Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Aplicações e resoluções de problemas como metodologia para o ensino de Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes.

Aliprecídio José de Siqueira Filho

Teresina - 2013

Aliprecídio José de Siqueira Filho

Dissertação de Mestrado:

Aplicações e resoluções de problemas como metodologia para o ensino de Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes.

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Newton Luís Santos

Teresina - 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Serviço de Processamento Técnico

S618a Siqueira Fillho, Aliprecídio José de
Aplicações e resoluções de problemas como metodologia para o ensino de matrizes, sistemas lineares e determinanes / Aliprecídio José de Siqueira Fillho. --2013.
66f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.
Orientação: Prof. Dr. Newton Luis Santos.

1. Matrizes. 2. Sistemas Lineres. 3. Determinantes. I. Título.

CDD: 512.5

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à Coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, intitulada **"Aplicações e resoluções de problemas como metodologia para o ensino de matrizes, sistemas lineares e determinantes"**, defendida por **ALIPRECÍDIO JOSÉ DE SIQUEIRA FILHO** em **12/04/2013** e aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Newton L. Santos

Prof. Dr. Newton Luiz Santos (UFPI)
Presidente da Banca Examinadora

Jefferson Cruz dos Santos Leite

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite (UFPI)
Examinador

Arnaldo Silva Brito

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito (UESPI)
Examinador

3.jpg

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder a vida e pela oportunidade de participar do curso de mestrado em Matemática.

Agradeço aos meus pais, José de Siqueira Madeira e Hilda Pereira Madeira, por me oportunizar a busca do conhecimento formal, mesmo que para isso tivessem que abrir mão muitas vezes de realizações pessoais.

Agradeço a minha família: Neta, Marcos Luan e Hilbenia Luanne que de forma direta ou indireta muito contribuíram para conclusão do mestrado.

Agradeço, de modo especial, à minha esposa Neta Bueno que durante os dois anos do curso teve muita paciência e compreensão pela ausência que se fazia necessário e acima de tudo pelo apoio que de muito me foi fortalecedor nessa longa caminhada.

Agradeço a meus irmãos e sobrinhos pela preocupação que tiveram comigo durante o curso, principalmente pelo deslocamento.(Floriano - Teresina)

Agradeço aos meus colegas de curso pelas contribuições que fizeram com as resoluções de problemas, de modo especial aos meus amigos Fábio Barbosa e Alberto.

Agradeço aos professores e em especial o meu orientador Professor Dr. Newton Luís Santos, pela paciência e dedicação que tiveram durante o curso.

Agradeço a UFPI por acreditar e fazer essa grande parceria com o PROFMAT.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq e a SEDUC-PI) pelo apoio financeiro.

“É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas.".

George Polya.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar os conteúdos de matrizes, sistemas lineares e determinantes aos professores de Matemática do Ensino Médio, dando ênfase às situações problemas e aplicações que relacionam os conteúdos com situações práticas do dia a dia ou com aplicações, como uma opção de metodologia de ensino. Dessa forma pode-se despertar a curiosidades dos alunos possibilitando aos mesmos uma oportunidade para discussão e exploração dos conteúdos a partir da resolução de problemas. Para tanto, apresentaremos exemplos de aplicações do método para resolução de problemas desenvolvido por George Polya.

Palavras-chave: Matrizes; Sistemas Lineares; Determinantes; Aplicações; Resolução de Problemas.

Abstract

This work aims to present the contents of matrices, determinants and linear systems to teachers of mathematics at the High School level, giving emphasis to situation-problems that relate the formal contents with practical situations of everyday life or with applications, as a possibility of teaching method. Thus one can arise students' curiosity enabling them an opportunity for discussion and exploration of the formal content through problem solving. For this aim, it will be presented examples of applications of the method for solving problems developed by George Polya.

Key words: Matrices, Linear Systems; Determinants; Applications, Problem Solving.

Sumário

Resumo **iii**

Abstract **iv**

Introdução **1**

1 Elementos Históricos e Metodologia **4**

1.1 Uma visão histórica: Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes 4

1.2 Uma visão histórica: Resolução de Problemas 5

1.3 Metodologia para resolução de problemas 6

2 Matrizes **9**

2.1 Introdução 9

2.2 Conceitos e Definições 11

2.3 Aplicações e Resolução de Problemas 16

3 Sistemas Lineares **26**

3.1 Introdução 26

3.2 Conceitos e Definições 28

3.3 Aplicações e Resolução de Problemas 39

4 Determinantes **47**

4.1 Introdução 47

4.2 Conceitos e Definições 49

4.3 Aplicações e Resolução de Problemas 66

Considerações Finais **69**

Apêndice **71**

Referências Bibliográficas **73**

Introdução

Existe uma cultura generalizada de que a matemática é difícil, ciência para poucos, a maioria da população não entende e pior, acredita que pode viver muito bem sem ela. É comum ouvir de alunos das últimas séries do Ensino Fundamental, e também do Ensino Médio, "detesto Matemática". Provavelmente o formalismo e o rigor da Matemática, bem como os próprios professores, contribuam para tal aversão. Todos os profissionais que atuam nesta área devem trabalhar no sentido de eliminar o estigma de que a Matemática é uma ciência para poucos e privilegiados indivíduos, apenas para os "gênios", pelo contrário, todos podem e devem aprendê-la.

Testes de rendimentos aplicados pelos Governos Estadual e Federal, tais como Prova Brasil, SAEB, etc, indicam um baixo desempenho dos alunos na área de Matemática. Frequentemente, a Matemática tem sido apontada como a disciplina que contribui significativamente para a elevação das taxas de retenção. George Polya (1887 — 1985), no prefácio da segunda edição de seu clássico livro "A arte de resolver problemas", aponta os professores como grandes responsáveis por esta aversão e indiferença pela Matemática:

> [...] a Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso. Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar a Matemática [...] . Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la (POLYA, 1986, p.viii).

De acordo com os PCNs [1] – a, (2000, p. 40), os alunos devem perceber a Matemática como um sistema de códigos e regras com as quais é possível modelar a realidade e interpretá-la. A Matemática deve também ser vista como ciência, assim suas definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir

[1] Parâmetros curriculares Nacionais

novos conceitos e estruturas a partir de outras e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados, a aquisição do conhecimento matemático está vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático, esse domínio passa por um processo lento e trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas.

Segundo Polya (1997),

> resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão. Resolver problemas é a realização específica da inteligência, e a inteligência é o dom específico do homem . Se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta. Entretanto, a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas: problemas do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos, quebra cabeças e toda sorte de problemas. O aluno desenvolve sua inteligência usando-a; ele aprende a resolver problemas resolvendo-os (POLYA, 1997, p. 2).

Dessa forma apresentaremos esses conteúdos sempre procurando associar a teoria com situações problemas ou aplicações que remetam à prática, permitindo assim que o aluno não veja os conteúdos de Matemática de forma dissociada da prática. Conforme observa F. B. Abbott (ABBOTT, 2011), a resolução de problemas pode efetivamente contribuir para o ensino de Matemática no Ensino Médio. Por outro lado, M. A. Saldanha e M. Y. Noguti (SALDANHA e NOGUTI, 2012), no trabalho "Resolução de problemas: uma metodologia alternativa para o ensino e a aprendizagem de Matemática nas escolas do CASE", mostram que o método de Polya pode ser utlizado de modo eficaz no ambiente escolar do Ensino Médio.

No primeiro capítulo veremos um pouco da história das matrizes, dos sistemas lineares, dos determinantes e de resolução de problemas. Além disso, ainda no primeiro capítulo será apresentado o método de resolução de problemas desenvolvido por Polya.

No segundo capítulo trataremos do estudo das matrizes. Ao desenvolvermos o estudo das matrizes iremos apresentar situações problemas que possam estar presente no cotidianos dos alunos e a partir daí formalizar os conceitos e definições.

No terceiro capítulo faremos um estudo sobre sistemas lineares. Apresentaremos exemplos, conceitos, definições e situações problemas que são aplicações interessantes dos sistemas lineares. Além disso, veremos relações entre matriz e sistemas lineares.

No quarto capítulo faremos um estudo sobre os determinantes dando ênfase aos exemplos, situações problemas e aplicações. Veremos conceitos, definições, propriedades e resoluções de problemas. Iremos ver a relação do determinante com cálculo de área e cálculo de volume.

Nos capítulos 2, 3 e 4 trataremos dos conteúdos acima mencionados, procurando inicialmente apresentar uma situação problema acessível(do cotidiano) ao aluno que possa despertar nele interesse em buscar uma possível solução para o problema. A partir das indagações e questionamentos acerca de uma solução para o problema é que introduziremos a parte formal dos conteúdos. Por fim, apresentaremos outras situações problemas e aplicações a respeito dos conteúdos.

Capítulo 1

Elementos Históricos e Metodologia

1.1 Uma visão histórica: Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes

Considerado como o pai das matrizes, Arthur Cayley (1821 — 1895), em 1850 divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade. Matrizes surgiram para a resolução de sistemas lineares. No entanto, o primeiro uso implícito da noção de matriz se deve a Joseph Louis Lagrange (1736 — 1813), em 1790. O primeiro a lhes dar um nome foi Augustin-Louis Cauchy (1789 — 1857) que as chamavam de tabelas. O nome matriz, como cohecido atualmente, foi dado por James Joseph Sylvester (1814 — 1897), em 1850. Sylvester considerava matrizes com o único propósito de estudar determinantes. É só com Cayley que elas passam a ter destaque e gradativamente começam a suplantar os determinantes em importância.

Os primeiros estudos sobre determinantes datam provavelmente do século II a.C.. Mas foi só em 1683 que o japonês Seki Kowa (1637 – 1708) usou a idéia de determinante em seus trabalhos sobre sistemas lineares. O uso do determinante no Ocidente começou 10 anos depois num trabalho de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 — 1716), ligado também a sistemas lineares. O francês Étienne Bézout (1730 — 1783), sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre-Theóphile Vandermode (1735 — 1796), a primeira abordagem da teoria dos determinantes. O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl Gustav Jakob Jacobi(1804 — 1851). Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta até hoje.

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação — que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos Nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século III a.C.. Mas, foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a idéia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio a ser fortalecido. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

1.2 Uma visão histórica: Resolução de Problemas

Os problemas ocuparam um lugar central nos currículos desde a antiguidade, mas a resolução de problemas não. Só recentemente apareceram educadores matemáticos aceitando a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merece especial atenção. Os problemas nos currículos remontam, pelo menos, tão longe como os antigos egípcios, chineses e gregos. Por exemplo, o Papiro de Ahmes, copiado pelo escriba Ahmes, cerca de 1650 A. C., de um documento mais antigo, é um manuscrito matemático egípcio que consiste numa coleção de problemas. Num dos problemas, é pedido ao aluno que efetue a soma de cinco termos de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo e a razão são ambos 7 (Chase, 1979, pp. 59, 136-137). No próprio papiro, só é dada uma forma abreviada do problema, com dois métodos de resolução e a resposta. O fato de o problema referir casas, gatos, ratos, etc., para serem adicionados, sugere que era um problema recreativo.

Hoje já se verifica que a resolução de problemas tem cada vez mais sido usado como ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Podemos citar um como exemplo o reconhecimento nacional do feito realizado pelos alunos de uma Escola Pública de Cocal dos Alves-PI que sob a orientação do professor de Matemática Antônio Cardoso do Amaral tem mostrado para o mundo que a resolução de problemas como metodologia de ensino de Matemática permite que eles possam aprender com menor dificuldade, com maior interesse e participação. Tem se verificado também que os alunos que resolvem problemas de Matemática têm um melhor aproveitamento nas outras disciplinas.

1.3 Metodologia para resolução de problemas

Neste trabalho apresentaremos a resolução de problemas como metodologia de ensino, como ponto de partida para o ensino da matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Os professores, através da resolução de problemas, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. O ensino está centrado no aluno, que constrói os conceitos matemáticos durante a resolução de um problema, sendo a seguir formalizados pelo professor. Assim, apresentaremos a seguir um método para resolução de problemas muito conhecido que foi proposto por George Polya (POLYA, 1986). Ao final de cada tópico Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes apresentaremos uma seção com resolução de problemas e aplicações onde faremos uso do método de resolução de problema de Polya.

Como Resolver Um Problema

Segundo Polya, a resolução de um problema matemático se divide em quatro etapas:

• COMPREENSÃO DO PROBLEMA;

• ESTABELECIMENTO DE UM PLANO;

• EXECUÇÃO DO PLANO;

• RETROSPECTO OU VERIFICAÇÃO.

1ª ETAPA: Compreensão do Problema

É preciso compreender o problema.

• Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

• É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

• Trace uma figura. Adote uma notação adequada;

• Separe as diversas partes da condicionante. é possível anotá-las?

2ª ETAPA: Estabelecendo um Plano

Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução.

• Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

• Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

• Considere a incógnita. E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

• Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá·lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

• É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

• Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?

• Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

3ª ETAPA: Execução do Plano

Execute o seu plano.

• Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo.

• É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

4ª ETAPA: Retrospectiva

Examine a solução obtida.

• É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?

• É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? possível perceber isto num relance?

• É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Procedendo dessa forma pretendemos:

• Fazer o aluno pensar produtivamente.

• Desenvolver o raciocínio do aluno.

• Preparar o aluno para enfrentar situações novas.

• Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras.

• Equipar o aluno com estratégias e procedimentos que auxiliam na análise e na solução de situações onde se procura um ou mais elementos desconhecidos.

Capítulo 2

Matrizes

Neste capítulo, assim como nos demais, apresentaremos os conteúdos procurando sempre abordá-los de formas em que o aluno possa perceber a necessidade e a presença desses componentes curriculares no seu dia a dia, como também em algumas profissões. E assim, o faremos sempre apresentando primeiro uma situação problema ou uma aplicação para posteriormente apresentar a teoria Matemática.

2.1 Introdução

Quando se estuda matrizes no ensino médio, dá-se um enfoque em preparar o aluno para entender o cálculo dos respectivos determinantes. Entendendo bem os determinantes o aluno passa a ter condições de resolver sistemas lineares com maior facilidade, embora nem sempre fique claro que está se usando uma forma matricial no sistema linear. Essa passagem, de certa forma rápida, pelo estudo das matrizes faz com que não percebamos quanto é importante a aplicação de matrizes em nosso dia a dia.

No nosso dia-a-dia vemos frequentemente em jornais e revistas a presença de tabelas relativas aos mais variados assuntos, apresentando números dispostos em linhas e colunas. Desta forma as matrizes constituem um importante instrumento de cálculo com aplicações em Matemática, Engenharia, Administração, Economia e outras ciências.

Uma matriz antes de tudo pode ser vista com uma tabela, tabela esta que pode ser utilizada por qualquer aluno das séries iniciais do ensino Médio. Por exemplo, ao acompanharmos o Campeonato Brasileiro de Futebol lidamos com a tabela dos jogos que é atualizada a cada rodada. Ou seja, nossos alunos estão constantemente em contato com o conceito de matriz, no entanto muitos encontram dificuldades em associar a tabela do Campeonato, que discute com os amigos no seu dia-a-dia, com o conhecimento de matriz adquirido em sala de aula. O que se acrescenta a essa tabela são as operações que podem ser realizadas com seus elementos.

Consideremos a seguinte situação bastante comum aos alunos do ensino médio: apresentaremos a seguir os resultados do aproveitamento escolar de 4 turmas diferentes com as respectivas disciplinas e o aproveitamento de cada turma por disciplina. Esses resultados podem ser apresentados a partir da construção de uma tabela, como no esquema a seguir:

	MATEMÁTICA	*PORTUGUÊS*	*HISTÓRIA*	*GEOGRAFIA*
Turma A	8	9	8	9
Turma B	7	5	6	6
Turma C	8	7	7	7
Turma D	7	8	8	9

A identificação de uma determinada nota procurada pode ser feita da seguinte maneira:
quando quisermos saber o aproveitamento da turma C em **história**, por exemplo, basta nos orientarmos na linha da turma C e na coluna onde estão as notas de história, logo encontramos a nota 7.
Agora repetindo a tabela apenas considerando os números dispostos em linhas e colunas como na tabela anterior, porém colocados entre parênteses ou colchetes teremos:

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 6 & 6 \\ 8 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Em tabelas dispostas como essa, os números são chamados de elementos. As colunas são enumeradas da esquerda para a direita e as linhas de cima para baixo. Esse tipo de tabela disposta com linhas e colunas e classificado sob a forma **m$_x$n**, onde m representa as linhas e n as colunas com m e n diferentes de 0 é chamada de **Matriz**.

Representamos geralmente uma matriz por letras maiúsculas e seus respectivos elementos por letras minúsculas que são os índices já apresentados, linha e colunas (**m**x**n**). No exemplo acima temos uma matriz do tipo 4x4, isto é, uma matriz que possui 4 linhas e 4 colunas. Matrizes em que o número de linhas é igual ao número de colunas são denominadas matrizes quadradas.

2.2 Conceitos e Definições

Conceito Formal de Matriz

Chamamos de matriz mxn (lê-se m por n) com m,n∈ N^* qualquer tabela de números dispostos em **m** linhas e **n** colunas. Tal tabela será representada entre parênteses ( ), entre colchetes [ ] ou entre barras duplas ‖ ‖.

Podemos representar genericamente uma matriz M do tipo mxn da seguinte maneira:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } M = [a_{ij}]_{mxn}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Observações:

I) Quando uma matriz tem o número de linhas igual ao número de colunas diz-se que essa matriz é quadrada e se ela de ordem m por n, para dizer sua ordem basta dizermos ordem n ou ordem m.

II) Toda matriz quadrada possui duas diagonais, uma chamada de principal, formada pelos elementos a_{ij}, tais que $i = j$ e a outra chamada secundária, formada pelos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$, onde n indica a ordem da matriz.

III) Quando a matriz possuir uma única linha, recebe o nome de matriz linha.

IV) Quando a matriz possuir uma única coluna, recebe o nome de matriz coluna.

V) Quando todos os elementos a_{ij} de uma matriz são iguais a zero ela se chama matriz nula.

VI) Uma matriz de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos, ou seja, $a_{ij} = 1$ se i = j e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, é denominada matriz identidade e será representada por I_n.
VII) Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $M = [a_{ij}]_{mxn}$ e $N = [b_{ij}]_{mxn}$, dizemos que $M = N$ se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

As matrizes nos ajudam bastante em vários direcionamentos de assuntos e estudos que fazemos no dia a dia, as aplicações dessas "tabelas" nos auxiliam por exemplo no ensino da matemática aplicada a informática. As usuais transformações de tabelas que usamos como instrumento de estudo das matrizes podem ser feitas através de estudos realizados nos campos da economia, engenharia, matemática, física, informática,....

Na informática temos os exemplos clássicos de matrizes, em programas onde elas aparecem no auxilio dos cálculos matemáticos, editores de imagem, o próprio teclado onde sua configuração é realizada por um sistema de matrizes, entre outros tantos.

Na economia por exemplo as matrizes auxiliam como grande ferramenta na interpretação de gráficos que também podem ser originados de tabelas que usamos as matrizes. Junto com a economia temos as organizações comerciais que fazem uso da tabela, ou seja trabalham com matrizes.

Engenheiros civis fazem constantemente o uso das matrizes, que são de extrema importância para a divisão dos metros e distribuição de material na construção de uma estrutura de sustentação (lage). Na Física é feito o uso das matrizes a partir de tabelas relacionando o deslocamento e o tempo. Assim pode-se perceber o uso das Matrizes em varias profissões. Mas iremos agora apresentar situações mais simples em que se pode verificar o uso de matrizes, isto é aplicações das matrizes.

Exemplo da empresa especializada em calçados

Uma empresa especializada em calçados é formada por duas lojas A e B. Realizado um estudo sobre a aceitação de dois novos modelos de calçados nos quatro primeiros dias de dezembro, foram obtidos os resultados representados nas seguintes tabelas:

Tabela I

Quantidade Vendida na Loja A				
	1ª Dia	2ª Dia	3ª Dia	4ª Dia
Modelo 1	2	3	1	5
Modelo 2	1	2	5	3

Tabela II

Quantidade Vendida na Loja B				
	1ª Dia	2ª Dia	3ª Dia	4ª Dia
Modelo 1	3	0	2	3
Modelo 2	4	2	4	5

Como já foi visto anteriormente, as tabelas acima podem ser representadas pelas respectivas matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Note que a matriz A acima descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j; por exemplo, o elemento $a_{23} = 5$ informa que foram vendidas cinco unidades do modelo 2 no 3º dia.

Se quisermos descrever o desempenho das duas lojas da empresa na venda dos dois modelos de calçados em um determinado dia bastaria somar os valores correspondentes(estão na mesma linha e mesma coluna). Por exemplo no primeiro dia foram vendidos 5 calçados do modelo 1, dois da loja A e três da loja B. Assim podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} 2+3 & 3+0 & 1+2 & 5+3 \\ 1+4 & 2+2 & 5+4 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Que representaremos por:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Note que a matriz $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ descreve o desempenho das duas lojas da empresa na venda dos dois modelos de calçados. Desta forma, por exemplo, o elemento $c_{23} = 9$(isto é o elemento que se encontra na 2ª linha e 3ª coluna) informa que foram vendidas nove unidades do modelo 2 no 3º dia.

Observe que acabamos de efetuar a adição entre duas matrizes. Esse problema sugere como deve ser feita a adição de matrizes(matrizes com o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas), isto é deve-se somar ordenadamente os elementos correspondentes em cada linha.

Vejamos agora a definição matemática de Adição de matrizes:

Adição de Matrizes

Definição: A soma de duas matrizes do mesmo tipo $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$, que se indica por $A+B$ é a matriz $C = [c_{ij}]_{mxn}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Consideremos ainda o exemplo da empresa especializada em calçados(o exemplo anterior página 12). Sabe-se que o modelo 1 é vendido por R$ 62,00 e o modelo 2 por R$ 65,00, que poderíamos representar pela matriz $P = \begin{pmatrix} 62 & 65 \end{pmatrix}$, como representaríamos, matricialmente, a quantidade faturada diariamente pela empresa na venda dos modelos de calçados em estudo?

Através da soma entre as matrizes A e B obtemos a matriz $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, a qual representa o desempenho das duas lojas da empresa na venda dos dois modelos de calçados. A matriz $P = \begin{pmatrix} 62 & 65 \end{pmatrix}$ nos diz que o modelo 1 é vendido por R$62,00 enquanto o modelo 2 é vendido por R$65,00.

Sabemos que o faturamento na venda de certo produto é dado pela multiplicação entre o preço e a quantidade vendida. Observe que, pela matriz C, no primeiro dia foram vendidas 5 unidades do modelo 1 e 5 unidades do modelo 2 e desta forma, podemos afirmar que no primeiro dia a empresa obteve um faturamento de $62 \cdot 5 + 65 \cdot 5 = 635$ reais na venda dos dois novos modelos de calçados.

Desta forma, utilizando este raciocínio, podemos escrever

$\begin{pmatrix} 62 \cdot 5 + 65 \cdot 5 & 62 \cdot 3 + 65 \cdot 4 & 62 \cdot 3 + 65 \cdot 9 & 62 \cdot 8 + 65 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 635 & 446 & 771 & 1.016 \end{pmatrix}$

que representa o faturamento diário com a venda dos dois modelos de calçados pela empresa, apresentado pela tabela

Faturamento com os modelos 1 e 2 de calçados em Dezembro				
Dia	1º	2º	3º	4º
Valor em R$	635,00	446,00	771,00	1016,00

Esse problema sugere como deve ser feita a multiplicação de matrizes. Observe a relação que existe entre as ordens das matrizes $P_{1x2}.C_{2x4} = F_{1x4}$.

Este problema inicial poderá ser apresentado aos alunos em sala de aula através de um estudo em grupo onde os mesmos poderão discutir e tentar apresentar uma solução com suas próprias iniciativas e experiências. Além disso, em que outras situações do dia a dia essa configuração se repete? Pode ser feita outras variações? Quais?

Vejamos agora a definição matemática da multiplicação de matrizes:

Definição: Dadas as matrizes $M = [a_{ij}]_{mxn}$ e $N = [b_{ij}]_{nxp}$, o produto de M por N é a matriz $M \cdot N = [c_{ij}]_{mxp}$ tal que o elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i, da matriz M, pelos elementos da coluna j, da matriz N, e somando-se os produtos obtidos, isto é

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Observação:

Note que, só definimos o produto $M \cdot N$ de duas matrizes quando o número de colunas de M for igual ao número de linhas de N. Além disso, note ainda que o produto $M \cdot N$ possui o número de linhas de M e o número de colunas de N.

Matrizes Especiais:

Matriz Transposta Seja M uma matriz $m \times n$. Chamamos de matriz transposta de M, denotada por M^t , a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de M.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 4 \\ 5 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$ a transposta da matriz A é $A^t = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 9 & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriz Simétrica:

Dada uma matriz quadrada M de ordem n, dizemos que M é uma matriz simétrica se, e somente se, $M = M^t$.

Exemplo:

A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ é simétrica pois $B = B^t$.

Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada M de ordem n, se existir uma matriz X, de mesma ordem, tal que $M \cdot X = X \cdot M = I_n$, então X é denominada matriz inversa de M e é denotada por M^{-1}.

Observação:

Quando existir a matriz inversa de M, dizemos que M é invertível ou não singular. A existência ou não da matriz inversa e sua determinação, quando existir, será estudada e analisada com auxílio dos determinantes.

2.3 Aplicações e Resolução de Problemas

Vejamos algumas aplicações que são apresentadas a partir de problemas que podem ser verificadas no dia a dia:

Aplicação 1: Uma doceira interessada em saber quanto deveria desembolsar para preparar 3 tipos diferentes de salgados, usando ingredientes distintos montou a tabela a seguir:

Tabela I

	ovos	farinha	açúcar	carne
Pastéis	3	6	1	3
Empadas	4	4	2	2
Kibes	1	1	1	6

Os preços dos ingredientes constam na tabela a seguir:

Tabela II

Ingredientes	Preço Base (R$)
ovos	0,20
farinha	0,30
açúcar	0,50
carne	0,80

Qual, então, deve ser o preço base de cada salgado? E quanto a doceira vai desembolsar?

(Fonte: http://www.mscabral.pro.br/sitemauro/praticas/Matriz.htm)

Uma solução:

Iremos aqui usar o método de resolução de problemas desenvolvido por Pólya.

Compreensão do problema:

Qual é a incógnita?

Percebam que temos duas incógnita, isto é, o preço base de cada salgado e o valor a desembolsar pela doceira.

Existe uma condicionante?

Neste caso a condicionante é usar exatamente a quantidade de ingrediente sugerido.

Estabelecimento de um plano:

Já viu esse problema antes?

Conhece um problema correlato?

Poderíamos procurar vários caminhos para solucionarmos esse problema. Mas, uma pergunta que deve ser feita é: do que vimos no estudo das matrizes existe algo que poderíamos usar como ferramenta para resolver este problema? Vimos um problema semelhante que foi o da empresa especializada em calçados. E vimos que foi usado matrizes. Então existe alguma relação. Mas como usaremos matrizes? Observe que para obter o preço base de cada salgado deveremos multiplicar a quantidade de cada ingrediente a ser usado pelo seu respectivo valor e depois somar esses resultados. Por exemplo, o preço base de um pastel será: $3\times 0,20+6\times 0,30+1\times 0,50+3x\times 0,80=5,30$. Assim, para determinarmos o preço base de todos os salgados deveremos multiplicar as linhas da primeira tabela pela coluna da segunda tabela de forma ordenada.

Percebam então que essa operação sugere a multiplicação de matrizes. Então podemos traçar o plano de representar essas tabelas na forma de matrizes e em seguida usar a multiplicação de matrizes.

Execução do plano:

Representando as tabelas anteriores na forma de matrizes, em que a 1ª representa a quantidade de ingredientes a ser usado em cada salgado e a 2ª representa o valor de cada ingrediente, teremos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,30 \\ 0,50 \\ 0,80 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a quantidade de ingredientes necessário para produzir cada salgado pelo respectivo valor, isto é, multiplicar cada linha da primeira matriz pela coluna da segunda matriz e somando os resultados, teremos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,30 \\ 0,50 \\ 0,80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 0,20 + 6 \times 0,30 + 1 \times 0,50 + 3x \times 0,80 \\ 4 \times 0,20 + 4 \times 0,30 + 2 \times 0,50 + 2 \times 0,80 \\ 1 \times 0,20 + 1 \times 0,30 + 1 \times 0,50 + 6 \times 0,80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,30 \\ 4,60 \\ 5,80 \end{pmatrix}$$

Donde se tem que um Pastel custará R$ 5,30, uma Empada custará R$ 4,60 e um Kibe custará R$ 5,80. Portanto a doceira vai desembolsar um total de R$ 15,70 para preparar os três tipos diferentes de salgados.

Observe que acabamos de realizar multiplicação de matrizes o que nos permitiu esse resultado, isto é uma aplicação de matrizes.

Retrospecto:

É possível verificar o resultado?

O resultado está correto?

Percebam que é possível verificar o resultado bastando para isso efetuar as operações entre cada linha da primeira tabela com a coluna da segunda tabela, respectivamente, de forma separada.

O que aconteceria se tomássemos primeiro a tabela dos valores e depois a dos ingredientes?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?
Como poderíamos proceder se a doceira pretende preparar 15 pastéis, 12 empadas e 13 kibes?
Esse novo problema é semelhante ao original?
Poderíamos fazer outras variações?

Aplicação 2: Uma indústria de automóveis produz carros X e Y nas versões popular, luxo e superluxo. Na montagem desses carros são utilizadas as peças A, B e C. Para certo plano de montagem são fornecidas as seguintes tabelas:

Tabela I

	Carro X	Carro Y
Peça A	4	3
Peça B	3	5
Peça C	6	2

e

Tabela II

	Popular	Luxo	Superluxo
Carro X	2	4	3
Carro Y	3	2	5

Para o planejamento da composição de peças por tipo de carro que matriz deve ser usada? Ou ainda, quantas peças do tipo B será usada para montagem de um carro de superluxo, por exemplo?
(Fonte: http://www.mscabral.pro.br/sitemauro/praticas/Matriz.htm)

Uma solução:

Compreensão do problema:

Qual é a incógnita?
O que se quer saber é se existe alguma matriz que nos possa fornecer, a partir de seus elementos, informações que relacione o número de peças por tipo de carro.
Qual é a condicionante?
A condição do problemas são as quantidades de peças específicas para cada modelo X

e Y de carro em suas respectivas versões.

A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?

Sim. Por exemplo a quantidade de peças do tipo A que serão usadas na composição dos carros de luxo pode ser obtida por $4 \times 4 + 3 \times 2 = 22$

Estabelecimento de um plano:

Já o viu antes?

Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Vejam que este problema é de certa forma semelhante ao anterior.

É possível resolver o problema a partir dos dados?

Ora percebam que a relação entre o número de peças por tipo de carro pode ser obtida multiplicando, ordenadamente, as linhas da tabela que informam o número de peças pelas colunas da tabela que informam a versão do carro e em seguida obtendo a soma. Assim cada elemento resultante indicará a quantidade de peças do tipo A, B ou C que será necessário para a montagem do carro X ou Y e a respectiva versão popular, luxo e superluxo. Veja portanto que o plano pode ser usarmos multiplicação de matrizes.

Execução do plano:

Assim podemos multiplicar a matriz de peças pela matriz dos tipos de carros e obteremos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 2 + 3 \times 3 & 4 \times 4 + 3 \times 2 & 4 \times 3 + 3 \times 5 \\ 3 \times 2 + 5 \times 3 & 3 \times 4 + 5 \times 2 & 3 \times 3 + 5 \times 5 \\ 6 \times 2 + 2 \times 3 & 6 \times 4 + 2 \times 2 & 6 \times 3 + 2 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 22 & 34 \\ 18 & 28 & 28 \end{pmatrix}$$

Então, a matriz resultado é a que deve ser usada no planejamento. Assim a quantidade de peças do tipo A que será usada para montagem dos carros de luxo, por exemplo, é 22. A quantidade de peças do tipo B que será usada para montagem de um carro superluxo é 34.

Retrospecto:

Quantas peças do tipo C seriam necessárias para montagem de um carro na versão luxo? E popular?

É possível verificar o resultado?

É possível chegar ao resultado por outro caminho?

Percebam que é perfeitamente possível verificar o resultado, bastando para isso efetuar as operações separadamente e conferir.

Quanto se gastaria, nas condições do problema, na composição de um carro modelo X na versão superluxo se as peças custam: A-R$ 23,00, B-R$ 35,89 e C-R$ 41,13?

Seria possível obter uma solução para esse novo problema?

Que outras variações podem ser feitas?

Aplicação 3: Num determinado campeonato de clubes obteve-se o seguinte resultado:

Tabela I

	Vitória	Empate	Derrota
Fluminense	2	0	1
Flamengo	0	1	2
Palmeiras	1	1	1
São Paulo	1	2	0

Pelo regulamento do referido campeonato vale a seguinte tabela:

Tabela II

Vitória	3 pontos
Empate	1 ponto
Derrota	0 ponto

Qual foi a classificação dos times no final do campeonato ?

(Fonte: http://www.mscabral.pro.br/sitemauro/praticas/Matriz.htm)

Uma solução:

Compreensão do problema

Quais são os dados?

Os dados são os resultados dos jogos com as respectivas pontuações?

Qual é a condicionante?

A condicionante são a pontuação 3 pontos, 1 ponto e zero ponto atrelada ao resultado do jogo vitória, empate e derrota, respectivamente.

Estabelecimento de um plano

Já viu esse problema antes?

Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Conhece um problema correlato?

Observe que o problema anterior poderá ser útil para ajudar a resolver esse problema. Observe primeiro que estamos diante de tabelas numéricas. Segundo que para responder ao problema é necessário que se efetue operações como multiplicação e adição. Por exemplo para saber a pontuação do Fluminense devemos multiplicar a quantidade de suas vitórias por 3, a quantidade de seus empates por 1 e a quantidade de suas derrotas por zero e finalmente somar esses resultados isto é $2 \times 3 + 0 \times 1 + 1 \times 0 = 6$. E assim deve ser feito com cada time envolvido. Pois muito bem fazer isso equivale a multiplicar a tabela com os resultados obtidos pelos times pelas respectivas tabela formada pelas pontuações. Mas isso é multiplicação de matrizes. De fato mais uma vez temos um caso em que podemos aplicar a multiplicação de matrizes para resolver o problema.

Execução do plano

Assim basta multiplicarmos as duas tabelas, isto é multiplicarmos as matrizes correspondentes ao resultado do jogo e a pontuação obtida. Assim, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 0 \times 3 + 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 1 \times 3 + 1 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 3 + 2 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Então, para identificarmos a classificação basta comparar os resultados e teremos(como não poderia ser diferente):

1º - Fluminense com 6 pontos;

2º - São Paulo com 5 pontos;

3º - Palmeiras com 4 pontos;

4º - Flamengo com 1 pontos.

Retrospecto

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?

Que solução teríamos se para empate os times não ganhassem pontos e para derrota perdessem 1 ponto?

Que outras variações poderiam ser feitas?

É muito importante que o professor não finalize a solução do problema com a resposta obtida, mas pelo contrário a resposta encontrada pode ser o início para novos questionamento, variações suposições, etc, por isso o professor deve sempre deixar questionamento a respeito da solução do problema.

Aplicação 4:

Fonte:www.milsabores.net/assets/images/frutas.JPG

Para que você conheça o gasto calórico aproximado de algumas atividades, montamos a tabela abaixo. Esta tabela é baseada numa pessoa de 60Kg de peso(massa) corporal em atividades físicas, num tempo de 1 hora:

Tabela I

Peso	Andar de bicicleta	Caminhar acelerado	Correr 12 km/h	Hidroginástica
60 kg	252 Calorias	552 Calorias	890 Calorias	300 Calorias

Suponhamos um acompanhamento de uma pessoa com este peso por meio de um programa com estes exercícios ao longo de uma semana:

Horas por dia para cada atividade

Tabela II

Dia da semana	andar de bicicleta	caminhar acelerado	correr 12km/h	Hidroginástica
2ª feira	1	0	0	1
3ª feira	0	0	1	0
4ª feira	0,5	0,5	0	0
5ª feira	0	0	0,5	1,5
6ª feira	0,5	1	0	0

Uma pessoa seguindo esse programa, quantas calorias queimará em uma semana?

Uma solução:

Compreensão do problema

Qual a incógnita?

A incógnita é a quantidade de calorias que será queimada em uma semana.

A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?

Sim, pois temos o gasto calórico aproximado e as atividades físicas realizadas.

Estabelecimento de um plano:

Já viu esse problema antes?

É possível reformular o problema?

Podemos reformular o problemas considerando as informações e perguntando quantas calorias queimará em um dia? Isso nos permitirá melhor conhecimento do problema.

Assim Observe que se quisermos saber o gasto calórico em um dia bastaria multiplicarmos o tempo dispensado para cada atividade pela respectiva perca calórica e em seguida somar esses resultados. Dessa forma para sabermos quantas calorias queimará em uma semana uma pessoa nas condições do problema basta repetir o processo para as demais atividades física e respectivas percas calóricas. Ora fazer isso implica em multiplicar a tabela das atividades pela tabela das percas de calorias. Isso lembra multiplicação de matrizes. Então esse é o plano.

Execução do plano:

Assim tomando as respectivas matrizes e aplicando a multiplicação obteremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1,5 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 252 \\ 552 \\ 890 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 252 + 0 \cdot 552 + 0 \cdot 890 + 1 \cdot 300 \\ 0 \cdot 252 + 0 \cdot 552 + 1 \cdot 890 + 0 \cdot 300 \\ 0,5 \cdot 252 + 0,5 \cdot 552 + 0 \cdot 890 + 0 \cdot 300 \\ 0 \cdot 252 + 0 \cdot 552 + 0,5 \cdot 890 + 1,5 \cdot 300 \\ 0,5 \cdot 252 + 1 \cdot 552 + 0 \cdot 890 + 0 \cdot 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 552 \\ 890 \\ 1016 \\ 895 \\ 678 \end{pmatrix}$$

A pessoa a que nos referimos nesta situação, com este programa de exercícios, queimará 552 calorias na segunda-feira, 890 calorias na terça-feira, 1016 calorias na quarta-feira, 895 calorias na quinta feira e 678 calorias na sexta-feira.

Retrospecto:

É possível verificar o resultado?

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?

Que outras variações poderíamos fazer desse problema?

Seria possível solucionar se fosse omitido o peso corporal da pessoa?

Capítulo 3

Sistemas Lineares

3.1 Introdução

Um problema fundamental que normalmente é encontrado na descrição matemática de fenômenos físicos e de muitas outras áreas do conhecimento é o da solução simultânea de conjunto de equações. Traduzindo para linguagem Matemática , tais fenômenos passam a ser descritos por um conjunto de **m** equações em que se deseja determinar a solução de **n** variáveis de interesse, normalmente chamadas de incógnitas.

O primeiro registro histórico associado a formulação de um problema através de um conjunto, ou sistema de equações algébricos lineares foi relatado em um livro chinês - Chiu-chang Suan-shu (Nove Capítulos sobre Aritmética) - escrito aproximadamente 250 anos antes do surgimento da era Cristã. No capítulo VIII desse livro aparece a proposição do seguinte problema:

Problema da colheita:

> Três fardos de uma boa colheita, dois fardos de uma colheita medíocre, e um fardo de uma colheita ruim foram vendidos por 39 dou. Dois fardos da boa, três da medíocre, e um da ruim foram vendidos a 34 dou; e um da boa, dois da medíocre, e três da ruim foram vendidas a 26. Qual o preço recebido pela venda de cada fardo associado a boa, a colheita medíocre e a colheita ruim?(Pereira L. F. A.; Haffner J. F. - http://www.feng.pucrs.br/ gacs/new/disciplinas/asl/apostilas/Aula01.pdf, em 12/022013)

Na época, os chineses formularam esse problema empregando pedaços de bambus de diferentes cores para representar os coeficientes das equações, dispostos de forma organizada em um quadro onde as colunas representavam a qualidade de cada colheita e o total vendido de todas as colheitas. A solução do problema era então obtida por uma sequência ordenada de manipulações nas linhas que compunham o quadro. Séculos se passaram até que os sistemas de equações algébricas lineares fossem redescobertos da Europa, ganhando forma de arranjos numéricos ordenados por linhas e colunas, como são atualmente representados. Para o problema originalmente formulado pelos chineses, tem-se na forma atual a seguinte representação:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Onde as incógnitas x, y e z representam, respectivamente, o preço recebido pela venda do fardo associado à boa colheita, à colheita medíocre e à colheita ruim.

A solução deste tipo de problema foi sistematizado pelo matemático alemão Gauss (Carl Friedrich Gauss, nascido em 1777 - falecido em 1855), tornando-se conhecido como método de eliminação de Gauss (também conhecido como método do escalonamento).

Vamos considerar um outro exemplo prático para mostrar o quanto são frequentes, em nosso dia-a-dia, os sistemas de equações. Os mais comuns são os sistemas de equações lineares do 1º grau que ilustraremos com o seguinte problema:

Caixa de supermercado:

Antes de assumir o caixa num supermercado, Maria recebe de seu gerente uma sacola contendo moedas, onde está indicado que existem 250 moedas no valor de R$ 40,00. Ao abrir a sacola ela percebe que existem moedas de 25 centavos e de 10 centavos. Quantas moedas de cada espécie Maria recebeu de seu gerente?

Tal problema pode ser representado pelo sistema de equações do 1º grau

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 250 \\ 0,25x & + & 0,10y & = & 40 \end{array}\right.$$

onde x e y são, respectivamente, as quantidades de moedas de 25 centavos e de 10 centavos. Para um estudo geral de sistemas de equações lineares, necessitamos de algumas noções preliminares.

3.2 Conceitos e Definições

Definição: Chama-se equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ toda equação sob a forma:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ em que $a_1, a_2, ..., a_n, b$ são constantes reais.

Observações:

i) As constantes $a_1, a_2, ..., a_n$ são chamadas de coeficientes enquanto a constante b é denominada termo independente.

ii) Se $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$, denominaremos como equação homogênea.

iii) Uma solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ é uma sequência de n números reais α_1, α_2,..., α_n tais que a equação é satisfeita quando substituímos $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$,..., $x_n = \alpha_n$. O conjunto de todas as soluções de uma equação é chamado seu conjunto-solução ou às vezes, a solução geral da equação.

Definição: Um sistema de equações lineares, ou simplesmente sistema linear $m.n$, é um conjunto de m equações com n incógnitas da forma:

$$S \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & ... & a_{1nx_n} & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & ... & a_{2nx_n} & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & ... & a_{mnx_n} & = & b_m \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Lembrando da definição de produto de matrizes, notamos que o sistema linear **S** pode ser escrito na forma matricial

$$S \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

A matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ é chamada matriz principal do sistema e é formada pelos coeficientes de **S**.

O sistema **S** também pode ser representado pela matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ denominada matriz ampliada ou matriz completa do sistema S.

Observação:

Quando construímos a matriz aumentada, as incógnitas devem estar escritas na mesma ordem em cada equação e as constantes que não multiplicam incógnitas (termos independentes) devem estar à direita.

Definição: Dado um sistema de equações lineares

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \dots & a_{1nx_n} & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \dots & a_{2nx_n} & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mnx_n} & = & b_m \end{cases}$$

dizemos que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ é solução desse sistema quando $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ é solução de cada uma das equações do sistema.

Sistemas Equivalentes

Considere o sistema linear a seguir:

$$S_1 = \begin{cases} x & + & y & + & z & = & -2 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 8 \\ -x & + & 9y & + & 8z & = & 50 \end{cases}$$

Resolver esse sistema linear demanda alguns cálculos. Consideremos agora o sistema linear S_2 a seguir.

$$S_2 = \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2y + 3z = 12 \\ -6z = -12 \end{cases}$$

Qual seria mais rápido e fácil de se resolver o sistema linear S_1 ou o sistema linear S_2? Com certeza o sistema S_2 apresenta um aspecto melhor de se obter a solução, pois facilmente se obtém que $z = 2$, $y = 3$ e $x = -7$ como solução do sistema S_2.

Perceba que a solução de S_2 também é solução de S_1. Em geral os sistemas lineares não são de resolução imediata (muitas vezes podem ser muito trabalhosos, considere, por exemplo, um problema que tenha 1000 equações e 800 incógnitas). A idéia de se trabalhar com sistemas lineares equivalentes consiste em transformar um dado sistema linear em outro sistema linear de aspecto mais simples e que possui o mesmo conjunto solução, com a vantagem de ser mais fácil de resolver. É do que trataremos a partir de agora.

Operações elementares:

Dado um sistema linear **S**, denominamos operações elementares sobre as equações de **S** as seguintes operações:

1ª trocar de lugares entre si duas equações;

2ª multiplicar uma equação por um número real não nulo;

3ª somar a uma equação uma outra equação do sistema previamente multiplicada por um número real.

Justificativas:

Consideremos o sistema linear S: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

1ª trocando de lugares as duas equações, obtemos o sistema S_1: $\begin{cases} a_2x + b_2y = c_2 \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$

É evidente que S_1 e S possuem o mesmo conjunto-solução.

2º Se multiplicarmos a primeira equação de S pelo número real k, $k \neq 0$, obteremos o sistema

$$S_2 \begin{cases} ka_1x + kb_1y = kc_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Se um par ordenado de números reais (α, β) é solução de S, temos que (α, β) também é solução de S_2 e, reciprocamente, se (α, β) é solução de S_2 também é solução de S, porque

$$a_1\alpha + b_1\beta = c_1 \Leftrightarrow ka_1\alpha + kb_1\beta = kc_1 \qquad\qquad (\forall k \neq 0).$$

Logo, S_2 e S têm o mesmo conjunto-solução.

3º Agora vamos somar à segunda equação de S a primeira multiplicada pelo número real k, obtendo o sistema linear

$$S_3\!:\!\begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ (ka_1+a_2)x & + & (kb_1+b_2)y & = & kc_1+c_2 \end{cases}$$

Se (α,β) é uma solução de S, então é solução também de S_3 e, reciprocamente, se (α,β) é solução de S_3 também é solução de S, pois:

Sendo (α,β) solução de S, temos em S, que $a_1\alpha + b_1\beta = c_1$, daí substituindo em S_3 temos que

$(ka_1+a_2)\alpha+(kb_1+b_2)\beta = k(a_1\alpha+b_1\beta)+c_2 \Rightarrow k\alpha a_1+\alpha a_2+k\beta b_1+b_2\beta = k\alpha a_1+\beta b_1+c_2 \Rightarrow \alpha a_2+\beta b_2 = c_2$.

Logo S_3 e S têm o mesmo conjunto solução.

Definição: Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes, quando um deles pode ser obtido a partir do outro por meio de um número finito de aplicações das operações elementares. Podemos dizer ainda que dois sistemas lineares S_1 e S_2 são ditos equivalentes se, e somente se, admitem o mesmo conjunto solução.

Exemplo: Os sistemas lineares

$$S_1\!:\!\begin{cases} 3x & + & 6y & = & 42 \\ 2x & - & 4y & = & 12 \end{cases} \text{ e } S_2\!:\!\begin{cases} x & + & 2y & = & 14 \\ x & - & 2y & = & 6 \end{cases}$$

são equivalentes porque admitem a mesma solução, a saber $x = 10$ e $y = 2$.

Observe que se multiplicarmos a 1ª linha do sistema S_1 por $\frac{1}{3}$ e a 2ª linha por $\frac{1}{2}$ teremos o sistema linear S_2.

Classificação de um Sistema Linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções. Desta forma um sistema linear pode ser:

i) sistema possível e determinado, ou seja, admite uma única solução;

ii) sistema possível e indeterminado, ou seja, admite mais de uma solução;

iii) sistema impossível, ou seja, não admite solução alguma.

Interpretação geométrica de uma equação linear 2x2

Consideremos a equação linear $ax_1 + bx_2 = m$. Sabemos que o conjunto solução da equação é formado pelos pares ordenados de números reais $(\alpha,\ \beta)$ tais que $a \times \alpha + b \times \beta = m$. Mas, existem infinitos pares com essa característica pois basta tomarmos $\alpha = \dfrac{m - b \times \beta}{a}$, onde α depende de β. Observe que a equação $\alpha = \dfrac{m - b \times \beta}{a}$, na dependência de β, representa uma função afim cuja representação gráfica já sabemos é uma reta. Daí segue que a representação gráfica de uma equação linear é uma reta. Assim, podemos relacionar o conjunto solução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas com a posição relativa entre duas reta como veremos a seguir.

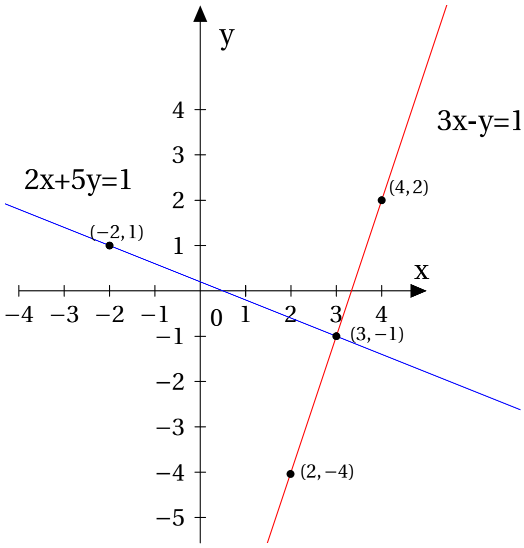
Interpretação geométrica dos sistemas lineares 2x2

Uma maneira de interpretarmos o conjunto-solução de um sistema linear $2x2$ é relacionar as suas soluções com o número de pontos na interseção de retas (no caso de sistemas lineares com duas variáveis) ou na forma como planos podem se intersectar quando for um sistema lineares com 3 variáveis. Os pares ordenados de números reais que são soluções de uma equação linear com duas incógnitas determinam, no plano, uma reta. A intersecção das duas retas das equações do sistema determinam sua solução, se existir.

Vejamos a representação gráfica dos três sistemas resolvidos:

$$1)\begin{cases} 3x - y = 10 & \text{reta passando por} \quad (4,2),(2,-4),\ldots \\ 2x + 5y = 1 & \text{reta passando por} \quad (-2,1),(3,-1),\ldots \end{cases}$$

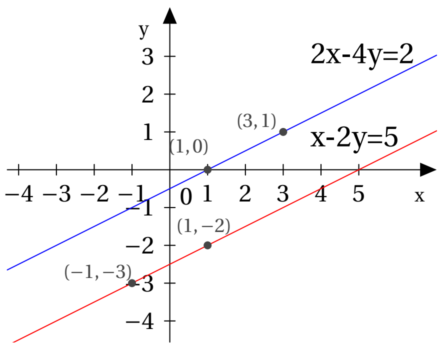
Observe que a primeira equação do sistema acima pode ser escrita como: $y = 3x - 10$ que descreve uma reta que passa pelos pontos $(4,2)$ e $(2,-4)$ enquanto a segunda equação descreve a reta $y = \dfrac{-2}{5}x + \dfrac{1}{5}$ passando por $(-2,1)$ e $(3,-1)$.



As retas concorrentes indicam que existe um único par ordenado que é solução do sistema (sistema possível e determinado).

$$2)\begin{cases} x - 2y = 5 & \text{reta passando por } (1,-2),(-1,-3). \\ 2x - 4y = 2 & \text{reta passando por } (1,0),(3,1). \end{cases}$$

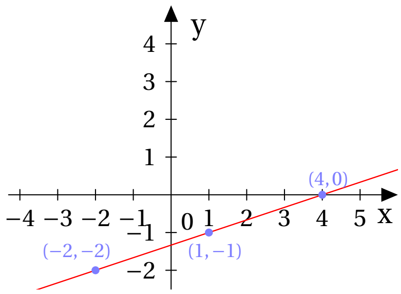
Observe que a primeira equação do sistema acima pode ser escrita como: $y = \dfrac{x-5}{2}$ que descreve uma reta que passa pelos pontos $(1,-2)$ e $(-1,-3)$ enquanto a segunda equação descreve a reta $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$ passando por $(1,0)$ e $(3,1)$.



As retas paralelas e distintas indicam que não existe par ordenado que seja solução do sistema (sistema impossível).

$$3)\begin{cases} 2x - 6y = 8 & \text{reta passando por } (4,0),(1,-1). \\ 3x - 9y = 12 & \text{reta passando por } (4,0),(1,-1). \end{cases}$$

Observe que a primeira equação do sistema acima pode ser escrita como: $y = \dfrac{x-4}{3}$ que descreve uma reta que passa pelos pontos $(4,0)$ e $(1,-1)$ enquanto a segunda equação descreve a reta $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{3}$ passando por $(4,0)$ e $(1,-1)$.



As retas coincidentes indicam que existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema (sistema possível e indeterminado).

Assim, podemos classificar um sistema linear 2 por 2 de acordo com o número de pontos na interseção entre duas retas da seguinte forma:

i) se a interseção entre as retas for um ponto, isto é, as retas são concorrentes, teremos que o sistema é possível e determinado, ou seja, admite uma única solução;

ii) se a interseção entre as retas for mais de um ponto, isto é, as retas são coincidentes, teremos que o sistema é possível e indeterminado, ou seja, admite mais de uma solução;

iii) se a interseção entre as retas for um conjunto vazio de pontos, isto é, as retas são paralelas, teremos que o sistema é impossível, ou seja, não admite solução alguma.

Interpretação geométrica dos sistemas lineares 3x3

De modo análogo podemos interpretar a solução de um sistema linear 3×3 com a interseção de 3 planos.

i)Se o sistema é possível e determinado, encontrarmos um trio-ordenado (x,y,z) que satisfaz as três equações. A interpretação geométrica é que os três planos têm em comum um único ponto. Não há outra posição relativa, cujo sistema seja possível e determinado.

ii)Se o sistema é possível e indeterminado, encontramos infinitos trio-ordenados (x,y,z) que satisfazem as três equações. A interpretação geométrica é que todos os planos concorrem em uma reta.

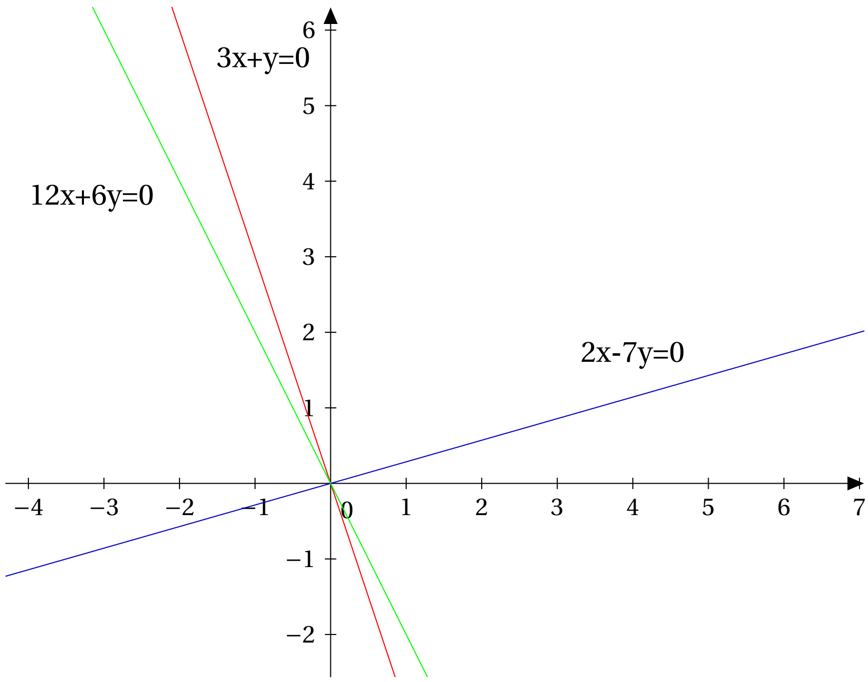
iii)Se o sistema é impossível, não é possível encontrar nenhum trio-ordenado que satisfaça as três equações ao mesmo tempo. Uma das possibilidade é ter dois planos paralelos e outro oblíquo. Dessa forma os planos se interseccionam por pares formando retas, mas elas são paralelas e assim não se interseccionam, por isso nenhum ponto dessas retas pode ser comum aos três planos ao mesmo tempo.

Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear onde os termos independentes em todas as equações são iguais a zero é denominado sistema homogêneo.

Por exemplo, os sistemas S_1 e S_2 são sistemas lineares homogêneos.

$$S_1: \begin{cases} 7x - 3y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases} \qquad S_2: \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x - 7y = 0 \\ 12x + 6y = 0 \end{cases}$$



Convém notar que um sistema linear homogêneo $n \times n$ (com $n \geq 2$) é sempre possível, pois admite pelos menos a solução (0, 0,..., 0) denominada solução trivial, nula ou imprópria.(Observe que todas as retas, na representação gráfica, passam pela origem do sistema)

Resolução de um Sistema Linear

Resolver um sistema linear significa obter o conjunto solução do sistema. Dentre os vários métodos existentes para a resolução de um sistema, veremos inicialmente o método de resolução por escalonamento.

O método por escalonamento é considerado por muitos como sendo um processo longo e trabalhoso, o qual exige muita concentração e dedicação por parte dos alunos, bem como paciência e planejamento dos professores. No entanto, todos concordam que o método por escalonamento é o único que é capaz de resolver qualquer sistema linear, diferentemente de outros métodos considerados mais simples, os quais teremos a oportunidade de discutir posteriormente.

Sistemas Escalonados

Definição: Um sistema linear

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \dots & a_{1nx_n} & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \dots & a_{2nx_n} & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mnx_n} & = & b_m \end{cases}$$

é dito escalonado se, e somente se:

i) todas as equações apresentam as incógnitas numa mesma ordem;

ii) em cada equação existe pelo menos um coeficiente, de alguma incógnita, não-nulo;

iii) existe uma ordem para as equações, tal que o número de coeficientes nulos que precedem o primeiro não-nulo de cada equação aumenta de uma equação para outra.

Exemplo: O sistema $\begin{cases} x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 0x & + & y & - & z & = & 4 \\ 0x & + & 0y & + & 2z & = & 5 \end{cases}$ cuja matriz ampliada é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ está na forma escalonada.

Há apenas dois tipos de sistemas escalonados a considerar, conforme veremos a seguir:

1º Tipo: número de equações igual ao número de incógnitas.

Observe o sistema escalonado

$$\begin{cases} 3x & + & 2y & + & z & = & 3 & (I) \\ 0x & + & 5y & - & 2z & = & 1 & (II) \\ 0x & + & 0y & + & 3z & = & 6 & (III) \end{cases}$$

Para resolver esse tipo de sistema, basta determinar o valor de z pela equação (III): $3z = 6 \Rightarrow z = 2$.

Portanto, substituindo $z = 2$ na equação (II) encontramos o valor de $y = 1$ e, substituindo os valores determinados para y e z na equação (I), teremos $x = -\dfrac{1}{3}$ e o conjunto solução é $S = \left\{-\dfrac{1}{3}, 1, 2\right\}$.

Propriedade: Todo sistema linear escalonado do primeiro tipo é possível e determinado.

2º Tipo: número de equações menor que o número de incógnitas.

Observe o sistema escalonado

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Para resolver tal sistema, podemos tornar as incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma das equações (chamadas variáveis livres) e transpô-las para o segundo membro.

Desta forma teremos $\begin{cases} x - y = 4 - z \\ y = 2 + z \end{cases}$

Fazendo $z = \alpha$ (onde $\alpha \in \mathbb{R}$) obtemos

$\begin{cases} x - y = 4 - \alpha \\ y = 2 + \alpha \end{cases}$ e assim $x - (2 + \alpha) = 4 - \alpha \Rightarrow x = 6$.

Portanto, a solução do sistema é $x = 6$, $y = 2 + \alpha$ e $z = \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, e assim o sistema é possível e indeterminado.

Propriedade: Todo sistema linear escalonado do segundo tipo é possível e indeterminado.

A idéia principal do método do escalonamento é a seguinte: Dado um sistema linear S_1 determinar, a partir de S_1, um sistema S_2 equivalente a S_1, tal que a solução do sistema seja trivial.

Você deve estar se perguntando agora como se faz para escalonar um sistema linear S. Vamos agora estudar uma técnica para transforma um sistema linear S em um sistema escalonado. Essa técnica é fundamentada nas operações elementares sobre as equações de um sistema linear vistas anteriormente. Além disso é importante acrescentar aqui a idéia de matrizes equivalentes.

Dizemos que duas matrizes são equivalentes quando uma pode ser obtida a partir da outra, por um número finito de aplicações das seguintes operações (denominadas operações elementares sobre as linhas de uma matriz):

1ª) trocar de lugares entre si duas linhas;

2ª) multiplicar uma linha por um número real não nulo;

3ª) somar a uma linha outra linha da matriz previamente multiplicada por um número real.

Note a semelhança que há entre estas operações e as operações elementares sobre as equações de um sistema linear, é fácil concluir que as matrizes completas associadas a sistemas equivalentes são matrizes equivalentes. Assim, quando queremos resolver um sistema linear pelo método de escalonamento, podemos trabalhar com a matriz completa do sistema, realizando sobre linhas da matriz as operações que faríamos sobre as equações do sistema. Esse procedimento será utilizado daqui em diante.

A título de exemplo agora vamos apresentar uma solução para os dois problemas iniciais.

Primeiro: o da colheita(pág. 24-25):

O sistema linear formado é

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Usando as técnicas de escalonamentos na matriz completa associada ao sistema teremos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 3 & 2 & 1 & 39 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 12 & 33 \end{pmatrix}$$

Daí segue que $12z = 33 \Rightarrow z = \dfrac{33}{12} = 2,75$. Daí segue que $y = 4,25$ e $x = 9,25$.

Assim o fardo de uma boa colheita custará $R\$2,75$, o fardo de uma colheita medíocre custará $R\$4,25$ e um fardo de uma colheita ruim $R\$9,25$.

Observe que é fácil verificar o resultado, bastando para isso substituir x, y e z pelos valores encontrados nas equações do sistema.

De que outra forma poderíamos ter resolvido?

Segundo: o do caixa de supermercado(pág. 25):

O sistema linear formado é

$$\begin{cases} x + y = 250 \\ 0,25x + 0,10y = 40 \end{cases}$$

Usando as técnicas de escalonamentos na matriz completa associada ao sistema teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 250 \\ 0,25 & 0,10 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 250 \\ 0 & -0,15 & -22,5 \end{pmatrix}$$

Daí segue que $-0,15y = -22,5 \Rightarrow y = \dfrac{-22,5}{-0,15} \Rightarrow y = 150$ e consequentemente $x + y = 250 \Rightarrow x = 250 - 150 \Rightarrow x = 100$.

Assim tem-se um total de 100 moedas de 25 centavos e 150 moedas de 10 centavos.
É possível verificar o resultado?
Há outras formas para obter essa mesma solução?

3.3 Aplicações e Resolução de Problemas

Aplicação 1: Para a produção de um litro de creme são usados suco de fruta, leite e mel. Sabe-se que a quantidade de leite é o dobro da quantidade de suco de fruta, e a quantidade de mel é a nona parte da quantidade dos outros dois líquidos juntos. Ana, uma garota curiosa, resolveu fazer um litro de creme seguindo a receita com os ingredientes citados. A questão é: qual a quantidade de suco de fruta que Ana irá precisar?

Uma solução

Compreensão do Problema

Qual é a incógnita?
A quantidade de suco de fruta que Ana irá precisar. Existe uma relação de sistema linear com o problema?
O que se pode observar no problema?
Quais são os dados?

Estabelecimento de um plano

Já viu esse problema antes?
Conhece um problema que lhe poderia ser útil?
Muito bem, primeiro observe que para ser feito um litro de leite serão necessário usar os três ingredientes e além disso existe uma relação entre eles. Essa relação pode ser estabelecida através de equações lineares, mais precisamente três equações com três incógnitas. Mas um conjunto de equações formam como já vimos um sistema linear. Então um plano é pensar e proceder com auxílio de sistemas lineares na obtenção da solução do problema.

Execução do Plano

Dessa forma pondo o plano em execução, sejam S-(a quantidade de suco de frutas, em mL), L-(a quantidade de leite, em mL) e M-(a quantidade de mel, em mL). Lembrando que 1 L corresponde a 1000 mL podemos então formar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -2S & + & L & & & = & 0 \\ S & - & L & + & 9M & = & 0 \\ S & + & L & + & M & = & 1000 \end{cases}$$

Usando a matriz completa do sistema(observe aqui uma aplicação de matriz) e escalonando teremos:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 1 & -1 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & -2 & 8 & -1000 \\ 0 & 3 & 2 & 2000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & -2 & 8 & -1000 \\ 0 & 0 & 14 & 500 \end{pmatrix}$$

Daí segue que $14M = 500 \Rightarrow M = \dfrac{500}{14} \Rightarrow M \simeq 35,714$. Fazendo as substituições nas outras equações obteremos $-2L + 8M = -1000 \Rightarrow -2L = -1000 - 8 \times 35,714 \Rightarrow L \simeq \dfrac{1285,712}{2} \Rightarrow L \simeq 642,856$ e $S = 321,43$.

Assim podemos concluir que Ana deverá usar aproximadamente: 35 mL de mel, 642 mL de leite e 321 ml de suco de frutas.

Retrospecto

É possível verificar o resultado? Basta substituir as incógnitas nas equações pelos devidos valores encontrado e efetuar as operações pertinentes.

Perceba que ao substituir S, L e M por 321, 642 e 35, respectivamente, nas equações os valores não irão ser satisfeito, pois foi feito uma aproximação dos resultados. Observe que é menos complicado medir 35 mL do que 35,714 mL, por isso é conveniente essa aproximação.

É possível estabelecer um outro plano para resolver o problema?

Aplicação 2: Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito que só indicava corretamente pesos(massa) superiores a 60 kg. Assim eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

- Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;
- Carlos e Andreia pesam 123 kg;
- Andreia e Bidu pesam 66 kg.

Quantos quilogramas pesa cada um deles?

Uma solução:

Compreensão do Problema

Qual é a incógnita?

O peso de cada um deles.

Qual a condicionante?

A pesagem seja feita dois a dois.

Estabelecimento de um plano

Conhece um problema correlato?

Conhece um problema que poderia ser útil?

Uma observação que deve ser feita é que o problema apresenta um formato semelhante à aplicação 1. Mas de que forma? Primeiro perceba que as informações se relacionam duas a duas, isto é, os pesos dos personagens são apresentados de forma a se relacionarem dois a dois. Além disso essas relações podem serem estabelecida por meio de equações lineares formando assim um sistema linear. Assim um plano é formar um sistema linear e resolvê-lo.

Execução do Plano

Dessa forma sendo **x** o peso de Carlos, **y** o peso de Andreia e **z** o peso do cão podemos escrever o seguinte sistema linear;

$$\begin{cases} x + z = 87 \\ x + y = 123 \\ y + z = 66 \end{cases}$$

Escrevendo a matriz completa para escalonarmos, teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 87 \\ 1 & 1 & 0 & 123 \\ 0 & 1 & 1 & 66 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 87 \\ 0 & 1 & -1 & 36 \\ 0 & 1 & 1 & 66 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 87 \\ 0 & 1 & -1 & 36 \\ 0 & 0 & 2 & 30 \end{pmatrix}$$

Daí tomando a última linha teremos a equação $2z = 30 \Rightarrow z = 15$. Substituindo z na segunda linha teremos $y - z = 36 \Rightarrow y = 36 + 15 \Rightarrow y = 51$. Substituindo z na primeira linha teremos $x + 15 = 87 \Rightarrow x = 87 - 15 \Rightarrow x = 72$.

Assim tem-se que:

Carlos pesa 72 kg, Andreia pesa 51 kg e o cão pesa 15 kg.

Retrospecto

É possível conferir o resultado?(Verifique!)

Esse seria o único caminho para chegarmos a solução do problema?

Possivelmente não. Mas veja que uma vez montado o sistema fica fácil, usando o escalonamento, chegar ao resultado.(Tente outro caminho)

Que variações podem ser feitas nesse problema?

Aplicação 3: Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não-sócios. No total, o valor arrecadado foi de R$ 1.400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo que o preço do ingresso foi R$ 10,00 e que cada sócio pagou metade desse valor, qual foi o número de sócios presentes ao show?

Uma solução:

Compreensão do problema

Qual é a incógnita?

Qual a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante?

A incógnita é o número de sócios presente.

A condicionante é que o não sócio irá pagar de R$10,00 e o sócio pagará metade desse valor.

Estabelecimento de um Plano

Já viu esse problema antes?

Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Há alguma relação com algum problema resolvido anteriormente?

Observe que mais uma vez temos as informações dadas relacionando-se duas a duas de modo que essas relações podem ser expressa por meio de equações lineares formando um sistema linear como nas aplicações anteriores, só que dessa vez envolvendo apenas duas incógnitas e por tanto. Assim um plano é resolver o sistema linear formado.

Execução do Plano

Sejam **x** e **y** o número de sócios e não sócios, respectivamente. Daí podemos formar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 5x + 10y = 1400 \end{cases}$$

Escrevendo a matriz completa associada ao sistema linear, teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 5 & 10 & 1400 \end{pmatrix}$$

Escalonando termos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 5 & 10 & 1400 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 0 & 5 & 400 \end{pmatrix}$$

Daí podemos obter o valor de y na segunda linha: $5y = 400 \Rightarrow y = 80$ e substituindo y na primeira linha teremos $x + 80 = 200 \Rightarrow x = 120$. Como o número de sócios é representado por x e os não sócios por y segue que estavam presente ao show 120 sócios e 80 não sócios.

Retrospecto

É possível verificar o resultado?

É possível verificar o argumento?

É possível chegar ao resultado usando um caminho diferente?

Se não fosse dado o número de pessoa que compareceram aos show seria possível chegarmos a uma solução?

Que outras variações poderíamos fazer?

Aplicação 4: (modelo econômico de Leontief(Wassily Wassilyovitch Leontief, nasceu em 5 de Agosto de 1905 — faleceu em 5 de Fevereiro de 1999))

Três proprietários de casas - um pedreiro, um eletricista e um hidráulico - pretendem fazer consertos em suas casas. Eles concordam trabalhar um total de 10 dias cada de acordo com a tabela a seguir:

Tabela I

Números de Dias de trabalo na casa do	Trabalo executado pelo		
	Pedreiro	Eletricista	Hidráulico
pedreiro	2	1	6
eletricista	4	5	1
hidráulico	4	4	3

Para efeito de impostos, eles devem declarar e pagar um ao outro um salário diário razoável, mesmo para o trabalho que cada um faz em sua própria casa. Seus salários diários normais são cerca de R$ 100,00, mas eles concordam em ajustar seus respectivos salários diários de tal modo que saiam empatados, ou seja, de tal modo que o total pago por cada um é igual ao total recebido.

Uma solução:

Compreensão do Problema

Qual é a incógnita?

Qual a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante?

Essa é uma situação bastante comum em pequenas cidades do interior como também em muitas favelas das grandes cidades. Nosso principal problema é o de determinar "preços" para estes trabalhos de tal modo que o gasto total de cada proprietário seja igual ao total recebido em salário.

Estabelecimento de um Plano

Já viu esse problema antes?

Conhece um problema correlato?

Num primeiro momento não parece ter esse problema relação com os resolvidos até agora, mas vejam que o gasto total e o total recebido se relacionam de modo a formarem equações lineares e mais uma vez poderemos aplicar o que se aprendeu sobre sistemas lineares. Eis um plano: usar sistemas lineares.

Execução do Plano

Assim Podemos proceder da seguinte forma:

$$P_1 = \text{salário diário do pedreiro}$$
$$P_2 = \text{salário diário do eletricista}$$
$$P_3 = \text{salário diário do hidráulico}$$

Para satisfazer a condição de "equilíbrio" de que saiam empatadas, devemos exigir que

total de gastos = total do recebido

para cada um dos proprietários pelo período de 10 dias. Por exemplo, o pedreiro paga um total de $2P_1 + P_2 + 6P_3$ pelos consertos em sua própria casa e recebe um total de $10P_1$ pelos consertos que faz nas três casas. Igualando estas expressões temos a primeira das três equações seguintes:

$$2P_1+P_2+6P_3=10P_1$$
$$4P_1+5P_2+P_3=10P_2$$
$$4P_1+4P_2+3P_3=10P_3$$

As duas outras equações são as equações de equilíbrio para o eletricista e o hidráulico.

Observe que temos aqui um sistema linear com três equações e três incógnitas. Para obtermos os preços iremos resolver o sistema assim formado usando a eliminação de Gauss.

$$\begin{cases} 2P_1+P_2+6P_3=10P_1 \\ 4P_1+5P_2+P_3=10P_2 \\ 4P_1+4P_2+3P_3=10P_3 \end{cases}$$

Dividindo estas equações por 10 e reescrevendo-as em formato matricial, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

Subtraindo o lado esquerdo do lado direito na equação matricial anterior, podemos reescrevê-la como um sistema homogêneo(no formato matricial)

$$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 \\ -0,4 & 0,5 & -0,1 \\ -0,4 & -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí temos:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 & 0 \\ -0,4 & 0,5 & -0,1 & 0 \\ -0,4 & -0,4 & 0,7 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -0,125 & -0,75 & 0 \\ 0 & 0,45 & -0,4 & 0 \\ 0 & -0,45 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -0,125 & -0,75 & 0 \\ 0 & 0,45 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Isolando P_1 obtemos:

$0,45P_2-0,4P_3=0 \Rightarrow P_2=\frac{0,4}{0,45}P_3 \Rightarrow P_2=\frac{8}{9}P_3$. Usando a primeira equação teremos:

$P_1-0,125P_2-0,75P_3=0 \Rightarrow P_1=\frac{3}{4}P_3+\frac{1}{8}P_2 \Rightarrow P_1=\frac{3}{4}P_3+\frac{1}{8}.\frac{8}{9}P_3 \Rightarrow P_1=\frac{3}{4}P_3+\frac{1}{9}P_3 \Rightarrow$

$P_1 = \frac{31}{36} P_3$
Assim a solução deste sistema homogêneo é:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Onde k é uma constante arbitrária. Esta constante é um fator de escala, que os proprietários podem escolher de acordo com sua conveniência. Por exemplo, se eles colocarem $k = 3$, de modo que os correspondentes salários, a saber, R\$ 93,00, R\$ 96,00 e R\$ 108,00, são aproximadamente R\$100,00.

Retrospecto

É possível verificar o resultado?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Que variações podem ser feitas?

Se fosse feita a seguinte variação: Três vizinhos tem hortas nos fundos de suas casas. O vizinho **A** cultiva tomates, o vizinho **B** cultiva milho e o vizinho **C** cultiva alface. Eles concordam em dividir a colheita entre eles como segue: **A** recebe $\frac{1}{2}$dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{4}$ da alface; **B** recebe $\frac{1}{3}$ dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{4}$ do alface; **C** recebe $\frac{1}{6}$ dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{2}$ da alface. Que preços os vizinhos devem dar às suas respectivas colheitas para satisfazer a condição de equilíbrio de uma economia fechada se a colheita de menor preço deve ter um preço de R\$ 100,00? Poderíamos proceder de forma semelhante? Tente encontrar uma solução com essa nova variação.

Capítulo 4

Determinantes

4.1 Introdução

A teoria dos determinantes tem origem em meados do século XVII, quando eram estudados processos para resolução de sistemas lineares. Essa teoria foi desenvolvida simultaneamente na Alemanha e no Japão pelos matemáticos, Leibniz (Gottfried Wilhelm von Leibniz - Leipzig, nascido em 1 de julho de 1646 — falecido em 14 de novembro de 1716) e Kowa (Seki Shinsuke Kowa, nasceu em 1642 - faleceu em 1708), ao solucionarem problemas de eliminações (escalonamento) necessárias à resolução de um sistema de **m** equações lineares e **n** incógnitas (BOYER, 1974).

Hoje em dia, embora seja um instrumento para resolução de sistemas, os determinantes são utilizados, por exemplo, no estudo da análise vetorial, essencial em todas as áreas que dependem das ciências exatas. Iremos conceituar determinante de uma matriz quadrada de ordem **n**, para qualquer valor de **n**, bem como abordar a discussão de um sistema linear através do determinante da matriz principal e além disso iremos apresentar algumas aplicações. Desenvolveremos ainda, o cálculo para encontrar a matriz inversa de uma determinada matriz quadrada.

Consideremos as duas situações a seguir:

Inicialmente consideremos os pontos A(0, 0), B(1, 5), C(5, 6) e D(4, 1) que são as coordenadas dos vértices de um paralelogramo em um sistema de coordenadas cartesianas XOY. Qual o valor da área do paralelogramo ABCD? Consideremos também os pontos A(0,0,0), B(1,2,0), C(-3,5,0) e D(1,1,4) que são as coordenadas espaciais desses vértices. Sabendo que $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ são arestas do paralelepípedo, qual o volume do paralelepípedo ABCDEFGP?

Uma família, por meio da reforma agrária, foi beneficiada com uma terra em forma de uma região triangular. Para confirmar se a área cedida estava correta, o INCRA (Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária) utilizou um GPS (sistema de posicionamento global) e, a partir de um sistema de coordenadas cartesianas, identificou que os vértices do triângulo eram os pontos $A(1,1)$, $B(2,1)$ e $C(2,2)$. Sabendo que as unidades são dadas em KM (quilômetros por hora), qual é a área recebida pela família?

Questionamentos como esse parece, a princípio, não ter nada haver com o estudo dos determinantes. Veremos, logo mais a frente, que na realidade os determinantes de matrizes de ordem 2 são caracterizados por paralelogramos e os determinantes de matrizes de ordem 3 são caracterizado por paralelepípedos. Essa caracterização também pode ser vista como uma aplicação dos determinantes à Geometria plana e espacial.

No capítulo anterior, resolvemos sistemas lineares pelo método do escalonamento. Desta forma, considere o sistema linear

$$S_1 \begin{cases} ax & + & by & = & p \\ cx & + & dy & = & q \end{cases}$$

Utilizando o método de escalonamento, obteremos o sistema linear

$$S_2 \begin{cases} ax & + & by & = & p \\ & & (ad-cb)y & = & (aq-cp)q \end{cases}$$

, que é equivalente ao sistema S_1 cuja matriz principal é

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Note, em S_2, que haverá um único valor de **y** que satisfaz a última equação se, somente se, o coeficiente de **y**, $ad - cb$, for diferente de zero e consequentemente haverá um único valor de **x** satisfazendo o sistema e, assim, o sistema será possível e determinado.

Observe que o coeficiente $ad - cb$ nada mais é do que a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. O coeficiente $ad - cb$ é chamado determinante da matriz principal $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ do sistema linear S_1.

Assim o determinante é um número real que está associado a uma matriz quadrada como também a um sistema linear e que nos dá informação acerca da resolução do sistema linear.

4.2 Conceitos e Definições

Definição 1: O determinante de uma matriz quadrada $M = [a_{11}]$ de ordem 1 é igual ao número real a_{11}. Essa definição provém do sistema 1×1, $S \;\; a_{11}x_1 = b_1$, cuja solução depende do coeficiente a_{11} . Note ainda que a matriz principal do sistema S é $M = [a_{11}]$.

Exemplo: O determinante da matriz A= $(-3) = -3$

Definição 2: O determinante de uma matriz quadrada M= $\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ c_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$ é dado por: $\det M = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Indicaremos por detM, o determinante associado à matriz quadrada M. Na seção anterior, vimos que o número real $\det M = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ está ligado a solução do sistema M= $\begin{cases} a_{11}x_1 + b_{12}x_2 = b_1 \\ c_{21}x_1 + d_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

Exemplo: O determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ pode ser obtido por:

detA= $2 \times 4 - 5 \times (-1) = 8 + 5 = 13$

Vimos até agora a definição de determinante associada às matrizes de ordem 1 ou ordem 2. De modo geral, na resolução de um sistema linear **n x n**, verifica-se um cálculo padrão que se mantém para qualquer valor de **n**. O número resultante desse cálculo é chamado de determinante.

Definição 3:

$$\text{Se A=}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, n \geq 2, \text{ então}$$

detA= $a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + ... + a_{1n}C_{1n}$, onde C_{ij}, $j \in \{1,2,3,...,n\}$, representa o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz obtida eliminando, em A, a linha i e a coluna j.

Observação:

Existe um resultado(técnica) muito interessante e prático, denominado de **regra de surrus**, que nos permite obter rapidamente o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3.

$$\text{Consideremos a matriz A=}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

A técnica consiste em:

1º) repetimos a primeira e segunda colunas à direita da matriz;

2º) multiplicamos os três elementos da diagonal secundária($a_3b_2c_1$) e os das paralelas a esta diagonal, e trocamos os sinais destes produtos;

3º) multiplicamos os três elementos da diagonal principal ($a_1b_2c_3$) e os das paralelas a esta diagonal;

4º) somamos os resultados obtidos.

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}b_{22}a_{13} - a_{32}a_3a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Exemplo:

$$\text{Obter o determinante D da matriz }\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teremos:

$$\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
3 & 4 & 3 & 3 & 4 \\
1 & 5 & 6 & 1 & 5 \\
2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
- & - & - & &
\end{array}$$

$$3 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 \quad - \quad 3 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\text{D} = 30 + 48 + 3 - 30 - 18 - 8 = 25$$

A regra de Sarrus é bastante utilizada em sala de aula. Muitos professores apresentam primeiramente esta regra para depois introduzir o Teorema de Laplace(Pierre Simon Laplace, nascido em 23 de março de 1749 — falecido me 5 de março de 1827), o qual vimos ser necessário para o cálculo de determinante de matrizes de ordem maior que 3. Na verdade, os problemas propostos no que diz respeito ao cálculo do determinante são em sua maioria problemas envolvendo, no máximo, matrizes quadradas de ordem 3. O mesmo acontece com sistemas de equações lineares e assim muitos dos nossos alunos sentem dificuldades em encontrar o determinante de uma matriz de ordem quatro por exemplo, ou resolver um sistema linear com 4 incógnitas e 3 equações.

O matemático francês Marquês de Laplace descobriu que, dada uma matriz quadrada de ordem **n**, é possível calcular seu determinante usando determinantes de matrizes de ordem $n-1$, sendo este desenvolvido segundo os elementos de qualquer linha ou coluna(o resultado será sempre o mesmo, qualquer que seja a linha ou coluna). Enunciaremos e aplicaremos essa regra por ter grande importância no estudo dos determinantes; ela é conhecida como Teorema de Laplace.

Assim, a partir dos determinantes de matrizes de ordem dois, calculamos os de ordem três, com os determinantes de ordem três calculamos os determinantes de ordem quatro e assim sucessivamente.

Para facilitar o entendimento sobre o Teorema de Laplace, vamos conhecer algumas definições.

Menor Complementar

Definição 4: Seja M uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. O menor complementar do elemento a_{ij} de M, denotada por MC_{ij} , é o determinante da matriz quadrada que se obtém eliminando a linha i e a coluna j da matriz M.

Exemplo 1: Considere a matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

i) O menor complementar do elemento a_{11} (retirando a 1ª linha e a 1ª coluna de M) é o determinante da matriz $D_{11} = [3]$, ou seja, $MC_{11} = 3$.

ii) O menor complementar do elemento a_{12} é o determinante da matriz $D_{12} = [-1]$, ou seja, $MC_{12} = -1$.

Cofator

Definição 5: Seja M uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. O cofator do elemento a_{ij} de M é o número real $A_{ij} = (-1)^{i+j} MC_{ij}$, em que MC_{ij} é o menor complementar de a_{ij}.

Exemplo 2:

Se $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, então:

• Cofator de a_{21}: temos que $MC_{21} = det \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = -2$ e assim $A_{21} = (-1)^{2+1} MC_{21} = (-1)^3(-2) = 2$.

• Cofator de a_{13}: temos que $MC_{13} = det \begin{bmatrix} o & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 1$ e assim $A_{13} = (-1)^{1+3} MC_{13} = (-1)^4() = 1$

Observação 1: Note que $A_{ij} = MC_{ij}$ se $i + j$ é par; $A_{ij} = -MC_{ij}$ se $i + j$ é ímpar.

Observação 2: Seja A' a matriz formada pelos cofatores da matriz A de ordem n, $n \geq 2$. Denominamos matriz adjunta de A, a matriz A'', tal que $A'' = (A')^t)$. A matriz adjunta de A geralmente é representada por $''adjA''$

Exemplo:

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Sua matriz dos cofatores é

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e sua adjunta é

$$adjA = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema de Laplace

O determinante associado a uma matriz quadrada M de ordem $n \geq 2$ é o número que se obtém pela soma dos produtos dos elementos de uma linha i (ou de uma coluna j) qualquer pelos respectivos cofatores, ou seja, $\det M = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$. (A demonstração desse resultado pode ser encontrado no Combinatória, matrizes e determinantes: 2º grau, do autor Aref Antar Neto.

Vejamos um exemplo:

Obter o valor de D= $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Usando a 1ª linha teremos:

D= $a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$.

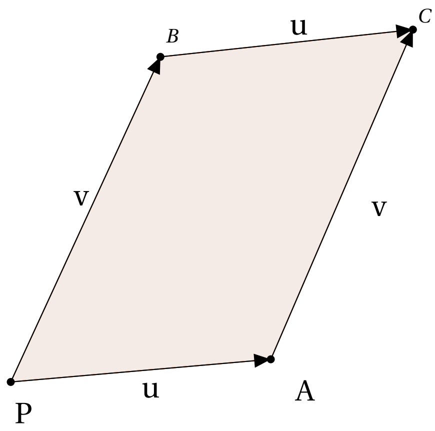
D= $3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Calculando cada determinante de 3ª ordem e substituindo o resultado obtemos:

D= $3 \cdot 1 \cdot (-39) + 1 \cdot (-1) \cdot (-17) - 1 \cdot 1(9) - 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = -117 + 17 - 9 - 2 = -111$

Vimos anteriormente que uma maneira interessante de se abordar os determinantes é perceber a sua caracterização geométrica. Os determinantes de ordem 2 podem ser interpretados (caracterizados) geometricamente como a área de um paralelogramo; os determinantes de ordem 3, como o volume de um paralelepípedo. Para isso, é necessário considerar tanto o paralelogramo quanto o paralelepípedo definidos pelos seus vetores, no plano e no espaço.

Consideremos o paralelogramo da figura a seguir:



O paralelogramo é definido pelos vetores **u** e **v**, pois, a partir do ponto **P**, os outros três vértices são $A = P + u$, $B = P + v$ e $C = P + u + v$. Sejam os vetores $u = (u_x, u_y)$ e $v = (v_x, v_y)$ dados em função de suas projeções nos eixos **x** e **y**; então a área do paralelogramo é dada pelo módulo do determinante $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$.(A demonstração desse resultado e do próximo podem ser encontrado no material de geometria analítica plana adotado no PROFMAT)

Por exemplo podemos determinar a área do paralelogramo ABCD, sabendo que as coordenadas cartesianas dos vértices A(0, 0), B(1, 5), C(5, 6) e D(4, 1) são da seguinte forma:

Os vetores u e v são, respectivamente:

$u = A - B = (1,5)$

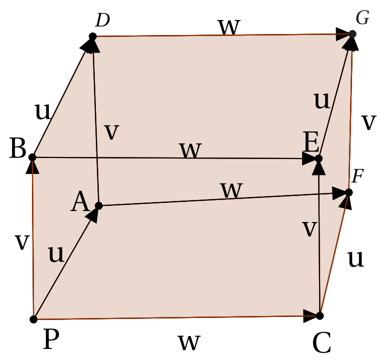
$v = D - A = (4,1)$

Logo:

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19$

Portanto, $A = 19$ unidades de área.

Consideremos o paralelepípedo da figura a seguir:



O paralelepípedo é definido pelos vetores **u**, **v** e **w**, pois, a partir do ponto P, os outros sete vértices são $A = P + u$, $B = P + v$, $C = P + w$, $D = P + u + v$, $E = P + v + w$, $F = P + u + w$ e $G = P + u + w + v$. Sejam os vetores $u = (u_x, u_y, u_z)$, $v = (v_x, v_y, v_z)$ e $w = (w_x, w_y, w_z)$ dados em função de suas projeções nos eixos x, y e z. Então o volume do paralelepípedo é dado pelo módulo do determinante $\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$

Por exemplo vamos determinar o volume do paralelepípedo ABCDEFGP, sabendo que $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ são arestas do paralelepípedo, e as coordenadas espaciais desses vértices são A(0,0,0), B(1,2,0), C(-3,5,0) e D(1,1,4).

Os vetores **u v** e **w** são, respectivamente:

$u = B - A = (1, 2, 0)$

$v = D - A = (1, 1, 4)$

$w = C - A = (-3, 5, 0)$

Assim teremos:

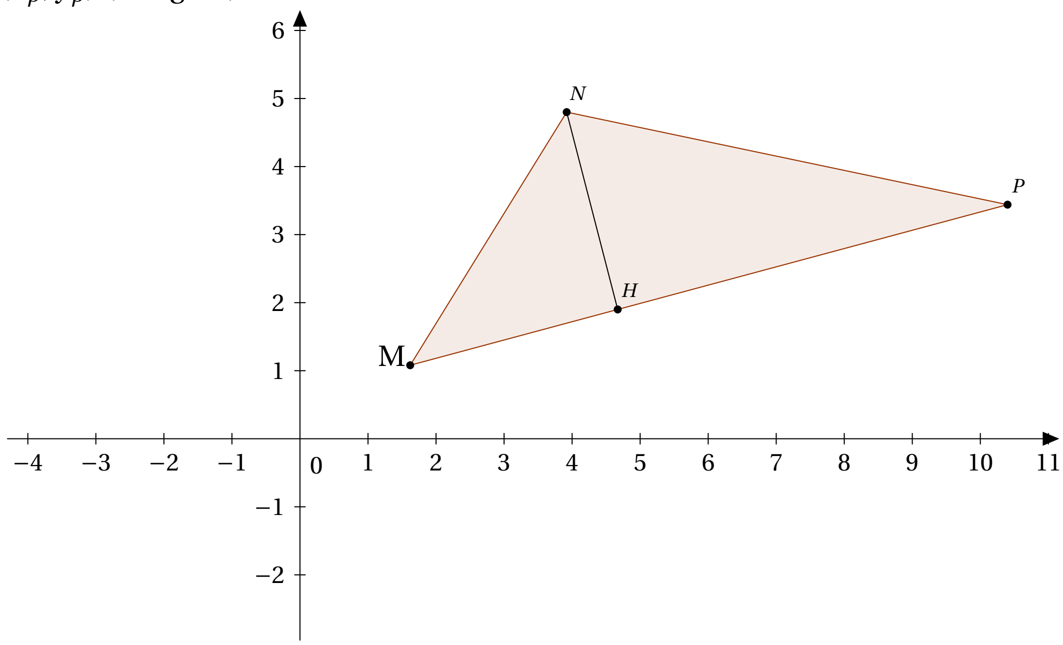
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 40 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -44$$

Logo, $V = 44$ unidades de volume.

Área de uma região triangular

Uma aplicação interessante dos determinantes é feita na obtenção da área de regiões triangulares, como veremos a seguir.

Consideremos um triângulo MNP com vértices de coordenadas $M(x_m, y_m)$, $N(x_n, y_n)$ e $P(x_p, y_p)$.(vê figura)



Com base na geometria plana, sabemos que a área da superfície limitada por um triângulo pode ser calculada pela expressão:

$$\frac{base \cdot altura}{2}$$

• Tomando o lado $\overline{MP}$ como base, sua medida é a distância entre os pontos M e P, a saber:

$$d_{(M,P)} = \sqrt{(x_m - x_p)^2 + (y_m - y_p)^2} \tag{4.1}$$

• A medida da altura $\overline{NH}$ é a distância entre o ponto N e a reta suporte do lado $\overline{MP}$. Para calcular essa distância, vamos inicialmente obter a equação da reta que passa por M e P, que pode ser obtida a partir do coeficiente angular da reta a partir das coordenadas dos pontos M e P. Assim, a equação pode ser escrita como

$$x(y_m - y_p) + y(x_p - x_m) + (x_m y_p - x_p y_m) = 0 \tag{4.2}$$

• Vamos usar a expressão da distância entre ponto e reta para calcular a distância entre N e a reta suporte de $\overline{MP}$.

$$d_{(N,MP)} = \frac{| x_n(y_m - y_p) + y_n(x_p - x_m) + (x_m y_p - x_p y_m) |}{\sqrt{(x_m - x_p)^2 + (y_m - y_p)^2}} \tag{4.3}$$

• Por fim, a área (A) do triângulo é:

$$A = \frac{1}{2} \cdot d_{(M,P)} \cdot d_{(N,MP)}$$

usando (4.1) e (4.3), vem:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_m - x_p)^2 + (y_m - y_p)^2} \cdot \frac{| x_n(y_m - y_p) + y_n(x_p - x_m) + (x_m y_p - x_p y_m) |}{\sqrt{(x_m - x_p)^2 + (y_m - y_p)^2}} \tag{4.4}$$

Observe que a expressão obtida(4.4) coincide com (4.2) quando x e y são substituídos, respectivamente, por x_n e y_n. Assim usando a volta da regra de surrus podemos escrever que:

$$A = \frac{1}{2} \cdot | x_n(y_m - y_p) + y_n(x_p - x_m) + (x_m y_p - x_p y_m |= \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} x_M & y_M & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{matrix} \right\| \tag{4.5}$$

Assim, podemos encontrar a área de uma região triangular, uma vez conhecendo as coordenadas dos vértices, a partir do uso de determinantes.

Com isso vamos agora voltar à situação proposta inicialmente na introdução.(página 48)

Uma família, por meio da reforma agrária, foi beneficiada com uma terra em forma de uma região triangular. Para confirmar se a área cedida estava correta, o Incra utilizou um GPS e, a partir de um sistema de coordenadas cartesianas, identificou que os vértices do triângulo eram os pontos $A(1,1)$, $B(2,1)$ e $C(2,2)$. Sabendo que as unidades são dadas em KM, qual é a área recebida pela família?

Uma solução:

Compreensão do problema

Qual a incógnita?

Quais são os dados?

Qual a condicionante?

Queremos encontrar a área da terra, cujo formato é triangular. São dados as coordenadas dos vértices do triângulo.

Estabelecimento de um plano

Já viu esse problema antes?

Conhece um problema correlato?

Os dados são suficientes para solucionar o problema?

Como o terreno tem o formato triangular e são dadas as coordenadas cartesianas dos vértices, então podemos usar a expressão para cálculo de área de um triângulo.

Execução do plano

Assim usando a expressão (4.5) para cálculo da área de triângulo teremos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mid (1+2+4)-(2+2+2) \mid = \mid 7-6 \mid = \mid 1 \mid = 1$$

Assim temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,5$$

Portanto a área recebida pela família é de $0,5km^2$.

Retrospecto

É possível verificar o resultado?

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Propriedades dos determinantes

As propriedades dos determinantes, que discutiremos a seguir são válidas quaisquer que seja a ordem da Matriz. No entanto, nas demonstrações que seguem, utilizaremos determinantes de ordem 2 e 3, para facilitar a compreensão.

P_1) Se uma matriz quadrada M possui uma fila (linha ou coluna) nula, seu determinante é zero.

Para verificar basta tomar o Teorema de Laplace nessa linha ou coluna e seguirá o resultado.

P_2) Se trocarmos duas linhas ou duas colunas de uma matriz quadrada, seu determinante troca somente de sinal.

Demonstração:

Consideremos as matrizes $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$, observe que trocamos de posição as linhas 1 e 3 em M para obtermos a matriz N.

Assim temos:

$$detM = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

$$detN = \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = ceg + bdi + afh - aei - bfg - cdh = -(aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afg) = -detM$$

P_3)Se os elementos correspondentes de duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada M forem iguais, seu determinante será nulo, isto é, det $M = 0$.

Demonstração:

Seja $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$, usando a regra de surrus teremos:

$$detM = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = aec + abf + bcd - aec - abf - bcd = 0$$

P_4) Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou uma coluna) por um número real $k(k \neq 0)$, o determinante da nova matriz é o determinante da matriz original multiplicado por k.

Demonstração:

Consideremos a matriz $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, cujo determinante é $aei + bfg + cdh - ceg -$ $bdi - afh$.

Agora multiplicando, por exemplo, a 1ª linha de M por k teremos:

$M' = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, cujo determinante é $detM' = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = kaei + kbfg +$ $kcdh - kceg - kbdi -$
$kafh = k(aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh) = kdetM$

Em geral, se multiplicamos todos os elementos de uma matriz quadrada de ordem **n** por um número $k \neq 0$, seu determinante será multiplicado por k^n, ou seja: $Det(k \cdot A) = k^n \cdot DetA$.

Demonstração:

Sendo $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, cujo determinante é $aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$, tem-se:

$detM' = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{vmatrix} = kakeki + kbkfkg + kckdkh - kckekg - kbkdki - kakfkh = k^3aei + k^3bfg +$
$k^3cdh - k^3ceg - k^3bdi - k^3af = k^3(aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh) = k^3 \cdot detM.$

P_5) Se uma matriz possui duas linhas (ou duas colunas) proporcionais, seu determinante será nulo.

Dizer que duas linhas são proporcionais significa dizer que os elementos de uma delas são $k(k \neq 0)$ vezes os elementos correspondentes da outra.

Demonstração:

Seja $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{pmatrix}$. Usando a propriedade P_3 e P_4, teremos: $detM = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$

P_6) O determinante de uma matriz quadrada M é igual ao determinante da matriz transposta de M, isto é, det$M$ =det(M^t).

Demonstração:

Sendo $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ e $M^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ a sua transposta teremos:

$detM = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh = aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi = detM^t$.

P_7) (Teorema de Binet) Sejam M e N duas matrizes quadradas de mesma ordem. Então $det(MN) = detM.detN$.

Demonstração:

Sejam $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, duas matrizes quadradas de mesma ordem. Calculando os determinantes teremos:

$detM = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ e $detN = \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = eh - fg$,multiplicando temos:

$detM \cdot detN = (ad - cb) \cdot (eh - fg) = adeh + cdfg - adfg - cbeh$

Po outro lado temos:

$det(M{\cdot}N) = det \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) = aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg = adeh + cdfg - adfg - cbeh = detM \cdot detN.$

P_8) (Teorema de Jacobi) Se somarmos a uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada uma outra linha (ou coluna) multiplicada por um número qualquer, o determinante da matriz não se altera.

Demonstração:

Consideremos a matriz $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ e a matriz $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+ka & h+kb & i+kc \end{pmatrix}$.

Calculando seus determinantes teremos:

detM $= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$

detN $= ae(i+kc) + bf(g+ka) + cd(h+kb) - ce(g+ka) - bd(i+kc) - af(h+kb) =$
$aei + aekc + bfg + bfka + cdh + cdkb - ceg - ceka - bdi - bdkc - afh - afkb =$
$aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afg =$ **detM**.

P_9)Se uma linha ou coluna de uma matriz quadrada é combinação linear de duas ou mais das linhas ou colunas restantes, seu determinante é zero.

Demonstração:

Consideremos a matriz $M = \begin{pmatrix} a & b & ma+nb \\ c & d & mc+nd \\ e & f & me+nf \end{pmatrix}$. Calculando seu determinante teremos:

$detM = ad(me+nf) + be(mc+nd) + cf(ma+nb) - ed(ma+nb) - bc(me+nf) - af(mc+nd) = adme + adnf + bemc + bend + cfma + cfnb - edma - ednb - bcme -$

$bcnf - afmc - afnd = (adme - edma) + (adnf - afnd) + (bemc - bcme) + (bend - ednb) + (cfma - afmc) + (cfnb - bcnf) = 0.$

O conhecimento destas propriedades dos determinantes nos permite, por exemplo, simplificar o cálculo de determinantes de ordem maior que 3, aos quais não podemos aplicar diretamente a regra de Sarrus.

Determinação da Matriz Inversa

Como vimos no Capítulo 2 uma matriz quadrada M de ordem n é invertível se, e somente se, existe uma matriz M^{-1} tal que:$M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I_n$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n.

Teorema: Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se, e somente se, det $A^{-1} \neq 0$.

Demonstração:

Sendo A de ordem n, então A é invertível se, e somente se, existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \Leftrightarrow$
det$(A^{-1} \cdot A)$ = det $I_n \Leftrightarrow$ det $A^{-1} \cdot$ det A = det I_n, veja propriedade 7 (P_7).

Como det $I_n = 1$, teremos que: det $A^{-1} \cdot det$A=1$\Leftrightarrow det(A^{-1}) = \dfrac{1}{detA} \Leftrightarrow detA \neq 0$. Portanto a matriz quadrada A de ordem n é invertível se, e somente se, $detA \neq 0$.

Note que, durante o processo de demonstração do teorema, obtivemos que $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$. Desta forma, podemos concluir que matrizes inversas têm determinantes inversos.

Teorema: Se $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, então:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} + ... + a_{in}A_{kn} = 0, \text{ se } i \neq k \text{ e}$$
$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + a_{3j}A_{3k} + ... + a_{nj}A_{nk} = 0, \text{ se } j \neq k$$

Esse teorema nos diz que se somarmos os produtos dos elementos de qualquer linha (ou coluna) com os cofatores correspondentes de qualquer outra linha (ou coluna), obteremos zero.

Exemplo:

Consideremos a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.
O cofator dos elementos da 1ª linha são $(-1)^{1+1} \times 7$ e $(-1)^{1+2} \times 2$, ou seja, 7 e -2. Multiplicando a 2ª linha pelos respectivos cofatores da 1ª linha teremos: $2 \times 7 + 7 \times (-2) = 14 - 14 = 0$.

Regra de Cramer[1]

No capítulo anterior vimos como resolver um sistema linear usando o método do escalonamento. Veremos agora a regra de Cramer que nada mais é do que uma aplicação dos determinantes na resolução de sistemas lineares.

Um sistema linear $n \times n$, $S = \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}x_n & + & ... & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$, onde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

é denominada matriz principal do sistema S, é possível e determinado se, e somente se, det $A \neq 0$ e a sua única solução é dada por $x_1 = \dfrac{detA_{x_1}}{detA}$, $x_2 = \dfrac{detA_{x_2}}{detA}$, ..., $x_n = \dfrac{detA_{x_n}}{detA}$ onde $A_{x_1}, A_{x_2}, ..., A_{x_n}$ são as matrizes obtidas substituindo-se, respectivamente, a coluna dos coeficientes de $x_1, x_2, ..., x_n$ pela coluna dos termos independentes.

A regra de Cramer decorre do fato de que podemos representar o sistema S na forma matricial $A \cdot X = B$, onde A é a matriz principal (ou dos coeficientes), X a matriz das incógnitas e B matriz dos termos independentes.

Se $detA \neq 0$ então a matriz A admite uma inversa A^{-1} e assim:

$A \times X = B \Rightarrow A^{-1}(A \times X) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A) \times X = A^{-1}B \Rightarrow I_n \times X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

Logo, concluímos que existe uma única matriz X que é solução de $A \cdot X = B$, e, portanto, o sistema S é possível e determinado.

Observações:

Com base na regra de Cramer podemos classificar um sistema linear $n \times n$:

I) Quando $detA \neq 0$, o sistema é possível e determinado.

II) Quando $detA = 0$ e $detA_{x_1} = detA_{x_2} = ... = detA_{x_n} = 0$, o sistema é possível e indeterminado ou impossível.

III) Quando $detA = 0$ e pelo menos um dos determinantes, $detA_{x_1}, ..., detA_{x_n}$, for diferente de zero, o sistema é impossível.

IV) Os sistemas lineares homogêneos, como são sempre possíveis, são os únicos que podem ser classificados apenas a partir do cálculo do determinante. Como não há chance de o sistema homogêneo ser impossível, se o determinante for nulo, o sistema

[1] Gabriel Cramer (1704-1752) foi um matemático suíço. O trabalho mais amplamente conhecido de Cramer, chamado Introduction à l'analisyse des lignes courbes algébriques, de 1750, é um estudo da classificação de curvas algébricas; a regre de Cramer aparece nos apêndices.

homogêneo será Indeterminado. Assim podemos afirmar que um sistema linear homogêneo com o mesmo número de equações e de incógnitas tem uma solução não-trivial se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes é zero.

Mesmo assim, para resolver o sistema quando o determinante for nulo, teremos que escaloná-lo.

Vejamos um exemplo:

Vamos resolver o sistema linear $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ -x - 2y - 3z = -3 \\ 4x - y - z = 4 \end{cases}$

Uma solução:

Sendo $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$, o sistema é possível e determinado, isto é possui solução única. Assim podemos usar a regra de Cramer:

$$D_x = \begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10-24-3-8+15-6 = -36 \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{-36}{-36} = 1.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3+60+4-12+12-5 = 72 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{72}{-36} = -2.$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8-24-5-40-3-8 = -72 \Rightarrow z = \frac{D_z}{D} = \frac{-72}{-36} = 2.$$

Assim, $S = (1, -2, 2)$.

Observação: Vejamos um exemplo em que $detA = 0$ e $detA_{x_1} = detA_{x_2} = ... = detA_{x_n} = 0$:

Consideremos o sistema linear $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$

Neste sistema temos $detA = detA_x + detA_y = detA_z = 0$ e no entanto o sistema é impossível.

4.3 Aplicações e Resolução de Problemas

Aplicação 1 - Um círculo por três pontos.

Suponha que (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são três pontos distintos não-colineares do plano. Da Geometria Analítica sabemos que existe um único círculo que passa por esses pontos, digamos,

$$c_1(x^2 + y^2) + c_2 x + c_3 y + c_4 = 0, \tag{4.6}$$

que passa por estes três pontos. Substituindo as coordenadas destes pontos nesta equação, obtemos

$$c_1(x_1^2 + y_1^2) + c_2 x_1 + c_3 y_1 + c_4 = 0, \tag{4.7}$$

$$c_1(x_2^2 + y_2^2) + c_2 x_2 + c_3 y_2 + c_4 = 0, \tag{4.8}$$

$$c_1(x_3^2 + y_3^2) + c_2 x_3 + c_3 y_3 + c_4 = 0. \tag{4.9}$$

As equações (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9) formam um sistema linear homogêneo com uma solução não-trivial em c_1, c_2, c_3 e c_4. Assim, o determinante da matriz de coeficientes é zero(Observação IV da regra de Cramer):

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.10}$$

Esta é a equação do círculo em formato de determinante. . Vejamos um exemplo:

Sejam $A(1,7)$, $B(6,2)$ e $D(4,6)$ três pontos que pertencem a um círculo λ. Determine a equação do círculo.

Uma solução:

Substituindo as coordenadas dos três pontos na equação (4.10) teremos:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que se reduz a $10(x^2 + y^2) - 20x - 40y - 200 = 0$. A forma padrão desta equação é $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Assim, o círculo tem centro em $(1,2)$ e raio $\sqrt{5}$.

Poderíamos, neste momento, levantar algumas questões:

(I) Qual é o número mínimo de pontos para se ter uma elipse completamente determinada?

(II) Seria possível obter-se um resultado semelhante ao apresentado acima em termos de determinantes para se caracterizar uma elipse?

Aplicação 2 - Uma esfera por quatro pontos.

Suponha que (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) e (x_4, y_4, z_4) são quatro pontos distintos não-colineares do espaço. Da Geometria Analítica sabemos que existe uma única esfera, digamos,

$$c_1(x^2 + y^2 + z^2) + c_2 x + c_3 y + c_4 z + c_5 = 0 \tag{4.11}$$

que passa por estes quatro pontos. Substituindo as coordenadas destes pontos nesta equação, obtemos

$$c_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + c_2 x_1 + c_3 y_1 + c_4 z_1 + c_5 = 0 \tag{4.12}$$

$$c_1(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + c_2 x_2 + c_3 y_2 + c_4 z_2 + c_5 = 0 \tag{4.13}$$

$$c_1(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) + c_2 x_3 + c_3 y_3 + c_4 z_3 + c_5 = 0 \tag{4.14}$$

$$c_1(x_4^2 + y_4^2 + z_4^2) + c_2 x_4 + c_3 y_4 + c_4 z_4 + c_5 = 0 \tag{4.15}$$

As equações (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15) formam um sistema linear homogêneo com uma solução não-trivial em c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5. Assim o determinante da matriz de coeficientes é zero(observação IV da regra de Cramer):

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.16}$$

Esta é a equação da esfera em formato de determinante.

Vejamos um exemplo:

Sejam $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$, $C(-1,0,0)$ e $D(0,1,0)$ três pontos que pertencem a uma esfera. Determine a equação da esfera.

Uma solução

Substituindo as coordenadas dos quatro pontos na equação (4.16) teremos:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 1^2+0^2+0^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0^2+0^2+1^2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ (-1)^2+0^2+0^2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0^2+1^2+0^2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Daí teremos:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2)\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(-2)\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2)(1)\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2)\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(-2)(-1)(1)\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2)-2 = 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 1$$

Assim, a esfera tem centro em $(0,0,0)$ e raio 1.

Considerações Finais

É frustrante quando um aluno diz ao professor que de nada interessa os conteúdos de Matemática que lhe são apresentados, pois não consegue vislumbrar uma utilidade, uma situação prática que exija tal conhecimento. É ainda mais frustrante quando o professor não consegue lançar mão de uma situação em que o aluno possa perceber a relação entre os conteúdos e situações do seu cotidiano ou algo próximo, prático. Sabemos que é muito difícil elaborar situações problemas ou identificar aplicações de determinados conteúdos à situações do cotidiano, mas o que tenho percebido, em minhas experiências em sala de aula, é que vale apena esforçar-se para apresentar os conteúdos de Matemática de forma mais concreta.

O ser humano, em sua vida, quase sempre se depara com situações novas em que deve agir com criatividade, independência e espírito explorador. É possível através de situações-problema desenvolver no aluno desde cedo este tipo de iniciativa. Um bom problema pode tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras, pois proporcionam um maior envolvimento no processo e resolução aguçando a criatividade e colaborando com o desenvolvimento de estratégias que possam ser aplicadas em diferentes situações.

Quando fazemos a apresentação de um determinado conteúdo de Matemática fazendo-se inicialmente uma abordagem preliminar, por exemplo apresentando uma situação problemas envolvendo algo que diz respeito a realidade próxima deles para que eles possam apresentarem suas idéias, sugestões, etc tem-se aí conseguido com que os alunos participem das aulas interagindo com o professor e com os colegas de classe. Percebe-se então a importância da resolução de problemas e das aplicações como metodologia para o ensino da Matemática. É muito mais interessante fazer algo quando se tem um motivo, um objetivo. Assim acreditamos que esse trabalho possa dar ao professor mais uma opção para desenvolver suas atividades com os seus alunos e assim contribuir com o sucesso do ensino-aprendizagem de Matemática.

Apêndice

Apresentaremos nesse apêndice a demonstração de um importante resultado sobre a relação de uma matriz e sua adjunta. Apresentaremos ainda a demonstração de um resultado importante que é a obtenção da inversa de uma matriz a partir de sua adjunta.

Teorema: Se $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, então $A \times (adjA) = (adjA)A = det(A).I_n$.

Demonstração:

$$\text{i)}\, A(adjA) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & A_{n1} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

O elemento (i, j) na matriz produto $A(adjA)$ é dado por:

$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} + ... + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} detA & sei = j \\ 0 & sei \neq j \end{cases}$. Isso implica em:

$$A(adjA) = \begin{pmatrix} detA & 0 & ... & 0 \\ 0 & detA & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & detA \end{pmatrix} = det(A) \cdot I_n$$

$$\text{ii)}\, (adjA)A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & A_{j1} & \vdots & A_{n1} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

O elemento (i,j) na matriz produto $(adjA)A$ é dado por:

$A_{j1}a_{i1}+A_{j2}a_{i2}+A_{j3}a_{i3}+...+A_{jn}a_{in}=\begin{cases} detA & sei=j \\ 0 & sei\neq j \end{cases}$ Isso implica em:

$$(adjA)A=\begin{pmatrix} detA & 0 & ... & 0 \\ 0 & detA & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & detA \end{pmatrix}=det(A)\cdot I_n$$

Corolário:

Se A é uma matriz nxn e $det(A)\neq 0$, então $A^{-1}=\dfrac{1}{detA}\cdot(adjA)$.

Demonstração:

Se $A\times(adjA)=(adjA)A=det(A).I_n$ e $det(A)\neq 0$, então

$$A\left[\frac{1}{det(A)}(adjA)\right]=\left[\frac{1}{det(A)}(adjA)\right]A=I_n \qquad (1)$$

Pela definição de matriz inversa, tem-se:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), vem:

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}\cdot(adjA)$$

Esse resultado é uma aplicação muito forte dos determinantes na obtenção da inversa de uma matriz dada.

Referências Bibliográficas

[1] *ABBOTT, F. B. - Estudo de caso sobre estratégia de resolução de problemas de Matemática no Ensino Médio, UFRS, 2011 Arquivo consultado em 24 de abril de 2013 às 10:00.*

[2] *MACHADO, A. dos S.,* - Matemática, temas e metas . *Sistemas lineares e análises combinatória, São Paulo: 1986.*

[3] *DANTE, L. R..* - Matemática: contexto e aplicações. - *São Paulo: Ática, 2010.*

[4] *IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. - Matemática: ciências e aplicações, 3 ensino médio. - 6. ed. - São Paulo: Saraiva, 2010.*

[5] *ANTON, H, Álgebra linear com aplicações; trad. Claus Ivo Doering. - 8. ed. - Porto Alegre: Bookman, 2001.*

[6] *POLYA, G. - A arte de resolver problemas : um novo aspecto do método matemático / G. Polya ; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. - 2.reimpr. - Rio de Janeiro: interciência, 1995*

[7] *PEREIRA, L. F. A.; HAFFNER J. F. - Disponivel em http://www.feng.pucrs.br/gacs/new/disciplinas/asl/apostilas/Aula01.pdf - Arquivo consultado em 12 de fevereiro de 2013 as 14:00.*

[8] *SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B."METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS" - Disponivel em http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo-producoes/docs-24/metodologia.pdf - Arquivo consultado em 02 de abril de 2013 as 19:00.*

[9] *BALDIN, Y. Y.; FURUYA, Y. K. S. - Geometria Analítica para todos com Octave - São Carlos: EdUFSar, 2011*

[10] *PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: ensino médio – Parte III. MEC, Brasília, 2000.*

[11] *The teaching and assessment of mathematical problem solving, de R. I. Charles e E. A. Silver (Eds.), Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989.*

[12] *SALDANHA, M. de A., NOGUTI, M. Y. TITULO:RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA METODOLOGIA ALTERNATIVA PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NAS ESCOLAS DO CASE III EIEMAT - Escola de Inverno de Educação Matemática - 1º Encontro Nacional PIBID - Matemática, 2012. Disponivel em http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE-Saldanha-Mayara.pdf - Arquivo consultado em 12 de fevereiro de 2013 as 15:00.*

[13] *PREIRA, L. F. A.; Haffner, J. F. Disponivel em http://www.feng.pucrs.br/ gacs/new/disciplinas/asl/apostilas/ Aula01.pdf - Arquivo consultado em 15 de fevereiro de 2013 as 16:00.*

[14] *NETO, A. A. - Combinatória, matrizes e determinantes: 2º grau / (et al.) Fortaleza: Ed. Vestseller, 2009. (Noções de matemática; v.4)*

[15] *PROFMAT - Geometria Analítica Plana. Disponível em http://moodle.profmat-sbm.org.br - Arquivo consultado em 18 de fevereiro de 2013 as 16:00.*

[16] *Boyer, C. B. [1974]. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.*