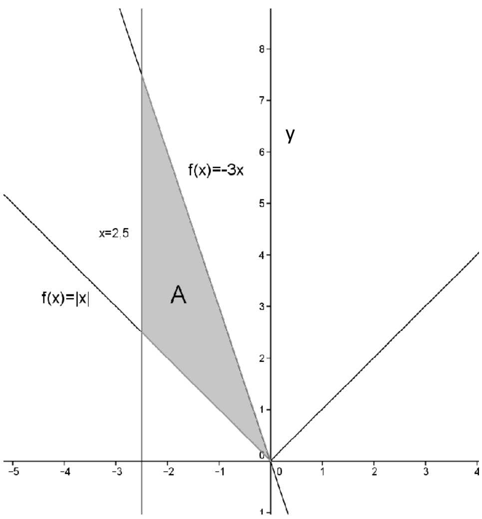
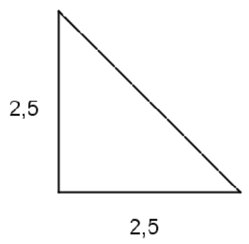


Figura 24

A_1: triângulo retângulo isósceles com catetos medindo 2,5 u.c.

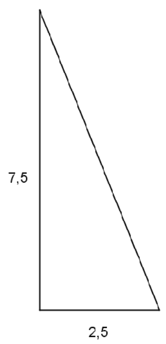
x



$$A_1 = \frac{2,5\ .\ 2,5}{2} = 3{,}125 \text{ u.a.}$$

Figura 25

A_2: triângulo retângulo com catetos medindo 2,5 u.c. e 7,5 u.c.



$$A_2 = \frac{2,5\ .\ 7,5}{2} = 9{,}375\ u.a.$$

Figura 26

$$\mathrm{A} = |A_1 - A_2|$$
$$\mathrm{A} = |3{,}125 - 9{,}375| = |-6{,}25| = 6{,}25 \text{ u.a.}$$

Pudemos, através dessa questão, observar que o cálculo de área entre gráficos independe do quadrante, tomando como base a definição da área sendo sempre positiva.

Questão 6:

Dadas as funções afins $f(x) = -x + 2$, $g(x) = 4x$ e $h(x) = -4x + 8$, determine:

(a) as intersecções entre as retas que representam os gráficos das funções;

(b) a área da região limitada pelo polígono formado com os pontos de intersecção obtidos no item (a).

Resolução comentada:

(a) Para obter os pontos de intersecção, basta estabelecer as igualdades entre as variáveis dependentes (visto que os pontos de intersecção possuem coordenadas iguais):

Ponto A: intersecção entre as funções f e g.

$f(x) = g(x)$ $\quad\quad$ $-x + 2 = 4x$ $\quad\quad$ $x = \frac{2}{5}$

$f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{5}$ $\quad\quad$ $A\ (\frac{2}{5}, \frac{8}{5})$

Ponto B: intersecção entre as funções f e h.

$f(x) = h(x)$ $\quad\quad$ $-x + 2 = -4x + 8$ $\quad\quad$ $x = 2$

$f(2) = 0$ $\quad\quad$ $B\ (2,0)$

Ponto C: intersecção entre as funções g e h.

$g(x) = h(x)$ $\quad\quad$ $4x = -4x + 8$ $\quad\quad$ $x = 1$

$g(1) = 4$ $\quad\quad$ $C\ (1,4)$

Logo, os pontos de intersecções entre as retas dos gráficos das funções f, g e h são os pontos A, B e C.

(b) Para este item, vejamos a representação gráfica:

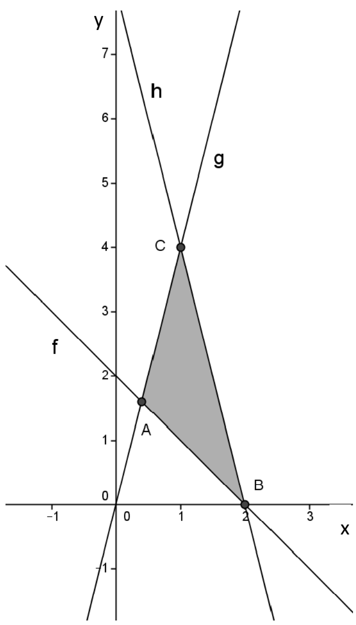


Figura 27

Como podemos observar no gráfico, o módulo da diferença entre as áreas é de fácil utilização:

A_1: triângulo com vértices na origem e nos pontos A e B.

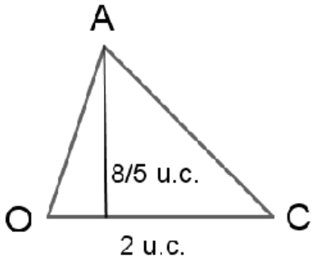
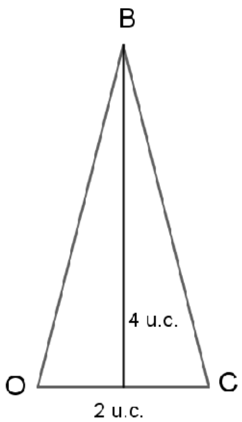


Figura 28

$A_1 = \frac{2.\frac{8}{5}}{2} = \frac{8}{5}\ u.a.$

A_2: triângulo isósceles com vértices na origem e nos pontos B e C.



$A_2 = \frac{2.4}{2} = 4\ u.a.$

Figura 29

$$\mathrm{A} = |A_1 - A_2|$$
$$\mathrm{A} = |\frac{8}{5} - 4| = \frac{12}{5}\ u.a.$$

Questão 7:

Um móvel realiza um movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) segundo a função

$$\mathrm{v(t) = 10 + 5t}$$

onde v é a velocidade e t o tempo, em unidades do SI (Sistema Internacional de Unidades).

Determine a distância percorrida pelo móvel entre os instantes 2 s e 4 s.

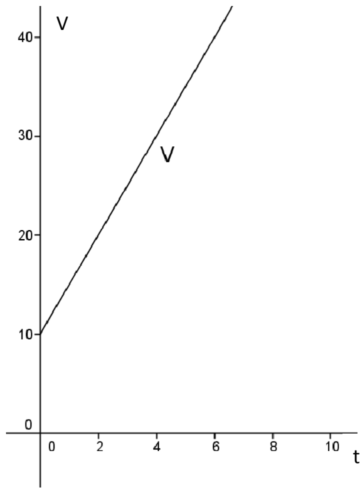


Figura 30

Resolução comentada:

Inicialmente, vamos instigar os alunos a resolverem usando argumentos físicos:

$\mathrm{v(t) = v_0 + at}$ onde $\mathrm{v_0}$ é a velocidade inicial e a é a aceleração.

$\mathrm{v(t) = 10 + 5t}$ $\mathrm{v_0 = 10\ m/s}$ e $\mathrm{a = 5\ m/s^2}$

Para $\mathrm{t = 2\ s}$:

$\mathrm{S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}$ onde S é a posição no instante t e $\mathrm{S_0}$ é a posição inicial.

$\mathrm{S(2) = 0 + 10.2 + \frac{5}{2}.2^2}$ $\mathrm{S(2) = 30\ m}$

Para $\mathrm{t = 4\ s}$:

$\mathrm{S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}$ $\mathrm{S(4) = 0 + 10.4 + \frac{5}{2}.4^2}$ $\mathrm{S(4) = 80\ m}$

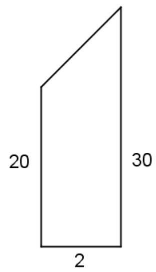
Então:

$\mathrm{\Delta S = 80\ m - 30\ m}$ onde ΔS é a distância percorrida.

$\mathrm{\Delta S = 50\ m}$

Nessa resolução, busquei utilizar ao máximo os mesmos termos utilizados em livros de ensino médio da disciplina de Física, para uma maior familiarização por parte do estudante.

Agora, peçamos para que os alunos calculem a área sob o gráfico da função $v(t) = 10 + 5t$, no intervalo $[2,4]$:



$$A_{trapézio} = \frac{(\text{base maior}+\text{base menor})\ .\ \text{altura}}{2}$$

$$A_{trapézio} = \frac{(30+20)\ .\ 2}{2} = 50\ \text{u.a.}$$

Figura 31

Após induzir o aluno a esse resultado, devemos fazê-lo pensar no porquê de se calcular a área sob o gráfico da função velocidade quando buscamos a distância percorrida e se sempre será válido. Porém, o esclarecimento virá no decorrer da sequência didática.

Questão 8:

Aproxime a área sob a curva $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$ usando:

(a) dois retângulos aproximantes abaixo da curva;

(b) dois retângulos aproximantes acima da curva;

(c) quatro retângulos aproximantes abaixo da curva;

(d) quatro retângulos aproximantes acima da curva.

Resolução comentada:

Nesse momento, nos deparamos com uma função que não pode ser decomposta em um polígono. Para desenvolvermos a resolução, vamos utilizar como referência a proposta de Thomas (2009, p.354): "muitas quantidades podem ser calculadas se são quebradas em pedaços pequenos e, depois, soma-se a contribuição que cada parte dá".

Calcularemos a área usando retângulos aproximantes

A técnica consiste em dividir o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos iguais e construir um retângulo com base sendo o comprimento do subintervalo e a altura algum ponto sobre a curva $y = f(x)$ que está acima (ou abaixo) do subintervalo. Isso deve ser feito em cada subintervalo.

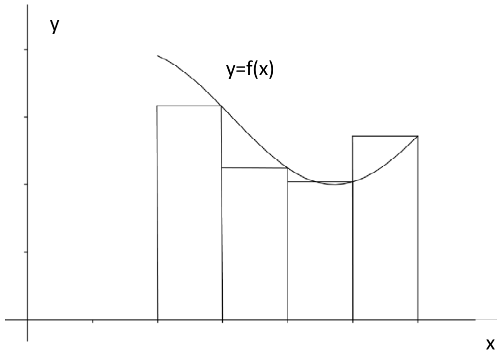


Figura 32

Podemos perceber que os retângulos não correspondem exatamente a área procurada, porém existem formas de melhorar essa precisão, que serão vistos no decorrer da sequência didática. De forma geral, quando maior o número de retângulos, melhor a precisão, visto que a quantidade de espaços em relação ao gráfico irão diminuir, tendendo cada vez mais a se tornar o próprio gráfico.

(a)

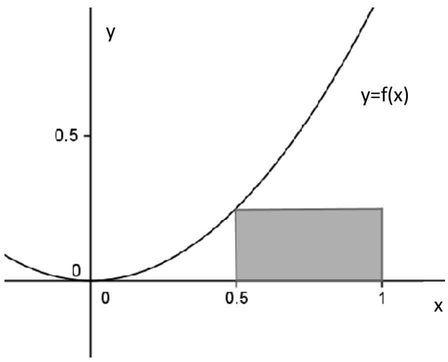


Figura 33

Percebamos que a altura do segundo retângulo aproximante corresponde à imagem da função $f(x) = x^2$ no ponto $x = \frac{1}{2}$.

1° retângulo: $A_1 = f(0).\frac{1}{2} = 0$

2° retângulo: $A_2 = f\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Área estimada:

$$\mathrm{A} = \text{soma das áreas dos retângulos}$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \frac{1}{8} u.a.$$

(b)

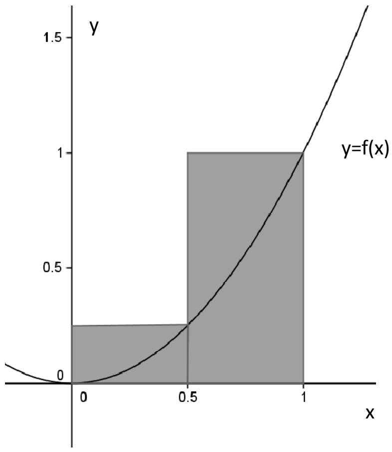


Figura 34

Já é possível perceber, nesse caso, que a altura do retângulo aproximante corresponde à imagem da função avaliada na extremidade superior do intervalo.

Segue:

$$A = \text{soma das áreas dos retângulos}$$

$$A = f\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2} + f(1).\frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{4}.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2}$$

$$A = \frac{5}{8} u.a.$$

A essa altura, deve o professor encaminhar o educando à percepção de que:

$$\frac{1}{8} < \text{área procurada} < \frac{5}{8}$$

(c)

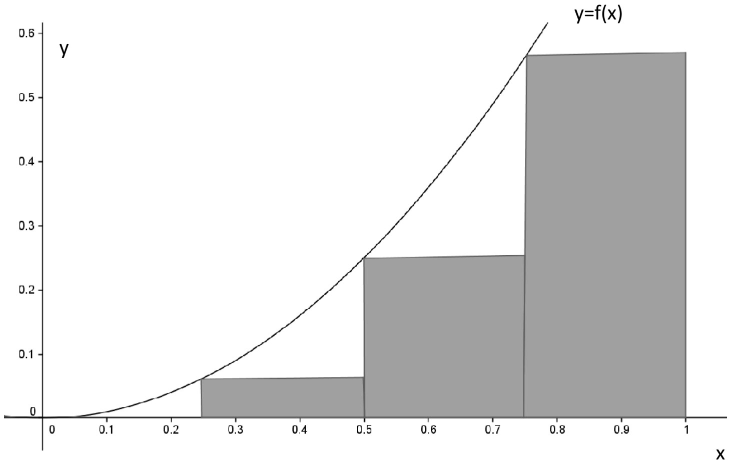


Figura 35

$$A = \text{soma das áreas dos retângulos}$$

$$A = f(0).\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}\right).\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}\right).\frac{1}{4}$$

$$A = 0.\frac{1}{4} + \frac{1}{16}.\frac{1}{4} + \frac{1}{4}.\frac{1}{4} + \frac{9}{16}.\frac{1}{4} = \left(0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16}\right).\frac{1}{4} = \frac{14}{16}.\frac{1}{4} = \frac{7}{32}u.a.$$

(d)

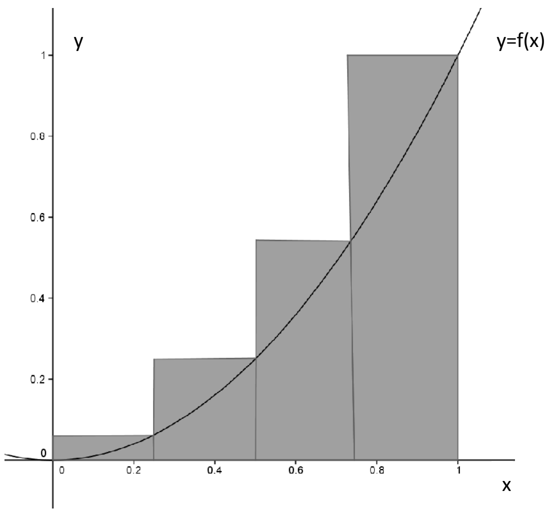


Figura 36

$$A = \text{soma das áreas dos retângulos}$$

$$A = \mathrm{f}\left(\frac{1}{4}\right).\frac{1}{4} + \mathrm{f}\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{4} + \mathrm{f}\left(\frac{3}{4}\right).\frac{1}{4} + \mathrm{f}(1).\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{16}.\frac{1}{4} + \frac{1}{4}.\frac{1}{4} + \frac{9}{16}.\frac{1}{4} + 1.\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + 1\right).\frac{1}{4} = \frac{30}{16}.\frac{1}{4} = \frac{15}{32}\ \mathrm{u.a.}$$

Novamente, o professor deve instruir à comparação:

$$\frac{7}{32} < \text{área procurada} < \frac{15}{32}$$

E ainda, ressaltar que a área procurada ficou muito mais próxima da área real com a utilização de quatro retângulos ao invés de dois.

Em questões como essa, estamos trabalhando com aproximações para valores que não sabemos com exatidão. Nesse caso, surge uma margem de erro, que em matemática podemos chamar de erro absoluto.

O erro absoluto corresponde ao módulo da diferença entre o valor real e o valor obtido por aproximações. É importante que o professor ressalte, no decorrer dessa e das próximas atividades, que os valores encontrados correspondem a aproximações e que quanto mais retângulos aproximantes forem utilizados, menor será o erro absoluto.

Sugiro, ao professor, que em todos os problemas seguintes, tente induzir o aluno a pensar na quantidade de retângulos aproximantes cada vez maior, sugerindo a percepção dessa quantidade tendendo ao infinito.

Questão 9:

Estime a área sob a curva $f(x) = x^3 + 1$ no intervalo $[1,2]$ usando:
(a) seis retângulos abaixo da curva;
(b) seis retângulos acima da curva;
(c) seis retângulos cujas alturas correspondem à imagem do ponto médio do intervalo, na função, ao qual pertence a base.

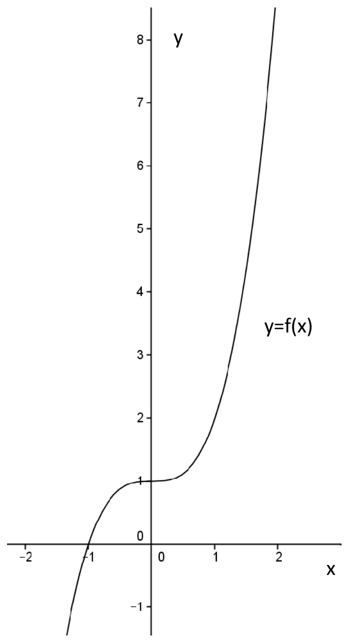


Figura 37

Resolução comentada:

Nessa questão, espera-se que o aluno desenvolva com maior segurança alguns aspectos relacionados ao cálculo de áreas sob curvas, como a amplitude do intervalo que corresponderá ao comprimento da base do retângulo e altura como a imagem, na função, de algum ponto desse retângulo, conforme a abordagem utilizada. Agora não vamos representar graficamente cada item, deixemos que o aluno trabalhe algebricamente.

(a) Como o intervalo $[1,2]$ será dividido em seis bases para os retângulos, facilmente percebe-se que a amplitude de cada subintervalo (base) será:

$$\Delta \mathrm{x} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$$

Como os retângulos estarão abaixo da curva, a altura será a imagem da extremidade inferior do subintervalo. Assim:

Tabela 1

Intervalo (base do retângulo)	x_i	$f(x_i)$ (altura do retângulo)
1 a 7/6	1	2
7/6 a 4/3	7/6	559/216
4/3 a 3/2	4/3	91/27
3/2 a 5/3	3/2	35/8
5/3 a 11/6	5/3	152/27
11/6 a 2	11/6	1547/216

Sendo a área a soma das áreas dos retângulos:

$$A = f(1).\frac{1}{6} + f\left(\frac{7}{6}\right).\frac{1}{6} + f\left(\frac{4}{3}\right).\frac{1}{6} + f\left(\frac{3}{2}\right).\frac{1}{6} + f\left(\frac{5}{3}\right).\frac{1}{6} + f\left(\frac{11}{6}\right).\frac{1}{6}$$

$$A = \left[f(1) + f\left(\frac{7}{6}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) + f\left(\frac{11}{6}\right)\right].\frac{1}{6}$$

$$A = \left[2 + \frac{559}{216} + \frac{91}{27} + \frac{35}{8} + \frac{152}{27} + \frac{1547}{216}\right].\frac{1}{6} = \frac{5427}{216}.\frac{1}{6} = \frac{1809}{432}\ u.a.$$

Verifique, com os alunos, o que pode ser concluído a respeito desse resultado e se está claro que a área estimada é inferior à área real. Indague-os se isso acontecerá com todas as funções e se ele seria capaz de perceber que sempre acontecerá com funções crescentes no intervalo considerado.

Crie questionamentos como:

O que aconteceria com essa aproximação se a função fosse decrescente no intervalo dado?

E se a função se alternasse em crescente e decrescente no referido intervalo?

(b) A amplitude será mantida, apenas os extremos serão alterados:

Tabela 2

Intervalo (base do retângulo)	x_i	$f(x_i)$ (altura do retângulo)
1 a 7/6	7/6	559/216
7/6 a 4/3	4/3	91/27
4/3 a 3/2	3/2	35/8
3/2 a 5/3	5/3	152/27
5/3 a 11/6	11/6	1547/216
11/6 a 2	2	9

Analogamente a questão anterior:

$$A = f\left(\frac{7}{6}\right).\frac{1}{6} + f\left(\frac{4}{3}\right).\frac{1}{6} + f\left(\frac{3}{2}\right).\frac{1}{6} + f\left(\frac{5}{3}\right).\frac{1}{6} + f\left(\frac{11}{6}\right).\frac{1}{6} + f(2).\frac{1}{6}$$

$$A = \left[f\left(\frac{7}{6}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) + f\left(\frac{11}{6}\right) + f(2)\right].\frac{1}{6}$$

$$A = \left[\frac{559}{216} + \frac{91}{27} + \frac{35}{8} + \frac{152}{27} + \frac{1547}{216} + 9\right].\frac{1}{6} = \frac{6939}{216}.\frac{1}{6} = \frac{2313}{432}\ u.a.$$

Após as indagações do item (a) desse problema, espera-se que o aluno tenha clareza em afirmar que esta estimativa de área é superior a área real.

$\frac{1809}{423} < A < \frac{2313}{432}$ o que implica no erro absoluto de $\frac{2313}{432} - \frac{1809}{432} = \frac{63}{54}$

Chamo a atenção novamente para o número de retângulos utilizados: quanto maior a quantidade, melhor a estimativa. Questione também outra formas de aproximação, com outros polígonos ou simplesmente outros pontos para o cálculo da altura do retângulo, como será feito no item (c) desse problema.

(c) Agora, utilizaremos o ponto médio do intervalo (x_i^*). Segue:

Tabela 3

Intervalo (base do retângulo)	x_i	$f(x_i)$ (altura do retângulo)
1 a 7/6	13/12	3925/1728
7/6 a 4/3	15/12	5103/1728
4/3 a 3/2	17/12	6641/1728
3/2 a 5/3	19/12	8587/1728
5/3 a 11/6	21/12	10989/1728
11/6 a 2	23/12	13895/1728

$$A = \left[f\left(\frac{13}{12}\right) + f\left(\frac{15}{12}\right) + f\left(\frac{17}{12}\right) + f\left(\frac{19}{12}\right) + f\left(\frac{21}{12}\right) + f\left(\frac{23}{12}\right)\right].\frac{1}{6}$$

$$A = \frac{29140}{1728}.\frac{1}{6} = \frac{455}{96}\ u.a.$$

Compare, com os estudantes, a estimativa encontrada ao realizar os itens (a) e (b) e o valor encontrado em (c). Debata as vantagens de utilizar o ponto médio do intervalo ao invés de algum extremo, de aumentar o número de intervalos (retângulos) quando possível, e de que podemos nos aproximar da área real o quanto queiramos, tornando a base de cada retângulo a menor possível.

Nessa questão, surgirão oportunidades de estimular o raciocínio de forma a desenvolver ideias relacionadas ao conceito de limites, porém sem defini-lo. Ressalto, nesse ponto, que minha abordagem busca estabelecer uma ligação entre aproximação de áreas e gráficos, porém de forma intuitiva. Sugiro que, sempre que oportuno, o professor envolva o aluno numa visão de limites, possibilitando o despertar de uma curiosidade saudável e favorável ao desenvolvimento da sequência didática.

Questão 10:

Usando três retângulos, obtenha uma aproximação para área sob o gráfico da função $f(x) = -x + 1$ limitada pelos eixos coordenados:

(a) utilizando a extremidade inferior como altura;

(b) utilizando a extremidade superior como altura;

(c) utilizando a imagem ponto médio na função como altura.

Em seguida, calcule a área utilizando a área da região limitada por um triângulo e compare com os resultados obtidos.

Resolução comentada:

Esse problema tem um papel especial nesse momento da sequência didática: comparar as técnicas iniciais com a utilização de retângulos para fazer estimativas a respeito das áreas sob curvas. Mas também tem suas desvantagens, principalmente em relação à existência do erro absoluto. Cabe ao aluno saber se posicionar, de forma crítica, no momento de optar por uma técnica (quando a escolha é possível).

(a) Como a função é decrescente, espera-se que o aluno, de imediato, perceba que a utilização da extremidade inferior implique em uma aproximação acima do valor real. Então:

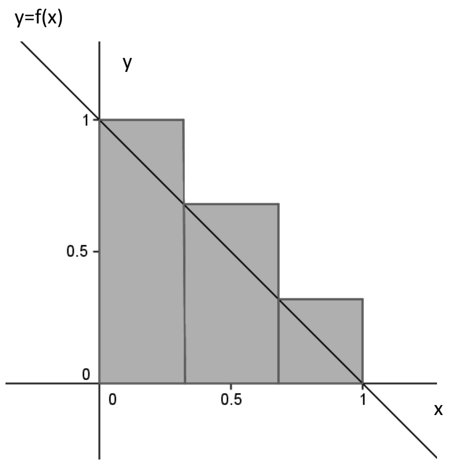


Figura 38

A amplitude de cada intervalo (comprimento de cada base) será:

$\Delta x = \frac{1-0}{3}$ $\qquad$ $\Delta x = \frac{1}{3}$

Segue:

Tabela 4

Intervalo (base do retângulo)	x_i	$f(x_i)$ (altura do retângulo)
0 a 1/3	0	1
1/3 a 2/3	1/3	2/3
2/3 a 1	2/3	1/3

$$A = \left[f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)\right].\frac{1}{3}$$

$$A = \left[1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right].\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\ u.a.$$

(b) Em contrapartida, esperamos uma aproximação inferior à área real ao utilizarmos os extremos superiores de cada subintervalo.

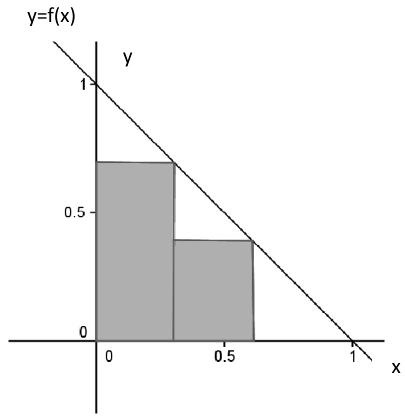


Figura 39

Logo:

Tabela 5

Intervalo (base do retângulo)	x_i	$f(x_i)$ (altura do retângulo)
0 a 1/3	1/3	2/3
1/3 a 2/3	2/3	1/3
2/3 a 1	1	0

$$A = \left[f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1)\right].\frac{1}{3}$$

$$A = \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0\right].\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ u.a.$$

Temos, portanto, uma aproximação de $\frac{1}{3} < A < \frac{2}{3}$, sendo o erro absoluto $\frac{1}{3}$.

(c) Vamos, agora utilizar o ponto médio para o cálculo da altura de cada retângulo em seu respectivo intervalo:

Tabela 6

Intervalo (base do retângulo)	x_i^*	$f(x_i^*)$ (altura do retângulo)
0 a 1/3	1/6	5/6
1/3 a 2/3	1/2	3/6
2/3 a 1	5/6	1/6

$$A = \left[f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right)\right].\frac{1}{3}$$

$$A = \left[\frac{5}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6}\right].\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ u.a.$$

Percebamos que, novamente, a aproximação usando o ponto médio pertence ao intervalo $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

Graficamente, temos:

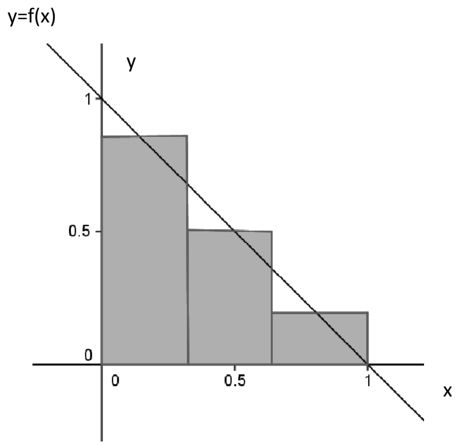


Figura 40

Agora, se olharmos para o gráfico da função $f(x) = -x + 1$ com a mesma visão dos primeiros problemas da sequência didática, perceberemos que a figura formada pelo gráfico com os eixos coordenados é um triângulo retângulo isósceles, o que permite efetuar:

$$A = \frac{cateto\ x\ cateto}{2}$$

$$A = \frac{1\,.\,1}{2} = \frac{1}{2}\ u.a.$$

Podemos, então, comparar as técnicas utilizadas para esse exemplo. É possível perceber que a técnica do cálculo por retângulos aproximantes com altura sendo a imagem do ponto médio do subintervalo coincidiu com o valor real esperado para área.

De fato, em uma função decrescente (ou crescente) a altura dos retângulos a partir de pontos do interior dos intervalos resulta em uma área que aproxima melhor que a soma inferior ou superior, obtida com o valor da função nos extremos dos intervalos.

Questão 11:

Um móvel realiza um movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) segundo a função $v(t) = 5 - 2t$, onde v é a velocidade em função do tempo t (com grandezas no Sistema Internacional de Unidades). Calcule a distância percorrida nos primeiros 2 segundos de movimento utilizando quatro retângulos e a altura como a imagem do ponto médio do subintervalo.

Resolução comentada:

Graficamente, temos a seguinte situação:

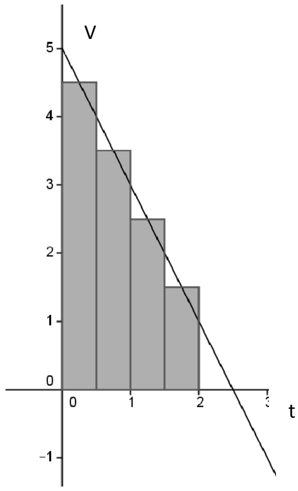


Figura 41

A amplitude de cada subintervalo será:

$\Delta t = \frac{2-0}{4}$ $\qquad\qquad$ $\Delta t = \frac{1}{2}$

Utilizando o mesmo raciocínio do problema anterior:

Tabela 7

Intervalo (base do retângulo)	t_i^*	$v(t_i^*)$ (altura do retângulo)
1 a 1/2	1/4	9/2
1/2 a 1	3/4	7/2
1 a 3/2	5/4	5/2
3/2 a 2	7/4	3/2

$$A = \left[v\left(\frac{1}{4}\right) + v\left(\frac{3}{4}\right) + v\left(\frac{5}{4}\right) + v\left(\frac{7}{4}\right)\right] . \frac{1}{2}$$
$$A = \frac{24}{2} . \frac{1}{2} = 6\, u.a.$$

Como a área sob o gráfico da velocidade em função do tempo é aproximadamente 6 u.a., consideraremos 6 m a distância percorrida.

Agora, iniciamos uma nova discussão: como justificar, para o aluno, o porquê de a área sob o gráfico da velocidade em função do tempo corresponder à distância percorrida?

Uma justificativa plausível seria recorrer à ideia de limite. Temos que a velocidade varia conforme o tempo no intervalo de 0 a 2 s. Se pensarmos nos retângulos aproximantes, que representam um intervalo de tempo, com as bases cada vez menores, isto é, estamos usando um número maior de retângulos, perceberemos que estamos nos aproximando da velocidade instantânea ao calcular o valor de cada área.

Assim, nos sensibilizaremos de que cada área corresponderá a um produto $A = velocidade$ x $tempo$, visto que a velocidade se tornará praticamente constante devido ao intervalo de tempo muito pequeno. Portanto, sendo:

$$distância\ percorrida = velocidade \text{ x } tempo$$

para velocidade constante, e sendo a área sob o gráfico a soma da área de todos os retângulos formados, torna-se viável interpretar a área sob o gráfico como a distância percorrida no intervalo de 0 a 2 s.

O problema 10 é muito rico em interpretação e reflexão, visto que as análises aqui desenvolvidas abrirão caminho para análises muito mais ricas na vida escolar do educando. A visão aqui desenvolvida dará margem para a criação de significados de vários outros conceitos que surgirão nas disciplinas que ainda serão estudadas, como nas aplicações gráficas da Física, por exemplo.

O conceito de área sob uma curva, embora desenvolvido de forma primitiva e rudimentar, ajudará o estudante a assimilar tópicos que muitas vezes passavam despercebidos ou tidos como simples complementos. Alguns livros de ensino médio, como "Física Volume único" de Alberto Gaspar, utilizado na disciplina de Física, chega a abordar o conceito de áreas sob curvas, porém de forma superficial em

> Embora essa região seja conhecida como "área sob a curva", a unidade do deslocamento continua sendo a de comprimento (metro, no SI), pois nesse caso não estamos falando em área no sentido geométrico da palavra. Por isso é escrita entre aspas.
> Pela mesma razão, essa "área" pode ser positiva, quando o sentido do deslocamento coincide com o sentido do eixo, ou negativa, quando o sentido for oposto.(GASPAR, 2008, p.48).

Questão 12:

Um móvel desenvolve um movimento variado no intervalo de 0 a 4 s com aceleração em função do tempo descrita pelo gráfico

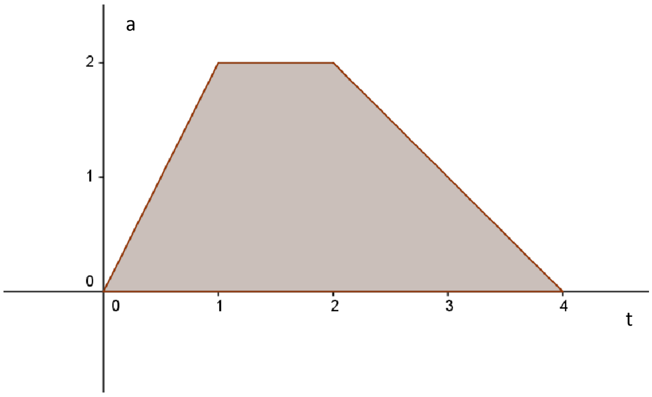


Figura 42

Sabendo que as unidades são regidas pelo Sistema Internacional de Unidades, determine a variação de velocidade no intervalo de 0 a 4 s.

Resolução comentada:

Essa questão surge com o intuito de ampliar o raciocínio do problema 10 para outra aplicações. Pensando analogamente ao problema anterior, percebemos que quando a quantidade de retângulos aproximantes for muito grande, quão grande queiramos, a aceleração tenderá a ser constante, o que implica em a soma das áreas dos retângulos em questão tender a velocidade procurada.

Buscamos, então, a área sob o gráfico, que, nesse caso, é um trapézio de altura 2 u.c. e bases 1 u.c. e 4 u.c. Segue:

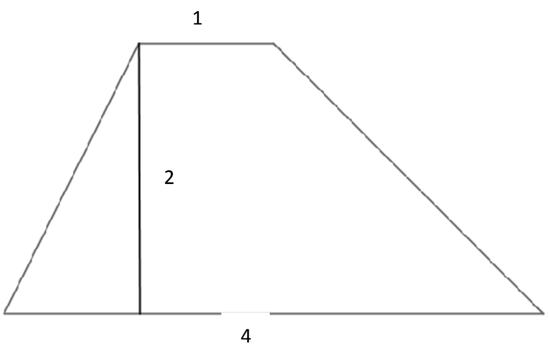


Figura 43

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(\text{base maior}+\text{base menor})\,.\text{altura}}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(4+1)\,.2}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = 5\ \text{u.a.}$$

Assim, a variação de velocidade será 5 m/s no intervalo de 0 a 4 s.

Questão 13:

Para calcular a média de valores de uma variável quantitativa discreta utilizamos a média aritmética simples ou ponderada, dependendo da situação.

Agora calcularemos a média para valores de uma variável quantitativa contínua, amplamente utilizada na área da ciência, como para calcular a média da temperatura em certo dia. Nesse caso, utilizares o valor médio de uma função.

Para calcular o valor médio de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ faremos o seguinte:

- Calculemos a área sob a curva no intervalo $[a, b]$.
- O valor médio (VM) será obtido pela expressão $VM = \frac{1}{b-a}\,.A$.

Temos, então, que o valor médio corresponde corresponde ao quociente entre a área sob o gráfico e a largura do intervalo, uma vez que os valores não podem ser tomados um a um.
Qual é o valor médio da função $f(x) = 3$ no intervalo $[0,2]$.

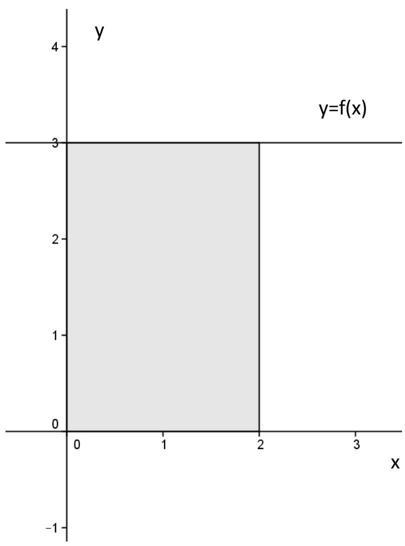


Figura 44

Resolução comentada:

Esse problema está presente para ilustrar o cálculo do valor médio de uma quantidade contínua de valores. Quando a função é constante, basta dividir a área pela largura do intervalo $[0,2]$. Assim, o valor médio (VM) será:

$$VM = \frac{1}{2-0} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Portanto, o valor médio da função $f(x) = 3$ no intervalo $[0,2]$ é 3.

Questão 14:

Determine o valor médio da função $f(x) = 4x$ no intervalo $[0,3]$.

Resolução comentada:

Analisemos a representação gráfica:

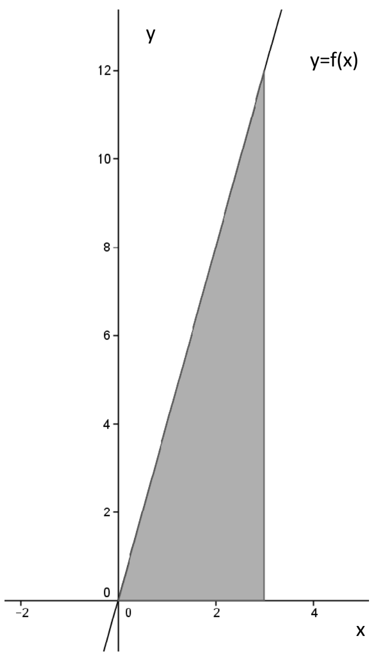


Figura 45

Percebe-se que não há necessidade de uma estimativa por retângulos aproximantes, visto que o gráfico representa um triângulo retângulo no intervalo $[0,3]$. Segue:

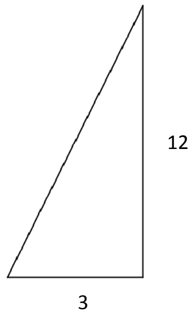


Figura 46

$$A = \frac{cateto\ .cateto}{2} \qquad VM = \frac{1}{3-0}.A$$

$$A = \frac{3\ .12}{2} \qquad VM = \frac{1}{3}\ .18$$

$$A = 18\ u.a. \qquad VM = 6$$

Portanto, o valor médio da função $f(x) = 3x$ no intervalo $[0,3]$ é 6.

Questão 15:

Estime o valor médio da função $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Resolução comentada:

Agora, temos uma representação gráfica em forma de curva, logo precisaremos aproximar utilizando retângulos.

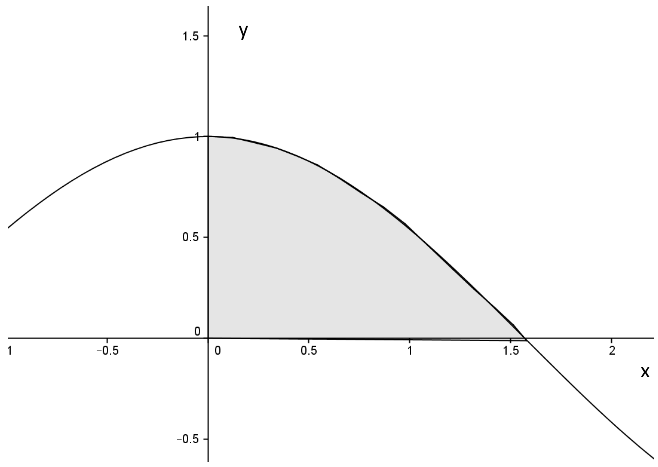


Figura 47

Convenientemente, vamos adotar quatro retângulos aproximantes. A amplitude de cada subintervalo será:

$$\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \frac{\pi}{8} \cong 0{,}393$$

Tabela 8

Intervalo (base do retângulo)	x_i^*	$f(x_i^*)$ (altura do retângulo)
0 a $\pi/8$	$\pi/16$	0,980
$\pi/8$ a $\pi/4$	$3\pi/16$	0,831
$\pi/4$ a $3\pi/8$	$5\pi/16$	0,556
$3\pi/8$ a $\pi/2$	$7\pi/16$	0,195

$$A = \left[f\left(\frac{\pi}{16}\right) + f\left(\frac{3\pi}{16}\right) + f\left(\frac{5\pi}{16}\right) + f\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right]\frac{\pi}{8}$$

$$A = 2{,}562\,.\ 0{,}382 = 1{,}007\ u.a.$$

Segue o valor médio:

$$VM = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0}\,.1{,}007 = 0{,}641$$

A questão 15 é adequada para a introdução da calculadora científica na sequência didática. Aconselho a utilização de três casas decimais, exceto onde for solicitado uma quantidade diferente..

Questão 16:

A tabela a seguir apresenta informações sobre a velocidade de um automóvel durante um minuto.

Tabela 9

TEMPO (s)	VELOCIDADE (m/s)	TEMPO (s)	VELOCIDADE (m/s)
0	0	36	35
6	10	42	30
12	20	48	33
18	20	54	30
24	25	60	20
30	30		

(a) Use retângulos aproximantes para estimar a distância que o carro percorreu em 1 minuto.

(b) Aproximadamente, qual o tempo gasto para o automóvel alcançar o ponto médio do caminho?

(c) Qual a velocidade aproximada no ponto médio do caminho?

Resolução comentada:

Antes de iniciar os cálculos, o aluno precisa perceber que o tempo é uma grandeza contínua, logo os cálculos convencionais para a média não são eficazes. Atentos a isso, iniciemos a resolução:

(a) Inicialmente, a interpretação gráfica será benéfica:

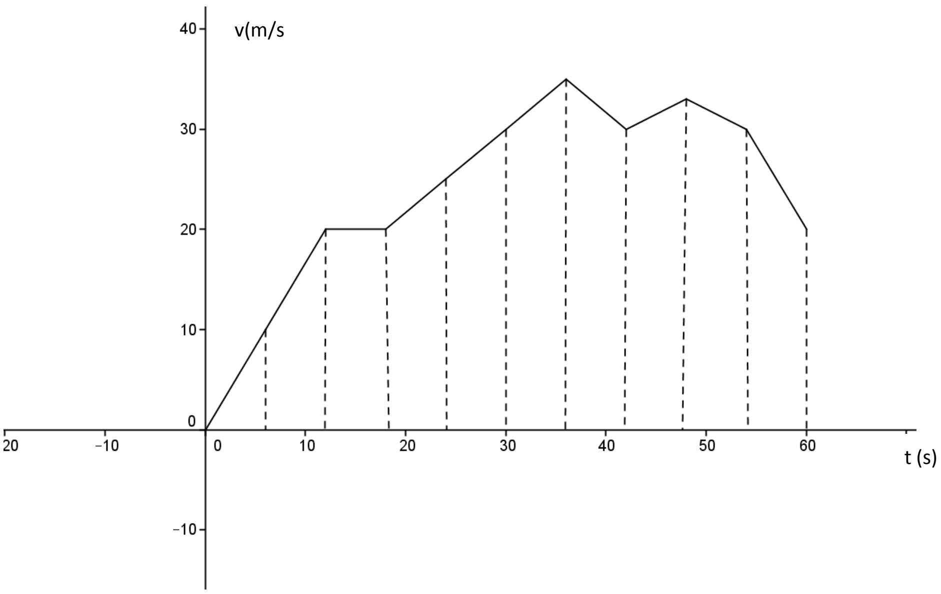


Figura 48

Vejamos que não temos o gráfico exato do problema, visto que apenas alguns pontos, no intervalo de 1 minuto, são dados. Assim, o gráfico é uma aproximação razoável para a situação, pois criando segmentos de reta teremos variações menores para as suposições de variação de velocidade.

Como buscamos a distância percorrida, podemos utilizar a área sob o gráfico da função. Utilizaremos, uma vez que o gráfico não está expresso fielmente, os pontos médios das bases dos retângulos e as médias das imagens (velocidades).

Utilizando os retângulos com base 6u.c., temos:

Tabela 10

Intervalo (base do retângulo)	t_i^*	$v(t_i^*)$ (altura do retângulo)
0 a 6	3	5
6 a 12	9	15
12 a 18	15	20
18 a 24	21	22,5
24 a 30	27	27,5
30 a 36	33	32,5
36 a 42	39	32,5
42 a 48	45	31,5
48 a 54	51	31,5
54 a 60	57	25

$$A = [5 + 15 + 20 + 22{,}5 + 27{,}5 + 32{,}5 + 32{,}5 + 31{,}5 + 31{,}5 + 25]\,.\,6$$

$$A = 1458\ u.a.$$

Portanto, a distância percorrida será aproximadamente 1458 metros.

Esse problema tem importância pelo fato de mostrar que é possível fazer estimativas mesmo não apresentando o gráfico, utilizando tabelas.

(b) No ponto médio do caminho, o automóvel terá percorrido a metade da distância. Portanto, buscamos o valor médio da função:

$$VM = \frac{1}{60 - 0}\,.\,1458 = 24{,}3$$

Assim, o tempo aproximado para o automóvel alcançar o ponto médio do segmento é 24,3 segundos.

(c) A velocidade aproximada no ponto médio do caminho corresponderá à imagem do ponto t = 4,3 s. Com as informações presentes na tabela, podemos estimar a velocidade instantânea próxima a 25 m/s.

Após desenvolver esse problema, o aluno será capaz de interpretar questões mais abrangentes no contexto da matemática escolar, adotando uma postura mais crítica em situações problemas que envolvam variáveis contínuas. Estamos diante de resoluções que seriam possíveis apenas após o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, contudo com uma abordagem rudimentar e livre de maior precisão.

Contudo, devemos ainda ressaltar que o retângulo não é a única figura geométrica que pode ser utilizada. É útil no sentido de que o cálculo da área que limita é simples e rápido de ser efetuado, porém outras figuras mais eficazes podem ser utilizadas, como trapézios.

Questão 17:

Em estudos relacionados a ciências econômicas, o conceito de função marginal é utilizado usualmente para avaliar o efeito causado na imagem da função por uma pequena variação nos valores do domínio. Quando nos é fornecida uma função marginal, a área sob o gráfico no intervalo considerado corresponde a função original.

Assim, o custo marginal $f(q)$ corresponde ao efeito causado no custo quando ocorre uma pequena variação no número de unidades produzidas q.

Em certa fábrica, o custo marginal é $f(q) = 3(q-4)^2$ por unidade quando o nível de produção é q unidades. Qual será o aumento total no custo de produção se o nível de produção aumentar de 6 para 10 unidades?

Resolução comentada:

Esclarecido o entendimento da variação marginal, devemos induzir o estudante a calcular a área sob o gráfico da função no intervalo de 6 a 10 unidades. Sugiro, ainda, que o professor leve o aluno à resolução sem interpretação gráfica, utilizando quatro retângulos e os pontos médios.

Tabela 11

Intervalo (base do retângulo)	q_i^*	$f(q_i^*)$ (altura do retângulo)
6 a 7	6,5	18,75
7 a 8	7,5	36,75
8 a 9	8,5	60,75
9 a 10	9,5	90,75

Segue:

$$A = [f(6{,}5) + f(7{,}5) + f(8{,}5) + f(9{,}5)] \,.\, \frac{10-6}{4}$$

$$A = 18{,}75 + 36{,}75 + 60{,}75 + 90{,}75$$

$$A = 207\ u.a.$$

Conclui-se, portanto, que o aumento de custo de produção, se o nível de produção aumentar de 6 para 10 unidades, será aproximadamente 207 reais.

É interessante observar que no ensino superior, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, cálculo de áreas sob a curva podem ser efetuados de forma mais eficaz. A título de curiosidade, o valor real é 208 reais, o que implica no resultado obtido ser uma boa aproximação.

Devemos, a partir dessa questão, tentar conduzir ao máximo a interpretação das situações problemas e suas associações com o cotidiano, associando suas utilizações nas mais diversas profissões. Buscamos assim, conscientizar o aluno de que a matemática está muito mais próxima de nossa realidade do que podemos imaginar.

Questão 18:

Estima-se que após t dias a quantidade de feijão colhida por um fazendeiro estará aumentando à razão de $f(t) = 0,3t^2 + 0,6t + 1$ sacos por dia, ou seja, $f(t)$ é a quantidade colhida marginal, em sacos de feijão. Qual será o aumento do valor da colheita nos próximos 5 dias se o preço do saco de feijão permanecer constante em R$ 3,00?

Resolução comentada:

Esse problema traz reflexões a respeito da modelagem matemática em áreas presentes na vida de muito estudantes, especialmente na zona rural. É fato que estamos diante de uma situação fictícia, visto que o objetivo não é fazer a modelagem do problema, mas sim mostrar uma nova situação onde a interpretação do cálculo da área sob o gráfico de uma função ganha significado prático.

A função f representa a taxa de variação do número de sacos produzidos ao total de cinco dias. Assim, vamos construir a tabela utilizando cinco retângulos aproximantes e o ponto médio.

$$f(t) = 0,3t^2 + 0,6t + 1$$

Tabela 12

Intervalo (base do retângulo)	t_i^*	$f(t_i^*)$ (altura do retângulo)
0 a 1	0,5	1,375
1 a 2	1,5	2,575
2 a 3	2,5	4,375
3 a 4	3,5	6,775
4 a 5	4,5	9,775

$$A = [f(0{,}5) + f(1{,}5) + f(2{,}5) + f(3{,}5) + f(4{,}5)].\frac{5-0}{5}$$

$$A = 1{,}375 + 2{,}575 + 4{,}375 + 6{,}775 + 9{,}775$$

$$A = 24{,}875\ u.a.$$

O valor de aproximadamente 25 sacos de feijão precisa ser multiplicado pelo preço unitário fixo de R$ 3,00, logo, o aumento do valor de colheita nos próximos dias é estimado em R$ 75,00.

Abaixo temos o gráfico da função:

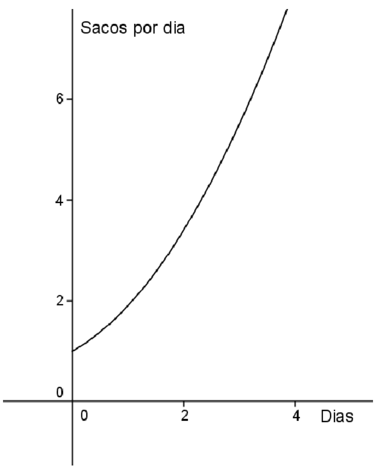


Figura 49

Leia o texto a seguir para desenvolver a questão 19:

Curvas de Lorentz

Segundo Hoffmann (2002), a curva de Lorentz é um dos instrumentos matemáticos mais usados para estudar desigualdades na distribuição de renda. Com $0 \leq x \leq 1$, a curva $y = L(x)$ mostra a porcentagem de renda recebida pelos menores $100.x\%$ da população. A reta $y = x$ representa o caso onde a renda é homogênea, ou seja, é o caso ideal.

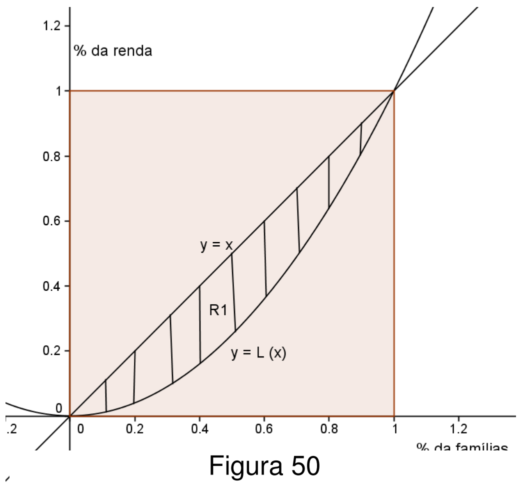


Figura 50

Se o ponto $(0{,}3,\ 0{,}1)$ faz parte da curva de Lorentz, temos que 10% da renda está concentrada em 30% da população. Quanto mais afastada de $y = x$ estiver $y = L(x)$, maior será a desigualdade social.

Considerando R_2 a área abaixo da reta $y = x$ e R_1 a área entre $y = L(x)$ e $y = x$. A razão entre R_1 e R_2 é chamada índice de Gini (ou índice de desigualdade de renda). Então:

$$\text{índice de Gini} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_1}{\frac{1}{2}} = 2R_1$$

Quanto maior o índice de Gini, maior a desigualdade de renda.

Questão 19:

Em determinado país, um órgão do governo verifica que as curvas de Lorentz para a distribuição de renda dos professores e dos engenheiros em determinada região são dadas, respectivamente, por $L_1 = x^3$ e $L_2 = 0{,}9x^2 + 0{,}1x$. A renda será menos homogênea para qual das duas profissões? (Observação: utilize nove casas decimais para obter melhor exatidão).

Resolução comentada:

Com o estudo desenvolvido até esse ponto, pudemos introduzir a utilização de uma ferramenta até então presente somente em cursos superiores, como Economia ou Engenharia de Produção. Será possível exemplificar outra situação onde o estudo de área sob gráficos está presente.

Para obter o índice de Gini para as duas profissões, vamos calcular a área entre os gráficos, utilizando quatro retângulos e o ponto médio de cada subintervalo. Assim:

Professores:

$$L_1(x) = x^3$$

Tabela 13

Intervalo (base do retângulo)	x_i^*	$L_1(x_i^*)$ (altura do retângulo)
0 a 0,25	0,125	0,001953125
0,25 a 0,5	0,375	0,052734375
0,5 a 0,75	0,625	0,244140625
0,75 a 1	0,875	0,669921875

$$A_1 = [L_1(0{,}125) + L_1(0{,}375) + L_1(0{,}625) + L_1(0{,}875)].\frac{1}{4}$$

$$A_1 = 0{,}2421875\ u.a.$$

A área abaixo de $= x$ no intervalo $[0,1]$ é $A_2 = \frac{1}{2}$.

Assim:

$$R_1 = 0{,}5 - 0{,}2421875$$
$$R_1 = 0{,}2578125\ u.a.$$

Para os professores, o índice de Gini é:

$$\text{índice de Gini} = 0{,}2578125\ .\ 2$$
$$\text{índice de Gini} = 0{,}515625$$

Engenheiros:

$$L_2(x) = 0{,}9x^2 + 0{,}1x$$

Tabela 14

Intervalo (base do retângulo)	x_i^*	$L_2(x_i^*)$ (altura do retângulo)
0 a 0,25	0,125	0,0265625
0,25 a 0,5	0,375	0,1640625
0,5 a 0,75	0,625	0,4140625
0,75 a 1	0,875	0,7765625

$$A_1 = [L_2(0{,}125) + L_2(0{,}375) + L_2(0{,}625) + L_2(0{,}875)].\frac{1}{4}$$
$$A_1 = 0{,}3453125\ u.a.$$

A área abaixo de $y = x$ no intervalo $[0,1]$ é $A_2 = \frac{1}{2}$.

Assim:

$$R_2 = 0{,}5 - 0{,}3453124$$
$$R_2 = 0{,}1546875\ u.a.$$

Para os engenheiros, o índice de Gini é:

$$\text{índice de Gini} = 0{,}1546875\ .\ 2$$
$$\text{índice de Gini} = 0{,}309375$$

Como o índice de Gini é maior para os professores, concluímos que a distribuição de renda é menos homogênea para estes.

Ao concluir esse problema, o professor poderá criar uma discussão relacionando a razão entre áreas, curvas de Lorentz e distribuição de renda, fazendo comparações entre os possíveis gráficos para países desenvolvidos e subdesenvolvidos. Contextualiza-se, facilmente, vários aspectos geográficos e matemáticos, apresentando mais aplicabilidades para o estudo de áreas sob gráficos.

Questão 20:

Em certo experimento, o número de bactérias presentes em uma cultura, após t minutos, foi $Q(t) = 2000e^{0,05t}$. Qual foi o número médio de bactérias presentes na cultura durante os primeiros 5 minutos do experimento?

Resolução comentada

Sabendo que buscamos o valor médio de uma função onde a variável tempo está presente, ou seja, uma variável contínua está envolvida, estamos buscando o valor médio da função. Para isso, vamos construir uma tabela dividindo a região em 5 retângulos e usar o ponto médio de cada subintervalo.

Ressalto, também, a vantagem da utilização da calculadora científica para a agilidade do cálculo e familiarização com suas funções, uma vez que no ensino médio das escolas estaduais não se utiliza muito esse instrumento.

$$Q(t) = 2000e^{0,05t}$$

Tabela 15

Intervalo (base do retângulo)	t_i^*	$Q(t_i^*)$ (altura do retângulo)
0 a 1	0,5	2050,630
1 a 2	1,5	2155,768
2 a 3	2,5	2266,297
3 a 4	3,5	2382,492
4 a 5	4,5	2504,645

A área sob o gráfico será:

$$A = [Q(0{,}5) + Q(1{,}5) + Q(2{,}5) + Q(3{,}5) + Q(4{,}5)].\frac{5}{5}$$

$$A = 11359{,}832\ u.a.$$

O valor médio será:

$$VM = \frac{1}{5}A \implies VM = 2271{,}966$$

Logo, o número médio de bactérias nos primeiros 5 minutos de experimento será aproximadamente 2272 bactérias.

A abordagem desse problema torna-se interessante principalmente por envolver uma composição com função exponencial, exemplificando uma prática no estudo de ciências biológicas.

2. O LOGARITMO NATURAL COMO ÁREA

O estudo da integral como área sob uma curva apresenta muitas aplicações práticas, que podem ser utilizadas no ensino médio. Uma aplicação extremamente útil é a definição de logaritmo natural como área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$.

Inicialmente vamos considerar, para cada número real $p > 0$, a transformação $T = T_p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o ponto $T(x, y) = \left(px, \frac{y}{p}\right)$.

Um retângulo X de lados paralelos aos eixos com base m e altura n, é transformado por T_p em um retângulo $X^{'} = T(X)$, ainda com os lados paralelos aos eixos, porém com base pm e altura $\frac{n}{p}$. Logo, os dois retângulos $(X \, e \, X')$ tem áreas iguais. Generalizando, T transforma toda figura F do plano na figura $F^{'} = T(F)$, com mesmas áreas.

Vamos aplicar essa transformação em faixas de hipérbole.

Seja $H = \{\left(x, \frac{1}{x}\right);\ x > 0\}$ o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$, logo H é o gráfico da função real $h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

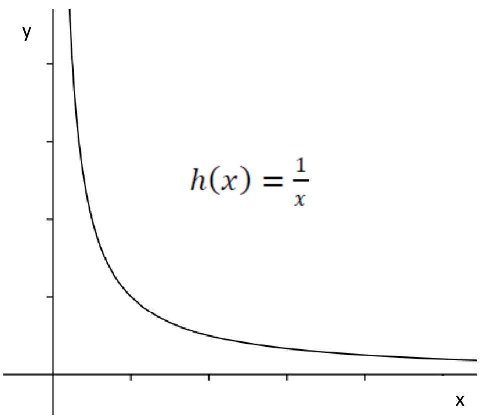


Figura 51

Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, chama-se uma faixa de hipérbole o conjunto H_a^b dos pontos (x, y) do plano tais que x está entre a e b e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$. Temos que H_a^b é o conjunto do plano limitado inferiormente pelo eixo das abscissas, superiormente pela hipérbole H e lateralmente pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$.

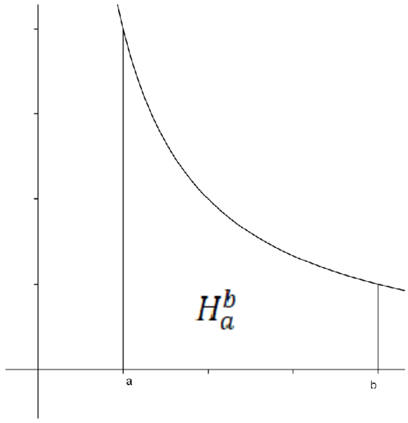


Figura 52

A transformação $T = T_p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva a faixa H_a^b na faixa H_{ap}^{bp}.

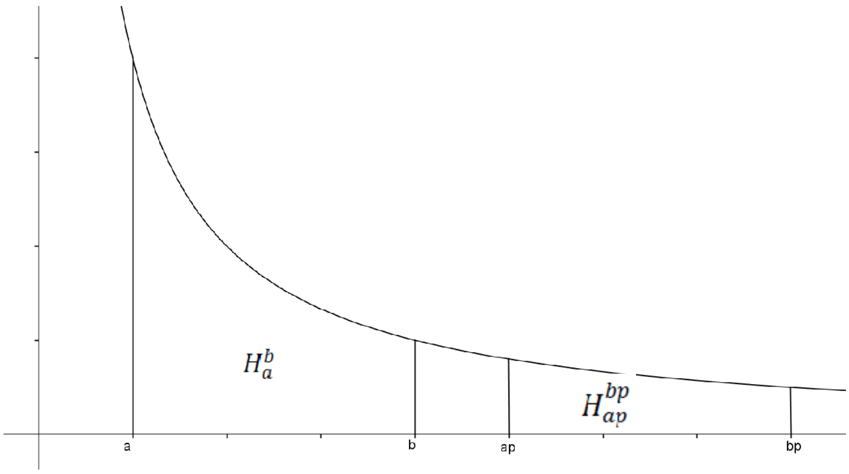


Figura 53

Visto que T preserva as áreas, podemos afirmar que, para todo p positivo, as faixas H_a^b e H_{ap}^{bp} têm a mesma área.

No estudo de geometria plana desenvolvido nos ensinos fundamental e médio, associamos a área limitada por figuras planas a números positivos. Agora, convenientemente, vamos utilizar valores positivos ou negativos, isto é, trabalharemos com "áreas orientadas".

Por convenção, a área da figura hipérbole H_a^b será positiva quando $a < b$, negativa quando $b < a$ e zero quando $a = b$.

Denotemos $A_{H_a^b}$ sendo a área orientada e $a_{H_a^b}$ a área usual (positiva). Assim:

$$A_{H_a^b} = a_{H_a^b} \text{ se } a < b$$
$$A_{H_a^b} = -a_{H_a^b} \text{ se } a > b$$
$$A_{H_a^b} = 0 \text{ se } a = b$$

Seja $a < b < c$. Geometricamente temos:

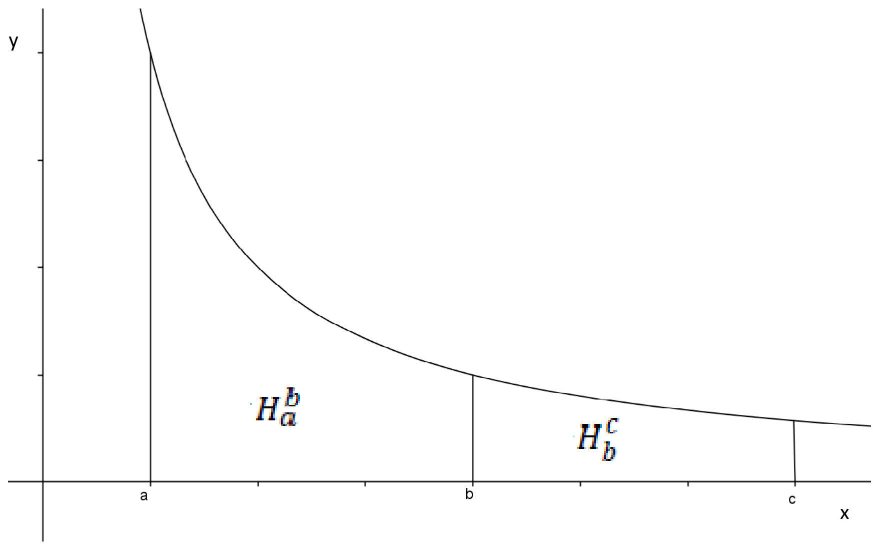


Figura 54

Percebe-se, então, que $a_{H_a^c} = a_{H_a^b} + a_{H_b^c}$.

Ressalta-se que $A_{H_a^b} = -A_{H_b^a}$, por consequência da utilização de áreas orientadas.

Assim, segue a igualdade:

$$A_{H_a^c} = A_{H_a^b} + A_{H_b^c}$$

para qualquer ordenação de a, b e c.

A título de demonstração, tomemos o caso em que $b \leq c \leq a$. Graficamente, temos:

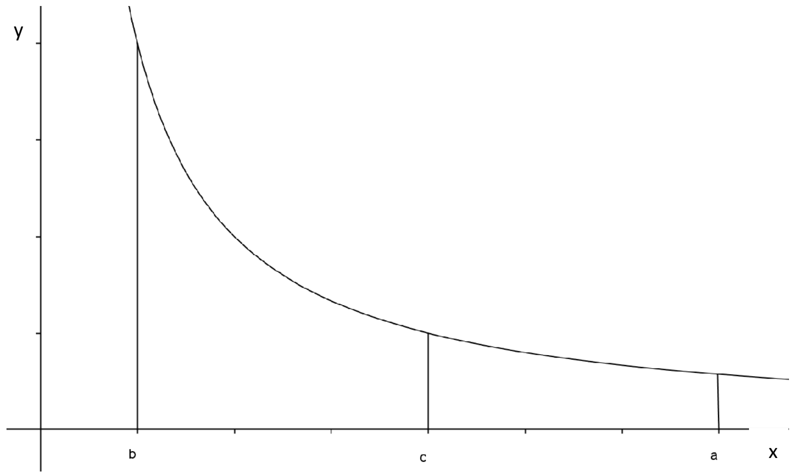


Figura 55

Pela definição:

$$A_{H_c^a} = A_{H_b^c} + A_{H_c^a}$$

Então:

$$-A_{H_a^b} = A_{H_b^c} - A_{H_a^c}$$

$$A_{H_a^c} = A_{H_a^b} + A_{H_b^c}$$

Analogamente, prova-se para todos os outros quatro casos.

Seja $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para cada x real positivo, tem que $f(x) = A_{H_1^x}$.

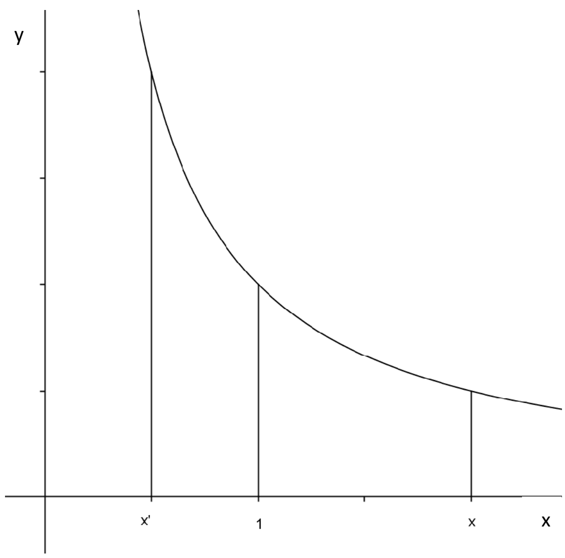


Figura 56

$$f(x) = a_{H_1^x}, \text{ se } x > 1 \qquad\qquad f(x) = -a_{H_1^{x'}}, \text{ se } 0 < x' < 1$$

Segue pela definição:

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$
$$f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1$$
$$f(1) = 0$$
$$f \text{ é crescente}$$

E ainda, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, temos:

$$f(xy) = A_{H_1^{xy}} = A_{H_1^x} + A_{H_x^{xy}}$$

Como $x > 0$, utilizando a transformação $T = T_{\frac{1}{x}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, temos que as faixas de hipérbole H_x^{xy} e H_1^h tem a mesma área, ou seja:

$$H_x^{xy} = H_1^y$$

Portanto:

$$f(xy) = H_1^x + H_1^y$$
$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Pela definição, f é uma função crescente e $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, logo existe um número e tal que $f(x) = \log_e x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Tal afirmação decorre do teorema da caracterização da função logarítmica expresso por "Seja $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ " (LIMA, et al., 2006, p. 194).

Denotaremos $\ln x$ ao invés de $\log_e x$, chamando de logaritmo natural de x.

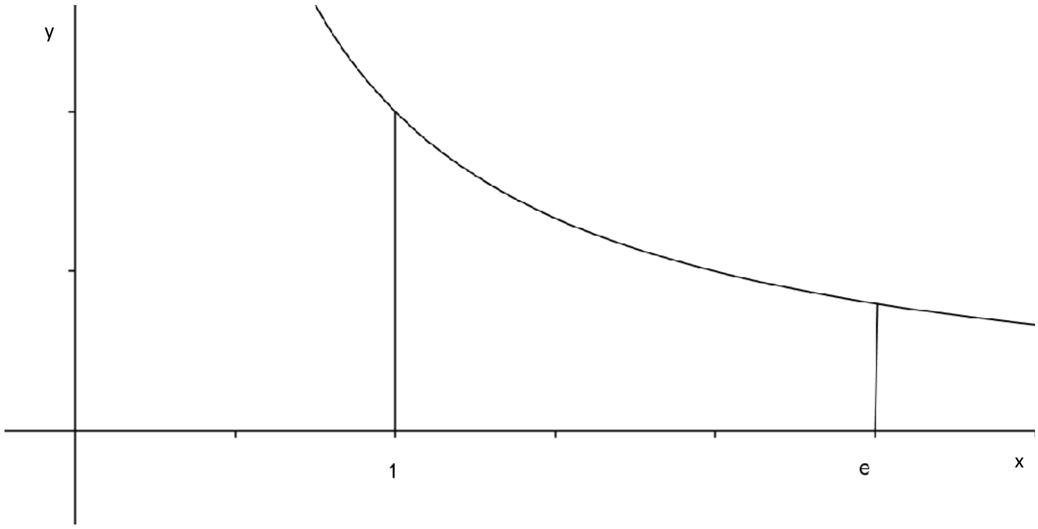


Figura 57

A base dos logaritmos naturais, o número e, é caracterizado por $A_{H_1^e} = 1$, ou seja, pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1. O número e é um número irracional e uma aproximação é $e = 2{,}7183$.

Vamos mostrar que $A_{H_1^e}$ tende a assumir valor 1 através do cálculo intuitivo de áreas sob curvas.

Questão 21:

Utilizando o ponto médio de cada intervalo, determine uma aproximação para $A_{H_1^e}$ através de:

(a) 2 retângulos.

(b) 4 retângulos.

(c) 8 retângulos.

Resolução comentada:

A função que associamos ao gráfico é $h(x) = \frac{1}{x}$. Para desenvolver a resolução, vamos assumir a aproximação $e = 2{,}7183$ e utilizar quatro casas decimais, arredondando quando necessário.

(a) Utilizando dois retângulos aproximantes, a amplitude da base será 0,8392.

Tabela 16

Intervalo (base do retângulo)	x_i^*	$f(x_i^*)$ (altura do retângulo)
1 a 1,8592	1,4296	0,6995
1,8592 a 2,7183	2,2750	0,4369

$$A = (0{,}6995 + 0{,}4369).\,0{,}8592$$
$$A = 0{,}9787\ u.a.$$

(b) Com quatro retângulos aproximantes, a amplitude da base será 0,4296.

Tabela 17

Intervalo (base do retângulo)	x_i^*	$f(x_i^*)$ (altura do retângulo)
1 a 1,4296	1,2148	0,8232
1,4296 a 1,8592	1,6444	0,6081
1,8592 a 2,2888	2,0740	0,4281
2,2888 a 2,7183	2,5036	0,2994

$$A = (0{,}8232 + 0{,}6081 + 0{,}4821 + 0{,}3994).\,0{,}4296$$
$$A = 0{,}9933\ u.a.$$

(c) A amplitude da base será 0,2148 na utilização de oito retângulos aproximantes.

Tabela 18

Intervalo (base do retângulo)	x_i^*	$f(x_i^*)$ (altura do retângulo)
1 a 1,2148	1,1074	0,9030
1,2148 a 1,4296	1,3222	0,7563
1,4296 a 1,6444	1,5370	0,6506
1,6444 a 1,8592	1,7518	0,5710

1,8592 a 2,0740	1,9666	0,5085
2,0740 a 2,2888	2,1814	0,4584
2,2888 a 2,5036	2,3962	0,4173
2,5036 a 2,7183	2,6120	0,3828

$$A = (0{,}9030 + 0{,}7563 + 0{,}6506 + 0{,}5710 + 0{,}5085 + 0{,}4584 + 0{,}417 + 0{,}3828).\,0{,}2148$$

$$A = 0{,}9984\ u.a.$$

Podemos perceber que, quanto maior o número de retângulos aproximantes, mais próximo de um será a área. Então, concluímos que $A_{H_1^e} = 1$.

3. QUESTÕES PROPOSTAS

Após o desenvolvimento da sequência didática e sua aplicação no estudo do logaritmo natural, é necessário trabalhar, de forma independente, com o conteúdo assimilado.

Assim sendo, desenvolvi a sequência de atividades a seguir, visando fixar o conteúdo trabalhado e ampliar a dimensão do assunto em questão.

Questão 1:

Calcule a área aproximada da região limitada pela curva $f(x) = x^2 - 2x + 3$, o eixo das abscissas e as retas $x = -1$ e $x = 1,5$.

Questão 2:

Obtenha o valor aproximado da área da região limitada pelas retas $x = 0,5$ e $x = \frac{5}{2}$, o eixo das abscissas e o gráfico de cada função a seguir:

a) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

c) $f(x) = \ln x^2$

d) $f(x) = sen\,(x - 1)$

e) $f(x) = e^{x+1}$

Questão 3:

Aproxime a área da região limitada pela reta $y = 4x$ e a curva $y = x^3 + 3x^2$.

Questão 4:

Estima-se que a demanda por um produto esteja aumentando exponencialmente à razão de 4% ao ano. Se a demanda atual é 5000 unidades por ano e o preço permanecer fixo em R$ 400,00 a unidade, qual será a receita aproximada contabilizada pelo fabricante com a venda do produto durante os próximos dois anos?

Questão 5:

Segundo Gaspar (2008), pela Primeira Lei da Termodinâmica, para uma variação de volume ΔV, o trabalho(T) envolvido é igual à área correspondente sob a curva do gráfico da pressão (P) em função do volume (V).

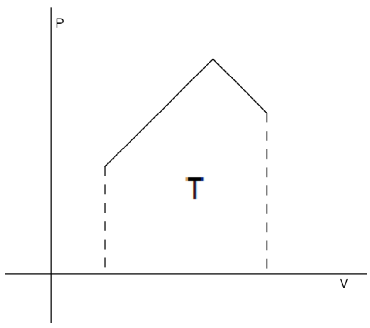


Figura 58

O gráfico P x V a seguir representa uma série de transformações em um sistema termodinâmico. Determine o trabalho realizado nos trechos AB, BC e CD e o trabalho total na transformação, de A a D.

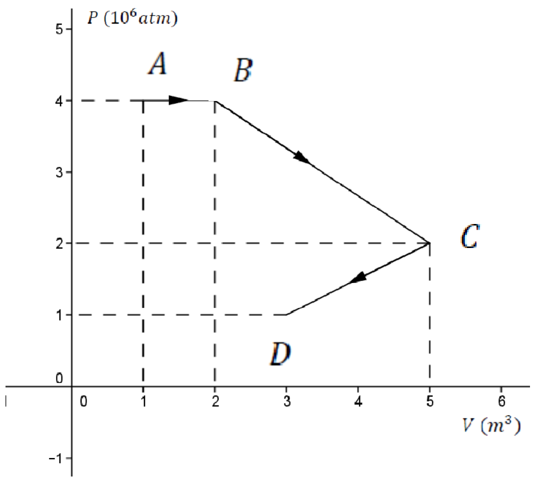


Figura 59

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao desenvolver a sequência didática que é o tema deste trabalho, tive o cuidado de sempre me preocupar em como o conteúdo apresentado atingiria o aluno, em qual significado faria em sua vida escolar.

Em nenhum momento procurei apresentar o conteúdo de integração desenvolvido no curso de Cálculo Diferencial e Integral presente no ensino superior, seria algo muito longo para ser desenvolvido nos poucos momentos possíveis para o trabalho do ensino médio. Estaria simplesmente forçando um estudo que virá posteriormente, no caso dos que farão cursos que apresentam a disciplina, em detrimento a outros tópicos fundamentais para a conclusão da etapa vivenciada neste nível de ensino.

Procuro, acima de tudo, com essa sequência didática, aprofundar pontos do estudo de áreas limitadas por figuras planas e gráficos de funções, porém na realidade de um aluno da rede pública estadual do Espírito Santo. Com isso, viso despertar a curiosidade do estudante no ponto de vista da abordagem de ideias até então não apresentadas, a vontade de entender conceitos que são apenas aceitos em muitos momentos.

Considero, que ao final do desenvolvimento das questões da sequência didática e das atividades propostas, o educando pensará de forma um quanto mais crítica, buscando entender muitos porquês presentes em sua vida escolar. Todo e qualquer aluno do segundo ano do ensino médio pode desenvolver esse trabalho, visto que conceitos elementares são apresentados e uma base simples é exigida para tal. Com isso, o objetivo poderá ser atingido de forma eficaz, com menos riscos de traumas ou experiências negativas que acabam por atrapalhar a aprendizagem em Matemática.

Muitos outros trabalhos precisam ser desenvolvidos na educação básica com a intenção de despertar a atenção de nossos alunos pela área de exatas. Nós, professores, precisamos buscar, no cotidiano, ações que levem a um interesse maior por nossa área, que sensibilizem criticamente. Porém, trabalhos que realmente possam ser aplicados ao aluno que está na escola pública, que vive com constantes problemas que influenciam negativamente no aprendizado. Atividades que possibilitem o crescimento, não que causem retrações e aflições.

Por fim, considero que a sequência didática apresentada nesse trabalho pertence a um momento inovador que vivenciamos, de profunda busca por novas ferramentas que torne a Matemática mais acessível e prazerosa. Não que devamos facilitar o conteúdo trabalhado, mas sim despertar criticamente nossos alunos para a área de exatas.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável, volume 1**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

CARVALHO, J. B. P. de O. O cálculo na escola secundária - algumas considerações históricas. **Caderno CEDES**. Campinas: Papirus, n. 40, p. 68-81, 1996.

DUCLOS, R.C. Cálculo no Segundo Grau. In: **Revista do Professor de Matemática,** n.20, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.26-30.

GASPAR, A. **Física, volume único**. São Paulo: Ática, 2005.

HALLIDAY, D.; RESNICK, J.; WALKER, J. **Fundamentos de Física, volume 1**: mecânica. Tradução e revisão técnica de Ronaldo Sérgio de Biasi. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **CÁLCULO**: Um Curso Moderno e Suas Aplicações. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica - volume 1**. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1994.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio - volume 1**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 1 v.

LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

SANTOS, D. A. T. **A Inclusão do Cálculo Diferencial e Integral no Currículo do Ensino Médio.** Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2006.

STEWART, J. **Cálculo, volume I**. Tradução de Antônio Carlos Moretti. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2002.

WEIR, M. D.; HASS, J.; GIORDANO, F. R. **Cálculo (George B. Thomas Jr.)**, volume I. Tradução de Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. 11. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.