UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

BRUNO PEREIRA ALVES

AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS COMPLEXAS NO CONTEXTO DA INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO ENSINO MÉDIO

Boa Vista, RR

2016

BRUNO PEREIRA ALVES

AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS COMPLEXAS NO CONTEXTO DA INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira

Boa Vista, RR

2016

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

A472f Alves, Bruno Pereira.

As funções trigonométricas hiperbólicas complexas no contexto da iniciação científica do ensino médio / Bruno Pereira Alves. – Boa Vista, 2016.

94 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1 –Números complexos. 2 – Trigonometria hiperbólica. 3 – Trigonometria hiperbólica complexa. I – Título. II – Oliveira, Joselito de (orientador).

CDU – 541.11.6

BRUNO PEREIRA ALVES

AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS COMPLEXAS NO CONTEXTO DA INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Joselito de Oliveira
Orientador

Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodríguez
UNIR

Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima
UFRR

Boa Vista, RR
2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades, e inpiração para desenvolver este trabalho.

A esta universidade e todo o seu corpo docente, por oferecer aulas com qualidade que facilitaram meu aprendizado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Joselito de Oliveira, por direcionar meu trabalho sempre no caminho do aprendizado, e por motivar meus estudos sempre.

À minha grande amiga, Sebastiana Cleide Japiassú, por sempre me apoiar nas dificuldades, e por acreditar em mim acima de tudo.

E a todos que, diretamente ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

Nesta dissertação apresenta-se um estudo das funções trigonométri-cas hiperbólicas complexas e suas propriedades, com foco no ensino médio. A pesquisa foi motivada pela pouca importância que se tem dado aos números complexos, conforme registra os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Além disso, a aplicabilidade das funções trigonométricas reais nas ciências exatas nos motiva e nos conduz ao estudo do caso complexo. Mostra-se a possibilidade, através de uma abordagem simplificada do referido tema, do estudante de iniciação científica do ensino básico ter acesso a essa rica cultura matemática. Apresenta-se inicialmente um breve histórico da origem dos números complexos, depois as funções trigonométricas complexas e suas inversas. Em seguida, estuda-se as funções trigonométricas hiperbólicas complexas e suas inversas, juntamente com as propriedades que as caracterizam. E, por fim, compara-se as funções trigonométricas hiperbólicas complexas com as funções trigonométricas complexas.

Palavras-chave: Números complexos, Trigonometria hiperbólica, Trigonometria hiperbólica complexa.

ABSTRACT

This thesis presents a study of the hyperbolic trigonometric functions complex and its properties, focusing on high school. The research was motivated the little importance has been given to complex numbers as records the National Curriculum Parameters (PCN). Moreover, the applicability of the real trigonometric function in the exact sciences motivates us and leads us to study the complex case. Shows the possibility, through a simplified approach to that theme, undergraduate student of basic education have access to this rich mathematical culture. It presents initially the complex trigonometric functions and their inverses. One studies of the complex hyperbolic trigonometric functions and their inverses, with the properties which characterize them. And finally, the complex hyperbolic trigonometric functions is matched by the complex trigonometric functions.

Key-words: Complex numbers. Complex trigonometry. Complex Hyperbolic Trigonometric.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1 Gráfico da Função Seno Hiperbólico 10
2 Gráfico da Função Coseno Hiperbólico 14
3 Gráfico da Função Tangente Hiperbólico 16
4 Plano Complexo 26

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	**9**
1	**PRELIMINARES**	**10**
1.1	FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS REAIS	10
1.1.1	**Estudo da Função Seno Hiperbólico**	**10**
1.1.2	**Estudo da Função Cosseno Hiperbólico**	**13**
1.1.3	**Estudo da Função tangente Hiperbólico**	**16**
1.2	FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS INVERSAS REAIS	19
1.2.1	**Função Inversa da Função Seno Hiperbólico**	**19**
1.2.2	**Função Inversa da Função Cosseno Hiperbólico**	**20**
1.2.3	**Função Inversa da Função Tangente Hiperbólico**	**21**
2	**FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMPLEXAS**	**22**
2.1	OS NÚMEROS COMPLEXOS	22
2.1.1	**Forma Algébrica e Trigonométrica**	**22**
2.1.2	**Fórmula de Euler**	**27**
2.2	EXPONENCIAL E LOGARITMOS EM $\mathbb{C}$	28
2.3	FUNÇÕES COMPLEXAS	32
2.4	FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMPLEXAS	34
2.4.1	**Função Seno e Suas Propriedades**	**35**
2.4.2	**Função Cosseno e Suas Propriedades**	**36**
2.4.3	**Função Tangente e Suas propriedades**	**38**
2.4.4	**Função Cossecante**	**40**
2.4.5	**Função Secante**	**41**
2.4.6	**Função Cotangente**	**41**
2.4.7	**Propriedades das Funções Trigonométricas em $\mathbb{C}$**	**42**
2.5	FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS COMPLEXAS	46
2.5.1	**Função Seno Inversa**	**46**
2.5.2	**Função Cosseno Inversa**	**47**
2.5.3	**Função Tangente Inversa**	**47**
2.5.4	**Função Cossecante Inversa**	**48**
2.5.5	**Função Secante Inversa**	**49**
2.5.6	**Função Cotangente Inversa em $\mathbb{C}$**	**50**
3	**FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS COMPLEXAS**	**52**
3.1	FUNÇÃO SENO HIPERBÓLICO	52
3.2	FUNÇÃO COSSENO HIPERBÓLICO	53
3.3	FUNÇÃO TANGENTE HIPERBÓLICO	55
3.4	FUNÇÃO SECANTE HIPERBÓLICO	57

3.5 FUNÇÃO COSSECANTE HIPERBÓLICO 58
3.6 FUNÇÃO COTANGENTE HIPERBÓLICO.. 60
3.7 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS 60
3.8 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS INVERSAS 65
3.8.1 Função Inversa da Função Seno Hiperbólico 66
3.8.2 Função Inversa da Função Cosseno Hiperbólico 67
3.8.3 Função Inversa da Função Tangente Hiperbólico 69
3.8.4 Função Inversa da Função Cossecante Hiperbólico...................... 70
3.8.5 Função Inversa da Função Secante Hiperbólico 72
3.8.6 Função Inversa da Função Cotangente Hiperbólico 74
3.9 RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS E AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM $\mathbb{C}$ 75
3.10 COMPARAÇÃO ENTRE AS IDENTIDADES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS COMPLEXAS.............................. 78
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS... 80
REFERÊNCIAS 81
APÊNDICE A DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA INVERSA COMPLEXA 82
APÊNDICE B EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO......................... 95

INTRODUÇÃO

A Matemática tem se desenvolvido ao longo dos anos devido às necessidades do homem. Porém, é importante lembrar que o conhecimento matemático, além de ser uma ferramenta útil na resolução de problemas, possui seus conceitos de natureza científica e que, mesmo que não tenha aplicabilidade imediata no contexto do aluno, tem sua elevada importância como ciência. Por isso, faz-se faz necessário que o estudante do Ensino Médio a conheça a fim de desenvolver suas potencialidades de aprendizagem matemática e de produção científica.

As funções trigonométricas, por terem a característica de serem periódicas, podem ser aplicadas a diversas áreas do conhecimento, tais como: estudo do som, das correntes elétricas, dos movimentos oscilatórios e outros que possuem uma natureza semelhante. Já as funções trigonométricas hiperbólicas complexas também são importantes, não só do ponto de vista matemático, mas por sua aplicabilidade. Neste contexto, observamos a importância de se estudar a teoria das funções trigonométricas hiperbólicas complexas de forma simples, de modo a facilitar o aprendizado do estudante do Ensino Médio através da iniciação científica, como parte flexível do currículo, veja (BRASIL, 2006).

A pesquisa está estruturada em 3 capítulos. No capítulo 1 serão apresentadas as propriedades mais importantes das funções trigonométricas hiperbólicas em $\mathbb{R}$. No capítulo 2 apresentaremos o conjunto dos números complexos, as funções trigonométricas complexas e suas propriedades. No capítulo 3, principal parte desta dissertação, são apresentadas as funções trigonométricas hiperbólicas complexas e suas inversas, com suas propriedades. Nesta dissertação, encontra-se, também, um apêndice onde apresenta-se o método do cálculo das funções trigonométricas hiperbólicas complexas inversas.

1 PRELIMINARES

1.1 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS REAIS

Nesta seção serão apresentadas as definições das funções: seno, cosseno e tangente hiperbólicos; como também, a demonstração das suas propriedades mais importantes. Veja em (SANTOS, 2014).

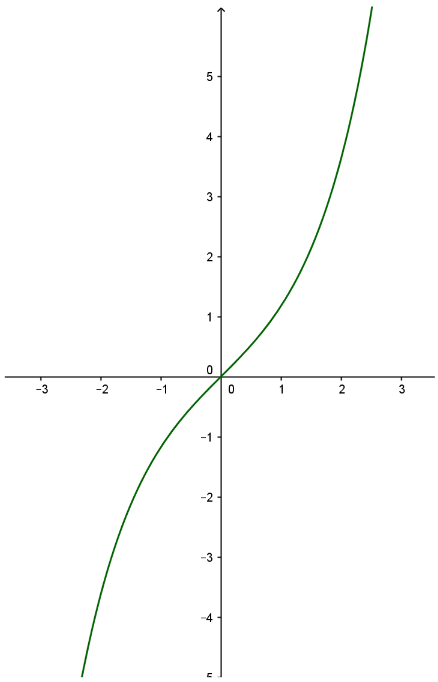
Os gráficos das funções seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e tangente hiperbólico, que serão apresentados a seguir, foram construídos utilizando o software GeoGebra.

1.1.1 Estudo da Função Seno Hiperbólico

Definição 1.1.1. *A função seno hiperbólico* $senh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é definida por:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Figura 1: Gráfico da Função Seno Hiperbólico



Fonte: Autor

A função seno hiperbólico é:

i) Ímpar, isto é $senh(-x) = -senhx$.

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} senh\,(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} \\ &= -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \\ &= -senh\,x. \end{aligned}$$

□

ii) Injetiva.

Demonstração. Dados x_1,$x_2 \in \mathbb{R}$, , tais que $senh(x_1) = senh(x_2)$, então, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} &= \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \\ e^{x_1} - e^{-x_1} &= e^{x_2} - e^{-x_2} \\ e^{x_1} + e^{-x_2} &= e^{x_2} + e^{-x_1} \\ \frac{e^{x_1+x_2} + 1}{e^{x_2}} &= \frac{e^{x_1+x_2} + 1}{e^{x_1}} \\ \frac{1}{e^{x_2}} &= \frac{1}{e^{x_1}} \\ e^{x_1} &= e^{x_2} \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Assim, $senh(x_1) = senh(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$; logo, a função seno hiperbólico é injetiva. □

iii) Sobrejetiva.

Demonstração: Dado $y \in \mathbb{R}$, devemos mostrar que $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $senh(x) = y$.

Caso exista, teremos:

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = y.$$

Daí,

$$e^{x} - e^{-x} = 2y$$

Como $e^x \neq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{x}} = 2y.$$

Logo,

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \text{ ou } e^x = y - \sqrt{y^2+1}.$$

Visto que para cada $y \in \mathbb{R}$, $y + \sqrt{y^2+1} > 0$, segue-se deste fato e do resultado do item anterior, que dado $y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $senh(x) = y$. De fato, dado que $y + \sqrt{y^2+1} > 0$, tomemos $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$, daí teremos:

$$\begin{aligned}
senh(\ln(y+\sqrt{y^2+1})) &= \frac{e^{\ln(y+\sqrt{y^2+1})} - e^{-\ln(y+\sqrt{y^2+1})}}{2} \\
&= \frac{e^{\ln(y+\sqrt{y^2+1})} - e^{\ln(y+\sqrt{y^2+1})^{-1}}}{2} \\
&= \frac{(y+\sqrt{y^2+1}) - (y+\sqrt{y^2+1})^{-1}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[(y+\sqrt{y^2+1}) - \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(y+\sqrt{y^2+1})^2 - 1}{y+\sqrt{y^2+1}}\right] \\
&= \frac{y^2 + 2y\sqrt{y^2+1} + y^2 + 1 - 1}{2y + 2\sqrt{y^2+1}} \\
&= \frac{2y^2 + 2y\sqrt{y^2+1}}{2y + 2\sqrt{y^2+1}} \\
&= y\frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2y + 2\sqrt{y^2+1}} \\
&= y.
\end{aligned}$$

Logo, seno hiperbólico é sobrejetora.

iv) Bijetiva.

Demonstração: Segue de $ii)$ e $iii)$.

v) Crescente.

Demonstração. Dados x_1 e x_2 no conjunto dos reais de modo que $x_1 < x_2$, vamos mostrar que $senh\,(x_1) < senh\,(x_2)$.

$$\begin{aligned} senh\, x_1 - senh\, x_2 &= \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} + \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \\ &= \frac{1}{2}[\frac{e^{2x_1} - 1}{e^{x_1}} - \frac{e^{2x_2} - 1}{e^{x_2}}] \\ &= \frac{1}{2}\frac{(e^{2x_1+x_2} - e^{2x_2+x_1}) + (e^{x_1} - e^{x_2})}{e^{x_1+x_2}}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como $x_1 < x_2$, então $2x_1 + x_2 < 2x_2 + x_1$; assim, temos que:

$$\begin{aligned} e^{2x_1+x_2} &< e^{2x_2+x_1} \\ e^{2x_1+x_2} - e^{2x_2+x_1} &< 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

e

$$\begin{aligned} e^{x_1} &< e^{x_2} \\ e^{x_1} - e^{x_2} &< 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Substituindo-se 1.2 e 1.3 em 1.1 obtemos:

$$senh(x_1) - senh(x_2) < 0.$$

Portanto,

$$senh(x_1) < senh(x_2).$$

Logo, a função seno hiperbólico é uma função crescente. □

1.1.2 Estudo da Função Cosseno Hiperbólico

Definição 1.1.2. *A função cosseno hiperbólico* $cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é definida por:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

A função cosseno hiperbólico é:

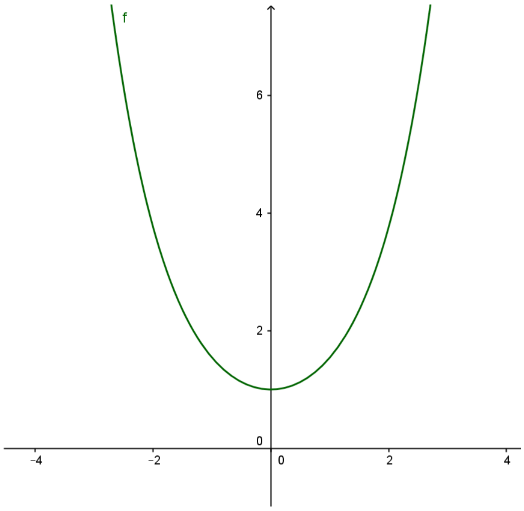
- Par.

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} cosh\,(-x) &= \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} \\ &= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \\ &= cosh\, x. \end{aligned}$$

Logo, a função cosseno hiperbólico é par. □

Figura 2: Gráfico da Função Coseno Hiperbólico



Fonte: Autor

- A imagem é dada por $[1, +\infty)$.

i) $[1, +\infty) \subseteq Im(cosh)$.

Demonstração. Vamos mostrar que, dado $y \in [1, +\infty)$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $cosh(x) = y$. Caso exista, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= y \\ e^x + e^{-x} &= 2y \\ e^x + \frac{1}{e^x} &= 2y \\ \frac{e^{2x} + 1}{e^x} &= 2y \\ (e^x)^2 - 2ye^x + 1 &= 0 \\ (e^x - y)^2 &= y^2 - 1. \end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

ou

$$e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}.$$

Visto que para todo $y > 1$, tem-se que $y^2 - 1 > 0$; então, $\sqrt{y^2 - 1} \in \mathbb{R}^*_+$. Por outro lado, $y^2 > y^2 - 1$; assim, $y - \sqrt{y^2 - 1} > 0$ e $y + \sqrt{y^2 - 1} > 0$.

Portanto, de fato existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $cosh(x) = y$. Por exemplo, basta tomar $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

$$\begin{aligned}
cosh(\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})) &= \frac{e^{\ln(y+\sqrt{y^2-1})} + e^{-\ln(y+\sqrt{y^2-1})}}{2} \\
&= \frac{e^{\ln(y+\sqrt{y^2-1})} + e^{\ln(y+\sqrt{y^2-1})^{-1}}}{2} \\
&= \frac{(y + \sqrt{y^2 - 1}) + (y + \sqrt{y^2 - 1})^{-1}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[(y + \sqrt{y^2 - 1}) + \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(y + \sqrt{y^2 - 1})^2 + 1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}\right] \\
&= \frac{y^2 + 2y(\sqrt{y^2 - 1} + y^2 - 1 + 1}{2y + 2(\sqrt{y^2 - 1})} \\
&= \frac{2y^2 + 2y\sqrt{y^2 - 1}}{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}} \\
&= y\frac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}} \\
&= y.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a imagem da função cosseno hiperbólico é $[1, +\infty)$.

ii) $Im(cosh) \subseteq [1, +\infty)$.

Demonstração. Dado $y \in Im(cosh)$, vamos provar que $y \geq 1$, ou seja $y \in [1, +\infty)$. Suponha que exista $y \in Im(cosh)$ tal que $y < 1$. Então, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y < 1,$$

ou seja,

$$e^{2x} - 2e^x + 1 < 0$$

logo,

$$(e^x - 1)^2 < 0,$$

que é absurdo.

Logo, Para todo $y \in Im(cosh)$, tem-se que $y \geq 1$.

portanto a imagem da função cosseno hiperbólico é dada por $[1, +\infty)$ □

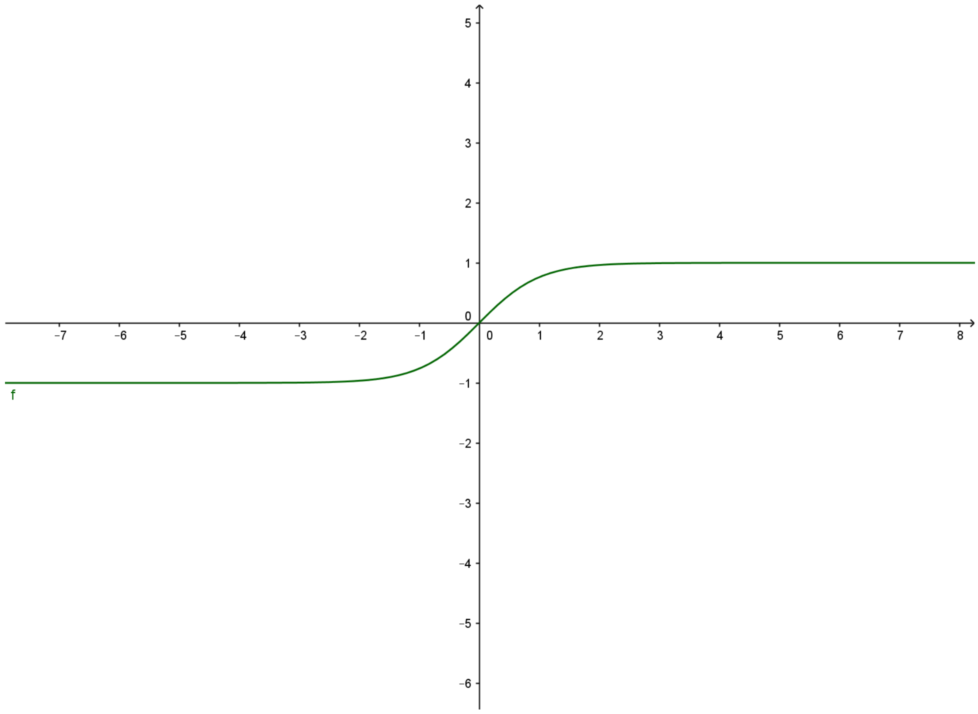
□

1.1.3 Estudo da Função tangente Hiperbólico

Definição 1.1.3. *A função tangente hiperbólico* $tgh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é definida por:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; tghx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Figura 3: Gráfico da Função Tangente Hiperbólico



Fonte: Autor

A função tangente hiperbólica é:

i) Ímpar.

Demonstração.

$$\begin{aligned} tgh(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} \\ &= \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} \\ &= -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \\ &= -tgh(x). \end{aligned}$$

Logo, a tangente hiperbólica é uma função ímpar. □

ii) Injetiva.

Demonstração. Dados x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $tgh(x_1) = tgh(x_2)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{e^{x_1} + e^{-x_1}} &= \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{e^{x_2} + e^{-x_2}} \\
e^{x_1+x_2} + e^{x_1-x_2} - e^{-x_1+x_2} - e^{-x_1-x_2} &= e^{x_1+x_2} - e^{x_1-x_2} + e^{-x_1+x_2} - e^{-x_1-x_2} \\
e^{x_1-x_2} + e^{x_1-x_2} &= e^{-x_1+x_2} + e^{-x_1+x_2} \\
2e^{x_1-x_2} &= 2e^{-x_1+x_2} \\
e^{x_1-x_2} &= e^{-x_1+x_2} \\
x_1 - x_2 &= -x_1 + x_2 \\
2x_1 &= 2x_2 \\
x_1 &= x_2.
\end{aligned}$$

Logo, a tangente hiperbólica é uma função injetiva. □

iii) Crescente.

Primeiramente vamos Mostrar que $tghx_1 - tghx_2 = \dfrac{senh(x_1 - x_2)}{cosh(x_1)cosh(x_2)}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
tghx_1 - tghx_2 &= \frac{senhx_1}{coshx_1} - \frac{senhx_2}{coshx_2} \\
&= \frac{senhx_1coshx_2 - senhx_2coshx_1}{coshx_1coshx_2} \\
&= \frac{senh(x_1 - x_2)}{coshx_1coshx_2}. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

□

Demonstração. Agora vamos mostrar que tgh é uma função crescente. Da igualdade 1.4 e seja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_2$, teremos:

$x_1 - x_2 < 0$. Como o seno hiperbólico é uma função crescente e bijetora, então segue daí que $senh(x_1 - x_2) < 0$. Por outro lado, vimos que $cosh(\alpha) > 1$; logo, temos daí que $cosh(x_1) > 1$ e $cosh(x_2) > 1$; assim, $cosh(x_1)cosh(x_2) > 1$.

Portanto, como $tgh(x_1 - x_2) = \dfrac{senh(x_1 - x_2)}{cosh(x_1)cosh(x_2)}$, $senh(x_1 - x_2) < 0$ e $cosh(x_1)cosh(x_2) > 1$ concluímos que $tgh(x_1) - tgh(x_2) < 0 \Longrightarrow tgh(x_1) < tgh(x_2)$.Logo, a função tangente hiperbólico é crescente. □

iv) Imagem dada por $(-1, 1)$.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que $-1 < tgh(x) < 1$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que:

$$\begin{aligned}
tgh(x) - 1 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1 \\
&= \frac{e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&= \frac{-e^{-x} - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&= \frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.
\end{aligned}$$

Observe que, dado $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ e $e^x > 0$, segue daí que $tgh(x) - 1 < 0$; ou seja, $tgh(x) < 1$.

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
tgh(x) + 1 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 1 \\
&= \frac{e^x - e^{-x} + e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&= \frac{e^x + e^x}{e^x + e^{-x}} \\
&= \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}.
\end{aligned}$$

Observe que, dado $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ e $e^x > 0$, segue daí que $tgh(x) + 1 > 0$,logo $tgh(x) > -1$.

Portanto, podemos concluir que $-1 < tgh(x) < 1$.

Agora vamos provar que para cada $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $tgh(x) = y$. Caso exista, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= y \\
\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} &= y \\
e^{2x} - 1 &= e^{2x}y + y \\
e^{2x} - ye^{2x} &= y + 1 \\
e^{2x}(1 - y) &= y + 1 \\
e^{2x} &= \frac{y + 1}{1 - y} \\
x &= \frac{1}{2}\ln\frac{y + 1}{1 - y}.
\end{aligned}$$

Observe que para $y \in (-1, 1)$ tem-se que $y - 1 > 0$ e $y + 1 > 0$; daí $\dfrac{y + 1}{1 - y} > 0$. Assim, concluímos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $tgh(x) = y$.

De fato, tomemos $x = \frac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{1-y}$ que teremos:

$$
\begin{aligned}
tgh\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{1-y}\right) &= \frac{e^{\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{1-y}} - e^{-\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{1-y}}}{e^{\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{1-y}} + e^{-\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{1-y}}} \\
&= \frac{e^{\ln\frac{y+1}{1-y}} - 1}{e^{\ln\frac{y+1}{1-y}} + 1} \\
&= \frac{\frac{y+1}{1-y} - 1}{\frac{y+1}{1-y} + 1} \\
&= \frac{\frac{y+1-1+y}{1-y}}{\frac{y+1+1-y}{1-y}} \\
&= \frac{2y}{2} \\
&= y.
\end{aligned}
$$

De fato, concluímos que a imagem da função tangente hiperbólica é o intervalo $(-1, 1)$. $\square$

1.2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS INVERSAS REAIS

Nesta seção, apresentaremos as funções trigonométricas hiperbólicas inversas e demonstraremos as relações matemáticas que as definem.

1.2.1 Função Inversa da Função Seno Hiperbólico

Sabe-se que a função seno hiperbólico é injetora, ou seja, tem sua imagem e seu domínio em $\mathbb{R}$, tem assim uma função inversa denotada por $senh^{-1}$que obteremos a seguir:

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ tais que $senh(y) = x$, e teremos:

$$\begin{aligned} \frac{e^y - e^{-y}}{2} &= x \\ e^y - e^{-y} &= 2x \\ \frac{e^{2y} - 1}{e^y} &= 2x \\ e^{2y} - 1 &= 2xe^y \\ (e^y)^2 - 2xe^y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação quadrática em e^y obtemos: $e^y = x - \sqrt{x^2+1}$ ou $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$. De fato, temos que $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ e $x + \sqrt{x^2+1} > 0$; logo, temos que:

$$\begin{aligned} e^y &= x + \sqrt{x^2+1} \\ y &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \end{aligned}$$

Portanto, a função $senh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seno hiperbólico inversa é dada por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; senh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

1.2.2 Função Inversa da Função Cosseno Hiperbólico

Sabe-se que a função cosseno hiperbólico é crescente em $\mathbb{R}_+$ e que é injetiva sobre sua imagem neste intervalo. Além disso, cosseno hiperbólico é par e tem sua imagem dada por $[1, +\infty)$; assim, a função cosseno hiperbólico possui uma função inversa $cosh^{-1} : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ dada por:

Tomemos $x \in [1, +\infty)$ e $y \in \mathbb{R}_+$ tais que $cosh(x) = y$ e teremos:

$$\begin{aligned} \frac{e^y + e^{-y}}{2} &= x \\ e^y + e^{-y} &= 2x \\ \frac{e^{2y} + 1}{e^y} &= 2x \\ e^{2y} + 1 &= 2xe^y \\ (e^y)^2 - 2xe^y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação quadrática em e^y, obtemos: $e^y = x - \sqrt{x^2-1}$ ou $e^y = x + \sqrt{x^2-1}$.

Devemos ter $y \geq 0$. Pelas condições de x verificamos que $0 < x - \sqrt{x^2-1} \leq 0$ e $x + \sqrt{x^2-1} \geq 0$; logo, temos que:

$$\begin{aligned} e^y &= x + \sqrt{x^2-1} \\ y &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}). \end{aligned}$$

Portanto, a função $cosh^{-1} : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cosseno hiperbólico inversa é dada por:

$$\forall x \in [1, +\infty), \;\; cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

1.2.3 Função Inversa da Função Tangente Hiperbólico

A função tangente hiperbólico é injetiva sobre sua imagem, que é o intervalo $(-1,1)$; deste modo, ela possui uma inversa de $(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, denotada por tgh^{-1}. Tomemos $x \in (-1,1)$ e $y \in \mathbb{R}$ tal que $tghy = x$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} &= x \\
\frac{\frac{e^{2y}-1}{e^y}}{\frac{e^{2y}+1}{e^y}} &= x \\
\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} &= x \\
e^{2y} - 1 &= xe^{2y} + x \\
e^{2y} - xe^{2y} &= x + 1 \\
e^{2y}(1-x) &= x + 1 \\
e^{2y} &= \frac{x+1}{1-x} \\
y &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}.
\end{aligned}$$

Portanto, a função $tgh^{-1} : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ tangente hiperbólico inversa é dada por:

$$\forall x \in (-1,1), \;\; tgh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}.$$

2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMPLEXAS

Neste capítulo, vamos conhecer as principais definições, propriedades e teoremas das funções trigonométricas complexas.

2.1 OS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos levaram muitos anos até chegarem a ser definidos formalmente de maneira aceitável, sem nenhuma dúvida. Os números complexos surgiram no século XVI, motivados pela necessidade de encontrar soluções de equações polinomiais.

Por muito tempo foram considerados números ilegítimos; inclusive, ainda hoje são chamados de números imaginários e i, tal que $i^2 = -1$, o algarismo imagiário.

No século XVIII, os conceitos dos números complexos tiveram bastante ênfase. Os primeiros resultados podem ser encontrados na dissertação de D'Alembert, onde ele afirma que uma quantidade qualquer, composta de tantos imaginários quanto desejarmos, pode ser reduzida à forma $A + B\sqrt{-1}$ com A e B números reais. Euler em sua obra *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, onde o principal teorema XII que afirma que toda fração formada por adição, subtração, multiplicação ou divisão com quantidades imaginárias quaisquer da forma $A + B\sqrt{-1}$ também terá a forma $A + B\sqrt{-1}$, onde A e B são números reais de forma que se B=0, a forma geral $A + B\sqrt{-1}$ representa todo o conjunto dos números reais.

Assim, como podemos verificar em (BOYER, 2010), vários matemáticos contribuíram para a construção da Teoria dos Números Complexos, como por exemplo o Suiço Jean-Robert Argand, O dinamarquês Caspar Wessel, o bolonhês R. Bombeli, G. Cardano e W. R. Hamilton. Sendo que Hamilton introduziu a álgebra formal dos números complexos, o que podemos constatar em (FERNANDES; BERNARDEZ, 2008).

O passo mais importante na formalização do conceito foi dado por Gauss ao representar geometricamente estes números como pontos do plano em sua dissertação escrita em 1797, intitulada *Metafísica das grandezas imaginárias*, mas que só foi exposta ao público em 1831. Gauss foi o primeiro matemático influente a defender publicamente as quantidades imaginárias.

2.1.1 Forma Algébrica e Trigonométrica

Vamos agora iniciar nosso estudo sobre os números complexos. Conheceremos formalmente seus conceitos mais importantes, ou seja, definições e propriedades. Veja em (SPIEGEL, 1972), (IEZZI, 2005) e (AVILA, 2013).

Conforme visto em (AVILA, 2013)

Definição 2.1.1. *Um número complexo é um número da forma $z = a+bi$ sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e i a unidade imaginária com a seguinte propriedade $i^2 = -1$.*

O conjunto dos números complexos é denotado por $\mathbb{C}$.

Observação 2.1.1. *Dado um número complexo de forma algébrica $z = a + bi$, o valor de a é chamado de parte real e o valor de b é chamado de parte imaginária. Todo número complexo que possui a parte imaginária nula é chamado de* ***real puro****. E todo número complexo que possui a parte real nula e a parte imaginária não nula é chamado de* ***imaginário puro****.*

Em $\mathbb{C}$ são definidas as operações de soma $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ e produto $. : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidos da seguinte forma:

Dados $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, então:

i) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

ii) $z_1.z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$.

As operações de soma e produto em $\mathbb{C}$ satisfazem às seguintes propriedades:

Proposição 2.1.1. *A soma e o produto possuem as seguintes propriedades para todo número complexo $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.*

1) Associativa em relação à soma.

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

2) Comutativa em relação à soma.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

3) Elemento neutro em relação à soma.

Dado $z \in \mathbb{C}$, então $z + \mathbf{0} = Z$, onde $\mathbf{0} = 0 + 0i$.

4) Inverso aditivo.

$$z + (-z) = \mathbf{0}, \forall z \in \mathbb{C}$$

5) Associativa em relação ao produto.

$$(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

6) Comutativa em relação ao produto.

$$z_1.z_2 = z_2.z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

7) Distributiva do produto em relação a som.(à esquerda e à direita)

$$z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

ou

$$(z_1 + z_2).z_3 = z_1.z_3 + z_2.z_3$$

8) Elemento neutro do produto.

$$z.1 = z, \forall z \in \mathbb{C}$$

9) Inverso multiplicativo.

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, existe $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}$ tal que $z.z^{-1} = 1$

Além das propriedades dos números complexos, apresentaremos agora uma carcterística importante sobre suas potências.

Observação 2.1.2. *Seja i a unidade imaginária tal que, por definição, $i^2 = -1$; então:*

$$\begin{array}{cccc} i^0 = 1 & i^1 = i & i^2 = -1 & i^3 = -i \\ i^4 = 1 & i^5 = i & i^6 = -1 & i^7 = -i \\ i^8 = 1 & i^9 = i & i^{10} = -1 & i^{11} = -i. \end{array}$$

$$\ldots$$

Observe que as potências de i vão em ciclos $1, i, -1, -1$. Logo, dado um $n \in \mathbb{N}$ existe uma forma bem prática de determinar i^n. Como $n \in \mathbb{N}$ existe $q, r \in \mathbb{N}$ tal que $n = 4q + r$, com $0 \leq r < 3$, ou seja, r é o resto da divisão de n por 4. Deste modo, temos que:

$$\begin{aligned} i^n &= i^{4q+r} \\ &= i^{4q} i^r \\ &= (i^q)^4 i^r \\ &= 1.i^r \\ &= i^r. \end{aligned}$$

Portanto, $i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de n por 4.

Definição 2.1.2. *Dado um número complexo z de forma algébrica $z = a + bi$, o conjugado de z é o número complexo $\overline{z} = a - bi$.*

O conjugado de um número complexo é de grande utilidade para entendimento de alguns conceitos. O exemplo disto é o conceito de divisão entre dois números complexos que veremos a seguir. Antes, porém, uma importante propriedade será apresentada abaixo.

Observação 2.1.3. *O produto de um número complexo $z = a + bi$ e seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ leva a um número real da forma $a^2 + b^2$, ou seja,*

$$z.\overline{z} = (a + bi).(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

A seguir, apresentaremos a operação de divisão entre dois números complexos.

Dados $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ e $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}^*$, então,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}.\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Definição 2.1.3. *Seja um número complexo $z = a + bi$, denomina-se como módulo de z ao número real não negativo dado por:*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

O módulo de um número complexo z que também pode ser representado por $|z|$ possui as seguintes propriedades:

1) $|z| \geq 0$.

Demonstração. $a^2 \geq 0$ e $b^2 \geq 0$; assim, $a^2 + b^2 \geq 0$. Portanto, $|z| \geq 0$. □

2) $|z|^2 = z.\overline{z}$.

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = a + bi$ então,

$$\begin{aligned} |z|^2 &= (\sqrt{a^2 + b^2})^2 \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Agora faremos:

$$\begin{aligned} z.\overline{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - abi + abi - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

De 2.1 e 2.2 temos que $|z|^2 = z.\overline{z}$

□

3) $|z| = |\overline{z}|$.

Demonstração. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$ □

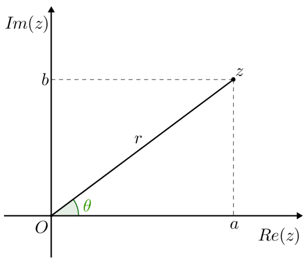
4) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = a + bi$ então,

$|z| = 0 \iff |z|^2 = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0.$ □

Consideremos um número complexo $z = a + bi \neq 0$; podemos representar z em um plano complexo pelo par ordenado $P(a, b)$, seja $\overline{(}OP)$ o segmento de reta que une o ponto P e a origem O dos eixos coordenados, e seja θ o ângulo formado entre o eixo real positivo e o segmento $\overline{OP}$ no sentido anti-horário.

Figura 4: Plano Complexo



Fonte:NASCIMENTO 2015

Daí, temos que:

$$sen\theta = \frac{b}{\rho}, \qquad cos\theta = \frac{a}{\rho}. \quad .$$

Das igualdades acima, temos que:

$$b = \rho.sen\theta, \qquad a = \rho.cos\theta. \quad .$$

Logo, um número complexo z pode ser escrito da seguinte forma:

$$z = a + bi = a = \rho.cos + \rho.i.sen\theta = \rho(cos\theta + isen\theta),$$

onde $\theta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ é o argumento de z e ρ é o módulo de z e, como já vimos anteriormente, é dado por $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Esta forma de escrever um número complexo é chamada **Forma Trigonométrica ou Polar de z**.

Note que θ não é único, pois pode ser substituído por $\theta + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Para que θ seja único, devemos exigir que, por exemplo, $0 \leq \theta < 2\pi$ ou $-\pi \leq \theta < \pi$.

Dado um número complexo $z = a + bi$ a sua raiz quadrada é dada da seguinte forma:

$\sqrt{a+bi} = x + yi \Leftrightarrow (x+yi)^2 = a + bi.$

Logo,

$$\begin{aligned} x^2 + 2xyi + (yi)^2 &= a + bi \\ x^2 - y^2 + 2xyi &= a + bi. \end{aligned}$$

Assim, comparando a parte real com a parte imaginária, obtemos $x^2 - y^2 = a$ e $2xy = b$.

2.1.2 Fórmula de Euler

Lembramos que a série de Taylor das funções e^y, $seny$ e $cosy$, em torno do ponto $y_0 = 0$, como pode ser vista em (AVILA, 2013), são dadas por:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + ... \tag{2.3}$$

$$sen\, y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + ... \tag{2.4}$$

$$cos\, y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + ... \tag{2.5}$$

De 2.4 e 2.5, temos que:

$$\begin{aligned} cosy + i.seny &= (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + ...) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + ...) \\ &= 1 + yi + \frac{y^2(-1)}{2!} + \frac{y^3(-i)}{3!} + \frac{y^4 1}{4!} + \frac{y^5(i)}{5!} + \frac{y^6(-1)}{6!} + ... \\ &= 1 + yi + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \frac{(yi)^5}{5!} + \frac{(yi)^6}{6!} + ... \end{aligned} \tag{2.6}$$

Comparando 2.3 com 2.6, define-se e^{yi} da seguinte forma

$$e^{yi} = cos\, y + isen\, y, .$$

denominada Fórmula de Euler.

2.2 EXPONENCIAL E LOGARITMOS EM $\mathbb{C}$

Definição 2.2.1. *Dado um número complexo $z = x + yi$, definimos a exponencial de z por:*

$$e^z = e^x(cosy + iseny).$$

A função exponencial e^z possui as seguintes propriedades:

i) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Demonstração. Seja $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$; então, temos que:

$$\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1+y_1 i}e^{x_2+y_2 i} \\
&= e^{x_1}(cosy_1 + iseny_1)e^{x_2}(cosy_2 + iseny_2) \\
&= e^{x_1+x_2}(cosy_1cosy_2 + icosy_1seny_2 + icosy_2seny_1 + i^2seny_1seny_2) \\
&= e^{x_1+x_2}(cosy_1cosy_2 + icosy_1seny_2 + icosy_2seny_1 - seny_1seny_2) \\
&= e^{x_1+x_2}[(cosy_1cosy_2 - seny_1seny_2) + i(cosy_1seny_2 + cosy_2seny_1)] \\
&= e^{x_1+x_2}[cos(y_1 + y_2) + isen(y_1 + y_2)] \\
&= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\
&= e^{(x_1+y_1 i)+(x_2+y_2 i)} \\
&= e^{z_1+z_2}.
\end{aligned}$$

□

ii) $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Demonstração. Seja z=x+yi; então, pela definição de exponencial de z, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^z} &= \frac{1}{e^x(cosy + iseny)} \\
&= \frac{1}{e^x(cosy + iseny)}\frac{(cosy - iseny)}{(cosy - iseny)} \\
&= \frac{cosy - iseny}{e^x(cos^2y - i^2sen^2y)} \\
&= \frac{cosy - iseny}{e^x(cos^2y + sen^2y)} \\
&= \frac{cosy - iseny}{e^x} \\
&= e^{-x}(cos(-y) + isen(-y)) \\
&= e^{-x-yi}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. □

iii) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1+y_1 i}}{e^{x_2+y_2 i}} \\
&= e^{x_1+y_1 i}e^{-x_2-y_2 i} \\
&= e^{(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)} \\
&= e^{x_1-x_2}(cos(y_1-y_2)+isen(y_1-y_2)) \\
&= e^{z_1-z_2}.
\end{aligned}$$

□

Vamos definir agora o logaritmo de um número complexo $z \in \mathbb{C}$.

Dado um número complexo $z = x + yi$, com $z \neq 0$, temos que z tem a forma trigonométrica dada por:

$$z = \rho(cos\theta + isen\theta),$$

Onde ρ é o módulo de z e θ o argumento de z.Considerando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$, então teremos que:

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Neste caso, o número complexo será denominado forma exponencial. Como θ é o argumento de z, podemos substituí-lo por $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$; e assim, teremos:

$$\begin{aligned}
z &= \rho e^{i\theta} \\
&= \rho(cos\theta + isen\theta) \\
&= \rho(cos(\theta+2k\pi) + isen(\theta+2k\pi)) \\
&= \rho e^{i(\theta+2k\pi)}.
\end{aligned}$$

De fato, z pode ser escrito na forma,

$$z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)} \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Devemos lembrar também duas propriedades dos logaritmos em $\mathbb{R}$:

$$ln(x.y) = lnx + lny$$

e

$$lne^b = b.$$

Portanto, é natural definirmos o logaritmo de um número complexo z da seguinte forma:

Definição 2.2.2. *Dado um número complexo $z = \rho e^{i\theta}$ não nulo, definimos o logaritmo de z como:*

$$ln_k z = ln\rho + i(\theta + 2k\pi),$$

onde temos que $2k\pi \leq \theta < 2(k+1)\pi$.

Sabemos que em $\mathbb{R}$ um número positivo possui um único logaritmo. Concluímos, desta definição, que um número complexo possui uma infinidade de logaritmos diferentemente do caso real. E, assim, temos que $ln_k z$ é o logaritmo de z num nível k, para efeito de simplificação, vamos trabalhar as propriedades dos logaritmos somente no nível $k = 0$, ou seja $lnz = ln\rho + i\theta$, com $0 \leq \theta < 2\pi$.

Proposição 2.2.1. *Dados dois número complexos z_1 e z_2 temos que:*

i) $e^{lnz_1} = z_1$.

ii) $ln(z_1 z_2) = lnz_1 + lnz_2$.

iii) $lne^{z_1} = z_1$.

iv) $ln\frac{z_1}{z_2} = lnz_1 - lnz_2$.

v) $lnz_1^n = n.lnz_1$.

i) *Demonstração.* Usando a definição de logaritmo, temos que:

$$\begin{aligned} e^{lnz_1} &= e^{ln\rho_1 + i\theta_1} \\ &= e^{ln\rho_1} e^{i\theta_1} \\ &= \rho_1 e^{i\theta_1} \\ &= z_1. \end{aligned}$$

□

Portanto, $e^{lnz_1} = z_1$ para todo $z_1 \in \mathbb{C}$.

ii) *Demonstração.* Usando a definição de logaritmos, temos que:

$$\begin{aligned} lnz_1 + lnz_2 &= ln\rho_1 + i\theta_1 + ln\rho_2 + i\theta_2 \\ &= ln(\rho_1.\rho_2) + i(\theta_1 + \theta_2) \\ &= ln[\rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}] \\ &= ln[\rho_1\rho_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}] \\ &= ln[\rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2}] \\ &= ln(z_1 z_2). \end{aligned}$$

□

Portanto, $ln(z_1 z_2) = lnz_1 + lnz_2$ para todo z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$.

iii) *Demonstração.* Seja $z_1 = x_1 + y_1 i$, temos que:

$$\begin{aligned} lne^{z_1} &= lne^{x_1+y_1 i} \\ &= ln(e^{x_1}e^{iy_1}) \\ &= lne^{x_1} + lne^{iy_1} \\ &= x_1 + ln1 + iy_1 \\ &= x_1 + y_1 i \\ &= z_1. \end{aligned}$$

□

Portanto $lne^{z_1} = z_1$ para todo $z_1 \in \mathbb{C}$.

iv) *Demonstração.*

$$\begin{aligned} lnz_1 - lnz_2 &= ln\rho_1 e^{i\theta_1} - ln\rho_2 e^{i\theta_2} \\ &= ln\rho_1 + i\theta_1 - (ln\rho_2 + i\theta_2) \\ &= ln\rho_1 - ln\rho_2 + i(\theta_1 - \theta_2) \\ &= ln\frac{\rho_1}{\rho_2} + i(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$lnz_1 - lnz_2 = ln\frac{\rho_1}{\rho_2} + i(\theta_1 - \theta_2).$$

Agora, seja $z_1 = ln\rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$.

Daí,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} ln\frac{z_1}{z_2} &= ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\right) \\ &= ln\frac{\rho_1}{\rho_2} + lne^{i(\theta_1-\theta_2)} \\ &= ln\frac{\rho_1}{\rho_2} + i(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

De fato: $lnz_1 - lnz_2 = ln\frac{\rho_1}{\rho_2} + i(\theta_1 - \theta_2)$ e $ln\frac{z_1}{z_2} = ln\frac{\rho_1}{\rho_2} + i(\theta_1 - \theta_2)$.

Portanto,

$$lnz_1 - lnz_2 = ln\frac{z_1}{z_2}.$$

□

v) *Demonstração.* Seja $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$ teremos que:

$$\begin{aligned} z_1^n &= (\rho_1 e^{i\theta_1})^n \\ &= \rho_1^n \overbrace{e^{i\theta_1} \dots e^{i\theta_1}}^{n \ vezes} \\ &= \rho_1^n e^{\overbrace{i\theta_1 + \dots + i\theta_1}^{n \ vezes}} \\ &= \rho_1^n e^{i(n\theta_1)}. \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo natural, teremos:

$$\begin{aligned} lnz_1^n &= ln(\rho_1^n e^{i(n\theta_1)}) \\ &= ln\rho_1^n + lne^{i(n\theta_1)} \\ &= ln\rho_1^n + i(n\theta_1) \\ &= n(ln\rho_1 + i\theta) \\ &= nlnz_1. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $lnz_1^n = nlnz_1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

2.3 FUNÇÕES COMPLEXAS

Primeiramente, vamos definir uma função de variável complexa. Como consta em (CHURCHILL, 1975) e (LANG, 1999).

Definição 2.3.1. *Seja $D \subset \mathbb{C}$. Uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma lei que associa a cada elemento $z \in D$ um único número $w \in \mathbb{C}$ tal que $w = f(z) \in \mathbb{C}$.*

Agora, vamos conhecer um exemplo de função de variável complexa de grande importância para a trigonometria hiperbólica:

Exemplo 2.3.1. *A função exponencial $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \ f(z) = e^z,$$

onde

$$e^z = e^x(cosy + iseny).$$

Uma característica de extrema importância da função $f(z) = e^z$ é demonstrada a seguir:

Proposição 2.3.1. *A função $f(z) = e^z$ é tal $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Por definição, temos que:

$$e^z = e^x(cosy + iseny) \ ,\forall z = x + yi \in \mathbb{C}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|e^z| &= |e^x(cosy + iseny)| \\
&= \sqrt{(e^x cosy)^2 + (e^x seny)^2} \\
&= \sqrt{e^{2x}cos^2y + e^{2x}sen^2y} \\
&= \sqrt{e^{2x}(cos^2y + sen^2y)} \\
&= \sqrt{e^{2x}} \\
&= e^x.
\end{aligned}$$

Como $|e^z| = e^x$ para todo $z = x+yi \in \mathbb{C}$ e sendo $e^x > 0$, temos que $|e^z| \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Portanto, $f(z) = e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. □

No caso complexo, também é importante conhecer o período de uma função; deste modo, definiremos o período a seguir:

Definição 2.3.2. *Uma função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é periódica e de período $p \in \mathbb{C}$ se $f(z + p) = f(z) \ \ \forall z \in \mathbb{C}$.*

Proposição 2.3.2. *A função $f(z) = e^z$ é periódica e de período $2\pi i$, isto é, $e^{z+2\pi i} = e^z, \ \ \forall z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. De fato, seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$ temos:

$$\begin{aligned}
e^{z+2\pi i} &= e^{x+yi+2\pi i} \\
&= e^{x+(y+2\pi)i} \\
&= e^x e^{(y+2\pi)i}.
\end{aligned}$$

Da formula de Euler $e^{yi} = cos\, y + isen\, y$ temos:

$$\begin{aligned}
e^{z+2\pi i} &= e^x[cos(y + 2\pi) + isen(y + 2\pi)] \\
&= e^x[cosy + iseny] \\
&= e^x e^{yi} \\
&= e^{x+yi} \\
&= e^z.
\end{aligned}$$

Portanto, $e^{z+2\pi i} = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Logo, a função $f(z) = e^z$ é periódica de período $2\pi i$. □

Observação 2.3.1. *De forma análoga, também podemos mostrar que dado $z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$ tem-se que $e^{z+2k\pi i} = e^z$.*

De fato, temos:

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &= e^{x+yi+2k\pi i} \\ &= e^{x+(y+2k\pi)i} \\ &= e^x e^{(y+2k\pi)i} \\ &= e^x[cos(y+2k\pi)+isen(y+2k\pi)] \\ &= [cosy+iseny] \\ &= e^x e^{yi} \\ &= e^{x+yi} \\ &= e^z. \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$e^{z+2\pi i} = e^{z+4\pi i} = e^{z+6\pi i} = e^{z+8\pi i} = ...$$

.

Outra função de variável complexa de grande importância é a função logaritmica dada a seguir:

Exemplo 2.3.2. *A função logaritmica de base e é a função $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:*

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \ f(z) = lnz.$$

2.4 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMPLEXAS

Trataremos agora sobre as funções trigonométricas com variável complexa. Apresentaremos suas definições e demonstraremos suas propriedades mais importantes. Veja em (NASCIMENTO, 2015).

Primeiramente, vamos lembrar da fórmula de euler:

$$e^{iy} = cosy + iseny$$

Daí, temos que:

$$e^{-yi} = cos\,y - isen\,y.$$

Assim, se subtrairmos a primeira igualdade da segunda, teremos:

$$e^{yi} - e^{yi} = 2iseny$$

logo,

$$seny = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}, \ \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Daí, temos que para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$sen\, y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

2.4.1 Função Seno e Suas Propriedades

É natural definirmos a função seno de variável complexa da seguinte forma:

Definição 2.4.1. *A função* $sen : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *definida por*

$$sen\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

é denominada função seno.

Proposição 2.4.1. *A função* $senz$ *é periódica de período* 2π*.*

Demonstração. Pela definição da função seno, temos que para todo $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
sen(z + 2\pi) &= \frac{e^{z+2\pi} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} \\
&= \frac{e^{z}e^{2\pi} - e^{-iz}e^{i(-2\pi)}}{2i} \\
&= \frac{e^{z}(cos2\pi + isen2\pi) - e^{-iz}(cos2\pi - isen2\pi)}{2i} \\
&= \frac{e^{z} - e^{-iz}}{2i} \\
&= senz.
\end{aligned}$$

Portanto, a função seno de uma variável complexa é periódica de período 2π. □

Propriedade 2.4.1. *A função seno é ímpar, ou seja* $sen(-z) = -senz, \forall z \in \mathbb{C}$*.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
sen(-z) &= \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} \\
&= \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} \\
&= -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= -senz.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $z \in$ temos que $sen(-z) = -senz$; logo, a função seno é ímpar. $\square$

Propriedade 2.4.2. *Para todo $z \in \mathbb{C}$ tem-se que $sen(z+\pi) = -senz.$*

Demonstração.

$$\begin{aligned} sen(z+\pi) &= \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz+i\pi} - e^{-iz-i\pi}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz}e^{i\pi} - e^{-iz}e^{-i\pi}}{2i}. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Euler $e^{yi} = cosy + iseny$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{e^{iz}e^{i\pi} - e^{-iz}e^{-i\pi}}{2i} &= \frac{e^{iz}(cos\pi + isen\pi) - e^{-iz}(cos\pi - isen\pi)}{2i} \\ &= \frac{e^{iz}(-1+i.0) - e^{-iz}(-1-i.0)}{2i} \\ &= \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i} \\ &= -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= -senz. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $sen(z+\pi) = -senz, \forall z \in \mathbb{C}$. $\square$

2.4.2 Função Cosseno e Suas Propriedades

De forma análoga ao que fizemos na função seno, se somarmos as equações $e^{iy} = cosy + iseny$ e $e^{-yi} = cos\,y - isen\,y$, teremos:

$$e^{yi} + e^{yi} = 2cosy.$$

Logo,

$$cosy = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}.$$

Portanto, é também natural definirmos a função cosseno de variável complexa da seguinte forma:

Definição 2.4.2. *A função $cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$cos\,z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

é denominada função cosseno.

Proposição 2.4.2. *A função $cosz$ é periódica de período 2π.*

Demonstração. Pela definição da função seno, temos que para todo $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} cos(z+2\pi) &= \frac{e^{z+2\pi}+e^{-i(z+2\pi)}}{2} \\ &= \frac{e^{z}e^{2\pi}+e^{-iz}e^{i(-2\pi)}}{2} \\ &= \frac{e^{z}(cos2\pi+isen2\pi)+e^{-iz}(cos2\pi-isen2\pi)}{2} \\ &= \frac{e^{z}+e^{-iz}}{2i} \\ &= cosz. \end{aligned}$$

Portanto, $cos(z+2\pi)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. □

Propriedade 2.4.3. *A função cosseno é par, ou seja $cos(-z) = cosz, \forall z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} cos(-z) &= \frac{e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}}{2} \\ &= \frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} \\ &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ &= cosz. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $z \in$ temos que $cos(-z) = cosz$; logo, a função cosseno é par. □

Propriedade 2.4.4. *Para todo $z \in \mathbb{C}$ tem-se que $cos(z+\pi) = -cosz$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} cos(z+\pi) &= \frac{e^{i(z+\pi)}+e^{-i(z+\pi)}}{2} \\ &= \frac{e^{iz+i\pi}+e^{-iz-i\pi}}{2} \\ &= \frac{e^{iz}e^{i\pi}+e^{-iz}e^{-i\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Novamente, aplicando a fórmula de Euler, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{iz}e^{i\pi}+e^{-iz}e^{-i\pi}}{2} &= \frac{e^{iz}(cos\pi+isen\pi)+e^{-iz}(cos\pi-isen\pi)}{2} \\
&= \frac{e^{iz}(-1+i.0)+e^{-iz}(-1-i.0)}{2} \\
&= \frac{-e^{iz}-e^{-iz}}{2} \\
&= -\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\
&= -cosz.
\end{aligned}$$

Logo, temos que $cos(z+\pi) = -cosz, \forall z \in \mathbb{C}$.

Portanto, a função cosseno de uma variável complexa é periódica de período 2π. □

2.4.3 Função Tangente e Suas propriedades

Nesta seção, conheceremos a definição da função tangente com variável complexa. Demonstraremos, também, suas propriedades mais importantes.

A função tangente é definida pela função seno e cosseno;

logo, seja $z \in \mathbb{C}$ com $cosz \neq 0$, temos que a tangente de z é dada por:

$$tgz = \frac{senz}{cosz}$$

Também podemos expressar a tangente pela definição de $senz$ e $cosz$; assim, teremos:

$$\begin{aligned}
tgz &= \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} \\
&= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}.
\end{aligned}$$

Portanto, a tangente de um número complexo z é dada por:

$$tgz = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}$$

Devemos verificar que a tangente de z é definida apenas para $cosz \neq 0$; assim, $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, para definir a função tangente, devemos considerar o conjunto $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$. Portanto, definimos a função tangente de um número complexo z da seguinte forma:

Definição 2.4.3. *A função $tg : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$tgz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})},$$

é denominada função tangente.

Propriedade 2.4.5. *A função tgz é ímpar, ou seja $tg(-z) = -tgz, \forall z \in D$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} tg(-z) &= \frac{sen(-z)}{cos(-z)} \\ &= \frac{-sez}{cosz} \\ &= -tgz. \end{aligned}$$

Portanto, $tg(-z) = -tgz$ para todo $z \in \mathbb{D}$; logo, a função tangente é ímpar. □

Propriedade 2.4.6. *A função tangente é periódica de período π.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} tg(z+\pi) &= \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{i(e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)})} \\ &= \frac{e^{iz+i\pi} - e^{-iz-i\pi}}{i(e^{iz+i\pi} + e^{-iz-i\pi})} \\ &= \frac{e^{iz}e^{i\pi} - e^{-iz}e^{-i\pi}}{i(e^{iz}e^{i\pi} + e^{-iz}e^{-i\pi})} \\ &= \frac{e^{iz}(cos\pi + isen\pi) - e^{-iz}(cos\pi - isen\pi)}{i(e^{iz}(cos\pi + isen\pi) + e^{-iz}(cos\pi - isen\pi))} \\ &= \frac{e^{iz}(-1 + i.0) - e^{-iz}(-1 - i.0)}{i(e^{iz}(-1 + i.0) + e^{-iz}(-1 - i.0))} \\ &= \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{i(-e^{iz} - e^{-iz})} \\ &= \frac{-(e^{iz} - e^{-iz}}{-i(e^{iz} + e^{-iz})} \\ &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \\ &= tgz. \end{aligned}$$

Portanto, $tg(z+\pi) = tgz, \ \forall z \in \mathbb{C}$; logo, tangente de z é periódica de período π. □

Propriedade 2.4.7. *Seja $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se que:*

$$tg(z+w) = \frac{tgz + tgw}{1 - tgz.tgw}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} tg(z+w) &= \frac{sen(z+w)}{cos(z+w)} \\ &= \frac{senz.cosw + senw.cosz}{cosz.cosw - senz.senw}. \end{aligned}$$

Visto que $cosz \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ então temos que $cosz.cosw \neq 0$.

Assim tem-se que:

$$\begin{aligned} tg(z+w) &= \frac{\frac{senz.cosw + senw.cosz}{cosz.cosw}}{\frac{cosz.cosw - senz.senw}{cosz.cosw}} \\ &= \frac{\frac{senz.cosw}{cosz.cosw} + \frac{senw.cosz}{cosz.cosw}}{\frac{cosz.cosw}{cosz.cosw} - \frac{senz.senw}{cosz.cosw}} \\ &= \frac{tgz + tgw}{1 - tgz.tgw}. \end{aligned}$$

□

2.4.4 Função Cossecante

Agora, conheceremos a definição da função trigonométrica cossecante com variável complexa.

A função cossecante é definida pela função seno da seguinte forma:

Seja $z \in \mathbb{C}$ com $senz \neq 0$, temos que a cossecante de z é dada por:

$$cossecz = \frac{1}{senz}.$$

Também podemos expressar a cossecante pela de definição de $senz$; assim, teremos:

$$cossecz = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Devemos também verificar que a função cossecante é definida apenas para $senz \neq 0$, assim $z \neq k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Deste modo, para definir a função cossecante, devemos considerar um conjunto $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$. Portanto, definimos a função cossecante de um número complexo z da seguinte forma:

Definição 2.4.4. *A função $cossec : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$cossecz = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}},$$

é denominada função cossecante.

2.4.5 Função Secante

Agora, conheceremos a definição da função trigonométrica secante com variável complexa.

A função secante é definida pela função cosseno da seguinte forma:

Seja $z \in \mathbb{C}$ com $cosz \neq 0$, temos que a secante de z é dada por:

$$secz = \frac{1}{cosz}.$$

Também podemos expressar a secante pela de definição de $cosz$; assim, teremos:

$$secz = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Devemos verificar que a secante de z é definida apenas para $cosz \neq 0$; assim, $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, para definir a função tangente, devemos considerar o conjunto $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$. Portanto, definimos a função tangente de um número complexo z da seguinte forma:

Definição 2.4.5. *A função $sec : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$cossecz = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}},$$

é denominada função secante.

2.4.6 Função Cotangente

Conheceremos agora a definição da função cotangente com variável complexa.

A função cotangente é definida pela função seno e cosseno.

Seja $z \in \mathbb{C}$ com $senz \neq 0$, temos que a cotangente de z é dada por:

$$cotgz = \frac{cosz}{senz}.$$

Também podemos expressar a cotangente pela definição de $senz$ e $cosz$; assim, teremos:

$$\begin{aligned} cotgz &= \frac{\frac{e^{iz} + e^{iz}}{2}}{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} \\ &= \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}. \end{aligned}$$

Portanto, a cotangente de um número complexo z é dada por:

$$cotgz = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Devemos também verificar que a função cotangente é definida apenas para $senz \neq 0$; assim, $z \neq k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Deste modo, para definir a função cotangente, devemos considerar um conjunto $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$. Portanto, definimos a função cotangente de um número complexo z da seguinte forma:

Definição 2.4.6. *A função $cotg : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$cotgz = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}},$$

é denominada função cotangente.

2.4.7 Propriedades das Funções Trigonométricas em $\mathbb{C}$

Nesta seção, vamos conhecer e demonstrar as principais propriedades das funções trigonométricas complexas seno e cosseno.

Propriedade 2.4.8. *Dado $z \in \mathbb{C}$ tem-se que $senz = cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}}{2} \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}-iz} + e^{-i\frac{\pi}{2}+iz}}{2} \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-iz} + e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{iz}}{2} \\
&= \frac{(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2})e^{-iz} + (cos\frac{\pi}{2} - isen\frac{\pi}{2})e^{iz}}{2} \\
&= \frac{(0 + i.1)e^{-iz} + (0 - i.1)e^{iz}}{2} \\
&= \frac{ie^{-iz} - ie^{iz}}{2} \\
&= \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2i^2} \\
&= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= senz.
\end{aligned}$$

Portanto, $senz = cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \ \forall z \in \mathbb{C}$. □

Propriedade 2.4.9. *Dado $z \in \mathbb{C}$ tem-se que $cosz = sen\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.*

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
sen\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}}{2i} \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}-iz} - e^{-i\frac{\pi}{2}+iz}}{2i} \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-iz} - e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{iz}}{2i} \\
&= \frac{(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2})e^{-iz} - (cos\frac{\pi}{2} - isen\frac{\pi}{2})e^{iz}}{2i} \\
&= \frac{(0 + i.1)e^{-iz} - (0 - i.1)e^{iz}}{2} \\
&= \frac{ie^{-iz} + ie^{iz}}{2i} \\
&= \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} \\
&= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
&= cosz.
\end{aligned}
$$

Portanto, $cos = sen\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. □

Propriedade 2.4.10. *Seja um número complexo z, então $sen^2z + cos^2z = 1$*

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
sen^2z + cos^2z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4i^2} + \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} \\
&= \frac{-e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} - e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} \\
&= \frac{4e^{iz}}{4e^{iz}} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, para todos os números $z \in \mathbb{C}$, tem se que $sen^2z + cos^2z = 1$; esta relação é conhecida como **relação trigonométrica fundamental**. □

Propriedade 2.4.11. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$, temos que:*

$$sen(z + w) = senz.cosw + senw.cosz.$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
sen(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{2i} \\
&= \frac{2e^{iz}e^{iw} - 2e^{-iz}e^{-iw}}{4i} \\
&= \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{4i}.
\end{aligned}
$$

Agora vamos somar e subtrair do numerador da fração as expressões $e^{iz}e^{-iw}$ e $e^{-iz}e^{iw}$:

$$
\begin{aligned}
sen(z+w) &= \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{4i} \\
&= \frac{e^{iz}(e^{iw} + e^{-iw}) - e^{-iz}(e^{iw} + e^{-iw}) + e^{iz}(e^{iw} - e^{-iw}) + e^{-iz}(e^{iw} - e^{-iw})}{4i} \\
&= \frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iw} - e^{-iw})(e^{iz} + e^{-iz})}{4i} \\
&= \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i} . \frac{(e^{iw} + e^{-iw})}{2} + \frac{(e^{iw} - e^{-iw})}{2i} \frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{2} \\
&= senz.cosw + senw.cosz.
\end{aligned}
$$

Portanto, $sen(z+w) = senzcosw + senwcosz$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$. $\square$

Propriedade 2.4.12. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$, temos que:*

$$cos(z+w) = cosz.cosw - senz.senw.$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
cos(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} \\
&= \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{2} \\
&= \frac{2e^{iz}e^{iw} + 2e^{-iz}e^{-iw}}{4} \\
&= \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{-iw}}{4i}.
\end{aligned}
$$

Agora vamos somar e subtrair do numerador da fração as expressões $e^{iz}e^{-iw}$ e $e^{-iz}e^{iw}$:

$$\begin{aligned}
sen(z+w) &= \frac{e^{iz}e^{iw}+e^{iz}e^{-iw}+e^{-iz}e^{iw}+e^{-iz}e^{-iw}+e^{iz}e^{iw}-e^{iz}e^{-iw}-e^{-iz}e^{iw}+e^{-iz}e^{-iw}}{4} \\
&= \frac{e^{iz}e^{iw}+e^{iz}e^{-iw}+e^{-iz}e^{iw}+e^{-iz}e^{-iw}}{4} - \frac{e^{iz}e^{iw}-e^{iz}e^{-iw}-e^{-iz}e^{iw}+e^{-iz}e^{-iw}}{4i^2} \\
&= \frac{e^{iz}(e^{iw}+e^{-iw})+e^{-iz}(e^{iw}+e^{-iw})}{4} - \frac{e^{iz}(e^{iw}-e^{-iw})-e^{-iz}(e^{iw}-e^{-iw})}{4i^2} \\
&= \frac{(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw})}{4} - \frac{(e^{iw}-e^{-iw})(e^{iz}-e^{-iz})}{4i^2} \\
&= \frac{(e^{iz}+e^{-iz})}{2}\frac{(e^{iw}+e^{-iw})}{2} - \frac{(e^{iw}-e^{-iw})}{2i}\frac{(e^{iz}-e^{-iz})}{2i} \\
&= cosz.cosw - senw.senz.
\end{aligned}$$

Portanto, $cos(z+w) = cosz.cosw + senz.senw$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$. □

Propriedade 2.4.13. *Dado $z \in \mathbb{C}$ tem se que $sen2z = 2senz.cosz$.*

Demonstração. Tomando $w = z$ na propriedade $sen(z+w) = senzcosw + senwcosz$ temos que:

$$\begin{aligned}
sen(z+z) &= senz.cosz + senz.cosz \\
sen2z &= 2senz.cosz.
\end{aligned}$$

Portanto, $sen2z = 2senz.cosz$ para todo $z \in \mathbb{C}$. □

Propriedade 2.4.14. *Dado $z \in \mathbb{C}$ tem se que $cos2z = cos^2z - sen^2z$.*

Demonstração. Tomando $w = z$ na propriedade $cos(z+w) = coszcosw + senzsenw$ temos que:

$$\begin{aligned}
cos(z+z) &= cosz.cosz - senz.senz \\
cos2z &= cos^2z - sen^2z.
\end{aligned}$$

Portanto, $cos^2z - sen^2z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. □

Propriedade 2.4.15. *Dado $z \in \mathbb{C}$ tem se que $sec^2z - tg^2z = 1$.*

Demonstração. Dada a propriedade $sen^2z + cos^2z = 1$, temos que:

$$\begin{aligned}
sen^2z &= 1 - cos^2z \\
\frac{sen^2z}{cos^2z} &= \frac{1}{cos^2z} - \frac{cos^2z}{cos^2z}.
\end{aligned}$$

Aplicando as definições de $tg(.)$ e $sec(.)$ temos:

$$\begin{aligned}
tg^2z &= sec^2z - 1 \\
sec^2z - tg^2z &= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $sec^2z - tg^2z = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. □

Propriedade 2.4.16. *Dado* $z \in \mathbb{C}$ *tem-se que* $cossec^2 z - cotg^2 z = 1$.

Demonstração. Dada a propriedade $sen^2 z + cos^2 z = 1$, temos que:

$$\begin{aligned} cos^2 z &= 1 - sen^2 z \\ \frac{cos^2 z}{sen^2 z} &= \frac{1}{sen^2 z} - \frac{sen^2 z}{sen^2 z}. \end{aligned}$$

Aplicando as definições de $cotg(.)$ e $cossec(.)$, temos:

$$\begin{aligned} cotg^2 z &= cossec^2 z - 1 \\ cossec^2 z - cotg^2 z &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $cossec^2 z - cotg^2 z = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. □

2.5 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS COMPLEXAS

As funções inversas das funções trigonométricas podem ser demonstradas facilmente em termos de logaritmos, como veremos a seguir.

2.5.1 Função Seno Inversa

A função $w = arcsen$ é a inversa da função cosseno trigonométrico de z, também denotada por sen^{-1}. Assim, temos que:

Da definição de função inversa, temos:

$$senw = z \leftrightarrow w = sen^{-1} z.$$

Da definição de $cosw$, temos:

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z.$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} e^{iw} - e^{-iw} &= 2iz \\ \frac{(e^{iw})^2 - 1}{e^{iw}} &= 2iz \\ (e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Resolvendo a equação do segundo grau $(e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} e^{iw} &= iz + \sqrt{1 - z^2} \\ iw &= ln(iz + \sqrt{1 - z^2}) \\ w &= -iln(iz + \sqrt{1 - z^2}). \end{aligned}$$

Logo, definiremos a função seno trigonométrico inversa da seguinte forma:

Definição 2.5.1. *A função* $sen^{-1} : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ *seno trigonométrico inversa é dada por:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \;\; sen^{-1}(z) = -iln(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

2.5.2 Função Cosseno Inversa

A função $w = arccos$ é a inversa da função cosseno trigonométrico de z, também denotada por cos^{-1}. Assim, temos que:

Da definição de função inversa, temos:

$$cosw = z \leftrightarrow w = cos^{-1}z.$$

Da definição de $cosw$, temos:

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z.$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} e^{iw} + e^{-iw} &= 2z \\ \frac{(e^{iw})^2 + 1}{e^{iw}} &= 2z \\ (e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Resolvendo a equação do segundo grau $(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} e^{iw} &= z + \sqrt{z^2 - 1} \\ iw &= ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ w &= -iln(z + \sqrt{z^2 - 1}). \end{aligned}$$

Logo, definiremos a função cosseno trigonométrico inversa da seguinte forma:

Definição 2.5.2. *A função* $cos^{-1} : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ *cosseno trigonométrico inversa é dada por:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \;\; cos^{-1}(z) = -iln(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

2.5.3 Função Tangente Inversa

A função $w = arctg$ é a inversa da função cosseno trigonométrico de z, também denotada por tg^{-1}. Assim, temos que:

Da definição de função inversa, temos:

$$tgw = z \leftrightarrow w = tg^{-1}z.$$

Da definição de tgw, temos:

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = z.$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} &= z \\
\frac{(e^{iw})^2 - 1}{i(e^{iw})^2 + i} &= z \\
(e^{iw})^2 - 1 &= iz(e^{iw})^2 + iz \\
(e^{iw})^2 - iz(e^{iw})^2 &= 1 + zi \\
(1 - zi)(e^{iw})^2 &= 1 + zi \\
(e^{iw})^2 &= \frac{1 + zi}{1 - zi} \\
iw &= \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + zi}{1 - zi}\right) \\
w &= \frac{1}{2i} ln\left(\frac{1 + zi}{1 - zi}\right) \\
w &= \frac{-i}{2} ln\left(\frac{1 + zi}{1 - zi}\right) \\
w &= \frac{i}{2} ln\left(\frac{1 - zi}{1 + zi}\right).
\end{aligned}$$

Logo, definiremos a função tangente trigonométrico inversa da seguinte forma:

Definição 2.5.3. *A função $tg^{-1} : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ tangente trigonométrico inversa é dada por:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \;\; tg^{-1}(z) = \frac{i}{2} ln\left(\frac{1 - zi}{1 + zi}\right)$$

2.5.4 Função Cossecante Inversa

A função $w = arccossec$ é a inversa da função cosseno trigonométrico de z, também denotada por $cossec^{-1}$. Assim, temos que:

Da definição de função inversa, temos:

$$cossecw = z \leftrightarrow w = cossec^{-1}z.$$

Da definição de $cossecw$, temos:

$$\frac{2i}{e^{iw} - e^{-iw}} = z.$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} 2i &= \frac{z(e^{iw})^2 - z}{e^{iw}} \\ 2ie^{iw} &= z(e^{iw})^2 - z \\ z(e^{iw})^2 - 2ie^{iw} - z &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau $z(e^{iw})^2 - 2ie^{iw} - z = 0$, obtemos:

$$e^{iw} = \frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z}.$$

Daí, segue que:

$$\begin{aligned} iw &= ln\left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z}\right) \\ w &= \frac{1}{i}ln\left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z}\right). \end{aligned}$$

Logo, definiremos a função cossecante trigonométrico inversa da seguinte forma:

Definição 2.5.4. *A função* $cossec^{-1} : \mathbb{C}^* \longmapsto \mathbb{C}$ *cossecante trigonométrico inversa é dada por:*

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \;\; cossec^{-1}(z) = \frac{1}{i}ln\left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z}\right).$$

2.5.5 Função Secante Inversa

A função $w = arcsec$ é a inversa da função cosseno trigonométrico de z, também denotada por sec^{-1}. Assim, temos que:

Da definição de função inversa, temos:

$$secw = z \leftrightarrow w = sec^{-1}z.$$

Da definição de $secw$, temos:

$$\frac{2}{e^{iw} + e^{-iw}} = z.$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{z(e^{iw})^2+z}{e^{iw}} \\ 2e^{iw} &= z(e^{iw})^2+z \\ z(e^{iw})^2-2e^{iw}+z &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau $z(e^{iw})^2-2e^{iw}+z=0$, obtemos:

$$e^{iw}=\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}.$$

Daí, segue que:

$$\begin{aligned} iw &= ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right) \\ w &= \frac{1}{i}ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right). \end{aligned}$$

Logo, definiremos a função secante trigonométrico inversa da seguinte forma:

Definição 2.5.5. *A função $sec^{-1}:\mathbb{C}^*\longmapsto\mathbb{C}$ secante trigonométrico inversa é dada por:*

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\ \ sec^{-1}(z)=\frac{1}{i}ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right).$$

2.5.6 Função Cotangente Inversa em $\mathbb{C}$

A função $w=arccotg$ é a inversa da função cotangente trigonométrico de z, também denotada por $cotg^{-1}$. Assim, temos que:

Da definição de função inversa, temos:

$$cotgw=z\leftrightarrow w=cotg^{-1}z.$$

Da definição de $cotgw$, temos:

$$\frac{i(e^{iw}+e^{-iw})}{e^{iw}-e^{-iw}}=z.$$

Logo, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{i(e^{iw}+e^{-iw})}{e^{iw}-e^{-iw}} &= z \\
\frac{i(e^{iw})^2+i}{(e^{iw})^2-1} &= z \\
i(e^{iw})^2+i &= z(e^{iw})^2-z \\
i(e^{iw})^2-z(e^{iw})^2 &= -i-z \\
(i-z)(e^{iw})^2 &= -i-z \\
(e^{iw})^2 &= \frac{-i-z}{i-z} \\
iw &= \frac{1}{2}ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right) \\
w &= \frac{1}{2i}ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right).
\end{aligned}
$$

Logo, definiremos a função cotangente trigonométrico inversa da seguinte forma:

Definição 2.5.6. *A função $cotg^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ cotangente trigonométrico inversa é dada por:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \;\; cotg^{-1}(z) = \frac{1}{2i}ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right).$$

3 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS COMPLEXAS

Neste capítulo, vamos conhecer as principais definições, propriedades e teoremas das funções trigonométrica hiperbólica complexa.

As propriedades citadas neste capítulo podem ser encontradas nos livros (CHURCHILL, 1975) e (AVILA, 2013).

3.1 FUNÇÃO SENO HIPERBÓLICO

Vamos tratar sobre a função seno hiperbólico de um número complexo. Conheceremos sua definição e demonstraremos suas propriedades mais importantes.

Definição 3.1.1. *Seja $z \in \mathbb{C}$ a função, $f(z) = senhz$, seno hiperbólico de z é dada por:*

$$senhz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Esta definição pode ser encontrada no livro AVILA (2013). Podemos perceber nesta definição que a função $senhz$ possui valores reais para valores reais de z. A função seno hiperbólico de um número complexo z possui propriedades que vamos conhecer e demonstrar a seguir.

Propriedade 3.1.1. *Dado $z \in \mathbb{C}$ tem-se que $senh(z + i\pi) = -senhz.$*

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$, pela definição de $senhz$ temos que:

$$\begin{aligned} senh(z + i\pi) &= \frac{e^{z+i\pi} - e^{-(z+i\pi)}}{2} \\ &= \frac{e^{z+i\pi} - e^{-z-i\pi}}{2} \\ &= \frac{e^z e^{i\pi} - e^{-z} e^{-i\pi}}{2} \\ &= \frac{e^z(cos\pi + isen\pi) - e^{-z}(cos\pi - isen\pi)}{2} \\ &= \frac{e^z(-1 + i.0) - e^{-z}(-1 - i.0)}{2} \\ &= \frac{-e^z + e^{-z}}{2} \\ &= -\frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= -senhz. \end{aligned}$$

Portanto, $senh(z + i\pi) = -senhz, \;\; \forall z \in \mathbb{C}$. □

Propriedade 3.1.2. *A função* $senhz$ *é periódica de período* $2\pi i$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} senh(z+2\pi i) &= \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-(z+2\pi i)}}{2} \\ &= \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-z-2\pi i}}{2} \\ &= \frac{e^{z}e^{2\pi i} - e^{-z}e^{-2\pi i}}{2} \\ &= \frac{e^{z}(cos2\pi + isen2\pi) - e^{-z}(cos2\pi - isen2\pi)}{2} \\ &= \frac{e^{z}(1+i.0) - e^{-z}(1-i.0)}{2} \\ &= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \\ &= senhz. \end{aligned}$$

Portanto, a função seno hiperbólica de z é periódica de período $2\pi i$. □

Propriedade 3.1.3. *A função seno hiperbólico é ímpar. Dado* $z \in \mathbb{C}$ *tem-se que* $senh(-z) = -senhz$.

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} senh(-z) &= \frac{e^{-z} - e^{-(-z)}}{2} \\ &= \frac{e^{-z} - e^{z}}{2} \\ &= -\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \\ &= -senhz. \end{aligned}$$

Portanto, a função seno hiperbólica é ímpar. □

3.2 FUNÇÃO COSSENO HIPERBÓLICO

Agora, vamos tratar sobre a função cosseno hiperbólico de um número complexo. Inicialmente, apresentaremos sua definição e demonstraremos suas propriedades mais importantes.

Definição 3.2.1. *Seja* $z \in \mathbb{C}$ *a função,* $f(z) = coshz$*, seno hiperbólico de* z *é dada por:*

$$coshz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

A função cosseno hiperbólico em $\mathbb{C}$ possui propriedades importantes que demonstraremos a seguir.

Propriedade 3.2.1. *Dado* $z \in \mathbb{C}$*, tem-se que* $cosh(z + i\pi) = -coshz.$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$, pela definição de $coshz$, temos que:

$$\begin{aligned} cosh(z+i\pi) &= \frac{e^{z+i\pi}+e^{-(z+i\pi)}}{2} \\ &= \frac{e^{z+i\pi}+e^{-z-i\pi}}{2} \\ &= \frac{e^{z}e^{i\pi}+e^{-z}e^{-i\pi}}{2} \\ &= \frac{e^{z}(cos\pi+isen\pi)+e^{-z}(cos\pi-isen\pi}{2} \\ &= \frac{e^{z}(-1+i.0)+e^{-z}(-1-i.0)}{2} \\ &= \frac{-e^{z}-e^{-z}}{2} \\ &= -\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \\ &= -coshz. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.2.2. *A função* $coshz$ *é periódica de período* $2\pi i.$

Demonstração.

$$\begin{aligned} cosh(z+2\pi i) &= \frac{e^{z+2\pi i}+e^{-(z+2\pi i)}}{2} \\ &= \frac{e^{z+2\pi i}+e^{-z-2\pi i}}{2} \\ &= \frac{e^{z}e^{2\pi i}+e^{-z}e^{-2\pi i}}{2} \\ &= \frac{e^{z}(cos2\pi+isen2\pi)+e^{-z}(cos2\pi-isen2\pi)}{2} \\ &= \frac{e^{z}(1+i.0)+e^{-z}(1-i.0)}{2} \\ &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \\ &= coshz. \end{aligned}$$

Portanto, a função cosseno hiperbólico de z é periódica de período $2\pi i$. □

Propriedade 3.2.3. *A função cosseno hiperbólico é par. Dado* $z \in \mathbb{C}$ *tem-se* $cosh(-z) = coshz.$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} cosh(-z) &= \frac{e^{-z} + e^{-(-z)}}{2} \\ &= \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} \\ &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}. \\ &= coshz. \end{aligned}$$

Portanto, a função cosseno hiperbólica é par. □

3.3 FUNÇÃO TANGENTE HIPERBÓLICO

Vamos definir agora a função tangente hiperbólico para um número complexo z. De modo usual, temos que:

$$tghz = \frac{senhz}{coshz},$$

onde $coshz \neq 0$.

Assim, temos que $e^z + e^{-z} \neq 0$.

Resolvendo a equação $e^z + e^{-z} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{(e^z)^2 + 1}{e^z} &= 0 \\ (e^z)^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau $(e^z)^2 + 1 = 0$, encontramos:

$e^z = i$ e $e^z = -i$.

i) Seja $e^z = i$, utilizando a fórmula de De Moivre $e^z = e^x(cosy + iseny)$, tem-se

$$\begin{aligned} e^x(cosy + iseny) &= i \\ e^x cosy + e^x seny.i &= i. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Da parte real da igualdade 3.1, temos

$$\begin{aligned} (e^x cosy)^2 &= 0 \\ e^{2x} cos^2 y &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Da parte imaginária de 3.1, temos

$$\begin{aligned} e^x seny &= 1 \\ (e^x seny)^2 &= 1 \\ e^{2x} sen^2 y &= 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Somando a equação 3.2 com a equação 3.3, temos

$$\begin{aligned} e^{2x} cos^2 y + e^{2x} sen^2 y &= 1 \\ e^{2x}(cos^2 y + sen^2 y) &= 1 \\ e^{2x} &= 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Assim, $e^{2x} = 1 \iff x = 0$.

Como $x = 0$; então,

$$e^x seny = 1 \iff seny = 1,$$

e

$$e^x cosy = 0 \iff cosy = 0.$$

Logo, temos que $y = \frac{\pi}{2}$.

Portanto, $z = \frac{\pi}{2} i$.

ii) De forma análoga, seja $e^z = -i$ teremos:

$$e^x cosy + e^x senyi = -i. \tag{3.5}$$

Da parte real de 3.5, temos

$$\begin{aligned} e^x cosy &= 0 \\ e^{2x} cos^2 y &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Da parte imaginária de 3.5, temos

$$\begin{aligned} e^x seny &= -1 \\ e^{2x} sen^2 y &= 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Somando as equações 3.6 e 3.7, temos

$$\begin{aligned} e^{2x}(cos^2 y + sen^2 y) &= 1 \\ e^{2x} &= 1. \end{aligned}$$

Assim, $e^{2x} = 1 \iff x = 0$.

Como $x = 0$ então,

$$e^x cosy = 0 \iff cosy = 0$$

e

$$e^x seny = -1 \iff seny = -1.$$

Logo, temos que $y = \frac{3\pi}{2}$.

Portanto, $z = \frac{3\pi}{2}i$.

Assim, para definir a função tangente hiperbólica vamos considerar

$$D = \mathbb{C} - \{(\frac{\pi}{2} + k\pi)i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definição 3.3.1. *Seja $z \in D$, a função tangente hiperbólico de z é dada por:*

$$tghz = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

A função tangente hiperbólico de um número complexo z também possui propriedades que demonstraremos a seguir:

Propriedade 3.3.1. *A função $tghz$ é periódica de período π.*

Demonstração. De fato,temos que $senh(z+\pi i) = -senhz$ e $cosh(z+\pi i) = -coshz$, assim:

$$\begin{aligned} tgh(z+\pi i) &= \frac{senh(z+\pi)}{cosh(z+\pi)} \\ &= \frac{-senhz}{-coshz} \\ &= tghz. \end{aligned}$$

Portanto, a função $tghz$ é periódica de período $i\pi$. □

3.4 FUNÇÃO SECANTE HIPERBÓLICO

De modo usual, temos que:

$$sechz = \frac{1}{coshz},$$

onde, $coshz \neq 0$.

Assim, de forma análoga à função tangente hiperbólica, para definir a função secante vamos considerar o conjunto

$$D = \mathbb{C} - \{(\frac{\pi}{2} + k\pi)i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definição 3.4.1. *Seja $z \in D$, a função secante hiperbólica denotada por $sech$ é definida por:*

$$sechz = \frac{2}{e^z + e^{-z}}.$$

3.5 FUNÇÃO COSSECANTE HIPERBÓLICO

Começaremos pela definição da função cossecante hiperbólica de um número complexo z. Lembrando que podemos entender que:

$$cschz = \frac{1}{senhz},$$

onde $senhz \neq 0$.

Resolvendo a equação $e^z - e^{-z} \neq 0$.

Temos

$$\begin{aligned} \frac{(e^z)^2 - 1}{e^z} &\neq 0 \\ (e^z)^2 - 1 &\neq 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau $(e^z)^2 - 1 = 0$ encontramos:

$$e^z = 1.$$

ou

$$e^z = -1.$$

i) Seja $e^x = 1$, utilizando a fórmula de De Moivre, tem-se

$$\begin{aligned} e^x(cosy + iseny) &= 1 \\ e^x cosy + e^x senyi &= 1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Da parte real de 3.8, temos

$$\begin{aligned} (e^x cosy)^2 &= 1 \\ e^{2x} cos^2 y &= 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Da parte imaginária de 3.8, temos

$$\begin{aligned} (e^x seny)^2 &= 0 \\ e^{2x} sen^2 y &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Somando as equações 3.9 e 3.10, temos

$$\begin{aligned} e^{2x}(cos^2 y + sen^2 y) &= 1 \\ e^{2x} &= 1. \end{aligned}$$

Assim, $e^{2x} = 1 \iff x = 0$.

Como $x = 0$ então,

$$e^x seny = 0 \iff seny = 0$$

e

$$e^x cosy = 1 \iff cosy = 1.$$

Logo, temos que $y = 2k\pi$; onde $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $z = 2k\pi$; onde $k \in \mathbb{Z}$.

ii) De forma análoga, seja $e^z = -1$ teremos:

$$e^x cosy + e^x seny = -1. \tag{3.11}$$

Da parte real de 3.11, temos

$$\begin{aligned} (e^x cosy)^2 &= -1 \\ e^{2x} cos^2 y &= 1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Da parte imaginária de 3.11, temos

$$\begin{aligned} (e^x seny)^2 &= 0 \\ e^{2x} sen^2 y &= 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Somando as equações 3.12 e 3.13, temos

$$\begin{aligned} e^{2x}(cos^2 y + sen^2 y) &= 1 \\ e^{2x} &= 1. \end{aligned}$$

Assim, $e^{2x} = 1 \iff x = 0$.

Como $x = 0$ então,

$$e^x cosy = -1 \iff cosy = -1$$

e

$$e^x seny = 0 \iff seny = 0.$$

Logo, temos que $y = (2k + 1)\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, $z = (2k + 1)\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, para definir a função cossecante hiperbólica, vamos considerar o conjunto

$$E = \mathbb{C} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definição 3.5.1. *Seja $z \in E$ a função cossecante hiperbólica denotada por $cossech$ é definida por:*

$$cossechz = \frac{2}{e^z - e^{-z}}.$$

3.6 FUNÇÃO COTANGENTE HIPERBÓLICO

De modo usual, temos que:

$$cotghz = \frac{coshz}{senhz},$$

onde $senhz \neq 0$.

Assim, de forma análoga à função cossecante hiperbólica, para definir a função cotangente vamos considerar o conjunto

$$E = \mathbb{C} - \{0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\}.$$

Definição 3.6.1. *Seja $z \in E$ a função cotangente hiperbólica denotada por $cotgh$ é definida por*

$$cotghz = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

3.7 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS

Demonstraremos agora algumas identidades mais conhecidas:

Propriedade 3.7.1. *Seja $z \in \mathbb{C}$ tem-se que $cosh^2 z - senh^2 z = 1$.*

Demonstração. Dados $z \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} cosh^2 z - senh^2 z &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2z} + 2e^z e^{-z} + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2e^z e^{-z} + e^{-2z}}{4} \\ &= \frac{4e^z e^{-z}}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.7.2. *Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tem-se que:*

$$senh(z_1 + z_2) = senhz_1 coshz_2 + coshz_1 senhz_2$$

Demonstração. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos que:

$$\begin{aligned} senhz_1 coshz_2 + coshz_1 senhz_2 &= \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} . \frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} . \frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} \\ &= \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2} + e^{z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2}}{4} \\ &= \frac{2(e^{z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2})}{4} \\ &= \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2}}{2} \\ &= senh(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.7.3. *Seja $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tem-se que:*

$$cosh(z_1 + z_2) = coshz_1 coshz_2 + senhz_1 senhz_2$$

Demonstração. Dados $z_1, z_2 \in$ temos que:

$$\begin{aligned} coshz_1 coshz_2 + senhz_1 senhz_2 &= \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} . \frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} . \frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} \\ &= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2} + e^{z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2}}{4} \\ &= \frac{2(e^{z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2})}{4} \\ &= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2}}{2} \\ &= cosh(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.7.4. *Seja $z \in \mathbb{C}$, tem-se que:*

$$senh(2z) = 2senhzcoshz$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} senh(2z) &= senhzcoshz + senhzcoshz \\ &= 2senhzcoshz. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.7.5. *Seja $z \in \mathbb{C}$, tem-se que:*

$$cosh(2z) = cosh^2z + senh^2z$$

Demonstração. Dados $z \in \mathbb{C}$, então:

$$\begin{aligned} cosh(2z) &= coshzcoshz + senhzsenhz \\ &= cosh^2z + senh^2z. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.7.6. *Seja $z \in \mathbb{C}$, tem-se que $senh^2z = \dfrac{-1 + cosh(2z)}{2}$.*

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$, então,

da propriedade $cosh^2z - senh^2z = 1$ segue que:

$$cosh^2z = 1 + senh^2z. \tag{3.14}$$

E da propriedade $cosh(2z) = cosh^2z + senh^2z$ segue que:

$$cosh^2z = cosh(2z) - senh^2z. \tag{3.15}$$

Das igualdades 3.14 e 3.15, temos:

$$\begin{aligned} 1 + senh^2z &= cos(2z) - senh^2z \\ senh^2z + senh^2z &= -1 + cos(2z) \\ 2senh^2z &= -1 + cosh(2z) \\ senh^2z &= \frac{-1 + cosh(2z)}{2}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.7.7. *Seja $z \in \mathbb{C}$ tem-se que $cosh^2z = \dfrac{1 + cosh(2z)}{2}$.*

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$, então,

da propriedade $cosh^2 z - senh^2 z = 1$ segue que:

$$senh^2 z = cosh^2 z - 1. \tag{3.16}$$

E da propriedade $cosh(2z) = cosh^2 z + senh^2 z$ segue que:

$$senh^2 z = cosh(2z) - cosh^2 z. \tag{3.17}$$

Das igualdades 3.16 e 3.17, temos,

$$\begin{aligned} cosh^2 z - 1 &= cosh(2z) - cosh^2 z \\ cosh^2 z + cosh^2 z &= 1 + cosh(2z) \\ 2cosh^2 z &= 1 + cosh(2z) \\ cosh^2 z &= \frac{1 + cosh(2z)}{2}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.7.8. *Seja $z \in \mathbb{C}$, tem-se que $sech^2 z + tgh^2 z = 1$.*

Demonstração. De fato, temos que $cosh^2 - senh^2 = 1$. Assim, dividindo a equação por $cosh^2 z$ teremos:

$$\begin{aligned} \frac{cos^2 z - sen^2 z}{cosh^2 z} &= \frac{1}{cosh^2 z} \\ \frac{cosh^2 z}{cosh^2 z} - \frac{senh^2 z}{cosh^2 z} &= \frac{1}{cosh^2 z} \\ 1 - \frac{senh^2 z}{cosh^2 z} &= \frac{1}{cosh^2 z} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Levando em conta a equação e as definições de $sechz$ e $tghz$, temos que:

$$\begin{aligned} 1 - tgh^2 z &= sech^2 z \\ sech^2 z + tgh^2 z &= 1. \end{aligned}$$

□

Dado $z \in \mathbb{C}$, sabemos que $cosh^2 z - senh^2 z = 1$. Assim, dividindo-se a equação por $senh^2 z$ teremos:

Propriedade 3.7.9. *Seja $z \in \mathbb{C}$, tem-se que $cotgh^2 z - cossech^2 z = 1$.*

Demonstração. De fato, temos que $cosh^2z - senh^2z = 1$. Assim, dividindo a equação por $senh^2z$ teremos:

$$\begin{aligned} \frac{cosh^2z - senh^2z}{senh^2z} &= \frac{1}{senh^2z} \\ \frac{cosh^2z}{senh^2z} - \frac{senh^2z}{senh^2z} &= \frac{1}{senh^2z}. \end{aligned}$$

Levando em consideração as definições de $cotgh$ e $cossech$, temos que:

$$\begin{aligned} cotgh^2z - 1 &= cossech^2z \\ cotgh^2z - cossech^2z &= 1. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.7.10. *Seja $z \in \mathbb{C}$, tem-se que $coshz + senhz = e^z$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos lembrar que $senhz = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ e $coshz = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Assim,

$$\begin{aligned} coshz + senhz &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} + \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= \frac{2e^z}{2} \\ &= e^z. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.7.11. *Seja $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tem-se que:*

$$tgh(z_1 + z_2) = \frac{tghz_1 + tghz_2}{1 + tghz_1 tghz_2}.$$

Demonstração. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} tgh(z_1 + z_2) &= \frac{senh(z_1 + z_2)}{cosh(z_1 + z_2)} \\ &= \frac{senhz_1.coshz_2 + senhz_2.coshz_1}{coshz_1.coshz_2 + senhz_1.senhz_2}. \end{aligned}$$

Visto que $coshz \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ então temos que $coshz_1.coshz_2 \neq 0$.

Assim tem-se que:

$$
\begin{aligned}
tgh(z_1+z_2) &= \frac{\dfrac{senhz_1.coshz_2 + senhz_2.coshz_1}{coshz_1.coshz_2}}{\dfrac{coshz_1.coshz_2 + senhz_1.senhz_2}{coshz_1.coshz_2}} \\
&= \frac{\dfrac{senhz_1.coshz_2}{coshz_1.coshz_2} + \dfrac{senhz_2.coshz_1}{coshz_1.coshz_2}}{\dfrac{coshz_1.coshz_2}{coshz_1.coshz_2} + \dfrac{senhz_1.senhz_2}{coshz_1.coshz_2}} \\
&= \frac{tghz_1 + tghz_2}{1 + tghz_1.tghz_2}.
\end{aligned}
$$

□

3.8 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS INVERSAS

Nesta seção veremos que as funções trigonométricas hiperbólicas, a exemplo das funções trigonométricas, possuem funções inversas. No **Apêndice A**, veremos como se pode calcular as funções hiperbólicas inversas.

Veremos inicialmente, de acordo com (LANG, 1999) e (SOARES, 2014), a definição de função inversa complexa:

Definição 3.8.1. *Dada uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, dizemos que uma função $g : B \longrightarrow A$ é uma inversa à direita de f em $B = f(A)$, se*

$$f(g(w)) = w \;\; \forall w \in B.$$

Definição 3.8.2. *Dada uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, dizemos que uma função $g : B \longrightarrow A$ é uma inversa à esquerda de f em $B = f(A)$, se*

$$g(f(z)) = z \;\; \forall z \in A.$$

Definição 3.8.3. *Dada uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, dizemos que uma função $g : f(A) \longrightarrow A$ é uma função inversa de f, se g é a inversa à direita e à esquerda de f.*

Observação 3.8.1. *Denota-se a função inversa g de f por f^{-1}.*

As funções inversas hiperbólicas complexas são encontradas facilmente nos livros de funções de variáveis complexas, como por exemplo, (CHURCHILL, 1975) e (AVILA, 2013).

3.8.1 Função Inversa da Função Seno Hiperbólico

A função $senh^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$senh^{-1}(w) = \ln(w + \sqrt{1+w^2}),$$

é denominada função seno hiperbólica inversa.

Proposição 3.8.1. *A função $senh^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é a inversa da função $senh : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja $f(z) = senhz$ e $g(w) = senh^{-1}(w)$, devemos mostrar que $f(g(w)) = w$ e $g(f(z)) = z$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
f(g(w)) &= senh[ln(w + \sqrt{1+w^2})] \\
&= \frac{e^{ln(w+\sqrt{1+w^2})} - e^{-ln(w+\sqrt{1+w^2})}}{2} \\
&= \frac{e^{ln(w+\sqrt{1+w^2})} - e^{[ln(w+\sqrt{1+w^2})]^{-1}}}{2} \\
&= \frac{w + \sqrt{1+w^2} - \dfrac{1}{w + \sqrt{1+w^2}}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{w^2 + 2w\sqrt{1+w^2} + 1 + w^2 - 1}{w + \sqrt{1+w^2}}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{2w^2 + 2w\sqrt{1+w^2}}{w + \sqrt{1+w^2}}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{2w\left(w + \sqrt{1+w^2}\right)}{w + \sqrt{1+w^2}}}{2} \\
&= \frac{2w}{2} \\
&= w.
\end{aligned}$$

Enquanto que,

$$
\begin{aligned}
g(f(z)) &= senh^{-1}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4}}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^z - e^{-z} + e^z + e^{-z}}{2}\right) \\
&= ln\left(\frac{2e^z}{2}\right) \\
&= ln\left(e^z\right) \\
&= z.
\end{aligned}
$$

Portanto, a função $senh^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é a função inversa da função seno hiperbólico. □

3.8.2 Função Inversa da Função Cosseno Hiperbólico

A função $cosh^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$cos^{-1}(w) = \ln(w + \sqrt{w^2 - 1}),$$

é denominada função cosseno hiperbólica inversa.

Proposição 3.8.2. *A função $cosh^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é a inversa da função $cosh : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja $f(z) = coshz$ e $g(w) = cosh^{-1}(w)$, devemos mostrar que $f(g(w)) = w$ e $g(f(z)) = z$

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
f(g(w)) &= cosh[ln(w+\sqrt{w^2-1})] \\
&= \frac{e^{ln(w+\sqrt{w^2-1})}+e^{-ln(w+\sqrt{w^2-1})}}{2} \\
&= \frac{e^{ln(w+\sqrt{w^2-1})}+e^{[ln(w+\sqrt{w^2-1})]^{-1}}}{2} \\
&= \frac{w+\sqrt{w^2-1}+\dfrac{1}{w+\sqrt{w^2-1}}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{w^2+2w\sqrt{w^2-1}+w^2-1+1}{w+\sqrt{w^2-1}}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{2w^2+2w\sqrt{w^2-1}}{w+\sqrt{w^2-1}}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{2w\left(w+\sqrt{w^2-1}\right)}{w+\sqrt{w^2-1}}}{2} \\
&= \frac{2w}{2} \\
&= w.
\end{aligned}
$$

Enquanto que,

$$
\begin{aligned}
g(f(z)) &= cosh^{-1}\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}+\sqrt{\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}-1\right)^2}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}+\sqrt{\frac{e^{2z}+2e^ze^{-z}+e^{-2z}}{4}}-1\right) \\
&= ln\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}+\sqrt{\frac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{4}}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}+\sqrt{\left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^z+e^{-z}+e^z-e^{-z}}{2}\right) \\
&= ln\left(\frac{2e^z}{2}\right) \\
&= ln\left(e^z\right) \\
&= z.
\end{aligned}
$$

Portanto, a função $cosh^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é a função inversa da função cosseno hiperbólico. □

3.8.3 Função Inversa da Função Tangente Hiperbólico

A função $tgh^{-1} : \mathbb{C} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$tgh^{-1}(w) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right),$$

é denominada inversa da função tangente hiperbólico.

Proposição 3.8.3. *A função* $tgh^{-1} : \mathbb{C} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *é a inversa da função* $tgh : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $f(z) = tghz$ e $g(w) = tgh^{-1}(w)$, devemos mostrar que $f(g(w)) = w$ e $g(f(z)) = z$.

$$\begin{aligned}
f(g(w)) &= tgh\left(\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\right)\\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right)} - e^{-\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right)}}{e^{\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right)} + e^{-\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right)}}\\
&= \frac{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{-\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{\dfrac{\frac{1+w}{1-w} - 1}{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{\frac{1+w}{1-w} + 1}{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{\frac{1}{2}}}}\\
&= \frac{\dfrac{1+w-1+w}{1-w}}{\dfrac{1+w+1-w}{1-w}}\\
&= \frac{2w}{2}\\
&= w.
\end{aligned}$$

Enquanto que,

$$
\begin{aligned}
g(f(z)) &= tgh^{-1}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right)\\
&= \frac{1}{2}ln\left(\frac{1 + \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}}{1 + \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}}\right)\\
&= ln\sqrt{\frac{\dfrac{e^z + e^{-z} + e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}}{\dfrac{e^z + e^{-z} - e^z + e^{-z}}{e^z + e^{-z}}}}\\
&= ln\sqrt{\frac{e^z}{e^{-z}}}\\
&= ln\sqrt{(e^z)^2}\\
&= lne^z\\
&= z.
\end{aligned}
$$

Portanto, a função $tgh^{-1} : \mathbb{C} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ é a função inversa da função tangente hiperbólico.

□

3.8.4 Função Inversa da Função Cossecante Hiperbólico

A função $cossech^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$cossec^{-1}(w) = ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + w^2}}{w}\right),$$

é denominada função cossecante hiperbólica inversa.

Proposição 3.8.4. *A função $cossech^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ é a inversa da função $cossech : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja $f(z) = cossechz$ e $g(w) = cossech^{-1}(w)$, devemos mostrar que $f(g(w)) = w$ e $g(f(z)) = z$

Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
f(g(w)) &= cossech\left(ln\frac{1+\sqrt{1+w^2}}{w}\right)\\
&= \frac{2}{e^{ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+w^2}}{w}\right)}-e^{-ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+w^2}}{w}\right)}}\\
&= \frac{2}{\dfrac{1+\sqrt{1+w^2}}{w}-\dfrac{w}{1+\sqrt{1+w^2}}}\\
&= \frac{2}{\dfrac{(1+\sqrt{1+w^2})^2-w^2}{w(1+\sqrt{1+w^2})}}\\
&= \frac{2}{\dfrac{1+2\sqrt{1+w^2}+1+w^2-w^2}{w(1+\sqrt{1+w^2})}}\\
&= \frac{2}{\dfrac{2+2\sqrt{1+w^2}}{w(1+\sqrt{1+w^2})}}\\
&= \frac{2w(w+\sqrt{1+w^2})}{2(1+\sqrt{1+w^2})}\\
&= w.
\end{aligned}
$$

Enquanto que,

$$\begin{aligned}
g(f(z)) &= cossech^{-1}\left(\frac{2}{e^z - e^{-z}}\right) \\
&= ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\left(\dfrac{2}{e^z - e^{-z}}\right)^2}}{\dfrac{2}{e^z - e^{-z}}}\right) \\
&= ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{e^{2z} - 2e^z e^{-z} + e^{-2z}}}}{\dfrac{2}{e^z - e^{-z}}}\right) \\
&= ln\left(\frac{1+\sqrt{\dfrac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{e^{2z}-2+e^{-2z}}}}{\dfrac{2}{e^z - e^{-z}}}\right) \\
&= ln\left(\frac{1+\sqrt{\left(\dfrac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}\right)^2}}{\dfrac{2}{e^z - e^{-z}}}\right) \\
&= ln\left(\frac{1+\dfrac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}}{\dfrac{2}{e^z - e^{-z}}}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^z - e^{-z} + e^z + e^{-z}}{2}\right) \\
&= ln\left(\frac{2e^z}{2}\right) \\
&= lne^z \\
&= z.
\end{aligned}$$

Portanto, a função $cossech^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ é a função inversa da função cossecante hiperbólico □

3.8.5 Função Inversa da Função Secante Hiperbólico

A função $sech^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$sech^{-1}(w) = ln\left(\frac{1+\sqrt{1+w^2}}{w}\right),$$

é denominada função secante hiperbólico inversa.

Proposição 3.8.5. *A função* $sech^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ *é a inversa da função* $sech : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $f(z) = secz$ e $g(w) = sec^{-1}(w)$, devemos mostrar que $f(g(w)) = w$ e $g(f(z)) = z$.

Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
f(g(w)) &= sech\left(ln\frac{1+\sqrt{1-w^2}}{w}\right)\\
&= \frac{2}{e^{ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-w^2}}{w}\right)}+e^{-ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-w^2}}{w}\right)}}\\
&= \frac{2}{\dfrac{1+\sqrt{1-w^2}}{w}+\dfrac{w}{1+\sqrt{1-w^2}}}\\
&= \frac{2}{\dfrac{(1+\sqrt{1-w^2})^2-w^2}{w(1+\sqrt{1-w^2})}}\\
&= \frac{2}{\dfrac{1+2\sqrt{1-w^2}+1-w^2+w^2}{w(1+\sqrt{1-w^2})}}\\
&= \frac{2w(1+\sqrt{1-w^2})}{2(1+\sqrt{1+w^2})}\\
&= w.
\end{aligned}
$$

Enquanto que,

$$
\begin{aligned}
g(f(z)) &= sech^{-1}\left(\frac{2}{e^z+e^{-z}}\right)\\
&= ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{e^z+e^{-z}}\right)^2}}{\dfrac{2}{e^z+e^{-z}}}\right)\\
&= ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{e^{2z}+2e^ze^{-z}+e^{-2z}}}}{\dfrac{2}{e^z+e^{-z}}}\right)\\
&= ln\left(\frac{1+\sqrt{\left(\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}\right)^2}}{\dfrac{2}{e^z+e^{-z}}}\right)\\
&= ln\left(\frac{e^z+e^{-z}+e^z-e^{-z}}{2}\right)\\
&= lne^z\\
&= z.
\end{aligned}
$$

Portanto, a função $sech^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ é a função inversa da função secante hiperbólico. $\square$

3.8.6 Função Inversa da Função Cotangente Hiperbólico

A função $cotgh^{-1} : \mathbb{C} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$cotgh^{-1}(w) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{w+1}{w-1} \right),$$

é denominada função cotangente hiperbólico inversa.

Proposição 3.8.6. *A função* $cotgh^{-1} : \mathbb{C} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *é a inversa da função* $cotgh : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$*.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
f(g(w)) &= ctgh\left(\frac{1}{2}ln\left(\frac{w+1}{w-1}\right)\right) \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}ln\left(\frac{w+1}{w-1}\right)} + e^{-\frac{1}{2}ln\left(\frac{w+1}{w-1}\right)}}{e^{\frac{1}{2}ln\left(\frac{w+1}{w-1}\right)} - e^{-\frac{1}{2}ln\left(\frac{w+1}{w-1}\right)}} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{w+1}{w-1}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}}}{\sqrt{\frac{w+1}{w-1}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1+w}{1-w}}}} \\
&= \frac{\frac{\frac{w+1}{w-1}+1}{\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}}}{\frac{\frac{w+1}{w-1}-1}{\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}}} \\
&= \frac{\frac{w+1+w-1}{w-1}}{\frac{w+1-w+1}{w-1}} \\
&= \frac{2w}{2} \\
&= w.
\end{aligned}$$

Enquanto que,

$$
\begin{aligned}
g(f(z)) &= ctgh^{-1}\left(\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}\right)\\
&= \frac{1}{2}ln\left(\frac{\dfrac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}+1}{\dfrac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}-1}\right)\\
&= ln\sqrt{\frac{\dfrac{e^z+e^{-z}+e^z-e^{-z}}{e^z-e^{-z}}}{\dfrac{e^z+e^{-z}-e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}}}\\
&= ln\sqrt{\frac{2e^z}{2e^{-z}}}\\
&= ln\sqrt{\frac{e^z}{e^{-z}}}\\
&= ln\sqrt{\frac{e^z}{\dfrac{1}{e^z}}}\\
&= ln\sqrt{(e^z)^2}\\
&= lne^z\\
&= z.
\end{aligned}
$$

Portanto, a função $ctgh^{-1} : \mathbb{C} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ é a inversa da função cotangente hiperbólico. □

3.9 RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS E AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM $\mathbb{C}$

As relações entre as funções trigonométricas hiperbólicas e as trigonométricas circulares de variáveis complexas decorrem em termos das funções exponenciais. Demonstraremos agora essas propriedades:

Propriedade 3.9.1. *Dado $z \in \mathbb{C}$ temos as seguintes propriedades:*

i) $senh(iz) = isenz.$

ii) $sen(iz) = isenhz.$

iii) $cosh(iz) = cosz.$

iv) $cos(iz) = coshz$

As propriedades citadas podem ser vistas em CHURCHILL (1975).

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$ temos que:

i)

$$\begin{aligned} senh(iz) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \\ &= i\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) \\ &= isenz. \end{aligned}$$

Portanto, $senh(iz) = isenz, \ \ z \in \mathbb{C}$.

ii)

$$\begin{aligned} sen(iz) &= \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} \\ &= i^2\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2i}\right) \\ &= i\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right) \\ &= isenhz. \end{aligned}$$

Portanto, $sen(iz) = isenhz, \ \ z \in \mathbb{C}$.

iii)

$$\begin{aligned} cosh(iz) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= cosz. \end{aligned}$$

Portanto, $cosh(iz) = cosz, \ \ z \in \mathbb{C}$.

iv)

$$\begin{aligned} cos(iz) &= \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} \\ &= \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} \\ &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \\ &= coshz. \end{aligned}$$

Portanto, $cos(iz) = coshz, \ \ z \in \mathbb{C}$.

□

Agora, obteremos, utilizando os itens $i)$ e $iii)$ as partes real e imaginária das funções $seno$ e $cosseno$ hiperbólicos de $z \in \mathbb{C}$:

a) Dados $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = x + iy$, temos:

$$\begin{aligned} senh(x+iy) &= senhx.cosh(iy) + coshx.senh(iy) \\ &= senhx.cosy + coshx.iseny \\ &= senhx.cosy + icoshx.seny. \end{aligned}$$

Portanto, $Re(senhz) = senhx.cosy$ e $Im(senhz) = coshx.seny$.

b) Dados $z = x + iy \in \mathbb{C}$, temos:

$$\begin{aligned} cosh(x+iy) &= coshx.cosh(iy) + senhx.senh(iy) \\ &= coshx.cosy + senhx.iseny \\ &= coshx.cosy + isenhx.seny. \end{aligned}$$

Portanto, $Re(coshz) = coshx.cosy$ e $Im(coshz) = senhx.seny$.

Proposição 3.9.1. *Para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, tem-se que:*

i) $|senhz|^2 = senh^2x + sen^2y.$

ii) $|coshz|^2 = senh^2x + cos^2y.$

Demonstração. Dados $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = x + iy$, temos:

i)

$$\begin{aligned} |senhz|^2 &= (senhxcosy)^2 + (coshxseny)^2 \\ &= senh^2xcos^2y + cosh^2xsen^2y \\ &= senh^2xcos^2y + senh^2xsen^2y + cosh^2xsen^2y - senh^2xsen^2y \\ &= senh^2x(cos^2y + sen^2y) + sen^2y(cosh^2x - senh^2x) \\ &= senh^2x + sen^2y. \end{aligned}$$

Portanto, $|senhz|^2 = senh^2x + sen^2y$.

ii)

$$\begin{aligned} |coshz|^2 &= (coshxcosy)^2 + (senhxseny)^2 \\ &= cosh^2xcos^2y + senh^2xsen^2y \\ &= cosh^2xcos^2y - senh^2xcos^2y + senh^2xsen^2y + senh^2xcos^2y \\ &= cos^2y(cosh^2x - senh^2x) + senh^2x(sen^2y + cos^2y) \\ &= cos^2y + senh^2x. \end{aligned}$$

Portanto, $|coshz|^2 = senh^2x + cos^2y$.

□

3.10 COMPARAÇÃO ENTRE AS IDENTIDADES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS COMPLEXAS

Faremos, inicialmente, uma análise das principais propriedades das funções sen, cos e tg em comparação com as funções $senh$, $cosh$ e tgh.

Funções Trigonométricas	**Funções Hiperbólicas**
$sen(-z) = -senz$ e $sen(z+\pi) = -senz$	$senh(z+\pi i) = -senhz$
$sen(z+2\pi) = senz$	$senh(z+2\pi i) = senhz$
$cos(-z) = -cosz$ e $cos(z+\pi) = -cosz$	$cosh(z+\pi i) = -coshz$
$cos(z+2\pi) = cosz$	$cosh(z+2\pi i) = coshz$
$tg(z+\pi) = tgz$	$tgh(z+\pi i) = tghz$

É de fundamental importância verificar que as funções trigonométricas e hiperbólicas possuem períodos diferentes, e principalmente notar que as funções trigonométricas possuem períodos em $\mathbb{R}$, enquanto que as funções hiperbólicas possuem períodos em $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Faremos, agora, uma análise das principais identidades das funções trigonométricas em comparação com as funções hiperbólicas.

Funções Trigonométricas	**Funções Hiperbólicas**
$sen^2z + cos^2z = 1$	$cosh^2z - senh^2z = 1$
$sen(z+w) = senzcosw + senwcosz$	$senh(z+w) = senhz.coshw + senhwcoshz$
$cos(z+w) = cosz.cosw - senz.senw$	$cosh(z+w) = coshz.coshw + senhz.senhw$
$sen(2z) = 2senz.cosz$	$senh(2z) = 2senhzcoshz$
$cos(2z) = cos^2z - sen^2z$	$cosh(2z) = cosh^2z + senh^2z$
$sec^2z - tg^2z = 1$	$sech^2z + tgh^2z = 1$
$cossec^2z - cotg^2z = 1$	$cotgh^2z - cossech^2z = 1$
$tg(z+w) = \dfrac{tgz + tgw}{1 - tgztgw}$	$tgh(z+w) = \dfrac{tghz + tghw}{1 + tghz.tghw}$

É importante verificar que tanto nas funções trigonométricas quanto nas hiperbólicas existe uma relação trigonométrica fundamental, e que elas não são idênticas pois diferem uma da outra na operação.

Podemos verificar que as relações sen e $senh$ para a soma de dois números complexos são completamente idênticas, já as relações cos e $cosh$ diferem apenas nas operações de $(+)$ e $(-)$ entre os termos. Consequentemente, as relações de dobro também são diferentes para $cos2z$ e $cosh2z$.

As relações trigonométricas dos quadrados das funções sec e tg em comparação com as relações que envolvem os quadrados das funções $sech$ e tgh diferem na operação entre os termos. No entanto, as relações que envolvem os quadrados das funções $cossec$ e $cotg$ em comparação com a relação que envolvem os quadrados das funções $cossech$ e $cotgh$ diferem na ordem dos termos da subtração.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação, apresentamos um texto a respeito da trigonometria hiperbólica complexa para que alunos e professores da iniciação científica do ensino médio tenham acesso a um material de estudo de trigonometria hiperbólica complexa com aplicações de recursos matemáticos mais elementares.

Apresentamos neste texto as demonstrações das mais importantes propriedades das funções trigonométricas reais e trigonométricas complexas, utilizando recursos básicos da trigonometria circular, conjunto dos números complexos, expressões algébricas e noções básicas de funções reais e complexas elementares.

Por fim, apresentamos um estudo das funções trigonométricas hiperbólicas complexas e suas inversas, com demonstrações das propriedades mais importantes de cada função e das identidades que as relacionam entre si.

Nas funções trigonométricas hiperbólicas complexas foram usados recursos um pouco mais avançados de funções complexas elementares, como função exponencial , logaritmos e séries.

Espera-se que este trabalho contribua de forma significativa com as aulas dos professores do ensino médio e, consequentemente, contribua com a formação em matemática dos alunos no contexto da iniciação científica.

REFERÊNCIAS

AVILA, G. ***Variáveis complexas e aplicações***. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 271 p.

BOYER, C. B. ***História da Matemática***. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. ***PCN+ Ensino Médio:*** *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>.

CHURCHILL, R. V. ***Variáveis complexas e suas aplicações***. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da universidade de São Paulo, 1975. 276 p.

FERNANDES, C. S.; BERNARDEZ, N. C. J. ***Introdução às Funções de uma Variável Complexa***. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008. 224 p.

IEZZI, G. ***Fundamentos de Matemática Elementar:*** *complexos, polinômios e equações*. 7. ed. São Paulo: Editora Atual, 2005. v. 6. 250 p.

LANG, S. ***Complex Analysis***. United states of America: Springer, 1999. 1999 p.

NASCIMENTO, F. A. **Funções trigonométricas complexas:** uma abordagem voltada para o ensino médio. *Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de Roraima*, Boa Vista, 2015.

SANTOS, A. A. **Trigonometria Hiperbólica:** uma abordagem elementar. *Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de Roraima*, Boa Vista, 2014.

SOARES, M. G. *Cálculo em uma Variável Complexa*. [S.l.]: IMPA, 2014. 196 p.

SPIEGEL, M. R. ***Variáveis Complexas:*** *Coleção Schãum*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, LTDA, 1972. 468 p.

A DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA HIPERBÓLICA INVERSA COMPLEXA

Neste apêndice, apresentaremos o processo de resolução da equação que determina as possíveis funções inversas de cada função trigonométrica hiperbólica complexa, como também, mostraremos que uma das soluções de cada equação não pode ser a inversa.

Função Seno Hiperbólica Inversa

Apresentaremos, agora, os procedimentos para determinação da função seno hiperbólico inversa.

Resolveremos aqui a equação $senhw = z$ para encontrar a função inversa da função seno hiperbólico.

Da definição de função inversa, temos que,

$$senhw = z \leftrightarrow w = senh^{-1}z.$$

Como $senhw = \dfrac{e^w - e^{-w}}{2}$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{e^w - e^{-w}}{2} &= z \\
e^w - e^{-w} &= 2z \\
\frac{e^{2w} - 1}{e^w} &= 2z \\
(e^w)^2 - 1 &= 2ze^w \\
(e^w)^2 - 2ze^w - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau $(e^w)^2 - 2ze^w - 1 = 0$, obtemos:

$$e^w = z + \sqrt{1 + z^2}.$$

ou

$$e^w = z - \sqrt{1 + z^2}.$$

Assim, temos que:

$$w_1 = ln(z + \sqrt{1 + z^2})$$

ou

$$w_2 = ln(z - \sqrt{1 + z^2}).$$

Agora, mostraremos que a função $w_2 = g(z) = ln(z - \sqrt{1+z^2})$ não é a inversa da função seno hiperbólico $z = f(w) = senhw$.

E, para isso, devemos mostrar que $f(g(z)) \neq z$ ou $g(f(w)) \neq w$.

Calculemos, inicialmente $f(g(z))$:

$$\begin{aligned}
f(g(z)) &= senh[ln(z - \sqrt{1+z^2})] \\
&= \frac{e^{ln(z-\sqrt{1+z^2})} - e^{-ln(z-\sqrt{1+z^2})}}{2} \\
&= \frac{z - \sqrt{1+z^2} - \dfrac{1}{z - \sqrt{1+z^2}}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{z^2 - 2z\sqrt{1+z^2} + 1 + z^2 - 1}{z - \sqrt{1+z^2}}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{2z\left(z - \sqrt{1+z^2}\right)}{z - \sqrt{1+z^2}}}{2} \\
&= \frac{2z}{2} \\
&= z.
\end{aligned}$$

Concluímos, então, que g é a função inversa à direita de f. Vamos calcular agora $g(f(w))$:

$$\begin{aligned}
g(f(w)) &= ln\left(\frac{e^w - e^{-w}}{2} - \sqrt{1 + \left(\frac{e^w - e^{-w}}{2}\right)^2}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^w - e^{-w}}{2} - \sqrt{\left(\frac{e^w + e^{-w}}{2}\right)^2}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^w - e^{-w} - e^w - e^{-w}}{2}\right) \\
&= ln\left(-e^w\right) \\
&= ln(-1) + lne^{-w} \\
&= ln(-1) - w \\
&= ln(cos\pi + isen\pi) - w \\
&= ln|-1| + i\pi - w \\
&= i\pi - z \\
&= i\pi - x - iy \\
&= -x + (\pi - y)i.
\end{aligned}$$

Como $g(f(w)) \neq w$ concluímos que a função $g(z) = ln(w - \sqrt{1+w^2})$ não é a inversa a esquerda da função f. Portanto, a função g não é a função inversa da função seno hiperbólico.

Função Cosseno Hiperbólico Inversa

Resolveremos aqui a equação $coshw = z$ para encontrar a função inversa da função seno hiperbólico.

Da definição de função inversa, temos:

$$coshw = z \leftrightarrow w = cosh^{-1}z$$

Como $coshw = \dfrac{e^w + e^{-w}}{2}$, então

$$\begin{aligned} \frac{e^w + e^{-w}}{2} &= z \\ e^w + e^{-w} &= 2z \\ \frac{e^{2w} + 1}{e^w} &= 2z \\ (e^w)^2 + 1 &= 2ze^w \\ (e^w)^2 - 2ze^w + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau $(e^w)^2 - 2ze^w + 1 = 0$, obtemos:

$$e^w = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

ou

$$e^w = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Assim, temos que:

$$w_1 = ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

ou

$$w_2 = ln(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Agora mostraremos que a função $w_2 = ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ não é a inversa da função cosseno hiperbólico, $z = f(w) = coshw$.

E, para isso, devemos mostrar que $f(g(z)) \neq z$ ou $g(f(w)) \neq w$.

Calculemos inicialmente $f(g(z))$:

$$
\begin{aligned}
f(g(z)) &= cosh[ln(z-\sqrt{z^2-1})] \\
&= \frac{e^{ln(z-\sqrt{z^2-1})}+e^{-ln(z-\sqrt{z^2-1})}}{2} \\
&= \frac{z-\sqrt{z^2-1}+\dfrac{1}{z-\sqrt{z^2-1}}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{z^2-2z\sqrt{z^2-1}+z^2-1+1}{z-\sqrt{z^2-1}}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{2z^2-2w\sqrt{z^2-1}}{z-\sqrt{z^2-1}}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{2z\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)}{z-\sqrt{z^2-1}}}{2} \\
&= \frac{2z}{2} \\
&= z.
\end{aligned}
$$

Concluímos, então, que g é a função inversa a direita de f.

Vamos calcular agora $g(f(w))$:

$$
\begin{aligned}
g(f(w)) &= cosh^{-1}\left(\frac{e^w+e^{-w}}{2}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^w+e^{-w}}{2}-\sqrt{\left(\frac{e^w+e^{-w}}{2}\right)^2-1}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^w+e^{-w}}{2}-\sqrt{\frac{e^{2w}+2e^we^{-w}+e^{-2w}}{4}-1}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^w+e^{-w}}{2}-\sqrt{\frac{e^{2w}-2+e^{-2w}}{4}}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^w+e^{-w}}{2}-\sqrt{\left(\frac{e^w-e^{-w}}{2}\right)^2}\right) \\
&= ln\left(\frac{e^w+e^{-w}-e^w+e^{-w}}{2}\right) \\
&= ln\left(e^{-w}\right) \\
&= -w.
\end{aligned}
$$

Como $g(f(w)) \neq w$ concluímos que a função $g(w)=ln(w-\sqrt{w^2-1})$ não é a inversa a esquerda da função f. Portanto, a função g não é a função inversa da função cosseno hiperbólico.

Função Tangente Hiperbólica Inversa

Resolveremos aqui a equação $tghw = z$ para encontrar a função inversa da função tangente hiperbólico. Considere $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, da definição de função inversa temos:

$$tghw = z \leftrightarrow w = tgh^{-1}z.$$

Como $tghw = \dfrac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$, então

Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} &= z \\ e^w - e^{-w} &= (e^w + e^{-w})z \\ \frac{e^{2w} - 1}{e^w} &= \left(\frac{e^{2w} + 1}{e^w}\right) z \\ (e^w)^2 - 1 &= (e^w)^2 z + z \\ (1 - z)(e^w)^2 &= 1 + z \\ (e^w)^2 &= \frac{1 + z}{1 - z}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Resolvendo a equação do segundo grau encontramos

$$e^w = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$$

ou

$$e^w = -\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$

Assim,

$$w_1 = \ln\left(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right)$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

ou

$$w_2 = \ln\left(-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right).$$

Agora mostraremos que a função $w_2 = g(z) = \ln\left(-\sqrt{\dfrac{1+z}{1-z}}\right)$ não é a inversa da função tangente hiperbólico, $z = f(w) = tghw$.

E para isso devemos mostrar que $f(g(w)) \neq w$ ou $g(f(z)) \neq z$.

Calculemos inicialmente $f(g(z))$:

$$
\begin{aligned}
f(g(z)) &= tgh\left(ln\left(-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right)\right) \\
&= \frac{e^{ln\left(-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right)} - e^{-ln\left(-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right)}}{e^{ln\left(-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right)} + e^{-ln\left(-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right)}} \\
&= \frac{-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} - \left(-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right)^{-1}}{-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} + \left(-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right)^{-1}} \\
&= \frac{\dfrac{\frac{1+z}{1-z} - 1}{-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}}}{\dfrac{\frac{1+z}{1-z} + 1}{-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}}} \\
&= \frac{\dfrac{1+z-1+z}{1-z}}{\dfrac{1+z+1-z}{1-z}} \\
&= \frac{2z}{2} \\
&= z.
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

Concluímos, então, que g é a função inversa à direita de f.

Vamos calcular agora $g(f(w))$:

$$
\begin{aligned}
g(f(w)) &= ln\left(-\sqrt{\frac{1+\dfrac{e^w-e^{-w}}{e^w+e^{-w}}}{1-\dfrac{e^w-e^{-w}}{e^w+e^{-w}}}}\right)\\
&= ln\left(-\sqrt{\frac{\dfrac{e^w+e^{-w}+e^w-e^{-w}}{e^w+e^{-w}}}{\dfrac{e^w+e^{-w}-e^w+e^{-w}}{e^w+e^{-w}}}}\right)\\
&= ln\left(-\sqrt{\frac{2e^w}{2e^{-w}}}\right)\\
&= ln\left(-\sqrt{\frac{e^w}{\dfrac{1}{e^w}}}\right)\\
&= ln\left(-\sqrt{(e^w)^2}\right)\\
&= ln(-e^w)\\
&= ln(-1)+lne^w\\
&= i.\pi+w.
\end{aligned}
$$

Como $g(f(w)) \neq w$ concluímos que a função $g(z) = ln\left(-\sqrt{\dfrac{1+z}{1-z}}\right)$ não é a inversa a esquerda da função f. Portanto, a função g não é a função inversa da função tangente hiperbólico.

Função Cossecante Hiperbólico Inversa

Resolveremos aqui a equação $cossechw = z$ para encontrar a função inversa da função cossecante hiperbólico. Considere $z \in \mathbb{C}^*$, da definição de função inversa temos:

$$cossechw = z \leftrightarrow w = cossech^{-1}z.$$

Da definição de função $cossechw$, temos:

$$cossechw = \frac{2}{e^w - e^{-w}}.$$

Logo, temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{e^w - e^{-w}} &= z \\
2 &= (e^w - e^{-w})z \\
2 &= \left(\frac{e^{2w} - 1}{e^w}\right) z \\
2e^w &= z(e^w)^2 - z \\
z(e^w)^2 - 2e^w - z &= 0.
\end{aligned}
$$

Resolvendo a equação do segundo grau $z(e^w)^2 - 2e^w - z = 0$, obtemos:

$$e^w = \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z}.$$

ou

$$e^w = \frac{1 - \sqrt{1 + z^2}}{z}.$$

Assim,

$$w_1 = ln(\frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z}).$$

ou

$$w_2 = ln(\frac{1 - \sqrt{1 + z^2}}{z}).$$

Agora mostraremos que a função $w_2 = ln(\frac{1 - \sqrt{1 + z^2}}{z})$ não é a inversa da função cosseno hiperbólico $z = f(w) = cossechw$.

E para isso devemos mostrar que $f(g(z)) \neq z$ ou $g(f(w)) \neq w$.

Calculemos inicialmente $f(g(z))$:

$$
\begin{aligned}
f(g(z)) &= cossech\left(ln\frac{1 - \sqrt{1 + z^2}}{z}\right) \\
&= \frac{2}{e^{ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 + z^2}}{z}\right)} - e^{-ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 + z^2}}{z}\right)}} \\
&= \frac{2}{\dfrac{(1 - \sqrt{1 + z^2})^2 - z^2}{z(1 - \sqrt{1 + z^2})}} \\
&= \frac{2}{\dfrac{1 - 2\sqrt{1 + z^2} + 1 + z^2 - z^2}{z(1 - \sqrt{1 + z^2})}} \\
&= \frac{2z(z - \sqrt{1 + z^2})}{2(1 - \sqrt{1 + z^2})} \\
&= z.
\end{aligned}
$$

Concluímos, então, que g é a função inversa à direita de f.

$$
\begin{aligned}
g(f(w)) &= ln\left(\frac{1-\sqrt{1+\left(\dfrac{2}{e^w-e^{-w}}\right)^2}}{\dfrac{2}{e^w-e^{-w}}}\right)\\
&= ln\left(\frac{1-\sqrt{\dfrac{e^{2w}+2+e^{-2w}}{e^{2w}-2+e^{-2w}}}}{\dfrac{2}{e^w-e^{-w}}}\right)\\
&= ln\left(\frac{1-\sqrt{\left(\dfrac{e^w+e^{-w}}{e^w-e^{-w}}\right)^2}}{\dfrac{2}{e^w-e^{-w}}}\right)\\
&= ln\left(\frac{1-\dfrac{e^w+e^{-w}}{e^w-e^{-w}}}{\dfrac{2}{e^w-e^{-w}}}\right)\\
&= ln\left(\frac{e^w-e^{-w}-e^w-e^{-w}}{2}\right)\\
&= lne^{-w}\\
&= -w.
\end{aligned}
$$

Como $g(f(w)) \neq w$ concluímos que a função $w_2 = ln(\frac{1-\sqrt{1+z^2}}{z})$ não é a inversa a esquerda da função f. Portanto, a função g não é a função inversa da função cossecante hiperbólico.

Função Secante Hiperbólica Inversa

Resolveremos aqui a equação $sechw = z$ para encontrar a função inversa da função secante hiperbólico.

Como $sechw = \dfrac{2}{e^w+e^{-w}}$, então,

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{e^w+e^{-w}} &= z\\
2 &= (e^w+e^{-w})z\\
2 &= \left(\frac{e^{2w}+1}{e^w}\right)z\\
2e^w &= z(e^w)^2+z\\
z(e^w)^2-2e^w+z &= 0.
\end{aligned}
$$

Resolvendo a equação do segundo grau $z(e^w)^2-2e^w+z=0$, obtemos:

$$e^w = \frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}$$

ou

$$e^w = \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}.$$

Assim,

$$w_1 = ln(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z})$$

ou

$$w_2 = ln(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}).$$

Agora mostraremos que a função $w_2 = g(z) = ln(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z})$ não é a inversa da função secante hiperbólico $z = f(w) = sechw$.

E, para isso, devemos mostrar que $f(g(z)) \neq z$ ou $g(f(w)) \neq w$.

Calculemos inicialmente $f(g(z))$:

$$\begin{aligned}
f(g(w)) &= sech\left(ln\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\\
&= \frac{2}{e^{ln\left(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}\right)}+e^{-ln\left(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}\right)}}\\
&= \frac{2}{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}+\frac{z}{1-\sqrt{1-z^2}}}\\
&= \frac{2}{\frac{(1-\sqrt{1-z^2})^2-z^2}{z(1-\sqrt{1-z^2})}}\\
&= \frac{2}{\frac{1-2\sqrt{1-z^2}+1-z^2+z^2}{z(1-\sqrt{1-z^2})}}\\
&= \frac{2}{\frac{2-2\sqrt{1-z^2}}{z(1-\sqrt{1-z^2})}}\\
&= \frac{2z(1-\sqrt{1-z^2})}{2(1-\sqrt{1+z^2})}\\
&= z.
\end{aligned}$$

Concluímos, então, que g é a função inversa à direita de f.

Vamos calcular agora $g(f(w))$:

$$
\begin{aligned}
g(f(w)) &= ln\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{e^w+e^{-w}}\right)^2}}{\dfrac{2}{e^w+e^{-w}}}\right)\\
&= ln\left(\frac{1-\sqrt{\dfrac{e^{2w}-2+e^{-2w}}{e^{2w}+2+e^{-2w}}}}{\dfrac{2}{e^w+e^{-w}}}\right)\\
&= ln\left(\frac{1-\sqrt{\left(\dfrac{e^w-e^{-w}}{e^w+e^{-w}}\right)^2}}{\dfrac{2}{e^w+e^{-w}}}\right)\\
&= ln\left(\frac{1-\dfrac{e^w-e^{-w}}{e^w+e^{-w}}}{\dfrac{2}{e^w+e^{-w}}}\right)\\
&= ln\left(\frac{e^w+e^{-w}-e^w+e^{-w}}{2}\right)\\
&= lne^{-w}\\
&= -w.
\end{aligned}
$$

Como $g(f(w)) \neq w$ concluímos que a função $w_2 = ln(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z})$ não é a inversa à esquerda da função f. Portanto, a função g não é a função inversa da função secante hiperbólico.

Função Cotangente Hiperbólica Inversa

Resolveremos aqui a equação $ctghw = z$ para encontrar a função inversa da função cotangente hiperbólico.

Como $cotghw = \dfrac{e^w+e^{-w}}{e^w-e^{-w}}$, então,

$$
\begin{aligned}
\frac{e^w+e^{-w}}{e^w-e^{-w}} &= z\\
e^w+e^{-w} &= (e^w-e^{-w})z\\
\frac{e^{2w}+1}{e^w} &= \left(\frac{e^{2w}-1}{e^w}\right)z\\
(e^w)^2+1 &= (e^w)^2z-z\\
(1-z)(e^w)^2 &= -z-1\\
(e^w)^2 &= \frac{-(z+1)}{-(z-1)}.
\end{aligned}
$$

Resolvendo a equação do segundo grau obtemos

$$e^w = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$$

ou

$$e^w = -\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}.$$

assim,

$$w_1 = ln\left(\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)$$

ou

$$w_2 = ln\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right).$$

Agora mostraremos que a função $w_2 = g(z) = \ln\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)$ não é a inversa da função cotangente hiperbólico $z = f(w) = cotghw$.

E, para isso, devemos mostrar que $f(g(z)) \neq z$ ou $g(f(w)) \neq w$.

Calculemos inicialmente $f(g(z))$:

$$\begin{aligned}
f(g(z)) &= cotgh\left(ln\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)\right) \\
&= \frac{e^{ln\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)} + e^{-ln\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)}}{e^{ln\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)} - e^{-ln\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)}} \\
&= \frac{\dfrac{\frac{z+1}{z-1}+1}{-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}}}{\dfrac{\frac{z+1}{z-1}-1}{-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}}} \\
&= \frac{\dfrac{z+1+z-1}{1-z}}{\dfrac{z+1-z+1}{1-z}} \\
&= z. \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

Concluímos, então, que g é a função inversa à direita de f.

Vamos calcular agora $g(f(w))$:

$$\begin{aligned}
g(f(w)) &= ln\left(-\sqrt{\frac{\dfrac{e^w+e^{-w}}{e^w-e^{-w}}+1}{\dfrac{e^w+e^{-w}}{e^w-e^{-w}}-1}}\right)\\
&= ln\left(-\sqrt{\frac{\dfrac{e^w+e^{-w}+e^w-e^{-w}}{e^w+e^{-w}}}{\dfrac{e^w+e^{-w}-e^w+e^{-w}}{e^w+e^{-w}}}}\right)\\
&= ln\left(-\sqrt{\frac{2e^w}{2e^{-w}}}\right)\\
&= ln\left(-\sqrt{\frac{e^w}{\dfrac{1}{e^w}}}\right)\\
&= ln\left(-\sqrt{(e^w)^2}\right)\\
&= ln(-e^w)\\
&= ln(-1)+lne^w\\
&= i.\pi+w.
\end{aligned}$$

Como $g(f(w)) \neq w$ concluímos que a função $w_2 = ln\left(-\sqrt{\dfrac{z+1}{z-1}}\right)$ não é a inversa à esquerda da função f. Portanto, a função g não é a função inversa da função tangente hiperbólico.

B EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Os exercícios abaixo podem ser encontrados facilmente nos livros (AVILA, 2013) e (CHURCHILL, 1975).

$Questão1$: Determine todas as raízes das equações:

a) $coshz = \frac{1}{2}$

b) $senhz = i$

c) $coshz = -2$

$Questão2$: Determine todos os zeros de:

a) $senhz$

b) $coshz$

$Questão3$: Ache os valores de:

a) $cosh^{-1}(-1)$

b) $tgh^{-1}0$

$Questão4$: Determinar os valores de:

a) $cotgh^{-1}(-1)$

b) $senh^{-1}\left(\frac{-5i}{4}\right)$

$Questão5$: Determine todas as raízes das seguintes equações:

a) $senz = cosh4$

b) $senhz = i$

c) $coshz = -2$

d) $coshz = \frac{1}{2}$

$Questão6$: Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = x + iy$, mostre que:

a) $|senhy| \leq |senz| \leq coshy$

b) $|senhy| \leq |cosz| \leq coshy$