Igor Alvarenga da Silva Nascimento

Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações

Rio de Janeiro

2016

Igor Alvarenga da Silva Nascimento

Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Escola de Matemática

PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Ronaldo da Silva Busse

Rio de Janeiro

2016

Igor Alvarenga da Silva Nascimento
Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações/ Igor Alvarenga da Silva Nascimento. – Rio de Janeiro, 2016-
82 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Escola de Matemática
PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

1. Funções Exponenciais. 2. Ensino Médio. 3. Contextualização. 4. Aplicações. 5. Sequência Didática. I. Ronaldo da Silva Busse. II. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. III. Escola de Matemática. IV. Funções exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações

Igor Alvarenga da Silva Nascimento

Funções Exponenciais no Ensino Médio: teoria e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Trabalho aprovado. Rio de Janeiro, 23 de julho de 2016

Dr Ronaldo da Silva Busse - UNIRIO
Orientador

Dr Michel Cambrainha de Paula - UNIRIO
Convidado

Dr Orlando dos Santos Pereira - UFRRJ
Convidado

Rio de Janeiro
2016

A glória e a honra sejam dadas ao meu Deus,
o grande Mestre do universo, por ter me dado força
e capacidade para chegar ao final deste curso.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me sustentado e guiado os meus caminhos desde o Exame de Acesso ao PROFMAT até a conclusão deste trabalho final de curso.

À minha amada esposa Danielle Almeida, por ter me apoiado desde o início do curso e me incentivado a dar o meu melhor.

Aos meus queridos pais, Jonatas e Damaris, por terem desde cedo me oferecido acesso a uma educação de qualidade e me ensinado a importância dos estudos para a minha vida.

Ao meu orientador Ronaldo Busse, pelo apoio incondicional oferecido durante a elaboração deste trabalho e a sua camaradagem.

Aos meus gerentes no Centro Tecnológico do Exército, que permitiram que eu suprimisse parte do meu horário de trabalho para que pudesse cursar as disciplinas deste curso.

"É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota."
(Theodore Roosevelt)

Resumo

O trabalho possui o objetivo de apresentar uma proposta diferente e inovadora da abordagem dos conteúdos de funções exponenciais para o Ensino Médio. Através de uma sequência didática de aulas, motivadas por contextualizações e aplicações interessantes e desafiadoras, procura-se proporcionar ao leitor um novo parâmetro de transmissão de ensinamentos, tendo a intenção de despertar o interesse do discente, fugindo dos conceitos puros e abstratos e, por consequência, melhorar o processo de ensino-aprendizagem, sem deixar o rigor e formalismo matemático em plano secundário.

Palavras-chave: funções exponenciais, Ensino Médio, sequência didática, contextualizações, aplicações.

Abstract

This paper aims to present a different and innovative proposition on the approach of exponential functions for High School. With a didactic sequence of lessons, motivated by contextualization and interesting and challenging applications, the objective is to provide the reader a new parameter of knowledge transmission, keeping the intention to arouse the students attention, by fleeing from the pure and abstract concepts and, in consequence, improving the teaching and learning process, not leaving the rigor and mathematical formalism in secondary plan.

Keywords: exponential functions, High School, didactic sequence, contextualization, applications.

Résumé

Ce travail a pour but présenter une approche différente et innovante des contenus de fonctions exponentielles pour le Lycée. À partir d'une séquence didactique de cours, motivées par des contextualisation et applications intéressantes et stimulantes, on vise à fournir au lecteur un nouveau paramètre de transmission de renseignements, avec l'intention de susciter l'intérêt de l'élève, fuyant des concepts purs et abstraits, et par conséquence, améliorer le processus d'enseignement-apprentissage, sans laisser le rigueur et formalisme mathématique dans le plan secondaire.

Mots-clés : fonctions exponentielles, Lycée, séquence didactique, contextualisations, applications.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio

Lista de símbolos

φ	Letra grega Phi
$\in$	Pertence
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais não-negativos
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\lim_{x\to x_0}$	Limite com x tendendo a x_0
e	Constante neperiana
π	Constante pi

Sumário

Introdução

A motivação para o estudo dos modelos exponenciais reside na aplicabilidade de inúmeros fenômenos que se pode observar. Diante da observação, percebeu-se que a forma como a matéria é ministrada nas escolas de Ensino Médio não apresenta uma recepção adequada pelos discentes. É tida como bastante abstrata e pura, fazendo com que o aluno, de forma geral, não perceba a importância do assunto para a sua formação como cidadão e para o seu futuro profissional.

Apesar da constatação dos métodos de ensino, os documentos educacionais já previam um ensino mais contextualizado, adequado às realidades do público-alvo. Corroborando, cita-se os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Médio, na área de Matemática:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.(BRASIL, 1998, pág. 41)

Assim, fica claro que é necessário abordar os conteúdos matemáticos de forma mais aplicada possível à realidade do discente. Caso contrário, corre-se o risco de que o aluno se desinteresse cada vez mais pelos assuntos ensinados, resultando em reprovações e ojeriza aos conteúdos.

Ainda, conforme os PCN:

> De fato, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (BRASIL, 1998, pág. 43)

Assim, combate-se o ensino puramente pragmático e totalmente desconexo da realidade que cerca o aluno. Deve-se buscar, incessantemente, as aplicações atinentes ao conteúdo ministrado, sempre que possível. Desta forma, possivelmente haverá uma recepção melhor do aluno aos ensinamentos transmitidos.

No ensino brasileiro, já está consagrada a preocupação com a contextualização e a interdisciplinaridade. Novamente, nos PCN, em sua página 43, tem-se:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 1998, pág. 43)

Tratando-se de funções exponenciais, é importante contextualizar o seu ensino. A modelagem deste tipo de função surgiu ante a necessidade de solucionar um problema ainda sem resposta. A modelagem da função afim já era conhecida, porém com o surgimento de uma nova demanda, houve a procura de um novo modelo teórico. Conforme Bassanezi (2002), ressalta-se a importância:

> O objetivo fundamental do "uso" da matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância.

Portanto, acredita-se que, através de uma adequada contextualização, se consiga atingir melhores resultados quanto à assimilação dos conteúdos. É importante ressaltar que, em nenhuma hipótese, se deseja deixar o formalismo matemático em detrimento da realidade do assunto. Ambos são importantes para a construção do saber do nosso aluno. O que se pretende evitar é o exagero de qualquer uma das ferramentas. Caberá ao docente, no momento adequado, formalizar os conceitos, fornecendo o embasamento necessário e oportuno, tendo em vista que é um dos objetivos do ensino da Matemática.

Explicar a origem do assunto e o seu motivo de surgimento, através de exemplos, também podem ser ótimos caminhos para motivar o estudo da Matemática e, especificamente, de funções exponenciais. Um ótimo exemplo é a famosa história (porém pouco conhecida, infelizmente) de um rei persa que, ao perceber que o seu reino se encontrava entendiado com a rotina diária, recompensaria quem criasse algum jogo para entretenimento da corte.

A notícia, rapidamente, se espalhou por todo o domínio real, até que um dos súditos apresentou uma espécie de jogo de xadrez. Vale ressaltar que não se sabe ao certo se o jogo era inédito. Relatos afirmam que foi uma adaptação de um jogo de tabuleiro já experimentado pelos gregos.

O jogo de 32 peças e 64 casas quadradas com um dinâmica bem interessante. O rei ficou maravilhado e o passatempo foi um sucesso. Diante disso, mandou que chamassem o súdito imediatamente para uma conversa. Perguntou-lhe o que queria como recompensa, já que o objetivo havia sido atingido em sua plenitude. Ofereceu-lhe ouro, jóiais, posses e até um casamento com uma de suas filhas.

Porém, para a surpresa do governante, a resposta do súdito foi que queria grãos de arroz, distribuídos da seguinte forma: 1 grão na primeira casa, 2 na segunda, 4 na terceira, 8 na quarta e assim sucessivamente, sempre duplicando a quantidade de grãos da casa anterior, até que as 64 casas estivessem completas.

O rei, maravilhado e boquiaberto com a humildade do súdito, mandou que trouxessem imediamente os grãos de arroz. Ao iniciar a empreitada, percebeu que todo o seu reino não possuía quantidade de grãos suficiente para arcar com o compromisso. Desesperado, mandou chamar um matemático da corte. Este falou-lhe que nem todos os grãos do mundo seriam suficientes para cumprir o trato realizado.

Este é o primeiro relato de noções exponenciais que se conhece. É sabido que havia outros povos que já conheciam o modelo, mas o conto é o registro antigo mais conhecido.

Trata-se de uma simples história que poderia ser abordada para motivar o ensino do assunto. Decerto, o aluno ficaria muito mais curioso e atento às explicações, já que estaria ouvindo uma narrativa ocorrida no passado, englobando o assunto que será estudado logo a seguir.

Há outros vários exemplos para contextualizar e facilitar o entendimento de funções exponenciais. Uma situação bem conhecida, e que será abordada mais detalhadamente no capítulo teórico de funções exponenciais, é a da aplicação de um capital a juros fixos, em função do tempo. De acordo com Lima et al. (2012, pág. 195), conclui-se que o modelo matemático deve ser uma função crescente *c(t)*, onde c é o capital e t é o tempo, tal que o acréscimo relativo *[c(t+h)-c(t)]/c(t)* depende apenas de h mas não de t. Em seguida, afirma-se que as únicas funções com estas propriedades são as da forma $c(t)=c(0).a^t$, ou seja, uma função exponencial, sendo essa afirmação posteriormente demonstrada.

Por meio desses dois exemplos simples, tenta-se mostrar que é possível realizar uma abordagem de conteúdos exponenciais com uma natureza aplicada e voltada para os problemas diários e de outras áreas do conhecimento. Com esta motivação, almeja-se atingir os objetivos propostos para o trabalho, a saber:

1. **Reconhecer e verificar que o ensino de funções exponenciais através de aplicações cotidianas e de modelos consagrados da Física, Química e Biologia resulta em melhor compreensão e maior receptividade por parte dos discentes;** e

2. **Organizar e utilizar uma sequência didática de ensino de funções exponenciais, baseando-se em modelos consagrados e curiosidades que usam modelos exponenciais, mantendo o rigor matemático necessário.**

Para atingir os objetivos delimitados, procurou-se estruturar o trabalho em quatro grandes capítulos, excetuando-se o corrente tópico introdutório. Primeiramente, temos um capítulo destinado à motivação e à contextualização do estudo dos modelos exponenciais. Aqui, pretende-se revisar a bibliografia dos documentos que amparam o ensino de Matemática no Ensino Médio quanto ao assunto em pauta, bem como pesquisar outras publicações que tratem, de maneira ampla, do tema exponencial e, mais especificamente, de modelos exponenciais naturais. O foco é, ao final desta parte, ter um embasamento sólido que justifique a necessidade da constante procura de motivar o ensino da Matemática.

Na sequência, tem-se um capítulo abordando a teoria de funções exponenciais. Trata-se da parte matemática do trabalho, procurando apresentar os assuntos com o formalismo necessário e adequado ao ensino que se propõe. Nesta parte, procura-se mostrar toda a construção teórica necessária à correta contextualização dos assuntos. Neste mesmo capítulo há uma seção destinada às principais aplicações práticas de modelos exponenciais, bem como curiosidades julgadas interessantes para a abordagem no Ensino Médio, onde o docente poderá verificar formas interessantes de abordar o assunto em sala, inclusive com interseções com outras disciplinas.

Logo após, há o desenvolvimento de mais um capítulo, este contendo uma tabulação de resultados obtidos, frutos de uma pesquisa destinada aos professores que lecionam no Ensino Médio. Tal compilação é qualitativa, onde está exposto um resumo com as respostas mais adequadas e interessantes ao trabalho. Esta pesquisa teve como finalidade precípua levantar os principais pontos acerca do ensino de funções exponenciais, bem como as maiores dificuldades encontradas e a coleta de sugestões e oportunidades de melhoria no seu ensino. Vale destacar que a pesquisa se encontra, na íntegra, como anexo ao trabalho.

Por fim, atendendo a um dos objetivos deste projeto, tem-se a elaboração de uma sequência didática para a abordagem dos conteúdos de funções exponenciais. Trata-se de uma proposta de quatro aulas, com algumas motivações para o estudo e sequências de abordagem dos assuntos atinentes à matéria, diferentes das usuais. Com isso, pretende-se propor algo distinto do que é praticado, corriqueiramente, nas nossas escolas, visando à melhoria de assimilação e entendimento dos alunos. A intenção não é revolucionar o ensino, mas sim propor algo que apresente resultados melhores no processo de ensino-aprendizagem.

É necesário ressaltar que esta pesquisa complementa outro trabalho de conclusão de curso do PROFMAT, intitulado **Função exponencial natural e^{x} e o número e: uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades**, de autoria do colega **Mário César Martins de Lima**. Há muitos embasamentos comuns em ambos os trabalhos e, quando associados, consegue-se ter um panorama completo do ensino de modelos e funções exponenciais. A divisão da abordagem do assunto em, para um trabalho, funções exponenciais e, para outro, o número e e função exponencial natural, tem por objetivo facilitar a compreensão e cobrir, ao máximo, o conteúdo, que é bem extenso. Entretanto, a intenção é a mesma: contribuir, de alguma forma, para a melhoria das práticas de ensino adotadas.

1 Por que contextualizar?

A Matemática, na maior parte das observações, é tida como a disciplina mais difícil e mais abstrata para o jovem aluno do Ensino Médio brasileiro. Discentes que não pretendem seguir a carreira profissional na área de Ciências Exatas possuem verdadeiro "pavor"de estudar os conteúdos matemáticos.

É bem verdade que, por uma predisposição natural, prefere-se estudar aquilo com que mais se tem afinidade. Um aluno que gosta muito de ler romances, provavelmente, terá uma aptidão maior ao estudo de Língua Portuguesa. Já aquele que gosta de fatos históricos e culturas de civilizações passadas preferirá o ensino de História e Geografia. Certo é que, naturalmente, se estuda com mais afinco aquilo que mais se gosta.

Na Matemática, não é diferente. Porém, por sua imensidão de conteúdos e áreas, algumas partes se tornam difíceis e desconexas, mesmo para aqueles que tem alguma habilidade para a disciplina. E um dos principais motivos repousa na falta ou na ineficiência de se mostrar a aplicabilidade daquilo que se ensina.

Focando no Ensino Médio, constata-se que uma dessas matérias ensinadas abstratamente é o conteúdo de funções exponenciais. Daí, a escolha pelo tema. Não só pelo desafio de tentar propor, com toda modéstia e humildade, alguma mudança significativa, mas por entender que se trata de uma parte da Matemática que é importante ao extremo para a formação do cidadão em geral, e não apenas para aqueles que enveredarem pelo "caminho das Exatas".

Corroborando o que se descreveu acima, cita-se Julianelli, em *Ensinar Matemática - Dificuldades e Perspectivas* (2015):

> Mesmo antes do advento da Matemática Moderna, o ensino dessa matéria já incomodava alguns educadores de várias partes do mundo, que, a partir de então, intensificaram movimentos no sentido de transformar o ensino da Matemática, que se mostrava inadequado, desinteressante e apresentava resultados muito ruins com relação ao aproveitamento dos estudantes (JULIANELLI, 2015).

Ainda como motivação para o aprofundamento do estudo de ensino de modelos exponenciais, tem-se a sua aplicabilidade em vários segmentos profissionais e no cotidiano. Pode-se citar: decaimento radioativo, cálculo de juros compostos, crescimento exponencial, cultivo e cultura de bactérias, velocidade de pouso de um paraquedas de asa, entre inúmeras outras aplicações. Por isso que deseja-se ressaltar a importância do ensino deste conteúdo no Ensino Médio, propondo um modelo mais palatável ao jovem aluno, prestes a ingressar no ensino superior.

Cabe ressaltar que este resgate de importância em mostrar a aplicabilidade do que é ensinado não é inédito. Vários documentos governamentais já fazem referências e ressaltam a importância em se contextualizar ao máximo o ensino de Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), na área de Ciências Exatas e da Terra, deixam bem claro os rumos e direções que o ensino no Brasil deve trilhar. Novamente, expõe-se:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.(BRASIL, 1998, p. 41)

Ainda, conforme os Parâmetros, percebe-se a preocupação em contextualizar o ensino da Matemática. Os conteúdos devem permitir o *link* do mundo escolar com o mundo real. Os assuntos abordados não podem estar desconexos da realidade do discente, sob o risco de perda de interesse na disciplina e, em cenário mais trágico, ocorrência de evasão escolar. A Matemática deve ser uma ferramenta útil na inferência de conclusões acerca de uma temática e na modelagem de problemas. E umas das partes passíveis de interligação são as funções, em espectro amplo. Desta feita:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao Ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando o seu conhecimento sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1998, p. 43 e 44)

Vale ressaltar que a contextualização dos temas deve ser sutil e lógica. Não se deve buscar integrar todo e qualquer conteúdo. O educador deve saber que há tópicos que carecem de aplicações, mas possuem extrema importância no desenvolvimento de outras competências. O que não se pode deixar de realizar é a interdisciplinaridade dos tópicos que são de fácil compreensão. A contextualização forçada pode, inclusive, prejudicar o processo de ensino-aprendizagem, deixando o discente mais confuso e mais desconexo de sua realidade.

Há uma passagem interessante que confirma o exposto acima:

> Em Matemática, a contextualização é um instrumento bastante útil, desde que interpretada numa abordagem mais ampla e não empregada de modo artificial e forçado, e que não se restrinja apenas ao cotidiano do aluno.

> Defende-se a idéia de que a contextualização estimula a criatividade, o espírito inventivo e a curiosidade do aluno. (FERNANDES, 2011)

É bem verdade que houve um progresso quanto ao processo de ensino-aprendizagem e suas relações com a sociedade. Cada vez mais nota-se a preocupação em ensinar conforme as demandas do mundo em que se vive. É claro que não se deve lecionar sem objetivos. Porém, o que se observa é uma procura pela adequação dos objetivos emanados pelos órgãos competentes às atividades profissionais e ao cotidiano social.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é uma prova cabal deste processo. Todas as questões (ou quase a sua totalidade) são bem contextualizadas, mostrando aplicações aos ensinamentos que estão sendo cobrados. Notícias de periódicos, trechos de clássicos literários, manchetes históricas e exemplos profissionais são alguns dos mecanismos utilizados para trazer a realidade do mundo que nos cerca para a avaliação que decidirá o ingresso em curso superior.

A prova é diferente dos processos de avaliações tradicionais: é contextualizada e interdisciplinar. Enquanto os antigos vestibulares promoviam uma excessiva valorização da memória e dos conteúdos em si, o ENEM procura colocar o estudante diante de situações-problemas, exigindo mais que a assimilação de conceitos, mas sim a sua aplicação.

O grande problema é que o ensino das escolas, apesar da preocupação, ainda está longe do ideal. A mobilização em avaliar e quantificar conhecimento ainda é maior que a preocupação em aprender e alicerçar ensinamentos. De fato, deve haver uma forma de avaliação e o objetivo do presente trabalho não é discutir qual seria o melhor formato. Todavia, o modelo de ensino, pautado em transmissão de conhecimentos puros e prontos, sem que haja a construção do raciocínio e a motivação para o estudo, que se questiona. E quando fala-se de Matemática, isso fica mais latente e ressaltado.

Com a evolução tecnológica que o mundo presencia e atravessa, a informação tornou-se muito volátil e fácil de ser obtida. Com um *smartphone*, obtem-se, sem maiores dificuldades, uma ampla bibliografia dos mais variados assuntos. Estudar está mais fácil, porém ensinar tornou-se mais complicado. Qual é o incentivo que um aluno pode ter em presenciar uma aula de um docente baseada puramente em conceitos abstratos, puros e desconexos? A resposta clássica é: este tipo de aula é obtido na internet. Portanto, o saber docente deverá fazer a diferença nos bancos escolares. O professor tem a missão de proporcionar ao aluno algo que não se é obtido eletronicamente. Ainda, tem como objetivo precípuo construir o conhecimento de forma espontânea, clara, precisa, embasada e aplicada. E mais: deve usar todo recurso tecnológico disponível em prol da contrução do conhecimento. Atualmente, não há mais espaços para simples memorizações em quadro branco e canetas.

É claro que o docente deve buscar o seu constante aperfeiçoamento. Sabe-se que, por vezes, isso torna-se difícil pelo volume de atividades que desempenha. Entretanto, é algo que precisa ser perseguido incessantemente. O educador necessita se preparar para um novo mundo desconhecido e desafiador. Conforme o renomado Prof Elon Lages Lima, o docente, por não ter o tempo adequado de planejar aulas, acaba por utilizar simples reproduções de conteúdos. Conforme Lima (2007a, p. 149):

> Os professores do ensino básico, quer por formação quer por hábito, acham-se envolvidos numa rotina de trabalho onde os assuntos abordados são aqueles em que se sentem seguros de tratar e os exercícios propostos são quase sempre aqueles mesmos que eles já sabem resolver.

Ainda, na mesma vertente, corroborando o professor Elon Lages Lima, transcreve-se Daniel Cordeiro, em publicação versando sobre análise de contextualização de funções exponenciais e logarítmicas no Ensino Médio:

> Uma ferramenta importantíssima para o professor, a fim de também ajudá-lo nesses desafios é a contextualização, pois sua utilização dá o sentido e o significado tão desejado à aprendizagem. Uma boa contextualização motiva e estimula a construção do saber. Entretanto, muitas vezes, o professor, sobrecarregado com suas atividades, não tem tempo de procurar boas contextualizações para usar em sala de aula e nem algum livro-texto que escolheu o ajuda nesse sentido (FILHO, 2014, p. 1).

Assim, há a urgência em reavaliar os cursos de formação de professores. A sociedade não precisa do mesmo profissional que precisava nos anos 90. Os alunos dos cursos de licenciatura, especificamente em Matemática, precisam ser preparados para enfrentar os desafios da educação do século XXI. Conforme Julianelli (2015, p. 37), temos:

> Ora, sabemos que o modo como as pessoas aprendem e lidam com a informação mudou, devido principalmente às novas tecnologias que avançam com grande rapidez. E se o modo de aprender mudou, não é possível sustentar um modelo de escola e de aulas que tentam ensinar da mesma maneira de sempre. Mas o professor, que é peça importante nesse processo, também precisa mudar. Logo, falar em uma nova maneira de ensinar Matemática é totalmente inócuo. É preciso, portanto, remodelar os cursos de Licenciatura, dando ênfase exatamente na formação do professor, na sua maneira de atuar em sala de aula.

A passagem acima corrobora a necessidade de se formar o docente conforme os parâmetros que se deseja para o ensino de base. É bastante penoso ensinar algo aplicadamente quando se tem a formação estritamente pura. E isso vem acontecendo nos cursos de licenciatura em Matemática. Vale a reflexão sobre o assunto. Certamente, contribuirá muito para se alcançar o ensino que se deseja. Para ilustrar melhor:

> (...)O saber matemático, teórico e formal parece estar razoavelmente sedimentado nos estudantes dos cursos de licenciatura, porém, há pouco

> investimento na reflexão sobre a prática docente, isto é, acerca de como esse profissional recém-formado atuará em sala de aula. É muito importante que as universidades comecem a repensar, urgentemente, a formação desses profissionais que atuarão na escola básica. O que observamos em nossa prática docente com alunos dos cursos de licenciatura em Matemática é que, em vários casos, estão entrando no mercado de trabalho muitos profissionais despreparados para exercer sua profissão de forma qualificada e com a eficiência esperada (JULIANELLI, 2015, p. 60 e 61).

Sabendo da importância de um ensino interdisciplinar e contextualizado e de um professor cada vez mais preparado e motivado para exercer o seu papel de educador e de docente, ressalta-se a necessidade desta aplicação e empenho nos modelos exponenciais, por ser um teor de grande importância na formação do aluno. Trata-se de um conteúdo que "possui papel formativo de possibilitar o desenvolvimento do processo estrutural do pensamento e a aquisição de atitudes", conforme Filho (2014, p. 5).

A necessidade de se estudar padrões exponenciais se deu através do surgimento de problemas sociais e naturais, tais como: crescimento populacional, a meia-vida de substâncias, mensuração de pressão atmosférica, sistemática de juros compostos, perícia de resfriamento de corpos mortos, entre outros. Assim, repara-se que há uma ligação íntima entre a Matemática e as outras disciplinas ministradas para o aluno do Ensino Médio. Sem dúvidas, é uma das partes da Matemática onde a interdisciplinaridade pode ser mais explorada. Com isso, mostra-se ao discente que o modelo é imperativo para que se resolva problemas reais, cotidianos e aplicados às disciplinas que aprendem.

Utilizando como exemplo o crescimento populacional, observou-se padrões exponenciais que corroboraram leis de formação para o cálculo do número de seres vivos em dado momento e determinado lugar. Algumas teorias, inclusive a mais famosa delas, a teoria malthusiana[1], afirmam que determinadas populações podem crescer a taxas exponenciais quando alguns critérios são observados. Ambientes favoráveis e baixo crescimento populacional inicial são fatores que contribuem para que esse modelo se desenvolva. Na Biologia, exemplificando, as culturas de bactérias preenchem tais requisitos. Os problemas decorrentes de crescimento populacional, devido à importância singular, são abordados de incontáveis formas, seja em livros técnicos, de ficcão, romances ou em filmes consagrados. O *Best Seller* de Dan Brown *Inferno* aborda o problema de crescimento exponencial populacional vinculado a um suspense relacionado às grandes doenças que assolaram a humanidade. Em linhas bem gerais, a trama aborda a solução para conter o aumento

[1] Em linha gerais, a Teoria Malthusiana afirmava que, enquanto a população crescia geometricamente (ou exponencialmente), a produção alimentar aumentava em progressão aritmética, o que geraria um colapso social, desencadeando fome e miséria. Afirmava ainda que deveria haver um controle populacional rígido e que guerras, fome e pestes (doenças e epidemias) atuariam como mecanismos de retração demográfica. Denomina-se Malthusiana porque foi concebida pelo inglês Thomas Malthus (1766-1834)

populacional atráves de manipulação de grandes pestes ou doenças, ocasionando mortes e colapsos sociais.

Albert Allen Bartlett (1923 - 2013) foi professor emérito da cadeira de Física da *University of Colorado at Boulder*, nos Estados Unidos da América, tendo lecionado mais de 1.700 vezes a palestra "*Arithmetic, Population and Energy*", em tradução livre, "Aritmética, População e Energia". Conforme (BELLOS, 2015, p.155):

> Bartlett, que é alto e de compleição física robusta encimada por uma imponente cabeça, usava uma gravata do Velho Oeste do tipo de cordão, presa por um clipe com um enfeite em forma de planeta e estrelas. Em sua famosa palestra, ele proclama como um sinistro agouro que a maior deficiência da raça humana é nossa incapacidade de entender o crescimento exponencial. A mensagem, simples mas poderosa, projetou-o nos anos recentes a um estrelato na internet: uma gravação de sua fala no YouTube, intitulada *O mais IMPORTANTE vídeo que você já viu*, registrou mais de 5 milhões de acessos.

O tema é polêmico e preocupante. Mas, sem sombra de dúvidas, é uma excepcional forma de contextualizar o tema em questão. Prosseguindo:

> O interesse de Albert Bartlett em exponenciais logo se estendeu para além de questões de superpopulação, poluição e trânsito em Boulder, uma vez que os argumentos que apresentou ao conselho da cidade também se aplicavam ao mundo como um todo. A Terra não pode sustentar uma população que cresce proporcionalmente a cada ano, pelo menos não por muito tempo. As ideias de Bartlett fizeram dele uma versão contemporânea de Thomas Malthus, o clérigo inglês que há duzentos anos argumentou que o crescimento da população levaria à fome e à doença, já que o crescimento exponencial não pode ser alcançado por um correspondente crescimento na produção de alimentos. "Malthus tinha razão!", afirmou Bartlett. "Ele não previu o petróleo e a mecanização, mas suas ideias estavam corretas. Ele compreendeu a relação do crescimento exponencial versus crescimento linear. A população tem a capacidade de crescer mais rapidamente do que podemos fazer crescer os recursos dos quais necessitamos para sobreviver."E acrescentou: "Não importa quais sejam as premissas, a população entra em colapso em meados deste século, dentro de quarenta anos". (BELLOS, 2015, p.175)

Fazendo uma pausa: não se pretende aterrorizar a classe! É importante que se deixe isso claro aos alunos. A temática é importante porém, as teorias e conclusões de Malthus e Bartlett não são frias como aparentam: há um complexo estudo de variáveis que fogem do escopo do trabalho. Não se deseja que o jovem retorne ao seu lar dizendo aos pais que o mundo entrará em colapso no prazo máximo de meia década! Certamente, a direção da escola não ficará contente com as possiveis indagações dos familiares.

Uma outra abordagem que aguçará a curiosidade dos alunos é a dobradura de papel. Sabe-se que os números, sob um modelo exponencial, à medida que se tornam maiores, mais rapidamente crescerão. Alex Bellos também nos fornece esse exemplo, de forma bastante clara e feliz:

> Quando um número aumenta exponencialmente, quanto maior ele fica, mais depressa aumenta, e depois de apenas um punhado de repetições pode atingir um tamanho surpreendente. Considere o que acontece com uma folha de papel ao ser dobrada. Cada dobra duplica sua espessura. Como o papel tem cerca de 0,1 milímetro de espessura, as espessuras depois de cada dobra são 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; 3,2; 6,4; ... Como o papel está ficando mais grosso, cada dobra requer mais força, e na sétima já é fisicamente impossível continuar. A espessura do papel nesse ponto é 128 vezes a de uma simples folha, o que a faz ter a grossura de um livro de 256 páginas.
>
> Mas continuemos, para ver - ao menos na teoria - a espessura que esse pedaço de papel vai ter. Após mais seis dobras o papel já tem quase um metro de altura. Seis dobras depois, tem a altura do Arco de Triunfo, e com mais seis será uma torre de três quilômetros projetando-se no céu. Por mais ordinária que seja uma duplicação, quando realizamos esse procedimento repetidas vezes, não leva muito tempo para que os resultados sejam extraordinários. Nosso papel vai ultrapassar a Lua depois de 42 dobras, e o número total de dobras necessário para que atinja o limite do universo observável é apenas 92. (BELLOS, 2015, p.156)

Com estes exemplos, procurou-se amparar e motivar, ainda mais, o estudo das funções exponenciais. Na sequência do trabalho, pode-se observar uma seção dedicada a uma seleção de aplicações e algumas curiosidades que envolvem esse tipo de modelo. Desta feita, não se pretende esgotar o assunto no atual capítulo, servindo apenas para ilustrar o porquê da contextualização com um problema passado, mas que ainda alcança e intriga o presente.

O capítulo a seguir apresentará o conteúdo teórico de funções exponenciais do ponto de vista formal, bem como a caracterização deste tipo de função. Também serão apresentadas aplicações cotidianas desta matéria. Pretende-se assim fornecer os subsídios matemáticos necessários à correta assimilação dos conceitos. Vale lembrar que se trata de um estudo dedicado aos professores, de forma a revisar conteúdos e, se possível, agregar conhecimentos aos leitores. É importante que o docente tenha uma base sólida da matéria que ministrará. Isso faz com que ele esteja mais seguro para transmitir aquilo que se deseja. Por fim, vale frisar que o formalismo apresentado, por vezes, não será interessante ao aluno de Ensino Médio, contudo poderá ser bastante útil ao graduando dos cursos de Licenciatura em Matemática.

2 Funções exponenciais: a teoria e a prática

Conforme Lima et al. (2012, pág. 194), consideremos uma quantia c_0, aplicada a juros fixos, capitalizados continuamente. Se chamarmos de *c(t)* o capital gerado a partir daquela quantia inicial depois de decorrido o tempo *t*, é claro que *c(t)* é uma função crescente de *t*.

Notamos ainda que se *t<t'* então o acréscimo *c(t'+h)-c(t')*, experimentado pelo capital após o decurso de tempo *h*, a partir do momento *t'*, é maior do que o rendimento *c(t+h)-c(t)* depois de decorrido o mesmo tempo *h*, a partir do momento anterior *t*, pois o capital acumulado *c(t')*, sendo maior do que *c(t)*, deve produzir maior renda.

Sabemos, pela definição, que numa função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos que o acréscimo *f(t+h)-f(t)* depende apenas de *h* e não de *t*. Porém, no parágrafo anterior, verificamos que *c(t+h)-c(t)* depende não apenas de *h* mas também de *t*. Logo, *c(t)* não é uma função afim. Esta conclusão indica que se deve buscar outro instrumento matemático, diferente da função afim, para modelar a presente situação.

Analisando este problema mais detidamente, vemos que a diferença *c(t+h)-c(t)* pode ser considerada como o lucro obtido quando se investiu a quantia *c(t)* durante o prazo *h*. Portanto, como vimos acima, *c(t+h)-c(t)* deve ser proporcional à quantia aplicada *c(t)*, ou seja, $c(t+h)\text{-}c(t)=\varphi.c(t)$, onde o fator de proporcionalidade $\varphi=\varphi(h)$ depende evidentemente do prazo *h*. A afirmação de que $\varphi(h) = [c(t+h)\text{-}c(t)]/c(t)$ não depende de *t* é a expressão matemática do fato de que os juros são fixos. Como *[c(t+h)-c(t)]/c(t) = [c(t+h)/c(t)] - 1*, esta afirmação equivale a dizer que o quociente *c(t+h)/c(t)* não depende de *t*.

Vemos então que o modelo matemático conveniente para descrever a variação de um capital aplicado a juros fixos, em função do tempo, deve ser uma função crescente *c(t)* tal que o acréscimo relativo *[c(t+h)-c(t)]/c(t)* dependa apenas de *h* mas não de *t*. A seguir, veremos que as únicas funções com estas propriedades são as da forma $c(t) = c_0.a^t$.

2.1 A função exponencial

2.1.1 Revisão de potências de expoentes racionais

Baseado em Lima et al. (2012, pág. 196), faremos uma recapitulação do assunto de potências de expoentes racionais. Seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n, de base a e expoente n é definida como o produto de n fatores iguais a a. Para $n = 1$, como não há produto de um só fator, põe-se $a^1 = a$, por definição.

A definição indutiva de a^n é: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a.a^n$.

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de $m + n$ fatores iguais a a. Segue-se que, para $m_1, m_2, ..., m_k$ quaisquer, vale

$$a^{m_1}.a^{m_2}....a^{m_k} = a^{m_1+m_2+...+m_k}$$

Em particular, se $m_1 = ... = m_k = m$, vem $(a^m)^k = a^{mk}$.

Se $a > 1$ então, multiplicando ambos os membros desta igualdade por a^n, obtemos $a^{n+1} > a^n$. Portanto,

$$a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < ... < a^n < a^{n+1} < ...$$

Além disso,

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > ... > a^n > a^{n+1} > ...$$

como se vê multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ pelo número positivo a^n.

Portanto, a sequência cujo $n-$ésimo termo é a^n é crescente quando $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Para $a = 1$, esta sequência é constante, com todos os seus termos iguais a 1.

Se $a > 1$, a sequência formada pelas potências $a^n, n \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente: nenhum número real c, por maior que seja, pode ser superior a todas as potências a^n. Noutras palavras, dado arbitrariamente $c \in \mathbb{R}$, pode-se sempre achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > c$.

De modo análogo, se $0 < a < 1$ então as potências sucessivas $a, a^2, a^3, ...$ decrescem abaixo de qualquer cota positiva: fixado arbitrariamente um número $c > 0$, por menor que seja, pode-se sempre achar um expoente $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n < c$.

Procuremos agora atribuir um significado à potência a^n, quando $n \in \mathbb{Z}$ é um número inteiro, que pode ser negativo ou zero. Isto deve ser feito de modo que seja mantida a regra fundamental $a^m.a^n = a^{m+n}$.

Em primeiro lugar, qual deve ser o valor de a^0 ? Como a igualdade $a^0.a^1 = a^{0+1}$ deve ser válida, teremos $a^0.a = a$, logo a única definição possível é $a^0 = 1$.

Em seguida, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, devemos ter

$$a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, \text{ logo } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Assim, se quisermos estender o conceito de potência do número real $a > 0$, para admitir expoentes inteiros quaisquer e preservar a igualdade $a^m.a^n = a^{m+n}$, a única definição possível consiste em por $a^0 = 1$ e $a^{-n} = 1/a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, dada por $f(n) = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$, além de cumprir a igualdade fundamental

$$f(m+n) = f(m).f(n),$$

é ainda crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Segue-se, em particular, que, para $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $a^{-n} < 1 < a^n$ e, para $0 < a < 1$, tem-se $a^n < 1 < a^{-n}$ pois $-n < 0 < n$ e $a^0 = 1$.

De $a^m.a^n = a^{m+n}$ segue-se que $(a^m)^n = a^{mn}$ ainda quando $m, n \in \mathbb{Z}$.

Prosseguindo, vejamos que sentido pode ser dado à potência a^r quando $r = m/n$ é um número racional (onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), de modo que continue válida a regra $a^r.a^s = a^{r+s}$. Desta igualdade resulta que se deve ter, para $r = m/n$:

$$(a^r)^n = a^r.a^r....a^r = a^{r+r+...+r} = a^{rn} = a^m$$

Portanto, a^r é o número real positivo cuja $n-$ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, este número é $\sqrt[n]{a^m}$, a raiz $n-$ésima de a^m. Assim, a única maneira de definir a potência a^r, com $r = m/n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$, consiste em pôr

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$, não é sobrejetiva. Noutras palavras, fixado $a > 0$, nem todo número real positivo é da forma a^r com r racional. Isto fica evidente se observarmos que, como $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, o mesmo deve ocorrer com sua imagem $f(\mathbb{Q})$, porém $\mathbb{R}^+$ não é enumerável. De um modo mais elementar, este fato pode ser ilustrado mediante um exemplo. Tomemos $a = 10$ e indaguemos se existe algum número raconal $r = m/n$ tal que $10^{m/n} = 11$, ou seja, tal que $10^m = 11^n$, onde $m, n \in \mathbb{N}$. É claro que, para qualquer $m \in \mathbb{N}, 10^m$ se escreve com 1 seguido de m zeros enquanto 11^n não pode ter esta forma. Logo, o número real positivo 11 não pertence à imagem da função $r \mapsto 10^r$, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^+$.

As potências a^r, com expoente racional, embora não contenham todos os números reais positivos, estão espalhadas por toda parte em $\mathbb{R}^+$, desde que a seja diferente de 1. Este é o conteúdo do lema abaixo, conforme Lima et al. (2012, pág. 200), cuja demonstração é bastante técnica e, portanto, será omitida deste trabalho.

Lema 2.1.1. *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

2.1.2 Definição da Função Exponencial

Conforme Lima et al. (2012, pág. 201), seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A *função exponencial de base a*, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$, indicada pela notação $f(x) = a^{x}$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$:

1) $a^{x}.a^{y} = a^{x+y}$;

2) $a^{0} = 1$ e $a^{1} = a$;

3) $x < y \Rightarrow a^{x} < a^{y}$, quando $a > 1$

4) $x < y \Rightarrow a^{y} < a^{x}$, quando $0 < a < 1$

É interessante observar que se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade 1) acima, isto é $f(x + y) = f(x).f(y)$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0).f(x - x_0) = 0.f(x - x_0) = 0,$$

logo f será identicamente nula. Mais ainda, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade 1) e não é identicamente nula então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{2} > 0$$

Assim, diante da propriedade 1), tanto faz dizer que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$ como dizer que é $\mathbb{R}^{+}$. A vantagem de tomar $\mathbb{R}^{+}$ como contradomínio é que se terá f sobrejetiva, como veremos.

Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedades 1) e 2) então, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$f(n) = f(1 + 1 + ... + 1) = f(1) \times f(1) \times ... \times f(1) = a \times a \times ... \times a = a^{n}$$

Usando a propriedade 1), resulta daí, que, para todo número racional $r = m/n$, com $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $f(r) = a^{r} = \sqrt[n]{a^{m}}$.

Portanto $f(r) = a^{r}$ é a única função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^{+}$ tal que $f(r + s) = f(r).f(s)$ para quaisquer $r,\ s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

A propriedade 3) diz que a função exponencial é crescente quando $a > 1$ e a propriedade 4 diz que a função é decrescente quando $0 < a < 1$.

Neste momento, cabe um questionamento relevante. Já mostramos que a função exponencial pode ser facilmente calculada para números racionais. Mas vimos que na definição formal desta função, seu domínio é o conjunto dos números **reais**. Ou seja, precisamos responder a seguinte pergunta: **como definir a função exponencial para o conjunto dos números irracionais?**

Existe uma única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Para fixar as ideias, suporemos $a>1$. Então a^x tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r,\ s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s$$

Ou seja, a^x é o número real cujas aproximações por falta são a^r, com $r < x,\ r \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são a^s, com $x < s,\ s \in \mathbb{Q}$. Não podem existir dois números reais diferentes, digamos A $<$ B, com a propriedade acima. Se existissem tais A e B teríamos

$$r < x < s, \text{ com } r,\ s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < A < B < a^s$$

e então o intervalo [A, B] não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o **Lema 2.1.1**.

Portanto, quando x é irracional, a^x é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior do que x.

Definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, não há maiores dificuldades para verificar que, de fato, são válidas as propriedades 1, 2, 3 e 4 acima enunciadas. Além disso, tem-se ainda

5) *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.*

Com efeito, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$ segundo o **Lema 2.1.1**.

Mais precisamente: se $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.

6) *A função exponencial é contínua.*

Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outro modo: o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}. Em símbolos: $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Esta afirmação pode ser provada assim: escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Ora, sabemos que a^h pode se tornar tão próximo de 1 quanto desejemos, desde que tomemos h suficientemente pequeno. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos, logo $\lim_{x\to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja, $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

7) *A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.*

Esta afirmação quer dizer que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. (Todo número real positivo é uma potência de a). Para prová-la, usamos o Lema 2.2.1 e escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $\left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$, de modo que $|b - a^{r_n}| < \dfrac{1}{n}$, portanto $\lim_{x \to x_0} a^{\mathrm{r_n}} = b$. Para fixar as ideias, supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que

$a^{r_1} < a^{r_2} < ... < a^{r_n} < ... < b$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então a monotonicidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < ... < r_n < ... < s$.

Assim, (r_n) é uma sequência monótona, limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{x \to x_0} r_{\mathrm{n}} = x$. A função exponencial sendo contínua, temos então $a^x = \lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b$ como queríamos demonstrar.

8) *A função exponencial* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x, a \neq 1,$ *é injetiva.*

A injetividade da função $x \to a^x$ decorre da sua monotonicidade. Se $a > 1$, por exemplo, então $x > y \Rightarrow a^x > a^y$ e $x < y \Rightarrow a^x < a^y$, e portanto $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$.

Vemos, pois, que para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, é bijetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é, $f(x + y) = f(x).f(y)$. Tem-se ainda:

$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ se $a > 1$

$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ se $0 < a < 1$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ se $a > 1$ e

$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$

A figura exibe o gráfico de $f(x) = a^x$ nos casos de $a > 1$ e $0 < a < 1$:

Quando $a > 1$, nota-se que, quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um crescimento bastante lento enquanto x é negativo. A medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; para valores positivos muito grandes de x, a tangente é quase vertical. O crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. Se compararmos o gráfico de $y = 2^x$ (por exemplo) com o de $y = x^{10}$, veremos que, para $0 < x < 1,077$ temos $x^{10} < 2^x$. Para $1,077 < x < 58,77$ tem-se $x^{10} > 2^x$ e, para todo $x > 58,77$ tem-se sempre $2^x > x^{10}$.

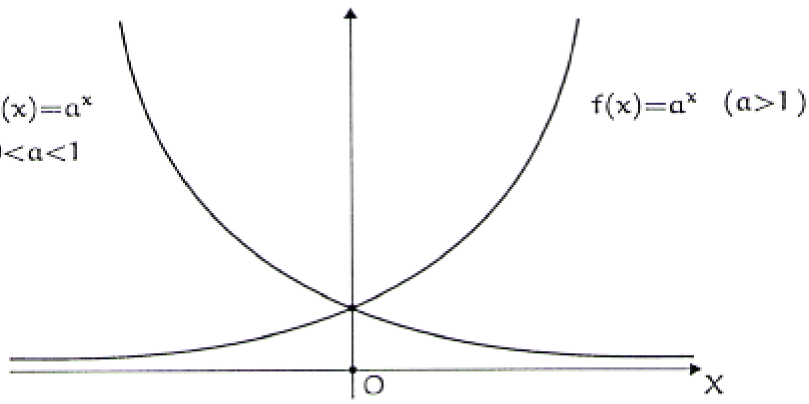

Figura 1: Gráfico da função exponencial

Fonte: Lima et al. (2012, pág. 205)

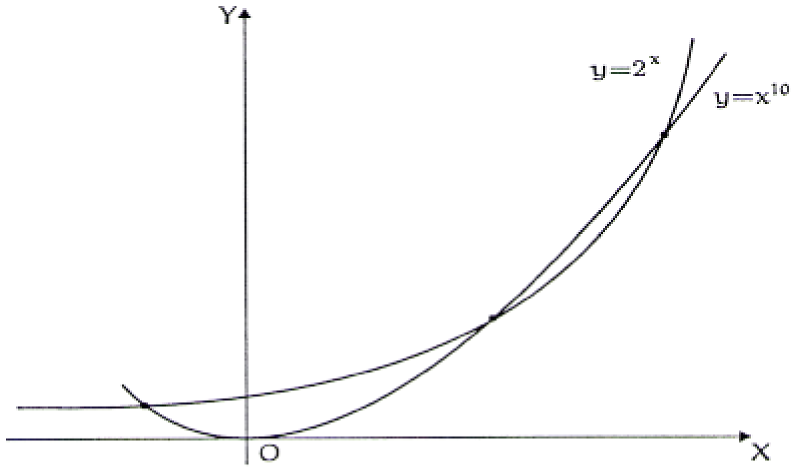

Figura 2: Crescimento exponencial x Crescimento polinomial

Fonte: Lima et al. (2012, pág. 206)

2.1.3 Caracterização da Função Exponencial

De acordo com Lima et al. (2012, pág. 206), as funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante o Ensino Fundamental e, com menos exclusividade, porém ainda com grande destaque, no Ensino Médio. Por sua vez, as funções quadráticas e exponenciais aparecem no Ensino Médio, embora tenham, principalmente as últimas, importância considerável na universidade, bem como nas aplicações de Matemática e atividades científicas ou profissionais.

Uma vez decidido que o modelo adequado para um determinado problema é uma função afim, quadrática ou exponencial, a partir daí o tratamento matemático da questão não oferece maiores dificuldades. As dúvidas que possam surgir acontecem geralmente antes, na escolha do instrumento matemático apropriado para o problema que se estuda. Para que essa escolha possa ser feita corretamente, é preciso saber quais são as propriedades características de cada tipo de função. Vejamos as propriedades que caracterizam as funções exponenciais, conforme Lima et al. (2012, pág. 207):

Teorema 2.1.2. *Caracterização da função exponencial. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes informações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(3) $f(x + y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Inicialmente, prova-se (1) $\to$ (2):

- A hipótese da assertiva (1) tem como consequência que, para todo número racional $r = \dfrac{k}{l}$, com $k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}$, temos:

$$f(kx) = f(x)^k$$

- Ora, assim pode-se escrever que $lr = k$ e, em próxima análise:

$$f(rx)^l = f(lrx) = f(kx) = f(x)^k \Rightarrow f(rx) = f(x)^{\frac{k}{l}} = f(x)^r$$

- Fazendo $f(1) = a$, tem-se $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$

- Completando a demonstração, vamos supor que f seja crescente (lembrando que f é monótona injetiva). Portanto:

$$1 = f(0) < f(1) = a$$

- Por absurdo, admitamos que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$ e, aleatoriamente, $f(x) < a^x$ ($f(x) > a^x$ é tratado de forma análoga).

- Neste passo, vamos nos valer do **Lema 2.1.1**:

  Dado um número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$, existe uma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

- Desta feita, pelo lema enunciado, há um racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, isto é:

$$f(x) < f(r) < a^x$$

- Como f é crescente, por definição, se $f(x) < f(r)$, tem-se $x < r$. Mas, como temos $a^r < a^x$. Portanto, $r < x$

- Ora, estamos diante de uma contradição, a qual finaliza a nossa prova.

Provando $(2) \to (3)$:

- Pela hipótese, temos que $f(x) = a^x$. Para um $y \in \mathbb{R}$, é válido afirmar que $f(y) = a^y$.
- Multiplicando ambos os lados da igualdade por a^y, tem-se:

$$a^y.f(x) = a^x.a^y$$

- Porém, pelas propriedades de potência de um número, pode-se registrar:

$$a^y.f(x) = a^{x+y} \Rightarrow a^y.f(x) = f(x+y)$$

- Concluindo:

$$a^y = f(y) \to f(x).f(y) = f(x+y),$$

o que completa a prova.

Para $(3) \to (1)$:

- Como hipótese, tem-se que $f(x+y) = f(x).f(y)$. Ora, é fácil constatar que:

$$f\,\underbrace{(x+x+x+\ldots+x)}_{nvezes} = \underbrace{f(x).f(x).f(x).\ldots.f(x)}_{nvezes}$$

- Concluindo:

$$f(nx) = [f(x)]^n,$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Dizemos que uma função g :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de *tipo exponencial* quando se tem *g(x)* $=$ $b.a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial então, para quaisquer x, $h \in \mathbb{R}$, os quocientes $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1$ e $\dfrac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$ dependem apenas de h, mas não de x. Mostraremos agora que vale a recíproca.

Ainda conforme Lima et al. (2012, pág. 208), também podemos caracterizar as funções de tipo exponencial:

Teorema 2.1.3. *Caracterização das funções de tipo exponencial. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para x, $h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b =$ g(0) e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b.a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$*

Demonstração. A hipótese feita equivale a supor que $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = \dfrac{g(x)}{b}$, onde $b =$ *g(0)*, obtemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona injetiva, com $\dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$.

Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \dfrac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Segue-se então do teorema anterior que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = b.f(x) = b.a^x$, como queríamos demonstrar. □

2.2 Função logarítmica: a inversa da exponencial

Antes de introduzir a função logarítmica, devemos definir o conceito de função inversa, conforme Lima et al. (2012, pág. 212).

Definição 1. A função $g : Y \to X$ é denominada *função inversa* da função $f : X \to Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(x)) = y$, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Obviamente, g é a função inversa de f se, e somente se, f for a função inversa de g.

Demonstração. Começando com ($\Rightarrow$):

Quando g é a função inversa de f, temos que $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$.

Se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, então a função f é injetiva, pois $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Na sequência, a igualdade $f(g(x)) = y$, válida para todo $y \in Y$, implica que f é sobrejetiva pois, dado $y \in Y$ arbitrário, toma-se $x = g(y) \in X$ e temos $f(x) = y$.

Ora, se a função $f : X \to Y$ possui inversa, então f é injetiva e sobrejetiva, isto é, fica-se diante de uma correspondência biunívoca entre X e Y.

Fazendo ($\Leftarrow$):

Se $f : X \to Y$ é uma correspondência biunívoca entre X e Y, então f possui uma função inversa $g : Y \to X$.

Definindo g, nota-se que, sendo f uma função sobrejetiva, para todo $y \in Y$, há algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Ainda, como f é injetiva, tal x é único. Pode-se, então, afirmar que $g(y) = x$.

Portanto, $g : Y \to X$ é a função a qual associa a cada $y \in Y$ o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Logo, constatamos que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, para $x \in X$ e $y \in Y$ quaisquer.

□

Na **seção 2.1.2** vimos que, para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ é bijetiva, ou seja, é uma correspodência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional $f(x + y) = f(x).f(y)$.

Logo, segue-se que f possui uma função inversa, cuja definição será exposta a seguir, conforme Lima et al. (2012, pág. 215):

Definição 2. A inversa da função exponencial de base a é a função

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real positivo x o número real $\log_a$ x, chamado o *logaritmo de* x na base a.

Por definição de função inversa, tem-se

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Uma propriedade da função logarítmica é transformar produtos em somas, conforme veremos abaixo:

Proposição 2.2.1. $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$

Demonstração. Fazendo $k = log_a(x)$ e $l = log_a(y)$, então é certo dizer que $a^k = x$ e $a^l = y$. Portanto:

$$xy = a^k.a^l = a^{k+l}$$

ou seja,

$$log_a(xy) = k + l = log_a(x) + log_a(y)$$

□

A função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se $\log_a 1 = 0$. É importante ressaltar que somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função x $\to a^x$ somente assume valores positivos. Para fins de ilustração, exibiremos os gráficos da função logarítmica a seguir.

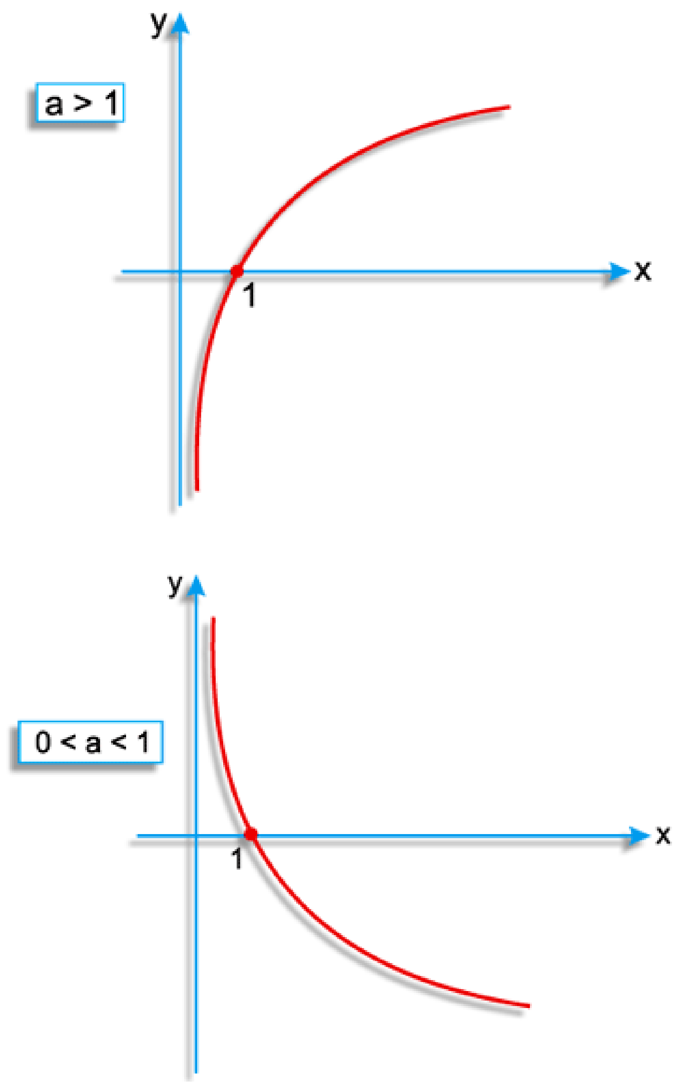

Figura 3: Gráfico da função logarítmica

Fonte: Site da Unip - Objetivo[1]

[1] Disponível em <http://conteudoonline.objetivo.br/Conteudo/Index/6132?token=5> Acesso em jun. 2016

Assim como podemos caracterizar as funções exponenciais, também temos o Teorema de Caracterização das Funções Logarítmicas, conforme Lima et al. (2012, pág. 219):

Teorema 2.2.2 (Caracterização da Função Logarítmica). *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva, ou seja, crescente ou decrescente, tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então, existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Focaremos no caso em que f é crescente, sem perda de generalidade, pois o tratamento para uma função f decrescente é totalmente análogo.

- Para $f(1)$ temos que: $f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1)$. Portanto, $f(1) = 0$.
- Vamos supor que haja um $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, temos que $a > 1$, pois $f(a) > f(1)$.
- Para um $k \in \mathbb{N}$, pode-se afirmar que:

$$f(a^k) = f(a.a.a.\ldots.a) = f(a) + f(a) + \ldots + f(a) = 1 + 1 + \ldots + 1 = k$$

$$0 = f(1) = f(a^k.a^{-k}) = f(a^k) + f(a^{-k}) = k + f(a^{-k})$$

  Assim, constata-se que $f(a^{-k}) = -k$.

- Se $r = \dfrac{k}{l}$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $l \in \mathbb{N}$, então $r.l = k$ e portanto:

$$k = f(a^k) = f(a^{rl}) = f((a^r)^l) = l.f(a^r)$$

- Daí, $f(a^r) = \frac{k}{l} = r$. Caso $x \in \mathbb{R}$ é irracional, então, para r, s racionais, temos:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s$$

- Portanto, todo número racional r, menor que x, também é menor que $f(a^x)$ e, todo racional s maior que x é também maior que $f(a^x)$. Então, segue que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Concluindo a prova parcial, $f(y) = \log_a y$, para todo $y \in \mathbb{R}^+$.
- Analisando um caso geral, considera-se uma função crescente $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $h(xy) = h(x) + h(y)$, sem mais hipóteses.
- Temos $h(1) = 0$ e, como $1 < 2$, vale afirmar que $h(2) = b > 0$.

- Definindo uma nova função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, por $f(x) = \dfrac{h(x)}{b}$, percebemos que ela é crescente e transforma somas em produtos, cumprindo $f(2) = 1$.

- Ora, pela primeira parte da demonstração, tem-se que $f(x) = \log_2 x$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Observando mais atentamente, é o mesmo que afirmar:

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{h(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{h(x)} = a^{h(x)}$$

  com $a = 2^{\frac{1}{b}}$.

- Finalizando, tomando $\log_a$ nos dois lados da igualdade $a^{h(x)} = x$ temos que:

$$g(x) = \log_a x$$

$\square$

2.3 Aplicações e Curiosidades

Nesta parte do presente trabalho deseja-se retratar a importância do conteúdo matemático exposto através de aplicações cotidianas e curiosidades rotineiras. Sem dúvidas, a apresentação do conteúdo de funções exponenciais é uma das tarefas mais importantes para o sucesso da aprendizagem. Como já abordamos anteriormente, a contextualização reveste-se de uma importância singular no processo de aquisição de conhecimento, amadurecimento e tomada de consciência social por parte do discente. Assim, no vigente capítulo, procura-se mostrar algumas das principais aplicações e curiosidades que envolvem o assunto em voga. Vale relembrar que nem todas poderão ser usadas em sala devido a conhecimentos mais avançados, aprendidos nos cursos superiores de Ciências Exatas. Entretanto, será de extrema valia para o professor, embasando e sedimentando o conhecimento sobre a temática, bem como sugerindo novas abordagens em sala de aula.

No capítulo anterior, abordamos o cálculo do valor de um montante aplicado ao longo de um certo tempo a juros fixos, capitalizados continuamente. Além desta, existem inúmeras outras aplicações bem interessantes da teoria de funções exponenciais que podem ser aplicadas no Ensino Médio, inclusive referenciando outras disciplinas além da Matemática. Algumas expostas são clássicas, todavia outras não são tão comuns de serem abordadas em sala de aula no Ensino Médio.

2.3.1 Desintegração radioativa

Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio e o urânio, por exemplo) tendem a se desintegrar, emitindo partículas e transformando-se noutra substância. As partículas emitidas não alteram consideravelmente a massa total do corpo mas, com o passar do tempo, a quantidade da substância original diminui (aumentando, consequentemente, a massa da nova substância transformada). Isto ocorre de tal modo que, em cada instante, a quantidade de matéria que se está desintegrando naquele momento é proporcional à massa da substância que ainda resta.

Assim sendo, se denominarmos de *meia-vida de uma substância radioativa* o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância, constatamos que a meia-vida é um número intrinsecamente associado a cada substância radioativa: o tempo necessário para reduzir à metade a radioatividade de uma tonelada de urânio é igual ao tempo que leva um grama da mesma substância para ter sua metade desintegrada. A propósito, como exemplo, os vários isótopos do urânio têm meia-vida da ordem de 10^9 anos. Enquanto isso, a meia-vida do rádio 224 é de 3 dias e 15 horas.

De um modo geral, se designarmos por $m = m(t)$ a massa da substância radioativa presente no corpo no instante t, verifica-se que m é uma função decrescente de t e, além disso, a perda relativa $\dfrac{m(t+h)-m(t)}{m(t)}$, ocorrida após o decurso do tempo h, depende apenas de h e não do instante inicial t, ou seja, da massa $m(t)$ existente naquela ocasião.

Outra vez, constatamos a necessidade de uma função real de variável $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que seja monótona injetiva (desta vez, decrescente) e tal que a variação relativa $\dfrac{m(t+h)-m(t)}{m(t)}$ dependa apenas de h. Ou, equivalentemente, que a razão $\dfrac{m(t+h)-m(t)}{m(t)}$ não dependa de t mas somente de h.

Se aplicarmos o Teorema de Caracterização de Funções do tipo Exponencial, concluiremos que a função que representa a massa da substância é deste tipo, ou seja, $m(t) = m_0.a^t$, onde m_0 é a massa inicial da substância e a é o fator de decaimento, sendo $0 < a < 1$.

Vamos dar um exemplo genérico de como encontrar esta função exponencial que representa a massa de uma substância X no instante t, dado que o tempo de meia-vida dessa substância é $t_{1/2}$, ou seja, a massa desta substância se reduz à metade após $t_{1/2}$ unidades de tempo. Logo, se a massa inicial da substância é m_0, após decorridos $t_{1/2}$ unidades de tempo, a massa será igual a $\dfrac{m_0}{2}$. Analisando a fórmula genérica e utilizando estes valores, temos:

$$m(t) = m_0.a^t \Rightarrow \frac{m_0}{2} = m_0.a^{t_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = a^{t_{1/2}} \Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{t_{1/2}}}$$

Portanto, a função exponencial encontrada é: $m(t) = m_0.a^t = m_0.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}$

2.3.2 Crescimento populacional de bactérias

O crescimento da população de bactérias é um aspecto bastante interessante no estudo da Biologia. Ele se divide em 4 fases. A primeira é a fase de latência: geralmente, o crescimento não é notado após a cultura ser inserida em novo meio. Então, não há, nessa fase inicial, grandes diferenças no nível de crescimento. Na sequência, tem-se a fase do crescimento exponencial: todas as células entram em divisão celular por um certo período de tempo, o qual depende da quantidade de nutrientes presentes no meio em que se encontram. Após, há a fase estacionária: o crescimento cessa por alguns fatores atinentes ao ecossistema. Por exemplo, a falta dos nutrientes. E, finalmente, a fase de declíno celular: quando as células começam a morrer.

Para o auxílio da Matemática na Biologia, queremos estudar a fase do crescimento exponencial. Seja $N(t)$ o número de células no instante t e N_0 o número inicial de células. Consideremos que, a cada d unidades de tempo, as células se dividem em duas. Considere n o número de divisões ocorridas. Note que $n = \dfrac{t}{g}$, ou seja, o número de divisões já ocorridas, é igual ao tempo decorrido t dividido pelo período g em que as divisões se repetem.

A função que encontramos é, portanto:

$$N(t) = N_0.2^n = N_0.2^{\frac{t}{g}}$$

Exemplificando, observe o relato abaixo, o qual pode servir como um ótimo exemplo a ser usado em sala de aula:

> Imagine uma garrafa contendo uma bactéria cuja quantidade dobra a cada minuto. Às onze da manhã a garrafa contém uma bactéria, e uma hora depois, ao meio-dia, está cheia. Recuando no tempo, às 11h59 a garrafa devia estar cheia pela metade, às 11h58, a quarta parte e assim por diante. "Se você fosse uma bactéria nessa garrafa", pergunta Bartlett, "em que momento perceberia que estava ficando sem espaço?"Às 11h55 a garrafa parecia estar bem vazia - apenas $\dfrac{1}{32}$ dela estaria ocupado, ou 3%, deixando 97% livres para expansão. A bactéria perceberia que estava só a cinco minutos da capacidade plena? Bellos (2015, p.157)

Uma ressalva importante é o fato de estarmos, até agora, trabalhando com dados discretos, isto é, valores enumeráveis, por mais numerosos que possam ser. "O crescimento exponencial pode se dar passo a passo ou de forma contínua. Na analogia de Bartlett com a bactéria na garrafa, uma bactéria torna-se duas, duas tornam-se quatro, quatro tornam-se oito e assim por diante". Contudo, vamos mostrar que o crescimento exponencial é contínuo através dos gráficos das curvas expressas pelas equações $y = 1,5^x$, $y = 3^x$ e $y = 6^x$.

Com a observação e análise dos gráficos, consegue-se perceber que, para as curvas cujas bases são maiores, apresentam um crescimento mais acelerado quando comparada

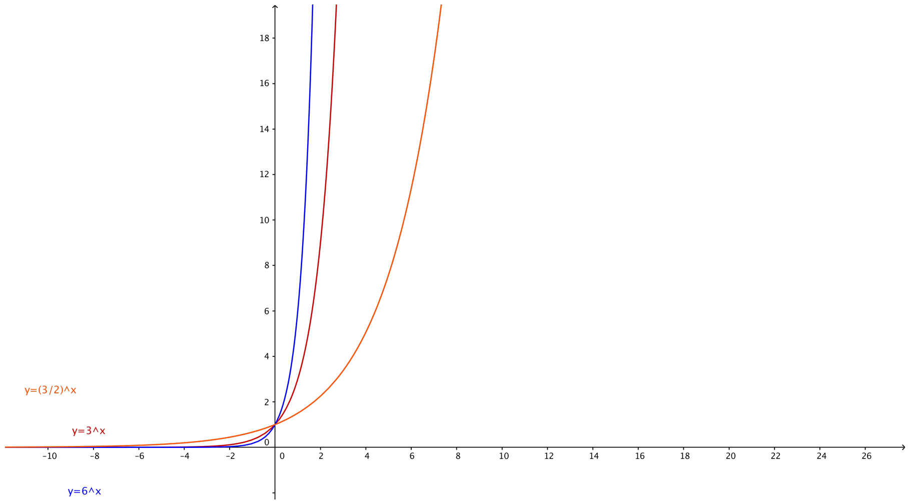

Figura 4: Curvas exponenciais $y = 1,5^x$, $y = 3^x$ e $y = 6^x$

Fonte: Bellos (2015)

com as curvas de bases menores. Esta constatação é um ponto muito importante a ser levantado em classe, pois muitos alunos do Ensino Médio apresentam muitas dificuldades na construção de gráficos de funções, mesmo as mais elementares. Outro aspecto a ser ressaltado é o ponto do gráfico onde as curvas se cruzam (0,1). Desta forma, fica fácil mostrar que qualquer base, quando elevada a zero, resulta em 1.

2.3.3 Funções Exponenciais e Progressões

As funções exponenciais têm uma relação bastante interessante com as progressões aritméticas e geométricas. O docente pode se utilizar desta relação para despertar um maior interesse de seus alunos sobre o tema e ainda revisitar o tema de progressões. Vamos aos detalhes a seguir, conforme descrito em Lima et al. (2012, pág. 210):

Definição 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, uma função do tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \ldots, f(x_n) = ba^{x_n}, \ldots$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h, pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}).a^h = f(x_n).a^h$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue que $f(x_{n+1}) = f(x_1).A^n$, onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$, então $f(x_1) = b$ e $f(x_{n+1}) = b.A^n$.

Por exemplo, se um capital inicial c_0 é aplicado a juros fixos, então, depois de decorrido um tempo t, o capital existente, isto é, o montante, é dado por $c(t) = c_0.a^t$. Se consultarmos os extratos da conta onde há a aplicação nos tempos $0, h, 2h, 3h, \ldots$, teremos $c(0) = c_0$, $c(h) = c_0A$, $c(2h) = c_0.A^2$, $c(3h) = c_0.A^3$, ..., onde $A = a^h$. Portanto, a evolução do saldo, quando calculado em intervalos de h unidades de tempo, é dada pela progressão geométrica $c_0, c_0A, c_0.A^2, c_0.A^3, \ldots$

Esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial, conforme o teorema a seguir:

Teorema 2.3.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ em uma progressão geométrica $y_1, y_2, \ldots, y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \dfrac{f(1)}{f(0)}$, tem-se $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{b}$, é monótona injetiva e continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e tem $g(0) = 1$.

Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência $(x, 0, -x)$ é uma progressão aritmética. Logo, $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se que $g(-x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

Considere agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \ldots, nx$ é uma progressão aritmética e, portanto, $1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$ é uma progressão geométrica cuja razão, evidentemente, é $g(x)$. Então, seu $(n+1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$.

Se $-n$ é um inteiro negativo, então $g(-nx) = \dfrac{1}{g(nx)}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Segue que, fazendo $a = g(1) = \dfrac{f(1)}{f(0)}$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

□

2.3.4 Brilho e magnitude

O brilho das estrelas pode ser expresso por um sistema de magnitudes. O astrônomo grego Hiparco [2] definiu este sistema por volta de 150 a.C. Ele atribuiu às estrelas mais brilhantes do céu uma magnitude $m = 1$; àquelas um pouco menos brilhantes do que as primeiras, uma magnitude $m = 2$, e assim por diante, até que todas as estrelas visíveis por

[2] Hiparco (190 a.C. - 120 a.C.) foi um astrônomo grego, construtor de máquinas, exímio cartógrafo e matemático da escola de Alexandria, nascido em 190 a.C. em Nicéia, na Bitínia, hoje Iznik, na atual Turquia. Viveu na Alexandria, sendo um dos grandes representantes da Escola Alexandrina, do ponto de vista da contribuição para a Mecânica. Trabalhou, sobretudo, em Rodes (161 a.C. - 126 a.C.)

ele tivessem valores de magnitude de 1 a 6, sendo este último valor atribuído às estrelas menos brilhantes do céu. Portanto, o sistema de magnitude é baseado no quão brilhantes são as estrelas a olho nu.

Alguns objetos vão além dos limites originais do sistema de magnitudes concebido por Hiparco, cujos valores estavam no intervalo de 1 a 6. Alguns objetos bem brilhantes podem ter magnitude $m = 0$, ou mesmo negativa, enquanto objetos invisíveis a olho nu têm magnitude $m > 6$. É importante lembrar sempre que objetos mais brilhantes (de maior fluxo) têm magnitudes menores do que os objetos mais tênues.

O brilho observado B de uma estrela de magnitude m é descrito pela sua comparação com o brilho padrão B_0, usando a equação do tipo exponencial

$$B = B_0.10^{-\frac{2m}{5}}$$

Portanto, quanto maior a magnitude, menor o brilho da estrela. Uma estrela de brilho B_0, se existisse, teria magnitude zero. Então, a constante B_0 equivale ao ponto zero da escala de magnitude. Esse ponto foi escolhido para que as estrelas com mais brilho (excetuando-se o Sol), como as estrelas Sirius e Vega, tenham magnitude próxima de 1, isto é, para que sejam estrelas de primeira magnitude.

3 Uma conversa com professores da Educação Básica

No momento em que foi definido o tema deste trabalho, julgou-se conveniente fazer um levantamento geral sobre a metodologia aplicada no ensino de funções exponenciais nas escolas brasileiras, a fim de se obter um melhor direcionamento para a elaboração do presente trabalho de forma que o mesmo pudesse contribuir com o trabalho dos docentes em sala de aula. A forma mais direta de se obter essas informações foi através da elaboração de um questionário com 13 perguntas destinado a professores de Matemática do Ensino Médio. Inicialmente este questionário foi distribuído em vias impressas para professores que cursavam o PROFMAT. Posteriormente, o questionário foi disponibilizado na Internet através de uma rede social, onde professores de Matemática de todo o Brasil puderam ter acesso a ele.

Os professores tiveram mais de um mês para responder os questionários. O questionário foi respondido por 25 professores. Esperávamos um número maior de respostas, visto que com a disponibilização do questionário pela Internet o alcance foi bem amplo. Dentre os professores que responderam à pesquisa, alguns lecionam em escolas públicas (rede municipal e estadual) e outros lecionam em escolas particulares. Alguns inclusive dão aulas em cursos pré-vestibulares. Acreditamos que essa diversidade contribuiu de forma positiva para a nossa pesquisa.

As perguntas abordam, em geral, a forma como os professores explicam diversos itens do conteúdo de funções exponenciais. Ao longo do questionário, o professor é levado a "pensar fora da caixa", ou seja, o próprio docente é conduzido a uma reflexão sobre a forma como eles explicam o assunto em sala de aula. Existem alguns pontos sobre o tópico de funções exponenciais que não costumam ser abordados nas escolas brasileiras, como a definição da função exponencial para números irracionais. Além disso, métodos mecânicos, como a resolução de equações exponenciais através do "corte de bases iguais", apenas são apresentados aos alunos como "receitas de bolo", sem que uma justificativa matemática formal seja exposta. Este questionário procura trazer aos docentes essas questões. Paralelamente, outras perguntas serviram para testar algumas hipóteses levantadas neste trabalho sobre a apresentação deste conteúdo. Tabulou-se, qualitativamente, as respostas obtidas.

Segue uma análise minuciosa das respostas coletadas para cada uma das perguntas elaboradas. O questionário, na íntegra, se encontra nos anexos do presente trabalho, juntamente com as respostas.

1) A função exponencial tem como domínio o conjunto dos números reais. É intuitivo para o aluno que um expoente pode ser um número natural, inteiro e racional. Mas, e se um aluno lhe perguntar o sentido da expressão $2^{\sqrt{2}}$? Como você explica ao aluno que os números irracionais também fazem parte do domínio da função exponencial?

De fato, a preocupação exposta na pergunta se justifica pelo fato de que os alunos podem imaginar que simplesmente não existe $2^{\sqrt{2}}$ ou mais genericamente, não existe a^x, sendo x um número irracional. Isso ocorre devido ao fato de que os alunos são ensinados a aplicar métodos prontos na matemática, como os de calcular uma potência com expoente natural, inteiro e racional e, quando não existe nenhum método, eles podem supor que simplesmente não existe. Da mesma forma, antes de aprender exponenciação com expoentes inteiros negativos ou racionais não-inteiros, um aluno poderia supor que não seria possível tal operação. Outrossim, um aluno de mestrado em matemática pode ter dificuldades em entender operações de exponenciação com expoente complexo não-real. Enfim, percebe-se que é um assunto complicado de explicar, principalmente porque não existe um método para calcular $2^{\sqrt{2}}$, mas o aluno precisa entender que os números irracionais fazem parte do domínio da função exponencial e que $2^{\sqrt{2}}$, por exemplo, faz parte da imagem.

Praticamente todos os professores responderam que explicariam aos seus alunos o sentido do valor $2^{\sqrt{2}}$ usando a aproximação por números racionais do expoente $\sqrt{2}$. Ou seja, eles dizem que o valor desta potência é aproximadamente igual ao valor de uma potência de 2 com um expoente racional muito próximo de $\sqrt{2}$. Alguns citaram o fato de a função exponencial ser contínua no seu domínio. Houve também a referência ao conceito de limite para explicar o motivo da aproximação.

Vale ressaltar que os conceitos de limite e de continuidade de funções só são devidamente explorados hoje na disciplina de Cálculo, no ensino superior. Portanto, deve-se tomar muito cuidado ao trazer esses assuntos para uma sala de Ensino Médio e, caso seja necessário, deve-se realizar uma abordagem mais sutil possível.

2) De que forma você define e explica os valores possíveis para a base "a" de uma função $f(x) = a^x$?

Após o aluno compreender que o valor de x varia no conjunto dos reais, ele deve entender quais os valores que a constante a pode assumir. Houve uma citação interessante de um professor entrevistado: referiu-se aos "valores de a que tornam a função bem comportada", ou seja, aquela cujo gráfico seja representativo para o aluno (contínuo, crescente/decrescente).

A maioria dos professores afirmou que, primeiramente, eles analisam os valores que

a não pode assumir. O valor 1, por exemplo, não pode ser usado pois, senão, a função seria constante e igual a 1. A explicação é análoga para o valor 0 (lembrando que no caso de zero elevado a um expoente negativo ainda temos a ocorrência de indeterminação).

Em seguida, os professores precisam explicar porque o valor de a também não pode ser negativo. Houve uma resposta que pode fazer bastante sentido para o aluno: um dos professores explica que as potências pares de números negativos são positivas e as potências ímpares são negativas, o que causaria uma provável descontinuidade no gráfico, o que não é interessante.

Essa resposta acima consegue convencer alguns alunos, mas existem respostas mais completas e convincentes, como a de um docente que diz que a função não ficaria definida em casos como $a^{\frac{1}{n}}$ quando $a < 0$ e n par já que teríamos uma raiz de índice par com argumento negativo. Ou seja, ele usou o fato de que o expoente pode ser do tipo $\frac{1}{n}$, com n natural. Nesse caso, se n for par, teremos uma raiz de índice par de um número negativo, o que não existe no conjunto dos reais. Dessa forma, ele mostra ao aluno que pode ocorrer um grave problema no caso de a ser negativo. E assim, o aluno consegue compreender que a, definitivamente, não pode ser negativo e nem assumir os valores 0 ou 1. A maioria dos professores segue essa linha, citando o caso da raiz quadrada de número negativo.

3) Você apresenta em sala possíveis aplicações para funções exponenciais? Caso positivo, cite alguns exemplos.

Nesta pergunta, todos os professores citaram os casos clássicos como: matemática financeira (juros compostos), crescimento populacional, decaimento radioativo, ingestão de medicações. Casos menos convencionais também foram citados: distribuição de Poisson (aplicações em teoria das filas; filas de banco; filas de buffer de um roteador; filas de paginação de um sistema operacional, entre outros), ruído gaussiano branco, curvas PV^{α} do gás ideal. Isso demonstra a preocupação desses professores em conectar a realidade à teoria, o que é fundamental para auxiliar num melhor processo de aprendizagem por parte do discente.

4) Você costuma comparar em sala as taxas de variação da função exponencial com as funções de primeiro e segundo grau?

Nessa pergunta, os professores se dividiram. A maioria não faz essa comparação em sala de aula, justificando que só faz sentido se for em uma turma preparatória para vestibular de exatas ou que só se deve explorar o assunto na disciplina de Cálculo, já na graduação. Outros chegam a falar em sala que a função exponencial tem uma taxa de variação bem maior que as outras e usam a ferramenta de gráficos para mostrar isso aos alunos.

Uma resposta que se destacou foi a de comparação entre juros simples e juros compostos, respectivamente, uma função afim e uma função exponencial, efetuando a sobreposição dos gráficos de crescimento e mostrando a diferença entre eles.

O que vale destacar em sala é que quanto mais os valores do domínio crescem, maior fica a diferença da função exponencial para outras funções. Os alunos devem entender o seu potencial de crescimento acima das demais funções. Assim, a função exponencial deve passar a ser "respeitada" por eles, pois ao mesmo tempo em que o crescimento exponencial "descontrolado" pode ser algo bom, como no caso dos retornos de uma aplicação financeira, também pode ser algo ruim, quando se tem que pagar juros de cartão de crédito, por exemplo.

5) Você explora com seus alunos o comportamento da função exponencial no $\pm\infty$?

A maioria dos professores ou não abordam o assunto no Ensino Médio, por julgá-lo desnecessário, ou o exploram minimamente. Um deles cita que o assunto deve ser abordado com bastante cautela, para que não vire uma discussão filosófica sobre o infinito. Poucos citam que realizam a abordagem gráfica.

A resposta mais interessante foi a de que se utilizam os casos $0 < a < 1$ e $a > 1$, pois são justamente estes que se diferenciam no comportamento no infinito.

É de senso comum que este conteúdo deve ser detalhadamente explorado apenas no ensino superior. Entretanto, uma abordagem inicial no Ensino Médio, sem a utilização dos termos 'limite', 'convergente' e 'divergente', serve para que o aluno se familiarize melhor com esse tipo de função.

6) Como você explica para seus alunos que um número elevado a 0 é igual a 1? E como explica que, para obter o resultado de um número elevado a -1, basta escrevê-lo como fração e inverter o numerador com seu denominador?

Ensinar não é apenas definir, mas também explicar. Quando o aluno realmente entende o porquê de uma definição, consegue absorver melhor o assunto. Não basta simplesmente definir que um número elevado a 0 é igual a 1 e que quando se eleva um número a -1 basta inverter numerador e denominador. Isso são definições que possuem explicações simples e não é adequado e prudente omiti-las dos alunos.

Quase unanimemente, os professores explicaram essas definições usando a propriedade de multiplicação de potências (soma de expoentes). Essa propriedade já é bastante conhecida dos alunos desde o Ensino Fundamental. De fato, para explicar que $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$, basta fazer $a^0 = \dfrac{a^k}{a^k} = 1$, onde k é um expoente qualquer. Já no caso do inverso de um número, basta explicar que $a^{-1} = \dfrac{a^k}{a^{k+1}} = \dfrac{1}{a}$. De uma forma mais particular, podemos fazer $a^{-1} = \dfrac{a^0}{a^1} = \dfrac{1}{a}$. Note que são explicações bem simples e rápidas.

Um professor elaborou a explicação usando o seguinte exemplo. Se $3^4 = 81$, $3^3 = \dfrac{81}{3} = 27$, $3^2 = \dfrac{27}{3} = 9$, $3^1 = \dfrac{9}{3} = 3$, então $3^0 = 1 = \dfrac{3}{3}$. É uma maneira mais informal de explicar o conteúdo, todavia, na nossa opinião, só deve ser usado quando o aluno não compreender a explicação do parágrafo anterior, que apresenta um rigor matemático suficiente e adequado à demonstração, apesar da simplicidade.

7) Você já demonstrou aos seus alunos que uma função exponencial pode levar uma sequência em progressão aritmética em uma sequência em progressão geométrica? Qual foi a reação dos alunos? Ajudou no entendimento do assunto de progressões?

A interligação entre assuntos na matemática pode ser bastante vantajosa, pois fornece uma revisão de um assunto já aprendido e uma abordagem mais prática do novo assunto. O aluno do Ensino Médio precisa se acostumar a resolver problemas que englobam diversos conteúdos aprendidos em diferentes épocas, já que encontrará tal sistemática no vestibular e na graduação. Na matéria de Cálculo, por exemplo, terá que usar boa parte de seu vasto conhecimento adquirido nas três séries do Ensino Médio.

Essa pergunta faz mais sentido para professores que trabalham em escolas que, no conteúdo programático, abordam, primeiramente, as progressões aritméticas e geométricas. Porém nada impede o professor de aproveitar para introduzir esse assunto aos alunos. Tudo dependerá do interesse da classe.

As respostas dos professores variaram muito. Alguns acham que não é o caso fazer essa abordagem; outros já acham interessante. Em geral, a reação dos alunos foi de surpresa, porém, em alguns casos, não surtiu o efeito desejado, apenas em poucos alunos.

Um dos professores citou que, no currículo da Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro, o conteúdo de funções exponenciais é dado no 1º ano do ensino médio, enquanto as progressões são vistas no 2º ano do mesmo segmento. Nesse caso, podemos propor uma outra abordagem: no segundo ano, após aprender progressões aritméticas e progressões geométricas, o aluno pode ver como aplicar esse novo conhecimento não só em funções exponenciais, como também em funções logarítmicas.

A essência da pergunta não foi totalmente captada pela maioria dos docentes. Pela análise das respostas, percebeu-se que a maioria deles apenas comenta que funções exponenciais são progressões geométricas. Mas não detalharam que uma sequência pertencente ao domínio da função tem que estar em progressão aritmética para que a imagem dessa sequência pela função exponencial esteja progredindo geometricamente. Vale também citar que a função logarítmica, que é a inversa da função exponencial, faz o contrário: leva uma sequência em progressão geométrica numa sequência em progressão aritmética.

8) Na maioria dos materiais didáticos (possivelmente todos), o ensino de equação exponencial é anterior ao de função exponencial. Qual é a sua opinião a respeito? Por quê? Haveria vantagens em trocar a ordem com que esses assuntos são abordados? Se sim, quais?

Essa é provavelmente a questão mais polêmica do questionário, pois propõe uma ruptura de paradigma. De fato, praticamente na totalidade dos casos, o conteúdo de equação exponencial é visto antes de função exponencial, o que também ocorre para os outros tipos de funções. Pensamos nesta troca da ordem de exposição dos conteúdos pelo seguinte motivo: quando o aluno aprende a resolver uma equação exponencial, ele apenas aprende o mecanismo, sem entender o porquê da possibilidade de "cortar as bases". Se o aluno primeiramente compreender o conceito da função exponencial, ele irá entender o motivo do emprego desse mecanismo. A resolução de equações exponenciais em si acaba na maioria das vezes se reduzindo à resolução de equações de outro tipo (equação linear, quadrática, trigonométrica). Então, o aluno apenas absorve a regra de "cortar as bases" e realiza operações básicas e manipulações algébricas de potenciação para fazer com que haja a mesma base em ambos os lados da igualdade. Acaba que o aluno aprende a resolver algo que ainda não compreende totalmente.

Como era de se esperar, os professores se dividiram nas respostas. Alguns concordam com o modelo atual: argumentam que estudar equação antes é melhor por se tratar de um caso particular e de mais simples compreensão. Também dizem que o aluno ganha mais confiança no conceito de expoentes para, depois, aplicá-lo em funções.

Por outro lado, alguns professores dizem que é melhor o aluno ter uma visão mais ampla do que ele está fazendo, para depois resolver as equações. Um deles cita que o aluno teria mais facilidade em compreender as soluções de determinadas equações observando que a função é injetora, o que é justamente um dos principais motivos que enxergamos para justificar a troca de ordem dos assuntos.

9) Durante a sua aula sobre equação exponencial você resolve a equação $2^x = 8$ escrevendo $8 = 2^3$, "cortando"as bases comuns e obtendo $x = 3$. Um aluno pergunta por que é possível cortar a base. O que você responde? Você saberia justificar formalmente esse "corte"?

Deve ser estimulado nos alunos o questionamento sobre os métodos matemáticos. Por que ao "passarmos" um número que está sendo somado ou diminuído para o outro lado de uma equação mudamos o sinal? E na multiplicação: por que "passa" para o outro lado dividindo (e vice-versa)? No caso da resolução de equações exponenciais, o aluno não deve se restringir ao processo mecânico de "cortar"as bases. Ele deve entender o que justifica esse "corte".

Um dos professores sugeriu um método bem interessante pra fazer esse corte. Ele, simplesmente, dividiu ambos os lados da equação por 2^3:

$$\frac{2^x}{2^3} = \frac{2^3}{2^3}$$

$$2^{x-3} = 1$$

$$2^{x-3} = 2^0$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Neste caso, ele usou o fato de que o número 0 (zero) é o único número possível no expoente para que a potência seja igual a 1.

Uma resposta mais completa também foi citada. Relembrando o conceito de função injetora:

Uma função $f : D \rightarrow I$ é injetora se, e somente se, para todo $x, y \in D$, temos $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$.

Como $2^x = 2^3$, então $f(x) = f(3)$, onde $f(x) = 2^x$. Logo, a injetividade da função garante que $x = 3$. Na verdade, pelo método anterior, exposto logo acima, foi também utilizada a propriedade da injetividade pois, de $f(x-3) = f(0)$, se concluiu que $x - 3 = 0$, ou seja, $x = 3$.

Alguns professores também citaram a utilização de gráficos para ilustrar ao aluno que só pode haver uma solução possível para a equação exponencial. Houve também referência à unicidade da fatoração de um número em números primos, que também serve para justificar que $x = 3$ nesse caso.

10) Você costuma utilizar logaritmos para resolver equações exponenciais?

Esta pergunta traz à tona mais um questionamento: quando o aluno aprende equações exponenciais pela primeira vez, normalmente antes de aprender o conteúdo de logaritmos, ele se limita às equações com a mesma base. Na pior das hipóteses, ele se depara com duas bases diferentes, sendo uma potência da outra, o que pode ser resolvido com uma simples manipulação algébrica dos números. Depois de ensinar logaritmos, além de introduzir as equações logarítmicas, o professor acaba tendo que revisitar as equações exponenciais para mostrar os casos que só podem ser resolvidos através de logaritmos. Por isso, pode ser interessante ensinar logaritmos juntamente com os métodos de resolução de equações exponenciais, para que não seja necessário ensinar o método mais simples (bases iguais) e depois ter que revisitar o assunto. Mas é algo que, se for feito, exigiria bastante cautela por parte do docente, visto que o aluno pode acabar misturando os conceitos. O mais importante é que os conceitos sejam abordados sequencialmente, ou seja, que não haja um tempo muito grande entre a aprendizagem de métodos de resolução de equações exponenciais e logaritmos.

No geral, os professores responderam que apenas usam logaritmos para resolver equações exponenciais depois que os alunos já sabem como utilizá-los, isto é, eles não antecipam o assunto de logaritmos na primeira vez que abordam as equações exponenciais.

11) Se um aluno perguntasse como resolver a equação $2^x = 3^x$, o que você responderia?

Alguns professores responderam que usariam gráficos para mostrar que o único ponto que satisfaz a equação é $x = 0$. Todavia, alguns deram uma resposta bem mais convincente ao aluno, que é mostrada a seguir:

Podemos dividir por 3^x ambos os lados da equação, pois 3^x é diferente de zero para qualquer x. Logo, teremos:

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3^x}{3^x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

12) Você apresenta a função exponencial natural $f(x) = e^x$ em suas turmas de Ensino Médio? Qual é sua opinião a respeito?

A maioria dos professores não apresenta essa função em sala de aula, seja devido ao tempo escasso para ministrar a matéria, seja pelo fato de não achar necessário introduzir tal assunto no Ensino Médio. Um deles citou que não vê vantagens em apresentar, a não ser que ele possa dar um sentido prático.

Alguns professores citam a função exponencial natural rapidamente em sala de aula, mas não aprofundam o assunto pela falta de tempo. Um deles diz que mostra aos alunos que as propriedades são as mesmas e seu objetivo é que, no futuro, eles não se assustem quando precisarem usar a base e. Um professor citou que só exibe essa função para turmas destinadas aos vestibulares para Ciências Exatas.

13) Você já abordou em sala de aula a representação de Euler para números complexos $(e^{ix} = \cos x + i \sin x)$**?**

A maioria dos professores não aborda a representação de Euler em sala. Um deles apresenta aos alunos esta representação quando explora o conteúdo de números complexos. Um professor citou que só exibe essa função para turmas destinadas a concursos de admissão a escolas militares. Outro apenas aborda o assunto como curiosidade.

Os dois grandes objetivos da aplicação desse questionário aos professores de Matemática foram alcançados. Primeiramente, considerando que este foi aplicado antes de se iniciar a escrita do trabalho, as respostas serviram como um pontapé inicial, fornecendo uma visão detalhada sobre o ensino de funções exponenciais. Houve respostas bastante interessantes e surpreendentes, como por exemplo a forma como os professores explicam os valores possíveis para a base da função exponencial (pergunta nº 2), a variedade de aplicações práticas que eles exibem para os alunos (pergunta nº 3), a explicação matemática dos casos de potenciação abordados na pergunta nº 6, dentre outras. Nas respostas da pergunta nº 8 podemos perceber que alguns professores são simpáticos à idéia apresentada de inverter a ordem dos conteúdos apresentados (funções exponenciais antes de equações exponenciais).

Além disso, observou-se que as perguntas levaram os docentes a refletirem sobre a forma como eles ensinam o conteúdo em sala de aula, e esse também era um objetivo do questionário. Apenas com a reflexão contínua sobre as metodologias de ensino será possível detectar as oportunidades de melhoria, e é isso que nosso trabalho almeja no fim das contas: dar sua pequena parcela de contribuição com o aperfeiçoamento do ensino de Matemática nas escolas do Brasil.

4 Proposta de Sequência Didática e Conclusões

A proposta deste capítulo, conforme já exposto na introdução, é a de apresentar uma sequência didática de ensino de funções exponenciais, baseando-se em modelos consagrados e curiosidades que usam modelos exponenciais, mantendo o rigor matemático necessário. Tomando como base a necessidade da contextualização no ensino de Matemática, o embasamento teórico de funções exponenciais e a resposta dos professores ao questionário elaborado, todos já expostos aqui neste trabalho, escrevemos um roteiro detalhado de quatro aulas que poderão aperfeiçoar o ensino de funções exponenciais em sala.

Vale ressaltar que as aulas foram elaboradas tendo em vista uma exposição completa do conteúdo a alunos do Ensino Médio. Cada aula foi planejada para 2 tempos de 50 minutos para exposição da teoria, e mais um tempo de 50 minutos para aplicação de exercícios. É claro que, dependendo do nível e do objetivo da turma para a qual se está lecionando, algumas alterações adequadas podem ser feitas. Se for uma turma focada em preparação para o ENEM e vestibulares, por exemplo, algumas revisitações de conceitos básicos (como as presentes na primeira aula) podem ser suprimidas, pressupondo que os alunos já possuem uma melhor base matemática. Nesse caso, o nível dos exercícios também pode ser mais elevado. Se for uma turma de educação de jovens e adultos, é possível que seja necessário relembrar alguns conceitos do Ensino Fundamental, devido ao tempo que os discentes ficaram sem contato com a Matemática. Nossa intenção não é apresentar uma sequência fixa de aulas, mas sim um ponto de partida com sugestões interessantes para o ensino de funções exponenciais nas escolas brasileiras.

4.1 Aula 1 - Compreendendo a operação de potenciação

Antes de o professor introduzir em sala de aula o assunto sobre funções exponenciais, é necessário assegurar que seus alunos compreendam o que é de fato exponenciação. Afinal, sabe-se que, infelizmente, muitos alunos chegam ao Ensino Médio com deficiências nas 4 operações básicas, então é de se esperar que muitos deles não dominem a operação de potenciação (ou exponenciação). É válido, portanto, investir o tempo de uma aula apenas para relembrar (ou ensinar) esses conceitos aos alunos.

Um roteiro adequado para esta aula será apresentado a seguir:

1) O conceito de potenciação: O professor deve começar a aula explicando de maneira bem didática o conceito de potenciação, levando os alunos a pensarem inicialmente em expoentes naturais e bases naturais. A idéia é que o discente compreenda o que é base e expoente, e que a potência é igual a base multiplicada por ela mesmo um número de vezes igual ao expoente.

2) Bases inteiras e expoentes naturais: O docente deve agora relembrar que a base também pode ser um número inteiro negativo e que a regra é a mesma usada nos exercícios anteriores. O que os alunos devem perceber e compreender é que um número negativo elevado a uma potência ímpar dá resultado negativo, e se elevado a uma potência par o resultado é positivo. Nesse ponto poderá ser necessário que o professor relembre os conceitos de multiplicação onde pelo menos um dos fatores é um número negativo.

3) Multiplicação e divisão de potências: Nesse passo da aula, o professor deve introduzir o conceito de multiplicação e divisão de potências com a mesma base. É importante que o aluno compreenda o motivo de se somar os expoentes na multiplicação e de subtraí-los na divisão. Principalmente na divisão, o aluno deve se habituar à idéia de cortar fatores comuns no numerador e denominador (muitos deles possuem dificuldade com essa técnica bem simples e útil), para que ele entenda o motivo da subtração dos expoentes. O docente também deve relembrar aqui o conceito de potência de potência, e explicar o motivo de se multiplicar os expoentes. Essas explicações estão na **subseção 2.1.1** deste trabalho.

4) Expoentes não-positivos: Aproveitando o conceito de divisão de potências com a mesma base, deve ser introduzido e compreendido pelos alunos o conceito de expoentes negativos e expoente zero, de acordo com a **subseção 2.1.1** e a pergunta nº 6 do questionário do **capítulo 3**. Para explicar que $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$, basta fazer $a^0 = a^{k-k} = \frac{a^k}{a^k} = 1$, onde k é um expoente qualquer. Já no caso do inverso de um número, basta explicar que $a^{-k} = \frac{a^0}{a^k} = \frac{1}{a^k}$. Quando $k = 1$, temos um conceito particular, que é o inverso de um número: $a^{-1} = \frac{a^0}{a^1} = \frac{1}{a}$. Dessa forma, o aluno irá entender, e não simplesmente decorar, como calcular potência com expoente negativo ou igual a zero.

5) Bases e expoentes racionais Até agora se trabalhou com bases inteiras e expoentes inteiros. Nesse ponto o professor deve introduzir o conceito de bases e expoentes racionais. Primeiro, deve se lembrar que um número racional q é todo aquele que pode ser escrito da forma $q = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$. Quando a base é racional, temos que $q^k = (\frac{a}{b})^k = \frac{a^k}{b^k}$. Uma demonstração menos formal porém bem prática para os alunos seria utilizar um exemplo de um número racional representado em fração elevado a um expoente natural.

Quando o expoente é racional, a demonstração está exposta na **seção 2.1.1** deste trabalho. O docente deve ter bastante cautela ao explicar esse ponto da matéria aos seus alunos visto que não é nem um pouco intuitivo aceitar que $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. É interessante o professor mostrar para os alunos que essa regra vale para qualquer número racional, incluindo os naturais e os inteiros, ou seja, nos casos em que m é múltiplo de n. Nesse ponto, o aluno deve compreender que todas os conceitos expostos até aqui, como o da multiplicação e divisao de potências e o de expoentes negativos também são igualmente aplicados quando a base e o expoente forem racionais não-inteiros.

6) Bases e expoentes reais: Todas as propriedades de exponenciação expostas até agora também serão válidas para bases e expoentes irracionais, ou seja, aqueles que não podem ser escritos da forma $q = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$. Em sala de aula um aluno pode interrogar o professor sobre como calcular, por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$. A grande dificuldade nesse ponto é explicar ao aluno que não existe uma maneira de calcular uma potência com um expoente irracional, mas mesmo assim essa potência representa um número real. O professor nesse caso pode pedir ao aluno que ele aproxime o valor de $\sqrt{2}$ por falta e excesso até a terceira casa decimal para verificar que o valor de $2^{\sqrt{2}}$ converge e, logo em seguida, explicar ao aluno como definimos a função exponencial para números irracionais dessa maneira, conforme exposto na **seção 2.1.2** deste trabalho e abordado na pergunta nº 1 do questionário do **capítulo 3**.

4.2 Aula 2 - Introdução à função exponencial e resolução de equações e inequações exponenciais

Após a primeira aula, se espera que o aluno tenha a noção completa da operação de exponenciação. Sem essa noção ele não terá uma boa compreensão do que representa a função exponencial. Antes de o professor introduzir o conceito de função exponencial, recomenda-se que ele relembre com os alunos a teoria de função. O discente deve estar bem confortável com os conceitos de domínio, contradominio, imagem, bem como de função injetiva, sobrejetiva, contínua e outros. Um roteiro básico para esta aula é:

1) Definir matematicamente a função exponencial: O professor deve escrever a definição matemática para que os alunos se acostumem com a notação matemática ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, sendo $f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$). Nesse ponto, o professor deve explicar aos alunos a restrição nos valores da base a. As diretrizes para essa explicação estão na pergunta nº 2 do questionário do **capítulo 3**. Deve-se destacar também que o domínio da função exponencial é o conjunto dos números reais e o contradomínio é o conjunto dos números reais positivos. A explicação do domínio passa pela explicação de que potências de expoentes irracionais, embora não possam ser calculadas com exatidão, representam um número irracional, conforme a aula anterior. A explicação do contradomínio é a demonstração de que $f(x) > 0$, para qualquer x do domínio, e está exposta na **seção 2.1.2**.

2) Analisar as propriedades da função exponencial: Há algumas características da função exponencial que a tornam única, e os alunos precisam desenvolver essa sensibilidade quanto a esse tipo de função. Primeiramente, ela sempre assume valores positivos, que já está explícito na definição desta função. Outro fato interessante é que o ponto (0,1) pertencerá ao gráfico de qualquer função exponencial, pois $a^0 = 1$ para todo a.

Faz-se necessário também analisar a monotonicidade da função exponencial. O professor deverá explicar aos alunos por que ela é sempre crescente (para $a > 1$) ou sempre decrescente (para $0 < a < 1$) ao longo de todo o seu domínio. Com isso, ele poderá também justificar o fato de a função exponencial ser injetiva. A sobrejetividade da função também deve ser apresentada, bem como a bijetividade decorrente. Seu comportamento quando x assume valores muito grandes em módulo também é bem interessante de ser abordado. Vale ressaltar que para ilustrar essas propriedades é bem adequada à exibição de gráficos desta função, e comparação destes com os gráficos de outros tipos de função conhecidas, como as lineares e quadráticas. Idéias interessantes sobre a análise em sala de aula das propriedades estão nas perguntas nº 4 e 5 do questionário do **capítulo 3**, e os conceitos formais dessas propriedades estão expostos na **seção 2.1.2**.

3) Equações e inequações exponenciais: Essa abordagem de equações e inequações exponenciais depois de apresentar a função exponencial é diferente da ordem normalmente apresentada no Ensino Médio. A justificativa é a mesma apresentada na pergunta nº 8 do questionário da **seção 3**. Embora tenha dividido a opinião dos professores, resolvemos seguir esta indicação. São dois motivos bem relevantes que corroboram para isso. O primeiro é que, tendo noção de que a função exponencial é injetiva, o aluno poderá entender por qual motivo podemos cancelar as bases e igualar os expoentes numa equação exponencial simples (em que as bases são iguais), conforme é citado na pergunta nº 9 do questionário. Através do próprio gráfico da função, ele poderá enxergar que o valor que a função assume é diferente para cada elemento do domínio. O segundo motivo é que, sabendo os valores da base para os quais a função é crescente e decrescente, o aluno terá mais facilidade em compreender por que na resolução de inequações exponenciais simples (com bases iguais) o sinal de desigualdade se mantém (para bases maiores que 1) ou é invertido (para bases entre 0 e 1). Dessa forma, o aluno não se limitará a decorar e empregar métodos prontos de resolução de equações, mas entenderá o que está por trás desses métodos, que são justamente as propriedades de funções exponenciais que ele viu anteriormente.

Existem outros tipos de equações exponenciais, em que as bases não são iguais. Primemiramente, há os casos em que elas não sao iguais, mas uma é potência da outra. Por exemplo, $3^x = 81^5$. Esses casos devem ser passados como exercício aos alunos para que eles tenham uma visão mais ampla e possam exercitar os artifícios matemáticos para fazer com que as bases fiquem iguais. Um outro caso interessante que pode servir para consolidar o conceito para os alunos é o exposto na pergunta nº 11 do questionário. Há também as equações que só podem ser resolvidas por logaritmos (lembrando que logaritmo é a função inversa da função exponencial, conforme a **seção 2.2**). Se um aluno vier com a pergunta de como resolver a equação $3^x = 5$, o professor pode comentar rapidamente que existe um conceito matemático que possibilitará aos alunos resolverem esse tipo de equação. Ele pode também propor de ensinar logaritmos juntamente com equações exponenciais, mas conforme foi dito na pergunta nº 11 do questionário do **capítulo 3**, que trata desse assunto, essa proposta exige bastante cautela do docente para que o aluno não confunda os conceitos.

4.3 Aula 3 - Funções exponenciais - aprofundamento e aplicações

Após a aula anterior, é esperado que o aluno se sinta mais à vontade com o conceito de funções exponenciais, já compreendendo todas as suas características peculiares. Neste trabalho, estamos comprometidos não apenas com uma proposta didática de ensino desse tópico da Matemática no Ensino Médio, mas também com a excelência. Acreditamos que em sala de aula o professor pode ir além do que está estabelecido no planejamento, dependendo do grau de interesse da turma. Se os alunos querem ir além, por que travá-los? O que foi visto até agora já cumpre o conteúdo didático do Ensino Médio. Essa aula procurará aprofundar um pouco mais a parte teórica desse assunto e apresentar aplicações interessantes da função exponencial que fazem interseção com outras disciplinas. Eis o roteiro a seguir:

1) O problema antes da fórmula: Inicialmente, o docente pode introduzir um exemplo similar ao apresentado na **seção 2.1** deste trabalho. O que o aluno precisa compreender é que os problemas matemáticos surgem antes da sua modelagem, e não o contrário. Existem situações em que se observa que uma função satisfaz sempre à seguinte igualdade: $f(t_1 + t_2) = f(t_1).f(t_2)$. Qual seria a 'cara' dessa função? Há também o caso da aplicação de capital a juros fixos que motivaram os matemáticos a buscarem uma fórmula para $c(t)$, sabendo que a sua variação relativa $[c(t+h)-c(t)]/c(t)$ depende apenas de h mas não de t. Essas respostas vieram com o modelo de função exponencial. Da mesma forma, os matemáticos propuseram a função linear, a função quadrática, a função trigonométrica. Eles apenas queriam modelar situações que eles observavam.

2) Caracterização da função exponencial: Os teoremas de caracterização da função exponencial e da função de tipo exponencial, apresentados na **seção 2.1.3** deste trabalho, fogem ao escopo do Ensino Médio, principalmente por suas demonstrações não serem triviais. Contudo, é válido que o professor procure explicar aos alunos as peculiaridades dessas funções descritas nesses teoremas e destaque que somente esse tipo de função atende às características do teorema. Isso provocará no aluno uma visão mais ampla da Matemática, como uma ferramenta para modelagem de situações reais, e não como uma ciência que inventa fórmulas para serem aplicadas em problemas fictícios que nunca ocorrerão. O estudante compreenderá, portanto, que a Matemática é uma ciência viva e em evolução, e que ele mesmo poderá um dia propor a sua própria modelagem.

3) Aplicações práticas: O professor deverá também expor aos alunos nessa aula as aplicações práticas de funções exponenciais, visto que agora ele sabe que elas é que provocaram o 'surgimento' desse tipo de função. Conforme as respostas à pergunta nº 3 do questionário do **capítulo 3**, felizmente hoje há uma preocupação dos docentes em abordar esse assunto em sala. A importância de se contextualizar o ensino da Matemática já foi plenamente justificada através do **capítulo 1** deste trabalho. Alguns exemplos estão expostos na **seção 2.3** deste trabalho e podem ser passados como exercício aos alunos. Uma aplicação bastante interessante relaciona o conteúdo de funções exponenciais e progressões aritméticas e geométricas, descrita na **seção 2.3.3** e mencionada na pergunta nº 7 do questionário do **capítulo 3**.

O professor pode, por exemplo, propor que os alunos analisem a aplicação de um valor inicial de capital (regida por uma função exponencial) e verifiquem numericamente se os valores do capital em instantes t diferentes formam uma progressão geométrica, desde que esses instantes estejam em progressão aritmética. Claro que, nesse caso, deve-se decidir com cautela se essa abordagem será feita, pois não será muito eficaz caso os alunos ainda não tenham visto o conteúdo de progressões. Caso eles já tenham aprendido esse assunto, é uma ótima oportunidade de interligar conceitos matemáticos, fazendo com que os alunos revisem um conteúdo aprendendo outro ao mesmo tempo.

4.4 Aula 4 - Número e e a função e^x

Finalizando a sequência didática proposta no presente trabalho, abordaremos alguns conceitos sobre o número e e a função exponencial natural, isto é, aquela que possui como base exatamente o mágico número e.

É de extrema importância deixar claro ao discente que esta função se comporta exatamente da mesma forma que todas as outras funções exponenciais já estudadas. O número e, apesar de ser irracional, como já foi visto no trabalho, como base de uma função exponencial aglutina as mesmas propriedades de uma exponencial que tem como base um número natural, por exemplo. Percebe-se que, por vezes, a aparição da função $f(x) = e^x$ faz com que alunos tenham um bloqueio de raciocínio, achando que tal função é de difícil compreensão e destinada à Matemática Superior.

Como sugestão de abordagem ao nosso leitor professor, orientamos que se comece com um breve histórico do número e, seguido de uma analogia com o irracional mais famoso que conhecemos: π, conforme apresentado no trabalho **Função exponencial natural $e^{\mathbf{x}}$ e o número e: uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades**, do colega **Mário César Martins de Lima**. Explicar a

Matemática através da História da Matemática é uma excelente alternativa para despertar o interesse do aluno. Assim, é importante abordar o surgimento do número e, ressaltando um problema de ordem financeira da capitalização composta, conforme já abordado no trabalho. Deixamos o embasamento teórico nos capítulos anteriores com a exata intenção de permitir ao professor que use-o de forma ilimitada. Ainda, julgamos interessante convencer o aluno de que o número e é irracional, o que é um passo importante para a compreensão do comportamento da função exponencial natural.

Feita a introdução com um pouco da história do número e, pode-se passar ao estudo da função exponencial natural propriamente dita, $f(x) = e^x$. Neste ponto de conhecimento do aluno, é bem provável que muitos se perguntem: por que estudar, especialmente, este tipo de função exponencial? Por que ela tem essa importância tamanha, a ponto de ter uma aula inteira dedicada ao seu estudo? Os docentes devem estar preparados para responder a este tipo de questionamento. Assim, uma boa resposta é mostrar que todas as outras funções exponenciais já estudadas podem ser colocadas, através de artifícios matemáticos, na mesma base e. Assim, $f(x) = 2^x$ pode ser reescrita como, aproximadamente, $f(x) = e^{0,693x}$.

Outra resposta que deve ser abordada é que esta função possui inúmeras aplicações em fenômenos do nosso cotidiano por possuir uma característica importante: a sua taxa de crescimento (o que pode ser abordado como gradiente, para que não se introduza a noção de derivada) é exatamente igual à sua ordenada ou imagem na função. Numa primeira análise pode não parecer fantástico, mas através dos gráficos das funções exponenciais, é possível passar ao aluno a importância do seu estudo. Desta forma, recomendamos também, fortemente, o uso de gráficos nesta parte das aulas, principalmente para mostrar a continuidade das funções, mesmo com bases irracionais. Ainda, registra-se que a curva que tem como gradiente e altura sempre iguais é conhecida como *curva perfeita* ou $y = (2,7182818284...)^x$, ou ainda, $y = e^x$.

Por fim, após o estudo puro da função, recomenda-se, mais uma vez, mostrar aplicações desta função específica, o que deixamos a critério do nosso leitor, já que há um vasto leque de casos práticos, inclusive com alguns esmiuçados no trabalho já citado do colega **Mário César Martins de Lima**. Como sugestão, aplicações financeiras sempre são interessantes e possuem um caráter educativo e pouco ensinado nos bancos escolares. Vale ressaltar que o assunto dessa aula foi abordado nas perguntas nº 12 e 13 do questionário do **capítulo 3**.

A partir da aplicação desta sequência didática, espera-se que o aluno obtenha um conhecimento sólido do assunto de funções exponenciais. Com as aulas 1 e 2, o aluno já terá aprendido o que se espera para um aluno de Ensino Médio. A **aula 1** revisa conceitos importantes para o assunto e a **aula 2** introduz o conceito da função exponencial e depois ensina o aluno a resolver equações e inequações exponenciais, o que é uma proposta diferente do comum nas escolas. Nesse caso, caberá uma avaliação pelo docente se essa proposta teve ou não um efeito positivo. A **aula 3** procura contextualizar o assunto, mostrando aplicações práticas, e aprofundar a teoria, com o teorema de caracterização das funções exponenciais, o que poderá despertar um maior interesse dos alunos pela Matemática ao perceberem como surge um conceito matemático, através de demandas de situações cotidianas que precisam ser explicadas de modo convincente. A **aula 4** é praticamente uma interseção da Matemática do Ensino Médio com a Matemática do Ensino Superior, e pode servir para aguçar ainda mais a curosidade dos alunos e identificar aqueles que desde o Ensino Básico já demonstram aptidão para a área.

Como já foi citado no início do capítulo, caberá ao docente saber se e como vai aplicar cada uma dessas aulas. Há contextos em que apenas as aulas 1 e 2 são aplicáveis e outros em que as aulas 3 e 4 podem ser perfeitamente utilizadas. Reitera-se que a intenção aqui é apenas dar um direcionamento para o ensino de funções exponenciais com um comprometimento com a excelência, que deve ser sempre priorizada.

Considerações Finais

Procurou-se com este trabalho, sob um enfoque mais amplo, mostrar que o ensino através de uma perspectiva aplicada pode obter melhores resultados quanto ao processo de ensino-aprendizagem do aluno. Através de uma minuciosa revisão de literatura, tentou-se corroborar o que foi defendido ao longo desta jornada. Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram os norteadores deste estudo, confirmando que já há um preocupação antiga em se ensinar Matemática de forma mais natural e aplicada, sem abandonar o formalismo necessário à ciência. Várias outras obras foram lidas e citadas, sempre procurando confirmar a tese defendida na introdução apresentada.

Restringindo um pouco mais o espectro, almejou-se deixar claro que o ensino de funções exponenciais sob uma ótica modelada, com algumas sugestões cronológicas de abordagens de conteúdos, pode tornar a compreensão mais efetiva e despertar o interesse e o gosto do discente pela matéria, realçando a sua importância no mundo onde está inserido. Ainda, ressalta-se que os modelos exponenciais foram escolhidos por possuírem relativo destaque na aplicabilidade no cotidiano social e em várias áreas afins.

Através de capítulos pedagógicos e matemáticos, se é que pode-se assim dividir, a construção lógica da teoria permitiu que fosse montado um roteiro que permita ao leitor professor se preparar em ótimas condições para ministrar aulas sobre o assunto tratado. É claro que não há a pretensão em se mudar estilos ou impor métodos e formas de ensino, mas sim contribuir, de forma impactante e significativa com a melhoria da educação das nossas escolas. Pretendeu-se trazer pontos que não são abordados com clareza nas obras publicadas. É importante destacar que muitos desses pontos foram sugestões de colegas docentes que, por meio de uma pesquisa/questionário distribuída, apresentaram pareceres e sugestões extremamente valiosas para o andamento deste estudo. Desta forma, o trabalho é dedicado aos professores do Ensino Médio e alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática que, em algum momento de suas trajetórias profissionais, se depararão com o desafio de ensinar conteúdos relativos aos conceitos exponenciais.

Em especial atenção às aplicações, há uma seção de um capítulo intitulada *Aplicações e Curiosidades*, trazendo exemplos corriqueiros e elaborados para o estudo da matéria em voga. Sempre agindo sob uma égide de inovação, paradigmas pouco conhecidos foram trazidos ao leitor, tudo com o intuito de despertar sempre o interesse do aluno, fazendo com que tome gosto pelos estudos das áreas matemáticas, quebrando assim mitos e mentiras sobre a disciplina. Deixando como exemplo de inovação, a abertura de paraquedas modelada por uma função tipo exponencial natural, permitindo concluir que o saltador sempre chegará com uma velocidade de pouso compatível, impedindo acidentes.

Coroando e corroborando a hipótese defendida, planejou-se uma sequência simples de quatro aulas, abordando os principais pontos dos assuntos estudados. Lembrando, novamente, que a vontade expressada não é de revolução em forma de ensino, mas sim de contribuição significativa. No planejamento, constatou-se que muito poderia ser feito diferente do que se pratica hoje na maior parte das escolas frequentadas. Assim, as aulas estão sob um enfoque diferente, com alterações na ordem dos conteúdos ensinados. Como exemplo, na sequência proposta, o ensino de funções exponencias não é precedido do ensino de equações exponenciais. Com isso, evitamos a mecanização do ensino, fazendo com que o aluno não seja um mero reprodutor de artifícios matemáticos, sem entender o que de fato está fazendo.

Por fim, através da análise dos questionários, pode-se dizer que é necessário quebrar a estrutura rígida que se instalou nas escolas, no que diz respeito ao ensino da Matemática: muitos docentes, por diversos aspectos, não aperfeiçoam os métodos de abordagem dos conteúdos. Seja por medo ou comodismo, seja por falta de tempo para aperfeiçoamento ou pouco incentivo por parte do próprio sistema escolar, é claro e notório que há uma resistência muito grande em fazer algo diferente: as avaliações são sempre unilaterais, onde o fracasso do ensino é quase sempre atribuído ao discente; o tradicionalismo de ensino, com o docente expositor e aluno apenas ouvinte e não participante do processo de ensino; e a mitificação do ensino de Matemática como a detentora do posto de disciplina mais difícil da vida escolar são alguns exemplos de paradigmas que necessitam ser quebrados para a evolução da educação no país.

Desta feita, espera-se que o trabalho possa servir como estopim para o estudo com este viés modelador, inclusivo e inovador em outras áreas, tanto da Matemática, como em outras disciplinas, se assim se encaixar. Caso se consiga algo nesta direção, pode-se dizer que o esforço foi válido. Ainda, registra-se que o trabalho não é fechado e está sempre sujeito a correções e aperfeiçoamentos por parte do leitor. Com isso, o objetivo de contribuir para a melhoria do ensino será atingido em sua plenitude, na mais breve lacuna de tempo.

APÊNDICE A – Questionário distribuído aos professores de Matemática do Ensino Médio

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Motivação

Prezados companheiros professores de matemática, somos Igor Nascimento e Mário Lima. Estamos cursando o último período do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na UNIRIO. Decidimos abordar em nossa dissertação o ensino e aplicação de funções exponenciais no Ensino Médio. Com o intuito de direcionar o nosso trabalho, elaboramos um questionário aos docentes de Matemática buscando compreender melhor como é o ensino desse tópico nas escolas.

Portanto, gostaríamos de contar com a colaboração de vocês no preenchimento deste questionário. Essa ajuda será de muita valia para o nosso trabalho que ora se inicia. Desde já, o nosso muito obrigado.

Questionário: Funções exponenciais

1) A função exponencial tem como domínio o conjunto dos números reais. É intuitivo para o aluno que um expoente pode ser um número natural, inteiro e racional. Mas e se um aluno lhe perguntar o sentido da expressão: $2^{\sqrt{2}}$? Como você explica ao aluno que os números irracionais também fazem parte do domínio da função exponencial?

2) De que forma você define e explica os valores possíveis para a base "a" de uma função f(x) = a^x ?

3) Você apresenta em sala possíveis aplicações para funções exponenciais? Caso positivo, cite alguns exemplos.

4) Você costuma comparar em sala as taxas de variação da função exponencial com as funções de primeiro e segundo grau?

5) Você explora com seus alunos o comportamento da função exponencial no $\pm\infty$?

6) Como você explica para seus alunos que um número elevado a 0 é igual a 1? E como explica que para obter o resultado de um número elevado a -1 basta escrevê-lo como fração e inverter o numerador com seu denominador?

7) Você já demonstrou aos seus alunos que uma função exponencial pode levar uma sequência em PA numa sequência em PG? Qual foi a reação dos alunos? Ajudou no entendimento do assunto de PA e PG?

8) Na maioria dos materiais didáticos (possivelmente todos), o ensino de equação exponencial é anterior ao de função exponencial. Qual é a sua opinião a respeito? Por quê? Haveria vantagens em trocar a ordem com que esses assuntos são abordados? Se sim, quais?

9) Durante a sua aula sobre equação exponencial você resolve a equação $2^x = 8$ escrevendo $8 = 2^3$, cortando as bases comuns e obtendo x=3. Um aluno pergunta porque é possível cortar a base. O que você responde? Você saberia justificar formalmente esse"corte"?

10) Você costuma utilizar logaritmos para resolver equações exponenciais?

11) Se um aluno perguntasse como resolver a equação $2^x = 3^x$, o que você responderia?

12) Você apresenta a função exponencial natural, f(x)= e^x, em suas turmas de Ensino Médio? Qual é sua opinião a respeito?

13) Você já abordou em sala de aula a representação de Euler para números complexos (e^{ix} = cos x + i.sen x) ?

APÊNDICE B – Tabulação, por pergunta, das respostas obtidas do questionário distribuído aos professores de Matemática do Ensino Médio

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Motivação

Prezados companheiros professores de matemática, somos Igor e Mario. Estamos cursando o último período do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na Unirio. Decidimos abordar em nossa dissertação o ensino e aplicação de funções exponenciais no Ensino Médio. Com o intuito de direcionar o nosso trabalho, elaboramos um questionário aos docentes de Matemática buscando compreender melhor como é o ensino desse tópico nas escolas.

Portanto, gostaríamos de contar com a colaboração de vocês no preenchimento deste questionário. Essa ajuda será de muita valia para o nosso trabalho que ora se inicia. Desde já, o nosso muito obrigado.

Questionário: Funções exponenciais

1) A função exponencial tem como domínio o conjunto dos números reais. É intuitivo para o aluno que um expoente pode ser um número natural, inteiro e racional. Mas e se um aluno lhe perguntar o sentido da expressão: $2^{\sqrt{2}}$? Como você explica ao aluno que os números irracionais também fazem parte do domínio da função exponencial?

Mostraria que trabalhando com uma aproximação racional de √2 obteríamos uma aproximação de 2^√2 assim podemos obter um resultado tão preciso quanto necessário.
Primeiro daria uma noção dos números reais, abordando de uma forma genérica os números irracionais. Há várias formas de se definir os irracionais: - a definição formal, como o limite de uma sequencia de racionais; - ou uma definição mais paupável pro aluno do ensino médio: números que não apresentam fim depois da vírgula. Por isso, acho muito interessante você abordar os números reais primeiro.
Para justificar os números irracionais, incluindo os transcendentes (ex e, pi ..) usaria tabelas com expoentes fracionários até chegar a um "limite". Posteriormente usaria o raiz de 2 na forma de expoente também ao explicar as propriedades.

Pela densidade dos irracionais nos reais. Utilizo a geometria, em particular a diagonal do quadrado de lado 1.
Acredito ser intuitivo para o aluno o fato dos números naturais, inteiros e racionais poderem ser colocados no expoente de um outro número pelo fato de esses conjuntos representarem os números do nosso cotidiano. Ao apresentar para o aluno que a função exponencial está definida no domínio dos reais e é contínua, apresento a ele o fato de que o conjunto dos reais é composto tanto por números racionais como por números irracionais. Isso nos leva a apontar que expoentes com números irracionais, apesar de menos usuais, são possíveis.
O sentido da expressão é ver isto como a área sob a curva 2^x desde do ponto zero ao ponto 2^(1/2). Partindo disso, é fácil mostrar que essa área pode crescer de forma contínua, sendo assim, essa continuidade inseriria naturalmente os números irracionais entre os racionais.
A melhor explicação seria gráfica, ou seja, sendo a função exponencial contínua nos reais, ela assume um valor bem definido para $x=\sqrt{2}$.
Antes de tudo, a melhor resposta sempre depende do aluno. Não digo que seja intuitivo para a maioria de meus alunos! Nem mesmo o caso dos números naturais. Depende muito de como ele fez o Ensino Fundamental dele. De qualquer forma é uma pergunta sempre pertinente. Via de regra os bons alunos fazem esse tipo de pergunta. A maioria não se interessa e simplesmente não se questiona esse fato. Se ele é de ensino médio, é preciso garantir que ele entendeu os seguintes passos: 1) Tento deixar claro para o aluno que qualquer potência b, natural de 2, possui um inteiro a tal que 2^a=b. 2) Quando ele entende isso bem, eu explico que isso pode ser extendido para os inteiros, fazendo-se 1/2^a=b. 3) Então eu verifico se o aluno sabe o que é uma raiz enésima. 4) Feito isso o aluno vai conseguir conceber um expoente racional. 5) A partir daí eu tento esboçar um gráfico da função na reta real. Mas eu só posso fazer isso se conhecer os valores dos números reais. Traçando o esboço do gráfico apenas para os racionais, vemos que os iracionais podem ser encontrados no esboço. 6) Então eu digo que qualquer número real positivo pode ser expresso como uma potência de dois. Em alguns casos, "fatalmente", o expoente terá que ser irracional
Usaria o conceito de limite. Apresentaria as sequencias 2^(sqrt(2) - 1/n) e 2^ (sqrt(2) +1/n),aplicaria o limite para as duas, com n ->oo e mostraria que as duas convergem para o mesmo valor. Usaria também o software Geogebra para mostrar o comportamento da função f(x) = 2^x e mostrar visualmente o que fiz quando apliquei o conceito de limite.
O calculo de 2^sqrt(2) pode ser explicado através de aproximações por valores menores e maiores que sqrt(2).
Usando uma calculadora, uso expoentes próximos de $\sqrt{2}$ para mostrar a convergência do

resultado
Através do gráfico, mostrando que não há intervalos abertos na construção dessa função
Não saberia explicar, pois nunca ensinei potência com expoente irracional
A partir do gráfico
É uma expressão onde o resultado pode ser aproximado pois $\sqrt{2}$ é um número irracional, ou seja, mostraria que 2^1,4 < 2^$\sqrt{2}$ < 2^1,5 ou 2^1,41 < 2$\sqrt{2}$ $<$ 2^1,42 e assim sucessivamente, ou seja, todo número irracional pode ser aproximado por números racionais pois entre dois números racionais existe um número irracional
Dando uma idéia de como caracterizar, tomando aproximações racionais do número irracional $\sqrt{2}$ (1; 1,4; 1,41; 1,414; obtendo assim a potência a^x, com ‘x’ irracional e ‘a’ real positivo

2) De que forma você define e explica os valores possíveis para a base “a” de uma função f(x) = a^x ?

Como podemos incluir valores racionais em X e utilizando as propriedades para transformar a^x em uma raiz concluiríamos que a não pode ser negativo para todos os valores de X uma vez que não não temos raiz de números negativos nos reais. Supondo que X é irracional para algumas aproximações "a" poderia ser negativo e por outras não, como as aproximações são uma ferramenta para encontrar o valor na precisão necessária seria bom que todas fossem validas assim simplesmente definiria como não existindo a^x com x irracional e a<0
Iria com ajuda dos alunos perguntando quais valores achariam possíveis para a. No fim chegaria o a conclusão que apenas valores negativos, o zero e o 1 não fariam sentido. Número negativo daria exemplo de 2^(-1/2). Chegando nos números imaginários. 0 e 1 chegaria a conclusão que não poderia ser considerado uma função.
Utilizo como referência os valores abaixo e acima de 1 para ilustrar o comportamento crescente e decrescente. Utilizo esse recurso para falar sobre o que é uma assíntota de modo superficial.
Ao apresentar os valores possíveis da base 'a' na função exponencial, relembro onde a função exponencial está definida, para que valores de 'a' a função está definida. Uma vez sabendo que esta função guarda uma relação muito próxima com a função logarítmica (inversa) desenvolvo os casos particulares de 'a': o porque de não poder assumir o valor 1, o porque de não assumir valores negativos, o porque de não assumir o valor 0, o comportamento da função quando 'a' está no intervalo de 0 a 1 e o comportamento da função quando 'a' é maior do que 1.
tem que ser maior que zero. Se for zero a função se torna a função constante. Se for negativo a função torna-se infinitamente descontínua.
Talvez a melhor maneira seja levar o aluno a refletir sobre os valores de "a" que tornam f(x) "bem comportada" (Contínua, crescente/decrescente).
Primeiro eu mostro que 1 elevado a qualquer coisa é 1. O contradomínio de 1^x é {1}. Não é injetora, não possui inversa. Então eu falo que o 1 não fornece nada prático. Depois eu discuto sobre o fato da multiplicação de números negativos por negativos ser positiva. As potências pares de números negativos são positivas e as potências ímpares são negativas. Isso não é interessante. Então eu questiono: E se um número negativo for elevado a uma fração não inteira e negativa.

Não parece fazer sentido com os números que temos. Para evitar todos esses casos estranhos, define-se o a da forma mais abrangente possível, escolhendo apenas os números positivos e retirando o um, para que talvez seja possível definir uma inversa depois.
Seja um número real a, a > 0 e a diferente de 1. Definimos função exponencial de base a à função f de R em R que associa a cada x real o número real a^x. Simbolicamente: f:R ->R x -> a^x Observações: Para a = 1, não teríamos uma função exponencial, pois 1^x é sempre 1 para qualquer x real.(a função seria uma função constante) Para a<0 teríamos valores da imagem da função que não estariam dentro do contradomínio . Exemplo : a = -7 e x = 1/2 f(1/2) = (-7)^1/2 (não pertence a R.) Para a = 0 teríamos um elemento do domínio que não apresentaria imagem , pois 0^0 é indeterminado. Assim, devemos ter a>0 e a diferente de 1.
a>0 pois se atribuirmos valores negativos para a, a função nao ficaria definida em casos como a^(1/n) quando a<0 e n par já que teríamos uma raiz de índice par com argumento negativo

3) Você apresenta em sala possíveis aplicações para funções exponenciais? Caso positivo, cite alguns exemplos.

sim, mostro que elas representam uma progressão geométrica e juros compostos em matemática financeira, conteúdos os quais possuem diversas aplicações na literatura
1. Ruído gaussiano branco, através da função exponencial de Gauss 2. Probabilidade, através da Distribuição de Poisson (aplicações em teoria das filas: filas de banco, filas de buffer de um roteador, filas de paginação de um sistema operacional...) 3. Na física, mostraria as curvas PVˆ(alpha) do gás ideal. 4. Na quimica há também, mas não lembro...
Sim. Juros compostos é o principal exemplo.
Sim. Crescimento populacional e matemática financeira.
Normalmente já contextualizadas em questões práticas. São exemplos: proliferação bacteriana e decaimento radioativo.
decaimento radiotivis.
É fundamental a apresentação de aplicações práticas, tais como juros compostos ou taxa de crescimento/decrescimento populacional, etc
Sim, sempre é bom mostrar exemplos. Costumo falar de crescimento de populações na ausência de predadores naturais (como em algumas bactérias). Esse aqui também, da população mundial. https://gailtheactuary.files.wordpress.com/2013/05/world-population-0-to-2011.png?w=640&h=385

Se der tempo falo de poupança também: http://www.minhaseconomias.com.br/wp-content/uploads/2013/07/2013-07-31-11.11.09.jpg?c6cd9e
Sim. O sistema de juros compostos A decomposição de determinadas substâncias. O crescimento de determinados seres vivos microscópicos, como as bactérias.
Sim, decaimento radioativo e a escala Richter para intensidade de terremotos

4) Você costuma comparar em sala as taxas de variação da função exponencial com as funções de primeiro e segundo grau?

sim, incluo essa comparação gráfica e numérica quando comparo juros simples com juros compostos sobrepondo os gráficos de crescimento de cada um e associando também a PG e PA
Sim. Eu sempre mostro a função do primeiro grau, do segundo grau e depois vou construindo as de grau maior. Dou uma ideia de como ela cresce mais ou menos, dependendo do expoente.
Sim.
Sempre. Principalmente com a função afim que é o ponto de partida do estudo das funções.
Dificilmente, sendo mais aplicável em problemas específicos envolvendo esse conhecimento. Mas são raros.
A taxa de variação da função exponencial é muito maior.
Não. Infelizmente, essa abordagem é mais comum em disciplinas de cálculo, em cursos de nível superior
Depende da turma. Para Ensino Médio, só se for em uma turma de exatas. Para os outros, costumo fazer isso brevemente.
Sim
Não.

5) Você explora com seus alunos o comportamento da função exponencial no $\pm\infty$?

apenas se surgir o interesse, o conceito de infinito nem sempre é compreendido pelos alunos (e pelos professores) explora-lo tem que ser feito com muita cautela para que a aula não vire uma discussão filosófica sobre infinito e fuja do planejamento, mas se o professor dispuser de tempo para isso é sempre interessante.

Sim. Na verdade, mostro pra eles que determinadas funções se comportam da forma que queremos, isto é, atinge o valor que queremos através da continuidade. É sempre bom o aluno ter noção de comportamento da função, de variação, porque aí ele entenderá melhor o conceito de derivada.
Sim.
Muito pouco, acredito não ser objeto principal para o ensino médio.
Até hoje foi um assunto muito pouco explorado.
Não, não os exploro.
Sim. Isso é fundamental
Comento que em alguns casos dá para dizer para onde caminha a função, como quando o expoente é positivo menor que 1. Falo das assíntotas.
Sim.Usando o software Geogebra.
Sim

6) Como você explica para seus alunos que um número elevado a 0 é igual a 1? E como explica que para obter o resultado de um número elevado a -1 basta escrevê-lo como fração e inverter o numerador com seu denominador?

elevado a zero: x^b = x^(0 + b) = x^0 x^b => x^0 =1 elevado a negativo: definindo o que é inverso multiplicativo ou seja b é inverso de a se: a x b = 1 e denotamos b como a^-1
aˆ(0) = ak / ak = 1 aˆ(-1) = aˆ(k) / aˆ(k+1) = 1/a
Elevado a 0 igual a 1 - definição para as propriedades de soma do expoente estenderem-se aos expoentes negativos. elevado a -1 - definição para as propriedades de multiplicação estenderem-se aos expoentes negativos,
Uso a propriedade das potências de mesma base.
1o caso: se estivermos estudando as funções exponencial e logarítmica juntas, identifico o ponto em que a função logarítmica secciona o eixo 'x'. Caso contrário, basta fazer o "truque" intuitivo de: a^0 = a^(1-1) = a^1/a^1 = a/a = 1; 2o caso: novamente, se estivermos estudando as funções exponenciais e logarítmicas juntas, identifico a situação na função inversa. Caso contrário, aplico o "truque" de: a^(-1) = a^(0-1) = a^0/a^1, mas a^0 calculamos no caso anterior, portanto, a^(-1) = 1/a^1
A resposta quanto a 0 é fácil. Como a^x/a^y = a^(x-y) ->a^x/a^x = 1 = a^0.
a^p/a^q= a^(p-q). Partindo dessa premissa. Se p=q temos a^p/a^p=1=a^(p-p)=a^0; a^0/a^p=1/a^p=a^(0-p)=a^(-p)
Vou andando de trás para frente; 3^3=3*3*3 3^2=3^3/3=3*3*3/3=3*3 3^1=3^2/3=3*3/3=3 3^0=3^1/3=3/3=1 3^(-1)=3^0/3=1/3=1/(3^1)
Primeiro apresento as propriedades da multiplicação e divisão de potências com a mesma base.

Seja a^n não nulo. Temos que: a^n/a^n = 1 Aplicando as propriedades de potência no primeiro membro da igualdade temos : a^(n-n) = 1 a^0=1   a^n/a^(n+1) = 1/a Aplicando as propriedades de potência no primeiro membro da igualdade: a^(n-n-1) = 1/a a^(-1)=1/a
Podemos explicar que, por exemplo a^0 vem de uma divisão de a^n por a^n e utilizando a propriedade de divisão, repete-se a base e subtrai os expoentes, logo a^0 = a^n/a^n = 1

7) Você já demonstrou aos seus alunos que uma função exponencial pode levar uma sequência em PA numa sequência em PG? Qual foi a reação dos alunos? Ajudou no entendimento do assunto de PA e PG?

sim, eles perceberam que estavam estudando "a mesma coisa" com uma roupagem diferente, não sei dizer se ajudou.
Nao recordo disso.
Não.
Uso sempre a P.A. comparada à função afim e a P.G. com a exponencial, os alunos ficam supresos. Acredito que ajuda.
Já demonstrei. Muitos ficam impressionados. Alguns chegaram a achar que era magia negra. :) Por vezes, a explicação leva ao que chamo de "ampliação de horizontes", que seria o aluno ter o contato com mais uma forma em que os diversos assuntos da matemática se inter-relacionam, neste caso, como a função exponencial ou logarítmica se relacionam com PA e PG.
A reação foi espanto.
Não, nunca fiz isso.
Nunca fiz isso. PA e PG costuma vir depois de funções. Eu comento que PGs são funções exponenciais e demonstro. Talvez ajude sim! =)
Sim.Alguns gostam e outros não demonstram interesse.Acredito que ajudou somente para um grupo reduzido de alunos,não sendo muito produtivo para a maioria da turma.
Não

8) Na maioria dos materiais didáticos (possivelmente todos), o ensino de equação exponencial é anterior ao de função exponencial. Qual é a sua opinião a respeito? Por quê? Haveria vantagens em trocar a ordem com que esses assuntos são abordados? Se sim, quais?

acredito que pelo trabalho que se teria em adiantar todo o conteúdo de função não seria prático mudar a ordem
SIm. Melhor explicar o comportamento individual pra depois resolver equações envolvendo as funcoes.
Para mim um aluno não pode ver uma equação exponencial antes de saber o que é uma função exponencial. Eles precisam conhecer com o que estão tratando. É como ensinar multiplicação antes de ensinar soma.
Creio que toda equação deve ser tratada antes da função. Por se tratar de caso particular e ser mais simples de compreensão, assim podemos usar o estudo das funções como extensão do estudo das equações.
Acho que essa abordagem funciona como uma introdução. Ao meu ver, funciona aos mesmos moldes com outras funções, por exemplo a de 1° grau: aprendemos a resolver equações de primeiro grau utilizando o "quadrado" para então tomarmos conhecimento do que representa uma função do 1° grau; ou mesmo da de 2° grau, aprendendo a resolução por Baskara para só então sermos introduzidos à equação do 2° grau. Acredito que é a forma como o assunto de funções é explicado. O formalismo por detrás dos conceitos de domínio, contradomínio e imagem por vezes confunde os alunos. Até aprenderem funções, todas as equações tem solução. Quando se deparam com o formalismo dos conceitos anteriores parecem "perdidos" e não entendem porque determinadas "equações" não podem ser resolvidas da "maneira que eu sempre resolvi".
Isso se deve ao fato para que os alunos compreendam que a^0 = 1 e que números irracionais fazem parte do domínio.
Para mim, não há vantagens em trocar esta ordem, pois também aprendemos a multiplicar e a somar antes de lidarmos com funções lineares.
Acho que faz sentido equações exponenciais vir antes de funções exponencias porque o aluno precisa ganhar confiança no conceito de expoente para podê-lo aplicar nas funções. Não vejo como vantagem trocar essa ordem. De fato, é uma alternativa válida, mas ao meu ver não tão eficiente. O aluno ia se questionar, "como faço contas com esses expoentes?" antes de fazer um gráfico com eles.
Seria mais vantagem para o aluno aprender primeiro função exponencial. Acho que o aluno teria mais facilidade de compreender as soluções de determinadas equações observando que a função é injetora.
Com funções e equações do 1° e 2° graus, a ordem geralmente é resolver a equação e depois falar da função. Resolver a equação exponencial primeiro pode ser importante pois revisita o conceito de propriedades de potenciação e ai depois entra-se num tópico novo.

9) Durante a sua aula sobre equação exponencial você resolve a equação $2^x = 8$ escrevendo $8 = 2^3$, cortando as bases comuns e obtendo x=3. Um aluno pergunta porque é possível cortar a base. O que você responde? Você saberia justificar formalmente esse"corte"?

partindo de 2^x = 2^3 lembraria que o ato de cortar é realizar a mesma operação dos dois lados da igualdade assim dividiria os dois lados por 2^3 (2^x)/(2^3) = (2^3)/(2^3) (2^x)/(2^3) = 1 2^(x-3) = 1 x-3 = 0 x = 3
Eu sempre sou bem formal nas demonstrações. E acredito que todos professores deveriam também ser rigorosos matematicamente. Eu faria o mesmo na segunda questao abaixo dessa.
Não explico que "corta" a base. Mostro que 3 é uma solução e faço os pensar por que não pode haver outra. Depois explico através do gráfico da função exponencial, e lembro sobre sobrejetividade e injetividade.
Não uso o termo cortar, eliminei do meu vocabulário, junto com o "passa pra lá", a ideia de comparação é a ideal, simplifica e responde de forma correta e convincente. O uso de logaritmos também ajuda nessa solução, para estender às bases diferentes e utilizar a ideia de função inversa.
Respondo que o no segundo membro da equação, temos um número que é composto somente por fatores 2, isto é, se escrevemos que 8 = 2^3 estamos afirmando que o número oito é composto por 3 fatores 2 multiplicados. Se o primeiro membro afirma que um número 'x' de fatores 2 é igual a 3 fatores 2 multiplicados, isto é porque o número de fatores que é uma incógnita, deve ser o mesmo. Portanto, 3 fatores.
Fatoração.
Jamais resolveria uma equação exponencial cortando as bases. Isso dá uma impressão errada do processo de resolução da equação.
A justificativa é que a função exponencial é injetora. Ele só vai aprender isso depois de terminar o estudo dos gráficos. Entendo seu ponto de vista, concordo que há uma quebra no processo de construção do conhecimento. Mas isso é intrínseco do conhecimento. Quebramos em partes para facilitar a aprendizagem, por mais que nem sempre todos os passos fiquem claros. Um outro exemplo disso é o ensino de cálculo. Primeiro aprendemos a calcular as integrais mais simples e depois vamos ver com detalhes os teoremas importantes.
Não cortou as bases.Potências com a mesma base igualadas possuem expoentes iguais.
Você pode realizar esse corte porque a função é injetiva, então se 2^x = 2^3, pela injetividade o

único resultado possível é x= 3

10) Você costuma utilizar logaritmos para resolver equações exponenciais?

não
Sim.
Sim.
Somente quando não é possível fazer de outra forma.
Depende se o aluno já domina ou não o conteúdo de logaritmos. Caso já tenha o conhecimento de logaritmos, passo a incorporar às soluções o emprego dos logaritmos.
Sempre.
Não.
Depois de ensinar logaritmos, caso haja uma revisão, isso pode acontecer. Mas não é o esperado.
Sim
Não

11) Se um aluno perguntasse como resolver a equação $2^x = 3^x$, o que você responderia?

3^x = (2+1)^x (2+1)^x = (2+1)(2+1)...(2+1) fazendo x = 2 obteríamos 2^2 + 4 +1 = 2^2 +5 com x = 3 (2^2 +4 +1)(2+1) = 2^3 +8 +2 +2^2 +4 +1 = 2^3 + 19 com x = 4 2^4 + 65 assim mostraria que qualquer x escolhido sempre teríamos 3^x = 2^x + alguma coisa
Uma forma mais aceitável para ele seria por gráfico, entretanto, nao correto. Poderiamos resolver: 0=(3/2)ˆ(x) -> x=0
Mostrando no gráfico. Uma "cresce" para x positivo e "diminui" para x negativo mais rápido que a outra. Então único lugar onde se encontram é para x = 0.
Usaria a representação no plano. http://www.wolframalpha.com/input/?i=2%5Ex%3D3%5Ex.
Como os dois membros são funções exponenciais com bases positivas, podemos admitir que ambos são positivos e diferentes de zero. Divide um membro pelo outro e aplica-se o logaritmo

numa base conveniente.
Responderia que existe apenas um valor de x que qualquer número elevado exibe sempre esse valor. Sendo assim levaria o aluno a lembrar que qualquer número real maior que zero elevado a zero é igual a 1.
No nível médio, uma abordagem gráfica seria interessante.
3^x >0 para todo x real 2^x/3^x=1 -> (2/3)^x=1 -> x=0
Divida o primeiro e o segundo membro da igualdade por 3^x 2^x/3^x =3^x/3^x 2^x/3^x =1 (2/3)^x = 1 (2/3)^x = (2/3)^0 x=0
Simplifique por 3^x obtendo 2^x/3^x = 1. Utilizando as propriedades de potenciação temos (2/3)^x = 1, logo x = 0

12) Você apresenta a função exponencial natural, f(x)= e^x, em suas turmas de Ensino Médio? Qual é sua opinião a respeito?

ainda não apresentei dessa forma
SIm. Nao entendi a pergunta.
Apenas como exemplo quando usamos número irracional na base, porém não entro em nenhum detalhe extra sobre a função. Não vejo vantagem nenhuma nesse primeiro contato com a função exponencial.
Apresento de modo discreto. Creio ser importante falar a respeito, mas com pouco tempo não aprofundo o estudo da base e.
Sim. Acho que não foge muito ao tema. Ao meu ver, representa a mesma função exponencial, na qual estamos empregando uma base "fixa" e menos convencional aos conteúdos do Ensino médio. Normalmente explico para os alunos que as propriedades continuam as mesmas como se a base fosse 2 ou 10. Acredito que essa explicação torna a função exponencial natural menos "traumática".
Não.
Não. Se não pudermos dar um sentido prático à referida função não vejo grandes vantagens.
Não. Só vale a pena para as turmas de exatas.
Não.
Sim, explica que a constante e como o pi está presente na matemática e que alguns resultados importantes na matemática utilizam esse número, trata-se o "e" como uma base comum

13) Você já abordou em sala de aula a representação de Euler para números complexos (e^{ix} = cos x + i.sen x) ?

ainda não
Sim.
Não quando abordamos função exponencial, apenas quando introduz números complexos.
não.
Somente a título de curiosidade.
Sim.
Não
Só para turmas militares.
Não.
Não

Referências

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. [S.l.]: Editora Contexto, 2002. Citado na página 15.

BELLOS, A. *Alex através do espenho: como a vida reflete os números e como os números refletem a vida*. [S.l.]: Companhia das Letras, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 24, 25, 41 e 42.

BRASIL, M. da Educação e C. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio. 1998. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 20.

FERNANDES, S. da S. A Contextualização no Ensino de Matemática–um estudo com alunos e professores do Ensino Fundamental da rede particular de ensino do Distrito Federal. 2011. Citado na página 21.

FILHO, D. C. d. M. Análise da Contextualização da Função Exponencial e da Função Logarítmica nos Livros Didáticos do Ensino Médio. III Colóquio de Matemática da Região Nordeste, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

JULIANELLI, J. R. *Ensinar Matemática - Dificuldades e Perspectivas*. [S.l.]: Editora Ciência Moderna, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 19, 22 e 23.

LIMA, E. L. *Matemática e ensino: Coleção do Professor de Matemática*. 3ª. ed. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. Citado na página 22.

LIMA, E. L. et al. A Matemática do Ensino Médio - Volume 1, Coleção do Professor de Matemática. *Rio de Janeiro: Sociedade Brasieira de Matemática*, 2012. Citado 11 vezes nas páginas 16, 26, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 38 e 42.