Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Frações contínuas: uma abordagem teórica com aplicações para o ensino médio

Emanoel Rodrigo Tenório de Oliveira

Orientadora

Bárbara Costa da Silva

Co-orientadora

Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva

Recife-PE

Julho de 2016

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Frações contínuas: uma abordagem teórica com aplicações para o ensino médio

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Emanoel Rodrigo Tenório de Oliveira

Recife-PE

Julho de 2016

Banca examinadora:

Profa. Dra. Bárbara Costa da Silva (Orientadora)

Profa. Dra. Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva (Co-orientadora)

Profa. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão

Dedico este trabalho à maior dádiva que Deus me concedeu, minha família: Luiz de Oliveira e Maria de Monserrat (pais), Ana Cristina, Luiz Carlos, Silvana e Karina (irmãos), Laíse, Larissa, Barone, Nathália, Ana Clara, Yumi e Luiz Fabiano (sobrinhos).

Nada do que é feito por amor é pequeno.

Chiara Lubich

Agradecimentos

Construir este trabalho foi uma tarefa árdua e a sua concretização só tornou-se possível, por ter sido ação compartilhada. Mas, sobretudo, permitida por Deus. Por este motivo, a Ele, evidencio aqui, toda a minha gratidão. Também não poderia deixar de destacar meus especiais agradecimentos:

- à minha família, que sempre me incentivou e apoiou, mesmo durante minhas "ausências" nestes dois anos e meio de curso;
- à Profa. Dra. Bárbara Costa da Silva (orientadora) e à Profa. Dra. Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva (co-orientadora) pelos ensinamentos, conselhos, paciência e dedicação;
- à coordenação e aos professores do mestrado;
- à CAPES e à UFRPE pelos apoios financeiro e acadêmico;
- aos meus colegas de Curso, em especial aos amigos Erivaldo Morais, Herison Batista, Josenilda Abreu, Luiz Manoel e Maurilio Vilaça, pela troca de conhecimentos e companheirismo;
- aos amigos que sempre me deram a oportunidade de crescer intelectual e humanamente.

A todos o meu muito obrigado!

O Autor

Resumo

Este trabalho de pesquisa aborda o estudo das *Frações Contínuas*, mais especificamente, das *Frações Contínuas Simples* e algumas de suas aplicações. Como embasamento desta dissertação, foram utilizados alguns artigos e obras, os quais contribuíram desde o seu desenvolvimento, de forma sistematizada, até se chegar ao seu objetivo final, a saber: propor sugestões de aplicações que possam ser trabalhadas com alunos do nível médio de ensino.

Palavras-chave: Frações Contínuas; Aproximação ; Irracionais Quadráticos; Equações Diofantinas; Equações de Pell; Logaritmos.

Abstract

This work studies the Continued Fractions, more specifically the Simple Continued Fractions, as well as some of its applications. Several articles and works were used as a base of this dissertation, which have contributed not only to its development, in a systematic way, but also to its main purpose: to propose some applicationss to be worked with High School students.

Keywords: Continued Fraction; Approximation ; Quadratic Irrational Numbers; Diophantine Equations; Pell's Equation; Logarithm.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

É próprio da educação a mudança. A educação não é (e nem deve ser) estática. Porém, algumas mudanças trazem consigo perdas. Neste sentido e, mais especificamente, no que tange aos componentes curriculares da matemática, alguns conteúdos deixaram de fazer parte da proposta curricular do Ensino Básico. Um deles é o tema abordado no presente trabalho: Frações Contínuas. Contudo, a proposta apresentada aqui não tem como pretensão elencar motivos que concorram para incluir tal conteúdo no currículo do Ensino Básico. O intuito é deixar à disposição dos leitores um material que lhes sirvam para aprofundamento ou pesquisa, no qual o principal público-alvo são os professores do Ensino Básico. O trabalho está organizado conforme descrevemos a seguir.

O primeiro capítulo discorre sobre um breve contexto histórico no qual o tema "Frações Contínuas", está inserido na História da Matemática. Também apresenta algumas definições, teoremas, proposições e exemplos básicos sobre o assunto. São de grande importância para o estudo das Frações Contínuas, alguns resultados obtidos neste capítulo, tais como: a unicidade da representação dos números irracionais sob a forma de um fração contínua infinita; a unicidade, a menos do último termo, da representação dos números racionais sob a forma de uma fração contínua finita; resultados obtidos a partir da definição de convergentes da fração contínua de um número real. Também mostramos que as Frações Contínuas podem ser usadas como uma poderosa ferramenta para aproximar números irracionais por racionais.

No segundo capítulo é abordado o Teorema de Lagrange, o qual afirma que a fração contínua infinita, que representa um número irracional, é periódica se, e somente se, este número for uma *irracionalidade quadrática*. A partir de observações feitas sobre o comportamento dos períodos das Frações Contínuas que representam os irracionais quadráticos, são demonstrados alguns teoremas e proposições que nos fornecem as regularidades apresentadas por alguns destes números, quando representados sob a forma de frações contínuas. São tópicos, ainda do segundo capítulo, a apresentação de métodos de resolução que nos forneçam soluções inteiras para Equações Diofantinas e Equações de Pell, além da obtenção de valores aproximados para logaritmos, utilizando-se Frações Contínuas. Por fim, é feita a expansão do número e por meio de fração contínua que, apesar de ser infinita e não periódica, apresenta um comportamento que nos permite expandi-la o tanto quanto quisermos.

Tendo em vista que o principal público-alvo deste trabalho são professores de matemática do Ensino Básico, dedicamos o terceiro capítulo a apresentar uma sugestão de atividades com aplicações que podem ser trabalhadas com alunos de Nível Médio. Uma das atividades sugeridas, consiste na apresentação, manipulação e confecção de um quebra-cabeça que certamente irá promover questionamentos e discussões entre os discentes. E, ao serem apresentadas respostas, a partir do uso de Frações Contínuas, que justifiquem tais questionamentos, é bem provável que seja manifesto o interesse dos alunos em estudar tal assunto.

Capítulo 1

Preliminares e principais resultados

1.1 Aspectos Históricos

O primeiro matemático a tratar Frações Contínuas como objeto de estudo foi o britânico John Wallis (1616-1703), apresentando e desenvolvendo, em seu livro - *Arithimetica Infinitorium*(1655) - a igualdade abaixo, conhecida por Produto de Wallis.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3.3.5.5.7.7.9\dots}{2.4.4.6.6.8.8\dots}$$

No entanto, há registros de um método resolutivo para se encontrar soluções inteiras de Equações Diofantinas, a partir de um desenvolvimento que assemelha-se ao método utilizado para se encontrar a fração contínua de um número. Método este, utilizado pelo matemático e astrônomo hindu, Ariabata (476-550). Mas, o método usado por Ariabata só foi generalizado mais tarde, pelo matemático (também hindu), Bhascara II, no sec. XII.

Retrocedendo ainda mais, em meados de 306 a.C., o matemático Euclides de Alexandria (360 a.C.-295 a.C.) apresenta em sua obra, intitulada *Os Elementos*, um algoritmo denominado *Algoritmo da Divisão de Euclides*, do qual se pode fazer uso para obter a fração contínua de qualquer número racional.

Em outros momentos, anteriores a Wallis, este tipo de fração também foi utilizada pelos matemáticos italianos Rafael Bombelli (1526-1572) e Pietro Antonio Cataldi (1548-1626). Porém, eles não se aprofundaram no assunto. Bombelli, em 1575, no seu livro *Álgebra*, usa este tipo de fração para aproximar raízes quadráticas, como por exemplo $\sqrt{13}$. Cataldi, obteve a expressão

$$\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}.$$

O matemático inglês, William Brouncker (1620-1684), um dos fundadores da *Royal Society*, manipulando o Produto de Wallis, chegou ao seguinte resultado:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\dots}}}}.$$

Somente após Brouncker obter a identidade acima, é que, em 1692, surge pela primeira vez, o termo *Fração Contínua*, utilizado por Wallis em seu livro, *Opera Mathematica*. Posteriormente, o matemático e físico Leonard Euler (1707-1783) encontrou o desenvolvimento do número e por fração contínua, a saber:

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}}.$$

Já no século XX, as frações contínuas foram utilizadas, por exemplo, para desenvolver algoritmos de fatorização prima, ou algoritmos para cáculos de logaritmos. Enfim, atualmente as frações contínuas são aplicadas em outras áreas, além da matemática, como em Ciência da Computação e Física.

1.2 Definições básicas e exemplos

Desde o ensino básico, aprendemos algumas formas de representar um número real. No entanto, existe uma abordagem deste assunto que não se faz presente neste nível de ensino, a saber: a representação de um número real sob a forma de fração contínua, o que consiste numa "sucessão infinita de frações encaixadas umas nas outras". Todo número real pode ser expandido sob a forma de fração contínua e após a definição que se segue, como exemplo, faremos a expansão dos números $\frac{35}{12}$ e $\sqrt{29}$ em fraçao contínua. Posteriori, generalizaremos o algoritmo para se obter tal expansão.

DEFINIÇÃO 1.1. *Uma fração contínua de um número real x é uma expressão dada por*

$$x = a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}},$$

em que $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a_1 é a parte inteira do número real x, que representamos por $a_1 = \lfloor x \rfloor$. Ou seja, $\lfloor x \rfloor$ é um número inteiro tal que, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. No caso particular em que $b_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a fração contínua é chamada de simples. Neste caso, temos

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Denotamos a expressão acima por $x = [a_1; a_2, a_3, a_4, \ldots]$.

Observação 1.1. *Trabalharemos, a partir de agora, apenas com as Frações Contínuas Simples e, não sendo tão específicos, assumiremos chamá-las apenas de Frações Contínuas.*

Exemplo 1.1. *Escrevamos a representação por fração contínua do número racional $\frac{35}{12}$.*

Solução:

$$35 = 2.12 + 11 \Rightarrow \frac{35}{12} = 2 + \frac{11}{12} \Rightarrow \frac{35}{12} = 2 + \frac{1}{\frac{12}{11}}$$

$$12 = 1.11 + 1 \Rightarrow \frac{12}{11} = 1 + \frac{1}{11}$$

Então, a fração contínua que representa $\frac{35}{12}$ é

$$\frac{35}{12} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{11}}$$

ou

$$\frac{35}{12} = [2; 1, 11].$$

Exemplo 1.2. *Escrevamos a representação por fração contínua do número irracional* $\sqrt{29}$.

Solução: $\lfloor x_1 \rfloor = \lfloor \sqrt{29} \rfloor = 5 \Rightarrow \sqrt{29} = 5 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{29}-5} = \dfrac{\sqrt{29}+5}{4}$

$\lfloor x_2 \rfloor = 2 \Rightarrow x_2 = 2 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = \dfrac{1}{x_2 - 2} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{29}+5}{4} - 2} = \dfrac{4}{\sqrt{29}-3} = \dfrac{4\left(\sqrt{29}+3\right)}{20} = \dfrac{\sqrt{29}+3}{5}$

$\lfloor x_3 \rfloor = 1 \Rightarrow x_3 = 1 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow x_4 = \dfrac{1}{x_3 - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{29}+3}{5} - 1} = \dfrac{5}{\sqrt{29}-2} = \dfrac{5\left(\sqrt{29}+2\right)}{25} = \dfrac{\sqrt{29}+2}{5}$

$\lfloor x_4 \rfloor = 1 \Rightarrow x_4 = 1 + \frac{1}{x_5} \Rightarrow x_5 = \dfrac{1}{x_4 - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{29}+2}{5} - 1} = \dfrac{5}{\sqrt{29}-3} = \dfrac{5\left(\sqrt{29}+3\right)}{20} = \dfrac{\sqrt{29}+3}{4}$

$\lfloor x_5 \rfloor = 2 \Rightarrow x_5 = 2 + \frac{1}{x_6} \Rightarrow x_6 = \dfrac{1}{x_5 - 2} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{29}+3}{4} - 2} = \dfrac{4}{\sqrt{29}-5} = \dfrac{4\left(\sqrt{29}+5\right)}{4} = \sqrt{29}+5$

$\lfloor x_6 \rfloor = 10 \Rightarrow x_6 = 10 + \frac{1}{x_7} \Rightarrow x_7 = \dfrac{1}{x_6 - 10} = \dfrac{1}{\sqrt{29}+5-10} = \dfrac{1}{\sqrt{29}-5} = \dfrac{\sqrt{29}+5}{4}$

Como $x_7 = x_2$, temos também $x_8 = x_3, x_9 = x_4, x_{10} = x_5, x_{11} = x_6, x_{12} = x_2$ e, assim por diante. Portanto, temos

$$\sqrt{29} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}}}$$

ou

$$\sqrt{29} = [5; 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, \ldots] .$$

De um modo geral, dado um número real x, descreveremos um método para escrever este número sob a representação de fração contínua.

Sejam $x_1 = x$ e $a_1 = \lfloor x \rfloor = \lfloor x_1 \rfloor$. Se $x_1 \in \mathbb{Z}$, então $a_1 = x_1$ e, segue que a fração contínua de x é $x = [a_1]$. Caso contrário, teremos

$$a_1 = \lfloor x_1 \rfloor < x < a_1 + 1 \Rightarrow 0 < x_1 - a_1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - a_1} > 1.$$

Sejam $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_1}$ e $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor$. Se $x_2 \in \mathbb{Z}$, então $x_2 = a_2$ e, portanto, a fração contínua de x é $x = [a_1; a_2]$. Caso contrário, teremos

$$a_2 = \lfloor x_2 \rfloor < x_2 < a_2 + 1 \Rightarrow 0 < x_2 - a_2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x_2 - a_2} > 1.$$

Sejam $x_3 = \dfrac{1}{x_2 - a_2}$ e $a_3 = \lfloor x_3 \rfloor$. Se $x_3 \in \mathbb{Z}$, então a fração contínua de x é $x = [a_1; a_2, a_3]$, pois $a_3 = x_3 = \dfrac{1}{x_2 - a_2} \Rightarrow x_2 = a_2 + \dfrac{1}{a_3}$. Caso contrário, teremos

$$a_3 = \lfloor x_3 \rfloor < x_3 < a_3 + 1 \Rightarrow 0 < x_3 - a_3 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x_3 - a_3} > 1.$$

Seguindo este procedimento, definimos recursivamente os termos x_n e a_n como segue:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_n}; \text{ se } \quad x_n \notin \mathbb{Z}, \text{ sendo } \quad a_n = \lfloor x_n \rfloor \\ x = [a_1; a_2, \ldots, a_n]\,; \text{ se } \quad x_n \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{1.1}$$

Usando a notação

$$[b_1; b_2, \ldots, b_n] = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_n}}},$$

na qual b_i é um número real para todo $i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq n$, provaremos a partir de 1.1 que se $[a_1; a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ é a fração contínua que representa o número real x, então x também pode ser denotado por

$$x = [a_1; a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_{n+1}}}}}.$$

Vamos mostrar, por indução, que a igualdade acima é válida.

Para $n = 1$, temos $[x_1] = x_1 = x$.

Para $n = 2$, temos $[a_1; x_2] = a_1 + \dfrac{1}{x_2} = a_1 + x_1 - a_1 = x_1 = x$.

Suponha que $[a_1; a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n] = x$. Então,

$$[a_1; a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_{n+1}}}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + x_n - a_n}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [a_1; a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_n}}} = [a_1; a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n] = x.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, mostramos o que queríamos.

Além disso, $a_n \geq 1, \forall n > 1$, pois se $x_{n-1} \notin \mathbb{Z}$, então

$$a_{n-1} = \lfloor x_{n-1} \rfloor < x_{n-1} < a_{n-1} + 1 \Rightarrow 0 < x_{n-1} - a_{n-1} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}} > 1 \therefore a_n = \lfloor x_n \rfloor \geq 1.$$

Com base no método descrito anteriormente para encontrar a representação por fração contínua de um número real, obtemos o seguinte resultado: *A expansão de um número irracional em fração contínua é infinita, enquanto que a expansão torna-se finita quando este número é racional.* A proposição a seguir é equivalente a esta afirmação.

PROPOSIÇÃO 1.1. *Seja x um número real. A fração contínua de x é finita se, e somente se, x for racional.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a fração contínua de x, ou seja, x possui uma fração contínua finita. Como $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, então $x \in \mathbb{Q}$, uma vez que

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

($\Leftarrow$) Note que, se $x \in \mathbb{Z}$, então $x = [x]$. Considere $x \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$, ou seja, $x = \frac{p}{q}$ (com p/q irredutível) e $q \neq 0$.

Pelo Algoritmo da Divisão de Euclides, existem únicos a_1 e r_1 números inteiros, com $0 < r_1 < q$, tais que $p = a_1 q + r_1$. Logo,

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1.q}{q} + \frac{r_1}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r_1}}.$$

Usando mais uma vez o Algoritmo da Divisão de Euclides para os números q e r_1, existem únicos números inteiros a_1 e r_2, tais que

$$q = a_2.r_1 + r_2 \quad , \text{com} \quad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Se $r_2 = 0$, então

$$\frac{q}{r_1} = a_2.$$

Daí,

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2} \Rightarrow x = [a_1; a_2].$$

Se $r_2 \neq 0$, repete-se o processo anterior, obtendo

$$\frac{q}{r_1} = \frac{a_2.r_1}{r_1} + \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}.$$

Procedemos da mesma forma, com a fração $\frac{r_1}{r_2}$, e repetimos este processo até que $r_n = 0$ para algum n. Como r_n um número inteiro, é fato que para algum n obteremos $r_n = 0$, pois $0 \leq r_n < r_{n-1} < \ldots < r_2 < r_1$.

Quando $r_n = 0$, teremos

$$r_{n-2} = a_n.r_{n-1} + r_n \Rightarrow \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n$$

e, portanto

$$x = \frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}.$$

Dessa forma, teremos a fração contínua de x é finita. ■

Observe que, ao usarmos o *Algoritmo da divisão de Euclides* para determinarmos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tais termos são determinados de maneira única. Mais adiante, discutiremos sobre a unicidade da representação de um número real x sob a forma de fração contínua.

Exemplo 1.3. *Usaremos frações contínuas para representar o número irracional $\sqrt{7}$.*

Solução: Como vimos anteriormente, devemos proceder da seguinte forma:

$\lfloor x_1 \rfloor = \lfloor \sqrt{7} \rfloor = 2 \Rightarrow \sqrt{7} = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_2} = \sqrt{7} - 2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} \Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$

$\lfloor x_2 \rfloor = 1 \Rightarrow x_2 = 1 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \frac{1}{x_3} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} - 1 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{\sqrt{7}-1} \Rightarrow x_3 = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$

$\lfloor x_3 \rfloor = 1 \Rightarrow x_3 = 1 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow \frac{1}{x_4} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1 \Rightarrow x_4 = \frac{2}{\sqrt{7}-1} \Rightarrow x_4 = \frac{\sqrt{7}+1}{3}$

$\lfloor x_4 \rfloor = 1 \Rightarrow x_4 = 1 + \frac{1}{x_5} \Rightarrow \frac{1}{x_5} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1 \Rightarrow x_5 = \frac{2}{\sqrt{7}-2} \Rightarrow x_5 = \sqrt{7} + 2$

$\lfloor x_5 \rfloor = 4 \Rightarrow x_5 = 1 + \frac{1}{x_6} \Rightarrow \frac{1}{x_6} = \sqrt{7} + 2 - 4 \Rightarrow x_6 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} \Rightarrow x_6 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} \Rightarrow x_6 = \dfrac{\sqrt{7}+2}{3} = x_2$

Como $x_6 = x_2$, temos também $x_7 = x_3, x_8 = x_4, x_9 = x_{10}, x_9 = x_2$ e, assim por diante. Portanto, temos

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}}}}}}}$$

ou

$$\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots] .$$

Além de observarmos que a fração contínua de $\sqrt{7}$ é infinita, também é interessante o fato de que $\sqrt{7}$ ao ser representado como uma fração contínua, nos fornece uma sequência periódica e que, por esse motivo será denominada fração contínua periódica. Mais adiante, discutiremos sobre este tópico.

Fazer uma abordagem sobre essa forma de representação de números racionais, no nível básico de ensino, pode parecer um tanto desnecessária e complicada. Porém, este conteúdo pode ser repassado de forma mais direta e clara para os alunos (por exemplo, mostrar a representação dos números racionais e das raízes quadradas em forma de fração contínua), sem necessariamente recorrer às demonstrações dos resultados, e posteriormente ser um pouco mais explorado em séries finais do ensino médio (por exemplo, fazendo uma abordagem no estudo de sequências). Contudo, o foco do presente trabalho é apresentar o uso das frações contínuas como um método, dentre outros, para se obter boas aproximações de números irracionais.

1.3 Melhor Aproximação

Uma importante propriedade do conjunto dos números reais é que para qualquer número real x, podemos obter aproximações para x por meio de números racionais que podem ser tão boas o quanto desejarmos, pois tomando-se qualquer número real positivo a, existe um número racional b, tal que $|x - b| < a$. Abordaremos nesta seção, o uso de Frações Contínuas como uma poderosa ferramenta para se fazer tais aproximações, dando maior destaque quando

x for irracional.

Estamos bastante familiarizados em aproximar números irracionais por meio de números decimais que quando escritos sob forma de fração têm como denominador uma potência de 10. Sabemos que quanto maior o denominador, melhor será nossa aproximação. Porém, as potências da forma 10^n, "crescem de forma acelerada" à medida que n aumenta.

Torna-se razoável, diante do exposto, fazermos a seguinte indagação: *Dada uma fração* $\frac{a}{b}$ *que aproxima um número irracional* x*, seria possível tomarmos uma aproximação* $\frac{p}{q}$ *para* x *mais eficiente que esta, com* a, b, p, q *números inteiros?* (Entenda-se como eficiente uma aproximação tal que o denominador q seja maior que o denominador b). Mostraremos que a resposta para esta pergunta é afirmativa.

Vimos que $\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots]$. A partir desta fração contínua, consideremos a sequência $(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)$ de forma que para todo n natural

$$C_1 = [2]\,, C_2 = [2; 1]\,, C_3 = [2; 1, 1]\,, \ldots, C_n = [2; 1, 1, \ldots, a_n]\,.$$

E observemos que

$C_1 = [2] = 2$

$C_2 = [2; 1] = 2 + \frac{1}{1} = 3$

$C_3 = [2; 1, 1] = 2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5$

$C_4 = [2; 1, 1, 1] = 2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 2 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 2 + \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = 2 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3} = 2,6666666...$

$$C_5 = [2; 1, 1, 1, 4] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{5}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{9}} = 2 + \frac{9}{14} = \frac{37}{14} \cong$$

$$\cong 2,6428571429$$

$$C_6 = [2; 1, 1, 1, 4, 1] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{6}}} =$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{6}{11}} = 2 + \frac{11}{17} = \frac{45}{17} \cong 2,6470588235.$$

Com o auxílio de uma calculadora de 11 dígitos, obtemos que $\sqrt{7} \cong 2,6457513110$. Ou seja, o C_6 aproxima $\sqrt{7}$ por duas casas decimais, sendo 17 o seu denominador, enquanto que na aproximação decimal por duas casas decimais temos o denominador 100. A sequência $(C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots, C_n)$ se aproxima cada vez mais da $\sqrt{7}$ à medida que n aumenta. De uma maneira mais geral, definimos:

Definição 1.2. *Se $x = [a_1; a_2, a_3, \ldots]$ é uma representação por fração contínua de um número real x, chamamos convergentes, cada termo da sequência $(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots)$, em que*

$$C_1 = [a_1], C_2 = [a_1; a_2], C_3 = [a_1; a_2, a_3], \ldots, C_n = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n], \forall n \in \mathbb{N}.$$

O n-ésimo termo desta sequência será chamado de n-ésimo convergente da fração contínua de x.

Os convergentes, assim são chamados, pois quando x é um número real a sequência $(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots)$ converge para x. Mostraremos este resultado no final desta seção. Observemos que, por definição, os convergentes de uma fração contínua são todos números racionais e, portanto, podem ser escritos sob a forma $\frac{p}{q}$. Assim, assumiremos a partir de agora, que $\dfrac{p_n}{q_n}$ é o número racional correspondente ao n-ésimo convergente de uma fração contínua, isto é, $C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, para todo n natural.

Proposição 1.2. *Dada uma sequência de números reais positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots$, definimos as sequências (p_n) e (q_n) por*

$$p_{-1} = 0; \qquad p_0 = 1; \qquad p_1 = a_1; \qquad p_2 = a_1 a_2 + 1; \qquad q_{-1} = 1; \qquad q_0 = 0; \qquad q_1 = 1;$$

$$q_2 = a_2; \qquad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \qquad e \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Então

$$[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{p_n}{q_n}, \forall n > 0.$$

Demonstração: Usemos o Princípio de Indução Finita para provar esta afirmação.
Para $n = 1$, temos $[a_1] = a_1 = p_1 = \dfrac{p_1}{1} = \dfrac{p_1}{q_1}$.
Para $n = 2$, temos $[a_1; a_2] = a_1 + \dfrac{1}{a_2} = \dfrac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \dfrac{p_2}{q_2}$.

Seja a sentença $P(n)$: Dada a sequência (b_i) de n números reais positivos. Se as sequências (p_i) e (q_i), com $0 < i \leq n$, são definidas por $p_i = b_i p_{i-1} + p_{i-2}$ e $q_i = b_i q_{i-1} + q_{i-2}$, então $[b_1, \ldots, b_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$.

Suponha que $P(n)$ é verdade para algum $n \geq 2$. Vamos provar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Seja $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ uma sequência de $n+1$ números reais positivos, sejam (p_i) e (q_i), com $0 < i \leq n+1$ sequências definidas por $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$ e $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$. Então,

$$[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}} = \left[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right].$$

Sejam (p_i') e (q_i') sequências definidas por $p_i' = b_i p_{i-1}' + p_{i-2}'$ e $q_i' = b_i q_{i-1}' + q_{i-2}'$, em que $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3, \ldots, b_{n-1} = a_{n-1}, b_n = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$, temos então, pela hipótese de indução, que

$$\left[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right] = \frac{p_n'}{q_n'}.$$

Pela definição das sequências (p_i') e (q_i'), segue que

$$\frac{p_n'}{q_n'} = \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1}' + p_{n-2}'}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1}' + q_{n-2}'} = \frac{a_{n+1}\left(a_n p_{n-1}' + p_{n-2}'\right) + p_{n-1}'}{a_{n+1}\left(a_n q_{n-1}' + q_{n-2}'\right) + q_{n-1}'}.$$

Note que para $0 < i \leq n-1$, temos $p_i' = p_i$ e $q_i' = q_i$. Logo,

$$\frac{p_n'}{q_n'} = \frac{a_{n+1}\left(a_n p_{n-1} + p_{n-2}\right) + p_{n-1}}{a_{n+1}\left(a_n q_{n-1} + q_{n-2}\right) + q_{n-1}}.$$

Por definição, também temos $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ e $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.

Portanto, $\dfrac{p_n'}{q_n'} = \dfrac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Logo,

$$[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}] = \frac{p_n'}{q_n'} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

E, pelo Principio de Indução Finita, a afirmação é válida para qualquer $n > 0$. ■

Corolário 1.1. *Dado um número real x e sua fração contínua $x = [a_1; a_2, a_3, \ldots]$. Temos $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$, para todo $n \geq 0$.*

Demonstração: Usemos indução, para provar esta afirmação.

Para $n = 0$, temos $p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = 1.1 - 0.0 = 1 = (-1)^0$.

Para $n = 1$, temos $p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_1.0 - 1.1 = -1 = (-1)^1$.

Para $n = 2$, temos $p_2 q_1 - p_1 q_2 = (a_2 a_1 + 1).1 - a_1 a_2 = 1 = (-1)^2$.

Suponhamos que para um certo $n \geq 2$ a igualdade abaixo seja válida.

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

Vamos provar que para $n + 1$ a afirmação também é válida. De fato,

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) = p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = -(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n).$$

Daí, pela hipótese de indução, temos

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = -(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, a afirmação é válida para qualquer $n \geq 0$. ■

Corolário 1.2. *Temos, para todo $n > 0$, $x = \dfrac{p_{n-1} x_n + p_{n-2}}{q_{n-1} x_n + q_{n-2}}$, $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.2, temos

$$x = [a_1, a_2, ..., x_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

■

Observação 1.2. Por manipulação da igualdade do Corolario 1.2, obtemos que $x_n = \dfrac{p_{n-2} - q_{n-2} x}{q_{n-1} x - p_{n-1}}$. Vejamos:

$$x = \frac{p_{n-1} x_n + p_{n-2}}{q_{n-1} x_n + q_{n-2}} \Leftrightarrow x x_n q_{n-1} + x q_{n-2} = x_n p_{n-1} + p_{n-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_n (q_{n-1} x - p_{n-1}) = p_{n-2} - q_{n-2} x \Leftrightarrow x_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2} x}{q_{n-1} x - p_{n-1}}.$$

■

Na Definição 1.2, usamos uma representação por fração contínua para um número real x. Entretanto, esta representação é única quando x for um número irracional, conforme é mostrado no resultado a seguir.

Corolário 1.3. *Seja x um número irracional, então sua representação sob forma de fração contínua é única.*

Demonstração: Considere $x = [a_1; a_2, \dots, a_n, \alpha_{n+1}] = [b_1; b_2, \dots, b_n, \beta_{n+1}]$ duas representações por fração contínua de um número irracional x. Daí, temos $\lfloor x \rfloor = a_1$ e $\lfloor x \rfloor = b_1$, logo, $a_1 = b_1$. Também temos $x = a_1 + \dfrac{1}{x_2}$, o que implica $x_2 = \dfrac{1}{x - a_1}$, em que $\lfloor x_2 \rfloor = a_2$. Da mesma forma, $x = b_1 + \dfrac{1}{x_2}$, o que implica $x_2 = \dfrac{1}{x - b_1}$, em que $\lfloor x_2 \rfloor = b_2$. Daí, como $a_1 = b_1$, segue que $a_2 = b_2$.

Suponha, por indução, que $a_i = b_i$, para $1 < i \leq n$. Então,

$$[a_1; a_2, \dots, a_i] = [b_1; b_2, \dots, b_i] = \frac{p_i}{q_i}, \text{ para } 1 < i \leq n.$$

Pelo Corolário 1.2, temos

$$\alpha_{n+1} = \frac{p_{n-1} - q_{n-1}x}{q_n x - p_n} = \beta_{n+1}.$$

Portanto, $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$, o que implica $\lfloor \alpha_{n+1} \rfloor = a_{n+1} = \lfloor \beta_{n+1} \rfloor = b_{n+1}$. Então, pelo Princípio de Indução Finita, temos $a_n = b_n$, para todo $n > 0$. Ou seja, a maneira de representar um número irracional x por fração contínua é única. ■

Observação 1.3. Vale salientar que não temos unicidade na representação de um número racional por fração contínua. Neste caso, há duas formas de representá-las. De fato, considere a fração contínua finita $x = [a_1; a_2, \dots, a_n]$.

Se $a_n = 1$, *então* $x = [a_1; a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$. *De fato,*

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{1}}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{(a_{n-1} + 1)}}}}.$$

Se $a_n \neq 1$, *então* $x = [a_1; a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$. *De fato,*

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{(a_n - 1) + \cfrac{1}{1}}}}}.$$

Corolário 1.4. *Temos, para todo* $n > 0$, $x - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(x_{n+1} q_n + q_{n-1})\, q_n}$, *com* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Pelo Corolário 1.2, temos

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n\left(x_{n+1}p_n + p_{n-1}\right) - p_n\left(x_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)}{q_n\left(x_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)} =$$

$$= \frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{\left(x_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)q_n} = \frac{-\left(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n\right)}{\left(x_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)q_n} = \frac{-\left(-1\right)^n}{\left(x_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)q_n} = \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\left(x_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)q_n}.$$

■

Corolário 1.5. *Sob as hipóteses da Proposição 1.2, se $a_1 \neq 0$, então*

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1] \ e \ \frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2].$$

Demonstração: Sabemos que $p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$, o que implica nas igualdades abaixo

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{\cfrac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}$$

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{p_{n-3}}{p_{n-2}} = a_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}$$

$$\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}} = a_{n-2} + \frac{p_{n-4}}{p_{n-3}} = a_{n-2} + \cfrac{1}{\cfrac{p_{n-3}}{p_{n-4}}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{p_2}{p_1} = a_2 + \frac{p_0}{p_1} = a_2 + \frac{1}{a_1}.$$

Daí, fazendo sucessivas substituições, obtemos que

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}} = \left[a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1\right].$$

Como $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$, obtemos analogamente que

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_2}}}} = \left[a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2\right],$$

como queríamos demonstrar. ■

Calculamos, em outro momento, os convergentes da fração contínua de $\sqrt{7}$. Agora, observemos que

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1} \leq \frac{p_3}{q_3} = \frac{5}{2} \leq \frac{p_5}{q_5} = \frac{37}{14} \leq \sqrt{7}$$

e

$$\sqrt{7} \leq \frac{p_6}{q_6} = \frac{45}{17} \leq \frac{p_4}{q_4} = \frac{8}{3} \leq \frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{1}.$$

Podemos então concluir que, se n for ímpar, então $\frac{p_n}{q_n} \leq \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} \leq \sqrt{7}$ e, se n for par, então $\sqrt{7} \leq \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} \leq \frac{p_n}{q_n}$? Mais ainda: será que este fato ocorre com os convergentes da fração contínua de qualquer número real x? A proposição a seguir mostra respostas afirmativas para as duas perguntas.

PROPOSIÇÃO 1.3. *Para todo $k > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, temos*

$$\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} \leq x \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}}.$$

Demonstração: Temos $p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n$ e $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$. Então

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n\left(a_{n+2}p_{n+1} + p_n\right) - p_n\left(a_{n+2}q_{n+1} + q_n\right)}{q_n\left(a_{n+2}q_{n+1} + q_n\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n+2}\left(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}\right)}{q_nq_{n+2}}.$$

Como $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^{n+1}$, segue que $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n+1}a_{n+2}}{q_nq_{n+2}}$.

Temos $\frac{a_{n+2}}{q_nq_{n+2}} > 0$ para todo n. Logo, o sinal de $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n}$ é igual ao sinal de $(-1)^{n+1}$.

Desta forma:

- Se n for par ($n = 2k$), então $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} < 0$ (ou $\frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < 0$). Ou seja, $\frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$.
- Se n for ímpar ($n = 2k-1$), temos $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} > 0$ (ou $\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} > 0$). Isto é, $\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} > \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}$.

Além disso, pelo Corolário 1.4, sabemos que $x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(x_{n+1}q_n + q_{n-1})\,q_n}$. Logo, $x - \frac{p_n}{q_n}$ é positivo quando n é ímpar e, negativo, caso n seja par. Daí, $\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} < x < \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$.
Todas estas desigualdades, mostram que, para todo $k \geq 0$, temos

$$\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} \leq x \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}}.$$

■

Observe que a tabela a seguir, satisfaz a recorrência da Proposição 1.2 e, sempre que for preciso, usaremos de sua praticidade para o cálculo de convergentes da fração contínua de um número x.

i	-1	0	1	2	3	$\ldots$	n
a_i			a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n
p_i	0	1	$a_1.1 + 0 = a_1$	$a_2.p_1 + 1 = a_2.a_1 + 1$	$a_3.p_2 + p_1$	$\ldots$	$a_np_{n-1} + p_{n-2}$
q_i	1	0	$a_1.0 + 1 = 1$	$a_2.1 + 0 = a_2$	$a_3q_2 + q_1$	$\ldots$	$a_nq_{n-1} + q_{n-2}$

Tabela 1.1: Cálculo de Convergentes

Por exemplo, sabemos que $\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots] = 2,6457513111\ldots$

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\ldots$
a_i			2	1	1	1	4	1	1	1	4	$\ldots$
p_i	0	1	2	3	5	8	37	45	82	127	590	$\ldots$
q_i	1	0	1	1	2	3	14	17	31	48	223	$\ldots$

Tabela 1.2: Cálculo de Convergentes de $\sqrt{7}$

Tomando o quinto e o sétimo convergentes da fração contínua de $\sqrt{7}$ calculados na tabela acima, podemos fazer as seguintes comparações:

$$\left|\sqrt{7} - \frac{37}{14}\right| < \frac{1}{344} < \left|\sqrt{7} - \frac{264}{100}\right| \quad \text{e} \quad \left|\sqrt{7} - \frac{82}{31}\right| < \frac{1}{1693} < \left|\sqrt{7} - \frac{2645}{1000}\right|.$$

Com base nestas desigualdades, podemos perceber que $\frac{37}{14}$ e $\frac{82}{31}$ são melhores aproximações que $\frac{264}{100}$ e $\frac{2645}{1000}$, respectivamente, além de possuírem denominadores bem menores.

Lema 1.1. *A sequência (q_n) da Tabela 1.1 é estritamente crescente para $n > 1$, sendo $q_1 \leq q_2$.*

Demonstração: De fato, $q_1 \geq q_2$, pois $q_1 = 1$ e $q_2 = a_2 \geq 1$. Agora, observemos que para $n > 1$, temos $q_n \leq a_{n+1}q_n$, pois $a_{n+1} \geq 1$. Portanto, $q_n < a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$, pois $q_{n-1} > 0$. Ou seja, $q_n < q_{n+1}$ para todo $n > 1$. ■

O teorema a seguir, mostra que, sempre existirá um convergente de uma fração contínua de um número real x que se aproxime mais de x (ou seja igual a x) do que qualquer outra aproximação racional.

Teorema 1.1. *Para todo $p, q \in \mathbb{Z}^*$, com $0 < q < q_{n+1}$, temos*

$$|q_n x - p_n| \leq |qx - p|.$$

Além disso, se $0 < q < q_n$, a desigualdade acima será estrita.

Demonstração: Pelo Corolário 1.1, temos $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^{n+1}$ para todo n natural, e isso implica que p_n, q_n são primos entre si. Dai, se $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$, então $p = kp_n$ e $q = kq_n$, com $k \in \mathbb{Z}^*$ e, dessa forma, temos

$$|qx - p| = |k\left(q_n x - p_n\right)| \geq |q_n x - p_n|.$$

Mas, se $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$, como $p, q, p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, temos $|pq_n - p_n q| \geq 1$. Portanto,

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Por outro lado,

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Como, $\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right|$, podemos concluir que $\frac{p}{q}$ não pertence ao intervalo fechado de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. E por x pertencer a este intervalo, temos $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq min\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\}$.

Também temos

- $\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{pq_n - qp_n}{qq_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n}$. Pelo Lema 1.1, $q_{n+1} \geq q_n$ e, portanto $\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$;

- $\left|\frac{p}{q}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|=\left|\frac{pq_{n+1}-qp_{n+1}}{qq_{n+1}}\right|\geq\frac{1}{qq_{n+1}}$.

Portanto,

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|\geq min\{\left|\frac{p}{q}-\frac{p_n}{q_n}\right|,\left|\frac{p}{q}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\}\geq\frac{1}{qq_{n+1}},$$

o que implica em $|qx-p|\geq\frac{1}{q_{n+1}}$. Também pelo fato de x pertencer ao intervalo fechado de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, temos $|q_nx-p_n|\leq\frac{1}{q_{n+1}}$. Destas últimas duas desigualdades, obtemos que

$$|qx-p|\geq\frac{1}{q_{n+1}}\geq|q_nx-p_n|\Rightarrow|q_nx-p_n|\leq|qx-p|.$$

Vamos agora mostrar que se $0<q<q_n$, então $|q_nx-p_n|<|qx-p|$.

Ou equivalentemente que, se $0<q<q_n$ e $|q_nx-p_n|=|qx-p|$, então $|q_nx-p_n|<|qx-p|$.

Como $|qx-p|\geq\frac{1}{q_{n+1}}\geq|q_nx-p_n|$ e, por hipótese, $|q_nx-p_n|=|qx-p|$, então temos $|qx-p|=\frac{1}{q_{n+1}}$. Daí, sendo $q_n>0$, temos

$$\frac{1}{q_nq_{n+1}}=\left|\frac{qx-p}{q_n}\right|\Rightarrow\left|\frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}\right|=\left|\frac{qx-p}{q_n}\right|\Rightarrow\left|\frac{p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}}{q_nq_{n+1}}\right|=\left|\frac{qx-p}{q_n}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\frac{qx-p}{q_n}\right|\Rightarrow\left|q_n\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-p_n\right|=|qx-p|.$$

Por hipótese, temos $|q_nx-p_n|=|qx-p|$, e portanto, $x=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Dessa forma, x é representado por uma fração contínua finita e, por este motivo, temos $a_{n+1}\geq 2$.

Como $q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}$ e $q_n>1$, pois $0<q<q_n$, temos $q_{n+1}>2q_n$, ou equivalentemente $\frac{q_{n+1}}{q_n}>2$. Por outro lado,

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|\geq\left|\frac{p}{q}-\frac{p_n}{q_n}\right|-\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|\Rightarrow\left|x-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{1}{qq_n}-\frac{1}{q_nq_{n+1}}=\frac{q_{n+1}-q}{qq_nq_{n+1}}.$$

Como $q_n>q\Rightarrow q_{n+1}-q>q_{n+1}-q_n$. Logo,

$$\frac{q_{n+1}-q}{qq_nq_{n+1}}>\frac{q_{n+1}-q_n}{qq_nq_{n+1}}=\frac{\frac{q_{n+1}}{q_n}-1}{qq_{n+1}}.$$

Em que $\frac{q_{n+1}}{q_n}-1>1$, pois $\frac{q_{n+1}}{q_n}>2$. Então,

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|\geq\frac{q_{n+1}-q}{qq_nq_{n+1}}>\frac{\frac{q_{n+1}}{q_n}-1}{qq_{n+1}}>\frac{1}{qq_{n+1}},$$

e portanto, $|qx-p| > \dfrac{1}{q_{n+1}}$. Já vimos que $\dfrac{1}{q_{n+1}} \geq |q_nx-p_n|$, e sendo de fato $|qx-p| > |q_nx-p_n|$, como queríamos provar. ∎

Da segunda parte do teorema anterior, obtemos que, dados p e $q < q_n$, (com $q > 0$), temos $|x - \frac{p_n}{q_n}| < |x - \frac{p}{q}|$, em que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Isto mostra que sempre irá existir um n-ésimo convergente da fração contínua de x, que se aproxima mais que qualquer outra fração $\dfrac{p}{q}$ dada.

Exemplo 1.4. *Encontre uma melhor aproximação racional* $\dfrac{a}{b}$ *para* $\sqrt{7}$ *do que* $\dfrac{214}{81}$*, de forma que* $a < 214$ *e* $0 < b < 81$*.*

Solução: A Tabela 1.2 mostra que o convergente $\dfrac{127}{48}$ é o mais próximo de $\sqrt{7}$, de forma que $127 < 214$ e $0 < 48 < 81$. Também temos $\left|\sqrt{7} - \dfrac{127}{48}\right| < \left|\sqrt{7} - \dfrac{214}{81}\right|$, o que mostra que $\dfrac{127}{48}$ é uma melhor aproximação racional para $\sqrt{7}$ do que $\dfrac{214}{81}$.

Teorema 1.2. *Para todo,* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$*, temos* $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \leq \dfrac{1}{q_nq_{n+1}} < \dfrac{1}{q_n^2}$*, sendo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração: Pela Proposição 1.3, o número real x pertence ao intervalo fechado de extremos $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Como $\left|\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n}\right| = \left|\dfrac{p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}}{q_nq_{n+1}}\right| = \left|\dfrac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}\right| = \dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$. Então, $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \leq \dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$. E, uma vez que, $n > 1$, pelo Lema 1.1, temos $q_{n+1} > q_n$, o que implica $\dfrac{1}{q_nq_{n+1}} < \dfrac{1}{q_n^2}$. Concluímos então, que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_nq_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

∎

Exemplo 1.5. *Encontre uma fração cujo valor se aproxime de* $\dfrac{205}{93}$ *exatamente por três casas decimais, de modo que tenha um menor numerador e um menor denominador que* 205 *e* 93*, respectivamente.*

Solução: Vamos converter $\dfrac{205}{93}$ em uma fração contínua:

$$\lfloor\frac{205}{93}\rfloor = 2 \Rightarrow \frac{205}{93} = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{205}{93} - 2 = \frac{19}{93} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{93}{19}$$

$$\lfloor\frac{93}{19}\rfloor = 4 \Rightarrow \frac{93}{19} = 4 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \frac{93}{19} - 4 = \frac{17}{19} = \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = \frac{19}{17}$$

$$\lfloor \frac{19}{17} \rfloor = 1 \Rightarrow \frac{19}{17} = 1 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow \frac{19}{17} - 1 = \frac{2}{17} = \frac{1}{x_4} \Rightarrow x_4 = \frac{17}{2}$$
$$\lfloor \frac{17}{2} \rfloor = 8 \Rightarrow \frac{17}{2} = 8 + \frac{1}{x_5} \Rightarrow \frac{17}{2} - 8 = \frac{1}{2} = \frac{1}{x_5} \Rightarrow x_5 = 2.$$

Logo, $\frac{205}{93} = [2,4,1,8,2]$.
Observemos a tabela dos convergentes a seguir:

i	-1	0	1	2	3	4	5
a_i			2	4	1	8	2
p_i	0	1	2	9	11	97	205
q_i	1	0	1	4	5	44	93

Sabemos que $\left|\frac{205}{93} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ e, como desejamos que $\left|\frac{205}{93} - \frac{p_n}{q_n}\right| < 0,0005$, basta encontrar $\frac{p_n}{q_n}$, de forma que $\left|\frac{205}{93} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < 0,0005$. Pela tabela acima, temos

$$\frac{1}{q_1 q_2} = \frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{4}; \frac{1}{q_2 q_3} = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}; \frac{1}{q_3 q_4} = \frac{1}{5 \cdot 44} = \frac{1}{220}; \frac{1}{q_4 q_5} = \frac{1}{44 \cdot 93} = \frac{1}{4092} < 0,0005.$$

Logo, $\frac{p_n}{q_n} = \frac{97}{44}$ é a fração que satisfaz o que se pede neste exemplo.

Proposição 1.4. *Seja $\frac{p_n}{q_n}$ o n-ésimo convergente da fração contínua de x. Temos $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.1, temos q_n é estritamente crescente quando $n > 1$, o que implica que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n^2} = 0$. E, pelo Teorema 1.2, temos $0 \leq \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

■

Capítulo 2

Frações contínuas periódicas e alguns exemplos interessantes

2.1 Frações Contínuas Periódicas

Uma das conclusões a que chegamos até o momento é o fato de que as frações contínuas de números racionais são finitas, enquanto que as frações contínuas de números irracionais são infinitas. Há uma certa complexidade na expansão de alguns números irracionais em frações contínuas. Contudo, discutiremos as frações contínuas que representam alguns números irracionais; algumas mais simples, outras um tanto mais complexas, mas sobretudo, aquelas que consideramos importante para o escopo deste trabalho.

Os números da forma

$$\frac{M \pm \sqrt{N}}{Q}$$

em que M, N, Q são inteiros, N é positivo e não é um quadrado perfeito e $Q \neq 0$, são raízes de alguma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$ e $a \neq 0$. Estes números são chamados de *irracionais quadráticos.*

No Capítulo 1, vimos que a fração contínua que representa o irracional quadrático $\sqrt{7}$ é periódica, pois esta fornece uma sequência periódica

$$\sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots] .$$

Tal fração contínua será denotada por

$$\sqrt{7} = \left[2; \overline{1, 1, 1, 4}\right].$$

De modo geral, dada a fração contínua $[a_1; a_2, \ldots]$ de um número real x, dizemos que esta fração contínua é dita *periódica*, se existem $k, n \geq 1$, tais que para todo i maior que ou igual a k tivermos que $a_i = a_{i+n}$. E, sendo a fração contínua periódica, a chamaremos de *puramente periódica* quando $k = 1$.

"Foi provado por Lagrange em 1770, que a expansão em fração contínua de qualquer irracional quadrático é periódica após um certo estágio" [8]. Antes de apresentarmos a demonstração deste resultado, vejamos o lema a seguir.

LEMA 2.1. *Se na representação por fração contínua de um número real x obtivermos, para algum $k \in \mathbb{N}^*, x_{n+k} = x_n$, então $x_{n+k+1} = x_{n+1}$, ou seja, esta fração contínua é periódica.*

Demonstração: Por definição temos $x_{n+k+1} = \dfrac{1}{x_{n+k} - a_{n+k}}$ e, por hipótese, $x_{n+k} = x_n$, logo $a_{n+k} = \lfloor x_{n+k} \rfloor = \lfloor x_n \rfloor = a_n$ e, portanto, temos

$$x_{n+k+1} = \frac{1}{x_{n+k} - a_{n+k}} = \frac{1}{x_n - a_n} = x_{n+1}.$$

Então, o número real x é representado por uma fração contínua periódica. ■

TEOREMA 2.1. *Uma fração contínua é periódica se, e somente se, representa um irracional quadrático.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja x um número real. Se a fração contínua que representa x for periódica, temos

$$x_{n+k} = x_n, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}^*.$$

Como, pela Observação 1.2, $x_n = \dfrac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} = \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}} \Rightarrow$$

$$p_{n-2}q_{n+k-1}x - p_{n-2}p_{n+k-1} - q_{n-2}q_{n+k-1}x^2 + p_{n+k-1}q_{n-2}x =$$

$$= p_{n+k-2}q_{n-1}x - p_{n-1}p_{n+k-2} - q_{n-1}q_{n+k-2}x^2 + p_{n-1}q_{n+k-2}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1}\right)x^2 + \left(p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n+k-1} - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2}\right)x +$$

$$+ p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1} = 0.$$

Fazendo

$$A = q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1},$$

$$B = p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n+k-1} - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2},$$

$$C = p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1},$$

obtemos $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Note que o coeficiente de x^2 é não-nulo, pois sendo $p_{i-1}q_{i-2} - p_{i-2}q_{i-1} = (-1)^1$ para todo i, então $\dfrac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ e $\dfrac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ são frações irredutíveis de denominadores q_{n-2} e q_{n+k-2}, respectivamente. Logo $q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \neq 0$. Portanto, x é raiz de uma equação do 2º grau com coeficientes inteiros.

($\Leftarrow$) Suponha agora que x é uma irracionalidade quadrática, então existem a, b e $c \in \mathbb{Z}$, tais que $ax^2 + bx + c = 0$, com $b^2 - 4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por outro lado, temos

$$x = \frac{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}x_n + q_{n-2}}.$$

Daí,

$$a\left(\frac{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}x_n + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}x_n + q_{n-2}}\right) + c = 0$$

$$a\left(p_{n-1}^2x_n^2 + 2p_{n-1}p_{n-2}x_n + p_{n-2}^2\right) + b\left(p_{n-1}x_n + p_{n-2}\right)\left(q_{n-1}x_n + q_{n-2}\right) +$$

$$+ c\left(q_{n-1}^2x_n^2 + 2q_{n-1}q_{n-2}x_n + q_{n-2}^2\right) = 0$$

$$\left(ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2\right)x_n^2 + \left(2ap_{n-1}p_{n-2} + b\left(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}\right) + 2cq_{n-1}q_{n-2}\right)x_n$$

$$+ ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2 = 0.$$

Ou seja,

$$A_nx_n^2 + B_nx_n + C_n = 0,$$

em que

$$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2,$$

$$B_n = 2ap_{n-1}p_{n-2} + b\left(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}\right) + 2cq_{n-1}q_{n-2},$$

$$C_n = ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2.$$

Tomando A_n e multiplicando por $\dfrac{q_{n-1}^2}{q_{n-1}^2}$, temos

$$A_n = a\frac{p_{n-1}^2}{q_{n-1}^2}q_{n-1}^2 + b\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}q_{n-1}^2 + cq_{n-1}^2 = q_{n-1}^2\left(a\frac{p_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + c\right)$$

$$= aq_{n-1}^2\left(\frac{p_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + \frac{b}{a}\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{c}{a}\right) = aq_{n-1}^2\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right),$$

em que x e $\overline{x}$ são raízes da equação $aX^2 + bX + c = 0$, com $X = \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ e, sem perda de generalidade, admitamos $a > 0$.

Pelo Teorema 1.2, vimos que $\left|x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \dfrac{1}{q_{n-1}^2} \leq 1$. Logo,

$$|A_n| = aq_{n-1}^2\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\left|\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < aq_{n-1}^2\frac{1}{q_{n-1}^2}\left|\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = a\left|\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$$

$$= a\left|(\overline{x} - x) + \left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\right| \leq a\left(|\overline{x} - x| + 1\right),$$

ou seja, $0 < |A_n| \leq a\left(|\overline{x} - x| + 1\right) = M$.

Note que $C_n = A_{n-1}$ e, portanto $0 < |C_n| \leq M$. Temos,

$$B_n^2 = \left(2ap_{n-1}p_{n-2} + b\left(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}\right) + 2cq_{n-1}q_{n-2}\right)^2$$

$$\Rightarrow B_n^2 = 4a^2p_{n-1}^2p_{n-2}^2 + 4abp_{n-1}p_{n-2}\left(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}\right) + 8acp_{n-1}p_{n-2}q_{n-1}q_{n-2} +$$

$$+b^2\left(p_{n-1}^2q_{n-2}^2 + 2p_{n-1}p_{n-2}q_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}^2q_{n-1}^2\right) + 4bcq_{n-1}q_{n-2}\left(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}\right) + 4c^2q_{n-1}^2q_{n-2}^2$$

$$\Rightarrow B_n^2 = 4a^2p_{n-1}^2p_{n-2}^2 + 4abp_{n-1}^2p_{n-2}q_{n-2} + 4abp_{n-1}p_{n-2}^2q_{n-1} + 8acp_{n-1}p_{n-2}q_{n-1}q_{n-2} +$$

$$b^2p_{n-1}^2q_{n-2}^2 + 2b^2p_{n-1}p_{n-2}q_{n-1}q_{n-2} + b^2p_{n-2}^2q_{n-1}^2 + 4bcp_{n-1}q_{n-1}q_{n-2}^2 + 4bcp_{n-2}q_{n-1}^2q_{n-2} + 4c^2q_{n-1}^2q_{n-2}^2$$

e

$$-4A_nC_n = -4\left(ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2\right)\left(ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2\right) \Rightarrow$$

$$-4A_nC_n = -4a^2p_{n-1}^2p_{n-2}^2 - 4abp_{n-1}^2p_{n-2}q_{n-2} - 4acp_{n-1}^2q_{n-2}^2 - 4abp_{n-1}p_{n-2}^2q_{n-1}$$

$$-4b^2p_{n-1}p_{n-2}q_{n-1}q_{n-2} - 4bcp_{n-1}q_{n-1}q_{n-2}^2 - 4acp_{n-2}^2q_{n-1}^2 - 4bcp_{n-2}q_{n-1}^2q_{n-2} - 4c^2q_{n-1}^2q_{n-2}^2.$$

Portanto,

$$B_n^2 - 4A_nC_n = \left(8ac - 4b^2 + 2b^2\right)\left(p_{n-1}p_{n-2}q_{n-1}q_{n-2}\right) + \left(b^2 - 4ac\right)\left(p_{n-1}^2q_{n-2}^2\right) +$$

$$+\left(b^2-4ac\right)\left(p_{n-2}^2q_{n-1}^2\right)$$

$$B_n^2-4A_nC_n=(b^2-4ac)\left(-2p_{n-1}p_{n-2}q_{n-1}q_{n-2}+p_{n-1}^2q_{n-2}^2+p_{n-2}^2q_{n-1}^2\right)$$

$$B_n^2-4A_nC_n=(b^2-4ac)\left(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1}\right)^2=(b^2-4ac)\left(-1\right)^2=b^2-4ac.$$

Temos então $B_n^2=4A_nC_n+b^2-4ac\leq 4.M.M+b^2-4ac$. Como $b^2-4ac>0$, então

$$B_n\leq\sqrt{4M^2+b^2-4ac}=N\Rightarrow 0<|B_n|\leq N.$$

Concluímos que A_n, B_n e C_n são limitadas e, como A_n, B_n e C_n são inteiros para qualquer $n\in\mathbb{N}$, temos um número finito de soluções para a equação $A_nx_n^2+B_nx_n+C_n=0$, sendo $x_{n+k}=x_n$, para alguma escolha de $n\in\mathbb{N}$ e $k\in\mathbb{N}^*$. Logo, pelo Lema 2.1, temos a fração contínua que representa x é periódica. ■

Além da periodicidade das frações contínuas de irracionais quadráticos, é interessante perceber como se "comportam" os períodos daqueles em que $M=0$ e $Q=1$, na forma descrita no início desta seção $\left(\dfrac{M\pm\sqrt{N}}{Q}\right)$. Mas, antes disto, vejamos mais alguns resultados acerca de irracionais quadráticos.

Teorema 2.2. *Se $a_1,a_2,\ldots,a_n$ forem inteiros positivos, então a fração contínua $\alpha=[\overline{a_1,a_2,\ldots,a_n}]$ será maior que* 1. *Além disso, sendo $\beta=[\overline{a_n,a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_1}]$ então α e $-\frac{1}{\beta}$ são raízes da mesma equação quadrática e $-1<-\frac{1}{\beta}<0$.*

Demonstração: De fato $\alpha>1$, pois a_1 é um inteiro positivo. Temos

$$\alpha=[\overline{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n}]=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{\alpha}}}}}.$$

Logo, pelo Corolário 1.2, temos $\alpha=\dfrac{\alpha p_n+p_{n-1}}{\alpha q_n+q_{n-1}}$, o que implica

$$q_n\alpha^2-\left(p_n-q_{n-1}\right)\alpha-p_{n-1}=0, \tag{2.1}$$

onde $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ são os n-ésimo e $(n-1)$-ésimo convergentes de α, respectivamente;

Da mesma forma

$$\beta = [\overline{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1}] = a_n + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-3} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\beta}}}}}.$$

Logo, pelo Corolário 1.2, temos $\beta = \dfrac{\beta p'_n + p'_{n-1}}{\beta q'_n + q'_{n-1}}$, onde $\dfrac{p'_n}{q'_n}$ e $\dfrac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$ são os n-ésimo e $(n-1)$-ésimo convergentes de β, respectivamente.

Pelo Corolário 1.5, temos

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] = \frac{p'_n}{q'_n},$$
$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2] = \frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}.$$

Como as frações $\frac{p'_n}{q'_n}$ e $\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$ são irredutíveis, obtemos que $p'_n = p_n$, $p'_{n-1} = q_n$, $q'_n = p_{n-1}$, $q'_{n-1} = q_{n-1}$. Portanto,

$$\beta = \frac{\beta p'_n + p'_{n-1}}{\beta q'_n + q'_{n-1}} \Rightarrow \beta = \frac{\beta p_n + q_n}{\beta p_{n-1} + q_{n-1}} \Rightarrow p_{n-1}\beta^2 - (p_n - q_{n-1})\,\beta - q_n = 0.$$

Multiplicando a equação $p_{n-1}\beta^2 - (p_n - q_{n-1})\,\beta - q_n = 0$ por $-\frac{1}{\beta^2}$, obtemos a equação equivalente

$$q_n\left(-\frac{1}{\beta}\right)^2 - (p_n - q_{n-1})\left(-\frac{1}{\beta}\right) - p_{n-1} = 0. \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2), concluímos que α e $-\frac{1}{\beta}$ são raízes da equação $q_n x^2 - (p_n - q_{n-1})\,x - p_{n-1} = 0$
Como $\beta = [\overline{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1}] > 1$, pois $a_n > 0$, então $-1 < -\frac{1}{\beta} < 0$. ■

Definição 2.1. *Seja $\alpha = A + B\sqrt{D}$ um irracional quadrático, definimos o seu conjugado por $\alpha' = A - B\sqrt{D}$.*

De acordo com esta definição, dados os irracionais quadráticos α_1 e α_2 e seus conjugados α'_1 e α'_2, respectivamente são válidas as seguintes propriedades:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)' = \alpha'_1 + \alpha'_2,$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2)' = \alpha'_1 - \alpha'_2,$$

$$(\alpha_1 . \alpha_2)' = \alpha'_1 . \alpha'_2,$$
$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)' = \frac{\alpha'_1}{\alpha'_2}.$$

Deixamos as demonstrações de tais propriedades como exercício para o leitor.

Lema 2.2. *Se α é um irracional quadrático, tal que $\alpha > 1$ e seu conjugado α' está entre -1 e 0, então $x_i > 1$ e $-1 < x_i' < 0$, $\forall i > 1$.*

Demonstração: Como α é um irracional quadrático, então a fração contínua de α é periódica. Admitamos que o período de α seja igual a n e que este inicia-se a partir do termo a_p da fração contínua de α. Entenda-se aqui que uma fração contínua periódica tem período igual a n, quando sua parte periódica possuir n termos. Então, teremos

$$\alpha = x_1 = [a_1; a_2, \ldots, \overline{a_p, \ldots, a_{p+n-1}}] = [a_1; \alpha_2] = [a_1; a_2, \alpha_3] = \ldots = [a_1; a_2, a_3, \ldots, \alpha_p] = \ldots$$

Analisando estas igualdades, vemos que x_i é uma fração contínua periódica $\forall i > 0$, sendo portanto x_i irracional quadrático, com conjugado x_i', $\forall i > 0$. Aplicando propriedades do conjugado e sabendo que $x_1 = \alpha > 1$, temos

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} \text{ e } x_2' = \frac{1}{x_1' - a_1}.$$

Como $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor = \lfloor x_1 \rfloor$, então $0 < x_1 - a_1 < 1$ e, portanto $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_1} > 1$.
Vamos supor, por indução, que $x_i > 1$, para certo $i > 2$.
Como $a_i = \lfloor x_i \rfloor$, então $0 < x_i - a_i < 1$ e, portanto $x_{i+1} = \dfrac{1}{x_i + a_i} > 1$.
Logo, pelo Princípio de Indução Finita, temos $x_i > 1, \forall i > 1$.
Temos também que, $-1 < \alpha' = x_1' < 0$. Daí,

$$-1 - a_1 < x_1' - a_1 < -a_1 \Rightarrow -\frac{1}{a_1} < \frac{1}{x_1' - a_1} < -\frac{1}{1 + a_1}.$$

Por outro lado, sabemos que $\alpha > 1$, logo $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor \geq 1$, e portanto,

$$-1 \leq -\frac{1}{a_1} < \frac{1}{x_1' - a_1} < -\frac{1}{1 + a_1} < 0 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x_1' - a_1} < 0 \Rightarrow -1 < x_2' < 0$$

Usando mais uma vez indução, vamos supor que $-1 < x_i' < 0$, para certo $i > 2$. Daí,

$$-1 - a_i < x_i' - a_i < -a_i \Rightarrow -\frac{1}{a_i} < \frac{1}{x_i' - a_i} < -\frac{1}{1 + a_i}.$$

Por outro lado, sabemos que $x_i > 1$, logo $a_i = \lfloor x_i \rfloor \geq 1$, e portanto,

$$-1 \leq -\frac{1}{a_i} < \frac{1}{x_i' - a_i} < -\frac{1}{1 + a_i} < 0 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x_i' - a_i} < 0 \Rightarrow -1 < x_{i+1}' < 0.$$

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, temos $-1 < x_i' < 0, \forall i > 1$. ■

Teorema 2.3. *Se o irracional quadrático $\alpha > 1$ é raiz de uma equação quadrática com coeficientes inteiros, cuja raiz conjugada α' está entre -1 e 0, então a fração contínua de α só possui parte periódica.*

Demonstração: Já vimos na demonstração do Lema 2.2, se α é um irracional quadrático, então α_i é irracional quadrático e $\alpha_i > 1$, $\forall i > 0$.

Como α tem fração contínua periódica, então $\alpha_k = \alpha_l, \alpha_{k+1} = \alpha_{l+1}, \alpha_{k+2} = \alpha_{l+2} = \ldots$, com $0 < k < l$. Por outro lado, temos

$$\alpha_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{\alpha_k} \text{ e } \alpha_{l-1} = a_{l-1} + \frac{1}{\alpha_l}.$$

Como α_i é irracional quadrático $\forall i > 0$, se tomarmos os conjugados de α_{k-1} e α_{l-1}, pelas propriedades do conjugado, obtemos que

$$\alpha'_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{\alpha'_k} \text{ e } \alpha'_{l-1} = a_{l-1} + \frac{1}{\alpha'_l},$$

o que implica

$$-\frac{1}{\alpha'_k} = a_{k-1} - \alpha'_{k-1} \text{ e } -\frac{1}{\alpha'_l} = a_{l-1} - \alpha'_{l-1}.$$

Uma vez que $\alpha_k = \alpha_l$, temos $-\frac{1}{\alpha'_k} = -\frac{1}{\alpha'_l}$, sendo portanto

$$a_{k-1} - \alpha'_{k-1} = a_{l-1} - \alpha'_{l-1}.$$

Pelo Lema 2.2, temos $-1 < \alpha'_{k-1} < 0$ e $-1 < \alpha'_{l-1} < 0$. Ou seja: $0 < -\alpha'_{k-1} < 1$ e $0 < -\alpha'_{l-1} < 1$, implicando

$$a_{k-1} < a_{k-1} - \alpha'_{k-1} < 1 + a_{k-1}$$

e

$$a_{l-1} < a_{l-1} - \alpha'_{l-1} < 1 + a_{l-1}.$$

Sendo a_{k-1} e $1 + a_{k-1}$, assim como a_{l-1} e $1 + a_{l-1}$ números inteiros consecutivos e, pelo fato de $a_{k-1} - \alpha'_{k-1} = a_{l-1} - \alpha'_{l-1}$, concluímos que $a_{k-1} = a_{l-1}$. Daí,

$$\alpha_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{\alpha_k} = a_{l-1} + \frac{1}{\alpha_l} = \alpha_{l-1}.$$

Então, concluímos que

$$\alpha_k = \alpha_l \Rightarrow \alpha_{k-1} = \alpha_{l-1}.$$

Caso $\alpha_{k-1} \neq \alpha_1$, e admitindo, sem perda de generalidade, que o período da fração contínua de α seja igual a n, repetiremos este argumento até que

$$\alpha_2 = \alpha_{n+2} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_{n+1}.$$

Ou seja,
$$\alpha = \alpha_1 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}} = [\overline{a_1; a_2, \ldots, a_n}].$$

■

A fração contínua de $\sqrt{N}$, tal que N é natural e N não é um quadrado perfeito, possui uma forma, no mínimo, interessante. Observemos, que a parte periódica, nas sequências de cada fração contínua deste tipo, inicia-se sempre a partir do segundo termo e que o último termo da parte periódica é sempre igual ao dobro do termo não periódico. Além disso, também se observa que a parte periódica, a menos do seu último termo, apresenta uma simetria, podendo esta simetria possuir um termo central (veja $\sqrt{31}$ na tabela a seguir), ou não possuí-lo (veja $\sqrt{29}$ na tabela a seguir).

N	Fração Contínua para $\sqrt{N}$	N	Fração Contínua para $\sqrt{N}$	N	Fração Contínua para $\sqrt{N}$
2	$[1;\overline{2}]$	17	$[4;\overline{8}]$	30	$[5;\overline{2,10}]$
3	$[1;\overline{1,2}]$	18	$[4;\overline{4,8}]$	31	$[5;\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}]$
5	$[2;\overline{4}]$	19	$[4;\overline{2,1,3,1,2,8}]$	32	$[5;\overline{1,1,1,10}]$
6	$[2;\overline{2,4}]$	20	$[4;\overline{2,8}]$	33	$[5;\overline{1,2,1,10}]$
7	$[2;\overline{1,1,1,4}]$	21	$[4;\overline{1,1,2,1,1,8}]$	34	$[5;\overline{1,4,1,10}]$
8	$[2;\overline{1,4}]$	22	$[4;\overline{1,2,4,2,1,8}]$	35	$[5;\overline{1,10}]$
10	$[3;\overline{6}]$	23	$[4;\overline{1,3,1,8}]$	37	$[6;\overline{12}]$
11	$[3;\overline{3,6}]$	24	$[4;\overline{1,8}]$	38	$[6;\overline{6,12}]$
12	$[3;\overline{2,6}]$	26	$[5;\overline{10}]$	39	$[6;\overline{4,12}]$
13	$[3;\overline{1,1,1,1,6}]$	27	$[5;\overline{5,10}]$	40	$[6;\overline{3,12}]$
14	$[3;\overline{1,2,1,6}]$	28	$[5;\overline{3,2,3,10}]$	41	$[6;\overline{2,2,12}]$
15	$[3;\overline{1,6}]$	29	$[5;\overline{2,1,1,2,10}]$	42	$[6;\overline{2,12}]$

Tabela 2.1: Fração Contínua de $\sqrt{N}$

O que acontece, de fato, é que esta regularidade é geral para a fração contínua de $\sqrt{N}$, como é mostrado na próxima proposição.

Lema 2.3. *Se* $\alpha = [\overline{a_1; a_2, \ldots, a_n}]$ *e seu conjugado* $\alpha' = -\dfrac{1}{\beta}$, *então* $\beta = [\overline{a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1}]$.

Demonstração: Temos $\alpha = [\overline{a_1; a_2, \ldots, a_n}]$ e $\alpha_{n+1} = [\overline{a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots, a_{2n}}]$, donde sabemos que $a_1 = a_{n+1}$, $a_2 = a_{n+2}$,..., $a_n = a_{2n}$. Logo, $\alpha = \alpha_{n+1}$. Sabemos que

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

Então,

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}} \Rightarrow q_n \alpha^2 - (p_n - q_{n-1})\,\alpha - p_{n-1} = 0.$$

Sendo α e $-\dfrac{1}{\beta}$ conjugados, então satisfazem a mesma equação quadrática. Então,

$$q_n \left(-\frac{1}{\beta}\right)^2 - (p_n - q_{n-1}) \left(-\frac{1}{\beta}\right) - p_{n-1} = 0.$$

Multiplicando esta igualdade por $-\beta^2$, obtemos

$$-q_n - (p_n - q_{n-1})\,\beta + p_{n-1}\beta^2 = 0 \Rightarrow p_{n-1}\beta^2 + q_{n-1}\beta - p_n\beta - q_n = 0 \Rightarrow \beta\,(\beta p_{n-1} + q_{n-1}) = \beta p_n + q_n.$$

Como β não é um número racional, temos $\beta p_{n-1} + q_{n-1} \neq 0$. Então,

$$\beta = \frac{\beta p_n + q_n}{\beta p_{n-1} + q_{n-1}} \tag{2.3}$$

Sejam $k = [\overline{a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1}]$, $\frac{p'_n}{q'_n}$ e $\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$, onde: $\frac{p'_n}{q'_n}$ e $\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$ são os n-ésimo e $(n-1)$-ésimo convergentes de k, respectivamente. Isto implica, como já vimos na demonstração do Teorema 2.2, que

$$p'_n = p_n, p'_{n-1} = q_n, q'_n = p_{n-1}, q'_{n-1} = q_{n-1}.$$

Então, a partir de (2.3), obtemos que

$$\beta = \frac{\beta p'_n + p'_{n-1}}{\beta q'_n + q'_{n-1}} \Rightarrow \beta = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\beta}}}} \Rightarrow \beta = k = \left[\overline{a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1}\right].$$

■

Proposição 2.1. *Se $N \in \mathbb{N}$, tal que N não é um quadrado perfeito, então*

$$\sqrt{N} = \left[a_1; \overline{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_4, a_3, a_2, 2a_1}\right].$$

Demonstração: Como $\sqrt{N} > 1$, então seu conjugado $-\sqrt{N} < -1$ e portanto, pelo *Teorema 2.3*, $\sqrt{N}$ não é uma fração contínua puramente periódica. Porém, $\sqrt{N} + a_1 > 1$ e, uma vez que a_1 é o maior inteiro menor que $\sqrt{N}$, temos $-1 < a_1 - \sqrt{N} < 0$, onde $a_1 - \sqrt{N}$ é o conjugado de $\sqrt{N} + a_1$. Logo, pelo Teorema 2.3, $\sqrt{N} + a_1$ possui uma fração contínua puramente periódica. Temos

$$\sqrt{N} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}} \Rightarrow \sqrt{N} + a_1 = 2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Como $\sqrt{N} + a_1$ é representada por uma fração contínua puramente periódica, temos

$$\sqrt{N} + a_1 = 2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}} = \left[\overline{2a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}\right],$$

e portanto,

$$\sqrt{N} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}} = \left[a_1; \overline{a_2, a_3, \ldots, a_n, 2a_1}\right].$$

Revertendo o período da fração contínua de $\sqrt{N} + a_1$, pelo Lema 2.3, obtemos que

$$\frac{1}{\sqrt{N} - a_1} = \left[\overline{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, 2a_1}\right]. \tag{2.4}$$

Por outro lado,

$$\sqrt{N} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}} \Rightarrow \sqrt{N} - a_1 = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{N} - a_1} = a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}} = \left[\overline{a_2, a_3, \ldots, a_n, 2a_1}\right]. \tag{2.5}$$

Sendo única as expansões das frações contínuas, comparamos (2.4) com (2.5) e concluímos que

$$a_n = a_2, a_{n-1} = a_3, \ldots, a_3 = a_{n-1}, a_2 = a_n.$$

Portanto, $\sqrt{N} = \left[a_1; \overline{a_2, a_3, \ldots, a_n, 2a_1}\right] = \left[a_1; \overline{a_2, a_3, \ldots, a_3, a_2, 2a_1}\right]$. ■

Nos exemplos a seguir, estabeleceremos condições necessárias e suficientes, para que o período da fração contínua de $\sqrt{N}$, seja igual a 1, 2 ou 3. Estas condições nos permitem observar outras regularidades nas frações contínuas de alguns irracionais quadráticos da forma $\sqrt{N}$.

Exemplo 2.1. *Seja* $x = \sqrt{a^2 + i}$*, com* $a, i \in \mathbb{N}$ *e* $i \leq 2a$*. Mostre que*

$$x = \left[a, \overline{2a}\right] \Leftrightarrow i = 1.$$

Solução: ($\Rightarrow$) Note que

$$x_1 = x = \sqrt{a^2+i} \Rightarrow i = x^2 - a^2.$$

Como $0 < i < 2a+1 \Leftrightarrow a^2 < a^2+i < a^2+2a+1 \Leftrightarrow a < x < a+1$, então $\lfloor x_1 \rfloor = a$.

Logo,

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - \lfloor x_1 \rfloor} = \frac{1}{x-a}.\frac{x+a}{x+a} = \frac{x+a}{x^2-a^2} = \frac{x+a}{i}.$$

Daí, $\lfloor x_2 \rfloor = \lfloor \frac{x+a}{i} \rfloor = \lfloor \frac{2a}{i} \rfloor = 2a \Rightarrow i = 1$.

($\Leftarrow$) Se $i = 1$, $\lfloor x_1 \rfloor = \lfloor \sqrt{a^2+1} \rfloor = a$, então $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - \lfloor x_1 \rfloor} = \dfrac{1}{x-a} = \dfrac{x+a}{i} = x+a$.

Logo,

$$\lfloor x_2 \rfloor = \lfloor x \rfloor + a = 2a \quad \text{e} \quad x_3 = \frac{1}{x_2 - \lfloor x_2 \rfloor} = \frac{1}{x+a-2a} = \frac{1}{x-a} = \frac{x+a}{i} = x+a = x_2$$

$$\Rightarrow \lfloor x_3 \rfloor = \lfloor x_2 \rfloor = 2a.$$

Logo, $x = \sqrt{a^2+i} = \left[a; \overline{2a}\right]$.

Exemplo 2.2. *Seja $x = \sqrt{a^2+i}$, com $a, i \in \mathbb{N}$ e $i \leq 2a$. Mostre que*

$$x = \left[a, \overline{b, 2a}\right] \qquad \textit{com} \quad b \neq 2a \Leftrightarrow i \neq 1, i|2a.$$

Solução: ($\Rightarrow$) De fato, $i \neq 1$, pois se $i = 1$ recairemos no exemplo anterior.

Temos $x_1 = x = \sqrt{a^2+i}$ e $\lfloor x_1 \rfloor = \lfloor x \rfloor = a \Leftrightarrow i \leq 2a$. Logo,

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - \lfloor x_1 \rfloor} = \frac{1}{x-a} = \frac{x+a}{i},$$

e portanto, $\lfloor x_2 \rfloor = \lfloor \frac{2a}{i} \rfloor = b \Leftrightarrow 2a = bi + r$, com $0 \leq r < i$, $r \in \mathbb{N}$. Daí,

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - \lfloor x_2 \rfloor} = \frac{1}{\dfrac{x+a}{i} - b} = \frac{i}{x+a-bi}.\frac{x+bi-a}{x+bi-a} = \frac{i\,(x+bi-a)}{x^2-b^2i^2+2bia-a^2} =$$

$$= \frac{i\,(x+bi-a)}{i-b^2i^2+2bia} = \frac{i\,(x+bi-a)}{i\,(1+2ba-b^2i)} = \frac{x+bi-a}{1+(2a-bi)\,b}.$$

Como $2a = bi + r \Rightarrow bi - a = a - r$ e $2a - bi = r$. Então, $x_3 = \dfrac{x+a-r}{1+br}$ e consequentemente $\lfloor x_3 \rfloor = \lfloor \dfrac{x+a-r}{1+br} \rfloor = \lfloor \dfrac{2a-r}{1+br} \rfloor = 2a \Rightarrow r = 0$. Ou seja,

$$2a = bi \Rightarrow i|2a.$$

($\Leftarrow$) Considere $i \neq 1$ e $i|2a$. Como $\lfloor x_1 \rfloor = a$, então

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - \lfloor x_1 \rfloor} = \frac{1}{x-a} = \frac{x+a}{i} \Rightarrow \lfloor x_2 \rfloor = \lfloor \frac{2a}{i} \rfloor.$$

Por hipótese, $i \neq 1$ e $i|2a$. Logo, $\lfloor x_2 \rfloor = \lfloor \frac{2a}{i} \rfloor = \frac{2a}{i} = b$, com $b \neq 2a$. Daí,

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - \lfloor x_2 \rfloor} = \frac{1}{\frac{x+a}{i} - b} = \frac{x + bi - a}{1 + b\,(2a - bi)} = \frac{x + \frac{2a}{i}.i - a}{1 + \frac{2a}{i}\left(2a - \frac{2a}{i}.i\right)} = \frac{x+a}{1} = x + a.$$

Portanto, $\lfloor x_3 \rfloor = 2a$ e $x_4 = \frac{1}{x_3 - \lfloor x_3 \rfloor} = \frac{1}{x + a - 2a} = \frac{1}{x-a} = x_2$. Segue que, $\lfloor x_4 \rfloor = \lfloor x_2 \rfloor = b$. Logo,

$$x = \sqrt{a^2 + i} = \left[a; \overline{b, 2a}\right].$$

Exemplo 2.3. *Seja* $x = \sqrt{a^2+i}$, *com* $a, i \in \mathbb{N}$ *e* $i \leq 2a$. *Mostre que*

$$x = \left[a, \overline{b, b, 2a}\right] \text{ com } b \neq 2a \Leftrightarrow i \nmid 2a, i = 4mq + 1, a = 4qm^2 + q + m, b = 2m, \text{ com } q, m \in \mathbb{N}.$$

Solução: ($\Rightarrow$) De fato, $i \nmid 2a$, caso contrário, recairia no exemplo anterior.
Seja $x_1 = x = \sqrt{a^2+i}$ com $\lfloor x_1 \rfloor = a$. Temos $x_2 = \frac{x+a}{i}$, portanto

$$a_2 = \lfloor x_2 \rfloor = \lfloor \frac{2a}{i} \rfloor = b \Leftrightarrow 2a = bi + r, 0 < r < i.$$

Daí, $x_3 = \frac{x + a - r}{1 + br}$ (veja exemplo 2.2), e portanto,

$$a_3 = \lfloor x_3 \rfloor = \lfloor \frac{2a - r}{1 + br} \rfloor = \lfloor \frac{bi}{1 + br} \rfloor = b \Leftrightarrow bi = b\,(1 + br) + r_1, 0 \leq r_1 < 1 + br.$$

Note que $b|r_1$, pois $r_1 = bi - b\,(1 + br) \Rightarrow r_1 = b\,(i - 1 - br)$. Logo, $r_1 = bk$, com $k \in \mathbb{N}$. Então

$$bi = b\,(1 + br) + bk \Rightarrow i = 1 + br + k.$$

Como $0 \leq bk < 1 + br \Rightarrow 0 \leq bk \leq br \Rightarrow 0 \leq k \leq r < i$. Segue portanto que

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - \lfloor x_3 \rfloor} = \frac{1}{\frac{x+a-r}{1+br} - b} = \frac{1 + br}{x + a - r - b - b^2 r} = \frac{1 + br}{x - a + bi - b - b^2 r} =$$

$$= \frac{1 + br}{x - a + b\,(i - 1 - br)} = \frac{1 + br}{x - a + r_1} = \frac{1 + br}{x - (a - r_1)}.\frac{x + a - r_1}{x + a - r_1} = \frac{(1 + br)\,(x + a - r_1)}{x^2 - a^2 + 2ar_1 - r_1^2} =$$

$$\frac{(1 + br)\,(x + a - r_1)}{i + 2abk - b^2k^2} = \frac{(1 + br)\,(x + a - r_1)}{1 + br + k + 2abk - b^2k^2} = \frac{(1 + br)\,(x + a - r_1)}{1 + br + k\,(1 + 2ab - b^2 k)}.$$

Como $2a = bi + r$, temos $2ab = b^2 i + br$. Logo,

$$x_4 = \frac{(1 + br)\,(x + a - r_1)}{1 + br + k\,(1 + b^2 i + br - b^2 k)} = \frac{(1 + br)\,(x + a - r_1)}{1 + br + k\left[1 + br + b^2\,(i - k)\right]}.$$

Como $i = 1 + br + k$, temos $i - k = 1 + br$. Daí,

$$x_4 = \frac{(1+br)(x+a-r_1)}{1+br+k\left[1+br+b^2(1+br)\right]} = \frac{(1+br)(x+a-r_1)}{(1+br)(1+k+kb^2)} = \frac{x+a-r_1}{1+k+kb^2}.$$

$\lfloor x_4 \rfloor = \lfloor \frac{x+a-r_1}{1+k+kb^2} \rfloor = \lfloor \frac{2a-r_1}{1+k+kb^2} \rfloor = 2a \Leftrightarrow r_1 = 0$, (o que implica $k = 0$, pois $r_1 = bk$) Com $k = 0$, temos $i = 1 + br$, e portanto,

$$2a = bi + r \Rightarrow 2a = b(1+br) + r \Rightarrow 2a - b = b^2 r + r \Rightarrow r\left(b^2+1\right) = 2a - b \Rightarrow r = \frac{2a-b}{b^2+1}.$$

Se b for ímpar, então $2a - b$ é ímpar e $b^2 + 1$ é par, o que é impossível, pois $r \in \mathbb{N}$. Portanto, $b = 2m, m \in \mathbb{N}$. Daí,

$$r = \frac{2a-2m}{4m^2+1} = \frac{2(a-m)}{4m^2+1} \Rightarrow a - m = \frac{r(4m^2+1)}{2}.$$

Como $4m^2 + 1$ é ímpar, então $2|r$ e, portanto, $\frac{r}{2} = q$, $q \in \mathbb{N}$. Logo, $a - m = q(4m^2 + 1)$, o que implica $a = 4qm^2 + q + m$.

Sendo $i = 1 + br$, temos

$$\Rightarrow i = 4qm + 1.$$

($\Leftarrow$) Pelas hipóteses, $i = 4mq + 1$ e $a = 4qm^2 + q + m$, podemos concluir que $i < a < 2a$ e, como já vimos, $\lfloor x_1 \rfloor = a \Leftrightarrow i \leq 2a$, ou seja, $\lfloor x_1 \rfloor = a$.

Logo, $x_2 = \frac{1}{x_1 - \lfloor x_1 \rfloor} = \frac{1}{x-a} = \frac{x+a}{i}$ e $\lfloor x_2 \rfloor = \lfloor \frac{2a}{i} \rfloor$.

Temos

$$a = 4qm^2 + q + m \Rightarrow 2a = 8qm^2 + 2q + 2m = 2m(4qm+1) + 2q \Rightarrow 2a = bi + 2q.$$

Por outro lado, $0 < 2q < 4qm + 1$. Isto nos diz que a divisão de $2a$ por i, tem como quociente b e resto $2q$. Logo, $\lfloor x_2 \rfloor = \lfloor \frac{2a}{i} \rfloor = b$. Daí,

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - \lfloor x_2 \rfloor} = \frac{1}{\frac{x+a}{i} - b} = \frac{x+bi-a}{1+b(2a-bi)} = \frac{x+bi-a}{1+2ba-b^2 i} = \frac{x+bi-a}{1-b(bi-2a)}.$$

Como

$$bi - 2a = 2m(4mq+1) - 2\left(4qm^2 + q + m\right) = 8m^2 q + 2m - 8m^2 q - 2q - 2m = -2q,$$

então

$$x_3 = \frac{x+bi-a}{1-b(-2q)} = \frac{x+bi-a}{1+2bq} = \frac{x+bi-a}{1+2\cdot 2mq} = \frac{x+bi-a}{1+4mq} = \frac{x+bi-a}{i}$$

$$\Rightarrow \lfloor x_3 \rfloor = \lfloor \frac{x+bi-a}{i} \rfloor = \lfloor \frac{bi}{i} \rfloor = b.$$

Logo

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - \lfloor x_3 \rfloor} = \frac{1}{\dfrac{x+bi-a}{i} - b} = \frac{i}{x+bi-a-bi} = \frac{i}{x-a} = \frac{i\,(x+a)}{x^2-a^2} = \frac{i\,(x+a)}{i} = x+a$$

$\Rightarrow \lfloor x_4 \rfloor = \lfloor x+a \rfloor = 2a$. Portanto, $x_5 = \dfrac{1}{x_4 - \lfloor x_4 \rfloor} = \dfrac{1}{x+a-2a} = \dfrac{1}{x-a} = x_2$.
Logo, $x = \sqrt{a^2+1} = \left[a; \overline{b, b, 2a}\right]$.
Podemos fazer verificações das condições dos exemplos 1 e 2, observando alguns exemplos numéricos da Tabela 2.1. A seguir montamos uma tabela com alguns exemplos numéricos para $x = \sqrt{a^2+i} = \left[a; \overline{b, b, 2a}\right]$.

m	q	a	b	i	x
1	1	6	2	5	$\sqrt{6^2+5} = \sqrt{41} = \left[6; \overline{2, 2, 12}\right]$
1	2	11	2	9	$\sqrt{11^2+9} = \sqrt{130} = \left[11; \overline{2, 2, 22}\right]$
2	1	19	4		$\sqrt{19^2+9} = \sqrt{370} = \left[19; \overline{4, 4, 38}\right]$
1	3	16	2	13	$\sqrt{16^2+13} = \sqrt{269} = \left[16; \overline{2, 2, 32}\right]$
3	1	40	6		$\sqrt{40^2+13} = \sqrt{1613} = \left[40; \overline{6, 6, 80}\right]$

Tabela 2.2: Exemplos de Frações Contínuas para $\sqrt{N} = \left[a; \overline{b, b, 2a}\right]$

2.2 Frações contínuas como uma ferramenta na aritmética

Vários problemas de aritmética recaem em encontrar soluções para equações do tipo $Ax + By = C$, com $A, B, C \in \mathbb{Z}$, que sob determinadas restrições, muitas vezes nem possuem solução. Equações deste tipo são denominadas de *Equações Diofantinas* em homenagem a Diofanto de Alexandria, matemático grego que escreveu um livro sobre tais equações. Apresentaremos aqui, uma proposição que determina as soluções de equações deste tipo, restrita a algumas condições, fazendo uso dos convergentes de frações contínuas.

Proposição 2.2. *Sejam a e b inteiros e coprimos, $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ o penúltimo convergente da fração contínua que representa $\frac{a}{b}$. Então*

- *(q_{n-1}, p_{n-1}) é solução de $ax - by = -1$, se n é ímpar;*

- *(q_{n-1}, p_{n-1}) é solução de $ax - by = 1$, se n é par.*

Demonstração: Sejam $\frac{p_k}{q_k}$, $k \in \mathbb{N}$, os convergentes de uma fração contínua, sabemos que p_k e q_k são coprimos. Logo, p_n e q_n são coprimos, assim como, por hipótese, a e b também o são. Por outro lado, se $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ é o penúltimo convergente da fração contínua de $\frac{a}{b}$, então temos $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p_n}{q_n}$. Deste modo, temos $p_n = a$ e $q_n = b$. Também sabemos que

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n, \forall n \geq 0,$$

e portanto,

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^n.$$

Daí, (q_{n-1}, p_{n-1}) é solução de $ax - by = 1$, se n é par; e,(q_{n-1}, p_{n-1}) é solução de $ax - by = -1$, se n é ímpar. ■

Exemplo 2.4. *De quantas maneiras é possível comprar selos de $R\$10,00$ e de $R\$14,00$, gastando $R\$100,00$?*

Solução: Resolver um problema deste tipo é encontrar o número de soluções da equação diofantina $10x + 14y = 100$ que é equivalente a $5x + 7y = 50$. Apesar desta equação não ser do tipo $ax - by = \pm 1$, utilizamos alguns artifícios que nos possibilitam utilizar o resultado da Proposição 2.2 para obtermos as soluções do problema.
Note que 5 e 7 são coprimos. E, representando $\dfrac{5}{7}$ por fração contínua, temos

$$\frac{5}{7} = 0 + \frac{1}{\frac{7}{5}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{2}{5}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = [0; 1, 2, 2].$$

Obtemos que o penúltimo convergente $\dfrac{p_2}{q_2}$ de $\dfrac{5}{7}$ é

$$0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3},$$

e, pela Proposição 2.2, temos que $(3, 2)$ é uma solução da equação $5x - 7y = 1$. Daí, obtemos $(3, -2)$ como uma solução da equação $5x + 7y = 1$. Ou seja,

$$5.3 + 7.(-2) = 1 \Rightarrow 5.(150) + 7.(-100) = 50,$$

em que $(150, -100)$ é uma solução de $5x + 7y = 50$, e portanto,

$$5x + 7y - 50 = 0 \Leftrightarrow 5.(150) + 7.(-100) - 5x - 7y = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(150 - x) - 7(100 + y) = 0 \Leftrightarrow 5(150 - x) = 7(100 + y)$$

$$\frac{5}{7} = \frac{100 + y}{150 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} 100 + y = 5t \\ 150 - x = 7t \end{cases}$$

Daí, $\begin{cases} 100 + y = 5t \\ 150 - x = 7t \end{cases}$. Como $x, y \geq 0$, temos

$$\begin{cases} 5t \geq 100 \\ 150 \geq 7t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 20 \\ t \leq \frac{150}{7} \end{cases}$$

Portanto, $20 \leq t < 22 \Rightarrow t = 20$ ou $t = 21$.

Para $t = 20 \Rightarrow x = 150 - 7.20 = 10$ e $y = 5.20 - 100 = 0$.

Para $t = 21 \Rightarrow x = 150 - 7.21 = 3$ e $y = 5.21 - 100 = 5$.

Logo, existem duas possibilidades de comprar selos de $R\$10,00$ e de $R\$14,00$, gastando $R\$100,00$. Ou comprar 10 selos de $R\$10,00$, ou comprar 3 selos de $R\$10,00$ e 5 selos de $R\$14,00$.

Ainda com relação às resoluções de certos tipos de equações que se utilizem de frações contínuas, apresentaremos agora resultados que nos possibilitem encontrar uma solução inteira, quando houver, para equações do tipo $x^2 - Ny^2 = \pm 1\,(N > 0, N \in \mathbb{Z})$, conhecidas como *Equações de Pell*. Não é interessante o estudo do caso em que N é um quadrado perfeito, pois nesse caso $(\pm 1, 0)$ são as únicas soluções inteiras de $x^2 - Ny^2 = 1$ e não existe solução inteira para $x^2 - Ny^2 = -1$, exceto se $N = 1$, caso em que $(0, \pm 1)$ são soluções inteiras de $x^2 - Ny^2 = -1$. Portanto, assumiremos que N não é um quadrado perfeito.

Seja N um número natural tal que $\sqrt{N}$ é irracional, discutiremos a seguir sobre uma possível solução particular para as equações $x^2 - Ny^2 = \pm 1$. Já vimos que se $\sqrt{N}$ é um número irracional, então o último termo da parte periódica da fração contínua que o representa é sempre igual ao dobro do termo não periódico e, portanto, $\sqrt{N}=\left[a_1,\overline{a_2,a_3,\ldots,a_n,2a_1}\right]$, ou seja

$$\sqrt{N}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{2a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}}}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}},$$

em que

$$\alpha_{n+1}=2a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{2a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}}}}=\sqrt{N}+a_1.$$

Por outro lado, temos

$$\sqrt{N}=\frac{\alpha_{n+1}p_n+p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1}}\Rightarrow\sqrt{N}=\frac{\left(\sqrt{N}+a_1\right)p_n+p_{n-1}}{\left(\sqrt{N}+a_1\right)q_n+q_{n-1}}$$

$$\sqrt{N}\left(\sqrt{N}+a_1\right)q_n+\sqrt{N}q_{n-1}=\left(\sqrt{N}+a_1\right)p_n+p_{n-1}$$

$$Nq_n+\left(a_1q_n+q_{n-1}\right)\sqrt{N}=\left(a_1p_n+p_{n-1}\right)+p_n\sqrt{N}.$$

Observação 2.1. *Sejam* a,b,a_1 *e* b_1 *números inteiros e* $\sqrt{X}$ *um número irracional, então* $a+b\sqrt{X}=a_1+b_1\sqrt{X}\Leftrightarrow a=a_1$ *e* $b=b_1$.

De fato,

$$a+b\sqrt{X}=a_1+b_1\sqrt{X}\Leftrightarrow(a-a_1)=(b_1-b)\sqrt{X}.$$

Como a, b, a_1 e b_1 são inteiros, temos $a-a_1$ e b_1-b também são inteiros. Sendo $\sqrt{X}$ irracional, então $(b_1-b)\sqrt{X}$ também é irracional, a menos que $b_1-b=0$. Daí,

$$(a-a_1)=(b_1-b)\sqrt{X}\Leftrightarrow a-a_1=0 \quad \text{e} \quad b_1-b=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=a_1 \quad \text{e} \quad b=b_1.$$

Como $Nq_n, a_1q_n+q_{n-1}, a_1p_n+p_{n-1}$ e p_n são inteiros e $\sqrt{N}$ é irracional, temos

$$\begin{cases} Nq_n=a_1p_n+p_{n-1} \\ a_1q_n+q_{n-1}=p_n \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} p_{n-1}=Nq_n-a_1p_n \\ q_{n-1}=p_n-a_1q_n \end{cases}$$

Pelo Corolário 1.1, temos $q_{n-1}p_n - p_{n-1}q_n = (-1)^n$. Daí,

$$(p_n - a_1 q_n)\, p_n - (Nq_n - a_1 p_n)\, q_n = (-1)^n$$

$$\Rightarrow p_n^2 - a_1 p_n q_n - Nq_n^2 + a_1 p_n q_n = (-1)^n \Rightarrow p_n^2 - Nq_n^2 = (-1)^n .$$

Se n é par, então uma solução inteira para $x^2 - Ny^2 = 1$ é (p_n, q_n). Se n é ímpar, então uma solução inteira para $x^2 - Ny^2 = 1$ é (p_{2n}, q_{2n}). De fato, se $\sqrt{N} = \left[a_1, \overline{a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}, 2a_1}\right]$, então $p_{2n}^2 - Nq_{2n}^2 = (-1)^{2n} = 1$.
Como $p_n^2 - Nq_n^2 = (-1)^n$, temos $x^2 - Ny^2 = -1$ só tem solução inteira se n for ímpar, a saber (p_n, q_n).

Outras soluções para Equação de Pell

A solução inteira para as equações do tipo $x^2 - Ny^2 = \pm 1$ (N não é um quadrado perfeito) encontrada usando o procedimento acima, denotaremos por (x_1, y_1). Os teoremas a seguir apresentam outras soluções inteiras positivas para Equações de Pell.

Teorema 2.4. *Se (x_1, y_1) é solução da equação $x^2 - Ny^2 = 1$, então (x_n, y_n) obtidas através da equação $x_n + y_n\sqrt{N} = \left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)^n$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$ também são soluções de $x^2 - Ny^2 = 1$.*

Demonstração:
Seja $x_n + y_n\sqrt{N} = \left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)^n = \left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)\ldots\left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)$.
Como o conjugado de um produto é o produto dos conjugados, podemos afirmar que

$$x_n - y_n\sqrt{N} = \left(x_1 - y_1\sqrt{N}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{N}\right)\ldots\left(x_1 - y_1\sqrt{N}\right) = \left(x_1 - y_1\sqrt{N}\right)^n .$$

Agora, fatorando $x_n^2 - Ny_n^2$, temos

$$x_n^2 - Ny_n^2 = \left(x_n + y_n\sqrt{N}\right)\left(x_n - y_n\sqrt{N}\right) = \left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)^n\left(x_1 - y_1\sqrt{N}\right)^n = \left(x_1^2 - Ny_1^2\right)^n .$$

Por hipótese, $(x_1^2 - Ny_1^2) = 1$. Logo,

$$x_n^2 - Ny_n^2 = \left(x_1^2 - Ny_1^2\right)^n = 1^n = 1.$$

Portanto, (x_n, y_n), são soluções inteiras da equação $x^2 - Ny^2 = 1$, onde x_n e y_n são obtidas a partir da equação $x_n + y_n\sqrt{N} = \left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)^n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ ■

TEOREMA 2.5. *Se $x^2 - Ny^2 = -1$ possui solução inteira (x_1, y_1), então (x_n, y_n) obtidas através da equação $x_n + y_n\sqrt{N} = \left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)^n$, para $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, também são soluções de $x^2 - Ny^2 = -1$.*

Demonstração: Usando os mesmos argumentos da demonstração anterior, obtemos

$$x_n^2 - Ny_n^2 = \left(x_1^2 - Ny_1^2\right)^n = (-1)^n .$$

Portanto, (x_n, y_n) obtidas a partir da equação $x_n + y_n\sqrt{N} = \left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)^n$, são as soluções inteiras da equação $x^2 - Ny^2 = -1$ quando n for ímpar. ■

Exemplo 2.5. *Encontre uma solução particular da equação $x^2 - 13y^2 = 1$.*

Solução: Pela Tabela 2.1, temos

$$\sqrt{13} = \left[3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}\right] = \left[a_1; \overline{a_2, a_3, a_4, a_5, 2a_1}\right] .$$

Daí, o período da fração contínua de $\sqrt{13}$ é igual a 5, um número ímpar. Portanto, uma solução inteira para a equação dada é $(p_{10}; q_{10})$. Calculemos então o décimo convergente da expansão de $\sqrt{13}$.

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i			3	1	1	1	1	6	1	1	1	1
p_i	0	1	3	4	7	11	18	119	137	256	393	649
q_i	1	0	1	1	2	3	5	33	38	71	109	180

Logo, $(649; 180)$ é solução da equação $x^2 - 13y^2 = 1$. De fato,

$$649^2 - 13.180^2 = 421201 - 13.32400 = 421201 - 421200 = 1.$$

2.3 Aproximação de logaritmos via frações contínuas

Abordamos anteriormente um estudo sobre as frações contínuas de irracionais quadráticos, e um dos resultados mais importantes foi que:

A fração contínua de um número real x é periódica se, e somente se, x for um irracional quadrático.

Por consequência, determinar a fração contínua de um número que não seja irracional quadrático, pode parecer tarefa bem mais difícil. Agora, estudaremos um pouco sobre as frações contínuas de alguns logaritmos e apresentaremos um método para determiná-las. Começamos por obter boas aproximações de logaritmos através de um algoritmo que recai em frações contínuas. Primeiramente, tomaremos como exemplo uma aproximação para o $\log 5$ e, posteriormente, iremos fazer uma generalização do método.

Temos $\log 5 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \log 5$, para algum $x > 1$. Daí, $x = \dfrac{1}{\log 5} = \dfrac{\log 10}{\log 5} = \log_5 10 \Rightarrow 5^x = 10$, logo $x \notin \mathbb{N}$. Então $x = x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$, em que $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$. Portanto, $a_1 = 1$, pois $5^1 < 10 < 5^2$. Então temos

$$5^x = 10 \Rightarrow 5^{a_1 + \frac{1}{x_2}} = 10 \Rightarrow 5.5^{\frac{1}{x_2}} = 10 \Rightarrow 5^{\frac{1}{x_2}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \left(5^{\frac{1}{x_2}}\right)^{x_2} = 2^{x_2} \Rightarrow 2^{x_2} = 5,$$

logo $x_2 \notin \mathbb{N}$. Então $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$, em que $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor$.

Portanto, $a_2 = 2$, pois $2^2 < 5 < 2^3$, daí temos

$2^{x_2} = 5 \Rightarrow 2^{a_2 + \frac{1}{x_3}} = 5 \Rightarrow 2^2.2^{\frac{1}{x_3}} = 5 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x_3}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \left(2^{\frac{1}{x_3}}\right)^{x_3} = \left(\frac{5}{4}\right)^{x_3} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{x_3} = 2$, logo $x_3 \notin \mathbb{N}$.

Então $x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4}$, em que $a_3 = \lfloor x_3 \rfloor$. Portanto, $a_3 = 3$, pois $\left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4$. Temos

$\left(\frac{5}{4}\right)^{x_3} = 2 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{a_3 + \frac{1}{x_4}} = 2 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^3 . \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x_4}} = 2 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x_4}} = \frac{2}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \frac{128}{125} \Rightarrow \left[\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x_4}}\right]^{x_4} = \left(\frac{128}{125}\right)^{x_4}$

$\Rightarrow \left(\frac{128}{125}\right)^{x_4} = \frac{5}{4}$. Logo $x_4 \notin \mathbb{N}$.

Então, $x_4 = a_4 + \frac{1}{x_5}$, em que $a_4 = \lfloor x_4 \rfloor$. Portanto, $a_4 = 9$, pois $\left(\frac{128}{125}\right)^9 < \frac{5}{4} < \left(\frac{128}{125}\right)^{10}$.

Como $\log 5 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, já foi visto que a fração contínua que o representa é infinita e, portanto, vamos interromper o procedimento, calculando somente até o convergente C_4, obtendo

$$\log 5 \cong \frac{1}{x} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9}}}} = [0; 1, 2, 3, 9]$$

$$\log 5 \cong \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{28}{9}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{28}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{65}{28}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{28}{65}} = \cfrac{1}{\cfrac{93}{65}} = \frac{65}{93} \cong 0,6989247311.$$

Observe que esta representação já nos dá uma boa aproximação, uma vez que $\log 5 \cong 0,69897$.

Vamos agora generalizar o procedimento realizado para representar por meio de frações contínuas o valor de $\log_{b_0} b_1$, com $b_0 > b_1 > 1$.

Temos $\log_{b_0} b_1 < 1 \Rightarrow \log_{b_0} b_1 = \frac{1}{x}$, para algum $x > 1$.

Daí, $x = \dfrac{1}{\log_{b_0} b_1} = \dfrac{\log_{b_0} b_0}{\log_{b_0} b_1} = \log_{b_1} b_0 \Rightarrow b_1^x = b_0$.

Se $x \in \mathbb{N}$, então $\log_{b_0} b_1 = \frac{1}{x}$ é representado pela fração contínua $[0; x]$.

Se $x \notin \mathbb{N}$, então $x = x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$, em que a_1 é tal que $b_1^{a_1} < b_0 < b_1^{a_1+1}$, pois $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Teremos portanto,

$b_1^x = b_0 \Rightarrow b_1^{a_1}.b_1^{\frac{1}{x_2}} = b_0 \Rightarrow b_1^{\frac{1}{x_2}} = \frac{b_0}{b_1^{a_1}} \Rightarrow \left(b_1^{\frac{1}{x_2}}\right)^{x_2} = \left(\frac{b_0}{b_1^{a_1}}\right)^{x_2} \Rightarrow \left(\frac{b_0}{b_1^{a_1}}\right)^{x_2} = b_1$.

Da mesma forma, se $x_2 \in \mathbb{N}$, então $\log_{b_0} b_1 = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{x_2}}$ é representado pela fração contínua $[0; a_1, x_2]$. Caso contrário, $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$, em que a_2 é tal que $b_2^{a_2} < b_1 < b_2^{a+1}$ com $b_2 = \dfrac{b_0}{b_1^{a_1}}$, pois $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor$. Nesse caso, repete-se mais uma vez todo procedimento que foi realizado quando $x \notin \mathbb{N}$.

Sabe-se que, se $\log_{b_0} b_1 \in \mathbb{Q}$, então a fração contínua que representa este número é finita e, portanto, o procedimento será realizado um número finito de vezes. Já, se $\log_{b_0} b_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então a fração contínua que representa este número é uma fração contínua infinita.

Portanto, a fração contínua que representa $\dfrac{1}{\log_{b_0} b_1}$, com $b_0 > b_1 > 1$ é dada por $[a_1; a_2, a_3, \ldots]$, em que

$$b_i^{a_i} < b_{i-1} < b_i^{a_i+1},$$

$$b_{i+1} = \frac{b_{i+1}}{b_i^{a_i}}.$$

Daí, $\log_{b_0} b_1 = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

2.4 Representando o número e por fração contínua

Esta seção é dedicada a encontrar a fração contínua do número e. Mostraremos que $e = [1; 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$.

Observação 2.2. Assumiremos aqui, iniciar por a_0, e não por a_1, a sequência correspondente à fração contínua do número e, com o intuito de tornar mais fácil o resultado que desejamos.

Sejam $x = [1; 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$ e $a_i, i \geq 0$ os termos desta sequência, observe que quando i deixa resto 0 ou 2 ao ser dividido por 3, temos $a_i = 1$. E, quando i deixa resto 1, temos a sequência dos números pares. Portanto, $a_{3i} = a_{3i+2} = 1$ e $a_{3i+1} = 2i$.
Já vimos que o n-ésimo convergente de uma fração contínua é dado por $\frac{p_i}{q_i}$, em que

$$p_0 = a_0 \qquad p_1 = a_0a_1 + 1 \qquad q_0 = 1 \qquad q_1 = a_1 \qquad p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2} \qquad q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}.$$

A partir daí, os $p_i's$ e $q_i's$, da fração contínua que representa o número x, satisfazem as recorrências abaixo:

$$p_{3n} = a_{3n}p_{3n-1} + p_{3n-2} = 1.p_{3n-1} + p_{3n-2} = p_{3n-1} + p_{3n-2},$$

$$p_{3n+1} = a_{3n+1}p_{3n} + p_{3n-1} = 2np_{3n} + p_{3n-1},$$

$$p_{3n+2} = a_{3n+2}p_{3n+1} + p_{3n} = 1.p_{3n+1} + p_{3n} = p_{3n+1} + p_{3n}.$$

$$q_{3n} = a_{3n}q_{3n-1} + q_{3n-2} = 1.q_{3n-1} + q_{3n-2} = q_{3n-1} + q_{3n-2},$$

$$q_{3n+1} = a_{3n+1}q_{3n} + q_{3n-1} = 2nq_{3n} + q_{3n-1},$$

$$q_{3n+2} = a_{3n+2}q_{3n+1} + q_{3n} = 1.q_{3n+1} + q_{3n} = q_{3n+1} + q_{3n}.$$

Vamos agora, mostrar que, de fato, $x = e$. Para tanto, basta provar que $\lim\limits_{i \to \infty} \dfrac{p_i}{q_i} = e$.
Definamos as integrais:

$$A_n = \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x dx,$$

$$B_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} (x-1)^n}{n!} e^x dx,$$

$$C_n = \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^{n+1}}{n!} e^x dx.$$

Proposição 2.3. *Para $n \geq 0$, $A_n = q_{3n}e - p_{3n}$, $B_n = p_{3n+1} - q_{3n+1}e$ e $C_n = p_{3n+2} - q_{3n+2}e$.*

Demonstração: Mostraremos que a proposição é válida para $n = 0$.

$$A_0 = \int_0^1 \frac{x^0 (x-1)^0}{0!} e^x dx = \int_0^1 e^x dx = e^x|_{x=0}^1 = e^1 - e^0 = e - 1,$$

o que satisfaz a igualdade $A_0 = q_0 e - p_0$. De fato,

$$A_0 = q_0 e - p_0 = 1.e - a_0 = e - 1.$$

Agora,

$$B_0 = \int_0^1 \frac{x^1 (x-1)^0}{0!} e^x dx = \int_0^1 x e^x dx.$$

Integrando por partes, façamos

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Daí,

$$B_0 = x.e^x\big|_{x=0}^1 - \int_0^1 e^x dx = \left[x.e^x - e^x\right]_{x=0}^1 = \left[(x-1)\, e^x\right]_{x=0}^1 = (1-1)\, e^1 - (0-1)\, e^0 = 1,$$

satisfazendo a igualdade $B_0 = p_1 - q_1 e$. De fato,

$$B_0 = p_1 - q_1 e = a_0 a_1 + 1 - a_1 e = 1 \cdot 0 + 1 - 0 \cdot e = 1.$$

Finalmente,

$$C_0 = \int_0^1 \frac{x^0 (x-1)^1}{0!} e^x dx = \int_0^1 (x-1)\, e^x dx.$$

Integrando por partes, façamos

$u = x - 1 \Rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Daí,

$C_0 = (x-1)\, e^x\big|_{x=0}^1 - \int_0^1 e^x dx = \left[(x-1)\, e^x - e^x\right]_{x=0}^1 = \left[(x-2)\, e^x\right]_{x=0}^1 = (1-2)\, e^1 - (0-2)\, e^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_0 = -e + 2$, satisfazendo a igualdade $C_0 = p_2 - q_2 e$. De fato,

$$C_0 = p_2 - q_2 e = a_2 p_1 + p_0 - (a_2 q_1 + q_0)\, e = a_2\, (a_0 a_1 + 1) + a_0 - (a_2 a_1 + 1)\, e \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_0 = 1.\,(1.0 + 1) + 1 - (1.0 + 1)\, e = 1 + 1 - e = 2 - e.$

Suponha que a proposição seja válida para algum $n - 1 \geq 0$. Mostraremos que também é válida pra n. Separaremos esta parte em afirmações.

Afirmação 1: $A_n = -B_{n-1} - C_{n-1}$.

De fato. Temos

$$A_n = \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x dx = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (x-1)^n e^x dx.$$

Integrando por partes, façamos

$$u = x^n (x-1)^n \Rightarrow du = \left[n x^{n-1} (x-1)^n + n x^n (x-1)^{n-1} \right] dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x.$$

Então,

$$A_n = \frac{x^n (x-1)^n e^x}{n!} \Big|_{x=0}^{1} - \frac{1}{n!} \int_0^1 \left[n x^{n-1} (x-1)^n + n x^n (x-1)^{n-1} \right] e^x dx =$$

$$= \frac{1^n (1-1)^n . e^1}{n!} - \frac{0^n . (0-1)^n e^0}{n!} - \int_0^1 \frac{x^{n-1} (x-1)^n}{(n-1)!} e^x dx - \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^x dx =$$

$$-C_{n-1} - B_{n-1}.$$

Como, por hipótese de indução, temos $C_{n-1} = p_{3n-1} - q_{3n-1} e$ e $B_{n-1} = p_{3n-2} - q_{3n-2} e$, então $A_n = -B_{n-1} - C_{n-1} = -(p_{3n-2} - q_{3n-2} e) - (p_{3n-1} - q_{3n-1} e) = -p_{3n-2} + q_{3n-2} e - p_{3n-1} + q_{3n-1} e = (q_{3n-1} + q_{3n-2}) e - (p_{3n-1} + p_{3n-2}) = q_{3n} e - p_{3n}$.

Segue, pelo Princípio de Indução Finita, que $A_n = q_{3n} e - p_{3n}, \forall n$.

Afirmação 2: $B_n = -2nA_n + C_{n-1}$.

De fato. Temos

$$B_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} (x-1)^n}{n!} e^x dx = \int_0^1 x . \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x dx.$$

Integrando por partes, façamos

$$u = x^n (x-1)^n \Rightarrow du = \left[n x^{n-1} (x-1)^n + n x^n (x-1)^{n-1} \right] dx$$

$$dv = x e^x dx \Rightarrow v = e^x (x-1).$$

Então,

$$B_n = \frac{x^n (x-1)^n e^x (x-1)}{n!} \Big|_{x=0}^{1} - \int_0^1 \frac{x^{n-1} (x-1)^{n+1}}{(n-1)!} e^x dx - \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^n}{(n-1)!} e^x dx =$$

$$= \frac{1^n (1-1)^n e^1 (1-1)}{n!} - \frac{0^n (0-1)^n e^0 (0-1)}{n!} - \int_0^1 \frac{x^{n-1} (x-1)^{n+1}}{(n-1)!} e^x dx - n \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x dx =$$

$$= - \int_0^1 \frac{x^{n-1} (x-1)^{n+1}}{(n-1)!} e^x dx - n A_n.$$

Note que

$x^{n-1} (x-1)^{n+1} = x^{n-1} (x-1)^n (x-1) = (x-1)^n (x^n - x^{n-1}) = x^n (x-1)^n - x^{n-1} (x-1)^n$.

Então

$$- \int_0^1 \frac{x^{n-1} (x-1)^{n+1}}{(n-1)!} e^x dx = - \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 \left[x^n (x-1)^n - x^{n-1} (x-1)^n \right] e^x dx =$$

$$= -\frac{1}{(n-1)!}\left[\int_0^1 x^n (x-1)^n e^x dx - \int_0^1 x^{n-1}(x-1)^n e^x dx\right] =$$

$$= -n\int_0^1 \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!} e^x dx = -nA_n + C_{n-1}.$$

Portanto,

$$B_n = -\int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)^{n+1}}{(n-1)!} e^x dx - nA_n = -nA_n + C_{n-1} - nA_n = -2nA_n + C_{n-1}.$$

Pela Afirmação 1, $A_n = q_{3n}e - p_{3n}$ e pela hipótese de indução $C_{n-1} = p_{3n-1} - q_{3n-1}e$, então

$$B_n = -2nA_n + C_{n-1} = -2n(q_{3n}e - p_{3n}) + p_{3n-1} - q_{3n-1}e =$$

$$= 2np_{3n} + p_{3n-1} - (2nq_{3n} + q_{3n-1})e = p_{3n-1} - q_{3n-1}e.$$

Segue, pelo Princípio de Indução Finita, que $B_n = p_{3n+1} - q_{3n+1}e, \forall n$.

Afirmação 3: $C_n = B_n - A_n$.

De fato. Temos

$$C_n = \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^{n+1}}{n!} e^x dx = \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^n (x-1)}{n!} e^x dx = \int_0^1 \frac{(x-1)^n (x^{n+1} - x^n)}{n!} e^x dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n - x^n (x-1)^n}{n!} e^x dx = \int_0^1 \left[\frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x - \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x dx - \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x dx = B_n - A_n.$$

Pela Afirmação 1, $A_n = q_{3n}e - p_{3n}$ e pela Afirmação 2, $B_n = p_{3n+1} - q_{3n+1}e$, então

$C_n = B_n - A_n = p_{3n+1} - q_{3n+1}e - (q_{3n}e - p_{3n}) = p_{3n+1} + p_{3n} - (q_{3n+1} + q_{3n})e = p_{3n+2} - q_{3n+2}e.$

Segue, pelo Princípio de Indução Finita, que $C_n = p_{3n+2} - q_{3n+2}e, \forall n$. ■

TEOREMA 2.6. *Temos* $e = [1; 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$.

Demonstração: Calculemos $\lim_{n\to\infty} A_n$, $\lim_{n\to\infty} B_n$ e $\lim_{n\to\infty} C_n$.

Como a função a função $f(x) = \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x$, com domínio $x = [0; 1]$, é uniformemente convergente, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x dx.$$

Para $0 \le x \le 1$, temos

$$0 \leq x^n \leq 1 \text{ e } 0-1 \leq x-1 \leq 1-1 \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq (x-1)^n \leq 1.$$

Como $e^0 = 1$ e $e^1 = e$, também temos $1 \leq e^x \leq e$.

Então, sendo x^n, $(x-1)^n$ e e^x limitadas para $0 \leq x \leq 1$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x = 0.$$

Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_0^1 0dx = 0.$$

De modo análogo, obtemos que $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$.

Segue da Proposição 2.3, que $\lim\limits_{i\to\infty} (q_i e - p_i) = 0$ e, como $q_i \geq 1$ para todo $i \geq 2$, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $|q_n e - p_n| < \epsilon$.

Logo,

$$\left|e - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{1}{q_n}(eq_n - p_n)\right| = \left|\frac{1}{q_n}\right| \cdot |q_n e - p_n|.$$

Como $0 < \dfrac{1}{q_n} \leq 1$ para todo $n > 2$, então $\left|e - \dfrac{p_n}{q_n}\right| = \left|\dfrac{1}{q_n}\right| \cdot |q_n e - p_n| \leq |q_n e - p_n| < \epsilon$ para todo $n \geq max\{n_0, 2\}$. Daí, $\lim\limits_{i\to\infty}\left(e - \dfrac{p_i}{q_i}\right) = 0$, que implica em

$$\lim_{i\to\infty} e - \lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i} = 0 \Rightarrow e - \lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i} = 0 \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i} = e.$$

E, portanto, $e = [1; 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$, como queríamos mostrar. $\blacksquare$

Capítulo 3

Aplicações para o Ensino Médio

O objetivo final deste trabalho vai além do intuito de contribuir como objeto de pesquisa e estudo para aqueles que tenham interesse no assunto. A expectativa é incentivar professores de ensino médio a permitir que seus discentes tenham a oportunidade de ter um conhecimento matemático que não se limite apenas aos conteúdos requisitados na proposta curricular deste nível de ensino. Por esse motivo, encerramos esta redação com uma proposta de atividades que pode ser executada em turmas de Nível Médio. Estimamos que tal proposta possa ser aplicada durante 7 dias, sendo em cada um deles ministradas 2 aulas, perfazendo um total de 14 aulas. Quanto à aprendizagem dos alunos, apresentamos a seguir, nossa pretensão de objetivos a serem alcançados. Depois disto, uma sequência de aulas com atividades, com a descrição de procedimentos metodológicos e dos materiais a serem utilizados.

Objetivos:

- Identificar uma fração contínua, a partir de sua definição;
- Utilizar métodos para representar um número por fração contínua;
- Aproximar números irracionais por racionais, utilizando-se dos convergentes de frações contínuas;
- Resolver alguns problemas que permitam fazer o uso de frações contínuas.

1º dia (2 aulas)

Explanar sobre o contexto histórico abordado na seção 1.1 deste trabalho;

Relembrar como escrever uma fração imprópria como soma de um inteiro com uma fração própria e, mostrar que podemos reescrever esta soma de outra maneira;

Exemplo 3.1. $\frac{32}{7} = \frac{28}{7} + \frac{4}{7} = 4 + \frac{4}{7}$

Outra maneira de escrever esta soma seria $4 + \frac{1}{\frac{7}{4}}$. E, como $\frac{7}{4}$ é uma fração imprópria, então temos

$$\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}.$$

Temos também que $\frac{4}{3}$ é uma fração imprópria e, portanto

$$\frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}.$$

Logo,

$$\frac{32}{7} = 4 + \frac{1}{\frac{7}{4}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}.$$

Definir Frações Contínuas e destacar as Frações Contínuas Simples, as quais são de interesse para o presente estudo. (O exemplo acima, já mostra um método de como escrever números racionais em forma de fração contínua.)

2º dia (2 aulas)

Mostrar métodos usados para se escrever alguns números irracionais em forma de fração contínua e, através destes métodos, trabalhar aproximações de números irracionais por racionais, abordando os convergentes de frações contínuas.

3º dia (2 aulas)

Mostrar que a mais simples (e bela!) fração contínua $[1; 1, 1, 1, \ldots]$ é a representação do número irracional $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número de ouro);

Como fazer isto?

Seja $x = [1; 1, 1, 1, \ldots]$.

Então,

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Daí, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ são as raízes dessa equação. Contudo, como $x > 0$, temos $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Muito interessante também é o fato de que os convergentes da fração contínua do número de ouro estão relacionados com a Sequência de Fibonacci.

Solicitar que os alunos encontrem os primeiros convergentes e consigam visualizar esta relação;

Os convergentes de $[1; 1, 1, 1, \ldots]$ **são:**

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$$

Observação 3.1. *Podemos apreciar algo tão extraordinário quanto estas observações feitas sobre a representação do número de ouro por meio de fração contínua e seus convergentes, ao manipularmos um "quebra-cabeça" que apresenta resultados surpreendentes. Isto deverá ser feito no próximo encontro.*

4º dia (2 aulas)

Sugestão de material necessário: Régua graduada, tesoura e cartolina.

Apresentar, manipular, discutir e propor confecção de quebra-cabeça;

Quebra-cabeça: Um quadrado de lado 8 é dividido em quatro regiões e, cada região torna-se uma peça do quebra-cabeça que poderá ser montado como um retângulo, conforme é mostrado na Figura 3.1.

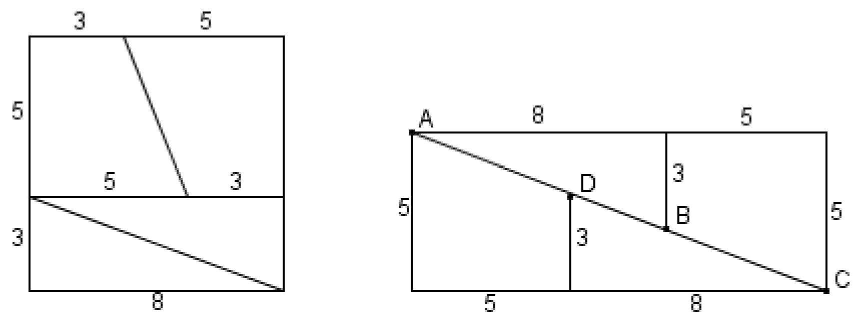

Figura 3.1: Quebra-cabeça

Mas este não é um simples quebra-cabeça. Note que as áreas do quadrado e do retângulo diferem. Como isto é possível?

Atividade 1: Confeccionar e apresentar aos alunos alguns quebra-cabeças, para que eles possam manipular e discutir sobre tal problema. Logo após, mostrar que a explicação sobre este acontecimento tem uma conexão com os convergentes da fração contínua do número de ouro. Veja:

Tomando os convergentes $\dfrac{p_5}{q_5} = \dfrac{8}{5}$ e $\dfrac{p_6}{q_6} = \dfrac{13}{8}$ e considerando a relação $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$ (Corolario 1.1), para $n = 6$, obtemos justamente a igualdade que representa a diferença entre as áreas do quadrado e do retângulo:

$$13.5 - 8.8 = 1.$$

Então, a relação usada mostra que realmente existe uma diferença entre as áreas. Porém, demonstrar que $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$ para os alunos do nível médio pode não ser interessante, além de que, uma explicação "visual" se tornaria mais convincente para eles.

Atividade 2: Mostrar com o uso do Geogebra que, na verdade, os pontos A, D, B e C não estão alinhados. Ao darmos um zoom no retângulo formado com as peças do quebra-cabeça, vemos que $ABCD$ é um paralelogramo como mostra a Figura 3.2.

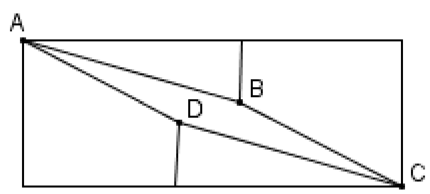

Figura 3.2: Zoom do retângulo

Mais interessante é perceber que para todo n par, temos $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = 1$ e, portanto, podemos construir quebra-cabeças do mesmo tipo, mas de comprimentos diferentes, desde que tenham as medidas da Figura 3.3.

Com $F_1 = 1, F_2 = 1$ e $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$ para $k > 2$.

Mais ainda: quanto maior o lado do quadrado (F_{2n}), mais imperceptível se tornará o paralelogramo $ABCD$ da Figura 3.2.

Atividade 3: Solicitar que os alunos confeccionem quebra-cabeças com outras medidas que satisfaçam as medidas da Figura 3.3.

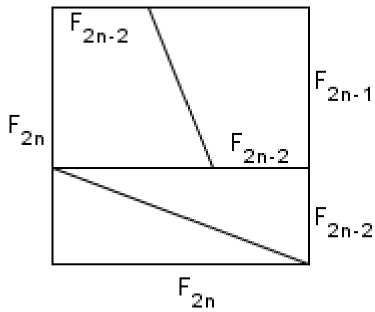

Figura 3.3: Generalização do Quebra-cabeça

5º dia (2 aulas)

Sugestão de material necessário: calculadora.

Apresentar fração contínua que representa o número π;

A fração contínua simples que representa o número π é dada por

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, ...] .$$

Encontrar alguns termos desta sequência pode se tornar uma tarefa fácil e interessante para alunos do nível médio, desde que seja realizada com o auxílio de uma calculadora que forneça o valor (aproximado, claro!) de π. E, uma vez que eles já tiveram um primeiro contato com Frações Contínuas e seus Convergentes, alguns destes também podem ser calculados. Veja:

Numa calculadora de 11 dígitos, temos a aproximação

$$\pi = 3,1415926536.$$

Logo,

$$\pi \cong 3 + 0,1415926536 = 3 + \frac{1415926536}{10000000000} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{10000000000}{1415926536}}$$

$$\pi \cong 3 + \frac{1}{7,0625133054} = 3 + \frac{1}{7 + 0,0625133054} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{625133054}{10000000000}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\cfrac{10000000000}{625133054}}} =$$

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15,996594543}}$$

$$\pi \cong 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 0,996594543}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{996594543}{1000000000}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{\cfrac{1000000000}{996594543}}}} =$$

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1,0034170938}}}$$

$$\pi \cong 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + 0,0034170938}}}.$$

Para se chegar ao 4º convergente da fração contínua de π, precisamos apenas expandir o número π nesta representação até onde o fizemos no procedimento acima, o que nos fornece

$$\pi = [3; 7, 15, 1, \ldots].$$

Porém, provavelmente os alunos poderão sentir-se motivados a continuar o procedimento, expandindo cada vez mais o número π em uma fração contínua, o que pode despertar um maior interesse por partes deles em relação ao assunto. Enfim, calculando-se o 4º convergente, obteremos

$$\pi \cong 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{112+1}{16}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{339+16}{113} = \frac{355}{113} \cong 3,1415929204.$$

Portanto, o 4º convergente da fração contínua de π já nos dá uma ótima aproximação (6 casas decimais) se comparada com a aproximação geralmente utilizada que é $3,14$.

Observação 3.2. Uma interessante aplicação de construção com régua e compasso pode ser feita com o uso do 4º convergente da fração contínua de π.

6º dia (2 aulas)

Sugestão de material necessário: Régua e compasso.

Aplicar exercício de construção geométrica;

Aplicação: Construir com régua e compasso um quadrado com área aproximadamente igual à área de um círculo de raio 1. [8]

Comentário: Não faremos tal construção com uso de régua e compasso, de modo que a área do quadrado seja exatamente igual a π, e sim, igual a $\frac{355}{113}$. Porém, como vimos, $\frac{355}{113}$ nos dá uma boa aproximação para π.

Passo a passo da construção:

* Construir a figura a seguir, de tal forma que: $OD = \frac{7}{8}$, $AF = \frac{1}{2}$, $\overline{FG} \parallel \overline{OD}$, $\overline{HF} \parallel \overline{GD}$ e tomando $\overline{AO}$ como unidade de medida.

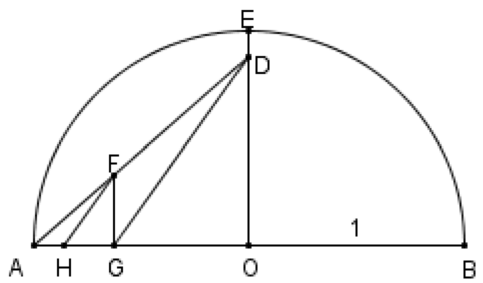

Figura 3.4: Semicírculo de diâmetro 2

* Mostrar que $AH = \dfrac{4^2}{8^2 + 7^2}$.

Demonstração: Aplicando o Teorema de Pitágoras em AOD, obtemos que $\overline{AD} = \sqrt{1 + \frac{7^2}{8^2}}$. Como $\overline{FG} \parallel \overline{OD}$, então

$$\frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AO} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{AG} = \frac{\sqrt{1 + \frac{7^2}{8^2}}}{1} \Rightarrow AG = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{7^2}{8^2}}}.$$

Também temos $\overline{HF} \parallel \overline{GD}$ e, portanto

$$\frac{AH}{AF} = \frac{AG}{AD} \Rightarrow \frac{AH}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{7^2}{8^2}}}}{\sqrt{1 + \frac{7^2}{8^2}}} \Rightarrow \frac{AH}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{7^2}{8^2}\right)} \Rightarrow 4AH = \frac{8^2}{8^2 + 7^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AH = \frac{4^2}{8^2 + 7^2}.$$

■

* Concluir que $AH + 3 = \frac{355}{113}$.

Até o momento, construímos um segmento de comprimento aproximadamente igual a π. Contudo, queremos construir um segmento de comprimento aproximadamente igual a $\sqrt{\pi}$. Para tanto, construamos a figura a seguir, de forma que $AB \cong \pi$, $BC = 1$ e $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

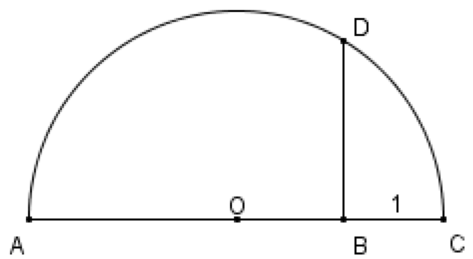

Figura 3.5: Semicírculo de diâmetro $\pi + 1$

* Mostrar que $BD \cong \sqrt{\pi}$.

Demonstração: Da Figura 3.5, obtemos que $B\widehat{A}D + A\widehat{D}B = 90°$ e $B\widehat{C}D + C\widehat{D}B = 90°$. Somando estas duas equações, teremos

$$B\widehat{A}D + A\widehat{D}B + B\widehat{C}D + C\widehat{D}B = 180°.$$

Como AC é diâmetro do semicírculo de diâmetro $\pi + 1$, temos o triângulo ADC é retângulo em D e, portanto

$$B\widehat{A}D + B\widehat{C}D = 90°.$$

E, sendo $B\widehat{A}D + A\widehat{D}B = 90°$, concluímos que $B\widehat{C}D = A\widehat{D}B$. Então, pelo caso de semelhança AA, temos $ABD \sim BDC$, de onde obtemos a seguinte proporção:

$$\frac{\pi}{BD} = \frac{BD}{1} \Rightarrow BD^2 = \pi \Rightarrow BD = \sqrt{\pi}.$$

■

* Por fim, construir um quadrado de lado medindo aproximadamente $\sqrt{\pi}$, obtendo o quadrado com área também próxima à área de um círculo de raio 1, como queríamos.

7º dia (2 aulas)

Aplicar alguns problemas que envolvam frações contínuas em suas resoluções;

Situação-Problema 1: Um fabricante de relógios precisa produzir dois tipos de rodas dentadas na razão $\sqrt{2}:1$. É impraticável que estas rodas tenham mais que 20 dentes. Encontre algumas possibilidades para o número de dentes em cada roda, que irão aproximar a razão desejada, utilizando as aproximações dadas pelos convergentes consecutivos de uma fração contínua simples. [Adaptado de Sanches; Salomão (2003)].

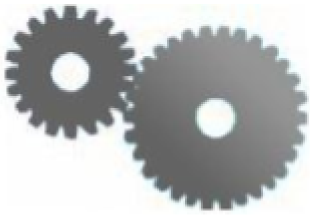

Figura 3.6: Rodas Dentadas

Solução: Chamemos de x o número de dentes da engrenagem maior e y o número de dentes da engrenagem menor. Então, temos $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$.

Podemos tomar $x, y \in \mathbb{N}$ para conseguir aproximar a razão desejada, ou seja, $\frac{x}{y} \cong \sqrt{2}$. Para tanto, calculemos os primeiros convergentes da fração contínua de $\sqrt{2}$.

$$C_1 = 1; C_2 = \tfrac{3}{2}; C_3 = \tfrac{7}{5}; C_4 = \tfrac{17}{12}; C_5 = \tfrac{41}{29}, \ldots$$

Foi posto no enunciado do problema que é impraticável que as rodas tenham mais de 20 dentes. Portanto, o 4º convergente é a melhor aproximação dentre as que satisfazem esta condição. De fato, C_4 já nos dá uma aproximação correta até a ordem das centenas ($C_4 = \frac{17}{12} = 1,41\overline{6}$ e $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$). Portanto, fabricar a engrenagem maior e a menor com 17 e 12 dentes, respectivamente, é a melhor opção.

Situação-Problema 2: (Interdisciplinaridade) Determine a resistência equivalente ao circuito da Figura 3.12.

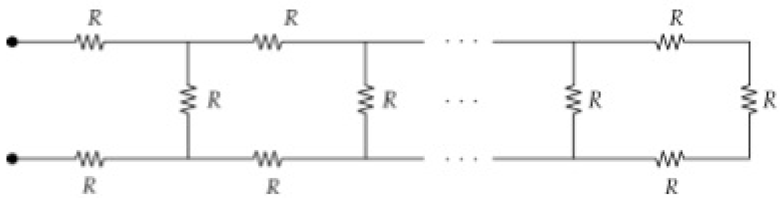

Figura 3.7: Circuito

Observação 3.3. As reticências horizontais da figura indicam que o número de sub-malhas quadradas (malhas menores envolvendo quatro resistores, um em cada lado do quadrado) é muito grande, podendo ser considerado como infinito.

Comentário: A aplicação deste problema pode ser proposta a alunos que já estudaram ou estejam estudando, na disciplina de Física, associação mista de resistores (Eletricidade). Lembremos que a associação em série de duas resistências R_1 e R_2 leva a uma resistência equivalente $R_s = R_1 + R_2$, ao passo que a associação em paralelo leva a uma resistência equivalente R_p dada por $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Solução: Montando o circuito gradativamente e chamando de R_n a resistência equivalente ao circuito do n-ésimo passo, temos

1º Passo:

$$R_1 = R + R + R = 3R$$

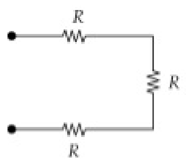

Figura 3.8: Circuito com 3 resistores

2º Passo:

$$R_2 = R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_1}} + R = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_1}}$$

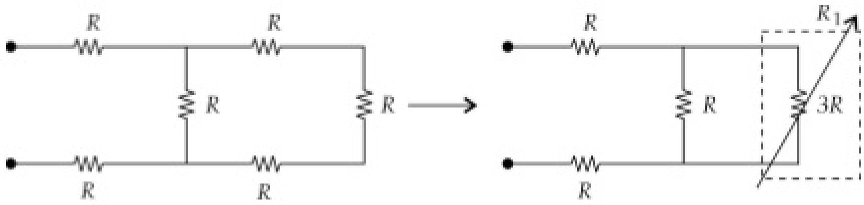

Figura 3.9: Circuito com 6 resistores

3º Passo:

$$R_3 = R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_2}} + R = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_2}}$$

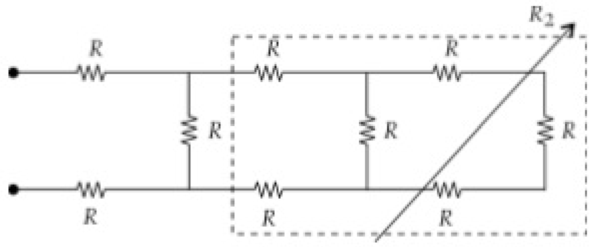

Figura 3.10: Circuito com 9 resistores

4º Passo:

$$R_4 = R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_3}} + R = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_3}}$$

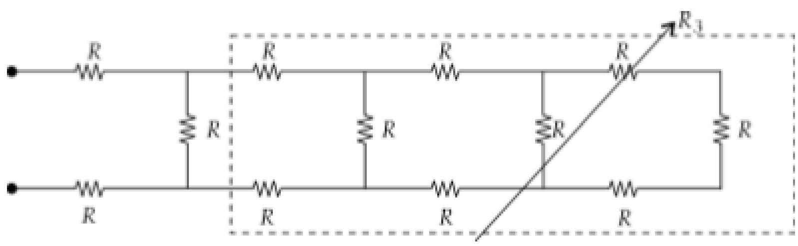

Figura 3.11: Circuito com 12 resistores

Observando o padrão recursivo dos passos anteriores, temos

$$R_n = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{n-1}}}.$$

Sendo x a resistência equivalente ao circuito quando o número de sub-malhas quadradas é considerado como infinito, teremos

$$x = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}.$$

Logo,

$$x = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{x}} \Rightarrow x = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{x+R}{Rx}} \Rightarrow x = 2R + \frac{Rx}{x+R} \Rightarrow x\,(x+R) = 2R\,(x+R) + Rx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + Rx - 2Rx - Rx - 2R^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2Rx - 2R^2 = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º grau na incógnita x, obtemos as raízes $x = \left(1 \pm \sqrt{3}\right) R$. Contudo, $x > 0$ e, portanto, a resistência equivalente ao circuito, quando o número de sub-malhas quadradas é considerado infinito, é igual a $R\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

Situação-Problema 2: (Interdisciplinaridade) Determine a capacitância equivalente ao circuito da Figura 3.12.

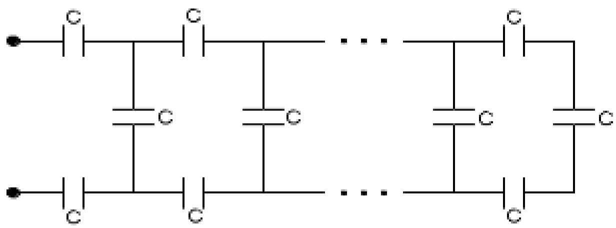

Figura 3.12: Circuito

Observação 3.4. As reticências horizontais da figura indicam que o número de sub-malhas quadradas (malhas menores envolvendo quatro capacitores, um em cada lado do quadrado) é muito grande, podendo ser considerado como infinito.

Comentário: Lembremos que a associação em série de dois capacitores C_1 e C_2 leva a uma capacitância equivalente C_s dada por $\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, ao passo que a associação em paralelo leva a uma capacitância equivalente $C_p = C_1 + C_2$.

Solução: Montando o circuito gradativamente, como fizemos no problema anterior, e chamando de C_n a capacitância equivalente, obteremos que

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} + \frac{1}{C},$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_1} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} + \frac{1}{C + C_1},$$

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_2} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} + \frac{1}{C + C_2},$$

Observando o padrão recursivo acima, temos

$$\frac{1}{C_n} = \frac{2}{C} + \frac{1}{C + C_{n-1}}.$$

Sendo x a capacitância equivalente ao circuito quando o número de malhas é considerado como infinito, teremos

$$x = \cfrac{1}{\cfrac{2}{C} + \cfrac{1}{C + \cfrac{1}{\cfrac{2}{C} + \cfrac{1}{C + \cfrac{1}{\cfrac{2}{C} + \cfrac{1}{C + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}.$$

Logo,

$$x = \frac{1}{\frac{2}{C} + \frac{1}{C + x}} = \frac{C\,(C + x)}{2\,(C + x) + C} = \frac{C^2 + Cx}{2C + 2x + C} = \frac{C^2 + Cx}{3C + 2x} \Rightarrow 2x^2 + 3Cx - Cx - C^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2Cx - C^2 = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º grau na incógnita x, obtemos as raízes $x = \dfrac{\left(-1 \pm \sqrt{3}\right) C}{4}$. Contudo, $x > 0$ e, portanto, a capacitância equivalente ao circuito, quando o número de sub-malhas quadradas é considerado infinito, é igual a $\dfrac{\left(-1 + \sqrt{3}\right) C}{4}$.

Referências

[1] BOYER, C. B.; *História da Matemática*. Edgard Blücher Ltda., 2ª ed. São Paulo, SP, 1996.

[2] COHN, H.; *A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of* e. The American Mathematical Monthly, v. 113, nº 1, Janeiro 2006.

[3] EVES, H. W.; *Introdução à História da Matemática*. Editora da UNICAMP, 2ª ed. Campinas, 1997.

[4] FENANDES, D. P. e LIMA, F. M.; *Usando Frações Contínuas para Resolver um Problema de Eletricidade de Forma Criativa*. Física na Escola, v. 7, nº 1, 2006.

[5] HOLMES, J. E.; *Continued Fractions*. The Mathematics Teacher, v. 61, nº 1, Janeiro 1968.

[6] KHINCHIN, A. Ya.; *Continued Fractions*. Dover, 1997.

[7] MOREIRA, C. G.; *Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas*. 1º Colóquio da Região Sudeste, 2011.

[8] OLDS, C. D.; *Continued Fractions*. Random House, 1963.

[9] PAIXAO, J. C.; *Sucessões e Frações Contínuas*. Gazeta da Matemática, Março 2012.

[10] POMMER, W. M.; *Frações Contínuas no Ensino Médio?*. Seminários de Ensino de Matemática/SEMA-FEUSP, Setembro 2009.

[11] SHANKS, D.; *A Logarithm Algorithm*. Mathematical Tables and Other Aids to Computation, v. 8, nº 46, Abril 1954.