



Universidade Federal de Goiás
Regional de Jataí
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Ensinar e Aprender Geometria

Fernanda Lima Silva Ferreira

Jataí
2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Fernanda Lima Silva Ferreira		
E-mail:	fernanda.lima.silva@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Funcionário Público		
Agência de fomento:	Secretaria Estadual de Educação	Sigla:	SEE
País:	Brasil	UF:	GO CNPJ: 01. 409. 705 / 0001 - 20.
Título:	ENSINAR E APRENDER GEOMETRIA		
Palavras-chave:	Geometria, triângulos, resultados importantes, polígono		
Título em outra língua:	TEACHING AND LEARNING GEOMETRY		
Palavras-chave em outra língua:	Geometry, triangle, important results, polygon.		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Médio		
Data defesa:	14/05/2015		
Programa de Pós-Graduação:	Programa em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT		
Orientador (a):	Dr ^a Luciana Aparecida Elias		
E-mail:	lucianaeliasmat@gmail.com		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

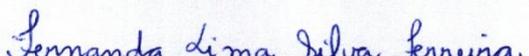
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento **SIM** **NÃO**¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



 Fernanda Lima Silva Ferreira

Data: 14/05/2015

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Fernanda Lima Silva Ferreira

Ensinar e Aprender Geometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Regional Jataí da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientadora: Prof. Dra. Luciana Aparecida Elias

Jataí
2015

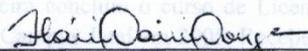
Fernanda Lima Silva Ferreira

Ensinar e Aprender Geometria

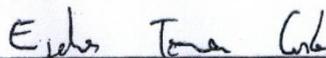
Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 14 de maio de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Luciana Aparecida Elias
Coordenação de Matemática-REJ/UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro-IF/GO



Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa
Membro - Coordenação de Matemática-REJ/UFG

Dedicatória

Dedico esse trabalho aos meus colegas professores, que contam histórias, explicam o mundo, demonstram o conhecimento dos antepassados e inspiram as gerações futuras.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pois sem Ele eu não teria forças para essa longa jornada. Por me dar coragem para questionar realidades e propor sempre um novo mundo de aprendizagem e possibilidades.

Agradeço a meu esposo, mãe e irmãos que me incentivaram e renovaram minha esperança e que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Agradeço aos amigos, pelas alegrias, tristezas e dores compartilhadas e aos colegas de curso, pelas longas horas de estudo e apoio durante essa caminhada.

Agradeço à professora Doutora Luciana Elias pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão desta dissertação e contribuíram para minha formação pessoal pelo bom exemplo e testemunho.

Agradeço ao professor Doutor Esdras Teixeira Costa, por seus ensinamentos de informática, ao longo da escrita.

Agradeço a todos os professores do curso, que foram tão importantes na minha vida acadêmica.

Agradeço ainda a CAPES, pelo suporte financeiro que possibilitou que eu me dedicasse aos estudos durante o curso.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo de Geometria baseada no Triângulo. São abordados alguns aspectos históricos sobre o surgimento da Geometria e a discussão sobre o Quinto Postulado de Euclides. Demonstramos resultados conhecidos e importantes como o Teorema de Pitágoras e a soma dos ângulos internos de um triângulo. Demonstramos ainda alguns resultados considerados como verdades, mesmo que suas demonstrações sejam pouco conhecidas, como “todo triângulo é um polígono convexo”. Por fim, são demonstrados resultados interessantes da Geometria do Triângulo que não são amplamente divulgados entre estudantes e professores, como a reta de Euler, a circunferência dos nove pontos, os Teoremas de Ceva e de Menelaus e a relação de Stewart. Espera-se que este trabalho sirva de fonte de pesquisa para estudantes e professores, e que motive os mesmos a estarem em constante pesquisa e estudo da Geometria, ramo da Matemática que apresenta os menores índices de aprendizagem nas avaliações internas e externas dos estudantes.

Palavras-chave: Geometria, triângulo, resultados importantes, polígono.

Abstract

This work presents a study of Geometry based on a Triangle. Some historic aspects are approached about the appearance of Geometry and the discussion about the Fifth Postulate of Euclides. We will demonstrate known results and important ones like Pitagora's Theorem and the addition of internal angles of a triangle. We will also demonstrate some results considered as true, even if its demonstrations are not well known, like all "triangles are a convex polygon". Lastly, some interesting results of Triangle Geometry are demonstrated that are no broadly disclosed between students and teachers, like Euler's straight, the circumference of the nine points, Ceva's and Menelau's theorems and Stward's relation. It is waited that this work serves as source of research for students and teachers, and that it also motivates them to be constant researching the study of Geometry, branch is Mathematics that presents the smallest index of learning into internal and external evaluation of the students.

Key words: Geometry, triangle, important results, polygon.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor ou do orientador.

Fernanda Lima silva Ferreira concluiu o curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Goiás – Campus Jataí em 2005. Recebeu o título de Especialista em Ensino de Ciências e Matemática pelo Campus Jataí do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás em 2012. Atualmente é professora efetiva da Secretaria de Educação do Estado de Goiás no município de Jataí.

Sumário

1	Introdução	2
2	Polígono	4
2.1	Definições iniciais	5
2.2	Polígono	6
3	Triângulo	10
3.1	Definições e elementos	11
3.2	Classificação de triângulos	12
3.3	Triângulos congruentes	14
3.4	O teorema do ângulo externo - primeira versão	17
4	Quinto postulado de Euclides	24
4.1	Semelhança de triângulos - definição	27
4.2	Semelhança de triângulos	28
5	Principais cevianas e pontos notáveis de um triângulo	31
5.1	Pontos notáveis de um triângulo	36
5.2	A reta de Euler	38
5.3	O triângulo e o círculo	40
5.4	A circunferência de nove pontos	41
6	Resultados principais	43
6.1	Teorema de Menelaus	43
6.2	Teorema de Ceva	44
6.3	Relação de Stewart	45
7	Triângulo retângulo	47
7.1	Congruência de triângulos retângulos	48
7.2	Resultados decorrentes da perpendicularidade	49
8	Área e outros resultados de polígono	52
8.1	Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo	53
8.2	Soma dos ângulos internos de um polígono	54
8.3	Considerações finais	57

Capítulo 1

Introdução

A observação da sala de aula, do desempenho dos alunos em avaliações internas e externas e das falas dos colegas em reuniões, grupos de estudo e cursos, mostram as dificuldades encontradas por educandos e educadores no que diz respeito ao ensino e aprendizagem da Geometria em todos os níveis de ensino.

Dentre os principais motivos para as dificuldades encontradas são listados, o abandono do ensino da Geometria em detrimento da valorização da Álgebra, a separação deste ramo da Matemática dos demais, a maneira em que é dividido o conteúdo geométrico no currículo e a falta de material de apoio necessário para estudos de aprofundamento e preparação das aulas.

Esse trabalho busca primeiramente atender a necessidade de possuir um material de estudo e pesquisa voltado para a Geometria do triângulo. Sendo composto pelos principais resultados relacionados ao estudo dos triângulos e alguns resultados gerais de polígono, esse trabalho tem como objetivo ajudar professores e alunos a se dedicarem ao estudo da Geometria mudando assim, a realidade na qual está inserida.

O trabalho foi estruturado da forma descrita abaixo.

Esse primeiro capítulo traz as motivações, objetivos e que nortearam o trabalho e a estrutura de organização do mesmo.

O segundo capítulo traz as definições e nomenclatura de polígono e seus elementos. Classifica os polígonos quanto à convexidade, igualdade entre ângulos e lados. Informações necessárias para o estudo do Triângulo nos capítulos posteriores.

O terceiro capítulo contém a definição, classificação e elementos de um triângulo. Nesse capítulo é mostrado um resultado aceito como verdade, mas pouco demonstrado, a convexidade de um triângulo. Discute os casos de congruência, além de resultados importantes que não dependem do axioma das paralelas, como o Teorema do ângulo externo, o Teorema de Legendre e algumas desigualdades no triângulo.

No quarto capítulo encontra-se o Quinto postulado de Euclides e resultados do triângulo que dependem do mesmo, como a soma dos ângulos internos de um triângulo, o teorema da base média, e um equivalente ao teorema de Tales para triângulos, além de mostrar os casos de semelhança de triângulos.

O quinto capítulo define e demonstra resultados referentes as cevianas e pontos notáveis de um triângulo, entre eles a Reta de Euler. Mostra ainda relações entre o triângulo e a circunferência, culminando com um tópico sobre a circunferência de nove pontos

No sexto capítulo discutimos resultados interessantes porém, pouco conhecidos da Geometria, o teorema de Menelaus, o teorema da Ceva e a relação de Stewart, que acreditamos contribuir significativamente no aprendizado do leitor.

No sétimo capítulo é abordado um caso particular de triângulo, o Triângulo Retângulo, e resultados relacionados a ele, como as relações métricas e o famoso Teorema de Pitágoras.

No oitavo capítulo reunimos alguns resultados de polígono obtidos a partir do estudo do triângulo realizado nos capítulos anteriores, como área, soma dos ângulos internos de polígonos convexos e não convexos, além da relação entre polígonos e circunferência. Encontra-se nesse capítulo ainda, as considerações finais referentes aos estudos realizados que resultou no presente trabalho.

Capítulo 2

Polígono

Dados históricos contidos em [4, 5] mostram que observar as formas e suas belezas, os astros e seus movimentos são assuntos de interesse da humanidade desde seus primórdios. Já no Período Paleolítico (20 000 a.C.), devido à necessidade do homem de representar o mundo que o cerca, são encontrados vestígios do interesse pelas formas. O homem primitivo registrava em cavernas pinturas rupestres, conhecidas como arte pictórica, que representavam elementos da natureza. Desenhos envolvendo simetrias e congruências de figuras, datam do final do período Neolítico (5000-2500 a.C.).

O homem não tinha definido nenhuma figura geométrica, como triângulos, quadrados ou hexágonos, até que passou a viver fora das cavernas em edifícios construídos por ele mesmo. A medida que as construções, que eram inicialmente rústicas, foram se aprimorando, foi necessário um aprimoramento nos projetos e execução dos planejamentos. O desenho tornou-se uma ferramenta básica no processo de construção, e as formas se interligaram com a ideia de beleza.

A origem da Geometria tem sido atribuída aos babilônios e egípcios, cerca de 3 500 anos atrás. Criadores dos jardins suspensos, uma das sete maravilhas do mundo antigo, cuja construção iniciou em 605 a.C. pelo arquiteto Nabucodonosor II, a civilização babilônica já demonstrava ter algum conhecimento de geometria. Os babilônios dispunham de plaquetas com tabelas de multiplicar, de quadrados e de cubos, elementos facilitadores para o cálculo de áreas e volumes.

Entretanto, para Heródoto, a geometria teria surgido graças ao Faraó Sesóstris III, que dividiu as terras egípcias para a agricultura com o objetivo de receber impostos dos proprietários, conforme o tamanho do terreno. Quando o Rio Nilo transbordava, e tomava parte dessa terra, era necessário uma nova metragem da terra de cada agricultor. A partir dessas medições, teria surgido a geometria, do grego “geometrein”, sendo “geo”= terra e “metrein”= medir.

Os egípcios, assim como os babilônios, também são construtores de uma das sete maravilhas do mundo antigo, a pirâmide de Queóps, que recebe o nome do faraó para a qual foi construída como tumba.

As duas vertentes defendem que a origem da geometria está ligada às necessidades da vida diária, como a agrimensura, a planificação de cidades e o traçado de mapas. Aristóteles, ao contrário, dizia que no Egito havia uma classe sacerdotal que estudava a teoria que envolvia os elementos geométricos. Percebemos claramente origens distintas para o surgimento da geometria, uma calcada na prática e outra simplesmente na teoria.

Na Grécia foi dado um importante passo na teorização ao estudo das formas geométricas. Acredita-se que Tales de Mileto teria levado a Geometria do Egito para a Grécia no século 6 a.C. Porém os gregos, ao

contrário dos egípcios e babilônios, não consideravam a experiência como critério de verdade, para eles os resultados deveriam ser provados com a razão. De posse dos conhecimentos práticos desenvolvidos no Egito e na Babilônia, os gregos começaram a aperfeiçoar a geometria, dando a essa ciência a estrutura que se manteve até os dias de hoje.

Grandes nomes da matemática, como Pitágoras e Euclides viveram na Grécia. Pitágoras, discípulo de Tales, desenvolveu e aplicou os conhecimentos de matemática, mais especificamente de geometria à navegação, música e astronomia. Pitágoras deu nome a um importante teorema sobre o triângulo retângulo e sua escola chegou a afirmar que a Terra era esférica, e não plana. Euclides, autor da obra "Os Elementos" introduziu o sistema axiomático, que parte de conceitos e proposições admitidos sem demonstração (postulados/axiomas) para estabelecer de maneira ordenada sua geometria. Assim, três conceitos fundamentais e não definidos - o ponto, a reta e o plano - e cinco postulados a eles referentes servem de base para toda Geometria chamada euclidiana, que ensinamos até os dias de hoje nas escolas.

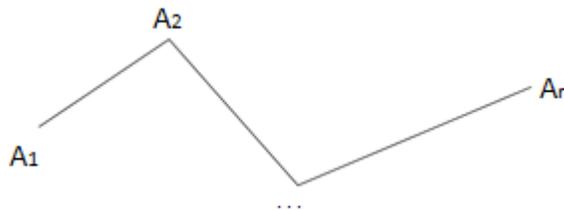
2.1 Definições iniciais

Definição 1. Três ou mais pontos são ditos colineares se eles estão posicionados de tal forma que se pode traçar uma reta que contenha todos eles.

Definição 2. O conjunto constituído por dois pontos A e B de uma reta e por todos os pontos da reta que se encontram entre A e B é chamado segmento AB . Os pontos A e B são denominados extremos do segmento e os pontos entre A e B formam o interior do segmento.

Definição 3. Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C , tais que B encontra-se entre A e C , é chamado de semirreta de origem A e contendo o ponto B , e é representada por S_{AB} . O ponto A é, então, denominado de origem da semirreta S_{AB} .

Definição 4. Linha poligonal é a figura formada por um conjunto de segmentos de retas consecutivos e não-colineares dois a dois. Dados os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de modo que os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ satisfaçam as condições acima, denotaremos por linha poligonal a expressão $A_1A_2\dots A_n$, e os extremos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, por vértices da linha poligonal.



Definição 5. Uma linha poligonal simples é formada por segmentos de reta cuja interseção dois a dois é vazia em seu interior. Caso essa interseção não seja vazia, a linha poligonal é denominada não-simples ou complexa.

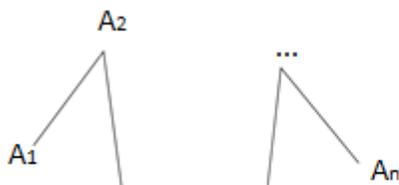


Linha poligonal simples

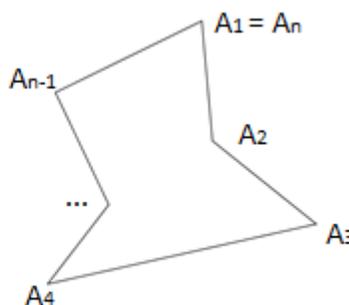


Linha poligonal complexa

Definição 6. Uma linha poligonal simples pode ser classificada em aberta ou fechada, conforme sua organização no espaço. Uma linha poligonal simples aberta é uma linha poligonal onde $A_1 \neq A_n$, caso contrário, ela é dita fechada.

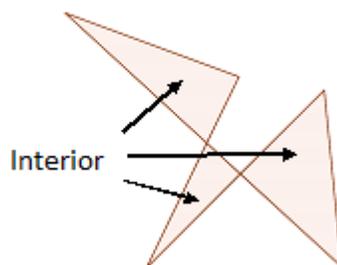


Linha poligonal simples aberta



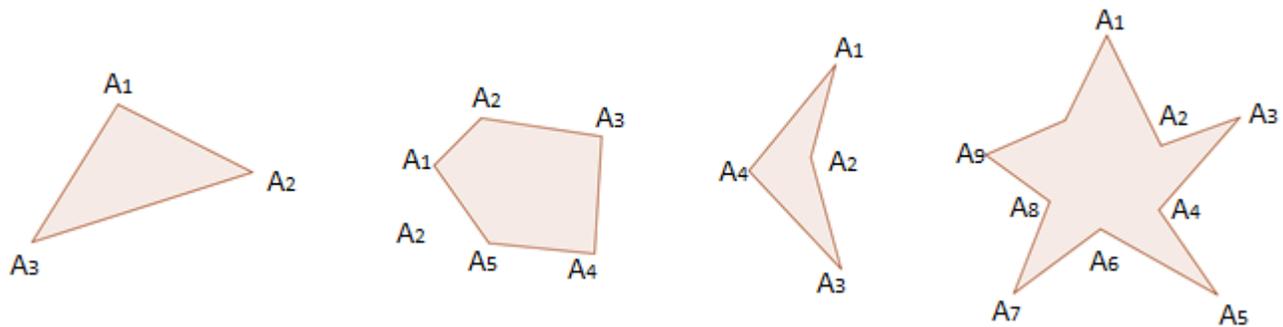
Linha poligonal simples fechada

Definição 7. Chamamos de interior da linha poligonal fechada a região do plano limitada pelos segmentos que a compõem.



2.2 Polígono

Definição 8. Polígono é a região do plano determinada pela união de uma linha poligonal fechada simples com seu interior. Dados os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, denotamos o polígono que possui esses pontos como vértices consecutivos a expressão $A_1A_2A_3\dots A_n$.

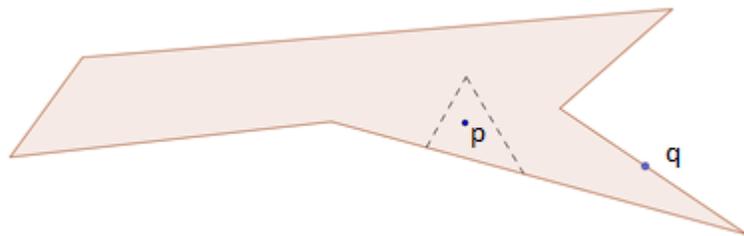


Elementos de um polígono

- **Vértices:** são os vértices da linha poligonal que o define.
- **Lados:** os segmentos de retas que unem vértices consecutivos.

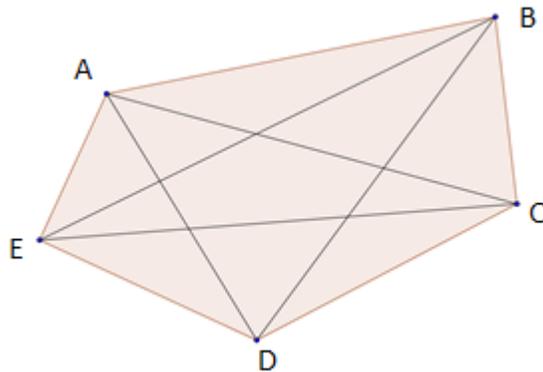
Definição 9. Dois lados que têm um vértice comum são denominados lados consecutivos.

- **Fronteira:** é a união dos lados que o compõe.
- **Interior:** é a região delimitada pela linha poligonal que o define.



Na figura, p é ponto interior à região e q é ponto da fronteira.

- **Diagonais:** são os segmentos que unem dois vértices não consecutivos do polígono.



Na imagem as diagonais do polígono são os segmentos AC , AD , BD , BE e CE .

Definição 10. Ângulo é a região do plano determinada pelo encontro de duas semirretas, chamadas lados do ângulo, que possuem uma origem em comum, chamada vértice do ângulo.

O conceito de ângulo foi tema de debates que o consideravam uma quantidade, uma qualidade, uma relação, ou uma combinação das três. Este conceito hora se relacionava a diferença de direção entre duas retas, hora ao conjunto de pontos no interior da interseção entre duas retas, a segunda é a que tem sido usada mais recentemente, e a que adotaremos nesse trabalho.

- **Ângulo interno do polígono ou ângulo do polígono:** é a região do plano, pertencente ao interior do polígono, determinada pelo encontro de cada par de segmentos consecutivos. O vértice do ângulo coincide com o vértice do polígono.
- **Ângulo externo do polígono:** dado um dos ângulos do polígono, obtêm-se o ângulo externo relativo a ele tomando um de seus lados e o prolongamento do outro, de modo que não divida o ângulo interno.

Definição 11. Dois ângulos de um polígono são consecutivos se têm um lado comum.

Pelas definições acima, concluímos que um polígono com n vértices possui n lados e n ângulos.

Definição 12. A soma da medida dos lados de um polígono é denominado perímetro do polígono.

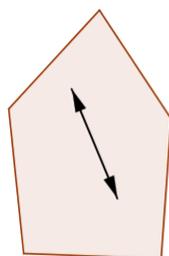
Nomeando os polígonos

De acordo com o número n de lados os polígonos são denominados como se segue:

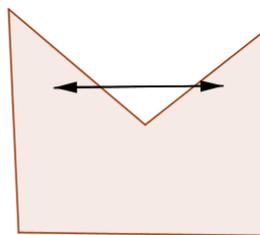
Nº de lados	Nome	Nº de lados	Nome
1	Não existe	15	Pentadecágono
2	Não existe	16	Hexadecágono
3	Triângulo	17	Heptadecágono
4	Quadrilátero	18	Octodécágono
5	Pentágono	19	Eneadecágono
6	Hexágono	20	Icoságono
7	Heptágono	30	Triacontágono
8	Octógono	40	Tetracontágono
9	Eneágono	50	Pentacontágono
10	Decágono	60	Hexacontágono
11	Undecágono	70	Heptacontágono
12	Dodecágono	80	Octacontágono
13	Tridecágono	90	Eneacontágono
14	Tetradecágono	100	Hectágono

Polígono convexo

Definição 13. Um polígono é convexo quando para quaisquer dois pontos X e Y do interior do polígono, o segmento XY está inteiramente contido nessa região. Conclui-se desta definição que um polígono é convexo se, e somente se, sua fronteira tem exatamente dois pontos em comum com qualquer reta que passa pelo seu interior. Um polígono não-convexo também é chamado de polígono côncavo.



polígono convexo



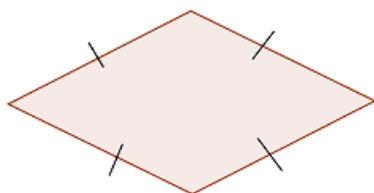
polígono não-convexo

É equivalente afirmar que um polígono é convexo se todos os seus ângulos são menores que 180° , e um polígono não convexo possui pelo menos um ângulo maior que 180° .

Polígono regular

Definição 14. Um polígono que possui os lados congruentes é chamado de equilátero.

Definição 15. Um polígono que possui os ângulos congruentes é chamado equiângulo.



quadrilátero equilátero



quadrilátero equiângulo

O retângulo é um quadrilátero equiângulo, o losango de um quadrilátero equilátero e o quadrado um quadrilátero regular, como definido a seguir.

Definição 16. Um polígono convexo é regular se for simultaneamente equilátero e equiângulo.

Capítulo 3

Triângulo

Por mais de dois mil anos, a geometria euclidiana foi tida como única e absoluta para a maioria dos matemáticos. Outros entretanto, se dedicaram a mostrar sua inconsistência ou mesmo refiná-la. Em 1897, o alemão David Hilbert publicou seu trabalho "Fundamentos da Geometria", que corrigia alguns erros encontrados na obra de Euclides por matemáticos que vieram após ele, apresentando assim, uma formalização e estruturação características dos matemáticos da época.

Os quatro primeiros axiomas de Euclides foram facilmente aceitos pela comunidade matemática, mas o mesmo não ocorreu o quinto postulado – o Axioma das Paralelas. Muitos acreditavam que ele não passava de uma proposição e tentaram prová-lo a partir dos quatro primeiros axiomas.

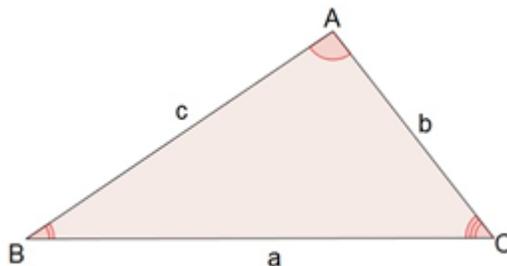
Na tentativa frustrada de demonstrar o quinto postulado nasceram outras geometrias diferentes daquela proposta por Euclides, obtidas a partir da negação do quinto postulado. O matemático alemão Carl Friedrich Gauss foi o primeiro a perceber claramente a possibilidade de haver uma geometria não-euclidiana, assim denominada por ser estruturada sobre axiomas e postulados diferentes do adotado por Euclides. Entretanto, foi Janos Bolyai, matemático húngaro, que fez a primeira publicação referente a existência de uma geometria não-euclidiana. Bolyai admitiu que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada, descobrindo o que atualmente é conhecido como Geometria Hiperbólica Plana. Mesmo sem contato com Bolyai ou com a obra dele, o matemático russo Nikolai Lobachewski, descobre os mesmos resultados que ele e, ao contrário do primeiro, continuou suas pesquisas nessa área, estudando inclusive as identidades trigonométricas hiperbólicas.

A criação de modelos para a Geometria Hiperbólica Plana pôs um fim na discussão acerca da prova do Axioma das Paralelas. Dentre esses modelos, destaca-se aquele conhecido como o Disco de Poincaré. Henri Poincaré, brilhante matemático francês, criou dois modelos em que se aplicava a Geometria Hiperbólica Plana e afirmou que todas as geometrias são igualmente verdadeiras a depender da conveniência. A descoberta de geometrias não-euclidianas não invalida a consistência e a incompletude da geometria euclidiana. Na obra [2] encontramos os axiomas e resultados dessa nova Geometria e em [11] podemos encontrar uma apresentação sobre o Teorema de Gödel, que afirma “O preço da consistência é a incompletude”, mostrando que não existe uma geometria consistente, sem paradoxos, que seja completa.

3.1 Definições e elementos

A linguagem das definições e resultados encontrados nesse capítulo, baseados principalmente em [1, 3] são amplamente utilizadas na educação básica e superior, complementando as definições e resultados vistos no capítulo anterior.

Fazendo referência ao Capítulo 2, o triângulo é um polígono que possui três lados. Portanto, dados três pontos A , B e C , não colineares, a reunião dos segmentos AB , AC e BC com o interior da região limitada por eles, chama-se triângulo ABC .



Ainda fazendo referência ao Capítulo 2, os elementos do triângulo são:

- Os pontos A , B e C são os vértices do triângulo ABC .
- Os segmentos AB , AC e BC são os lados AB , AC e BC do triângulo.
- Os ângulos $B\hat{A}C$ ou \hat{A} , $A\hat{B}C$ ou \hat{B} , e $A\hat{C}B$ ou \hat{C} são os ângulos do triângulo.

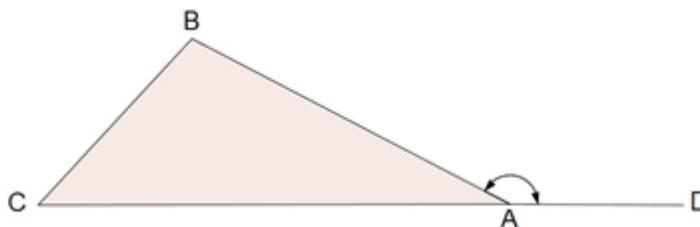
Dizemos que os lados BC , AC e AB e os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} são, respectivamente, opostos.

Definição 17. Dois ângulos são suplementares quando sua soma é igual a 180° .

Definição 18. Chamamos de suplemento de um ângulo aquele ângulo que é suplementar e adjacente ao ângulo dado.

Definição 19. Os ângulos externos do triângulo do triângulo são os suplementos de seus ângulos internos.

A figura abaixo mostra um dos ângulos externos relativamente a \hat{A} .



Para a demonstração da Proposição abaixo usaremos o Axioma de Pasch, enunciado a seguir.

Axioma de Pasch: sejam A , B e C três pontos não colineares e seja m uma reta que não contém nenhum destes pontos. Se m corta o segmento AB , então ela também corta o segmento AC ou o segmento BC .

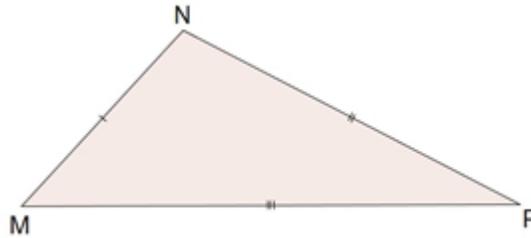
Proposição 20. *Um triângulo é sempre convexo.*

Demonstração. Dados três pontos não colineares A_1 , A_2 e A_3 . Tomando P e Q pontos distintos do interior do triângulo $A_1A_2A_3$, a reta r_{PQ} pode ou não conter um dos vértices do triângulo. Se existe A_i tal que A_i pertence a r_{PQ} , a semirreta S_{A_iQ} divide o ângulo \hat{A}_i e com isto intercepta o lado oposto, A_jA_k em um ponto, mostrando que a reta r_{PQ} intercepta a fronteira do triângulo em apenas dois pontos. Se não existe A_i tal que A_i pertence a r_{PQ} , o resultado segue do Axioma de Pasch, concluindo assim, a demonstração. \square

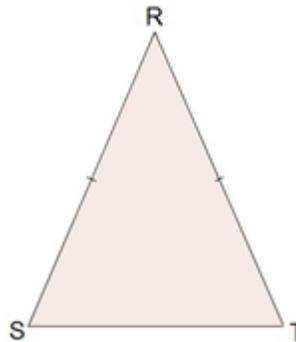
3.2 Classificação de triângulos

Quanto à medida dos lados

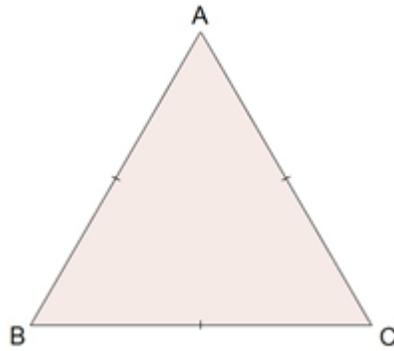
Definição 21. Um triângulo é dito escaleno se, tomados seus lados dois a dois, eles são não congruentes.



Definição 22. Um triângulo é isósceles se possui dois lados congruentes. O lado não congruente é chamado base.



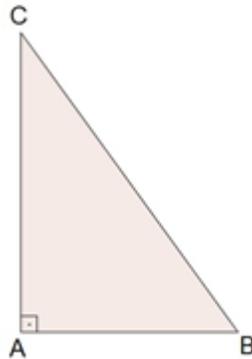
Definição 23. Um triângulo é equilátero se possui os três lados congruentes.



Observação 24. Todo triângulo equilátero é isósceles.

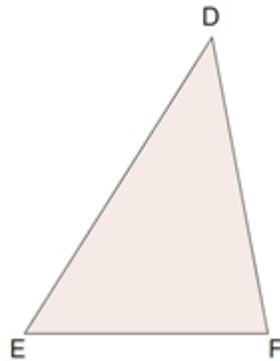
Quanto à medida dos ângulos

Definição 25. Um triângulo é retângulo se possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo cuja medida é igual a 90° . O lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa, e os outros lados de catetos.

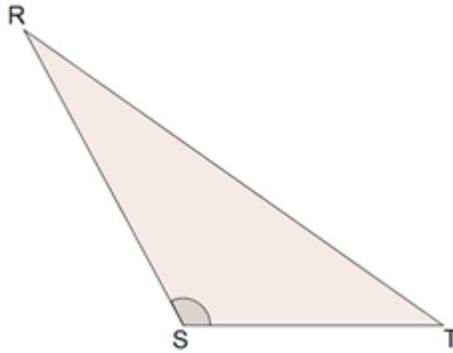


Este triângulo, por possuir resultados particulares, será estudado em um capítulo posterior.

Definição 26. Um triângulo é acutângulo se possui os três ângulos agudos, ou seja, ângulos cujas medidas são menores do que 90° .



Definição 27. Um triângulo é obtusângulo se possui um ângulo obtuso, ou seja, um ângulo cuja medida é maior que 90° .



3.3 Triângulos congruentes

Definição 28. Dois triângulos são congruentes, notação \cong , se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes. Quando não causar confusão usamos o símbolo $=$ para representar a congruência de triângulos.

Se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos congruentes e se $A \leftrightarrow A'$ (leva A em A'), $B \leftrightarrow B'$ (leva B em B') e $C \leftrightarrow C'$ (leva C em C') é a correspondência que define congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações seguintes:

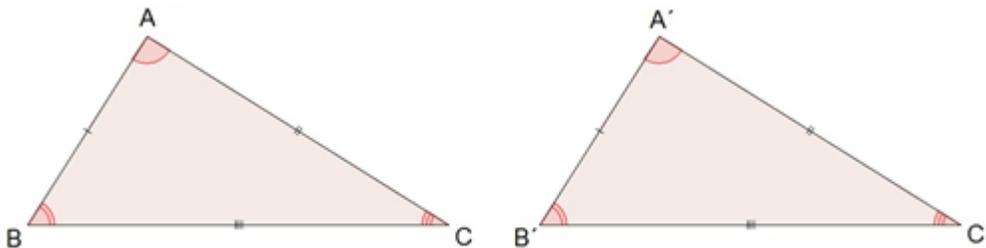
$AB = A'B'$	$\hat{A} = \hat{A}'$
$BC = B'C'$	$\hat{B} = \hat{B}'$
$AC = A'C'$	$\hat{C} = \hat{C}'$

A congruência é uma relação de equivalência, ou seja, é reflexiva, simétrica e transitiva. Isto é,

Reflexiva: $ABC = ABC$

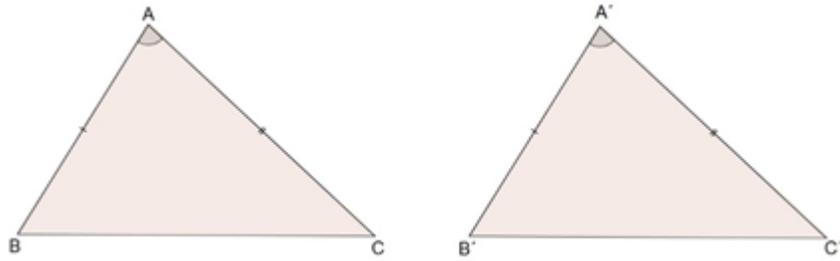
Simétrica: $ABC = A'B'C' \Rightarrow A'B'C' = ABC$

Transitiva: $ABC = A'B'C', A'B'C' = A''B''C'' \Rightarrow ABC = A''B''C''$.



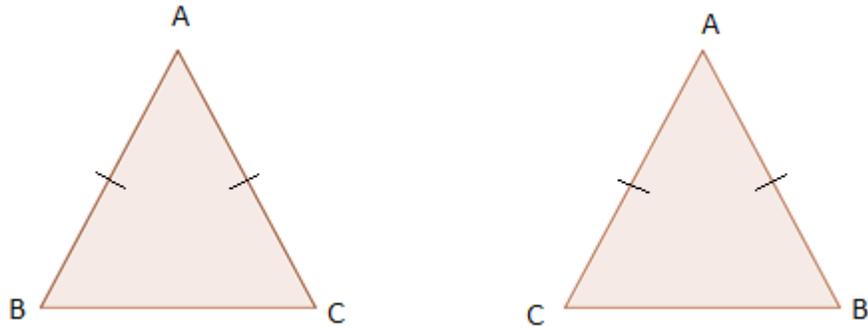
Congruência de triângulos

Axioma 29. (*1º caso - LAL*) Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\hat{A} = \hat{A}'$, então, $ABC \cong A'B'C'$.



Aceito sem demonstração, este caso reduz para três específicas relações as seis a serem satisfeitas na definição de triângulos congruentes.

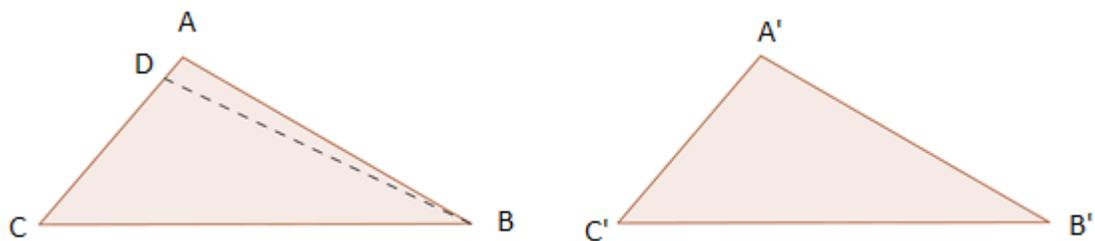
Proposição 30. *Todo triângulo isósceles é isoângulo, ou seja, os ângulos da base são iguais.*



Demonstração. Considere os triângulos ABC e ACB isósceles de base BC , conforme figura anterior. Como $AB = AC$, $AC = AB$ e $\hat{A} = \hat{A}$, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, temos que $\hat{B} = \hat{C}$, e portanto, o triângulo isósceles ABC é isoângulo, por possuir os ângulos da base iguais. Como queríamos demonstrar. \square

Proposição 31. (*2º caso - ALA*) *Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então, $ABC = A'B'C'$.*

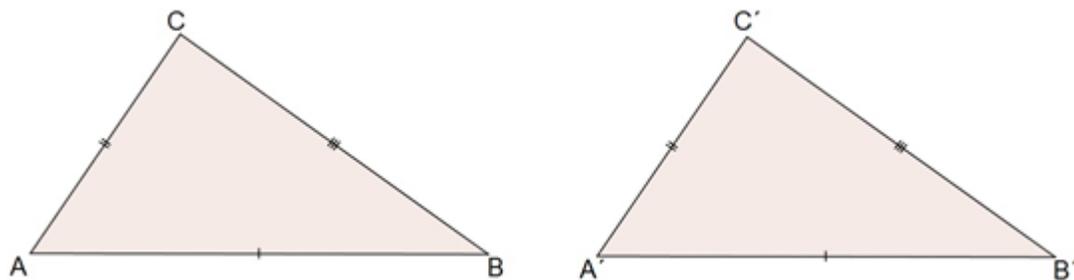
Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos, tais que $AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$. Seja D um ponto da semirreta S_{AC} , tal que, $AD = A'C'$. Compare os dois triângulos ABD e $A'B'C'$. Como $AD = A'C'$, $AB = A'B'$ e $\hat{A} = \hat{A}'$, concluímos pelo primeiro caso de congruência de triângulos, que $ABD \equiv A'B'C'$. Como consequência, tem-se que $\hat{ABD} = \hat{B}'$. Mas, por hipótese, $\hat{B}' = \hat{ABC}$. Logo, $\hat{ABD} = \hat{ABC}$. Consequentemente as semirretas S_{BD} e S_{BC} coincidem. Mas, então, o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos ABC e ABD . Como já provamos que $ABD = A'B'C'$, então, $ABC = A'B'C'$. \square



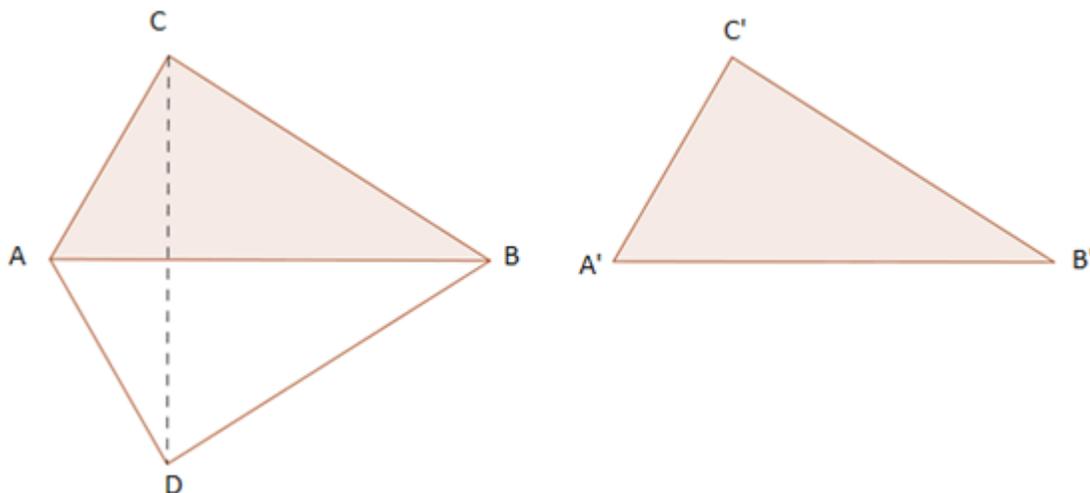
Proposição 32. *Se um triângulo possui dois ângulos agudos congruentes, então esse triângulo é isósceles.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo em que $\hat{B} = \hat{C}$. Vamos mostrar que $AB = AC$. Comparando o triângulo ABC com ele próprio, fazendo corresponder os vértices $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$. Como $\hat{B} = \hat{C}$ e $\hat{C} = \hat{B}$ por hipótese, e $BC = CB$, segue-se, pelo segundo caso de congruência de triângulos, que esta correspondência define uma congruência. Como consequência $AB = AC$, e o triângulo ABC é, portanto isósceles. \square

Proposição 33. (*3º caso - LLL*) *Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então, os triângulos são congruentes.*



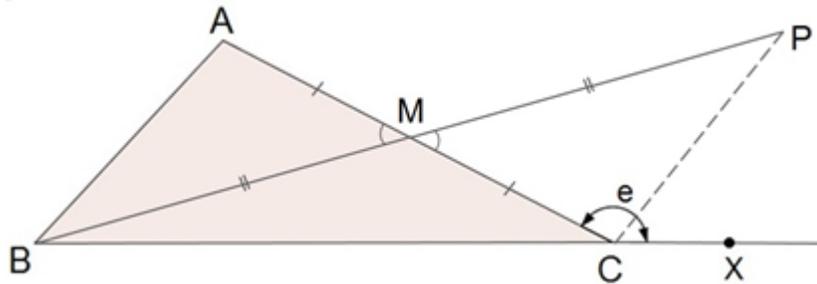
Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos, tais que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $AC = A'C'$. Vamos provar que $ABC = A'B'C'$. \square



Para isto, construa, a partir da semirreta S_{AB} e no semiplano oposto ao que contém o ponto C , um ângulo igual ao ângulo \hat{A}' com vértice em A . No lado deste ângulo que não contém o ponto B , marque um ponto D , tal que $AD = A'C'$ e ligue D a B . Como $AB = A'B'$ (por hipótese), $AD = A'C'$ (por construção) e $\hat{DAB} = \hat{A}'$ (por construção), então $ABD = A'B'C'$. Vamos agora mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Para isto, trace CD . Como $AD = A'C' = AC$ e $DB = B'C' = BC$, então os triângulos ADC e BDC são isósceles. Segue-se que $\hat{ADC} = \hat{ACD}$ e $\hat{CDB} = \hat{DCB}$ e, logo, que $\hat{ADB} = \hat{ACB}$. Mas então, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, podemos concluir que $ABD = ABC$. Como já tínhamos provado que $ABD = A'B'C'$, concluímos que $ABC = A'B'C'$.

3.4 O teorema do ângulo externo - primeira versão

Teorema 34. (Teorema do ângulo externo) *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

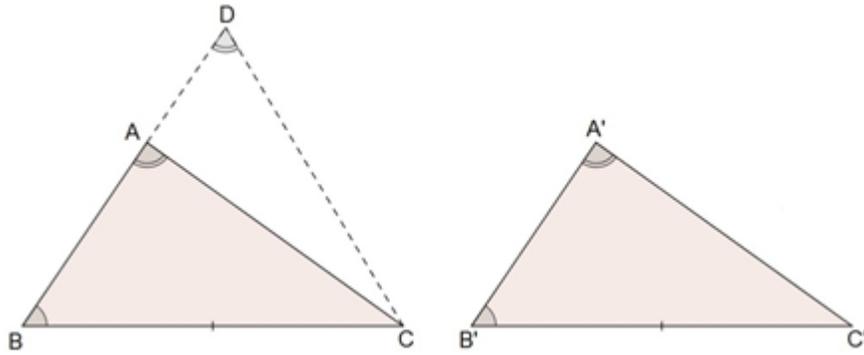


Demonstração. Considere o triângulo ABC , conforme figura anterior. Seja M o ponto médio de AC e P pertence à semirreta S_{BM} tal que, $BM = MP$, pelo caso LAL , $BAM \equiv PCM$ e daí, $\hat{BAM} \equiv \hat{PCM}$ (1). Seja X um ponto de S_{BC} tal que C está entre B e X , como P é interno ao ângulo $\hat{e} = \hat{ACX}$, vem $\hat{e} > \hat{PCM}$. (2).

De (1) e (2), decorre que $\hat{e} > \hat{A}$. Analogamente, tomando o ponto médio de BC , e usando ângulos opostos pelo vértice, concluímos que: $\hat{e} > \hat{B}$. □

Uma das consequências do Teorema do ângulo externo é o quarto caso de congruência de triângulos, envolvendo um lado e dois ângulos, sendo que um dos ângulos não é adjacente ao lado congruente do triângulo. Posteriormente, esse caso pode ser considerado um corolário do caso ALA , pois se dois triângulos possuem dois ângulos congruentes, então esses triângulos possuem os três ângulos congruentes, pois como será demonstrado, a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante igual a 180° .

Proposição 35. (4° caso - LAA_0) *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.*



Demonstração. Considerando a notação da figura acima, há três possibilidades para AB e $A'B'$:

- 1ª) $AB = A'B'$;
- 2ª) $AB < A'B'$;
- 3ª) $AB > A'B'$.

Se a 1ª possibilidade se verifica, temos:

$$AB = A'B', \hat{B} = \hat{B}' \quad e \quad BC = B'C' \xrightarrow{LAL} ABC = A'B'C'.$$

Se a 2ª possibilidade se verifica, tomando um ponto D na semirreta S_{BA} tal que $BD = A'B'$ teríamos:

$$BD = A'B', \hat{B} = \hat{B}' \quad e \quad BC = B'C' \xrightarrow{LAL} DBC = A'B'C' \Rightarrow \hat{D} = \hat{A} = \hat{A}',$$

o que é um absurdo, de acordo com o teorema do ângulo externo do triângulo ADC . Logo, a 2ª possibilidade não se verifica.

A 3ª possibilidade também não se verifica, pelo mesmo motivo, com a diferença que D estaria entre A e B . Como só pode ocorrer a 1ª possibilidade, temos: $ABC = A'B'C'$. □

Proposição 36. *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor que 180° .*

Demonstração. Seja ABC o triângulo. Vamos mostrar que $\hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$. Seja θ o ângulo externo deste triângulo com vértice em C . Pelo teorema do ângulo externo temos que $\theta > \hat{B}$. Como θ e \hat{C} são suplementares, então, $\theta + \hat{C} = 180^\circ$. Portanto, $\hat{B} + \hat{C} < \theta + \hat{C} = 180^\circ$. Como queríamos demonstrar. □

Corolário 37. *Todo triângulo possui, pelo menos, dois ângulos internos agudos.*

Demonstração. De fato, se um triângulo possuísse dois ângulos internos não agudos, sua soma seria maior ou igual a 180° , o que não pode ocorrer de acordo com a proposição anterior. □

Teoremas de Legendre

Na tentativa de provar o quinto axioma de Euclides a partir dos quatro primeiros, Legendre encontrou vários resultados interessantes que podem ser provados sem o uso do axioma das paralelas. Dentre eles, podemos demonstrar os resultados a seguir.

Teorema 38. (Teorema de Legendre): A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor ou igual a dois ângulos retos.

Demonstração. Para provar esse teorema, Legendre usou o seguinte Lema. □

Lema 39. Dado o triângulo ABC , existe um triângulo $A'B'C'$ satisfazendo a:

- 1) A soma dos ângulos de $A'B'C'$ é igual a soma dos ângulos de ABC .
- 2) O triângulo $A'B'C'$ possui um ângulo menor ou igual a metade do menor ângulo do triângulo ABC .

Suponha que este Lema tenha sido estabelecido e que exista um triângulo cuja soma dos ângulos seja $180^\circ + \alpha$. Seja, então, θ_0 o menor ângulo desse triângulo. Aplicando o lema obtemos um novo triângulo, digamos $A_1B_1C_1$, com mesma soma de ângulos e cujo menor ângulo, θ_1 , satisfaz a:

$$\theta_1 < \frac{1}{2}\theta_0.$$

Aplicando agora o lema a esse triângulo, conclui-se pela existência de novo triângulo $A_2B_2C_2$, com mesma soma dos ângulos e menor ângulo, satisfazendo a

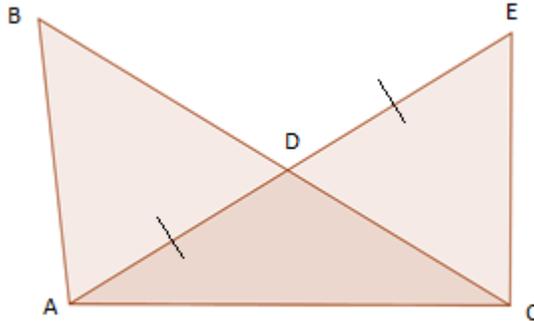
$$\theta_2 < \frac{1}{4}\theta_0.$$

Aplicando esse lema n vezes, chegamos a um triângulo $A_nB_nC_n$, cuja soma dos ângulos é ainda $180^\circ + \alpha$ e cujo menor ângulo é θ_n satisfaz a

$$\theta_n < \frac{1}{2^n}\theta_0.$$

Escolhendo n suficientemente grande, teremos $\theta < \alpha$. Mas, nesse caso, a soma dos outros dois ângulos será maior do que 180° , o que é um absurdo, o que conclui a prova da proposição.

Demonstração. (do Lema). Dado o triângulo ABC , suponha que o ângulo \hat{A} é menor que os outros dois ângulos. Seja D o ponto médio do segmento BC . Sobre a semirreta de origem A passando por D , marque o ponto E , de sorte que $AD = DE$. Os triângulos ADB e EDC são, por conseguinte, congruentes. Segue-se trivialmente que a soma dos ângulos do triângulo AEC é igual a soma dos ângulos do triângulo original.



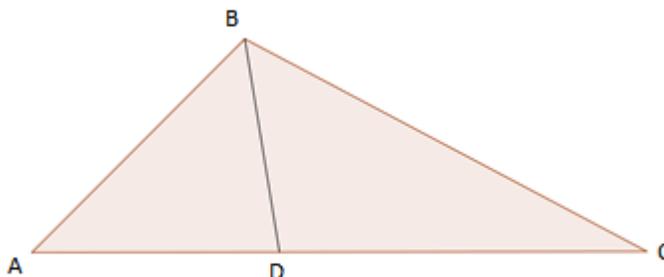
A observação importante agora é que a soma dos ângulos $D\hat{A}C$ e $D\hat{E}C$ é igual ao ângulo \hat{A} do triângulo original. Consequentemente, o novo triângulo AEC possui um ângulo, que chamaremos de θ , tal que $\theta = D\hat{A}C$ ou $\theta = D\hat{E}C$, satisfazendo a desigualdade

$$\theta < \frac{1}{2}\hat{A}.$$

□

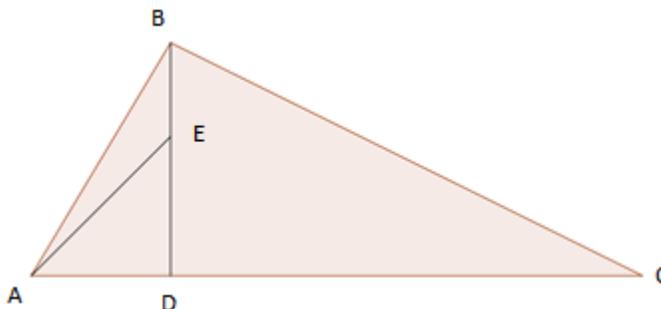
Lema 40. *Se a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, o mesmo é verdade para todos os triângulos obtidos deste, traçando-se um segmento ligando um de seus vértices ao lado oposto.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC , considere um ponto qualquer D do lado AC e trace BD . Se a soma do triângulo ABC é 180° , então, a soma dos ângulos dos triângulos ABD e DBC será $\hat{A} + \hat{A}BC + \hat{C} + 180^\circ = 360^\circ$. Como nenhum destes triângulos tem soma dos ângulos superior a 180° , pelo teorema de Legendre, cada um deles tem soma dos ângulos exatamente igual a 180° . □



Lema 41. *Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos, então, pode-se construir triângulos retângulos isósceles com a soma dos ângulos igual a dois ângulos retos e catetos maiores do que qualquer segmento dado.*

Demonstração. Seja ABC o triângulo cuja soma dos ângulos é 180° . Se este já não for um triângulo retângulo isósceles, baixe uma altura do vértice com maior ângulo ao lado oposto. Na figura seguinte isto foi realizado baixando-se BD .

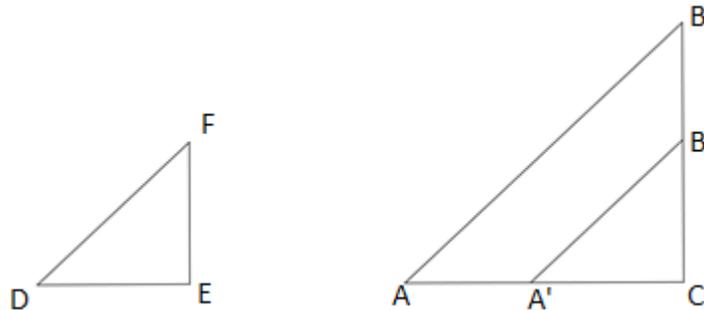


Formamos assim, pelo Lema anterior, dois triângulos retângulos, cada um com soma dos ângulos iguais a 180° . Se nenhum desses for isósceles, escolha um deles, por exemplo, o triângulo ADB com ângulo reto em D . Verifique qual dos catetos AD ou DB tem maior comprimento. Vamos supor, sem perda de generalidade, que seja BD . Trace, então, um segmento ligando o vértice A a um ponto E do segmento BD , tal que $DA = DE$. Do lema anterior, obtemos que o triângulo retângulo isósceles ADE tem soma dos ângulos igual a 180° .

Vamos agora nos restringir a esse triângulo retângulo isósceles com soma dos ângulos igual a dois ângulos retos e observar que a junção de dois deles, ao longo da hipotenusa, produz um quadrado. Quadrados podem ser empilhados, uns sobre os outros, de modo a produzir quadrados de lados arbitrariamente grandes. A diagonal de um deles o divide em dois triângulos retângulos isósceles cuja soma dos ângulos é 180° . Com isto concluímos a demonstração. \square

Teorema 42. *Se existe um triângulo cuja a soma dos ângulos internos é igual a dois ângulos retos, então, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos.*

Demonstração. Suponha que exista um triângulo cuja soma dos ângulos é 180° , e seja DEF um triângulo retângulo qualquer com ângulo reto no vértice E . Pelo Lema anterior, existe um triângulo retângulo isósceles ABC , com ângulo reto em C , cujos catetos são maiores do que qualquer dos catetos de DEF e cuja soma dos ângulos internos é 180° .

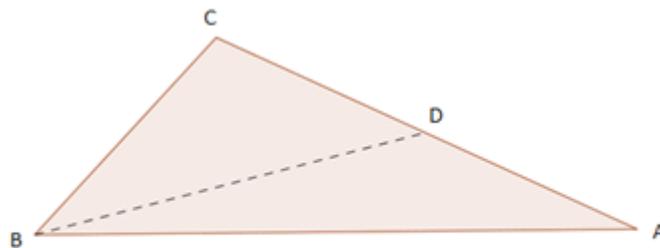


Podemos, então, marcar pontos A' na semirreta S_{CA} , de modo que $A'C = DE$ e B' na semirreta S_{CB} , de modo que $B'C = FE$. Tem-se, então, $A'CB' = DEF$. Como a soma dos ângulos de ABC é 180° , traçando o segmento $A'B'$ concluímos que $A'BC$ tem soma dos ângulos igual a 180° . De forma análoga, analisando o segmento $A'B'$ de $A'BC$, temos que $A'B'C$ tem soma dos ângulos igual a 180° . Pela congruência entre $A'CB'$ e DEF , segue que a soma dos ângulos do triângulo DEF é igual a 180° . \square

Desigualdades no triângulo

Proposição 43. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.*

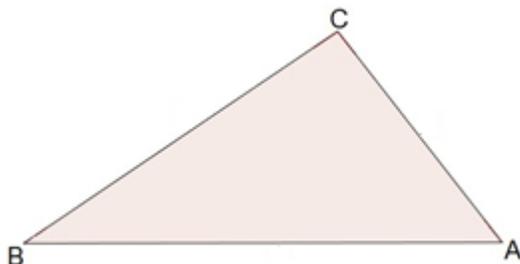
Demonstração. A primeira parte da proposição é uma consequência imediata do fato de que, um triângulo possui dois ângulos congruentes se e somente se ele é isósceles. Para provar a segunda parte, considere um triângulo ABC em que $BC < AC$ e vamos mostrar que $C\hat{A}B < C\hat{B}A$.



Para isto, marque, sobre a semirreta S_{CA} , um ponto D , tal que $CD = BC$. Como $BC < AC$, então, este ponto D pertence ao segmento AC e, como consequência, a semirreta S_{BD} divide

o ângulo $C\hat{B}A$. Portanto tem-se $C\hat{B}A > C\hat{B}D$. Agora observe que $C\hat{B}D = C\hat{D}B > C\hat{A}B$. A igualdade anterior é consequência de CBD ser um triângulo isósceles, e a desigualdade ocorre porque $C\hat{D}B$ é ângulo externo do triângulo BDA . Portanto, $C\hat{B}A > C\hat{A}B$, como queríamos demonstrar. \square

Proposição 44. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.*



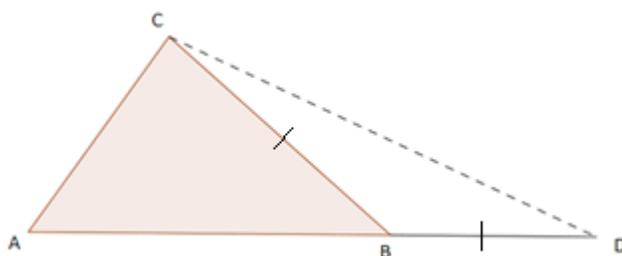
Demonstração. Novamente aqui, a primeira parte da proposição é uma consequência imediata do fato de que um triângulo possui dois ângulos congruentes se e somente se ele é isósceles. Para provar a segunda parte, considere um triângulo ABC em que $C\hat{A}B < C\hat{B}A$ e vamos mostrar que $BC < AC$. Observe que existem três possibilidades: $BC < AC$, $BC > AC$ e $BC = AC$.

Se $BC > AC$, então, pela proposição anterior, deveríamos ter $C\hat{A}B > C\hat{B}A$, o que é contrário a nossa hipótese. Do mesmo modo, se ocorresse $BC = AC$, o triângulo seria isósceles e $C\hat{A}B = C\hat{B}A$, o que está também em desacordo com nossa hipótese.

Logo, deve ocorrer $BC < AC$, como queríamos demonstrar. \square

Proposição 45. *Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC , devemos mostrar que $AB + BC > AC$. Para isto, marque um ponto D na semirreta S_{AB} , de modo que $AD = AB + BC$. Segue-se que $BD = CB$ e, portanto, o triângulo BCD é isósceles com base CD . Logo, temos $B\hat{C}D = B\hat{D}C$. Como B está entre A e D , então, $A\hat{D}C = B\hat{C}D < A\hat{C}D$. Segue-se que no triângulo ACD tem-se $B\hat{D}C < A\hat{C}D$. Logo, pela proposição anterior, $AC < AD$. Mas, então, $AC < AB + BC$. \square



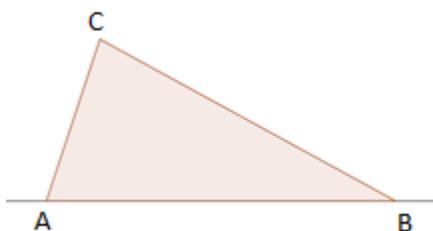
O resultado abaixo, conhecido como desigualdade triangular condiciona a existência de triângulo dados três segmentos quaisquer. De acordo com esta desigualdade é impossível construir-se um triângulo cujos lados medem 10, 6 e 18.

Teorema 46. (*Desigualdade triangular*) *Dados três pontos distintos, A , B e C do plano, tem-se que $AC \leq AB + BC$. Igualdade ocorre se e somente se B pertencer ao segmento AC .*

Demonstração. Se A , B e C não estiverem sobre uma mesma reta, então, eles determinam um triângulo e a desigualdade é consequência do teorema anterior. Se estiverem sobre uma mesma reta, sejam a , b e c , respectivamente, as suas coordenadas. Nesse caso temos, pelos axiomas sobre medição de segmento, que

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$$

e que a igualdade ocorre se e somente se b estiver entre a e c . □



Abaixo estão listados os três axiomas sobre medição de segmentos. Maiores informações sobre o tema podem ser obtidas em [1].

Axioma I: a todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e só se os pontos são coincidentes.

Axioma II: os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

Axioma III: se o ponto B encontra-se entre A e C , então $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Proposição 47. *Sejam a , b e c três números positivos. Suponha que $|a - b| < c < a + b$. Então, pode-se construir um triângulo cujos lados medem a , b e c .*

Demonstração. Trace uma reta e sobre ela marque dois pontos A e B , tais que $AB = c$. Com um compasso descreva, um círculo de centro A e raio b , e um círculo de centro B e raio a . Como $|a - b| < c < a + b$, os dois círculos se interceptam. Chame quaisquer dos pontos da interseção de C . O triângulo ABC tem lados medindo a , b e c como desejado. □

Capítulo 4

Quinto postulado de Euclides

O quinto postulado de Euclides é originalmente a afirmação “Se uma linha reta cai sobre outras duas de modo que os dois ângulos internos de um mesmo lado sejam nos seus conjuntos [isto é, na sua soma] menores que dois ângulos retos, então as duas linhas retas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se num ponto do mesmo lado em que os dois ângulos são inferiores a dois retos.” Entretanto, em 1796 John Playfair propôs um equivalente ao quinto postulado que torna a noção do mesmo mais intuitiva. Devido a esse fato, o axioma abaixo é mais conhecido do que o quinto postulado dos Elementos de Euclides.

Axioma 48. *Dada uma reta r e um ponto $P \notin r$ existe uma única reta s paralela a r tal que $P \in s$.*

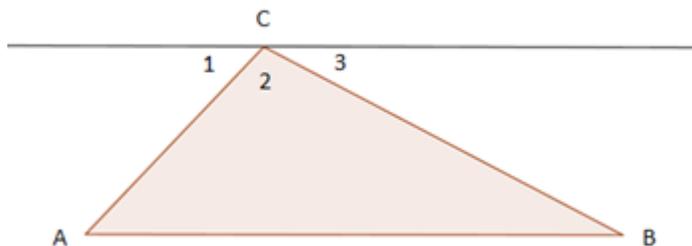
Outra versão é apresentada por Hilbert, matemático alemão que nasceu em 1862 na região de Königsberg. Em 1899 Hilbert publicou *Foundations of Geometry* (*Grundlagen der Geometrie* no original), substituindo os axiomas tradicionais de Euclides por um conjunto mais formal.

Axioma 49. *Se duas retas paralelas interseccionam uma terceira então os ângulos correspondentes e os alternados são congruentes; reciprocamente, a congruência dos ângulos correspondentes ou dos alternados implica que as retas são paralelas.*

Como consequência deste axioma apresentamos a proposição a seguir.

Proposição 50. *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .*

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Pelo vértice C , trace uma reta paralela ao lado AB . Numere os ângulos formados com vértice C , como indicado na figura seguinte.



Tem-se $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$. Como AC é transversal às duas paralelas, os ângulos correspondentes são congruentes e, portanto, $\hat{1} = \hat{A}$. Como BC é também transversal às duas paralelas, então $\hat{3} = \hat{B}$. Portanto, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$. \square

A seguir estão relacionados uma série de corolários imediatos deste teorema.

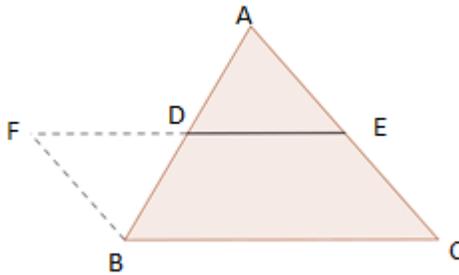
Corolário 51. *A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90° .*

Corolário 52. *Num triângulo equilátero cada ângulo mede 60° .*

Corolário 53. *(Teorema do ângulo externo - segunda versão) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo e α o ângulo externo do triângulo relativo ao vértice C . Pelo teorema anterior temos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ (1). Como α e \hat{C} são suplementares, temos que $\alpha + \hat{C} = 180^\circ$ (2). Fazendo (1) = (2) temos $\alpha = \hat{A} + \hat{B}$. Como queríamos demonstrar. \square

Teorema 54. *O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.*



Demonstração. Seja ABC um triângulo. Designe por D o ponto médio de AB e por E o ponto médio de AC . Devemos provar que DE é paralelo a BC e que $DE = \frac{1}{2}BC$. Para isto, marque na semi-reta S_{ED} um ponto F , tal que $FD = DE$. Como $AD = DB$ (já que D é o ponto médio de AB), $\hat{ADE} = \hat{FDB}$ por serem opostos pelo vértice, então, os triângulos ADE e FDB são congruentes. Como consequência tem-se que $\hat{DFB} = \hat{AED}$ e $FB = AE$. Logo, pelo axioma das paralelas, FB e EC são paralelos e têm o mesmo comprimento. Consequentemente, o quadrilátero $FBCE$ é um paralelogramo. Portanto, FE é paralelo a BC e têm o mesmo comprimento. Como D é o ponto médio de FE , então, $DE = \frac{1}{2}BC$, como queríamos demonstrar. \square

O Teorema abaixo é um equivalente ao Teorema de Tales para triângulos.

Teorema 55. *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então, ela os divide na mesma razão.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Considere uma reta paralela ao lado BC que corta os lados AB e AC , respectivamente, nos pontos D e E , como representado na figura a seguir. Devemos provar que:

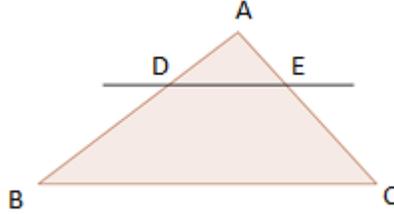
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Para isto, tome um pequeno segmento AP_1 na semirreta S_{AB} , de modo que as razões $\left(\frac{AB}{AP_1}\right)$ e $\left(\frac{AD}{AP_1}\right)$ não sejam números inteiros. Considere na semirreta S_{AB} os pontos $P_2, P_3, \dots, P_k, \dots$, tais que

$$k \cdot AP_1 = AP_k,$$

para todo $k \geq 2$. Existem, então, dois números inteiros m e n , tais que

D está entre P_m e P_{m+1} e B está entre P_n e P_{n+1} .



Tem-se, portanto

$$m \cdot AP_1 < AD < (m+1) \cdot AP_1 \quad \text{e} \quad n \cdot AP_1 < AB < (n+1) \cdot AP_1.$$

É, então, simples concluir destas desigualdades que:

$$\frac{m}{n+1} < \frac{AD}{AB} < \frac{m+1}{n}.$$

Tracemos pelos pontos P_1, P_2, \dots, P_{n+1} retas paralelas a BC . Estas retas cortam a semirreta S_{AC} em pontos Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1} , os quais também satisfazem a

$k \cdot AQ_1 = AQ_k$, para todo $k; 2 \leq k \leq n+1$. Além disso, o ponto E encontra-se entre Q_m e Q_{m+1} e o ponto C entre Q_n e Q_{n+1} . O mesmo raciocínio feito acima pode ser repetido aqui, obtendo-se como resultado a desigualdade:

$$\frac{m}{n+1} < \frac{AE}{AC} < \frac{m+1}{n}.$$

Das desigualdades acima pode-se concluir que

$$\left| \frac{AD}{AB} - \frac{AE}{AC} \right| < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}.$$

Observe que, como $m \leq n$, então,

$$\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} = \frac{m+n+1}{n(n+1)} \leq \frac{2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n},$$

ou seja, as razões $\frac{AD}{AB}$ e $\frac{AE}{AC}$ diferem por não mais do que $\frac{2}{n}$. Quanto menor for o segmento AP_1 tanto maior será o número n e tanto menor será o quociente $\frac{2}{n}$. Como o lado esquerdo da desigualdade não depende de n , só podemos concluir que os quocientes $\frac{AD}{AB}$ e $\frac{AE}{AC}$ são iguais, como queríamos demonstrar. \square

4.1 Semelhança de triângulos - definição

Definição 56. Dois triângulos são semelhantes se possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos, ou correspondentes, proporcionais. Com isto, dizemos que, se ABC e EFG são dois triângulos semelhantes e se $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$ e $C \leftrightarrow G$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações:

$$\hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{G}$$

e

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CA}{GE}.$$

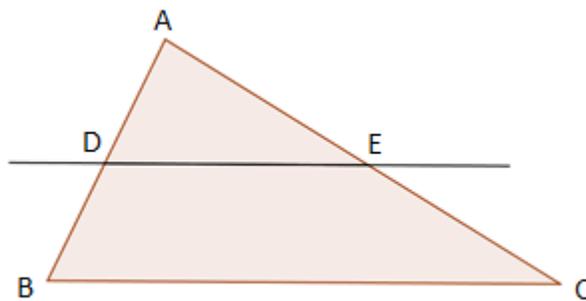
Razão de semelhança ou razão de proporcionalidade:

Sendo k a razão entre os comprimentos dos lados homólogos, $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CA}{GE} = k$, k é chamado razão de semelhança dos triângulos.

Observe que dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade um; inversamente, dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade um, são congruentes.

Teorema 57. *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

Demonstração. Para provarmos a semelhança entre ADE e ABC , precisamos provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais.



Como a reta DE é paralela a reta BC , por hipótese, temos que $\hat{D} = \hat{B}$ e $\hat{E} = \hat{C}$. Além disso, o ângulo \hat{A} é comum a ADE e ABC , provando a primeira parte.

Como, pelo teorema anterior,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \quad (1)$$

traçando por E uma reta paralela ao lado AB , seja F o ponto de interseção dessa reta com o lado BC , formamos o paralelogramo $BDEF$. Logo, do paralelismo entre EF e BA , tem-se $DE = BF$ e $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$, portanto,

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}. \quad (2)$$

De (1) e (2) segue que

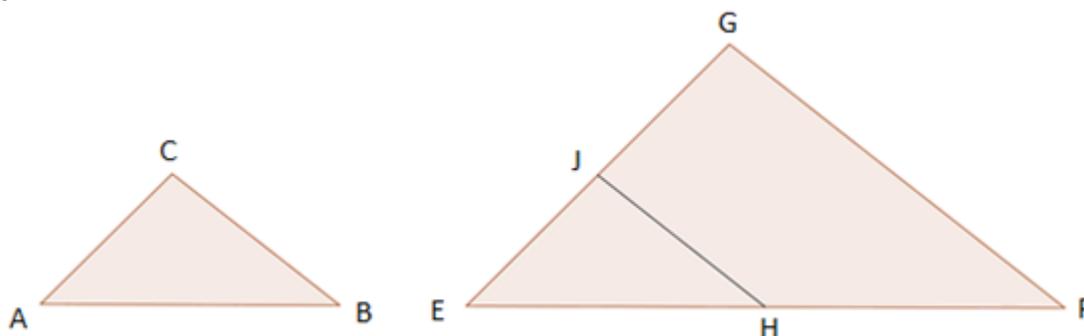
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

□

4.2 Semelhança de triângulos

Proposição 58. *1ª CASO: Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.*

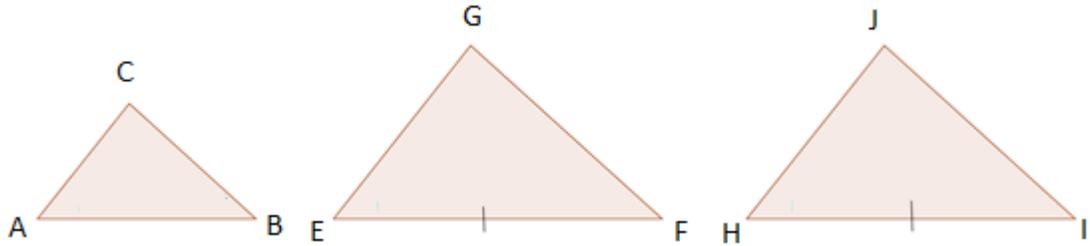
Demonstração. Sejam ABC e AFG dois triângulos tais que, $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}$ e $\hat{C} = \hat{G}$. Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180° , então a congruência dos ângulos \hat{A} e \hat{E} e dos ângulos \hat{B} e \hat{F} acarreta na congruência dos ângulos \hat{C} e \hat{G} . Resta provar que os lados são proporcionais. Para isto, tome na semirreta S_{EF} o ponto H , de modo que $EH = AB$. Pelo ponto H trace, uma reta paralela a FG . Esta corta a semirreta S_{EG} num ponto J , formando um triângulo EJH que é congruente ao triângulo ABC , já que $\hat{A} = \hat{E}$, $AB = EH$ e $\hat{B} = \hat{F} = \hat{EJH}$. Esta última congruência deve-se ao paralelismo de JH e GF . Segue-se da proposição anterior que $\frac{EH}{EF} = \frac{EJ}{EG}$. Como $EH = AB$ e $EJ = AC$, então, da igualdade acima obtém-se: $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$.



De maneira análoga, demonstra-se que $\frac{AC}{EG} = \frac{CB}{GF}$. Fica assim demonstrado o teorema. □

Proposição 59. *2ª CASO: Se, em dois triângulos ABC e EFG tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$, então, os triângulos são semelhantes.*

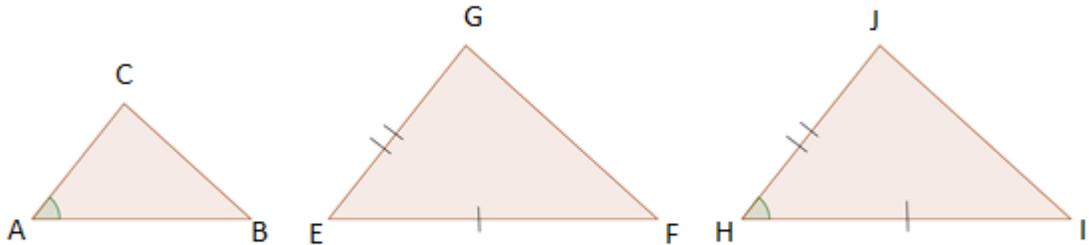
Demonstração. Construa um triângulo HIJ que tenha $HI = EF$, $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \hat{B}$.



De acordo com o primeiro caso de semelhança de triângulo, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes. Por conseguinte: $\frac{AB}{HI} = \frac{AC}{HJ}$. Como $HI = EF$, a hipótese $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$ e a igualdade acima implicam que: $HJ = EG$. Como, por construção, $HI = EF$ e $\hat{H} = \hat{A} = \hat{E}$, podemos concluir, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, que os triângulos EFG e HIJ são congruentes. Como já sabíamos que ABC e HIJ eram semelhantes, podemos concluir facilmente que ABC e EFG são semelhantes. \square

Proposição 60. 3ª CASO: Se, em dois triângulos ABC e EFG , tem-se $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CA}{GE}$, Então, os dois triângulos são semelhantes.

Demonstração. Construa um triângulo HIJ que tenha $\hat{H} = \hat{A}$, $HI = EF$ e $HJ = EG$. Segue-se, então, da hipótese que $\frac{AB}{HI} = \frac{AC}{HJ}$ e, de acordo com o segundo caso de semelhança de triângulos, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes.



Decorre daí que, além da igualdade acima, também ocorre $\frac{AB}{HI} = \frac{BC}{IJ}$. Segue-se (daí e da hipótese do teorema) que $IJ = FG$. Como já tínhamos que $HI = EF$ e $HJ = EG$ (por construção), então, pelo terceiro caso de congruência de triângulos, HIJ e EFG são congruentes. Como HIJ e ABC são semelhantes, conclui-se que ABC e EFG são também semelhantes. Isto conclui a prova do teorema. \square

Proposição 61. Se a razão de semelhança de dois triângulos é k , então a razão entre lados homólogos é k .

Demonstração. Segue diretamente da definição de triângulos semelhantes. \square

Proposição 62. Se a razão de semelhança de dois triângulos é k , então a razão entre os perímetros é k .

Demonstração. Se dois triângulos ABC e EFG são semelhantes, com $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$ e $C \leftrightarrow G$, segue da definição de semelhança que, $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{EG} = k$, e pela propriedade de segmentos proporcionais concluímos que

$$\frac{AB + BC + AC}{EF + FG + EG} = \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{EG} = k,$$

como queríamos demonstrar. \square

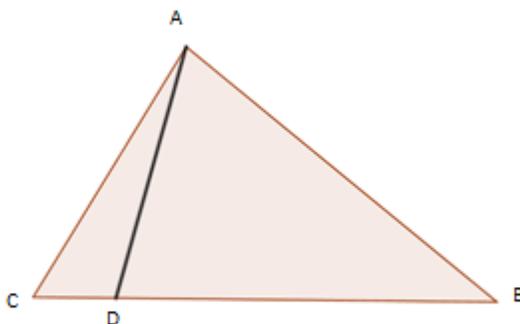
Proposição 63. *Se a razão de semelhança de dois triângulos é k , então a razão entre os raios dos círculos inscritos e circunscritos é k .*

Proposição 64. *Se a razão de semelhança de dois triângulos é k , então a razão entre dois elementos lineares homólogos é k .*

Capítulo 5

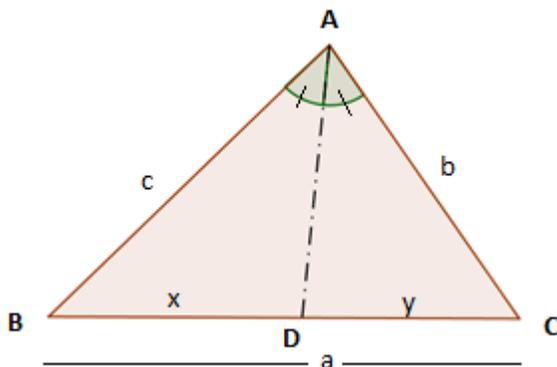
Principais cevianas e pontos notáveis de um triângulo

Definição 65. Uma ceviana de um triângulo é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo à reta suporte do lado oposto a esse vértice.



No triângulo acima o segmento AD é uma ceviana do triângulo ABC .

Definição 66. A bissetriz interna de um triângulo é o segmento, com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.

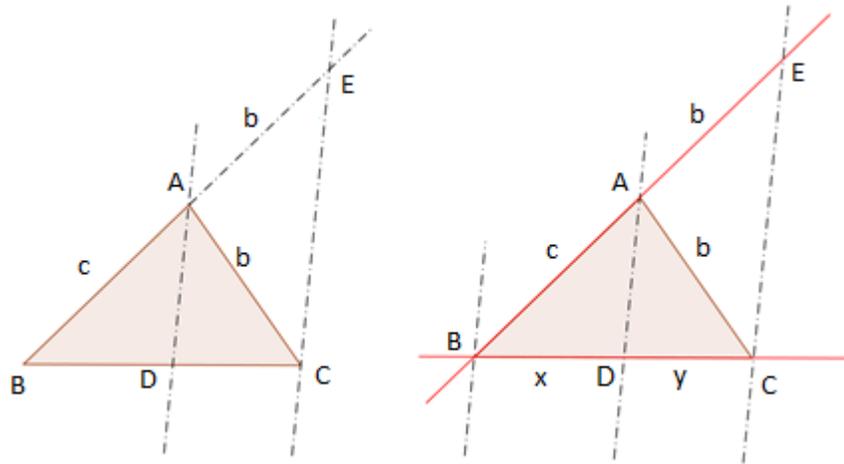


No triângulo acima o segmento AD é a bissetriz do ângulo \hat{A} .

Teorema 67. *Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.*

Demonstração. Queremos mostrar que, dado o triângulo ABC , com na figura acima, seja AD a bissetriz do ângulo \hat{A} , então

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$



Conduzindo por C uma paralela à bissetriz AD , determinamos um ponto E na semirreta S_{BA} tal que r_{CE} é paralela a reta r_{AD} . Desse paralelismo decorre que $B\hat{A}D = A\hat{E}C$ e $D\hat{A}C = A\hat{C}E$.

Como por hipótese $B\hat{A}D = D\hat{A}C$, temos que $A\hat{E}C = A\hat{C}E$. Portanto, o triângulo ACE é isósceles de base CE . Logo, $\overline{AE} = \overline{AC}$.

Considerando r_{AD} como uma reta paralela ao lado CE do triângulo BCE e a nomenclatura usada na imagem a direita temos, segue do teorema 55 (equivalente ao Teorema de Tales para triângulo) que

$$\frac{c+b}{c} = \frac{x+y}{x}$$

logo,

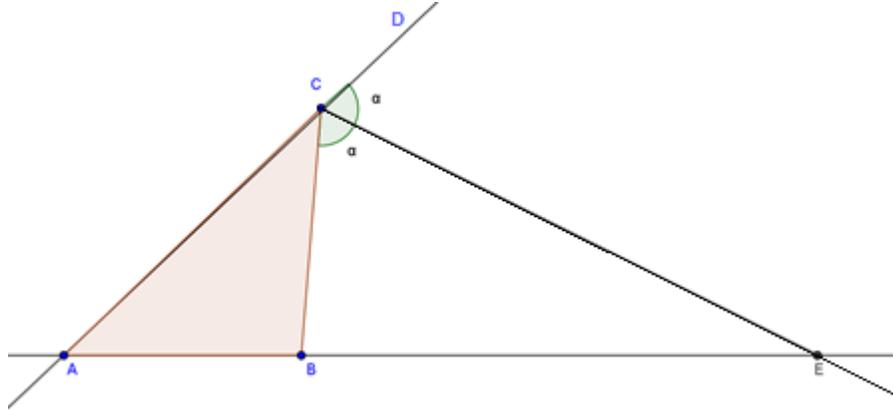
$$\frac{b}{c} = \frac{y}{x}$$

ou seja,

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

□

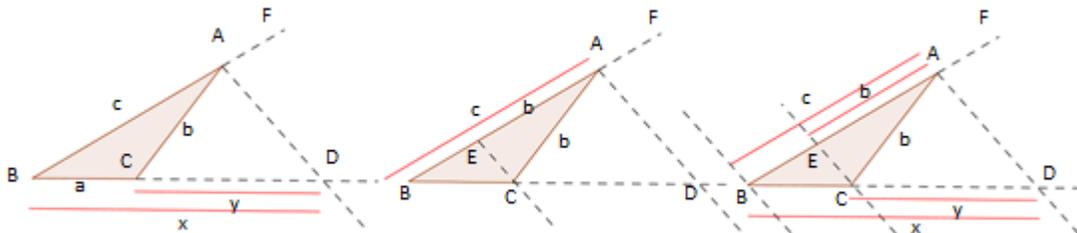
Definição 68. Dado um triângulo ABC chamamos de bissetriz externa relativa ao ângulo \hat{A} a semirreta que divide o ângulo externo adjacente a \hat{A} em dois ângulos iguais. Chamamos de pé da bissetriz externa de \hat{A} a interseção entre a bissetriz externa de \hat{A} e a reta suporte do lado oposto a A .



Observe na imagem o triângulo ABC , a semirreta S_{CE} , com origem no vértice do triângulo e que divide o ângulo externo em dois ângulos congruentes. O segmento CE é a bissetriz externa do ângulo \hat{BCD} , e o ponto E é chamado de pé da bissetriz externa.

Teorema 69. Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos (subtrativos) proporcionais aos lados adjacentes.

Demonstração. Seja ABC um triângulo de lados medindo a, b e c . S_{AD} bissetriz externa de A com D na reta r_{BC} , $\overline{DB} = x$ e $\overline{DC} = y$. O lado $BC = a$ é dividido externamente em segmentos subtrativos, pois $\overline{DB} - \overline{DC} = \overline{BC}$, ou seja, $x - y = a$. Queremos mostrar que $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$.



Conduzindo por C uma paralela à bissetriz externa S_{AD} , determinamos um ponto E na reta r_{AB} , tal que $r_{CE} // r_{AD}$. Desse paralelismo decorre $\hat{D}\hat{A}\hat{F} = \hat{A}\hat{E}\hat{C}$ e $\hat{C}\hat{A}\hat{D} = \hat{A}\hat{C}\hat{E}$, onde F é um ponto de S_{BA} tal que A está entre B e F . Como por hipótese, $\hat{C}\hat{A}\hat{D} = \hat{D}\hat{A}\hat{F}$, temos que $\hat{A}\hat{E}\hat{C} = \hat{A}\hat{C}\hat{E}$.

De $\hat{A}\hat{E}\hat{C} = \hat{A}\hat{C}\hat{E}$ temos que o triângulo ACE é isósceles de base CE , logo, $\overline{AE} = \overline{AC}$, ou seja, $AE = b$. Considerando r_{EC} paralela ao lado AD do triângulo BDA , segue do teorema 55 que

$$\frac{BA}{BE} = \frac{BD}{BC},$$

ou seja,

$$\frac{c}{c-b} = \frac{x}{x-y} \equiv \frac{c}{b} = \frac{x}{y}$$

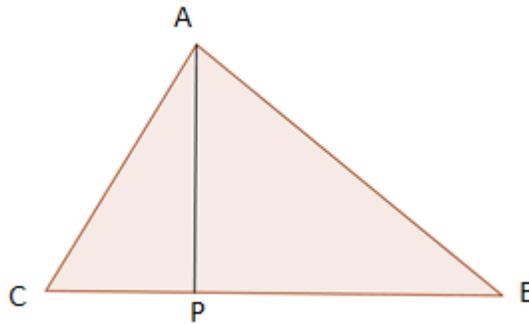
logo,

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

□

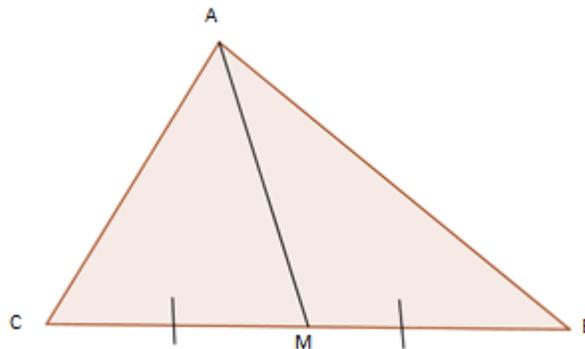
Observação 70. Se o triângulo ABC é isósceles de base BC , então a bissetriz do ângulo externo em A é paralela à base BC e reciprocamente.

Definição 71. A altura de um triângulo é o segmento com extremidade num dos vértices e na reta suporte do lado oposto, fazendo um ângulo reto com essa reta.



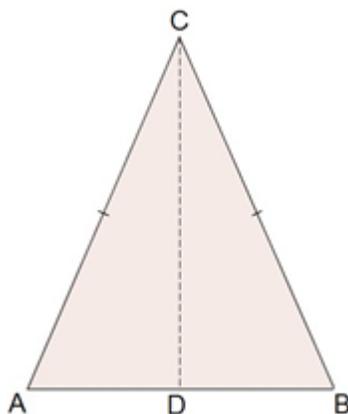
No triângulo acima o segmento AP é altura do triângulo ABC em relação ao lado BC e os ângulos $C\hat{P}A$ e $B\hat{P}A$ são retos.

Definição 72. A mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num dos vértices e no ponto médio do lado oposto.



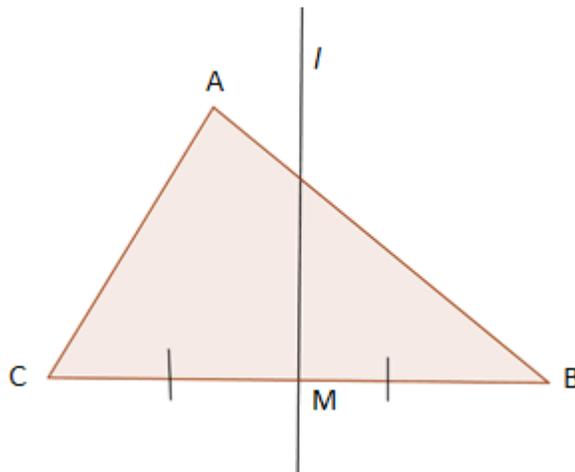
No triângulo acima o segmento AM é uma mediana do triângulo ABC em relação ao lado BC .

Proposição 73. Em um triângulo isósceles a mediana relativamente a base é também bissetriz e altura.



Demonstração. Seja ABC um triângulo isósceles cuja base é AB . Seja CD sua mediana relativamente à base. Deve-se provar que $\hat{A}CD = \hat{B}CD$ e que $\hat{A}DC$ é um ângulo reto. Para isto, considere os triângulos ADC e BDC . Como $AD = BD$ (já que CD é mediana), $AC = BC$ (já que o triângulo é isósceles com base AB) e $\hat{A} = \hat{B}$ (pois os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes), então, pelo caso de congruência LAL , tem-se $ADC = BDC$. Segue-se, daí, que $\hat{A}CD = \hat{B}CD$ e $\hat{C}DA = \hat{B}DC$. A primeira congruência nos diz que CD bissetriz do ângulo $\hat{A}CB$. Como $\hat{A}DB$ é um ângulo raso e $\hat{C}DA + \hat{B}DC = \hat{A}DB$, então $\hat{C}DA + \hat{B}DC = 180^\circ$. Como já sabemos que $\hat{C}DA = \hat{B}DC$, então concluímos que $\hat{C}DA = \hat{B}DC = 90^\circ$. Portanto, CD é perpendicular a AB , e portanto, altura. Isto conclui a prova da proposição. \square

Definição 74. A mediatriz de um segmento é a reta formada por todos os pontos equidistantes às extremidades do segmento. Como cada lado do triângulo é um segmento de reta, em todos os triângulos há três mediatrizes, uma relativa a cada um dos lados.



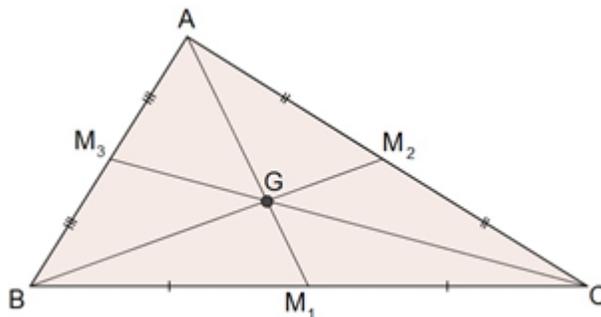
No triângulo acima, a reta l é mediatriz do triângulo ABC em relação ao lado BC .

Atentamos que a mediatriz de um triângulo não é uma ceviana. Ao definirmos bissetriz interna do triângulo como segmento e a bissetriz externa como semirreta, vimos que a bissetriz interna é uma ceviana, entretanto a bissetriz externa não é.

5.1 Pontos notáveis de um triângulo

Esse tópico contém as definições dos pontos notáveis de um triângulo e as demonstrações da existência de unicidade de cada um deles.

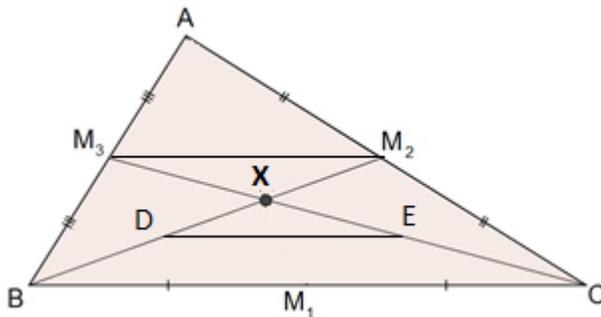
Definição 75. O ponto de interseção das três medianas de um triângulo é denominado baricentro G do triângulo.



Proposição 76. As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

Demonstração. Dados o triângulo ABC , com as notações da figura acima, queremos mostrar que AM_1 , BM_2 e CM_3 se encontram no ponto G , baricentro do triângulo, e $AG = 2.GM_1$, $BG = 2.GM_2$ e $CG = 2.GM_3$. Para isso, tome X em BM_2 tal que BM_2 e CM_3 se encontrem em X .

Considerando os pontos médios D e E de BX e CX , respectivamente, no triângulo ABC temos: $AM_3 = BM_3$ e $AM_2 = CM_2$, logo M_2M_3 é paralelo a BC e $M_2M_3 = \frac{BC}{2}$, pelo teorema da base média.



Da mesma forma, no triângulo XBC temos: $XD = BD$ e $XE = CE$, logo DE é paralelo a BC e $DE = \frac{BC}{2}$.

Portanto, M_2M_3 é paralelo a DE e $M_2M_3 = DE$, de onde M_2M_3DE é paralelogramo e, portanto, $DX = XM_2$ e $EX = XM_3$, de onde conclui que $BX = 2XM_2$ e $CX = 2XM_3$.

Logo, a mediana BM_2 , intercepta a mediana CM_3 , num ponto X tal que:

$$CX = 2XM_3.$$

Tomando-se as medianas AM_1 e CM_3 e sendo Y o ponto de interseção entre elas, de modo análogo concluímos que $CY = 2YM_3$ e $AY = 2YM_1$.

De $CX = 2XM_3$ e $CY = 2YM_3$, decorre que $X = Y$.

Chamando esse ponto $X = Y$ de G , temos que as medianas do triângulo ABC se encontram em G e, $AG = 2GM_1$, $BG = 2GM_2$ e $CG = 2GM_3$, como queríamos demonstrar. \square

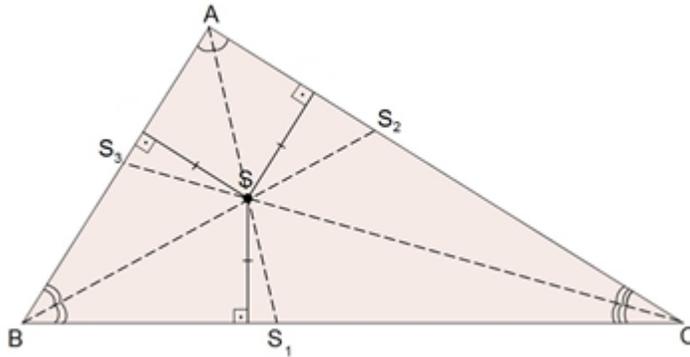
O fato de que as diagonais de um paralelogramo se interceptam no ponto médio decorre da semelhança entre os triângulos formados por elas, já que os lados opostos de um paralelogramo são iguais e o paralelismo resulta em ângulos iguais.

Definição 77. O ponto de interseção das três bissetrizes internas de um triângulo é denominado incentro S do triângulo.

Proposição 78. As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.

Demonstração. Seja ABC um triângulo e AS_1 , BS_2 e CS_3 as bissetrizes internas do triângulo. Queremos mostrar que AS_1 , BS_2 e CS_3 se encontram em um ponto S e $d(S, AB) = d(S, AC) = d(S, BC)$.

Seja S o ponto de encontro de BS_2 e CS_3 . De $S \in BS_2$ segue, do caso de congruência ALA , que $d(S, BC) = d(S, AB)$. De $S \in CS_3$ segue que $d(S, BC) = d(S, AC)$. Logo, $d(S, AC) = d(S, AB)$, e ainda, $S \in AS_1$. \square

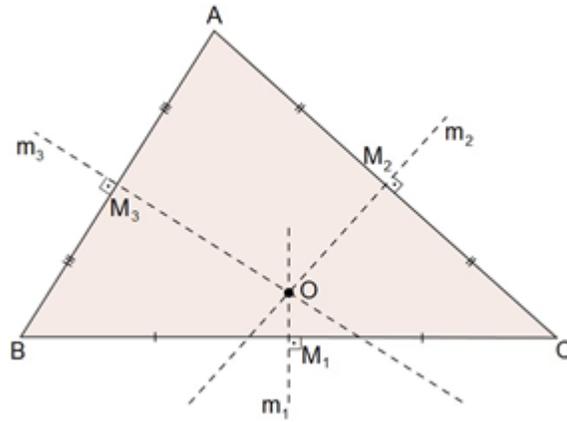


Definição 79. O ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo é denominado circuncentro O do triângulo.

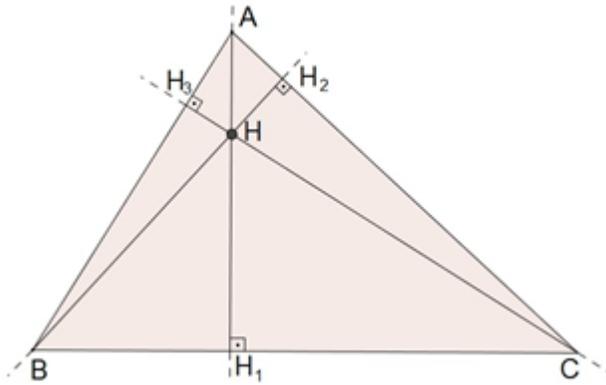
Proposição 80. As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

Demonstração. Seja ABC um triângulo e m_1 , m_2 e m_3 as mediatrizes de BC , AC e AB , respectivamente. Queremos mostrar que as mediatrizes se encontram em um ponto O e $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.

Para isso, tome O o ponto de interseção entre m_2 e m_3 . De $O \in m_2$ segue, do caso de congruência LAL , que $\overline{OA} = \overline{OC}$. De $O \in m_3$ segue que $\overline{OA} = \overline{OB}$. Logo, $\overline{OB} = \overline{OC}$ e ainda, $O \in m_1$. \square



Definição 81. O ponto de interseção das retas suportes das alturas de um triângulo é denominado ortocentro H do triângulo.



Proposição 82. As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

Demonstração. Dado um triângulo ABC , sejam AH_1 , BH_2 e CH_3 as alturas desse triângulo. Pelos vértices A , B e C do triângulo conduzimos retas paralelas aos lados opostos, obtendo o triângulo MNP . Logo, $A \in NP$ e NP é paralelo a BC , $B \in MP$ e MP é paralelo a AC e $C \in MN$ e MN é paralelo a AB . Portanto, $APBC$ e $ABCN$ são paralelogramos, conseqüentemente $AP = BC$ e $AN = BC$. Concluímos que A é ponto médio de NP . (1)

Como a reta r_{AH_1} é perpendicular a BC e NP é paralelo a BC , temos que a reta r_{AH_1} é perpendicular a NP . (2)

De (1) e (2) conclui-se que a reta r_{AH_1} é mediatriz de NP .

Analogamente, a reta r_{BH_2} é mediatriz de MP e a reta r_{CH_3} é mediatriz de MN .

Logo, considerando o triângulo MNP , as mediatrizes AH_1 , BH_2 e CH_3 , dos lados do triângulo interceptam-se num ponto H , como queríamos demonstrar. \square

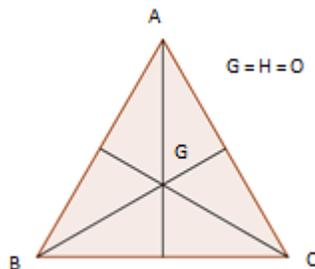
5.2 A reta de Euler

Definição 83. A reta de Euler é uma relação entre os chamados “pontos notáveis” de um triângulo. O Circuncentro, o Baricentro e o Ortocentro de um triângulo qualquer. A reta que passa por esses três pontos é chamada Reta de Euler do triângulo ABC .

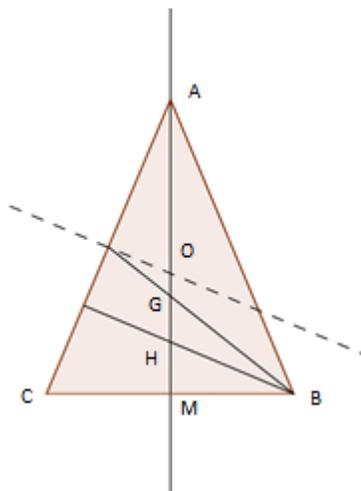
Essa colinearidade está representada no teorema a seguir.

Teorema 84. *Em um triângulo ABC qualquer, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro são colineares. O baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro.*

Demonstração. A prova deste teorema vale para um triângulo qualquer. Entretanto, é importante observarmos que: No caso do triângulo ABC ser equilátero, medianas, alturas e mediatrizes coincidem, consequentemente, os três pontos G , H e O também irão se coincidir. Como para se definir uma reta são necessários dois pontos distintos, em um triângulo equilátero a Reta de Euler não está definida.

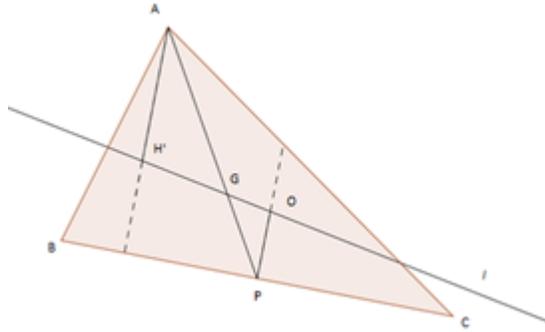


Para triângulos isósceles, temos que a mediana, mediatriz e altura relativa à base são coincidentes, logo, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro pertencem a um mesmo segmento. Assim, a reta que contém esse segmento é a Reta de Euler do triângulo.



Por simplicidade na demonstração utilizamos um triângulo acutângulo para garantirmos que os três pontos, citados acima, são internos ao triângulo. No entanto a prova é análoga para um triângulo obtusângulo, ou mesmo retângulo.

Considere então, um triângulo ABC de baricentro G e circuncentro O , pontos distintos, pois a mediana é distinta da bissetriz. Seja l , a reta determinada pelos pontos G e O . Seja H' um ponto pertencente a semirreta S_{OG} tal que $GH' = 2GO$ e P o ponto médio do lado BC . Considere a mediana e a mediatriz relativas ao lado BC .

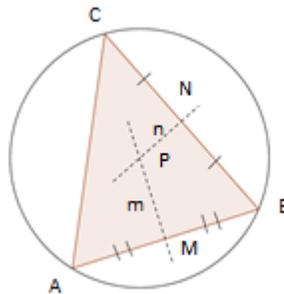


Os triângulos $GH'A$ e GOP são semelhantes pelo caso LAL de semelhança, já que $GH' = 2GO$ por construção, $\widehat{AGH'} = \widehat{AGO}$ por serem opostos pelo vértice e $AG = 2GO$ pela propriedade do baricentro. Logo, seus ângulos correspondentes $\widehat{AH'G}$ e \widehat{POG} são congruentes. Assim, a reta suporte que contém o segmento AH' é paralela à mediatriz OP e conseqüentemente, H' é um ponto pertencente a altura relativa ao lado BC . De forma análoga, tomando a mediana e a mediatriz relativas ao lado AC , mostra-se que H' é um ponto pertencente a altura relativa ao lado AC . Como H' é a interseção de duas alturas do triângulo ABC temos que $H' = H$ (ortocentro). Concluímos assim que, o circuncentro O , o baricentro G e o ortocentro H são colineares e a reta l é a Reta de Euler do triângulo ABC . Como o ortocentro de um triângulo é único, por construção temos que, o baricentro estará sempre entre o ortocentro e o circuncentro e $GH = 2GO$. Como queríamos demonstrar. \square

5.3 O triângulo e o círculo

Teorema 85. *Todo triângulo está inscrito em um círculo.*

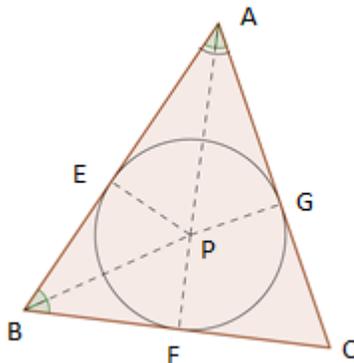
Demonstração. Seja ABC um triângulo. Para mostrar que ele está inscrito em um círculo, devemos exibir um ponto que seja equidistante de A, B e C , assim consideramos esse ponto como centro do círculo e a distância entre esse ponto e cada vértice do triângulo como raio do círculo. Seja m uma reta perpendicular a AB e passando pelo seu ponto médio M e seja n a reta perpendicular a BC e passando pelo seu ponto médio N . Designe por P o ponto de interseção destas duas retas. Observe que todo ponto da reta m é equidistante de A e B , e que todo ponto da reta n é equidistante de B e C . Logo, o ponto P será equidistante de A, B e C . \square



Esta proposição também pode ser enunciada da seguinte maneira: Três pontos não colineares determinam um círculo.

Proposição 86. *Todo triângulo possui um círculo inscrito.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Trace as bissetrizes dos ângulos \hat{A} e \hat{B} . Estas se encontram em um ponto P . Deste ponto, baixe perpendiculares aos lados do triângulo. Sejam E, F e G os pés destas perpendiculares nos lados AB, BC e CA , respectivamente. Vamos provar que $PE = PF = PG$. Assim, o ponto P é o centro de um círculo que passa pelos pontos E, F e G ; além disto, como os lados do triângulo ABC são perpendiculares aos raios PE, PF e PG , eles são também tangentes ao círculo. Logo, o círculo está inscrito no triângulo.

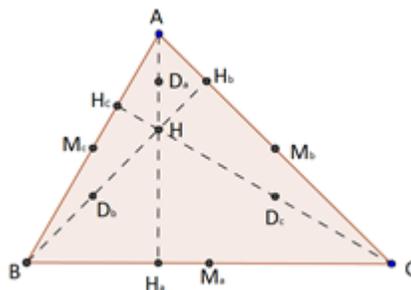


Para provar que $PE = PF = PG$, vamos comparar os triângulos PGA e PEA , e os triângulos PEB e PFB . Todos eles são triângulos retângulos. Nos dois primeiros temos $\hat{PAG} = \hat{PAE}$ (PA é bissetriz) e PA comum. Nos dois últimos temos $\hat{PBE} = \hat{PBF}$ (PB é bissetriz) e PB comum. Portanto, os dois pares de triângulos são congruentes. Da congruência dos dois primeiros, concluímos que $PG = PE$. Da congruência dos dois últimos, obtemos $PE = PF$. Isto completa a demonstração. \square

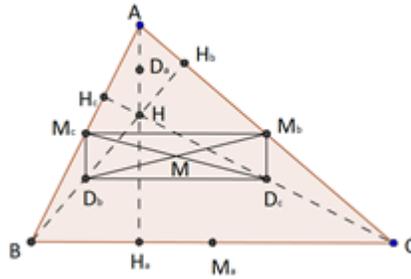
5.4 A circunferência de nove pontos

Teorema 87. *A circunferência que passa pelos pés das perpendiculares baixadas dos vértices de qualquer triângulo sobre os lados opostos a eles, passa também pelos pontos médios dos lados, assim como pelos pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ponto de interseção das perpendiculares.*

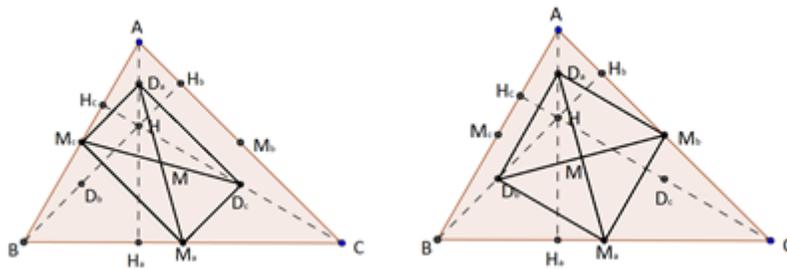
Demonstração. Consideremos o triângulo ABC .



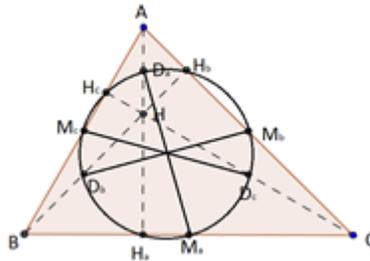
Sejam M_a, M_b e M_c os pontos médios dos lados BC, AC e AB , respectivamente. Sejam H_a, H_b e H_c os pés das alturas relativas aos lados BC, AC e AB , respectivamente, sendo H o ortocentro do triângulo. Sejam D_a, D_b e D_c os pontos médios dos segmentos AH, BH e CH , respectivamente. Vamos mostrar que esses nove pontos estão em uma mesma circunferência. Vamos mostrar inicialmente que o quadrilátero $D_b D_c M_b M_c$ é um retângulo.



De fato, como M_c e M_b são pontos médios dos lados AB e AC do triângulo ABC , resulta que o segmento M_bM_c é paralelo ao segmento BC e $M_bM_c = \frac{1}{2}BC$. Ainda, D_b e D_c são pontos médios dos lados HB e HC do triângulo HBC . Logo resultam segmento D_bD_c paralelo ao segmento BC e $D_bD_c = \frac{1}{2}BC$. Por transitividade, obtemos $M_bM_c = D_bD_c$ e o segmento M_bM_c paralelo ao segmento D_bD_c e portanto $M_cD_bD_cM_b$ é um paralelogramo. Consideremos o triângulo ABH_a . Nele, temos o segmento M_cD_b paralelo ao segmento AH_a e, portanto, o segmento M_cD_b perpendicular ao segmento D_bD_c . Ora, um paralelogramo que possui um ângulo reto é um retângulo. Com isso concluímos que os segmentos M_cD_c e M_bD_b , sendo diagonais de um retângulo, são congruentes e interseccionam-se em seu ponto médio M . Da mesma maneira, se mostra que $M_cM_aD_cD_a$ e $M_aM_bD_aD_b$ são retângulos.



Logo suas respectivas diagonais M_cD_c e M_aD_a e, M_aD_a e M_bD_b são congruentes e interseccionam-se em M . Com isso mostramos que seis dos nove pontos estão na circunferência de diâmetro M_cD_c , por exemplo. Falta mostrar que H_a , H_b e H_c também pertencem a essa circunferência.



Mas isso decorre imediatamente do fato de que $D_bH_bM_b$, $D_cH_cM_c$ e $D_aH_aM_a$ são triângulos retângulos cujas hipotenusas são respectivamente os segmentos D_bM_b , D_cM_c e D_aM_a , todos diâmetros da circunferência determinada, logo H_a, H_b e H_c pertencem a circunferência. \square

Capítulo 6

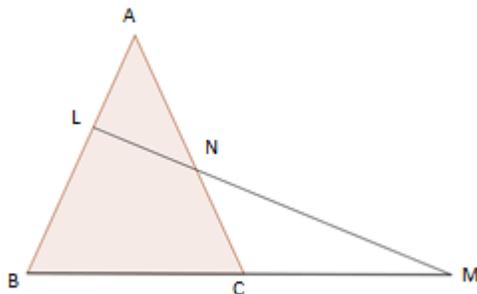
Resultados principais

Apesar de terem demonstração elegante nem alunos nem professores costumam ser apresentados aos Teoremas que compõem este capítulo. O teorema de Menelaus, Ceva e a relação de Stewart são interessantes e úteis na resolução de diversos problemas. Esses teoremas podem ser encontrados em [9].

6.1 Teorema de Menelaus

Esse teorema é uma relação entre as razões produzidas sobre os lados de um triângulo por uma reta transversal.

Teorema 88. *Dado um triângulo ABC uma reta transversal corta as retas suportes dos lados AB , BC e CA nos pontos L , M e N , respectivamente. Então, $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$.*



Demonstração. Trace CP paralela a AB . Usando as semelhanças de triângulos que aparecem na figura acima temos: $\frac{NC}{NA} = \frac{CP}{LA}$ e $\frac{MB}{MC} = \frac{LB}{CP}$. Multiplicando membro a membro e simplificando o termo CP , temos

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{LB}{LA} \implies \frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

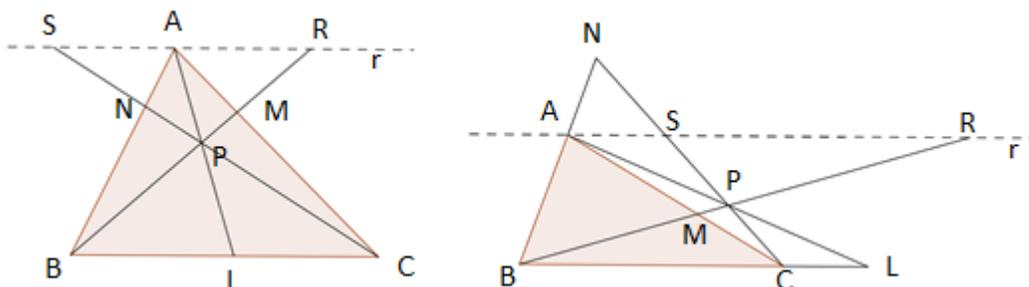
como queríamos demonstrar. □

Esta é a versão simples do teorema, em que não vale a recíproca. A recíproca é verdadeira se considerarmos segmentos orientados, pois dado um número k positivo existem dois pontos D e D' , na reta definida por B e C , um interno e outro externo ao segmento BC , tais que $\frac{BC}{DC} = \frac{BD'}{D'C} = k$.

6.2 Teorema de Ceva

O teorema da Ceva deve ser lembrado sempre que se quiser trabalhar com os segmentos de reta determinados sobre os lados de um triângulo por três cevianas que se interceptam em um mesmo ponto. Esse teorema mostra a condição necessária e suficiente para que cevianas de um triângulo sejam concorrentes.

Teorema 89. *Dado um triângulo ABC , os pontos L, M, N , dos lados AB, BC, CA , respectivamente, são tais que as cevianas AM, BN, CL , cortam-se em um único ponto. Então, $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$.*



Demonstração. Seja r uma reta paralela a BC passando por A , conforme figura acima.

Pelo Caso AA de semelhança de triângulos temos as seguintes semelhanças

$$AMR \sim CMB \implies \frac{MA}{CM} = \frac{AR}{BC} \quad (1)$$

$$BNC \sim ANS \implies \frac{NB}{AN} = \frac{BC}{SA} \quad (2)$$

$$CPL \sim SPA \implies \frac{LC}{SA} = \frac{LP}{AP} \quad (3)$$

$$BPL \sim RPA \implies \frac{BL}{AR} = \frac{LP}{AP} \quad (4)$$

/

De (1) e (2) vem que $\frac{LC}{SA} = \frac{BL}{AR}$ ou ainda, $\frac{LC}{BL} = \frac{SA}{AR}$ (5). Multiplicando membro a membro (1), (2) e (5), obtemos

$$\frac{MA}{CM} \cdot \frac{NB}{AN} \cdot \frac{LC}{BL} = \frac{AR}{BC} \cdot \frac{BC}{SA} \cdot \frac{SA}{AR} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Seja agora, $BM \cap AL = \{P\}$ (veja a figura a direita). Estenda o segmento PC até intersectar r_{AB} em N' . Como AL, BM e CN' são concorrentes, aplicando o que foi provado anteriormente temos

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN'}{N'B} = 1,$$

mas por hipótese,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1,$$

o que implica

$$\frac{AN'}{N'B} = \frac{AN}{NB}.$$

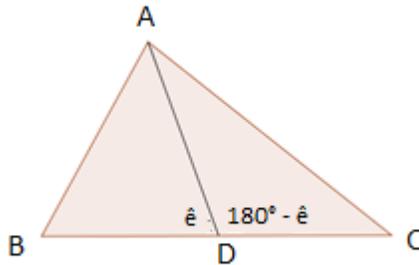
Mas isso só ocorre se, e somente se, $N = N'$. □

6.3 Relação de Stewart

A Relação de Stewart mostra como calcular a distância de um vértice de um triângulo a qualquer ponto da reta que contém o lado oposto.

Proposição 90. *No triângulo ABC seja D um ponto do lado BC . Então,*

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC.$$



Demonstração. Pela lei dos cossenos nos triângulos ADB e ADC relativas ao vértice D , temos:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cdot \cos \hat{e}$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos(180^\circ - \hat{e})$$

Como $\cos \hat{e} = -\cos(180^\circ - \hat{e})$, temos:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cdot \cos \hat{e}$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DC \cdot \cos \hat{e}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\cos \hat{e} &= \frac{-AB^2 + BD^2 + AD^2}{2BD \cdot AD} \\ \cos \hat{e} &= \frac{AC^2 - AD^2 - DC^2}{2AD \cdot DC} .\end{aligned}$$

Igualando as equações anteriores temos

$$\begin{aligned}\frac{-AB^2 + BD^2 + AD^2}{2BD \cdot AD} &= \frac{AC^2 - AD^2 - DC^2}{2AD \cdot DC} \\ \frac{-AB^2 + BD^2 + AD^2}{BD} &= \frac{AC^2 - AD^2 - DC^2}{DC} \\ -AB^2 \cdot DC + BD^2 \cdot DC + AD^2 \cdot DC &= AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BD - DC^2 \cdot BD \\ AD^2 (DC + BD) + DC \cdot BD (BD + DC) &= AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD.\end{aligned}$$

Como $BD + DC = BC$, segue

$$AD^2 \cdot BC + DC \cdot BD \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD$$

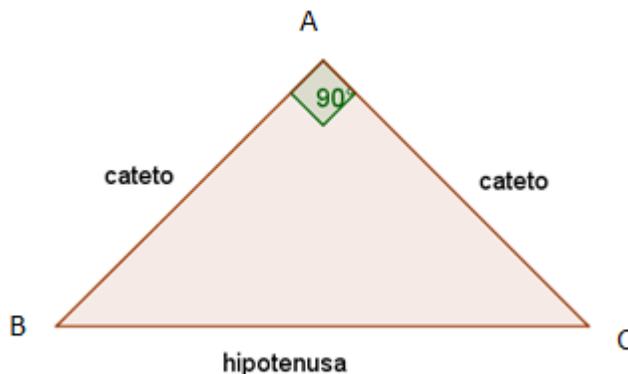
como queríamos demonstrar. □

Capítulo 7

Triângulo retângulo

O triângulo retângulo, tema desse capítulo, já era conhecido pelos babilônios antigos. Muitos tabletes de barro datados do período de 1800 a 1600 a.C. foram encontrados, decifrados e hoje se encontram em diversos museus. Não há nos tabletes nenhuma demonstração dos resultados relacionados ao triângulo retângulo, pois esta não era a preocupação dos matemáticos da época. Entretanto, diversas demonstrações surgiram de matemáticos que vieram depois dos babilônios.

Definição 91. Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado triângulo retângulo. O lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa, e os outros dois lados são denominados catetos.



Resultados decorrentes dos capítulos anteriores:

- 1) Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e um dos ângulos de um triângulo retângulo mede 90° , a soma dos outros dois ângulos é igual a 90° , e portanto, esses ângulos são agudos.
- 2) Como o maior ângulo de um triângulo é oposto ao maior lado, e o maior ângulo de um triângulo retângulo é o ângulo de 90° , temos que a hipotenusa é o maior lado.
- 3) Pela desigualdade triangular, a hipotenusa é menor que a soma dos catetos.
- 4) Quanto a semelhança e congruência de triângulos retângulos, é importante observar que os ângulos retos devem ser correspondentes.

7.1 Congruência de triângulos retângulos

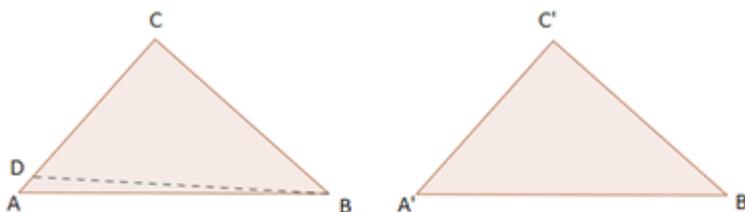
Teorema 92. *Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são \hat{C} e \hat{C}' . Se alguma das condições abaixo ocorrer, então, os dois triângulos são congruentes:*

$$\overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ e } \hat{A} = \hat{A}' \text{ (cateto e ângulo oposto),}$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \text{ e } \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ (hipotenusa e cateto) e}$$

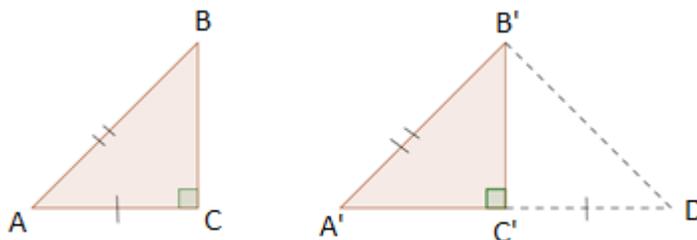
$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \text{ e } \hat{A} = \hat{A}' \text{ (hipotenusa e ângulo).}$$

Demonstração. Caso 1) Nossas hipóteses são, neste caso, as seguintes: $\hat{C} = \hat{C}'$ (reto), $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\hat{A} = \hat{A}'$. Observe que, apesar de termos informações sobre dois ângulos e um lado, não podemos aplicar o caso *ALA* de congruência de triângulos. Para provar que ABC e $A'B'C'$ são congruentes, marque um ponto D sobre a semirreta S_{CA} de sorte que $\overline{CD} = \overline{C'A'}$. Os triângulos CDB e $C'A'B'$ são, então, congruentes, pelo primeiro caso de congruência.



Como consequência, tem-se que $\hat{CDB} = \hat{A}'$. Desde que $\hat{CAB} = \hat{A}'$ (por hipótese), concluímos que $\hat{CDB} = \hat{CAB}$. Afirimo que os pontos A e D coincidem. De fato, se tal não ocorrer, A , D e B formam um triângulo em que os ângulos \hat{CDB} e \hat{CAB} são ângulo externo e interno não adjacentes. Portanto, a igualdade acima não pode ocorrer de acordo com o teorema do ângulo externo. Então A e D coincidem e logo $\hat{CAB} = \hat{CDB}$. Como $\hat{CDB} = \hat{C'A'B'}$, concluímos que $\hat{CAB} = \hat{C'A'B'}$, como queríamos demonstrar.

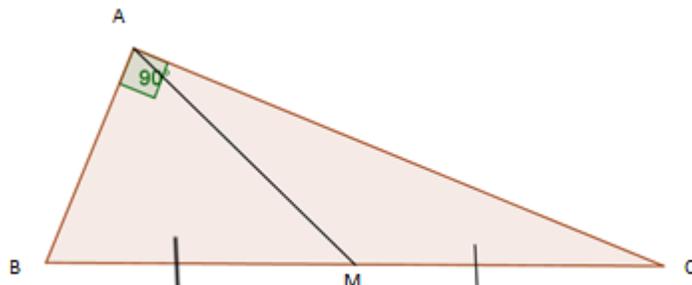
Caso 2) Nossas hipóteses são, neste caso, as seguintes: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$. Tomemos o ponto D na semirreta oposta à semirreta $S_{C'A'}$ tal que $\overline{C'D} = \overline{C'A'}$. Como $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\hat{C} = \hat{C}'$ (reto) e $\overline{AC} = \overline{C'D}$, pelo caso *LAL*, os triângulos ABC e $DB'C'$ são congruentes, portanto, $\overline{BA} = \overline{B'D}$ e $\hat{A} = \hat{D}$. De $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BA} = \overline{B'D}$ segue que, $\overline{A'B'} = \overline{B'D}$ e portanto, o triângulo $A'B'D$ é isósceles de base $A'D$, logo $\hat{A}' = \hat{D}$. De $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{A}' = \hat{D}$ concluímos que $\hat{A} = \hat{A}'$. Por $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$, resulta, pelo caso *LAAO*, que $ABC = A'B'C'$, como queríamos demonstrar.



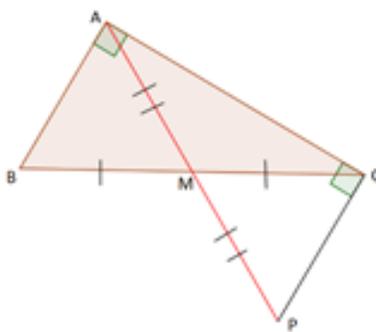
Caso 3) Como dois ângulos do triângulo são congruentes, pela soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180° decorre que o terceiro ângulo também é congruente. Logo, temos pelo caso *ALA* que os triângulos são congruentes. \square

7.2 Resultados decorrentes da perpendicularidade

Proposição 93. *A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.*



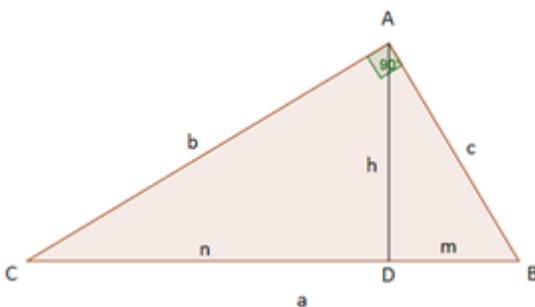
Demonstração. Tome P sobre a semirreta S_{AM} com M entre A e P de modo que $PM = AM$. Considere os triângulos AMB e PMC . Pelo caso LAL , esses são congruentes. Daí tiramos que $\hat{A}BM = \hat{PCM}$. E como estes ângulos são alternos internos, tomando as retas que passam por BA e PC são paralelas. De $BA \parallel PC$ e $\hat{B}AC$ reto, obtemos que \hat{PCA} é reto (colaterais internos). Considere agora os triângulos BAC e PCA . Como $BA = PC$, pois os triângulos AMB e PMC são semelhantes, $\hat{A} = \hat{C}$ (retos) e $AC = CA$ (lado comum), pelo caso LAL os triângulos BAC e PAC são congruentes. Desta congruência concluímos que $AP = BC$ e, como $AP = 2AM$, obtemos $AM = \frac{BC}{2}$. \square



Note ainda que $MA = MB = MC$, o triângulo AMB é isósceles de base AB e o triângulo AMC é isósceles de base AC .

Proposição 94. *(Relações métricas no triângulo retângulo) Em todo triângulo retângulo, a altura do vértice do ângulo reto é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A . Trace a altura AD do vértice A ao lado BC . No que se segue, vamos fazer uso da seguinte notação $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $h = AD$, $m = BD$ e $n = DC$.



Como AD é perpendicular à BC , então, os triângulos ADB e ADC são retângulos. Como $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ e $\hat{B} + \hat{BAD} = 90^\circ$, então, $\hat{BAD} = \hat{C}$. Como também $\hat{DAC} + \hat{C} = 90^\circ$, então, $\hat{DAC} = \hat{B}$. Os triângulos ADB e CAD são, portanto, ambos semelhantes ao triângulo ABC e são também semelhantes entre si. Destas semelhanças, podemos deduzir várias relações entre as medidas a , b , c , h , m e n acima mencionadas.

A semelhança entre ADB e CDA é a que leva A em C , B em A e D em D . Como consequência desta semelhança, tem-se $\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$. Destas igualdades decorrem:

$$\begin{aligned} c \cdot h &= b \cdot m \\ c \cdot n &= b \cdot h \\ m \cdot n &= h^2 \end{aligned}$$

A semelhança entre ABC e DBA é a que leva A em D , B em B e C em A . Como consequência desta semelhança, tem-se $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$. Destas igualdades decorrem:

$$\begin{aligned} a \cdot h &= b \cdot c \\ a \cdot m &= c^2 \\ b \cdot m &= c \cdot h \end{aligned}$$

A semelhança entre ABC e DAC é a que leva A em D , B em A e C em C . Como consequência desta semelhança, tem-se $\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$. Destas igualdades decorrem:

$$\begin{aligned} a \cdot n &= b^2 \\ a \cdot h &= b \cdot c \\ b \cdot h &= c \cdot n \end{aligned}$$

Resumindo as relações encontradas, excluindo as repetidas, temos:

$$b^2 = a \cdot n \quad c^2 = a \cdot m \quad h^2 = m \cdot n \quad b \cdot c = a \cdot h \quad b \cdot h = c \cdot n \quad c \cdot h = b \cdot m$$

□

O seguinte teorema é um dos mais importantes e mais úteis teoremas da geometria Euclidiana plana. É conhecido como “teorema de Pitágoras” em homenagem a um grande geômetra da Grécia antiga.

Teorema 95. (*Teorema de Pitágoras*) *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Em termos da notação estabelecida acima, o Teorema de Pitágoras afirma que $a^2 = b^2 + c^2$.

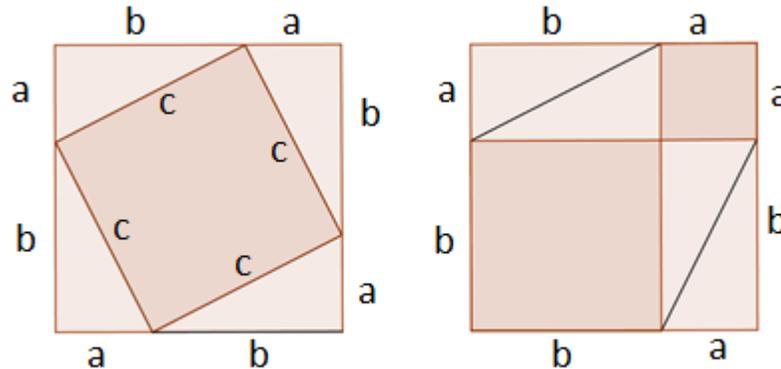
Demonstração. A prova do teorema de Pitágoras é uma consequência das igualdades $c^2 = a \cdot m$ e $b^2 = a \cdot n$, já que $b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a(m + n) = a \cdot a = a^2$. Portanto, $a^2 = b^2 + c^2$, como queríamos demonstrar. \square

Existem várias demonstrações desse Teorema, não se sabe ao certo qual foi a demonstração dada por Pitágoras, mas acredita-se que foi uma demonstração baseada na comparação de áreas. Essa demonstração pode ser parecida com a que damos abaixo e que é muito encontrada nos livros didáticos atuais. Outras demonstrações são encontradas em [6].

Demonstração. (Outra demonstração) Dado um quadrado de lado $a + b$, retire quatro triângulos retângulos iguais com catetos a e b , como na figura a esquerda, obtendo um quadrado de lado c .

Retirando esses triângulos como na figura a direita, restam dois quadrados, um de lado a e um de lado b . Logo, a área do quadrado de lado c é igual a soma das áreas dos quadrados de lado b e a .

Portanto, $c^2 = a^2 + b^2$, como queríamos demonstrar. \square



A seguinte proposição é inversa do teorema de Pitágoras.

Proposição 96. *Dado um triângulo possuindo lados medindo a, b e c . Se $a^2 = b^2 + c^2$, então, o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede a .*

Demonstração. Construa um triângulo retângulo cujos catetos meçam exatamente b e c . Neste novo triângulo, de acordo com o teorema de Pitágoras, a hipotenusa mede $\sqrt{b^2 + c^2} = a$. Portanto, este novo triângulo (que é retângulo) tem lados medindo a, b e c . Pelo terceiro caso de congruência, ele é, portanto, congruente ao triângulo original. Logo, o triângulo original é retângulo e sua hipotenusa mede a . \square

Capítulo 8

Área e outros resultados de polígono

A noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas:

Axioma 97. *A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.*

Axioma 98. *Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então, sua área é a soma das áreas daquelas regiões.*

Axioma 99. *Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.*

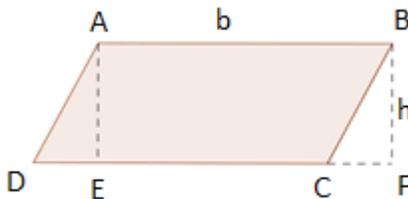
É claro que todo polígono convexo determina uma região poligonal.

Axioma 100. *Se $ABCD$ é um retângulo, então sua área é dada pelo produto $AB \cdot BC$.*

A partir desses axiomas é possível determinar a área de algumas regiões poligonais simples, em particular a área do triângulo, nosso assunto principal, e do paralelogramo, que é de onde decorre a área de um triângulo qualquer.

Definição 101. Dado um paralelogramo $ABCD$, designemos por b o comprimento do lado AB e por h o comprimento de um segmento ligando as retas que contêm os segmentos AB e CD e que seja perpendicular a ambas. Um tal segmento é denominado altura do paralelogramo relativamente ao lado AB .

Proposição 102. *A área do paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.*



Demonstração. Em termos da notação fixada acima, devemos provar que a área do paralelogramo $ABCD$ é $b \cdot h$. Para isto, trace, a partir dos pontos A e B , dois segmentos, AE e BF , perpendiculares à reta que contém CD . O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo cuja área é $AB \cdot BF$, a qual, em termos de nossa notação, é exatamente $b \cdot h$. Para concluir a demonstração, observe que os triângulos ADE e BCF são congruentes e que

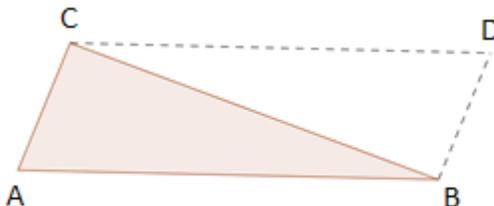
$$\text{Área}_{ABCD} = \text{Área}_{ABCE} + \text{Área}_{ADE} = \text{Área}_{ABCE} + \text{Área}_{CBF} = \text{Área}_{ABFE} = b \cdot h.$$

Isto conclui a demonstração. □

Como corolário desta proposição, determina-se a área de um triângulo qualquer.

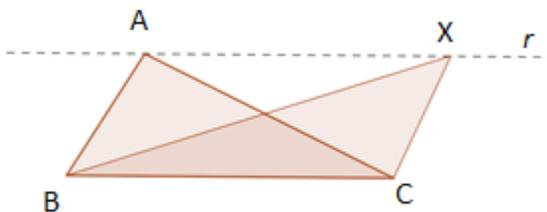
Proposição 103. *A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC , trace pelo vértice C , uma reta paralela ao lado AB , e pelo vértice B uma reta paralela ao lado AC . Estas duas retas se interceptam em um ponto D . O polígono $ABCD$ é um paralelogramo, e os dois triângulos ABC e CDB são congruentes.



Como $\text{Área}_{ABDC} = \text{Área}_{ABC} + \text{Área}_{CDB}$ e $\text{Área}_{ABC} = \text{Área}_{CDB}$, então: $\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2} \text{Área}_{ABDC}$. Para completar a demonstração, observe que a altura do vértice C do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABCD$ relativamente ao lado AB . □

Corolário 104. *Dado um triângulo ABC , qualquer outro triângulo tendo lado BC e o terceiro vértice pertencente à reta r , paralela a BC passando por A , terá área igual à área de ABC .*

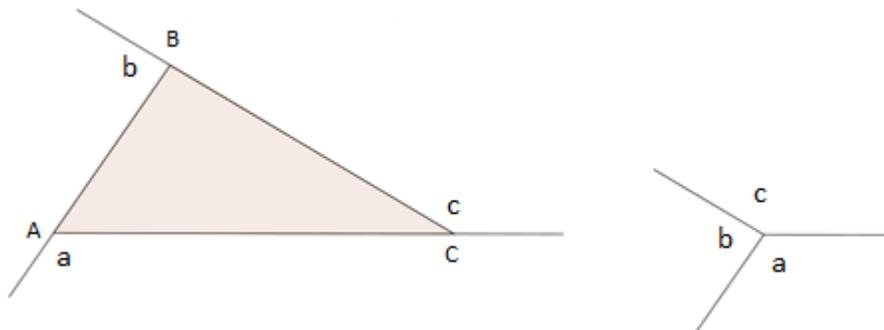


Na figura, a área do triângulo XBC é igual a área do triângulo ABC , para qualquer ponto X de r .

8.1 Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo

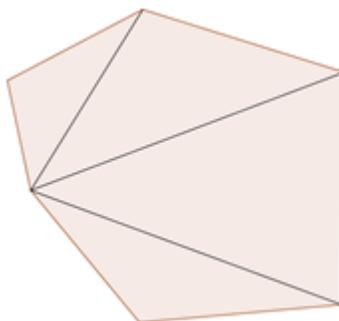
Uma outra maneira de provar a fórmula $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ em um triângulo ABC consiste em considerar primeiro os ângulos externos a, b e c do triângulo dado e que $a + b + c = 2 \cdot 180^\circ$. Como $\hat{A} = 180^\circ - a$, $\hat{B} = 180^\circ - b$ e $\hat{C} = 180^\circ - c$, somando as três igualdades temos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 3 \cdot 180^\circ - (a + b + c) = 3 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = 180^\circ$.

A demonstração de que $a + b + c = 2 \cdot 180^\circ$ se faz fixando um ponto qualquer e , a partir dele, traçando semirretas paralelas aos três lados do triângulo. Elas determinam três ângulos iguais a a, b e c os quais, juntos, dão uma volta completa no plano.



8.2 Soma dos ângulos internos de um polígono

Em seguida, considere a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados. Se ele é convexo, não há dificuldade. A partir de um vértice qualquer, traçamos $n - 3$ diagonais que decompõem o polígono dado em $n - 2$ triângulos justapostos, cuja soma dos ângulos internos é $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Esta é, portanto, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados.



Caso o polígono não seja convexo, a situação requer uma análise mais cuidadosa. Já que não podemos traçar todas as diagonais a partir de um vértice qualquer, pois algumas delas podem ser externas ou podem cortar outros lados do polígono, como exemplificado pela figura abaixo.

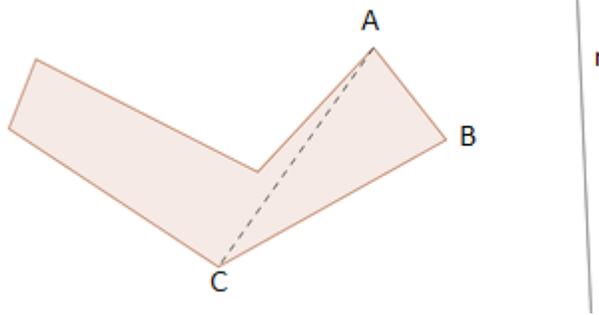


Mostramos abaixo que, mesmo não sendo convexo, qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos adjacentes por meio de diagonais convenientes. O teorema a seguir, que exprime este fato, raramente é demonstrado, embora não seja tão difícil assim.

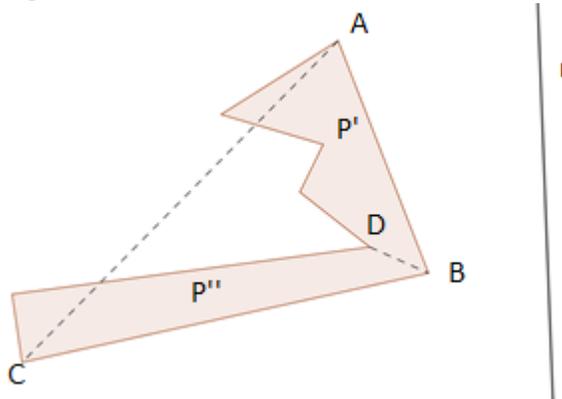
Teorema 105. *Traçando-se diagonais internas que não se cortam, pode-se decompor qualquer polígono em triângulos justapostos.*

Demonstração. Supondo, por absurdo, que o teorema não seja verdadeiro, podemos achar um polígono P , com n lados, o qual não pode ser decomposto em triângulos na forma estipulada pelo enunciado. Escolhemos P de modo que o número n seja o menor possível. Tomamos uma reta r que não intercepte P . Chamamos de B o vértice de P situado à menor distância de r . Sejam A e C os vértices adjacentes a B . Há dois casos possíveis:

Primeiro caso: A, B e C são os únicos vértices do polígono P contidos no triângulo ABC . Neste caso, o polígono P' , obtido de P substituindo-se os lados AB e BC por AC , tem $n - 1$ lados. Como n é o menor número de lados para o qual o teorema não vale, P' pode ser decomposto em triângulos na forma do enunciado. Acrescentando-se a P' o triângulo ABC , obtemos uma decomposição de P da forma requerida. Isto contradiz que o teorema seja falso para P e conclui a demonstração deste caso.



Segundo caso: O triângulo ABC contém outros vértices do polígono P além de A, B e C . Dentre eles, seja D o mais distante do lado AC . Então a diagonal DB não pode conter outros vértices de P além de D e B . Essa diagonal, portanto, decompõe P em dois polígonos adjacentes P' e P'' , que se decompõem em triângulos justapostos, na forma do enunciado. Juntando essas decomposições com DB , obtemos uma decomposição de P . Contradição. Isto prova o segundo caso.



□

Teorema 106. *Quando, traçando diagonais internas que não se cortam, um polígono P de n lados é decomposto em triângulos justapostos, o número de triângulos é sempre $n - 2$ e o número de diagonais é $n - 3$.*

Demonstração. Supondo, por absurdo, que o teorema seja falso, considere P um polígono com o menor número n de lados para o qual o teorema não seja válido. Então P decompõe-se, por meio de d diagonais internas, em t triângulos justapostos, com $d \neq n - 3$ ou $t \neq n - 2$. Tomemos uma dessas diagonais. Ela decompõe P em dois polígonos adjacentes P' e P'' , com n' e n'' lados respectivamente. Como $n' < n$ e $n'' < n$, o teorema se aplica a P' e P'' com o número correto de triângulos e diagonais. Levando em conta que $n = n' + n'' - 2$, que $t = t' + t''$ e que $d = d' + d'' + 1$, as relações $t' = n' - 2$, $d' = n' - 3$, $t'' = n'' - 2$ e $d'' = n'' - 3$ implicam imediatamente que $t = n - 2$ e $d = n - 3$. Esta contradição prova o teorema. \square

Corolário 107. *A soma dos ângulos internos de qualquer polígono simples de n lados é igual a $(n - 2) \cdot 180^\circ$.*

Demonstração. Com efeito, o polígono decompõe-se em $n - 2$ triângulos justapostos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é 180° . \square

Corolário 108. *A soma dos ângulos externos de qualquer polígono é $2 \cdot 180^\circ$.*

Demonstração. Em um polígono convexo, um ângulo externo é o suplemento do ângulo interno que tem o mesmo vértice, temos que $\beta = 180^\circ - \alpha$, onde β é o ângulo externo relativo a α .

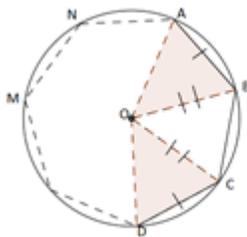
Se o polígono não é convexo, ele possui vértices reentrantes. O ângulo interno α num desses vértices reentrantes é maior do que 180° . O ângulo externo β ainda é formado por uma lado de α e o prolongamento do outro. Entretanto, a fim de que continue valendo a igualdade $\beta = 180^\circ - \alpha$, o ângulo externo β , num vértice reentrante de um polígono não-convexo, deve ter por medida um número negativo, pois $\alpha > 180^\circ$ implica $\beta = 180^\circ - \alpha < 0$.

Dada esta explicação, seja S a soma dos ângulos externos de um polígono de n lados. A soma dos ângulos internos sendo $(n - 2) \cdot 180^\circ$ e cada um dos n ângulos externos sendo o suplemento do ângulo interno correspondente, temos $S = (n + 2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ$ e daí $S = 2 \cdot 180^\circ$. \square

Observação 109. Se o polígono for regular, a medida de seu ângulo interno é dada por $a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$, a medida de seu ângulo externo é dada por $a_e = \frac{2 \cdot 180^\circ}{n}$ e ainda, $a_i + a_e = 180^\circ$.

Teorema 110. *Todo polígono regular é inscritível numa circunferência.*

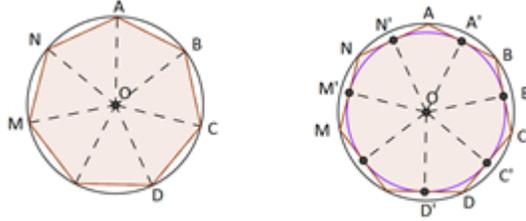
Demonstração. Seja $ABCD\dots MN$ o polígono.



Pelos pontos A, B e C tracemos a circunferência α e seja O o seu centro. Provemos que α passa pelos seus vértices $D, E, \dots M$ e N do polígono. Começemos provando que $D \in \alpha$. Considere os triângulos OBA e OCD . Estes triângulos são congruentes pelo caso LAL , pois $AB = CD$ (lados do polígono regular), $OB = OC$ (raios da circunferência) e considerando o triângulo isósceles BOC (ângulos da base congruentes) e, ainda, que os ângulos \hat{B} e \hat{C} do polígono são congruentes, por diferença decorre que $O\hat{B}A = O\hat{C}D$. Daí, o triângulo OBA é congruente ao triângulo OCD e, portanto, $AO = OD$, e conseqüentemente $D \in \alpha$. De modo análogo temos que $E \in \alpha$ (basta considerar os triângulos OCB e ODE), $M \in \alpha$ e $N \in \alpha$, e o polígono $ABCD\dots MN$ é inscrito na circunferência α . Da unicidade da circunferência que passa por A, B e C sai a unicidade de α por A, B, C, D, \dots, M e N . \square

Teorema 111. *Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.*

Demonstração. Sejam $ABCD\dots MN$ o polígono regular. Em vista do teorema anterior, ele é inscrito numa circunferência α . Seja O o centro dessa circunferência.



Os lados $AB, BC, CD, \dots, MN, NA$ são cordas congruentes de α , por isso distam igualmente do centro O . Sendo $A', B', C', D', \dots, M', N'$ os respectivos pontos médios dos lados $AB, BC, CD, \dots, MN, NA$, temos $OA' = OB' = OC' = OD' = \dots = OM' = ON'$ (distância do centro as cordas congruentes). Donde se conclui que O é o centro de uma circunferência α' que passa pelos pontos $A', B', C', D', \dots, M'$ e N' . E ainda, sendo AO' perpendicular a AB , OB' perpendicular a BC , OC' perpendicular a CD , OD' perpendicular a DE , ..., OM' perpendicular a MN , ON' perpendicular a NA , temos que $ABCD\dots MN$ tem lados tangentes a α' . Concluímos assim, que o polígono regular $ABCD\dots MN$ é circunscrito à circunferência α' . A unicidade de α' decorre do fato de que se existisse outra circunferência inscrita no polígono $ABCD\dots MN$, ela passaria pelos pontos A', B', C', \dots e seria, então, coincidente com α' . \square

Observação 112. As circunferências inscritas e circunscritas a um polígono regular são concêntricas.

8.3 Considerações finais

Esperamos que o presente trabalho sirva de referência para pesquisa de alunos e professores. Que os professores não se furtem de apresentar demonstrações para seus alunos, certos de que a apresentação das mesmas visa a melhorar a qualidade da aprendizagem da Geometria.

Como o exposto no trabalho acreditamos ter alcançado os objetivos do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), para o qual é apresentado como produto, que “visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente e tem como missão ‘*Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis*’.” (PROFMAT)

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J. L. M. (1984). Geometria Euclidiana Plana. 11. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2012. 273 p. (Coleção do Professor de Matemática; 11)
- [2] BARBOSA, J. L. M. Geometria Hiperbólica. Rio de Janeiro, IMPA, 2009. 167 p. (Publicações Matemáticas)
- [3] DOLCE, O. POMPEO, J. N. (1938). Fundamentos da Matemática Elementar. Vol. 9. Geometria Plana. 7. ed. São Paulo, Editora Atual, 1993.
- [4] EVES, H. (2004). Tradução: DOMINGUES, H. H. Introdução à História da Matemática. Campinas, SP, Editora da Unicamp, 2008.
- [5] ROQUE, T. CARVALHO, J. B. P. Tópicos de História da Matemática. Rio de Janeiro, SBM, 2012. 467 p. (Coleção PROFMAT; 03)
- [6] HELLMEISTER, A. C. P. (Coordenadora) Geometria em Sala de Aula. Rio de Janeiro, SBM, 2013. 552 p. (Coleção do Professor de Matemática; 32)
- [7] LIMA, E. L. (2001). Matemática e Ensino. 3. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática)
- [8] REZENDE, E. Q. F. QUEIROZ, M. L. B. (2000) Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas. 2. ed. Campinas, SP, Editora da Unicamp, 2008.
- [9] NETO, A. C. M. Geometria. Rio de Janeiro, SBM, 2013. 502 p. (Coleção PROFMAT)
- [10] PROFMAT. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <<http://www.profmatt-sbm.org.br/organizacao/apresentacao>> Acesso 18 de abril 2015.
- [11] KUBRUSLY, R. S. Uma viagem informal ao Teorema de Gödel. Disponível em: <<http://im.ufrj.br/~risk/diversos/godel.html>> Acesso em 13 de maio de 2015.