

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FABULO EUGENIO DANCZUK

DIVERSIFICAÇÃO DE TAREFAS COMO PROPOSTA METODOLÓGICA NO  
ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO

2016

FABULO EUGENIO DANCZUK

**DIVERSIFICAÇÃO DE TAREFAS COMO PROPOSTA METODOLÓGICA NO  
ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientadora: Janecler Aparecida Amorin de Colombo,  
Dra.

PATO BRANCO

2016

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

D175d Danczuk, Fabulo Eugenio  
Diversificação de tarefas como proposta metodológica no ensino dos  
números inteiros / Fabulo Eugenio Danczuk. - - 2016.  
194 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Profa. Dra. Janecler Aparecida Amorim de  
Colombo..

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática. Pato  
Branco, 2016.

Bibliografia: f. 191-194.

1. Matemática – ensino - metodologia 2. Números inteiros  
3. Jogos matemáticos 4. Formação de professores I. Colombo,  
Janecler Aparecida Amorim de, orient. II. Universidade Tecnológica  
Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática. IV. Título.

**CDD 22. ed.: 510**

**Título da Dissertação Nº 13****“Diversificação de Tarefas como Proposta Metodológica no Ensino dos Números Inteiros”**

por

**Fabulo Eugenio Danczuk**

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 9 h 30 min do dia 16 de setembro de 2016. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

---

Prof<sup>ª</sup>. Cleonis Viater Figueira, Dra.  
(UTFPR/Pato Branco)

---

Prof<sup>ª</sup>. Janice Teresinha Reichert, Dra.  
(UFFS/Chapecó)

---

Prof<sup>ª</sup>. Janecler Aparecida Amorin  
Colombo, Dra.  
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

---

Prof<sup>º</sup>. Romel da Rosa da Silva, Dr.  
(Coordenador PROFMAT-UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

Dedico este trabalho às pessoas que de alguma forma contribuíram para que os objetivos aqui estipulados fossem alcançados.

## AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

À minha orientadora, professora Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo, pelo tempo disponibilizado à elaboração deste trabalho, além do conhecimento compartilhado.

À minha esposa Ana Cristina, pela compreensão e apoio nos momentos que mais precisei.

À professora Dra. Cleonis Viater Figueira e à professora Dra. Janice Teresinha Reichert, membros da banca examinadora, pela disposição em contribuir com nosso trabalho. Igualmente ao professor Dr. Romel da Rosa da Silva pelas contribuições prestadas ao nosso trabalho.

Aos colegas do PROFMAT que participaram destes momentos importantes nesta etapa de nossas vidas.

Aos alunos que se propuseram a participar de nossa pesquisa, bem como ao Colégio pelo suporte prestado.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que de alguma forma estiveram envolvidas nesta etapa e colaboraram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho!

*“Quem nunca cometeu um erro, nunca tentou algo novo”*

*Albert Einstein*

## RESUMO

DANCZUK, Fabulo Eugenio. DIVERSIFICAÇÃO DE TAREFAS COMO PROPOSTA METODOLÓGICA NO ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS. 194 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

Este trabalho teve como principal objetivo apresentar uma Proposta Metodológica fundamentada na teoria de Ponte (2005, 2006, 2014) sobre Diversificação de Tarefas, afim de que esta coloque os alunos em Atividade e possibilite o aprendizado significativo dos conceitos formais de Números Inteiros, do contexto histórico e das quatro operações. Para completar nossa Proposta, buscamos referências nas pesquisas que versam sobre Registros de Representações Semióticas, de Duval (1993, 2003) e nas teorias sobre Jogos em Matemática. Deste modo, nossa Proposta foi planejada e construída com base no movimento de ação-reflexão-ação, sendo aplicada em uma turma regular do 7º ano (6ª série) do Ensino Fundamental 2, na qual o pesquisador é o professor de Matemática. Esta pesquisa-ação é majoritariamente qualitativa, visando avaliar se as mudanças realizadas na metodologia provocarão melhorias na prática do professor. Posteriormente, com base nos dados coletados por meio das Tarefas aplicadas, tecemos considerações estruturadas em Categorias de Análise, em acordo com a teoria de Bardin (1977), sobre Análise de Conteúdos. Os resultados apontam para uma real necessidade da diversificação de Tarefas no planejamento metodológico de qualquer professor que busque a apropriação do conhecimento por seus alunos.

**Palavras-chave:** Diversificação de Tarefas. Registros de Representações Semióticas. Números Inteiros. Jogos Matemáticos.



## ABSTRACT

DANCZUK, Fabulo Eugenio. DIVERSIFICATION OF TASKS AS A METHODOLOGICAL PROPOSAL ON TEACHING INTEGER. 194 f. Dissertation – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

This piece of work has as its main goal to present a Methodological Proposal based on the theory of Ponte (2005, 2006, and 2014) about Diversification of Tasks, in order that this put the students in Activity and make the process of learning possible and meaningful of the formal concepts of Integer, on the historical concept and the four operations. In order to accomplish our Proposal, we sought references on the researches that deal with Records of Semiotic Representations, of Duval (1993, 2003) and on the theories about Games in Math. This way, our Proposal was planned and built based on the movement of action-reflection-action, being applied in a regular classroom of the 7<sup>th</sup> year (6<sup>th</sup> grade) of the Middle School, in which the researcher is the Math teacher. This research-action is mostly qualitative, seeking to evaluate if the changes accomplished on the methodology will cause positive impact on the teacher's role. Later on, based on the collected data through the applied Tasks, according to the theory of Bardin (1977), about Content Analysis. The results point to a real need of the diversification of Tasks on the methodological planning of any teacher that seeks the appropriation of knowledge for their students.

**Keywords:** Diversification of Tasks. Records of Semiotic Representations. Integer. Math Games.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Retângulo utilizado por Diofanto .....	23
Figura 2: Tabuleiro utilizado no Jogo Vai e Vem.....	106
Figura 3: Dados utilizados para o Jogo Vai e Vem.....	107
Figura 4: Cartas de Sorte e Revés confeccionadas para o jogo .....	124
Figura 5: Dados adaptados e utilizados para o jogo .....	125
Figura 6: Dados de operações construídos para o jogo.....	125
Figura 7: Cartas de Sorte e Revés elaboradas para o jogo .....	129
Figura 8: Resposta da questão 5 da Tarefa 1 (A19) .....	134
Figura 9: Resposta da questão 5 da Tarefa 1 (A22) .....	135
Figura 10: Resposta da questão 5 da Tarefa 1 (A7) .....	135
Figura 11: Resposta da questão 5 da Tarefa 1 (A16) .....	136
Figura 12: Resposta da questão 8 da Tarefa 1 (A3) .....	136
Figura 13: Respostas da Tarefa 2 (A19) .....	138
Figura 14: Respostas da Tarefa 2 (A22) .....	138
Figura 15: Reflexões sobre a Tarefa 2 (A5) .....	139
Figura 16: Reflexões sobre a Tarefa 2 (A3) .....	139
Figura 17: Respostas da Tarefa 2 (A11) .....	139
Figura 18: Respostas da Tarefa 2 (A20) .....	140
Figura 19: Respostas da Tarefa 2 (A4) .....	141
Figura 20: Respostas da questão 1 da Tarefa 5 (A13).....	144
Figura 21: Resposta da questão 3 da Tarefa 5 (A17) .....	145
Figura 22: Resposta da questão 3 da Tarefa 5 (A18) .....	145
Figura 23: Resposta da questão 3 da Tarefa 5 (A13) .....	146
Figura 24: respostas apresentadas na Tarefa 6.....	147
Figura 25: Respostas da Tarefa 7 (A10) .....	149
Figura 26: Respostas da Tarefa 7 (A10) .....	150
Figura 27: Respostas da Tarefa 9 (A31) .....	151
Figura 28: Respostas da Tarefa 9 (A8) .....	151
Figura 29: Respostas da Tarefa 9 (A24) .....	152
Figura 30: Respostas da Tarefa 9 (A29) .....	153
Figura 31: Respostas da questão 2 da Tarefa 11 (A13).....	153

Figura 32: Respostas da questão 2 da Tarefa 11 (A18).....	154
Figura 33: Respostas das questões 3 e 4 da Tarefa 11 (A5) .....	154
Figura 34: Respostas da questão 4 da Tarefa 11 (A3).....	155
Figura 35: Respostas da questão 4 da Tarefa 11 (A22).....	155
Figura 36: Respostas da Tarefa 10 (A17) .....	156
Figura 37: Respostas da questão 3 da Tarefa 12 (A10).....	157
Figura 38: Respostas da questão 4 da Tarefa 12 (A12).....	158
Figura 39: Respostas da questão 4 da Tarefa 12 (A30).....	158
Figura 40: Respostas da questão 4 da Tarefa 12 (A10).....	159
Figura 41: Respostas da questão 1 da Tarefa 14 (A6).....	161
Figura 42: Respostas da questão 1 da Tarefa 14 (A11).....	162
Figura 43: respostas da primeira parte da Tarefa 15 .....	163
Figura 44: respostas da segunda parte da Tarefa 15.....	163
Figura 45: Respostas da questão 2 da Tarefa 16 (A24).....	164
Figura 46: Respostas da questão 2 da Tarefa 16 (A4).....	165
Figura 47: Respostas da questão da Tarefa 18 (A31).....	167
Figura 48: Respostas da questão 1 da Tarefa 21 (A5).....	168
Figura 49: Respostas da questão 1 da Tarefa 21 (A11).....	168
Figura 50: Respostas da questão 2 da Tarefa 21 (A17).....	169
Figura 51: Respostas da questão 4 da Tarefa 21 (A33).....	170
Figura 52: Respostas das questões 3 e 4 da Tarefa 22 (A30) .....	171
Figura 53: Respostas da questão 1 da Tarefa 23 (A22).....	171
Figura 54: Respostas da questão 6 da Tarefa 23 (A27).....	172
Figura 55: Respostas das questões 2 e 3 da Tarefa 24 (A22) .....	173
Figura 56: Respostas das questões 1 e 2 da Tarefa 12 (A31) .....	174
Figura 57: Respostas da questão 2 da Tarefa 14 (A2).....	176
Figura 58: Respostas da Tarefa 17 - Jogo Vai e Vem (A4).....	178
Figura 59: Respostas da Tarefa 17 - Jogo Vai e Vem (A5).....	179
Figura 60: Respostas da questão 1 da Tarefa 19 (A13).....	181
Figura 61: Solução da questão 3 da Tarefa 19 .....	182
Figura 62: Respostas da questão 4 da Tarefa 19 (A22).....	183
Figura 63: Respostas na Ficha de Jogadas - Tarefa 25 (A33).....	184
Figura 64: Contabilidade de Jogo - Tarefa 25 (A33) .....	184
Figura 65: Respostas na Ficha do Bancário - Tarefa 25 (A5) .....	185

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Evolução dos símbolos matemáticos de adição e subtração .....	27
Quadro 2: Tipologia dos Registros proposta por Duval.....	51
Quadro 3: Organização das Tarefas em Blocos e Seções.....	70
Quadro 4: Classificações da Tarefa 1 .....	72
Quadro 5: Classificações da Tarefa 2 .....	74
Quadro 6: Classificações da Tarefa 3 .....	76
Quadro 7: Classificações da Tarefa 4 .....	78
Quadro 8: Classificações da Tarefa 5 .....	80
Quadro 9: Classificações da Tarefa 6 .....	82
Quadro 10: Classificações da Tarefa 7 .....	84
Quadro 11: Classificações da Tarefa 8 .....	86
Quadro 12: Classificações da Tarefa 9 .....	88
Quadro 13: Classificações da Tarefa 10 .....	90
Quadro 14: Classificações da Tarefa 11 .....	92
Quadro 15: Classificações da Tarefa 12 .....	94
Quadro 16: Classificações da Tarefa 13 .....	96
Quadro 17: Classificações da Tarefa 14 .....	98
Quadro 18: Classificações da Tarefa 15 .....	100
Quadro 19: Classificações da Tarefa 16 .....	103
Quadro 20: Classificações da Tarefa 17 .....	105
Quadro 21: Classificações da Tarefa 18 .....	109
Quadro 22: Classificações da Tarefa 19 .....	111
Quadro 23: Classificações da Tarefa 20 .....	113
Quadro 24: Classificações da Tarefa 21 .....	115
Quadro 25: Classificações da Tarefa 22 .....	117
Quadro 26: Classificações da Tarefa 23 .....	119
Quadro 27: Classificações da Tarefa 24 .....	121
Quadro 28: Classificações da Tarefa 25 .....	126
Quadro 29: Categorias de Análise .....	133
Quadro 30: Respostas dos alunos na questão 5 da Tarefa 1 .....	134
Quadro 31: Respostas dos alunos na Tarefa 2 .....	137
Quadro 32: respostas apresentadas pelos alunos na Tarefa 3 .....	142

Quadro 33: Competências apresentadas pelos alunos na Tarefa 7.....	149
Quadro 34: Quantidade de erros obtidos na Tarefa 14 .....	160
Quadro 35: Relação de Erros e Acertos na Tarefa 16 .....	164
Quadro 36: Relação de Erros e Acertos na Tarefa 18 .....	166

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>2 NÚMEROS INTEIROS</b> .....	18
2.1 UM OLHAR HISTÓRICO SOBRE OS NÚMEROS INTEIROS .....	18
2.2 O ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS .....	28
2.3 FORMALISMO NOS INTEIROS .....	32
2.3.1 Conjunto dos Números Naturais .....	33
2.3.2 Anéis .....	33
2.3.3 Construção dos Números Inteiros .....	34
2.3.4 Modelo Axiomático dos Inteiros .....	38
<b>3 APORTE TEÓRICO</b> .....	42
3.1 AS TAREFAS E O ENSINO DE MATEMÁTICA .....	43
3.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS .....	48
3.3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS .....	55
3.4 O JOGO ENQUANTO TAREFA SEMIÓTICA .....	57
<b>4 ASPECTOS METODOLÓGICOS</b> .....	63
4.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA .....	63
4.2 LOCAL E SUJEITOS DA PESQUISA .....	65
<b>5 A PROPOSTA METODOLÓGICA</b> .....	66
5.1 A ELABORAÇÃO DAS TAREFAS .....	68
5.2 TAREFAS DE INTRODUÇÃO AOS INTEIROS .....	71
5.2.1 Tarefas de Reconstrução Histórica e Reconhecimento dos Inteiros .....	71
5.2.2 Tarefas de Compreensão e Representação dos Inteiros .....	79
5.2.3 Tarefas de Comparação entre os Números Inteiros .....	87
5.3 TAREFAS DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS .....	97
5.3.1 Tarefas de Soma Simples com Números Inteiros .....	97
5.3.2 Tarefas de Soma Complexa com Números Inteiros .....	102
5.3.3 Tarefas de Multiplicação e Divisão com Números Inteiros .....	114
5.3.4 Tarefa De Múltiplas Operações .....	123
<b>6 ANÁLISES E DISCUSSÕES</b> .....	132
6.1 CATEGORIA 1: CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS INTEIROS .....	134
6.2 CATEGORIA 2: UTILIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DOS INTEIROS .....	140
6.3 CATEGORIA 3: RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA DOS INTEIROS .....	143
6.4 CATEGORIA 4: ELEMENTOS DA RETA NUMÉRICA .....	147
6.5 CATEGORIA 5: COMPARAÇÃO ENTRE OS NÚMEROS INTEIROS .....	150
6.6 CATEGORIA 6: ANTECESSOR E SUCESSOR DOS INTEIROS .....	155
6.7 CATEGORIA 7: MÓDULO E OPOSTO SIMÉTRICO DOS INTEIROS .....	157
6.8 CATEGORIA 8: OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS .....	160
6.9 CATEGORIA 9: TAREFAS SIMPLES .....	173
6.10 CATEGORIA 10: TAREFAS COMPLEXAS .....	180
<b>7 TECENDO CONSIDERAÇÕES</b> .....	186
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	192

## 1 INTRODUÇÃO

Os Números Inteiros, também chamados de números relativos, diferente do conjunto dos Números Naturais – o qual seu uso pragmático faz parecer que as operações matemáticas decorrem naturalmente da ação do homem sobre objetos – apresentaram uma trajetória evolutiva histórica conturbada e de difícil aceitação.

Este percurso histórico deixou marcas profundas no que diz respeito ao ensino e aprendizagem deste conteúdo nos dias atuais: obstáculos<sup>1</sup> de origem epistemológica que se devem às resistências advindas do próprio conhecimento e que fazem parte da construção do saber matemático, de acordo com a história do desenvolvimento e evolução de tais conceitos.

Um possível caminho de superação desses obstáculos é a via semântica, considerando contextos nas diversas formas de expressão matemática, tais como a textual, aritmética, algébrica, gráfica, entre outras, combinados com a manipulação sintática, viabilizando diversas formas de expressão na linguagem matemática.

Para que isso ocorra, o professor precisa tomar consciência da necessidade de um ensino exploratório em oposição ao tradicional modelo de exposição de conteúdo. Assim, Ponte (2014) defende a Diversificação de Tarefas no Ensino da Matemática, quando faz jus às palavras de Christiansen e Walther (1986):

A tarefa proposta torna-se o objeto da atividade dos alunos e a proposta de tarefas em conjunto com as ações a elas respeitantes realizada pelo professor constitui o principal método pelo qual se espera que a Matemática seja transmitida aos alunos. (CHRISTIANSEN e WALTHER, 1986, p. 224 *apud* PONTE, 2014, p. 15)

Em acordo com Ponte (2014), as Tarefas são ferramentas fundamentais de mediação no ensino e aprendizagem dos conteúdos de Matemática, pois quando um conjunto delas são planejadas pelo professor visando objetivos específicos e gerais do conhecimento matemático, o encadeamento sequencial das mesmas favorece a Atividade do aluno, que resulta na aprendizagem significativa.

---

<sup>1</sup> De acordo com Bachelard (2005, p. 17), Obstáculos epistemológicos são as causas das estagnações e até regressões no progresso da ciência, os quais não são obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem a fragilidade dos sentidos e do espírito humano, mas “é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos”

Entre tantos objetivos que o ensino por meio de Tarefas pode oferecer, o modo pelo qual os alunos acessam os objetos matemáticos, que são abstratos, deve estar presente na reflexão do professor. Um mesmo objeto matemático pode ser representado de diversos modos, e é por meio da conversão destas representações que pode ocorrer o conhecimento.

Assim, Duval (2003) coloca que

as representações semióticas – ou, mais exatamente, a diversidade dos registros de representações – têm um papel central na compreensão. A compreensão requer a coordenação dos diferentes registros (DUVAL, 2003, p. 29).

Neste sentido, a variabilidade de registros indicada por Duval (1993, 2003), a qual designou de Registros de Representações Semióticas, pode ocorrer por meio da proposta da diversificação de Tarefas no Ensino da Matemática, conforme perspectiva apontada por Ponte (2005, 2006, 2014).

Logo, a busca por novas estratégias e metodologias tem se tornado uma necessidade mais frequente objetivando proporcionar aulas mais dinâmicas e interessantes, sem perder o formalismo e a essência matemática, embora existam professores que, em suas abordagens didáticas cotidianas não levem em conta este fato.

Visando amenizar estes entraves da dinâmica escolar, entendemos que os Jogos Matemáticos se constituem em Tarefas apropriadas que podem favorecer a diversificação dos Registros de Representações Semióticas.

Os Jogos contemplam essa proposta de ensino ao mesmo tempo em que propiciam uma dinâmica em grupo, onde as correções dos erros matemáticos presentes na vida escolar acontecem naturalmente e de modo menos traumáticas, elevando o sucesso individual do aluno frente a um conteúdo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática destacam que os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, permitindo que estes sejam apresentados de maneira atrativa, favorecendo a criatividade na busca de soluções.

Além disso, destaca que os jogos

propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46)



A adoção de jogos em sala de aula enquanto Tarefa Matemática pode ser uma ferramenta de grande proficuidade quando associados a um conteúdo matemático, principalmente àqueles que se caracterizam com um grau de maior dificuldade por parte dos alunos, como por exemplo, a introdução dos números negativos no Ensino Fundamental que, quando não compreendido, torna-se um grande obstáculo aos alunos mesmo depois, quando no Ensino Médio.

Todavia, a escolha dessas intervenções didáticas bem como o momento de aplicá-las em sala de aula deve ser criteriosamente pensada e analisada pelo professor, uma vez que a história do desenvolvimento dos Números Inteiros acena que o homem superou tais obstáculos quando desapegou dos modelos concretos ligados ao cotidiano e adentrou em um novo universo formal e algébrico.

Sob esta perspectiva, nossa pesquisa tem por objetivo apresentar uma Proposta Metodológica pautada na Diversificação de Tarefas Matemáticas sobre Números Inteiros e aplicar em uma turma regular de sétimo ano, afim de verificar as contribuições desta Proposta para o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo, além de favorecer o trânsito entre os diferentes Registros de Representações Semióticas.

A partir deste objetivo, a questão que norteia este trabalho pode ser descrita nas seguintes palavras: quais são as contribuições da Diversificação de Tarefas que podem favorecer o acesso aos objetos matemáticos relacionados aos Números Inteiros? A partir desta indagação, podemos refletir os seguintes questionamentos: qual é a importância do trânsito entre os diversos Registros de Representações Semióticas para a aprendizagem em Matemática? Esta Proposta Metodológica poderá superar os obstáculos epistemológicos e didáticos citados na História dos Números Inteiros? Quais mudanças esta proposta causará na postura dos alunos quanto ao modo pela busca de conhecimentos? Como os alunos passarão a compreender a importância do erro em Matemática?

Nossa pesquisa foi desenvolvida em seis capítulos além desta introdução. No capítulo 2 tratamos essencialmente dos Números Negativos e a trajetória histórica que os levou a ser reconhecidos hoje como um conjunto, denominado Inteiros. Apresentamos o cenário deste conteúdo nos documentos oficiais que regimentam seu ensino nas escolas, para então construirmos formalmente este conjunto por meio das estruturas formais e necessárias a qualquer docente para um ensino mais fundamentado e seguro.

No capítulo 3 apresentamos os alicerces teóricos que fundamentam nossa pesquisa em sala de aula e norteiam as propostas metodológicas utilizadas. Apresentamos a perspectiva teórica que diferencia Atividades de Tarefas no ensino da Matemática, proposta por Ponte (2005, 2006, 2014) que, explicitamente sugere a necessidade da diversificação dos registros em Matemática. Para isso, nos aprofundamos na Teoria dos Registros de Representações Semióticas em Matemática, proposta por Duval (1993, 2003). Por fim, apresentamos a justificativa do uso de Jogos em Matemática enquanto uma Tarefa que propicia uma grande diversidade de registros e saberes matemáticos.

No capítulo 4 apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa, seguido do capítulo 5, onde apresentamos a proposta metodológica sobre o ensino dos Números Inteiros para o sétimo ano do Ensino Fundamental.

No capítulo 6 discutimos quais foram as contribuições para o ensino e aprendizagem do conteúdo Números Inteiros, que a sequência didático-metodológica por meio de Tarefas e Registros de Representações Semióticas trouxe a essa turma que participou da pesquisa, além de tabular os dados coletados durante a aplicação da sequência para concretizar nosso trabalho.

Por fim, no capítulo 7 tecemos considerações, que no momento são finais, acerca do desenvolvimento desta pesquisa, apresentando uma visão geral para os professores que se habilitem a aplicar tal sequência.

## 2 NÚMEROS INTEIROS

A inserção de situações contextualizadas, materiais manipuláveis e jogos, quando combinadas ao uso da linguagem matemática, viabilizam um trabalho didático que pode contribuir para a superação dos obstáculos epistemológicos, quando esclarece escolhas realizadas ao longo do trajeto de construção do conhecimento matemático.

Neste sentido, faz-se presente a História desta Ciência que, além de nortear o desenvolvimento de todo o conhecimento, traça um caminho sobre os diversos modos que o homem utilizou num determinado período para representar os objetos inacessíveis da Matemática. A evolução e aceitação dos Números Negativos não foi diferente até chegar no que hoje chamamos de Conjunto dos Inteiros.

Neste capítulo, portanto, apresentamos alguns aspectos históricos no desenvolvimento deste conjunto numérico, que consideramos importantes ressaltar, no sentido de compreendermos algumas possíveis dificuldades dos alunos na aprendizagem deste conceito, ao mesmo tempo em que podem auxiliar na organização da proposta metodológica, objeto desta pesquisa. Além disso, discutimos algumas ideias sobre o ensino dos Números Negativos e no final apresentamos as ideias matemáticas com maior formalismo sobre este objeto matemático.

### 2.1 UM OLHAR HISTÓRICO SOBRE OS NÚMEROS INTEIROS

O conceito e compreensão dos números, os símbolos operatórios, bem como o significado dos símbolos ocupam um lugar de destaque na Matemática escolar. Os povos das antigas civilizações desenvolveram os primeiros conhecimentos que vieram compor a Matemática conhecida hoje. Ponte (2006) destaca que

desenvolver o sentido de número, ou seja, adquirir uma noção global de número e das operações e usá-las de modo flexível para analisar situações e desenvolver estratégias úteis para lidar com os números e operações é um objetivo central da aprendizagem da matemática (PONTE, 2006, p. 55).

Todavia, os símbolos que usamos hoje na Matemática nem sempre foram assim, pois sofreram muitas mudanças visuais e adaptações de significados durante a história, a fim de melhorar e simplificar seu uso nas operações. “Há menções na história da Matemática de que os babilônios, por volta de 2000 a.C., acumulavam registros do que hoje podem ser classificados como álgebra elementar” (DCE, 2008, p. 38).

As quantidades negativas estão presentes a muitos anos na história da Matemática, muito embora a sua aceitação não foi imediata e direta. Esses números ditos problemáticos já apareciam na resolução de equações em práticas antigas. Antes do século XIX, os números negativos recebiam a designação de quantidades falsas, fictícias, impossíveis ou imaginárias, devido a dificuldade de admitir sua existência e até mesmo não eram admitidos como números. Esta dificuldade se traduz na associação dos números à geometria.

De acordo com Eves, já existia certo simbolismo na álgebra egípcia, pois

no papiro Rhind encontram-se símbolos para mais e menos. O primeiro deles representa um par de pernas caminhando da esquerda para a direita, o sentido normal da escrita egípcia, e o outro representa um par de pernas caminhando da direita para a esquerda, em sentido contrário à escrita egípcia. (Eves, 2004, p. 74).

Contudo, “estes foram os primeiros registros da humanidade a respeito de ideias que se originaram das configurações físicas e geométricas, da comparação das formas, tamanhos e quantidades” (DCE, 2008, p. 38). Com o advento da agricultura, o homem passou a fixar moradia em terras férteis, além de desenvolver outros ofícios (cerâmica, carpintaria e tecelagem). Com isso, desenvolveu o senso de contagem expresso em registros numéricos por agrupamentos, entalhes em madeira, nós em cordas, entre outros métodos que favoreceram o surgimento de símbolos especiais para a contagem e a escrita.

No entanto, o símbolo utilizado hoje para representar a operação de subtração, bem como simbolizar quantidades negativas, não aparecia explicitamente nas escritas antigas, até porque não se tinha noção destes conhecimentos matemáticos.

O desenvolvimento desta noção demorou a se concretizar e enfrentou muitos preconceitos no decorrer da história dos números negativos e suas operações. Notoriamente, a ideia de números negativos e suas operações começam a se desenvolver de maneira mais significativa a partir do século XV.

O matemático Khayyam (séc. XI), por exemplo, necessitava considerar quatorze casos diferentes de equações cúbicas ao alegar ser o primeiro matemático a resolver vários tipos delas, tendo raízes positivas. O fato é que ele não admitia coeficientes com números negativos nas equações cúbicas.

Embora já se conhecesse a ideia da operação subtração e os símbolos que a representavam, não se tinha clareza das quantidades negativas. Soluções negativas

eram constantemente descartadas e por muitas vezes traduzidas como grandezas falsas, fictícias. Essas soluções estavam intimamente ligadas à resolução de equações.

No século VII, Brahmagupta introduziu o termo números negativos e até desenvolveu uma regra satisfatória para a obtenção de duas raízes de uma equação quadrática, mesmo nos casos em que uma delas fosse negativa (Eves, 2004).

Segundo Eves (2004), os Árabes reconheceram a existência dessas duas soluções para as equações quadráticas – algo nunca feito por Euclides ou pelos Babilônicos – porém, consideravam somente a solução positiva. Eles não perceberam a real existência da solução negativa de uma equação.

Esse entendimento é de origem mais recente. De acordo com Eves (2004), nas obras de al-Khowârizmî e outras obras de álgebra Árabes, os números negativos são consistentemente evitados. A existência e a validade do negativo, bem como raízes positivas, foram afirmadas pela primeira vez pelo matemático Hindu Bhaskara, ainda no século VII. Os europeus admitiram esses números apenas nos séculos XVI ou XVII.

Os chineses apresentaram uso aceitável de números negativos durante a realização dos cálculos de matrizes, onde usavam barras vermelhas nas entradas da matriz para representar números negativos, enquanto que para os positivos eram brancos. Para o zero eram deixados espaços em branco. A ideia de número negativo estava familiarizada com autores chineses bem antes de sua aceitação na Europa, usando esquema de cores. Eves (2004) descreve que Li Ye (séc. XIII) deu uma original contribuição para a Matemática chinesa para indicar quantidades negativas com a notação do desenho de um traço diagonal até o último dígito do número em questão, a exemplo do número  $432$ .

Fibonacci (séc. XIII), acostumado com a Matemática árabe, onde na solução de uma equação quadrática se rejeitava os valores negativos, deu um passo à frente em seu livro *Flos*, quando interpretou um número negativo em um problema financeiro para significar uma perda em vez de um ganho.

O livro *Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita*, (final do séc. XV), conhecida apenas por *Summa*, de Luca Pacioli, uma compilação livre de muitas fontes, pretendia ser um sumário da aritmética, da álgebra e da geometria da época. Eves (2004) afirma que nele, a álgebra é sincopada, com o uso de abreviações

como  $p$  (de *piú*, que significa *mais*) para indicar adição,  $m$  (de *meno*, que significa *menos*) para indicar a subtração.

Depois da publicação de *Summa*, a álgebra fora negligenciada por dois séculos, sendo retomada intensamente na Itália, mas também com grande crescimento na Alemanha, Inglaterra e França. Com isso, Eves (2004) destaca que o primeiro registro dos símbolos  $+$  e  $-$  ocorreu numa aritmética de autoria de Johann Widman, publicada em Leipzig, no ano de 1489. Todavia, eles eram usados meramente para indicar excesso ou deficiência, e não com os significados operacionais de hoje.

François Viète (1540-1603) foi um dos precursores na utilização dos mesmos símbolos referindo-se à operações entre números. Porém, a operação de subtração só ocorria entre números verdadeiros, isto é, positivos. Contudo, Viète contribuiu para o amadurecimento dos números relativos, com a inserção de uma nova notação na Matemática que passou a ser abundantemente utilizada pelos matemáticos no futuro.

Acredita-se que o símbolo “ $+$ ” seja uma contração da palavra latina *et*, que era frequentemente usada para indicar adição, ao passo em que o símbolo “ $-$ ” decorra da abreviação de “ $\bar{m}$ ” para menos. Em 1514, o matemático holandês Vander Hoecke usou tais símbolos ( $+$  e  $-$ ) como símbolos de operações algébricas, muito embora seja provável que estes símbolos já tivessem sido usados antes com o mesmo significado, mas nunca antes publicado.

O símbolo anglo-americano da divisão  $\div$  apareceu impresso pela primeira vez numa álgebra de Johann Heinrich Rahn, no século XVII. Este símbolo tornou-se conhecido na Inglaterra alguns anos mais tarde quando esse trabalho foi traduzido, muito embora fora usado longamente no continente europeu para indicar uma subtração.

Diofanto também não compreendia a concepção de quantias negativas, afirmando que a subtração é uma operação. No problema 2 do livro V, ele relata que a equação  $4x + 20 = 4$  é absurda, pois a solução  $x = -4$  é uma solução impossível. Eves (2004) ressalta que Diofanto só admitia respostas entre números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com uma resposta apenas do problema. Em seus livros, nos problemas que se referem a encontrar números, estes devem ser racionais e positivos, instigando que se houvesse quantidades não positivas, então não eram números.

De acordo com Roque (2012), alguns matemáticos indianos, bem como Fibonacci, em épocas muito distintas, propunham interpretar um número negativo como uma perda, no lugar de ganho. Roque complementa que no século XV, o sinal “-” ainda não era um atributo do número, pois Nicolas Chuquet representava um número negativo como “ $0 - a$ ”, sendo ainda o sinal negativo reconhecido apenas como uma operação.

Nos séculos XV e XVI, os esforços para encontrar raízes de equações cúbicas não levavam em conta os coeficientes negativos, havendo uma classificação para cada modelo de equação. Girolamo Cardano publicou, em 1545, uma fórmula para resolver equações cúbicas, que aparentemente fora obtida de Tartáglia. De acordo com Roque (2012), ainda que os coeficientes devessem ser números positivos, Cardano chega a admitir soluções negativas para as equações, denominadas “raízes menos puras” ou “números fictícios”. Em sua obra *Ars Magna*, escritos de Cardano nos leva a crer que ele tinha algum conhecimento das regras de sinais de Descartes.

A terceira parte de *La géométrie*, livro de Rene Descartes, trata da resolução de equações de grau maior que dois, fazendo uso do que chamamos de regra de sinais de Descartes, cuja finalidade é determinar limites para o número de raízes positivas e o número de raízes negativas de um polinômio.

A resolução de equações expôs o problema dos números negativos que, muito embora surgissem no cálculo das soluções das equações, não possuíam uma teoria bem definida. Nas civilizações mais antigas, não se usavam números negativos no sentido próprio. Em alguns casos, eram efetuadas operações de subtração do número maior de um menor, porém a resposta negativa não era admitida.

Muito embora a natureza dos números negativos não estivesse clara neste período, os matemáticos investigavam as regras de operação com esses números. Mesmo dada a importância da utilidade prática dos números negativos nos cálculos, eles não eram considerados números verdadeiros, pois “os objetos que deviam ser admitidos na Matemática ainda se confundiam com as grandezas geométricas e, por esta razão, o sentido matemático de um número negativo não podia ser plenamente admitido” (Roque, 2012, p. 213).

Numa tentativa de atribuir sentido matemático aos números negativos, Bombelli chegou a enunciar, no século XVI que, por exemplo, se tivesse 15 unidades de moeda e devesse 20, pagando as 15 continuaria devendo 5, e assim representou como *p15 com m20 dá m5* (Roque, 2012).

Em 1629, Albert Girard afirmou que uma equação possui tantas soluções quanto o grau da quantidade de maior grau, conhecido hoje como o teorema fundamental da álgebra. Nesta perspectiva, para manter a validade do teorema, era necessário admitir como válida as soluções que ele chamava de impossíveis. Mais tarde, Descartes reafirma a validade do teorema e coloca que pode acontecer que algumas destas raízes sejam falsas ou menos que nada, ou seja, exprime que algumas raízes podem ser negativas.

De acordo com Glaeser (1985), o matemático belga Simon Stevin (1548 - 1620) contribuiu para o processo de incorporação dos números negativos no meio acadêmico quando aceitou esse tipo de número como raízes e coeficientes de equações com o uso da proposição de que as raízes negativas das equações são as raízes positivas da equação obtida pela substituição de  $x$  por  $(-x)$ . Por exemplo, se  $-2$  for raiz de uma equação  $x^2 - px = q$ , então  $+2$  é raiz de  $-x^2 + px = -q$ .

Além disso, Stevin admitiu a adição de  $x + (-y)$  em lugar de considerar a subtração de  $y$  de  $x$ . Também justificou geometricamente a regra da multiplicação de números negativos proposta por Diofanto no século III, utilizando uso da identidade algébrica:  $(a - b) \cdot (c - d) = ac - bc - ad + bd$ .

A critério de exemplificação, Diofanto desenhou um retângulo de lados  $a$  e  $c$ , dividiu geometricamente para obter o retângulo  $b$  e  $d$  e propôs o cálculo de área do retângulo destacado, cujos lados medem  $(a - b)$  e  $(c - d)$ . Para evitar a multiplicação de parcelas negativas, obteve a área por meio de subtração de áreas conhecidas. A figura abaixo exemplifica a ideia de Diofanto:

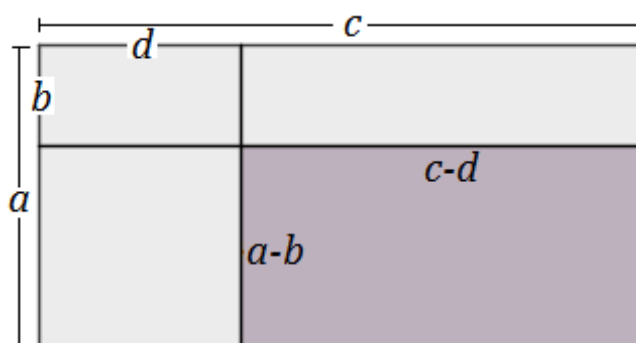


Figura 1: Retângulo utilizado por Diofanto  
Fonte: o autor

Assim, para calcular a área da região destacada, calcula-se a área  $ac$  do retângulo maior e destes retira as áreas  $bc$  e  $ad$  dos retângulos laterais. Após adiciona a área  $bd$  do retângulo menor, pois esta região foi retirada duas vezes.



Este cálculo de área demonstra geometricamente o desenvolvimento do produto de  $(a - b) \cdot (c - d)$ , que é a área do retângulo requerido. Com isso, Diofanto mostrou à comunidade acadêmica que o produto de negativos deveria ser positivo, propondo assim a aceitação de tal fato devido a identidade da área.

Ao final do século XVII, Colin MacLaurin (1698-1746) chegou próximo de compreender as quantidades negativas ao afirmar a real existência de um número negativo tanto quanto um número positivo, quando tomado como o oposto de um positivo em relação à origem.

Já no século XVIII, a busca pelo rigor matemático gerou críticas a fundamentação de noções básicas da Matemática sobre a ideia de quantidade. A discussão sobre as quantidades negativas mostrava que era necessário migrar para um novo conceito abstrato de número, agora não mais subordinado a ideia de quantidade, em que somente os números absolutos eram aceitos em função de se relacionar com a realidade.

Deste período em diante, diferentes representações geométricas começam a ser sugeridas para os números negativos na tentativa de garantir sua aceitação no universo dos números. De acordo com Roque (2012, p. 320), “Argand principia com as quantidades negativas, uma vez que elas não podiam ser rejeitadas, sob o risco de termos que questionar diversos resultados algébricos importantes”.

Para melhor explicar e assegurar a existência dos números negativos, Argand faz analogia com uma balança de pratos, onde se toma as grandezas  $a, 2a, 3a, 4a$ , e assim sucessivamente, e as coloca em um prato da balança denominado prato A, fazendo com que este fique pendido em relação ao prato B.

Depois, subtrai-se uma quantidade  $a$  de cada vez deste prato A, afim de reestabelecer o equilíbrio. Chegará um momento que sobrar zero no prato A e, Argand questiona a possibilidade de continuar o processo de retirada, pois não há mais o que retirar do prato A. Logo, ele justifica que é possível continuar o processo, agora acrescentando as grandezas no prato B, ou seja, (Roque, 2012, p. 320) introduz-se aqui uma noção relativa de que o termo retirar do prato A significa acrescentar ao prato B. Deste modo, as quantidades negativas puderam deixar de ser “imaginárias” para se tornar “relativas”.

Roque relata que

a representação proposta por Argand permite atribuir um sentido às operações com números negativos como, por exemplo, à multiplicação por  $-1$ , que passa a ser vista como uma reflexão em relação à origem. Isto possibilita entender mais facilmente porque  $-1 \times -1 = +1$ , pois basta observar que, após a reflexão de  $-1$  em relação à origem, obtém-se  $+1$  (ROQUE, 2012, p. 321).

Ao passo em que Argand introduz à reta numérica os números negativos, Gauss, defensor da abstração como característica essencial da Matemática, coloca que “os números negativos só podem ser compreendidos [...] quando entendemos que as ‘coisas contadas’ podem ser de espécies opostas de modo que a unidade de uma espécie possa neutralizar a unidade de outra espécie (como  $+1$  e  $-1$ )” (Roque, 2012, p. 323).

Além disso, afirma que as coisas contadas não podem ser admitidas como substâncias ou objetos considerados em si mesmos, mas como relações entre esses objetos. Explica que esses objetos formam uma série e a relação existente entre o primeiro e o segundo possa ser igual a relação entre o segundo e o terceiro, e assim sucessivamente.

De acordo com Boyer (1996), Leonhard Euler foi um dos matemáticos de maior destaque nesta corrida para a descoberta dos números negativos, ao tratar com extrema naturalidade a manipulação de números negativos e complexos. Entretanto, Euler não conseguiu demonstrar ou justificar com satisfação a terceira regra, onde o produto de dois negativos resulta em um positivo, o que mostra que nem Euler apresentava conhecimentos suficientes para justificar estes resultados.

Já no início do século XIX, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) provoca discussões no que se refere aos sinais de adição e subtração quando tratados como operações ou como quantidades. Cauchy definiu, em um de seus artigos, leis de crescimento e diminuição enquanto operações, e quantidades negativas e positivas de acordo com sinal precedido do número. Apesar de cair em contradições, Cauchy define as regras de sinais.

Finalmente, Richard Dedekind (1831-1916), na transição do século XIX para o século XX, estabelece uma relação de equivalência entre pares de números naturais e faz referência da subtração como inversa da adição:  $a - b = c - d$ , logo  $a + d = c + b$ . Dedekind demonstrou que esta relação é de equivalência, e que o conjunto das classes de equivalência será o conjunto dos Números Inteiros, muito embora a legitimidade dos números negativos deve-se definitivamente a Hermann Hankel.

Em sua obra *Theorie der komplexen Zahlensysteme* (Teoria dos Números Complexos), publicada em 1867, Hankel amplia o conceito de número de modo mais claro e explícito, superando obstáculos persistentes na História da Matemática no que diz respeito a aceitação dos números negativos, muito embora esse não fosse o foco de sua obra.


Hankel abordou os Números Negativos justificando-os em nove axiomas, sendo quatro para a adição, quatro para a multiplicação e um para a distributiva da multiplicação em relação à adição. Esse fato histórico ocorreu quando Hankel abandonou os modelos associados à natureza e ao concreto e tratou dos negativos de modo formal.

Hoje, este conjunto está bem definido e aceito no meio acadêmico, embora ainda existam dificuldades de seu ensino na Educação Básica. O conjunto dos Números Inteiros é simbolizado por  $\mathbb{Z}$ , devido a palavra *Zahl* advinda do alemão, que significa Números, a exemplo do título da obra de Hankel citada anteriormente.

Contudo, fica evidente que o desenvolvimento, a aceitação dos números negativos e as operações relacionadas não foram simples e imediatos. A história revela um caminho cheio de rejeição e obstáculos, fatos que podem justificar as dificuldades – Obstáculos Epistemológicos – enfrentada pelos alunos em sala de aula ao estudar o conteúdo Números Negativos, que tradicionalmente se inicia no sétimo ano.

Logo, ao que se observa nas salas de aula, as dificuldades apresentadas pelos alunos e os erros injustificáveis que eles cometem podem ter sua origem explicada na História da construção dos Números Negativos. Esses erros se propagam sem ruptura e é perfeitamente aceitável quando comparamos o tempo de exposição deste conteúdo aos alunos com o tempo de desenvolvimento na história. A nós professores, resta a tentativa de amenizar os prejuízos causados pela História, a exemplo de Hankel: revolucionar a abordagem dos números negativos em sala de aula sob uma nova perspectiva, abandonando a ideia de associação estritamente com o concreto e uniformizar a apresentação formal desses números, de acordo com a capacidade cognitiva em relação a idade dos alunos.

Abaixo, apresentamos um quadro que sintetiza as principais evoluções dos símbolos utilizados ao longo da História para representar os Números Negativos no decorrer dos tempos. Todavia, os símbolos expostos têm sua origem em nossa interpretação, visto que a literatura pesquisada não traz representações gráficas:

SÍMBOLO	ORIGEM	Significado
Par de pernas andando 	Autor desconhecido. Apareceu no Papiro de Rhind, no Egito, cerca de 1650 a. C.	Para direita: Adição, quando colocado entre dois números. Para esquerda: Subtração, colocado entre dois números.
Barra vermelha sobre os números, nas entradas de uma matriz. $ 417 $	Autor desconhecido. Apareceu em escritos na China, no século XI.	Quando os números são colocados dentro do par de barras, tal número é negativo.
Traço diagonal desenhado sobre todos os dígitos de um número $7165$	Surgiu na China, utilizado oficialmente pelo matemático Li Ye, no século XIII.	Quando o número é traçado na diagonal, o número é negativo.
Símbolo $p$ (abreviação da palavra <i>piú</i> ) $5 p 8 \text{ igual } 13$	Utilizado oficialmente pelo matemático Luca Pacioli, em seu livro <i>Summa</i> , no século XV, na Itália.	O símbolo $p$ têm o significado de adição quando colocado entre dois números.
Símbolo $m$ (abreviação da palavra <i>meno</i> ) $13 m 8 \text{ igual } 5$	Utilizado oficialmente pelo matemático Luca Pacioli, em seu livro <i>Summa</i> , no século XV, na Itália.	O símbolo $m$ têm o significado de subtração quando colocado entre dois números.
Símbolo de adição e subtração usado atualmente, também chamado de símbolo de <i>mais</i> e de <i>menos</i> $+ e -$	Utilizado oficialmente na cidade de Leipzig, na Alemanha, pelo matemático Johann Widman, em 1489.	O matemático Johann Widman utilizou tais símbolos para representar excesso e falta, respectivamente.
Símbolo de adição e subtração usado atualmente, também chamado de símbolo de <i>mais</i> e de <i>menos</i> $+ e -$	Utilizado pelo matemático Vander Hoecke, em 1514, porém com significado diferente de Widman	O matemático Vander Hoecke utilizou tais símbolos para representar adição e subtração, respectivamente.
Símbolo anglo americano, que utilizamos hoje para representar a operação de divisão $\div$	Utilizado pelo matemático Johann Heinrich Rahn, no século XVII	Utilizado, sem sucesso para representar a operação de Subtração
Número recedido do zero seguido do símbolo de subtração $0 - 5$	Escrita utilizada pelo matemático Nicolas Chuquet, no século XV	Chuquet em recusa aos números negativos, precedia o zero do símbolo e do número, para representar uma quantidade negativa.
Símbolo $p$ e $m$ antes dos números $p15 \text{ com } m20 \text{ dá } m5$	O matemático Bombelli, já no século XVI, se utilizou da simbologia proposta por Luca Pacioli	Bombelli utilizou tal simbologia em equações, para representar número positivo e negativo.

**Quadro 1: Evolução dos símbolos matemáticos de adição e subtração**

Fonte: o autor

## 2.2 O ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS

O ato de ensinar nunca foi uma ação fácil, seja para pais, professores e outros profissionais que se dispunham a esta arte natural e necessária. Quando o tema traz um histórico conturbado de construção e aceitação ao longo de séculos, sua abordagem pode se constituir em um grande obstáculo didático tanto para o professor como para o aluno.

A construção dos Números Inteiros, que por décadas foram chamados de Números Relativos, não foi diferente. Aceitar quantidades negativas, algo menor que nada, gerou graves entraves que foram superados em um processo lento, mas que ainda hoje trazem uma série de obstáculos de difícil superação tanto por parte do aluno quanto por parte do professor. Não é difícil encontrar tais dificuldades em um nível mais avançado de escolaridade, como no Ensino Médio ou até mesmo em nível de graduação, considerando que sua primeira abordagem formal se dá no sétimo ano do Ensino Fundamental.

Deste modo, o professor deve estar preparado para transpor tais obstáculos, já que “um dos mais importantes objetivos da didática da Matemática é determinar os obstáculos que se opõem à compreensão e ao aprendizado dessa ciência” (GLAESER, 1985, p. 4). Ainda nas palavras deste autor, “muitos professores não percebem que a aprendizagem da regra dos sinais possa comportar dificuldades”.

É notável a verificação destes obstáculos presentes no ato de ensinar a regra de sinais quando de modo desconexo e direto, pois supõe-se que o aluno já tenha ultrapassado a fase de soma com números negativos e lhe seja apresentado a regra de sinais, para então poder operar com a multiplicação. Tão logo, o aluno aprende que “menos com menos” resulta em “mais”. Ora, então é natural e bastante frequente observar o aluno resolvendo um cálculo do tipo  $-2 - 3$  e atribuindo resultado  $+5$ , por assim “entender” a regra de sinais.

Neste sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que

para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos (BRASIL, 1998, p. 36).

Muitos autores, tais como Glaeser (1985), Bachelard (2005), Brasil (1998), D'Amore (2007), Moretti (2012), Ponte (2005, 2006, 2014), entre outros, apontaram,

ainda em décadas passadas, alguns obstáculos presentes no ensino e aprendizagem dos números negativos. Não obstante, ainda hoje esses obstáculos se perpetuam nas salas de aula, em grande parte devido ao formalismo que tal conteúdo exige no ato de ensinar, desde quando Hankel rejeitou a ideologia impregnada de que os objetos matemáticos devam ter uma estrita associação com objetos do cotidiano.

Entende-se assim que, tal como foi a construção dos Números Inteiros, alguns conteúdos matemáticos não apresentam associação direta com o concreto, com o real, e precisam ser tratados formalmente. Muitas vezes os professores tentam erroneamente contextualizar tais conteúdos com o cotidiano e não se atentam aos obstáculos didáticos e epistemológicos, tão menos em superá-los, transpor esses obstáculos já conhecidos.

“Essa transposição implica conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos e procedimentos para que o professor possa compreender melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos” (BRASIL, 1998, p. 36).

Não é consenso de que somente por meio de exemplos práticos e associação com o cotidiano, como o que podemos denominar de “modelo comercial” – no qual a ideia de ganho e lucro são associados às quantidades positivas, dívidas e prejuízos são associados às quantidades negativas – propiciam a melhor forma de ensinar.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que “[...] é preciso levar em conta que os alunos desenvolvem, já nas séries iniciais, uma noção intuitiva dos números negativos, que emergem de experiências práticas” (BRASIL, 1998, p. 98), advertindo logo em seguida que o estudo de tais números não pode limitar-se a esse aspecto, mas incorporar situações que favoreçam a compreensão de regras de cálculo com esses números.

A abstração formal é algo importante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, o que é possível ser colocado em prática já no início do Ensino Fundamental – Séries Finais, mais precisamente no 7º Ano, série na qual se introduz e desenvolve o conteúdo envolvendo os Números Inteiros e os negativos.

Neste sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais colocam que

o exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino (BRASIL, 1998, p. 26).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998, p. 97) destacam que “na escola o estudo dos números inteiros costuma ser cercado de dificuldades, e os resultados, no que se refere à sua aprendizagem ao longo do ensino fundamental, têm sido bastante insatisfatórios”. Além disso, destaca que o tratamento pedagógico deste conteúdo se enfatiza na memorização de regras para efetuar cálculos, geralmente descontextualizados, onde

uma decorrência dessa abordagem é que muitos alunos não chegam a reconhecer os inteiros como extensão dos naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não as conseguem aplicar adequadamente, por não terem desenvolvido uma maior compreensão do que seja o número inteiro. (BRASIL, 1998, p. 98)

Dada a importância da aplicação dos Números Inteiros nas séries subsequentes, faz-se de extrema importância ensinar de modo que os alunos realmente apreendam o conteúdo de maneira significativa, compreendendo o objeto matemático para não apenas decorar ou aprender regras para o uso destes números.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática ainda enfatizam que

ao desenvolver um tratamento exclusivamente formal no trabalho com os números inteiros, corre-se o risco de reduzir seu estudo a um formalismo vazio, que geralmente leva a equívocos e é facilmente esquecido. Assim, devem-se buscar situações que permitam aos alunos reconhecer alguns aspectos formais dos números inteiros a partir de experiências práticas e do conhecimento que possuem sobre os números naturais. (BRASIL, 1998, p. 100)

Desta forma, apresentar o objeto matemático em variadas Tarefas e representações poderá facilitar ao aluno a compreensão do mesmo, uma vez que se pode buscar o equilíbrio entre a proposição de situações que fujam do formalismo vazio e a não redução do conteúdo a uma gama de situações práticas que venham conduzir o processo de ensino e aprendizagem a obstáculos epistemológicos já experimentados antes.

Atualmente, há muitas sugestões didáticas em livros, artigos, dissertações e teses, entre outros materiais científicos (Glaeser: 1985, Brasil: 1998, Moretti: 2012), que visam apresentar e desenvolver o conteúdo de Números Inteiros e a inclusão dos Números Negativos na vida escolar dos alunos. Algumas destas sugestões são criticadas pela ineficiência, pois apresentam generalizações por meio de regras diretas sem a devida argumentação que possibilitaria a verdadeira aprendizagem do aluno, gerando muitas vezes obstáculos que são difíceis de serem transpostos.

Em contrapartida, Moretti (2012) apresenta alguns modelos didáticos que nos leva a acreditar numa melhor eficiência didática para o ensino dos Números Inteiros.

Em seu discurso, o autor evita o modelo comercial (lucros e dívidas) para o ensino das operações com negativos, propondo o que chamou de Princípio da Extensão, ou seja, desenvolver todo o conteúdo do objeto Números Inteiros por meio da reta numérica estendida a partir dos Naturais.

Estes modelos que se utilizam de associação com o concreto, com o real, por hora atendem satisfatoriamente o ensino da regra de sinais e suas operações no campo aditivo. Mas é na transposição dos mesmos conceitos para o campo multiplicativo que muitos erros são cometidos pelos alunos, quando Moretti (2012) destaca que

a regra do sinal para a multiplicação é artificial, pura invenção da mente humana. O Teorema Hankel faz cair por terra a ideia da existência de um bom modelo de explicação. Por exemplo, o modelo comercial pode se tornar um obstáculo à compreensão das propriedades multiplicativas (MORETTI, 2012, p. 703).

Um dos obstáculos que se nota com bastante frequência é a falta de sentido real quando se multiplicam dois números negativos e se obtém um resultado positivo. Não faz sentido multiplicar duas dívidas e obter um lucro. Outra situação se apresenta quando os alunos já são conhecedores das regras de sinais e, erroneamente, atribuem resultado +5 quando a expressão é  $-2 - 3$ , por exemplo. Isso ocorre devido o aluno tentar aplicar a regra de sinais na soma, um obstáculo didático criado a partir da regra de sinais para a multiplicação.

Contudo, abordar este conteúdo de maneira tradicional seria apenas mais uma metodologia com grandes possibilidades de não ser satisfatória, quando disponibilizamos de vários recursos em tempos modernos onde se exige o diferente, sem deixar de lado o formalismo que se faz necessário na construção desta ciência.

Moretti (2012) sugere que o desenvolvimento deste conteúdo, para uma melhor compreensão por parte do aluno, deva ocorrer em dois momentos, utilizando o princípio de prolongamento da reta numérica dos naturais, já citado nos Parâmetros Curriculares Nacionais, para desenvolver os problemas aditivos, e o princípio de extensão dos naturais apresentado por Hankel para os problemas multiplicativos, mostrando a preservação de resultados de acordo com a distributividade à direita e à esquerda e a regra de sinais usual.



## 2.3 FORMALISMO NOS INTEIROS

O conjunto dos Números Naturais, tradicionalmente simbolizado por  $\mathbb{N}$ , é o primeiro conjunto que aparece na História da Matemática de todas as civilizações.

Os números naturais formam um dos conceitos mais antigos conhecidos pelo ser humano. Entretanto, a sua evolução de uma noção intuitiva para um conceito mais elaborado foi muito lenta. Só no final do século *XIX*, quando os fundamentos de toda a Matemática foram questionados e intensamente repensados, é que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos, considerados mais primitivos (CATTAL, 2007, p. 6).

Todavia, o conjunto dos Números Inteiros, simbolizado por  $\mathbb{Z}$ , demorou a se desenvolver e se apresentar de modo formal. Assim, nesta seção serão tratados de forma axiomática os Números Inteiros, não nos atendo as questões de origem históricas ou conceitos da natureza dos números.

Há vários modos de construir e apresentar o conjunto dos Números Inteiros. Vamos construí-lo a partir da extensão dos Números Naturais por meio de classes de pares ordenados de Naturais. Para isso, trataremos das definições de Anéis, ou seja, apresentaremos os conceitos pertinentes a Anéis e mostraremos, em particular, que o conjunto dos Números Inteiros, em sua construção, é um Anel. Por fim, apresentaremos propriedades desse conjunto numérico.

Para efeito de construção dos Inteiros, adotaremos que o número zero pertence aos Naturais, por entendermos que a nível básico de escolarização, os livros didáticos apresentam o zero como sendo o primeiro elemento do Conjunto dos Naturais.

A elaboração desta seção, a qual trata da construção e formalização do conjunto dos Números Inteiros a partir do conjunto dos Números Naturais, foi fundamentada nos autores Monteiro (1968), Milies e Coelho (2001), e Lima (2007, 2008).

Apresentamos esta construção sob duas óticas, sendo uma como extensão do Conjunto dos Números Naturais, já que trataremos do Princípio de Extensão dos Naturais em nossa pesquisa, e outra de modo axiomático tradicionalmente encontrado nos livros de graduação.

### 2.3.1 Conjunto dos Números Naturais

O conjunto dos Números Naturais, que simbolizamos por  $\mathbb{N}$ , é caracterizado pelos seguintes fatos que aqui apresentamos.

Existe uma função injetiva  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . A imagem  $s(n)$  de cada número natural  $n \in \mathbb{N}$  chama-se o sucessor de  $n$ . Assim, todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural. Números diferentes têm sucessores diferentes.

Existe um único número natural, chamado de zero e simbolizado por  $0$ , tal que  $0 \neq s(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , isto é, o zero não é sucessor de nenhum outro natural.

Se um conjunto  $X \subset \mathbb{N}$  é tal que  $0 \in X$  e  $x \in X$ , onde  $s(x) \in X$  é o sucessor de  $x$ , então  $X = \mathbb{N}$ . Com efeito, se um conjunto de números naturais contém o número zero e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

Assim, partimos do pressuposto de que o conjunto dos Números Naturais poderá ser representado por  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ .

A introdução e aceitação do número zero não foi imediato na História da Matemática, por se tratar de um número abstrato, o qual não podemos mostrar, mas devemos convencer que existe.

As três propriedades acima derivam dos axiomas de Peano, embora alguns autores, por questão de conveniência, não adotem o zero como número natural. Por uma questão de convenção aos livros didáticos do ensino básico, consideraremos o zero como elemento pertencente ao conjunto dos Naturais.

### 2.3.2 Anéis

Um conjunto  $A$  é dito Anel quando em  $A$  estão definidas duas operações  $(x, y) \rightarrow x + y$  e  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$  aos pares de elementos de  $A$  em  $A$ . Seja  $A$  um conjunto não vazio com duas operações internas que devem satisfazer as seguintes condições:

1. Para todo  $x$  e  $y \in A$  vale a *comutatividade* da soma, ou seja,

$$x + y = y + x;$$

2. Para todo  $x$  e  $y \in A$  vale a *associatividade* da soma, isto é,

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

3. Existe um elemento  $e \in A$  de modo que  $x + e = x$ . Tal elemento é chamado de *neutro*, onde  $e = 0_A$ ;

4. Para todo elemento  $x \in A$  existe  $y$  em  $A$  tal que  $x + y = 0$ . Logo,  $y = -x$ , e é chamado de *simétrico* de  $x$ ;

5. Para todo  $x, y, z \in A$  vale a *associatividade da multiplicação*, onde

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$$

6. Para todo  $x, y, z \in A$  vale a *distributividade da multiplicação à direita e à esquerda*, onde

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x;$$

Observe que a operação multiplicação não necessariamente deve ser comutativa. Todavia, se isto ocorrer, o conjunto  $A$  será denominado *anel comutativo*.

Além disso, um anel não necessita ter elemento neutro da multiplicação, ou seja, um elemento  $y$  tal que  $x \cdot y = x$ , para todo  $x \in A$ . Quando houver, este elemento é chamado de unidade do anel e denotado por 1. Quando o anel  $A$  possui o elemento neutro multiplicativo, é chamado de *anel com unidade*.

Nota-se que os elementos não nulos de um anel não necessitam ter inversos multiplicativos, ou seja,  $y$  é inverso multiplicativo de  $x$  se e somente se

$$x \cdot y = y \cdot x = 1.$$

Os elementos de um anel  $A$  que possuem inverso multiplicativo são chamados de *invertíveis de  $A$*  ou *unidades de  $A$* .

Veremos agora a construção dos Números Inteiros a partir da extensão dos Números Naturais, em consonância com o conceito de Anéis.

### 2.3.3 Construção dos Números Inteiros

Para construir o conjunto dos Números Inteiros, vamos adotar a estratégia de equivalência a partir do conjunto dos números naturais.

Assim, consideremos o conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{N}\}$  de todos os pares ordenados de números naturais. Neste conjunto, utilizaremos uma relação simbolizada por  $\equiv$ , do seguinte modo:

#### *Definição 1*

Dados dois elementos  $(a, b)$  e  $(c, d)$  do conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , diremos que

$$(a, b) \equiv (c, d), \text{ se e somente se, } a + d = b + c.$$

Por exemplo,  $(2, 7) \equiv (5, 10)$  , pois  $2 + 10 = 7 + 5$ . Do mesmo modo que  $(1, 4) \equiv (5, 8)$ , pois  $1 + 8 = 4 + 5$ .

### Proposição 1

A relação definida anteriormente é uma relação de equivalência, isto é, uma relação binária entre elementos de um dado conjunto que satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

Agora consideraremos o conjunto quociente, ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência definidas por esta relação. Denotaremos a classe do par  $(a, b)$  pelo símbolo  $\overline{(a, b)}$ , onde teremos que

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; (x, y) \equiv (a, b)\}$$

### Definição 2

Denotaremos por  $\mathbb{Z}$  o conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , e chamaremos de números inteiros os elementos desse conjunto. No que segue, introduziremos operações neste conjunto.

### Definição 3

Sejam  $\alpha = \overline{(a, b)}$  e  $\beta = \overline{(c, d)}$  elementos de  $\mathbb{Z}$ . Definimos a soma de  $\alpha$  e  $\beta$  por:  $\alpha + \beta = \overline{(a + c, b + d)}$ . Logo, vamos mostrar que a soma está bem definida, independente dos representantes escolhidos.

### Lema 1

Se  $\overline{(a, b)} = \overline{(a', b')}$  e  $\overline{(c, d)} = \overline{(c', d')}$  são números inteiros. Então

$$\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a' + c', b' + d')}$$

*Demonstração:* por hipótese, das igualdades temos que:

$$a + b' = a' + b$$

$$c + d' = c' + d$$

Logo, somando membro a membro das duas igualdades, temos que:

$$(a + c) + (b' + d') = (a' + c') + (b + d)$$

De onde segue pela definição 1 que

$$\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(a' + c', b' + d')}$$

■

### Proposição 2

A soma em  $\mathbb{Z}$  tem as seguintes propriedades:

(i) *Associativa:* Para toda terna  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ , tem-se que

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

(ii) *Existência de Neutro*: Existe um único elemento, denotado por  $0 \in \mathbb{Z}$ , tal que

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{Z}.$$

(iii) *Existência do Oposto*: para cada inteiro  $\alpha$  existe um único elemento, que chamaremos de oposto e denotaremos por  $-\alpha$  tal que

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0.$$

(iv) *Comutatividade*: para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ , tem-se que

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Notemos que o elemento neutro da soma é  $\overline{(0,0)}$ , que também pode ser representado como  $\overline{(a,a)}$ , para qualquer  $a \in \mathbb{Z}$ . Outra observação importante é que dado  $\alpha = \overline{(a,b)}$ , então  $-\alpha = \overline{(b,a)}$

#### Definição 4

Sejam  $\alpha = \overline{(a,b)}$  e  $\beta = \overline{(c,d)}$  números inteiros. Definimos o produto de  $\alpha$  por  $\beta$  por

$$\alpha \cdot \beta = \overline{(ac + bd, ad + bc)}.$$

#### Lema 2

Sejam  $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$  e  $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$  números inteiros. Então,

$$\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')}.$$

*Demonstração*: faremos a demonstração em duas etapas:

Afirmamos primeiro que

$$\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)}.$$

Para provar esta afirmação, notemos que, da hipótese temos:

$$a + b' = a' + b$$

Multiplicando toda a equação por  $c$ , obtemos:

$$ac + b'c = a'c + bc$$

E multiplicando a mesma equação por  $d$ , e trocando os membros, obtemos:

$$bd + a'd = ad + b'd$$

Somando as duas equações obtidas, resulta em:

$$ac + bd + a'd + b'c = ad + bc + a'c + b'd$$

donde

$$\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)},$$

o que prova a primeira afirmação.

Afirmamos agora que

$$\overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)} = \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')}.$$

Novamente, da hipótese, temos que

$$c + d' = c' + d$$

Multiplicando essa equação por  $b'$ , obtemos:

$$b'c + b'd' = b'c' + b'd$$

Agora multiplicando a mesma equação por  $a'$  e trocando a posição dos membros, obtemos

$$a'c' + a'd = a'c + a'd'$$

Somando as duas equações obtidas pela multiplicação, resulta em

$$a'c' + b'd' + a'd + b'c = b'd' + a'd' + b'd + a'c$$

Donde

$$\overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)} = \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')},$$

Agora, a partir das duas afirmações que foram mostradas:

$$\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)} \text{ e}$$

$$\overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)} = \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')}.$$

Temos por transitividade que:

$$\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')},$$

demonstrando o resultado que queríamos! ■

### Proposição 3

A multiplicação em  $\mathbb{Z}$  tem as seguintes propriedades:

(i) Associativa: Para toda terna  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ , tem-se que

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

(ii) Existência de Neutro: Existe um único elemento, denotado por  $1 \in \mathbb{Z}$ , tal que

$$1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Cancelativa: Para toda terna  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ , com  $\gamma \neq 0$ , se  $\alpha\gamma = \beta\gamma$ , então  $\alpha = \beta$ .

(iv) Comutativa: para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ , tem-se que

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

(v) Distributiva: Para toda terna  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ , tem-se que

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Observação: notemos que  $1 = \overline{(1,0)} = \overline{(a, a-1)}$ .

### Definição 5

Dados os números inteiros  $\alpha = \overline{(a, b)}$  e  $\beta = \overline{(c, d)}$ , diremos que  $\alpha$  é menor ou igual a  $\beta$ , e escrevemos  $\alpha \leq \beta$  se  $a + d \leq b + c$ .

### Proposição 4

- (i) *Reflexiva*: Para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , tem-se que  $\alpha \leq \alpha$ .
- (ii) *Simétrica*: Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ , se  $\alpha \leq \beta$  e  $\beta \leq \alpha$ , então  $\alpha = \beta$ .
- (iii) *Transitiva*: Dados  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ , se  $\alpha \leq \beta$  e  $\beta \leq \gamma$ , então  $\alpha \leq \gamma$ .
- (iv) *Tricotomia*: Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ , tem-se que ou  $\alpha < \beta$ , ou  $\beta < \alpha$ , ou  $\alpha = \beta$ .
- (v) Dados  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ , se  $\alpha \leq \beta$ , então  $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ .
- (vi) Dados  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ , se  $\alpha \leq \beta$  e  $0 \leq \gamma$ , então  $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ .

Um inteiro  $\alpha = \overline{(a, b)}$  diz-se positivo se  $a > b$  e diz-se negativo se  $a < b$ . Note que  $\alpha$  é positivo se e somente se  $a > b$  e negativo se e somente se  $b > a$ . Note ainda que os inteiros positivos podem ser representados na forma  $\alpha = \overline{(m, 0)}$ , em que  $m = a - b$ , e os negativos, na forma  $\alpha = \overline{(0, m)}$ , em que  $m = b - a$ . Também é notório que o conjunto dos inteiros não negativos é uma “cópia” dos Naturais, no sentido que se dá a seguir.

Seja  $\mathbb{Z}^+ = \{(a, 0) ; a \in \mathbb{N}\}$  o conjunto dos inteiros não negativos. Consideramos a função  $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+$  definida por

$$a \in \mathbb{N} \rightarrow \overline{(a, 0)} \in \mathbb{Z}^+.$$

O modelo apresentado anteriormente trata-se da construção dos Inteiros a partir de pares ordenados de números naturais, o qual tratamos algebricamente. Todavia, podemos apresentar os números Inteiros de outro modo, seguindo a teoria axiomática de conjuntos. Este modelo é tradicionalmente proposto em livros universitários de Cálculo.

### 2.3.4 Modelo Axiomático dos Inteiros

Do modo que definimos o conjunto dos Números Naturais no início desta seção, temos que  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n ; n \in \mathbb{N}\}$ . Em acordo com a propriedade de anéis, podemos definir dois axiomas e uma propriedade que seguem:

*Axioma 1 (A existência do Elemento Neutro):*

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a + 0 = a \text{ e } a \cdot 1 = a.$$

*Axioma 2 (A existência do Oposto):* para cada  $a \in \mathbb{Z}$  existe um único oposto aditivo, denotado por  $-a$ , tal que

$$a + (-a) = 0.$$

*Propriedade 1 (Propriedade cancelativa para a multiplicação):*  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ , com  $a \neq 0$ , tem-se que

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c.$$

A partir dos axiomas e da propriedade acima, podemos enunciar as quatro proposições que seguem:

*Proposição 5 (Propriedade Cancelativa da Adição):* Sejam  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ , com  $a \neq 0$ , tem-se que

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c.$$

*Prova:* Se  $a + b = a + c$ , somando o elemento oposto de ambos os membros da igualdade, temos que

$$(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c).$$

Da propriedade associativa, temos

$$[(-a) + a] + b = [(-a) + a] + c.$$

Ou seja,  $0 + b = 0 + c$ , donde segue que  $b = c$ , como queríamos demonstrar! ■

*Proposição 6:* Para todo inteiro  $a$ , tem-se que  $a \cdot 0 = 0$ .

*Prova:* Como  $0 = 0 + 0$ , podemos multiplicar ambos os membros por  $a$ , e assim escrevendo  $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ .

Como  $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ , temos que  $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ , e pela propriedade cancelativa da adição, temos que  $a \cdot 0 = 0$ . ■

*Proposição 7:* Sejam  $a$  e  $b$  inteiros, tais que  $a \cdot b = 0$ . Então,  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

*Prova:* Se  $a \cdot b = 0$ , usando a proposição 2 podemos escrever essa igualdade na forma  $a \cdot b = a \cdot 0$ . Se  $a = 0$ , a proposição está demonstrada e, pelo contrário, podemos usar a propriedade 1 para cancelar e obtermos  $b = 0$ . ■

*Proposição 8 (Regra dos Sinais):* Sejam  $a$  e  $b$  inteiros. Então:

(i)  $-(-a) = a$



*Prova:* Note que o oposto de um elemento  $a$  é o único que verifica a equação  $a + x = 0$ . Deste modo,  $a$  verifica a equação  $(-a) + x = 0$ , implicando que  $a$  é o oposto de  $-a$ , que é indicado por  $-(-a)$ . ■

$$(ii) (-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$$

*Prova:* para a primeira igualdade, perceba que  $(-a) \cdot b$  é a solução da equação  $a \cdot b + x = 0$ , já que  $a \cdot b + (-a) \cdot b = [(-a) + a] \cdot b = 0 \cdot b = 0$ .

Analogamente, verifica-se que  $a \cdot b + a \cdot (-b) = 0$ . ■

$$(iii) (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

*Prova:* Observe que aplicando (ii) diretamente, temos que

$$(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)),$$

e logo por (i), segue que  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ . ■

Para todos os efeitos, definiremos em  $\mathbb{Z}$  a relação menor do que ou igual, simbolizada por  $\leq$ , a qual é uma relação de ordem e permite comparar seus elementos da seguinte forma:

*Definição 6 (Relação de Ordem em  $\mathbb{Z}$ ):* Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , dizemos que  $a$  é menor do que ou igual a  $b$ , simbolizado por  $a \leq b$ , se existe um inteiro não negativo  $c$  tal que  $b = a + c$ . Utilizamos também a notação  $b \geq a$ , onde se lê  $b$  maior do que ou igual a  $a$ , para representar  $a \leq b$ .

Com esta definição, podemos reescrever a seguinte proposição válida nos Inteiros, a qual já enunciamos anteriormente:

#### *Proposição 9*

(i) A relação menor do que ou igual é *reflexiva*:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \text{ tem-se } a \leq a$$

(ii) A relação menor do que ou igual é *anti-simétrica*:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \text{ se } a \leq b \text{ e } b \leq a, \text{ então } a = b.$$

(iii) A relação menor do que ou igual é *transitiva*:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{ se } a \leq b \text{ e } b \leq c, \text{ então } a \leq c.$$

(iv) A adição é compatível e cancelativa com respeito à relação menor do que ou igual:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a \leq b \text{ se, e somente se, } a + c \leq b + c.$$

(v) A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à relação menor do que ou igual:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a \leq b, c \geq 0 \text{ se, e somente se, } a \cdot c \leq b \cdot c.$$

### Subtração em $\mathbb{Z}$

Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$ , com  $a \leq b$ , sabemos que existe um número inteiro não negativo  $c$  tal que  $b = a + c$ . Neste caso, definimos o número  $b$  menos  $a$ , denotado por  $b - a$ , como sendo o número  $c$ . Em símbolos, temos:

$$c = b - a \text{ se, e somente se, } b = a + c.$$

Dizemos que  $c$  é o resultado da subtração do  $a$  de  $b$ . Assim:

$$\begin{aligned} - : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto c := b - a \Leftrightarrow b = a + c. \end{aligned}$$

De outro modo, pela existência do simétrico aditivo, podemos definir em  $\mathbb{Z}$  a subtração, estabelecendo que  $a - b := a + (-b)$ , para todos  $a$  e  $b$  pertencentes a  $\mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} - : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto a - b := a + (-b). \end{aligned}$$

No universo dos números naturais, nem sempre existe a subtração de dois números, ou seja, existirá  $b - a$  quando  $a < b$ . No universo dos números inteiros não existe esta preocupação, pois toda subtração está definida em  $\mathbb{Z}$ .

Conforme as propriedades de Anéis que vimos ao início do capítulo, podemos afirmar que o conjunto dos Números Inteiros, quando munido da adição e da multiplicação usuais é um Anel *comutativo* e com *unidade*, porém não *invertível*.

### 3 APORTE TEÓRICO

É notável as adaptações e mudanças de significados que os símbolos matemáticos sofreram ao longo de seu desenvolvimento histórico, isto é, as representações matemáticas foram se adequando de acordo com a necessidade do homem.

Essas diversas representações que existem hoje para cada objeto matemático podem contribuir no aprendizado dos alunos, como também dificultar o aprendizado necessário acerca de um conteúdo.

Em meio aos diversos fatores envolvidos no ato do ensino e aprendizagem, os quais estão muito além do domínio do professor, faz-se necessário que este seja um mediador dos conteúdos matemáticos por meio da diversificação de exemplos, tratamento das representações dos objetos matemáticos, inclusive as Tarefas que possam colocar o aluno em Atividade mental.

Sobre estes diversos modos de representar o mesmo objeto, bem como o processo cognitivo existente na transição de uma representação a outra, o francês Raymond Duval<sup>2</sup> propõe a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, na qual o sujeito deve recorrer à representação dos objetos abstratos da Matemática a fim de apropriar-se deles.

Em sua teoria, Duval (1993, 2003) destaca a importância das Tarefas em sala de aula. Para isto, Ponte (2014) faz a necessária diferenciação de Atividades e Tarefas em Matemática, bem como a importância de cada uma delas no ato de ensinar.

Duval (2003) também evidencia os obstáculos epistemológicos existentes no ato de ensinar. Para Bachelard (2005), são dificuldades que os matemáticos sentiram ao longo do desenvolvimento histórico desta ciência. Tais dificuldades residem na própria natureza do conhecimento matemático e não podem ser evitados, além de que continuam arraigados nas salas de aula, seja pela origem histórica do conhecimento científico ou pelo método didático utilizado pelo professor.

O professor precisa tomar consciência de que as adaptações no processo de ensino são constantemente necessárias assim como foram as adaptações no próprio desenvolvimento da Matemática. As constantes mudanças na sociedade alavancam

---

<sup>2</sup> Raymond Duval é psicólogo e filósofo de formação e investiga sobre a aprendizagem matemática. Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Cote d'Opale, França.

nosso trabalho a fim de apresentar alternativas pertinentes ao professor na tentativa de melhorar o ensino da Matemática.

Tendo estas perspectivas como encaminhamento para a organização da proposta metodológica para o objeto matemático Números Inteiros, trataremos neste capítulo sobre os principais fundamentos que sustentam a teoria das Tarefas de Ponte (2005, 2014), a teoria dos Registros das Representações Semióticas (RRS) de Duval (1996, 2006) e a teoria dos Obstáculos Epistemológicos de Brousseau (1976).

### 3.1 AS TAREFAS E O ENSINO DE MATEMÁTICA

Atividade e Tarefa são elementos constantemente confundidos em livros escolares de Matemática e até mesmo por parte dos professores desta disciplina. Ponte (2014) afirma que

o ensino da Matemática baseado na exposição magistral do professor não pode mostrar muito interesse na noção de tarefa. Em contrapartida, o ensino que valoriza o papel ativo do aluno na aprendizagem precisa de forma fundamental desta noção, uma vez que as tarefas são o elemento organizador da atividade de quem aprende. Note-se, no entanto, que as tarefas podem desempenhar uma variedade de papéis (PONTE, 2014, p. 14).

As Tarefas no Ensino de Matemática, constantemente confundidas como a repetição mecânica de exercícios e que, por muito tempo foi evitada tal terminologia na Educação Matemática, mostram-se de grande importância ao professor que pretenda colocar os alunos em Atividade mental, quando são devidamente variadas e planejadas para tal objetivo.

Atividade e Tarefa são conceitos básicos e diferentes. A Atividade requer um sistema de ações e pode incluir a execução de diversas Tarefas, podendo ser ela física ou mental. A Atividade diz respeito ao aluno em sua essência e refere-se às ações num dado contexto.

Por outro lado, a Tarefa refere-se ao objetivo de cada uma das ações em que a Atividade se desdobra, sendo externa ao aluno. Então, compete ao professor, em grande parte, propor as Tarefas aos alunos afim de colocá-los em Atividade.

Embora Ponte (2014) destaque a importância da Atividade nos processos cognitivos, a Tarefa representa

o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). Na verdade, as tarefas são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade) (PONTE, 2014, p. 15).

A proposta de Tarefas e a condução de sua resolução, ao nosso ver, constituem a principal forma de ensinar Matemática na sala de aula. A Tarefa torna-se o objeto da Atividade dos alunos e sua proposta em conjunto com as ações pertinentes a ela constitui o principal método pelo qual se espera que a Matemática seja ensinada e aprendida.

Neste sentido, Ponte (2014) destaca existirem

tarefas cuja principal finalidade é apoiar a aprendizagem, outras que servem para verificar o que aluno aprendeu (tarefas para avaliação), outras, ainda, que servem para compreender de modo aprofundado as capacidades, processos de pensamento e dificuldades dos alunos (tarefas para investigação) (PONTE, 2014, p. 14).

Como o autor destaca existirem Tarefas com finalidades diversas, o professor pode propô-las afim de contemplar cada finalidade, ou um grupo delas, no momento oportuno de suas aulas. Deste modo, há Tarefas de alto grau cognitivo que exigirão maior mobilização por parte do aluno, ao passo em que há Tarefas de menor grau cognitivo, que muitas vezes são exercícios de repetição e execução de passos.

Todavia, entende-se que toda Tarefa tenha seu valor e seu objetivo. Não podemos menosprezar um modelo de Tarefa a exaltar outro. Tarefas nos modelos mecânicos e repetitivos tem seu objetivo no processo de ensino e aprendizagem, assim como não é ideal trabalhar um ano todo com Tarefas de investigação.

Assim, não nos resta dúvidas sobre a necessidade de que, ao professor mediador e reflexivo, compete a organização e planejamento de uma sucessão de Tarefas com objetivos específicos bem delineados, os quais, sequencialmente, possam conduzir o aluno ao conhecimento significativo de um conteúdo matemático.

Deste modo, o autor resume que

as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Uma *tarefa* pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a *atividades* diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior (PONTE, 2014, p. 16).

Nesta perspectiva, durante a resolução de uma Tarefa, torna-se decisivo o modo como os alunos interpretam as representações indicadas nos enunciados e como criam e interpretam as suas próprias representações. Para isso, no decorrer desta pesquisa, vamos destacar a teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval e suas conexões com as Tarefas no ensino da Matemática.

Podemos inferir que as Atividades são estritamente neurais, devem partir do aluno, sendo interno a ele, uma vez que as Tarefas são externas, constituindo um conjunto de elementos concretos ou não, que partem como proposta do professor ao aluno, afim de colocar o aluno em atividade. Por esta razão, no ensino deve-se sempre pensar e possibilitar aos alunos boas Tarefas visando a diversificação das mesmas.

As *Tarefas* são os projetos, as questões, os problemas, as construções, os exercícios e tudo mais que o professor possa propor aos alunos objetivando envolvê-los em *Atividade*. Esta, por sua vez, pode incluir a execução de numerosas Tarefas, podendo ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz em determinado contexto. As Tarefas fornecem o contexto intelectual para que o aluno desenvolva o conhecimento matemático e entre em *Atividade*.

Para Ponte, há duas dimensões fundamentais das Tarefas: o grau de desafio matemático e o seu grau de estrutura, onde o autor expõe que

o grau de desafio matemático depende da percepção da dificuldade da questão, variando entre o “reduzido” e “elevado”. Por outro lado, o grau de estrutura varia entre os polos “aberto” e “fechado”. Numa tarefa fechada é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta comporta alguma indeterminação pelo menos num destes aspetos. (PONTE, 2014, p. 21).

De acordo com o exposto e cruzando as informações que classificam as Tarefas por meio das duas dimensões, obtêm-se os quatro tipos de Tarefa seguintes, de acordo com Ponte (2014):

- *Exercício* é uma Tarefa fechada e de desafio reduzido;
- *Problema* é uma Tarefa fechada e com desafio elevado;
- *Exploração* é uma Tarefa aberta e desafio reduzido;
- *Investigação* é uma Tarefa aberta com desafio elevado;

Todavia, não é clara a fronteira que separa os tipos de Tarefas apresentadas acima, ou seja, uma Tarefa que se apresente como exercício para um aluno pode, por hora, apresentar-se como problema para outro aluno, pois há muitas variáveis de conhecimento entre alunos. Além disso, entendemos que uma mesma Tarefa pode apresentar mais de uma tipologia em sua estrutura, isto é, o professor pode propor uma Tarefa com questões do tipo exercício, problema e exploração simultaneamente.

Deste modo, a tipologia da Tarefa está relacionada com o nível de conhecimento prévio do aluno frente à Tarefa. Este conhecimento prévio tem fundamental importância, pois mesmo que o aluno não seja ensinado anteriormente

para resolver uma Tarefa, ele terá condições de mobilizar conhecimentos aprendidos fora do contexto escolar, entrar em Atividade mental e dar cabo de sua solução.

Sendo assim, no planejamento de seu trabalho, o professor deve considerar habitualmente diversos tipos de Tarefa no sentido de ampliar as possibilidades de aprendizagens, visto que os alunos, em uma sala de aula regular, apresentam diferentes níveis de aptidões e conhecimentos matemáticos.

Ponte (2005, p. 26) destaca que essa diversificação é necessária, pois cada tipo de Tarefa desempenha o seu papel relativamente à aprendizagem. As Tarefas de natureza *mais fechada* (exercícios e problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático, este que se baseia em uma relação estreita e rigorosa entre dados e resultados. De outro modo, as Tarefas de natureza *mais acessíveis* (exercícios, explorações), possibilitam à maioria dos alunos certo grau de sucesso, contribuindo para a autoconfiança.

Além destas duas colocações apresentadas por Ponte (2005), há as Tarefas de natureza *mais desafiantes* (investigações e problemas), necessárias aos alunos para que estes tenham uma efetiva experiência matemática, e as Tarefas de cunho *mais aberto*, que são essenciais para o desenvolvimento de capacidades como a autonomia e administração de situações complexas.

As Tarefas organizadas pelo professor devem ir além de Tarefas isoladas, isto é, devem ser sequências devidamente organizadas para que possam atingir os objetivos previstos. Ponte (2005) evidencia que além da diversificação, faz-se importante que estas propiciem um percurso de aprendizagem coerente e que permita a construção dos conceitos, conhecimento das formas de representação e as conexões existentes. Assim, é necessário fazer escolhas e estabelecer percursos de ensino com Tarefas selecionadas cuidadosamente.

Para que isto ocorra, Ponte (2005) destaca quatro dimensões a se considerar durante a proposta de uma Tarefa, sendo elas: o grau de estruturação, o grau de desafio matemático, a relação com a realidade e a duração da realização. A variação das duas primeiras dimensões origina diferentes tipos de Tarefa, já mencionadas anteriormente.

Segundo Carvalho e Ponte (2014, p. 33), “as tarefas são o ponto de partida para a atividade matemática dos alunos e a sua realização na sala de aula deve ser sistemática, promover a reflexão e ser objeto de discussão e partilha”.

De tal modo, propiciar a diversificação de Tarefas com diferentes registros, em que o aluno possa transitar de um sistema de representação a outro, é uma necessidade ainda pouco presente nas salas de aula, em grande parte, acreditamos, pela falta de conhecimento dos professores de Matemática sobre tal assunto.

Para Ponte (2014, p. 23), “na resolução de uma Tarefa é decisivo o modo como os alunos interpretam as representações indicadas nos enunciados e como criam e interpretam as suas próprias representações”.

Esta conexão pode ser vista quando Ponte afirma que

em Matemática os objetos são abstrações que não existem no mundo real, só sendo possível pensar neles através de representações. No entanto, a relação entre a representação e o objeto não é biunívoca. Assim, um dado objeto matemático pode ter diversas representações. (Ponte, 2014, p. 23)

Não temos acesso aos objetos matemáticos, pois se tratam de entidades abstratas. Para manipulá-los, precisamos de representações, existindo várias delas para um mesmo objeto. Será na diversificação das Tarefas que emergirá o acesso as diversas representações, facilitando o ensino e aprendizagem da Matemática.

Por outro lado, uma mesma representação pode ter diversos significados de acordo com o contexto matemático em que esteja inserido. “Por isso, não podemos interpretar uma representação matemática a não ser num contexto bem determinado e à luz de um sistema de representação com as suas regras e significados” (PONTE, 2014, p. 23).

Carvalho e Ponte (2014) reafirmam que as Tarefas permitem o uso de diferentes representações dos números inteiros, além do desenvolvimento das mais variadas estratégias e formas de comunicação matemática, uma vez que os alunos têm de explicar e justificar os seus raciocínios e ser críticos face às explicações dos colegas.

As representações dos objetos matemáticos são essenciais em todos os quesitos para que esta ciência se desenvolva em sala de aula. Tão logo, faz-se necessário criar oportunidades para que os alunos se conectem com estas diversas formas de representações das ideias, transitando de uma forma à outra, a fim de estabelecer diferentes ideias matemáticas.

O professor tem a oportunidade de incentivar o uso das múltiplas representações quando planeja, escolhe ou cria Tarefas para a sala de aula. Não estamos nos referindo a Tarefas difíceis ou extensas, complexas ou de longa



duração, mas sim Tarefas com planejamento do ponto de vista das representações semióticas e com potencialidades diferentes como exposto anteriormente.

Uma Tarefa, mesmo que simples, mas bem planejada sobressai à uma Tarefa complexa sem planejamento. É neste sentido que acreditamos e apostamos: na diversificação de Tarefas nas propostas metodológicas para o Ensino da Matemática. Quando apresentamos Tarefas diferentes, com potencialidades diversas e níveis de dificuldades variados, temos a possibilidade de atingir um maior número de alunos e colocá-los em Atividade.

Deste modo, nossa pesquisa apresenta uma proposta metodológica para o ensino dos Números Inteiros, havendo uma diversificação das Tarefas e dos Registros de Representações Semióticas, afim de colocar os alunos em Atividade por meio dos diversos níveis de dificuldade. Entendemos que estas Tarefas podem ser desde os simples exercícios de repetição mecânica, que de certo modo têm sua validade, até as Tarefas investigativas ou lúdicas, as quais apresentam maior grau de dificuldade.

Nesta perspectiva, o jogo matemático apresenta-se como uma Tarefa de tal importância em nossa pesquisa que será de cunho avaliativo no processo de ensino e aprendizagem, visando modificar as estruturas tradicionais de avaliação, a qual coloca o aluno sob a pressão do sistema e da obtenção de nota, momento em que muitos deles não conseguem desenvolver e apresentar o conhecimento adquirido. Compreendemos que o jogo matemático é uma ferramenta que possibilita a correção imediata do erro e sem marcas profundas no inconsciente das pessoas, pois ocorre de modo simples e natural, espontâneo durante o momento lúdico.

### 3.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Ensinar Matemática não tem sido algo fácil aos professores e muitas vezes exigem-se manobras pedagógicas diferentes das tradicionais em sala de aula. Por outro lado, a compreensão das dificuldades enfrentadas pelos alunos não deve ficar restrita tão somente ao campo matemático e pedagógico. Visando o real funcionamento cognitivo do aluno, Duval propõe a importante teoria dos Registros de Representações Semióticas no que tange a complexidade da aprendizagem.

Representação Semiótica é “notação, signo ou conjunto de símbolos que representa (quer apresentar) algum aspecto do mundo externo ou de nossa imaginação, na ausência dela” (Eysenck; Keane, 1991, p. 202 apud Colombo 2010).

Neste contexto, faz-se necessário observar a História da Matemática para concluir que o desenvolvimento das Representações Semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. Colombo (2010, p. 106) destaca que o conhecimento humano é resultado das práticas sociais desenvolvidas pelo homem ao longo da sua história.

As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema, com significados e funcionamentos próprios que, segundo Colombo (2010) se caracteriza pela correspondência entre duas entidades, relacionada uma com a outra por um indivíduo que visa evocar os objetos representados, ainda que não estejam presentes.

Essa diversidade de signos (representações semióticas) utilizados para representar o conhecimento matemático é denominado por Duval como Registro de Representações Semióticas (RRS). Cabe ressaltar que o conhecimento matemático estritamente puro e científico, juntamente com o conjunto de Registros de Representações e seu tratamento, se difere do conhecimento matemático escolar.

Nesta perspectiva, Colombo (2010, p. 106) destaca que

os elementos que importam para a matemática escolar são aqueles relacionados ao desenvolvimento da aprendizagem como uma prática pedagógica que possibilita a compreensão dos objetos em estudo, a elaboração e construção de justificativas para que o aluno possa se apropriar dos significados dos objetos e utilizá-los de maneira coerente e conveniente na sua vida escolar e extraescolar.

A compreensão em Matemática e os bloqueios cognitivos e processuais experimentados pelos alunos concentram-se nos conceitos matemáticos e suas complexidades epistemológicas, podendo ser explicados pela história de suas descobertas.

A conversão de determinado sistema de registros de representações semióticas não garante a volta para o sistema anterior, isto é, se o aluno converteu registros escritos na linguagem materna para registros simbólicos numéricos, isto não garante que o aluno saiba converter os mesmos registros simbólico numéricos em registros escritos na linguagem materna.

Esse processo é de fundamental importância para que o aluno possa, de fato, compreender os objetos matemáticos que estão acessando por meio dos registros. A esse processo de conversão de um sistema a outro e o retorno, chamaremos de Conversão Bilateral em nossa pesquisa.

Assim, para a Matemática escolar e o processo de ensino e aprendizagem, Duval aponta a restrição de se usar um único Registro de Representação Semiótica para acessar um mesmo objeto matemático, visto que uma única via não garante a compreensão, tão pouco contribui para o processo de construção do conhecimento.

Deste modo, os bloqueios cognitivos e processuais apresentados pelos alunos tendem a aumentar cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida.

Essas mobilizações simultâneas e a conversão de registros são fundamentais na produção de conhecimento e na aprendizagem deste, pois realizam funções que abrangem diferentes aspectos, como o desenvolvimento das representações mentais, a realização de diferentes funções cognitivas e a produção de conhecimento.

De acordo com Colombo (2010), os variados tipos de escritura para os números, escrituras algébricas para expressar relações e operações, figuras geométricas, gráficos, diagramas, esquemas são exemplos de registros de representações semióticas, constituídos dentro de um sistema de representação com capacidades específicas para denotar ou descrever objetos, ações e relações entre objetos.

Ainda em consonância com Colombo, no que tange os conceitos de números inteiros, por exemplo, tem-se que

as informações que a representação da reta numérica fornece a respeito dos números inteiros [...] referem-se aos aspectos de simetria, valor absoluto, oposto de um número. Já o registro numérico permite a realização de cálculos específicos que só podem ser realizados por se tratar de uma representação discursiva (sistemas de escritas numéricas, algébricas, simbólicas). Assim, de um ponto de vista cognitivo, uma representação não é completa em relação ao objeto que representa e, portanto, de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados (COLOMBO, 2010, p. 120).

Duval deixa evidente a necessidade de mobilizar sistemas cognitivos específicos para cada atividade matemática, que está essencialmente ligada às operações matemáticas. Logo, a Matemática se constitui em um campo de estudos privilegiado para a análise de atividades cognitivas, que requerem regras de codificação próprias, já que cada registro apresenta limitações representativas específicas. Com isso, nota-se a necessidade da utilização de outros sistemas de expressão e de representação, além da linguagem natural e das imagens.

D'Amore explicita que

a Matemática possui uma linguagem específica (ou até mesmo, é uma linguagem específica); um dos objetivos principais de quem a ensina é o de fazer com que os alunos apreendam, não apenas entendam, mas também de que se apropriem dessa linguagem especializada. (D'Amore, 2007, p. 249)

Essas diferentes representações são constantemente requeridas por situações (Tarefas) diferentes. Colombo (2010, p. 107) esclarece que a importância das Tarefas no contexto curricular se dá em dois aspectos: o da natureza das Tarefas simultâneo à necessária diversificação e o da caracterização do objeto matemático em estudo a partir da realização das Tarefas.

Nesta perspectiva, Duval (2003, p. 14) aponta a existência de quatro tipos muito diferentes de registros, de acordo com a tabela:

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
<p>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS:</p> <p>Os tratamentos não são algoritmizáveis.</p>	<p>Língua natural</p> <p>Associações verbais (conceituais).</p> <p>Forma de raciocinar:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumentação a partir de observações, de crenças;</li> <li>• Dedução válida a partir de definições ou de teoremas;</li> </ul>	<p>Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Apreensão operatória e não somente perceptiva;</li> <li>• Construção com instrumentos.</li> </ul>
<p>REGISTROS MONOFUNCIONAIS:</p> <p>Os tratamentos são principalmente algoritmos.</p>	<p>Sistemas de escritas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Numéricas (binária, decimal, fracionária,...);</li> <li>• Algébricas;</li> <li>• Simbólicas (línguas formais);</li> <li>• Cálculo.</li> </ul>	<p>Gráficos cartesianos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mudanças de sistema de coordenadas;</li> <li>• Interpolação, extrapolação.</li> </ul>

**Quadro 2: Tipologia dos Registros proposta por Duval**

**Fonte: Duval (2003, p. 14)**

Tais representações podem ser de dois modos: internas, isto é, mentais, descrevendo a cognição do indivíduo, e emergem no decurso da atividade do indivíduo, nas suas interações com os contextos material e social; ou externas, as quais são as representações semióticas, constituídas por sistemas de signos criados pelo homem a fim de mediar as relações com o conhecimento e as coisas mundanas.

No que se refere aos modos de representações, Ponte (2014) reafirma que

as representações externas que um aluno produz são fáceis de observar mas o mesmo não se passa com as suas representações internas. No entanto, pode procurar-se interpretar as representações externas usadas pelo aluno no decurso da realização de uma tarefa para perceber a sua representação interna e o seu raciocínio (Ponte, 2014, p. 25).

Duval (1993) *apud* Colombo (2010) estabelece como operações fundamentais à compreensão da Matemática escolar o Tratamento e a Conversão, ressaltando a importância de se privilegiar as atividades que propiciem as operações de conversão entre os Registros de Representações Semióticas.

O Tratamento é a operação na qual se trabalha com registros do mesmo sistema semiótico, que possui um conjunto de regras específicas de tratamento e funcionamento, que não são necessariamente válidas para outros sistemas. Por exemplo, resolver uma expressão numérica com inteiros, onde se valem das operações e regras específicas, não havendo necessidade de outro sistema semiótico.

A Conversão é quando se opera com diferentes sistemas semióticos, são transformações que ocorrem entre registros diferentes. É preciso destacar que a operação tratamento é diferente e independente da operação conversão. Por exemplo, esboçar um gráfico de uma simples função, onde há a necessidade de converter registros algébricos em registros numéricos, seguidos de registros gráficos, podendo ser adicionado registros tabelados, entre outros. Ou ainda, resolver uma operação com números negativos se valendo da reta numérica, isto é, convertendo registros numéricos em registros gráficos, ressaltando o sentido usual dos números.

Tão importante quanto converter um sistema semiótico em outro, é desfazer a conversão dos registros, isto é, não privilegiar um caminho só de ida entre os registros requeridos. Segundo Colombo (2008), Duval ressalta que é no trânsito entre os diversos registros de representação que ocorre a aprendizagem significativa em Matemática.

Há vezes em que os bloqueios dos alunos aumentam cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida, pois Duval (2003, p. 20) expõe que geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido.

Acreditamos que o ensino e aprendizagem devem ser pautados na construção de conceitos, ocorrendo o enfrentamento de diversas situações novas, as quais propiciam novos esquemas, novas representações, elevando a possibilidade real de compreensão do objeto de estudos. Assim, por meio das várias situações postas para o desenvolvimento do ensino da Matemática escolar, distintas representações semióticas podem ser suscitadas e mais de um conceito pode estar envolvido.

Deste modo, Duval expõe que o sujeito deva aprender Matemática pela utilização das representações semióticas do objeto matemático, sendo necessário a mobilização de tais representações, ou seja, operar e converter instantaneamente tais representações, afim de ser mais econômico cognitivamente frente a um problema.

No que se refere ao objeto matemático, Duval esclarece que não se deve confundi-lo com sua representação. Duval (2003) complementa salientando que os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos.

Notavelmente, muitos professores fazem tal confusão, quando D'Amore (2007) coloca que

há o problema do simbolismo. Para muitos professores do primeiro ciclo da Escola Fundamental, existe identidade entre o conceito que se deseja ensinar, o seu símbolo matemático e suas referências algorítmicas. [...] Muitas vezes ouvi reclamações dos professores, acusando os alunos de não ter entendido o "conceito de divisão"; [...] ficou claro que não se tratava de conceito, mas de algoritmo. (D'Amore, 2007, p. 251)

De outro modo a exemplificar, os números são objetos matemáticos intangíveis, isto é, objetos abstratos que podem ser representados por diversos símbolos, tais como os símbolos hindu-arábicos, os símbolos romanos, entre outros que, em seu tratado e manipulação, vêm acompanhado de regras operatórias próprias.

Em tese, Duval (2003) esclarece que o conteúdo de uma representação depende mais do registro da representação do que do objeto representado, pois passar de um registro de representação a outro não é tão somente mudar de modo de tratamento, e sim, também explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Na concepção de D'Amore,

a língua na qual se faz matemática possui um "código semiológico próprio"; isso acarreta várias convenções, mais ou menos explícitas: existe o uso de escritas específicas, as expressões simbólicas, como fórmulas. Às vezes, elas se encontram inseridas em frases que, de resto, pertencem à língua comum. (D'Amore, 2007, p. 254)

O reconhecimento de um objeto matemático, por meio de múltiplas representações que podem ser feitas em diferentes registros de representações, é a condição fundamental para que o aluno possa transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante uma resolução de problema.

Deste modo, Duval (2003) manifesta que a originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. A aprendizagem da Matemática necessita da diversificação dos

registros de representação, a diferenciação entre o representante e o representado, bem como a coordenação dos diferentes registros.

As dificuldades presentes no Ensino da Matemática podem ser amenizadas, em nosso entendimento, quando os professores valorizarem os Registros de Representações Semióticas e primariamente suas conversões, onde o tratamento das representações fica em segundo plano. A busca pela articulação da grande variedade de Registros de Representação de um mesmo objeto pode levar a real compreensão em Matemática e a transposição dos bloqueios cognitivos e processuais que ainda permeiam diversos tópicos da Matemática.

Esses bloqueios citados anteriormente e por muitas vezes experimentados pelos alunos podem ter sua origem em diversos fatores presentes no processo de ensino e aprendizagem, tais como erros didáticos, metodologias incoerentes, conhecimentos prévios, dificuldades não superadas historicamente ou mau concluídas, entre outros.

Sobre as dificuldades enfrentadas pelo homem ao longo da construção de um conceito matemático, Bachelard (2005) as nomeia de Obstáculos Epistemológicos, onde o autor define que

obstáculos epistemológicos são hábitos incrustados no conhecimento não questionado, que invariavelmente bloqueiam o processo de construção do novo conhecimento. Cabe aos educadores estarem atentos a estes entraves na aprendizagem, para que não estejam presentes no seu modo de ensinar, tanto em sala de aula, quanto nos materiais didáticos utilizados (BACHELARD, 2005, p. 329).

Com isso, o professor de Matemática em especial, precisa estar atento para não disseminar oportunidades em que os obstáculos presentes nesta disciplina se propaguem ainda mais durante as aulas.

Para que isso ocorra, não basta apenas ao professor conhecer o obstáculo em si, mas faz-se necessário que o professor compreenda esta teoria para que, além dos obstáculos já citados por outros professores e pesquisadores da Matemática, ele também seja capaz de identificar obstáculos que ainda não foram mapeados ou que podem surgir da própria metodologia utilizada.

O texto que segue refere-se ao conceito formal dos obstáculos epistemológicos apresentados por Gaston Bachelard enquanto teoria geral para todas as Ciências e a teoria dos Obstáculos Epistemológicos presentes na Matemática, que mais tarde foi adaptado e apresentado por Guy Brousseau.

### 3.3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Dificuldades encontradas no próprio ato de conhecer fundamentado na ideia pré-concebida é a descrição dada por Gaston Bachelard<sup>3</sup> ao que chamou de obstáculo epistemológico. Essa ideia pré-concebida quando interpreta fatos segundo a necessidade acabam por bloquear o conhecimento.

Tais obstáculos não são uma decorrência da complexidade ou da fugacidade dos fenômenos, nem das limitações dos sentidos humanos, mas há a necessidade de superá-los para que se atinja o nível de espírito científico.

Para Bachelard, “o conhecimento científico não podia ser concebido como o aperfeiçoamento, como um refinamento do conhecimento comum, ao contrário, pregava que aquele só era possível pela ruptura com este” (GOMES, 2006, p. 72). Assim, ele afirma que “no fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização” (BACHELARD, 2005, p. 17).

Dessa forma, a teoria salienta a necessidade de romper com a concepção de Ciência como um corpo de conhecimentos fechado a ser incorporado pelo aluno. A aprendizagem ocorre a partir da ruptura, da desconstrução dessa ideia. A aprendizagem é promovida pela destruição dos obstáculos epistemológicos advindos do senso comum presentes no cotidiano.

Contudo, a teoria eleva o papel do erro como uma necessidade à Ciência, uma das maiores contribuições da epistemologia histórica, que em tempos passados, era concebido como uma heresia ou anomalia que deveria ser combatido. Assim, faz-se necessário propagar nas salas de aula a importância do erro no processo de aprendizagem, pois é por meio deles que avançamos ao quebrar conhecimentos petrificados e inquestionáveis.

Logo, é preciso romper com o conhecimento comum para avançar, questionar o erro e suas possibilidades, pois um fato mal interpretado torna-se um obstáculo. “Um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não questionado. Hábitos intelectuais que foram úteis e sadios podem, com o tempo, enterrar a pesquisa” (BACHELARD, 2005, p. 19). Nesta perspectiva, a função do professor não é a de transmitir novas culturas, novos conhecimentos e sim, contribuir para a mudança

---

<sup>3</sup> Gaston Bachelard é filósofo (1884-1962) foi filósofo e poeta francês. Seu trabalho foca às questões referentes à filosofia da ciência e a construção do objeto científico.



desta cultura, isto é, auxiliar na superação dos obstáculos sedimentados pelo cotidiano.

Todavia, devemos ter cautela ao se discutir a noção de obstáculos epistemológicos em Matemática. Assim, para Gomes (2006) não deve ser generalizado, pois cada erro deve ser objeto de análise por não ser casual, mas estar ligado a um conhecimento do passado que apresentava significado e sentido.

A Matemática, que por hora é citada como uma Ciência insuperável e infalível, pode ser entendida com base numa concepção mais aberta e dinâmica, na qual o erro possa ser encarado como parte do processo de construção do conhecimento e não mais como um fracasso.

O francês Guy Brousseau foi o primeiro teórico a associar a teoria de obstáculos epistemológicos com a Ciência Matemática, por meio de adaptações da teoria apresentada por Bachelard. Para ele, “um obstáculo se manifesta através de um conjunto de dificuldades comuns a diversas pessoas que partilham uma concepção equivocada de uma determinada noção ou conceito matemático” (GOMES, 2006, p. 79).

De acordo com Gomes, o teórico Brousseau

concebe o erro como uma manifestação explícita de um conjunto de concepções espontâneas que se tornam obstáculo à aquisição e ao domínio de novos conceitos. A superação desses obstáculos deve integrar o projeto de ensino e o erro constituir em passagem obrigatória, uma vez que ele é necessário para desencadear o processo de aprendizagem do aluno e contribuir para o professor situar as concepções deste aluno, compreendendo os obstáculos subjacentes e, assim, poder agir. (GOMES, 2006, p. 80).

Para compreender os obstáculos presentes em sala de aula, Gomes (2006) apresenta quatro casos citados por Brousseau, sendo eles:

- de origem didática: conhecimentos mal elaborados, incompletos que são transmitidos pelo professor;
- de origem ontogênica: limitação do aluno em um determinado momento de seu desenvolvimento;
- de origem cultural: concepções errôneas e certas maneiras de pensar que não são reconhecidas cientificamente;
- de origem epistemológica: dificuldades dos matemáticos em superar um conceito na História da Matemática.

Brousseau (1983) *apud* Gomes (2006) salienta que o estudo dos obstáculos pelos pesquisadores deve estar voltado para identificar os erros comuns e mostrar

que geralmente estes se agrupam em torno de concepções, buscar obstáculos na História da Matemática e confrontar os obstáculos históricos com os obstáculos da aprendizagem para estabelecer seu caráter epistemológico.

Tão logo cabe ressaltar que toda concepção de senso comum se constitui em um obstáculo na aquisição de novos conhecimentos, muito embora não significativo para a maioria das pessoas que superam facilmente estas dificuldades ao ponto de não serem tratados como obstáculos.

Assim, buscamos desenvolver nossa pesquisa por meio da proposta de diversas Tarefas que, de forma previamente planejada, possibilitarão ao aluno transitar em diferentes representações do Número Inteiro e que os seus possíveis erros poderão alavancar novas aprendizagens.

Os erros provenientes das Tarefas resolvidas pelos alunos, se bem explorados, poderão produzir conhecimentos sobre o conteúdo desenvolvido. Entendemos que muitas vezes a palavra do professor, figura inquestionável e não passível ao erro, pode deixar marcas profundas na concepção desta Ciência e no aprendizado futuro dos alunos.

Não é difícil encontrarmos alunos que, pelos motivos variados, abandonaram a Matemática ao ponto de repudiá-la. Para isto, propomos a inserção de Jogos matemáticos enquanto Tarefa, na esperança de amenizar tais marcas e para além disso, tratar dos erros com maior naturalidade.

Estudos comprovam que as correções feitas pelos colegas em situações lúdicas sobre os conteúdos matemáticos tendem a ser menos traumáticas do que as correções feitas pelo professor em sala de aula, em condições tradicionais e coletivas, que na maioria das vezes ocorrem de modo autoritário e inquestionável.

Na seção a seguir, discutiremos a importância dos Jogos matemáticos em sala de aula, e os colocamos dentro de uma perspectiva de Tarefas, a qual pode oferecer uma variedade de Registros de Representações Semiótica de um mesmo objeto matemático.

### 3.4 O JOGO ENQUANTO TAREFA SEMIÓTICA

A ideia de que a criança aprende se divertindo é muito antiga, começa com os gregos e romanos, mas com os novos modelos educacionais e seus ideais, o jogo vem sendo cada vez mais utilizado visando facilitar as Tarefas escolares.

Toda metodologia utilizada em sala de aula requer planejamento, seja ela qual for. A utilização de jogos nas aulas de Matemática é uma delas que, quando devidamente planejada, pode trazer resultados satisfatórios no que diz respeito ao aprendizado dos alunos. De acordo com Smole,

[...] o uso de jogos implica uma mudança significativa nos processos de ensino e aprendizagem que permite alterar o modelo tradicional de ensino, que muitas vezes tem no livro e em exercícios padronizados seu principal recurso didático. O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexões, tomadas de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico (SMOLE *et al*, 2007, p. 9).

Ao contrário do que muitos defendem ao afirmar que os jogos são momentos de descanso e passatempo, seu caráter, quando associado aos conteúdos matemáticos, determinam um momento rico que estimula aprendizagens e desenvolvem habilidades na disciplina.

Mas não podemos deixar de afirmar que

todo jogo por natureza desafia, encanta, traz movimento, barulho e uma certa alegria para o espaço no qual normalmente entram apenas o livro, o caderno e o lápis. Essa dimensão não pode ser perdida apenas porque os jogos envolvem conceitos matemáticos. Ao contrário, ela é determinante para que os alunos sintam-se chamados a participar das atividades com interesse. (SMOLE *et al*, 2007, p. 10).

Não menos importante, o jogo propicia situações confortáveis frente ao erro, o qual é tratado e corrigido naturalmente dentro da esfera lúdica. Os colegas de jogo, quando atentos às jogadas, imediatamente corrigem o jogador que errou, todavia, não causando nenhum tipo de constrangimento ou abalo psíquico que, quando em situações tradicionais de sala de aula poderiam causar.

Sobre isto, Smole afirma que

no jogo, os erros são revistos de forma natural na ação das jogadas, sem deixar marcas negativas, mas propiciando novas tentativas, estimulando previsões e checagem. O planejamento de melhores jogadas e a utilização de conhecimentos adquiridos anteriormente propiciam a aquisição de novas ideias e novos conhecimentos. (SMOLE *et al*, 2007, p. 10).

Além disso, uma jogada incorreta constitui uma oportunidade de intervenção do professor, “voltando-se para analisar os erros, ou seja, as ações da criança que prejudicam o resultado almejado e as estratégias, isto é, no modo como são armadas as jogadas visando ao objetivo final” (BRENELLI, 1996, p. 26).

Em consonância com o exposto, é de extrema importância a sequência de Tarefas desenvolvida pelo professor em sala de aula que antecede a aplicação do jogo, este que também se constitui numa importante Tarefa em Matemática.

Esta sequência de Tarefas tem por objetivo valorizar o conhecimento prévio apresentado pelos alunos, podendo propiciar novos conhecimentos e aprofundamentos em um dado conteúdo matemático quando tratados juntamente ao contexto de jogos matemáticos.

Assim, o jogo aqui tratado como uma Tarefa de nível elevado, não tem caráter de substituir a apresentação formal e científica de certo conteúdo, mas sim de potencializar as conversões de Registros de Representações Semióticas e oferecer a maior quantidade possível de Tarefas dentro de um único sistema.

As ideias de Petty vem ao encontro de nossa proposta, ao afirmar que

jogar é uma das atividades em que a criança pode agir e produzir seus próprios conhecimentos. No entanto, nossa proposta não é substituir as atividades em sala de aula por situações de jogos. (...) a ideia será sempre considerá-los como outra possibilidade de exercitar ou estimular a construção de conceitos e noções também exigidos para a realização de tarefas escolares (Petty, 1995, p.11).

Para além disso, o jogo propicia a troca de ideias e pontos de vista, o que colabora para o pleno desenvolvimento do conhecimento. O confronto com as oposições alavancam o pensamento crítico das próprias ideias, uma vez que

sem a interação social, a lógica de uma pessoa não se desenvolveria plenamente, porque é nas situações interpessoais que ela se sente obrigada a ser coerente. Sozinha poderá dizer e fazer o que quiser pelo prazer e pela contingência do momento; porém em grupo, diante de outras pessoas, sentirá a necessidade de pensar naquilo que dirá, que fará, para que possa ser compreendida (SMOLE *et al*, 2007, p. 11).

A escolha do jogo deve ser criteriosa e bem definida, não restando dúvidas aos jogadores, tão pouco ao professor. As regras, bem como a eficácia da proposta do jogo não são atingidas já na primeira jogada. Fazem-se necessárias várias jogadas. Assim, o jogo deve gerar curiosidades e desenvolver o interesse dos alunos, não se apresentando como um simples jogo (o que não traria nenhum desafio aos alunos) nem como um jogo complexo e inatingível (o que causaria a desistência dos alunos).

De acordo com Grandó, o jogo, quando de regras, trabalha com a dedução, implicando numa

formulação lógica baseada em um raciocínio hipotético-dedutivo, capaz de levar os alunos a formulações de teste de regularidades e variações, controle das condições favoráveis, observação das partidas e registro, análise dos riscos e possibilidades de cada jogada, pesquisar, problematizar sobre o jogo, produzindo conhecimento (GRANDO, 2000, p. 16).

Uma proposta mais complexa, mas que permite utilizar os conhecimentos em novas situações para estabelecer relações é solicitar aos alunos para que modifiquem ou criem novas regras ou ainda inventem um jogo.

Em consonância com Smole et al,

uma última forma de problematizar o jogo é pedir aos alunos que modifiquem as regras, ou que inventem um jogo parecido com aquele que foi dado. Nessa proposta, será preciso que eles elaborem um plano sobre como o será o jogo e de quais recursos necessitarão para fazê-lo, criem regras, joguem os jogos que elaboraram, analisem as produções uns dos outros e tenham tempo para aprimorá-las, de modo que qualquer pessoa que desejar possa jogar. Essa é uma proposta mais complexa, mas permite aos alunos perceberem como acontece a estruturação de regras, a relação delas com as jogadas e o seu grau de complexidade, selecionar o conhecimento matemático necessário para produzir as situações de jogo. É uma proposta que permite aos alunos utilizarem seus conhecimentos em uma nova situação, estabelecendo novas relações de significado para eles (SMOLE et al, 2007, p. 20).

Com isso, propomo-nos a elaborar um jogo com propriedades matemáticas ao final de toda a sequência de Tarefas, no qual o aluno, além de aplicar todo o conhecimento desenvolvido até o momento, possa avançar ainda mais no conteúdo ao propor novas regras ao jogo.

Brenelli reforça esta importante ponderação, quando

ao construir ou inventar regras, observa-se a organização de partida e a prática das mesmas. Ao jogar, segundo as regras, analisam-se as coordenações do jogo e o modo como a criança as compreende para obter melhor desempenho (BRENELLI, 1996, p. 27).

Para o teórico Piaget, o jogo tem sua importância no desenvolvimento social, afetivo, cognitivo e moral, além de propor uma estrutura de jogos segundo as três formas básicas de assimilação, sendo elas o exercício, o símbolo e a regra.

Na estrutura de exercício, a criança exercita as estruturas subjacentes ao jogo, sem modifica-las, enquanto que na estrutura simbólica, ocorre a representação simbólica do objeto ausente. O jogo de regras engloba as duas estruturas, onde as regras devem ser respeitadas mutuamente, podendo haver mudanças conforme a necessidade do grupo.

Por outro lado, o jogo enquanto desenvolvedor social possibilita a participação e interação de todos os alunos, além da afetividade presente no ato de jogar. O jogo

permite ao aluno se auto avaliar, conhecer seus limites e aceitar a derrota quando for o caso.

Neste ambiente, todos são chamados a participar, de modo a respeitar aqueles que ainda não se sentem confortáveis de executar o jogo. Assim, é importante que estes alunos sejam inseridos neste ambiente e possam cooperar com o momento. Para isso, é importante que o jogo escolhido apresente alternativas de participação para estes alunos, onde ele possa ser o monitor ou juiz do jogo, ou ainda que realize o registro das jogadas e pontuações.

Os registros existentes durante o jogo podem ser uma poderosa ferramenta de avaliação para o professor e para o próprio aluno, para que estes possam rever as situações ocorridas durante o desenvolvimento lúdico. O aluno pode rever suas jogadas e repensar estratégias por meio dos registros ocorridos durante o jogo e, o professor, por sua vez, pode utilizar os registros para verificar o conhecimento e realizar as intervenções necessárias.

Logo, Grandó teoriza que

a linguagem matemática, de difícil acesso e compreensão do aluno, pode ser simplificada através da ação no jogo. A construção, pelo aluno, de uma linguagem auxiliar, coerente com a situação de jogo, propicia estabelecer uma "ponte" para a compreensão da linguagem matemática, enquanto forma de expressão de um conceito, e não como algo abstrato, distante e incompreensível, que se possa manipular independentemente da compreensão dos conceitos envolvidos nesta exploração. O registro no jogo, gerado por uma necessidade, pode representar um dos caminhos à construção desta linguagem matemática (GRANDÓ, 2000, p.37).

O jogo, além de outros pontos positivos quando da sua aplicação em sala de aula, possibilita o trabalho com os diferentes registros de representações de um mesmo objeto matemático existente nas jogadas. Essas representações permitem a existência de divergências entre os jogadores que só tendem a enriquecer o momento.

Smole sintetiza que

o trabalho com jogos é um dos recursos que favorece o desenvolvimento da linguagem, diferentes processos de raciocínio e de interação entre os alunos, uma vez que durante um jogo cada jogador tem a possibilidade de acompanhar o trabalho de todos os outros, defender pontos de vista e aprender a ser crítico e confiante em si mesmo (SMOLE et al, 2007, p. 9).

De todo modo, utilizar a metodologia de jogos no contexto escolar tende a somar e enriquecer a prática pedagógica, além de que poderia ser eficaz aos alunos em dois sentidos, como

[...] garantir-lhe-ia, de uma lado, o interesse, a motivação, há tanto reclamada pelos seus professores, e, por outro, estaria atuando a fim de possibilitar-lhes construir ou aprimorar seus instrumentos cognitivos e favorecer a aprendizagem de conteúdos. Muitas vezes, pela pobreza de oportunidades, é-lhes imputado um fracasso que traça para elas um caminho de desesperança, evasão e repetência (BRENELLI, 1996, p. 28)

O jogo permite aos sujeitos vivenciarem as noções matemáticas contidas na ação do jogo, onde o processo de conceituação matemática está relacionado à intervenção pedagógica realizada pelo pesquisador e não apenas na simples ação do jogo. Portanto, a aprendizagem não está no jogo, mas nas intervenções pedagógicas realizadas pelo professor.

Para tanto, visto os benefícios que a teoria dos jogos em Matemática propicia no ato do ensino e aprendizagem, elencamos os Jogos como parte integrante de nossa pesquisa e principalmente como uma Tarefa aberta de grau elevado, a qual pode (e deve) conter uma variedade de Registros de Representações Semióticas de objetos matemáticos e suas conversões, além das regras que contemplem o conteúdo matemático estudado, afim de torná-lo um recurso pedagógico que coloque o aluno em Atividade.

## 4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos o delineamento metodológico da pesquisa, destacando a classificação da mesma, os instrumentos utilizados para a coleta de dados e os procedimentos para a sistematização e análise, bem como os sujeitos envolvidos nesta investigação.

### 4.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA

Desenvolver um trabalho de pesquisa com pessoas obviamente difere-se em muito ao realizar pesquisa sobre objetos. Não se resume somente a contagem e tabulação de dados, ainda mais quando os sujeitos da pesquisa são alunos e estão inseridos em um cenário que requer atenção de todos. Os saberes inerentes da educação são muito complexos e oscilantes, com muitas variáveis que interferem no processo de ensino e aprendizagem.

Neste sentido, nossa pesquisa se apresenta majoritariamente como qualitativa, a fim de melhor compreender os fenômenos de estudo proposto neste trabalho a partir das perspectivas dos alunos envolvidos, sujeitos desta pesquisa.

Na pesquisa qualitativa, há uma dinâmica entre o mundo real e o sujeito da pesquisa, ou seja, “um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números” (Prodanov, 2013, p. 70). A interpretação e a atribuição de significados são elementos básicos neste processo, não requerendo necessariamente uso de técnicas e recursos estatísticos.

Segundo Prodanov (2013), na abordagem qualitativa, o ambiente é fonte direta de coleta de dados, onde o pesquisador mantém o contato com o objeto de estudos, necessitando assim de um trabalho mais intenso no campo. Esta abordagem difere da quantitativa pois não requer a necessidade de numerar e medir unidades, muito embora possa ser realizado em consonância com as análises qualitativas.

Neste caso, o pesquisador é o professor da turma que, por meio do contato direto com os sujeitos, realizou uma pesquisa-ação, na qual o objetivo é avaliar se as mudanças realizadas na metodologia, bem como no tratamento do ensino dos Números Inteiros, provocarão melhorias no aprendizado dos alunos e conseqüentemente podem refletir positivamente na prática do professor, pois o processo de construção da proposta metodológica foi baseado no movimento de ação-reflexão-ação.



De acordo com Thiollent (1986),

a pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com um ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (THIOLLENT, 1986, p. 14)

Na pesquisa-ação, segundo o autor, os pesquisadores desempenham um papel ativo na busca da solução dos problemas, no acompanhamento e na avaliação das ações desencadeadas em função do problema. Por meio dela é possível estudar dinamicamente os problemas, as decisões, ações, conflitos, tomadas de consciência que podem ocorrer durante o processo.

Com isso, pode-se dizer que a pesquisa-ação não é engessada, muito pelo contrário, seu planejamento é muito flexível, “há sempre um vaivém entre várias preocupações a serem adaptadas em função das circunstâncias e da dinâmica interna do grupo de pesquisadores no seu relacionamento com a situação investigada” (THIOLLENT, 1986, p. 47). Logo, a pesquisa pode mudar seus rumos de acordo com a coleta de dados e as reflexões acerca dela.

Durante o período vigente de pesquisa, várias adaptações foram realizadas no processo de coleta de dados, tais como inclusão de novas Tarefas, adaptação de outras já elaboradas e até mesmo a exclusão de Tarefas inapropriadas para o momento, visto que a pré-análise foi feita simultaneamente à aplicação das mesmas, por se tratar de uma pesquisa no ambiente de ensino e aprendizagem.

Neste sentido, os instrumentos para a coleta de dados utilizados nesta pesquisa foram constituídos de duas unidades principais: os registros escritos dos sujeitos (alunos participantes) em Folhas de Tarefas e o Diário de Campo do pesquisador. Os dados foram coletados em 24 encontros, totalizando 45 horas-aula, no período de 07 de abril de 2016 a 17 de junho de 2016.

A análise seguiu um percurso, onde inicialmente consideramos duas categorias prévias, os seguintes blocos de Tarefas: Introdução aos Números Inteiros e Tarefas de Operações com Números Inteiros. Após a leitura flutuante já foi possível perceber outras categorias emergindo das prévias, como veremos na organização das Tarefas e posteriormente no capítulo de análise delas.

## 4.2 LOCAL E SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida em um Colégio que oferta o Ensino Fundamental 2 e Ensino Médio no município de Laranjeiras do Sul, Paraná. O mesmo é um Colégio da rede Estadual de Ensino e está situado na região central da cidade, pertencendo ao Núcleo Regional de Laranjeiras do Sul.

A turma que participou da pesquisa é formada por 33 alunos regularmente matriculados, com alto número (pode-se dizer a maioria) de alunos que já reprovaram ao menos uma vez, não necessariamente nesta série. Salvo esta particularidade, é uma turma normal e tradicional como qualquer outra, apresentando situações corriqueiras que ocorrem no ambiente escolar.

No que diz respeito ao sucesso escolar, podemos perceber que a característica da turma é bastante peculiar, apresentando sérios problemas de aprendizagem. Este é um dos fatos que nos motivou para a realização desta proposta metodológica pautada na diversificação de Tarefas, uma vez que estas irão apresentar diferentes objetivos e níveis de dificuldade, possibilitando alcançar um maior número de alunos frente às estratégias de aprendizagem.

Como a proposta foi organizada em blocos de Tarefas com objetivos definidos e específicos para cada um, optamos em realizar a análise dos dados coletados com os sujeitos que participaram de todas as Tarefas propostas em cada bloco.

Isso significa, que de um modo ou outro, todos os alunos constituem-se como sujeitos da pesquisa, uma vez que, por exemplo, determinado aluno poderá apresentar assiduidade em todas as Tarefas de um bloco e deste modo ser considerado, por hora, um dos sujeitos da pesquisa, mas também poderá apresentar faltas na execução de Tarefas de outro bloco, e assim não ser sujeito da pesquisa.

Pelo fato da pesquisa ser qualitativa, na qual o professor é o pesquisador, se faz importante, portanto, considerar todos os alunos que são participantes desta turma como sujeitos da pesquisa, pois trata-se de uma pesquisa desenvolvida no ambiente natural, sendo este a sala de aula, e todos os alunos compõem este cenário, no qual as ausências fazem parte do cotidiano escolar.

## 5 A PROPOSTA METODOLÓGICA

Neste capítulo apresentamos o conjunto de Tarefas elaborado para compor uma proposta metodológica para o ensino dos Números Negativos, baseada na premissa da diversificação de Tarefas e do trânsito entre diferentes Registros de Representação Semiótica do objeto matemático em estudo.

A aplicação desta proposta teve como público alvo adolescentes com idades entre 12 e 15 anos, os quais compõem uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental 2, de uma escola estadual localizada no centro-oeste do Paraná.

Dos 33 alunos que compõem a turma, apenas 14 deles estão em idade/série corretos. Estas informações foram obtidas a partir da coleta de dados realizada em documentos oficiais (SERE – Sistema Estadual de Registro Escolar) disponibilizados pelo Colégio.

Do total de alunos, 15 deles participam, em contra turno escolar, da Sala de Apoio de Matemática, projeto do governo que visa reduzir os prejuízos causados pela defasagem matemática ao longo da vida escolar.

O turno de frequência regular desta turma é matutino, sendo que as aulas de Matemática somam 5 (cinco) horas/aula de 50 minutos cada durante a semana, distribuídas da seguinte forma: 2 aulas na segunda-feira (1º e 3º horários), 1 aula na quinta-feira (4º horário) e 2 aulas na sexta-feira (1º e 2º horários).

Em consonância com a realidade escolar deste Colégio, uma pequena parte é oriunda do campo e utiliza transporte escolar para se deslocar até a cidade. O nível sócio econômico dos alunos é predominantemente médio e baixo, sendo eles filhos de profissionais liberais, agricultores, comerciantes e assalariados, e um pequeno grupo de pais que possuem baixo nível de escolaridade e depositam as esperanças na educação de seus filhos para garantir um futuro melhor a eles.

Para efetivação da pesquisa, serão utilizadas as aulas regulares de Matemática do período matutino, num processo contínuo de cinco horas/aula semanais durante 7 semanas (cerca de 35 horas/aula), salvo situações em que hajam atividades extraclasse que compõem o cotidiano escolar.

No decorrer das aulas, os alunos, sujeitos desta pesquisa, responderam um conjunto de questões que compõem cada Tarefa previamente pensada e elaborada pelo professor pesquisador, de acordo com o andamento regular do conteúdo matemático Números Inteiros. Estas Tarefas valorizam a diversificação dos Registros de

Representações Semióticas e variação do grau de dificuldade, além de oferecer momentos lúdicos durante as aulas.

As Tarefas são explicativas e exemplificadas, onde por meio da leitura reflexiva o aluno será capaz de respondê-las. Cabe ao professor atuar como mediador entre o objeto matemático em estudo e o aprendizado do aluno. Quando necessário, e as Tarefas de grau elevado exigirem, o professor poderá intervir no processo como melhor convir.

O modo como os alunos aprendem, de acordo com nossa fundamentação teórica, resulta de dois fatores principais, a saber: a Atividade que realizam e a reflexão que atuam sobre ela. Assim, este conjunto de Tarefas visa colocar o aluno em Atividade e reflexão sobre a mesma, onde na oportunidade o conteúdo não será apresentado de maneira tradicional centrada no professor.

Nesta proposta, o aluno, por meio de seus erros e acertos, buscará construir seu conhecimento matemático sobre Números Inteiros. As Tarefas visam prioritariamente a qualidade em detrimento da quantidade, sem deixar o formalismo matemático que o tema exige. Esta premissa esteve presente durante toda a investigação, desde a fase de exploração teórica, desenvolvimento das Tarefas, aplicação e análise das mesmas.

Para cada conjunto de Tarefas, as quais denominaremos por um período de blocos de Tarefas, se fará necessário um momento reflexivo dialogado entre o professor pesquisador e os alunos sujeitos da pesquisa. Neste momento, se fará as ponderações sobre os erros e acertos dos principais tópicos e seções que compõe o bloco de Tarefas. Podemos dizer que este momento também se constitui numa importante Tarefa de aprendizagem e reflexão.

A proposta metodológica contempla desde Tarefas cujo foco é a repetição mecânica, que também tem seu objetivo na aprendizagem, até Tarefas abertas de grau elevado, permeadas por dois momentos lúdicos, onde os Jogos matemáticos entram em cena como uma Tarefa tão importante quanto qualquer outra que compõe esta proposta.

Logo, esta proposta metodológica é bastante ambiciosa e apresenta uma mescla dos vários tipos e níveis de Tarefas a fim de que ocorra um aprendizado progressivo e significativo do conteúdo proposto.

## 5.1 A ELABORAÇÃO DAS TAREFAS

O foco desta proposta metodológica é apresentar Tarefas diversificadas quanto as duas dimensões destacadas em Ponte (2014): o grau de desafio matemático (nível de dificuldade) e o seu grau de estrutura (organização da Tarefa em aberta ou fechada), e que ao mesmo tempo possibilitem o trânsito entre os diferentes Registros de Representação Semiótica envolvidos no estudo do objeto matemático Números Negativos.

Além disso, as dimensões duração da Tarefa e relação com a realidade foram consideradas ao longo da proposta, esta última que define haver ou não uma relação concreta com o objeto matemático em estudo. Esta relação é de extrema importância, visto que muitos objetos matemáticos não devem ser relacionados com objetos concretos e sim tratados formalmente com uma linguagem adequada ao nível dos alunos, assim como revela a História da Matemática.

Para elaborar as Tarefas, buscamos construí-las de modo a favorecer a discussão dos tópicos abordados progressivamente sobre os Números Inteiros. Um dos principais objetivos das Tarefas apresentadas é a reflexão por parte do aluno, onde este seja o protagonista de seu conhecimento e o professor seja um mediador de fundamental importância, formando o tripé aluno, professor e conhecimento.

Neste sentido, não buscamos apenas apresentar o conteúdo matemático, mas sim favorecer a reflexão e construir um conhecimento significativo e que possa ser consolidado pelo aluno, buscando responder à questão proposta nesta pesquisa: a diversificação de Tarefas, sob a perspectiva dos Registros de Representações Semióticas e dos Obstáculos Epistemológicos, pode contribuir para o ensino e aprendizagem dos Números Inteiros?

Com isso, evitamos apresentar em nossa proposta metodológica Tarefas que possam conduzir a obstáculos, de origem epistemológicas, de conhecimento ou até mesmo obstáculos didáticos. Todavia, não extinguimos a possibilidade de que alunos, num processo natural, encontrem obstáculos durante a resolução das Tarefas, os quais serão tratados como parte importante do processo escolar, para que o aluno possa entrar em Atividade e superar tais obstáculos.

Diferente daquilo que possa parecer, não iremos apresentar um acúmulo de exercícios variados, tratados mecanicamente, pois isso os livros didáticos e os conteúdos disponibilizados na internet suprem e muito bem esta opção. Enfatizamos

ao leitor que esta diversidade de Tarefas não implica em mais um grande compêndio de exercícios sobre o conteúdo, mas sim uma diversidade de objetivos e competências requeridos ao aluno durante a execução das mesmas.

Os níveis das Tarefas propostas são progressivos em acordo com as variantes apresentadas por Ponte (1996, 2006) e a execução das mesmas exigem as operações de conversão e tratamento dos Registros de Representações Semióticas que, se bem compreendidos pelo aluno, os colocará em Atividade, resultando em conhecimento.

Esta proposta metodológica não tem por objetivo desenvolver todo o conteúdo sobre Números Inteiros tradicionalmente desenvolvidos nesta série. Entendemos que a execução das quatro operações com Números Inteiros, se bem compreendidas pelo aluno, é suficiente para alavancar novos conhecimentos em outros conteúdos que os exijam.

Procuramos tratar os Números Inteiros por meio da representação da Reta Numérica e o Princípio de Extensão dos Números Naturais, onde os números Negativos são tomados como oposto simétrico dos Naturais. Evitamos apresentar regras em que se exija a memorização: o aluno será conduzido a generalizar as propriedades formais deste conjunto.

As Tarefas foram pensadas e elaboradas anteriormente à sua aplicação e constituem uma proposta metodológica sequenciada, visando atender as quatro dimensões destacadas inicialmente. Elas estão prontas e formatadas para que o professor leitor possa aplicá-las enquanto proposta metodológica.

Além disso, classificamos cada Tarefa quanto às Atividades requeridas ao aluno no momento de resolvê-las. Essas Atividades mobilizadas pelo aluno são cognitivas e internas, onde as Tarefas propostas pelo professor são a ponte de mediação entre o objeto matemático e conhecimento.

No que segue, apresentamos uma sequência de 25 Tarefas que, além do objetivo de colocar o aluno em Atividade, valoriza momentos de discussão coletiva, sobretudo a reflexão do professor sobre sua metodologia e a análise da real aprendizagem.

O quadro abaixo mostra a organização das Tarefas que propomos em dois blocos principais, que traduz, sob nossa perspectiva, o ensino dos Números Inteiros nesta série. O primeiro bloco se desdobra em três seções, enquanto que o segundo bloco se desdobra em quatro seções, com as respectivas Tarefas:

<b>BLOCO</b>	<b>SEÇÃO</b>	<b>TAREFAS</b>
<b>Tarefas de Introdução aos Inteiros</b>	Tarefas de Reconstrução Histórica e Reconhecimento dos Inteiros	Tarefa 1 Tarefa 2 Tarefa 3 Tarefa 4
	Tarefas de Compreensão e Representação dos Inteiros	Tarefa 5 Tarefa 6 Tarefa 7 Tarefa 8
	Tarefas de Comparação entre os Números Inteiros	Tarefa 9 Tarefa 10 Tarefa 11 Tarefa 12 Tarefa 13
<b>Tarefas de Operações com Números Inteiros</b>	Tarefas de Soma Simples com Números Inteiros	Tarefa 14 Tarefa 15
	Tarefas de Soma Complexa com Números Inteiros	Tarefa 16 Tarefa 17 Tarefa 18 Tarefa 19 Tarefa 20
	Tarefas de Multiplicação e Divisão com Números Inteiros	Tarefa 21 Tarefa 22 Tarefa 23 Tarefa 24
	Tarefa De Múltiplas Operações	Tarefa 25

**Quadro 3: Organização das Tarefas em Blocos e Seções**

*Fonte: o autor*

## 5.2 TAREFAS DE INTRODUÇÃO AOS INTEIROS

Classificamos como Tarefas de Introdução aquelas que permitem ao professor adentrar no conteúdo de números inteiros, fornecendo a base para o primeiro contato dos alunos para com este conteúdo, explorar os conceitos iniciais de números negativos, tais como classificá-los, ordená-los, compará-los, entre outros atributos dos números.

Acreditamos que o melhor modo de apresentar este novo conjunto aos alunos não seja diretamente por meio da exposição, como tradicionalmente ocorrem nas salas de aula – a exemplo do próprio autor, que por muitas vezes se utilizou desta metodologia – mas de modo que o próprio aluno perceba a necessidade de existir um novo conjunto que venha suprir cálculos que até então não lhes é possível.

Assim, nossas primeiras Tarefas se desdobram em situações problemas que favorecem o diálogo com a turma, resgatando o conhecimento prévio que será necessário e quebrando paradigmas que os alunos desenvolvem ao longo de sua vida escolar até o presente momento.

### 5.2.1 Tarefas de Reconstrução Histórica e Reconhecimento dos Inteiros

Este bloco é composto pelas Tarefas 1, 2, 3 e 4, onde o objetivo é oferecer ao aluno a percepção da necessidade da existência de um conjunto numérico que atenda situações de subtração onde o subtraendo é maior que o minuendo. Deste modo, busca-se por meio das Tarefas 1 e 2 apresentar situações matemáticas em que o conjunto dos Números Naturais não consegue atender, afim de que os alunos percebam a necessidade da existência de um conjunto que satisfaça as impossibilidades de cálculo.

Na Tarefa 3, os alunos irão conhecer a História e formalização dos Números Negativos e Números Inteiros, bem como as dificuldades encontradas pelos matemáticos antigos ao se deparar com situações semelhantes às reproduzidas nestas Tarefas.

A Tarefa 4 constitui-se num momento de reflexão das três Tarefas anteriores, onde o professor poderá apresentar os erros mais comuns que os alunos cometeram e refletir para promover o aprendizado. Além disso, deve-se discutir as dificuldades encontradas



### TAREFA 1 (Uma hora aula)

Esta Tarefa permite ao professor introduzir o conteúdo de Números Inteiros de modo indireto, menos impactante, pois conduzirá os alunos a perceberem a necessidade da existência de um conjunto de números diferente daqueles que já conhecem até então. Para isto, a situação problema aqui posta poderá causar conflito cognitivo aos alunos e requer a intervenção do professor para que eles percebam que essas mesmas dificuldades já foram saboreadas pelos povos de antigamente.

Esta Tarefa permitirá observar os Registros de Representações Semióticas do objeto matemático número escritos pelos alunos, bem como as operações envolvidas no desenvolvimento, além de verificar a capacidade de abreviação afim de facilitar e economizar registros.

Tarefa		Registros de Representações Semióticas
Tipologia:	Problema	Conversão: do registro escrito na linguagem materna para o registro simbólico numérico.
Grau de desafio matemático:	Elevado	Tratamento: dos registros simbólico numérico, onde o mesmo se utilizará de um conjunto de regras operatórias para resolver as expressões convertidas.
Grau de estrutura:	Fechada	
Relação com a realidade:	Sim	Representações: Discursivas
Duração:	1 hora/aula	Registros: Monofuncionais

#### **Quadro 4: Classificações da Tarefa 1**

**Fonte: o autor**

#### Sugestões de Aplicação

O professor pode entregar a Tarefa aos alunos, sem fazer menção aos números negativos, os quais deverão resolver de acordo com sua leitura e interpretação. No valor da nota do quinto aluno fictício da Tarefa, poderá haver indagações dos alunos quanto a impossibilidade de resolução.

O professor pode orientar aos alunos que resolvam de acordo com suas interpretações, já que o objetivo é justamente verificar como os alunos irão enfrentar e superar esta situação. Após o término da Tarefa por todos, o professor deve recolher e iniciar uma breve discussão sobre as dificuldades encontradas na resolução da mesma, sem corrigi-las, pois, isso será feito ao final do bloco de Tarefas.

Nome:	
Analisar a situação problema e resolver corretamente registrando seus cálculos de acordo com a representação simbólico numérica:	
<i>Ao elaborar uma prova de Matemática, o professor Juca decidiu modificar a contagem dos acertos e erros apresentados pelos alunos. No cabeçalho da prova havia descrito: "Para cada questão correta será atribuída nota 2. Para cada questão errada será descontada nota 1. Para cada questão sem responder, será atribuída nota zero". Registre o cálculo da nota final da prova de cada aluno:</i>	
1. O aluno Abrão acertou 10 questões e errou 12:	
2. A aluna Bia acertou 8 questões e errou 5:	
3. O aluno Chico acertou 5 questões e errou 1:	
4. A aluna Dara acertou 10 questões e errou 12:	
5. O aluno Ernesto acertou 1 questão e errou 5:	

Você calculou a nota final das provas dos alunos. Para entregar as provas aos alunos, o professor ordenou-as da maior nota para a menor:

6. Escreva a ordem que o professor entregou as provas aos alunos, de acordo com as notas obtidas na prova:
  
7. Qual foi a diferença de nota entre o aluno que apresentou melhor desempenho e o aluno que apresentou pior desempenho?
  
8. Você notou alguma diferença ou dificuldade ao resolver esta Tarefa? Explique:

## TAREFA 2 (Uma hora aula)

Esta Tarefa é semelhante à anterior, onde por meio desta o aluno deverá sentir a necessidade de haver um conjunto numérico que possa suprir a subtração de um número maior de um menor, resultando assim em um número negativo. Para que o aluno perceba esta necessidade, elaboramos uma situação problema sobre o tradicional jogo de Pega Varetas, onde cada cor de vareta corresponde a uma pontuação ao final do jogo. Assim, haverá jogadores que devem receber pontuação negativa de acordo com as varetas coletadas durante o jogo.

Tarefa		Registros de Representações Semióticas
Tipologia:	Problema	Conversão: do registro escrito na linguagem materna para o registro simbólico numérico.
Grau de desafio matemático:	Médio-Elevado	Tratamento: dos registros simbólicos numéricos, onde o mesmo se utilizará de um conjunto de regras operatórias para resolver as expressões convertidas.
Grau de estrutura:	Fechada	
Relação com a realidade:	Sim	Representações: Discursivas.
Duração:	1 hora/aula	Registros: Monofuncionais.

### **Quadro 5: Classificações da Tarefa 2**

**Fonte: o autor**

### Sugestões de Aplicação

A exemplo da primeira Tarefa, esta deverá ser entregue aos alunos sem relacioná-la aos números negativos, uma vez que buscamos verificar quais registros e operações os alunos utilizarão ao realizá-la. Todavia, o professor deverá explicar sobre o jogo de Pega Varetas para que os alunos se contextualizem com a situação descrita, visto que pode haver alguns que não o conhecem.

Os alunos poderão questionar sobre a pontuação negativa obtida pelos dois últimos jogadores ou a impossibilidade de resolver a subtração, mas é importante que o professor os oriente para que reflitam sobre qual procedimento ou simbologia irão utilizar para atribuir a pontuação no jogo, afinal em um outro momento serão discutidas estas situações. Esta Tarefa não deverá ainda ser corrigida coletivamente, pois será realizada ao final do bloco de Tarefas.

Nome:						
O professor Jacó modificou um tradicional jogo, conhecido como Pega Varetas. O modo de jogar continua o mesmo: os alunos devem retirar as varetas sem mover as demais. Porém, cada cor de varetas tem uma pontuação ganha ou perdida no score do jogador. Assim, cada cor de varetas:						
Azul	Verde	Amarelo	Branco	Vermelho	Preto	
Ganha 5	Ganha 2	Ganha 1	Perde 1	Perde 3	Perde 5	
1. De acordo com a tabela de pontos atribuídos por cor de varetas, verifique a pontuação de cada jogador ao final do jogo, registrando o cálculo a partir das varetas retiradas durante o jogo:						
ALUNO	Azul	Verde	Amarelo	Branco	Vermelho	Preto
Amarildo	3	2	0	0	1	1
Bernardo	2	2	2	1	2	1
Camila	4	0	3	2	0	2
Danilo	3	1	2	4	2	4
Emílio	4	1	2	6	2	5
2. Escreva o nome dos alunos, em ordem decrescente, de acordo com o número de varetas que cada um pegou:						
3. Escreva o nome dos alunos, em ordem decrescente, de acordo com a pontuação obtida por cada um durante o jogo.						

### TAREFA 3 (2 horas/aula)

Esta Tarefa trata da Conversão de registros na língua materna para o registro simbólico numérico, na qual os alunos devem ler as frases propositalmente envolvendo números negativos a fim de verificar se ele tomou ciência dos registros corretos desses números, ainda que em caráter informal. A partir desta Tarefa e das duas anteriores, a História dos Números Inteiros poderá ser exposta oralmente e/ou com auxílio de recursos audiovisuais, comparando-os com as dificuldades que os próprios alunos encontraram ao resolver as situações anteriores. Além da História, neste momento é importante então formalizar a introdução a este conjunto e apresentando aos alunos os registros simbólicos pertinentes a este início de conteúdo.

Assim, esta Tarefa se classifica em:

Tarefa		Registros de Representações Semióticas
Tipologia:	Exercício	Conversão: do registro escrito na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: não há operação de tratamento dentro de um mesmo sistema de representação. Representações: Discursivas. Registros: Monofuncionais.
Grau de desafio matemático:	Reduzido - Médio	
Grau de estrutura:	Fechada	
Relação com a realidade:	Sim	
Duração:	1 hora/aula	

**Quadro 6: Classificações da Tarefa 3**

**Fonte: o autor**

#### Sugestões de Aplicação

O professor deve entregar a Tarefa 3 aos alunos, ainda sem mencionar a existência dos números negativos e a simbologia necessária para a correta representação. Após o término da Tarefa por todos os alunos, o professor deve recolhe-las e iniciar a discussão das principais dificuldades encontradas no desenvolvimento das Tarefas deste bloco, a fim de prolongar a discussão sobre a História dos Números Inteiros e as dificuldades na aceitação e formalização deste conjunto. Após o contexto histórico, o professor deverá formalizar os conceitos iniciais deste conjunto, apresentando o título Números Inteiros, que será objeto de estudo a partir de então, bem como a representação simbólica do conjunto e dos elementos, o símbolo de menos utilizado como atributo do número e como operação, entre outros conceitos.

<i>Nome:</i>	
<i>Situação</i>	<i>Registro Simbólico Numérico</i>
A temperatura média durante o verão no Polo Sul é de menos trinta e cinco graus Celsius!	
No último inverno, a temperatura atingiu cinco graus abaixo de zero.	
Minha geladeira está programada para a temperatura de dez graus Celsius negativos.	
A sensação térmica no Rio de Janeiro chegou a quarenta e sete graus Celsius.	
A temperatura das águas de uma fonte termal mineral é de quarenta graus durante o verão.	
O elevador do meu prédio levou-me ao segundo andar abaixo do térreo!	
Gastei todo meu dinheiro da Conta bancária e agora estou devendo mil e duzentos reais ao banco!	
A região mais baixa do país Holanda é de seis metros abaixo do nível do mar.	
Estabeleci como meta que devo emagrecer vinte gramas por dia.	
A bolsa de valores registrou uma queda de oito por cento na cotação do dólar ao fim do dia.	

#### TAREFA 4 (Uma hora aula)

Esta Tarefa se constitui na análise e reflexão das três Tarefas desenvolvidas anteriormente, as quais não foram corrigidas simultaneamente as suas aplicações. Entendemos que a análise do erro tem tanta importância quanto a análise do acerto, pois se constitui num rico momento que pode gerar conhecimento. A discussão e troca de informações poderá enriquecer este momento, onde os alunos apresentam suas respostas verbalmente aos colegas e, com intervenção do professor, poderá ocorrer a ampliação das noções dos Números Inteiros a todos os alunos. Faz-se necessário à prática do professor orientar a turma quanto a necessidade da reflexão do erro em Matemática e a importância de discuti-lo coletivamente.

Tarefa		Registros de Representações Semióticas
Tipologia:	Exercício de Fixação	Conversão: bilateral entre registros escritos na linguagem materna, registros simbólico-numéricos e registros gráficos;  Tratamento: onde o aluno se utilizará de um conjunto de regras operatórias dentro de um sistema de registro de representação semiótica.  Representações: Discursivas Registros: Multifuncionais e Monofuncionais
Grau de desafio matemático:	Reduzido	
Grau de estrutura:	Fechada	
Relação com a realidade:	Sim	
Duração:	1 hora/aula	

#### **Quadro 7: Classificações da Tarefa 4**

**Fonte: o autor**

#### Sugestões de Aplicação

O professor deverá observar atentamente as respostas apresentadas pelos alunos nas três Tarefas aplicadas até o momento, atentando-se para os erros mais frequentes e as colocações mais pertinentes do ponto de vista de nossa pesquisa. A reflexão e exposição dos principais fatores poderá ser coletiva e os alunos podem participar da construção dos elementos que irão surgindo durante a correção.

### 5.2.2 Tarefas de Compreensão e Representação dos Inteiros

Este bloco é composta pelas Tarefas 5, 6, 7 e 8 nas quais o objetivo geral é contextualizar o conteúdo dos Números Inteiros, esperando a compreensão e aceitação desta nova classe numérica. Assim como na História da Matemática, é possível observar que os alunos evitam manipular os números deste conjunto. Assim, visamos que os alunos consigam transpor conhecimentos já consolidados e avancem na busca pela estabilidade cognitiva.

Na Tarefa 5 os alunos deverão, a partir da apresentação histórica e da discussão das Tarefas anteriores, elaborar contextos a partir do registro escrito na linguagem materna e posteriormente em registros simbólicos numéricos, que se façam presentes os Números Inteiros. Também deverão elaborar situações escritas para Números Inteiros fornecidos na Tarefa.

A Tarefa 6 dispõe da representação gráfica de termômetros, nos quais a escala termométrica é o Celsius. Neles, há registros de números positivos e negativos, afim de que o aluno os observe, colete os dados, processe-os e responda às questões.

A Tarefa 7 também tem base nos registros gráficos do termômetro, mas as questões são do tipo qualitativas, onde busca-se a reflexão do aluno acerca dos números negativos comparados aos positivos, processo que ocorre a partir da observação e análise dos registros presentes no termômetro, associado ao conhecimento empírico do aluno sobre temperatura e sensação térmica. Também se busca com esta Tarefa introduzir a importância do zero sobre a reta vertical e a qualidade dos números acima e abaixo do zero.

Por fim, a Tarefa 8 consiste numa análise sobre as Tarefas anteriores por meio da discussão direta com os alunos sobre os novos conceitos, as dificuldades encontradas e o conhecimento desenvolvido por meio delas. É importante que o professor conduza esta discussão com ênfase na importância do erro em Matemática e posteriormente a reflexão do mesmo.



## TAREFA 5 (1 hora/aula)

Esta é uma Tarefa que se constitui como um exercício de fixação, onde os alunos poderão associar situações cotidianas aos Números Inteiros, a partir da História dos Números Negativos apresentada pelo professor e a reflexão das Tarefas do primeiro bloco. Os alunos precisam compreender que o Conjunto dos Números Inteiros surgiu a partir da necessidade humana, mas sua simbologia e formalização demorou a se concretizar.

Esta Tarefa é simples mas requer mobilização de conhecimentos por parte dos alunos, e a socialização dos exemplos produzidos por eles pode trazer maior familiaridade com o novo conteúdo que irão estudar nas próximas aulas, além de que irá valorizar o conhecimento prévio do aluno.

Podemos caracterizar esta atividade, do ponto de vista:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Exercício	Conversão: bilateral do registro escrito na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: não há operação de tratamento dentro de um mesmo sistema de registros de representações semióticas. Representações: Discursivas Registros: Multifuncionais e Monofuncionais
Grau de desafio matemático:	Reduzido	
Grau de estrutura:	Fechada	
Relação com a realidade:	Sim	
Duração:	1 hora/aula	

### **Quadro 8: Classificações da Tarefa 5**

**Fonte: o autor**

### Sugestões de Aplicação

O professor pode realizar a leitura do enunciado juntamente com os alunos, para que não haja dúvidas quanto ao registro simbólico numérico que os alunos deverão escrever. Se necessário for, o professor poderá se utilizar de um exemplo de Conversão, pois esta operação é uma das bases para promover o aprendizado.

É importante observar que esta Tarefa exige a Conversão Bilateral dos registros envolvidos, isto é, permitirá com que o aluno converta registros da linguagem materna para registros da linguagem simbólico numéricas, e da linguagem simbólico numérica para a linguagem materna. Este tipo de conversão de duas vias é importante para haver a consolidação do conhecimento matemático. Ao final, é necessário corrigir coletivamente a Tarefa afim de que ocorra a troca de informações e conhecimento.

Nome:	
1. Crie três situações tomadas como exemplo de onde podemos empregar o uso dos números negativos. Depois, escreva o registro simbólico numérico que traduz a situação descrita:	
Situação	Registro Simbólico Numérico
2. Neste item, você deve inventar um contexto (uma situação) que envolva os dois números a seguir: <i>cinco e menos três</i> .	
3. Com base no que você estudou até o momento, ao se deparar com um cálculo do tipo $2 - 5$ , você classifica como sendo possível resolver esta situação? Justifique sua resposta.	

## TAREFA 6 (1 hora/aula)

Esta é uma Tarefa de Conversão de Registros, na qual o aluno precisa associar o registro simbólico numérico com o registro gráfico. Neste contexto, os termômetros podem representar a reta numérica, afim de que o aluno compreenda a ideia de continuidade e organização da mesma. Além disso, esta Tarefa valoriza as operações mentais envolvendo os Números Inteiros, embora o aluno ainda não domine nenhuma operação neste campo de conteúdo, mas por meio da Conversão de registros o mesmo poderá responder às questões associadas aos termômetros.

A classificação desta Tarefa se resume em:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Problema	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos, que representam temperaturas. Representações: Discursivas; Registros: Monofuncionais;
Grau de desafio matemático:	Elevado	
Grau de estrutura:	Fechado	
Relação com a realidade:	Sim	
Duração:	1 hora/aula	

### **Quadro 9: Classificações da Tarefa 6**

**Fonte: o autor**

### Sugestões de Aplicação

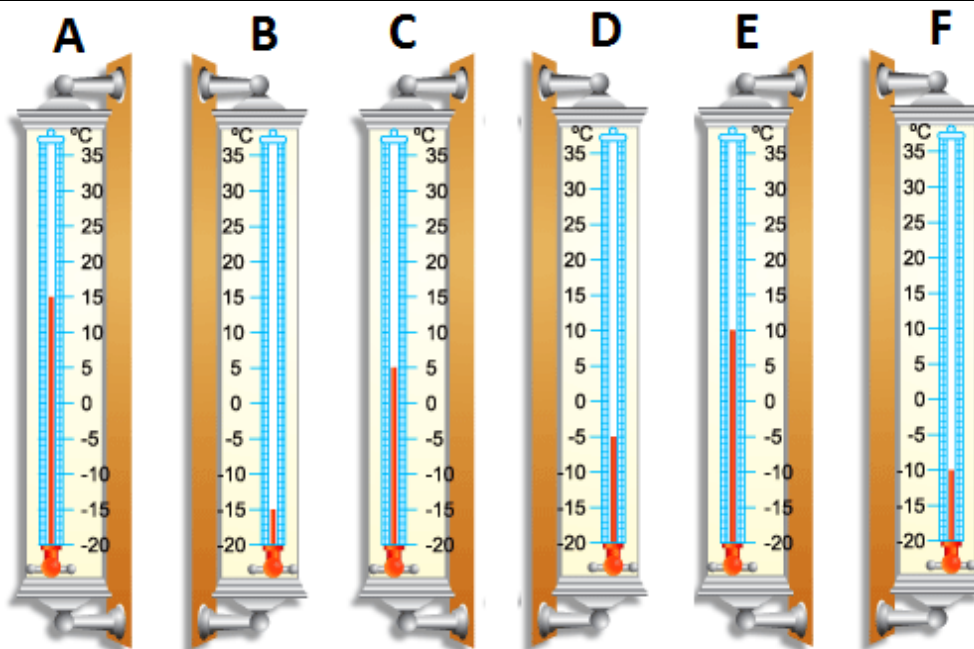
Ao entregar esta Tarefa aos alunos, o professor pode salientar, conforme Tarefa anterior, que uma das aplicações dos Números Inteiros é as escalas de temperatura. Logo, os desenhos que compõem esta Tarefa são termômetros que servirão de base para a correta resolução desta.

O professor deve propor aos alunos a realização individual a partir de suas interpretações, pois as Conversões dos Registros existentes nesta Tarefa são de fundamental importância para a compreensão dos Números Inteiros.

Alguns alunos apresentarão dificuldade ao realizar a diferença entre as temperaturas registradas no termômetro, principalmente aqueles que envolvem temperaturas representadas por números negativos. Salientamos que o erro matemático faz parte de um processo importante e necessário ao estudo dos conteúdos, os quais podem ser discutidos com a turma durante a correção coletiva desta Tarefa.

Nome:

O desenho abaixo mostra seis termômetros que marcam diferentes temperaturas, em grau Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ). Abaixo do desenho, descreva a temperatura que cada um está medindo:



A	B	C	D	E	F

Agora que você observou o registro das temperaturas que cada termômetro está medindo, organize-os de forma crescente, ou seja, do termômetro que registrou menor temperatura até o que registrou maior. Para isso, utilize o registro simbólico numérico que representa cada temperatura:

--	--	--	--	--	--

Ainda com base nos termômetros, observe e responda qual é a diferença de temperatura entre os termômetros:

A e B	A e C	A e D	A e E	A e F
B e C	B e D	B e E	B e F	C e D
C e E	C e F	D e E	D e F	E e F

## TAREFA 7 (1 hora/aula)

Nesta Tarefa trataremos novamente da operação de Conversão dos registros e a interpretação dos mesmos. O objetivo é a introdução e a organização dos Números Inteiros na reta numérica. Com esta introdução, será possível explorar a sequência numérica e a comparação entre os números, tratar da igualdade (ou diferença) de números de acordo com o sinal que antecede o número, bem como realizar o tratamento da reta e sua disposição gráfica (horizontal ou vertical).

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Exploração	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos, que representam temperaturas. Representações: Discursivas; Registros: Multifuncionais e Monofuncionais.
Grau de desafio matemático:	Reduzido	
Grau de estrutura:	Aberto	
Relação com a realidade:	Sim	
Duração:	1 hora/aula	

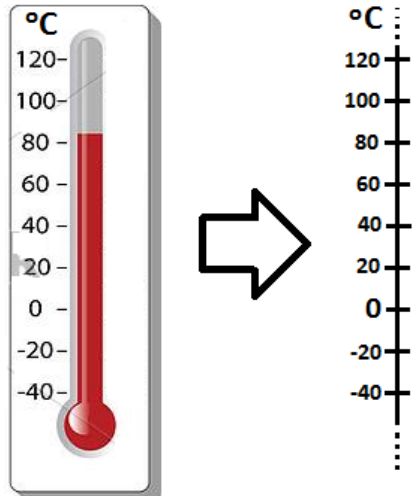
### **Quadro 10: Classificações da Tarefa 7**

**Fonte: o autor**

### Sugestões de Aplicação

Por meio da Tarefa anterior, o aluno já desenvolveu condições de contextualizar os Números Inteiros ao cotidiano, principalmente com escalas termométricas. Logo, poderá ser de imediato a Conversão da reta numérica presente na Representação gráfica de um termômetro para a Representação gráfica de um segmento de reta numérica ordenado, o qual utilizaremos como principal base de apoio nessa Proposta Metodológica. Assim, é necessário ao aluno a compreensão deste elemento gráfico e geométrico para o desenvolvimento das demais Tarefas.

O professor pode orientar aos alunos quanto à representação vertical e horizontal da reta e que esta disposição espacial não altera a interpretação dos Números Inteiros. Além disso, é importante lembrar que a reta dos Números Inteiros apresenta sentido bilateral, ou seja, as flechas devem ser orientadas para ambos sentidos da reta, o que garantirá observar a continuidade numérica.

Nome:	
<p>Você já observou que os termômetros representam de certa forma uma reta numérica, onde nela aparecem os números positivos, os negativos e o zero?</p> <p>Com base nesta observação, responda às questões abaixo:</p>	
a) O número 20 e o número $-20$ são iguais? Justifique sua resposta.	
b) De acordo com a sua resposta anterior, qual número é maior: 40 ou $-40$ ? Justifique.	
c) E entre os números $-5$ e 20, qual deles é maior? E entre $-5$ e $-20$ ? Por que?	
d) Quantos números existem no sentido positivo da reta? Por que?	
e) Qual o significado do zero nesta reta numérica?	
f) Quantos números existem no sentido negativo da reta? Por que?	
g) Há algum outro modo de representar esta mesma reta numérica? Desenhe esta possibilidade.	

### TAREFA 8 (Uma hora/aula)

Esta Tarefa se constitui em um momento de análise e reflexão das Tarefas desenvolvidas anteriormente e o resgate dos principais conceitos apresentados até o momento. É importante que os alunos participem ativamente e colaborem com exemplos e experiências ocorridas durante a execução das Tarefas. Assim se faz um momento rico de diálogo onde os alunos podem aprender com os próprios colegas sob a orientação do professor.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Exercício de Fixação	Conversão: bilateral entre registros escritos na linguagem materna, registros simbólico numéricos e registros gráficos; Tratamento: onde o aluno se utilizará de um conjunto de regras operatórias dentro de um sistema de registro de representação semiótica. Representações: Discursivas; Registros: Multifuncionais e Monofuncionais.
Grau de desafio matemático:	Reduzido	
Grau de estrutura:	Fechada	
Relação com a realidade:	Sim	
Duração:	1 hora/aula	

#### **Quadro 11: Classificações da Tarefa 8**

**Fonte: o autor**

#### Sugestões de Aplicação

É necessário ao professor observar atentamente as respostas apresentadas pelos alunos nas três Tarefas aplicadas até o momento, apontando os erros mais frequentes e as colocações mais pertinentes do ponto de vista de nossa pesquisa. A correção deverá ser coletiva e os alunos devem participar da construção dos conceitos que irão surgindo durante a correção.

### 5.2.3 Tarefas de Comparação entre os Números Inteiros

Neste bloco de Tarefas, o principal objetivo é a comparação e classificação de maioria entre os Números Inteiros, afim de que o aluno construa a ideia linear deste conjunto quando disposto em uma reta, seja ela horizontal ou vertical. Esta proposta se desdobra nas Tarefas 9, 10, 11 e 12.

A Tarefa 9 apresenta os primeiros conceitos de comparação entre os Números Inteiros por meio da ideia intuitiva que pode se desenvolver a partir do registro gráfico do termômetro. Assim, o aluno estará realizando operações, mesmo que implicitamente, com Números Inteiros presentes na reta.

Na Tarefa 10, mediante orientação do professor, os alunos deverão desenhar uma reta numérica horizontal, separando os números positivos e negativos, além de evidenciar o elemento neutro central: o zero. O professor pode intervir afim de destacar que há um sentido tradicional para dispor os números, mas a reta pode apresentar sentido oposto sem perda de generalidade. Assim, os alunos poderão definir os números antecessores e sucessores de inteiros fornecidos na Tarefa, além de ordenar um conjunto de números inteiros quaisquer fornecido.

A Tarefa 11 consiste na análise e comparação entre os Números Inteiros. Para isso, os alunos podem se utilizar dos registros simbólicos tradicionais na comparação de números, tais como o símbolo de maior que, o símbolo de menor que, o símbolo de igual. Para realizar esta comparação, o aluno pode se basear na reta numérica.

Na Tarefa 12 os alunos estudarão, sob orientação do professor, importantes conceitos que serão usados em Tarefas que envolvem operações com Números Inteiros, tais como módulo e oposto de um Inteiro. Este último conceito é a base para realizar cálculos com dois ou mais sinais, onde tradicionalmente é aplicada a regra de sinais.

Por fim, a Tarefa 13 se constitui num momento reflexivo onde se busca discutir coletivamente os principais conceitos estudados neste bloco de Tarefas.



### TAREFA 9 (1 hora/aula)

Esta Tarefa consiste na comparação de números que representam temperaturas no registro gráfico do termômetro. O aluno precisa inferir que o símbolo de menos torna o número menor que o zero e, portanto, menor que qualquer positivo. Assim, o objetivo é fazer com que o aluno elabore suas próprias conclusões sobre a comparação de Números Inteiros, para que estas inferências sejam generalizadas e formalizadas pelo professor.

Esta Tarefa se classifica de acordo com a tabela abaixo:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Exercício	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Não Discursivas; Discursivas; Registros: Multifuncionais e Monofuncionais.
Grau de desafio matemático:	Reduzido	
Grau de estrutura:	Fechado	
Relação com a realidade:	Sim	
Duração:	1 hora/aula	

#### **Quadro 12: Classificações da Tarefa 9**

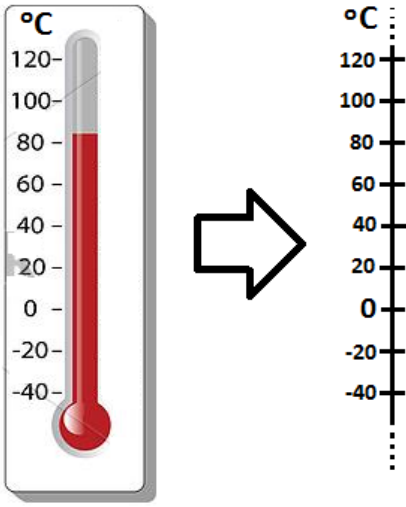
**Fonte: o autor**

#### Sugestões de Aplicação

O professor pode entregar esta Tarefa aos alunos e inferir, por meio do registro gráfico que representa o termômetro e a reta numérica implícita a ele, que os números cujo símbolo de negativo o antecedam, o torna menor que o zero e simultaneamente menor que os positivos.

O aluno deverá compreender que, para um dado número qualquer sobre a reta numérica vertical, todos os números que se encontram acima deste são maiores e os que se encontram abaixo serão menores que o número observado.

O professor não deve revelar de imediato esta generalização aos alunos, e sim, conduzir os mesmos para que eles possam generalizar suas propriedades de comparação entre números positivos e negativos. Isso deve ocorrer por meio da correção coletiva e reflexiva desta Tarefa, procurando construir o conhecimento significativo do aluno.

Nome:	
<p>Com base no termômetro da Tarefa anterior e a reta numérica, é possível comparar números.</p> <p>Assim, observando o desenho ao lado, responda às questões que seguem para elaborar uma conclusão.</p> <p>1. Qual número é maior? Responda e justifique sua resposta:</p>	
a) 60 ou 20?	b) 20 ou 0?
c) -20 ou 0?	d) 20 ou -40?
e) 40 ou -40?	f) -20 ou -40?
g) -7 ou -8?	h) -4 ou 12?
<p>A partir desta Tarefa é possível observar uma regra, uma generalização para definir quando um número é maior que outro. Escreva sua conclusão para generalizar:</p>	

## TAREFA 10 (1 hora/aula)

Esta é uma Tarefa que envolve a operação de Tratamento, onde o aluno deverá compreender que a reta numérica disposta na horizontal tem significado matemático equivalente a reta numérica disposta na vertical, para efeito de comparações numéricas.

Nela, os alunos também precisarão converter os registros gráficos em registros simbólico-numéricos afim de compará-los. O aluno precisa perceber as principais diferenças entre o conjunto já conhecido (Naturais) e o novo conjunto que está sendo explorado (Inteiros), principalmente no que diz respeito ao significado do zero em ambos os conjuntos. Os Naturais têm início no zero, assim não havendo antecessor para ele, enquanto que os Inteiros não apresentam início, assim havendo antecessor para o zero. Além disso, esta Tarefa proporciona um aprofundamento para que o aluno compreenda que  $-4$  é maior que  $-5$ , por exemplo, ou de modo genérico, que  $-x < -x + 1$ .

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Problema	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico.
Grau de desafio matemático:	Elevado	
Grau de estrutura:	Fechado e Aberto (misto)	Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos.
Relação com a realidade:	Não	Representações: Não Discursivas; Discursivas;
Duração:	1 hora/aula	Registros: Multifuncionais e Monofuncionais.

### **Quadro 13: Classificações da Tarefa 10**

**Fonte: o autor**

### Sugestões de Aplicação

O professor poderá conduzir os alunos à realização do desenho da reta numérica horizontal, até por que esta é a primeira Tarefa onde os alunos deverão registrar suas próprias retas numéricas. É importante ressaltar que a proporção entre os números adotada pelos alunos deve ser mantida entre todos os números da reta, e que esta distância entre os números não interfere na resolução da Tarefa. Após a elaboração do desenho, o professor deve lembrar os conceitos de antecessor e sucessor para que os alunos possam desenvolver a Tarefa sozinhos e correção pode se dar coletivamente.

Nome:					
1. Desenhe uma reta numérica horizontal de números inteiros, a partir do $-10$ até o $10$ :					
2. Para responder esta atividade, você deve lembrar o conceito de antecessor e sucessor de um número. Responda com cuidado:					
<i>Antecessor</i>	<i>Número</i>	<i>Sucessor</i>	<i>Antecessor</i>	<i>Número</i>	<i>Sucessor</i>
	3			-5	
	8			-8	
	10			-10	
	1000			-29	
	0			-100	
	-2			-299	

3. O antecessor é sempre um número menor que o número analisado? E o sucessor, é sempre maior? Responda e cite um exemplo para cada questão, com base na Atividade anterior:

4. A reta numérica foi importante em algum momento na resolução desta Tarefa? Justifique:

5. Ao trabalhar com antecessor e sucessor neste conjunto de números, há uma diferença quando comparamos com os Números Naturais. Você observou esta diferença? Qual?

### TAREFA 11 (1 hora/aula)

Neste momento, continuaremos explorando a reta numérica horizontal, que já está registrada na própria estrutura da Tarefa, a qual tem por objetivo avaliar se o aluno estabeleceu relação de maioria entre os Números Inteiros, além de verificar se está atento aos registros de comparação e atribuindo corretamente o sinal no que antecede os números.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Problema	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico.
Grau de desafio matemático:	Elevado	
Grau de estrutura:	Fechado	Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Discursivas; Não Discursivas. Registros: Monofuncionais; Multifuncionais.
Relação com a realidade:	Sim	
Duração:	1 hora/aula	

#### **Quadro 14: Classificações da Tarefa 11**

**Fonte: o autor**

#### Sugestões de Aplicação

O professor poderá explicar que, do modo como a reta está desenhada (sentido convencional), um número é sempre maior que qualquer outro a sua esquerda. Além disso, deverá revisar a aplicação dos símbolos comparativos “maior que” e “menor que”, ou ainda “igual”, bem como a escrita e leitura da sentença matemática de comparação na linguagem materna. Por fim, estão dispostos desordenadamente os números de zero a nove, com os sinais de positivo e negativo que os antecedem. O objetivo é verificar se o aluno compreendeu a qualidade do sinal negativo que antecede o número, que o torna menor que os positivos. Além disso, verificar a capacidade de ordenação destes números em qualquer ordem que seja necessário. A correção pode ocorrer coletivamente afim de se utilizar dos exemplos fornecidos pelos alunos, valorizando assim o conhecimento prévio dos mesmos.

Nome:			
1. Com base na reta numérica, estabeleça comparação entre os números por meio dos símbolos < (menor que), > (maior que) ou = (igual) :			
5.....8	7.....2	6.....+6	3.....0
0.....1	0.....-1	-5.....0	-3.....3
-8.....2	-1.....-4	-0.....0	-50.....20
-20.....20	-60.....-40	-26.....0	200.....-1000

2. Atribua um sinal (<, > ou =) de comparação nas seguintes situações e escreva por extenso a sentença matemática. Depois, justifique que critério usou para a escolha do sinal com base na reta numérica:

a)  $17 \dots\dots\dots +17$

d)  $0 \dots\dots\dots 17$

b)  $-17 \dots\dots\dots 17$

e)  $0 \dots\dots\dots -17$

c)  $0 \dots\dots\dots -0$

f)  $-0 \dots\dots\dots -17$

CRITÉRIO:

3. Ordene os números em ordem crescente (do menor para o maior):

6      -4      3      -8      -1      2      0      9      -5      -7

4. Ordene os números abaixo em ordem decrescente:

-20      45      -5      15      -40      0      -10      25      30      35

## TAREFA 12 (1 hora/aula)

Esta Tarefa tem o objetivo de verificar a capacidade do aluno compreender que a ausência do registro simbólico numérico sobre uma marcação na reta não exclui o objeto numérico daquele local. Isso também está relacionado com o conceito de continuidade numérica da reta e o infinito. Para isso, o aluno deve compreender que cada letra sobre a reta representa um número. Contudo, o aluno aprenderá a calcular a distância entre dois pontos sobre a reta e o conceito de módulo, ambos importantes para a compreensão de elemento oposto.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Investigação	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Discursivas. Registros: Monofuncionais.
Grau de desafio matemático:	Elevado	
Grau de estrutura:	Aberto	
Relação com a realidade:	Não	
Duração:	1 hora/aula	

### Quadro 15: Classificações da Tarefa 12

Fonte: o autor

### Sugestões de Aplicação

O professor poderá explicar que as letras dispostas sobre a reta numérica representam números ausentes, e assim os alunos precisam relacionar cada letra na ao seu respectivo representante numérico disposto logo abaixo. O aluno também deverá verificar quais números não foram registrados na reta numérica.

Depois, o professor deverá exemplificar uma situação de distância entre dois pontos quaisquer na reta, e mencionar que o valor atribuído para a distância não deve ser negativo, por se tratar de um comprimento. Assim, conceituar o módulo de um número e a relação com números opostos.

Por fim, os alunos precisam realizar trocas de vários sinais por um sinal equivalente, o que pode ser compreendido por meio do conceito de elemento oposto. Se necessário, o professor poderá intervir com um exemplo. Após o término desta Tarefa poderá ocorrer a correção coletiva.

Nome:					
Na reta numérica a seguir, alguns números estão ausentes e sendo representados por letras:					
1. Associe corretamente cada número disposto abaixo com cada letra presente na reta numérica acima:					
9	-7	2	-9	-3	6
2. Agora, verifique qual(is) número(s) não foram representados, entre:					
F e B	B e C	C e A	A e E	E e D	
3. Nesta atividade, você deverá usar o conceito de módulo, ou seja, a distância do número até o zero, na reta numérica. Logo, verifique o módulo dos números representado por:					
A	B	C	D	E	F
Dois números são chamados de opostos (ou simétricos) quando o módulo de ambos é igual. Por exemplo, o módulo de +3 é igual a 3. O módulo de -3 também é igual a 3. Portanto, os números +3 e -3 possuem o mesmo módulo e são chamados de opostos ou simétricos.					
4. Com base na reta numérica, obtenha o oposto de cada número:					
7	+8	0	-5		
-1	-6	25	-10		
O sinal de menos é utilizado para simbolizar o oposto de um número. Por exemplo, o oposto de 8 é -8. O oposto de -7 é $-(-7)$ , que na reta numérica é representado pelo +7. Agora, simplifique os sinais e determine o oposto em cada situação:					
$-(-2) =$	$-(-5) =$	$-(-(-3)) =$	$-(-(-7)) =$	$-(-(-(-4))) =$	



### TAREFA 13 (Uma hora/aula)

Esta Tarefa se constitui em um momento de análise e reflexão das Tarefas desenvolvidas anteriormente e o resgate dos principais conceitos apresentados até o momento. É importante que os alunos participem ativamente e colaborem com exemplos e experiências ocorridas durante a execução das Tarefas. Assim se faz um momento rico de diálogo onde os alunos podem aprender com os próprios colegas sob a orientação do professor.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Exercício	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico.
Grau de desafio matemático:	Reduzido	
Grau de estrutura:	Fechado	Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Discursivas; Não Discursivas; Registros: Multifuncionais e Monofuncionais.
Relação com a realidade:	Não	
Duração:	1 hora/aula	

**Quadro 16: Classificações da Tarefa 13**

**Fonte: o autor**

#### Sugestões de Aplicação

É necessário ao professor observar atentamente as respostas apresentadas pelos alunos nas quatro Tarefas aplicadas até o momento, apontando os erros mais frequentes e as colocações mais pertinentes do ponto de vista de nossa pesquisa. A correção deverá ser coletiva e os alunos devem participar da construção dos conceitos que irão surgindo durante a correção.

### 5.3 TAREFAS DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Entendemos por Tarefas de operações aquelas em que o aluno, já superado a fase inicial de compreensão e aceitação dos Números Inteiros, bem como havendo o domínio dos conceitos necessários a esta etapa, desenvolverá as quatro operações básicas envolvendo os números deste conjunto. Assim, não nos aprofundaremos nas demais operações que possam surgir, pois demandam dessas quatro iniciais.

#### 5.3.1 Tarefas de Soma Simples com Números Inteiros

Nesta categoria de Tarefas, nosso objetivo é realizar as operações simples de soma (adição e subtração) com Números Inteiros. Estamos, num primeiro momento, interessados nas somas que não exijam regras de sinais, as quais denominamos nesta pesquisa de somas simples.

Buscaremos resolver a Tarefa 14 por meio de deslocamentos sobre a reta numérica. Não trataremos, ao menos nesse momento, do modelo comercial (associação das operações com as palavras de lucros e dívidas), por entendermos que pode causar obstáculos didáticos quando ele é trabalhado prioritariamente.

Na Tarefa 15 buscamos nos aprofundar na propriedade de comutatividade da soma, afim de melhor resolver situações com Números Inteiros. Como optamos em tratar da soma por meio do modelo geométrico (deslocamentos sobre a reta numérica), observamos que a aplicação da comutatividade pode diminuir os comprimentos de deslocamentos sobre a reta.

Por exemplo, na soma  $-2 + 15$ , o aluno deverá iniciar o deslocamento a partir do número  $-2$  sobre a reta, e se deslocar 15 unidades para o sentido positivo (direito). Mas, por meio da aplicação da propriedade de comutatividade, a soma anterior é equivalente a  $+15 - 2$ , e desta forma o aluno deve compreender que iniciará o deslocamento a partir do número 15 sobre a reta e se deslocará apenas 2 unidades no sentido negativos da reta (esquerdo), resultando no mesmo valor.

## TAREFA 14 (1 hora/aula)

Nesta Tarefa, o objetivo é a realização da operação soma (adição e subtração) simples envolvendo Números Inteiros, com base nos deslocamentos sobre a reta numérica. Para isso, os alunos irão explorar duas atividades de retas, sendo uma horizontal e outra vertical.

Neste sentido, o aluno aprenderá um método eficiente e formal para a soma dos Números Inteiros, não havendo a necessidade de fazer referência ao modelo comercial e não precisando fazer conexões com o concreto. Este modelo demanda mais tempo do aluno para realizar as operações no início do processo, porém, por meio da prática, ele pode se tornar tão eficiente quanto o modelo comercial.

A Tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Problema	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico.
Grau de desafio matemático:	Elevado	
Grau de estrutura:	Fechada	Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Discursivas; Não Discursivas. Registros: Monofuncionais; Multifuncionais.
Relação com a realidade:	Sim	
Duração:	1 hora/aula	

### **Quadro 17: Classificações da Tarefa 14**

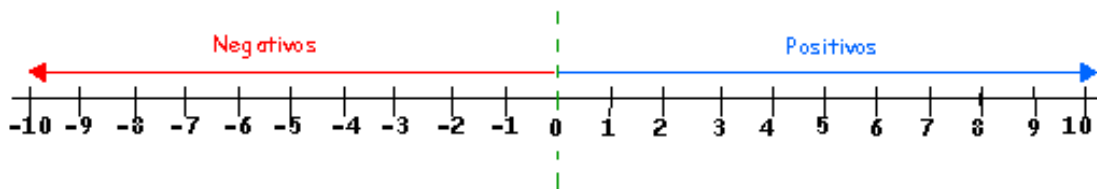
**Fonte: o autor**

### Sugestões de Aplicação

Por se tratar de um método diferente para realizar operações com Números Inteiros, se faz necessário a intervenção do professor afim de exemplificar expressões no contexto da reta numérica. Assim, o professor deve deixar claro que a primeira parcela da soma representa o número que se deve iniciar o deslocamento, e a segunda parcela representa o comprimento deste deslocamento sobre a reta numérica, onde o sinal positivo indica deslocamento para a direita, enquanto o sinal negativo indica deslocamento para a esquerda. A marcação numérica em que finalizar o deslocamento representa o resultado desta operação. Tomemos como exemplo a soma  $-3 + 5$ , isto é, partindo de  $-3$  na reta numérica, deslocar-se 5 unidades para a direita, finalizando no número 2. De modo análogo, os alunos farão o exercício do elevador no prédio.

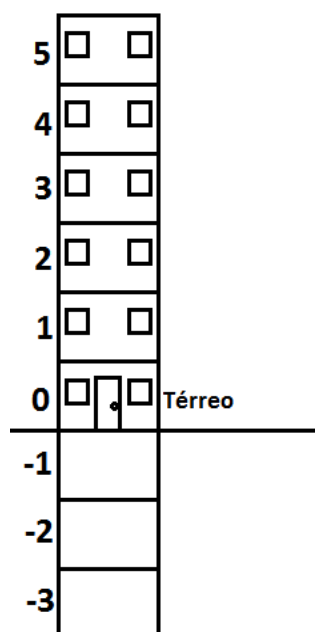
Nome:

1. Nesta Tarefa, vamos realizar operações envolvendo números negativos, fazendo uso da reta numérica abaixo:



$2 + 3 =$	$4 - 7 =$	$- 7 + 3 =$	$- 2 + 5 =$
$6 - 2 =$	$0 - 6 =$	$- 4 + 4 =$	$- 1 - 8 =$
$2 - 3 =$	$5 - 10 =$	$- 5 + 0 =$	$- 3 - 2 =$
$- 3 + 3 =$	$- 7 + 7 =$	$- 1 + 1 =$	$- 10 + 10 =$

2. Um pequeno prédio composto pelo térreo, 5 andares acima do térreo e 3 pavimentos no subsolo, tem um elevador que se desloca por todos os andares.



Suponha que o primeiro número da expressão numérica representa o andar em que o elevador se encontra e os demais números representam deslocamentos que elevador realizou, verifique no qual andar ele irá parar:

$$- 2 + 3 - 1 + 4 =$$

$$4 - 6 + 3 - 2 =$$

$$1 + 3 - 5 - 2 =$$

$$- 3 + 1 + 4 - 2 =$$

$$3 + 1 - 5 - 1 =$$

$$2 - 3 - 2 + 4 =$$

$$0 - 2 + 4 - 3 =$$

$$- 3 + 3 + 4 - 5 =$$

### TAREFA 15 (1 hora/aula)

Esta Tarefa tem o objetivo de que o aluno realize a operação de Conversão dos registros representados na linguagem materna para registros simbólico-numéricos, onde cada frase apresenta relação de congruência semântica com a expressão simbólica. A valorização dos conhecimentos prévios poderá facilitar a introdução da propriedade comutativa da soma.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Exercício	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Discursivas. Registros: Monofuncionais; Multifuncionais.
Grau de desafio matemático:	Reduzido	
Grau de estrutura:	Fechado	
Relação com a realidade:	Não	
Duração:	1 hora/aula	

**Quadro 18: Classificações da Tarefa 15**

**Fonte: o autor**

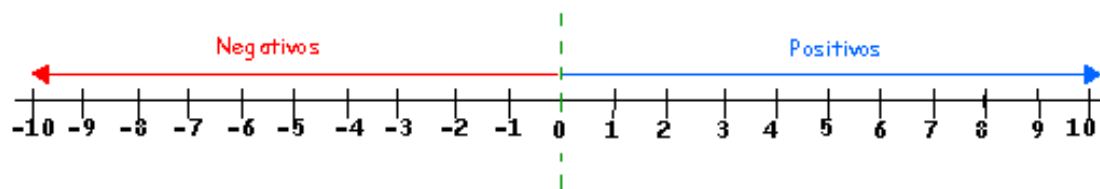
#### Sugestões de Aplicação

Será necessária uma intervenção antes da aplicação desta Tarefa, onde o professor poderá explicar a propriedade comutativa da soma. Espera-se que haja alunos se valendo desta propriedade ao resolver a Tarefa, afim de facilitar a resolução.

A explicação desta Tarefa deve ser intermediada com base na reta numérica, igualmente na Tarefas anteriores, onde a primeira parcela representa o local de início dos deslocamentos e a segunda parcela significa a quantidade das unidades de deslocamento sobre a reta, onde o sentido é dado pelo sinal desta segunda parcela. O valor sobre o qual finalizar o deslocamento sobre a reta representa a resposta da expressão.

Nome:

Comutatividade da soma: verifique esta propriedade por meio da seguinte situação problema, envolvendo a reta numérica:



Qual é o resultado da soma  $-6 + 3$ ? Qual é a interpretação na reta numérica?

E qual será o resultado da soma  $+3 - 6$ ? Qual a interpretação na reta?

Para cada situação descrita, converta as informações para o registro simbólico numérico e as resolva de acordo com a reta numérica:

Dois mais sete negativo	Doze mais oito negativo
Doze negativo mais oito	Três mais oito negativo
Doze negativo mais oito negativo	Menos três mais dois negativo
Dois negativo menos cinco	Sete menos dez

### 5.3.2 Tarefas de Soma Complexa com Números Inteiros

Afim de sintetizar as explicações, denominamos nesta pesquisa como soma complexa aquelas expressões em que as operações necessitem da regra de sinais, a qual não pretendemos utilizar do modo tradicional: memorização. Assim, buscaremos superar as somas complexas com base na existência do elemento oposto, conceito formal que não demanda relação com meios concretos e externos à Matemática. Apresentamos a Tarefa 16, 17, 18, 19 e 20, as quais demandam regra de sinais para sua resolução.

Na Tarefa 16 há a explicação de que, quando nas expressões aparecem dois sinais contínuos (isto é, não separados por números), devemos analisar se a situação exige a substituição pelo elemento oposto. Por exemplo, onde temos  $+(-7)$ , o sinal positivo que antecede o  $(-7)$  indica a não exigência da substituição pelo elemento oposto, logo, suprimimos o sinal de mais e mantemos a expressão com  $-7$ . De modo análogo, para a situação  $-(-3)$ , o primeiro sinal de menos representa a necessidade da troca pelo elemento oposto de  $(-3)$ , logo faz-se a troca por  $+3$ .

A Tarefa 17 constitui-se num momento lúdico no qual utilizaremos um conhecido jogo matemático que adaptamos afim de contemplar todas as operações tratadas até o momento. Assim, o aluno poderá expor seu conhecimento por meio da elaboração das jogadas que serão registradas pelo aluno. Com esta dinâmica, espera-se que o aluno, ancorado nas intervenções do colega de jogo, possa melhorar suas habilidades de cálculo de somas com Números Inteiros.

A Tarefa 18 é semelhante à 15, a qual envolve soma de Números Inteiros. Todavia, nesta Tarefa busca-se a não intervenção do professor, pois espera-se que o aluno tenha melhorado seu conhecimento por meio da ludicidade e possa, de maneira autônoma, expor este avanço.

Na Tarefa 19 procuramos apresentar exercícios comuns em livros didáticos, os quais adaptamos para contemplar os Números Inteiros. Esta Tarefa tem o objetivo apenas de reforçar o conteúdo já trabalhado, apresentando exercícios tradicionais, mas que podem demandar Atividade por parte do aluno.

Por fim, a Tarefa 20 se constitui no momento de reflexão, o qual consideramos de suma importância para que o professor possa, juntamente com os alunos, verificar as principais defasagens e assim desenvolver ações que visam superar os obstáculos encontrados até o momento.

**TAREFA 16** (1 hora/aula)

Esta Tarefa deverá ser realizada com o auxílio da reta numérica, afim de desenvolver as operações requeridas por meio dos deslocamentos sobre a reta e realizar os cálculos de soma complexa por meio do elemento oposto. Pretendemos não apresentar a regra de sinais aos alunos, mas sim os conduzir para que eles mesmos observe-a e generalize por meio de soluções originais.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Exercício	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Discursivas. Registros: Monofuncionais.
Grau de desafio matemático:	Reduzido-médio	
Grau de estrutura:	Fechada	
Relação com a realidade:	Não	
Duração:	1 hora/aula	

**Quadro 19: Classificações da Tarefa 16**

**Fonte: o autor**

## Sugestões de Aplicação

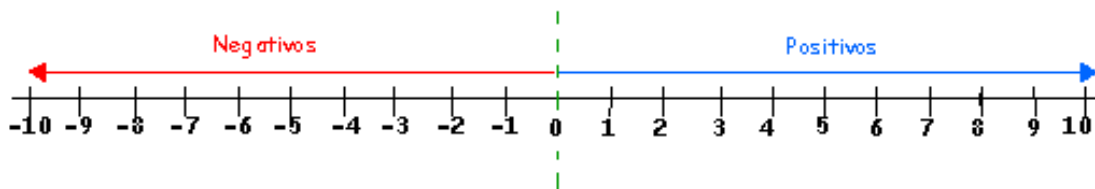
O professor poderá relembrar as operações simples que já foram trabalhadas em Tarefas anteriores, com base na reta numérica. Deste modo, poderá introduzir gradativamente as expressões que envolvam a soma complexa e demandem a regra de sinais, que trataremos por meio do elemento oposto.

A modo de exemplificação, o professor poderá resolver a expressão  $-5 - (-2)$ . Tomando o elemento oposto de  $-2$ , que é  $+2$ , a expressão pode ser escrita como  $-5 + 2$ , onde inicia-se em  $-5$  sobre a reta e desloca-se 2 unidades no sentido positivo (direito) da reta. Outro modo, para início do cálculo, poderia ser aplicado a comutatividade da soma afim de facilitar a visualização da expressão, isto é, reescrevê-la como  $-(-2) - 5$ . O professor poderá propor mais exemplos caso haja a necessidade.



Nome:

1. Vamos resolver as expressões abaixo utilizando a reta numérica e o conhecimento que aprendemos até agora:



$$5 + (-3) =$$

$$3 - (+5) =$$

$$2 - (-3) =$$

$$-2 - (-5) =$$

2. Agora é sua vez: resolva as operações abaixo de acordo com o exemplo:

$$2 + (-3) =$$

$$4 - (-7) =$$

$$-7 + (-3) =$$

$$-2 + (-5) =$$

$$6 - (-2) =$$

$$0 - (-6) =$$

$$-4 + (-4) =$$

$$-1 - (-8) =$$

$$2 - (-3) =$$

$$5 - (-10) =$$

$$-5 + (-0) =$$

$$-3 - (-2) =$$

$$-(-3) + 3 =$$

$$-(-7) + (-7) =$$

$$-(-1) + 1 =$$

$$-10 + (+10) =$$

3. Desafio: resolva a soma:  $5 + (-3) - (-6) - (+4) - 7 =$

## TAREFA 17 – Jogo Vai e Vem (3 horas/aula)

Esta é uma Tarefa lúdica que envolve um conhecido jogo matemático, o qual adaptamos para que nossos alunos possam colocar em prática e reforçar todo o conhecimento adquirido até agora.

O jogo que propomos é uma adaptação do jogo Vai e Vem, o qual apresenta uma trilha que representa a reta numérica de por meio dos dados se exercita deslocamentos sobre a reta, de acordo com o resultado positivo ou negativo.

Nossa adaptação consistiu em atribuir mais regras para que, além da exploração tradicional do jogo, que ocorria somente por meio da soma simples dos dados, o aluno também possa praticar as operações de soma complexa com os Números Inteiros, além de desenvolver estratégias para o sucesso no jogo, que tradicionalmente não é contemplado por depender majoritariamente da sorte ao lançar os dados. O jogo foi adaptado a partir do livro PROMAT (Projeto Oficina de Matemática), da FTD.

A tabela a seguir mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Problema	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico.
Grau de desafio matemático:	Médio-Elevado	
Grau de estrutura:	Fechado	Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos.
Relação com a realidade:	Não	Representações: Discursivas; Não Discursivas;
Duração:	1 hora/aula	Registros: Multifuncionais e Monofuncionais.

### **Quadro 20: Classificações da Tarefa 17**

**Fonte: o autor**

### Sugestões de Aplicação

Antes de jogar é preciso montar as peças do jogo. Assim, é necessário que cada aluno recorte e monte dois dados presentes no corpo da atividade. É necessário que cada dupla do jogo tenha montado os três modelos de dados presentes na Tarefa.

Pode-se imprimir um tabuleiro por dupla e a Ficha de Registros deve ser obrigatoriamente uma por aluno, pois estes registrarão as jogadas e realizarão os cálculos em acordo com o lançamento dos dados. As fichas de Jogadas são um importante instrumento de registro para análise. As regras devem ser bem explicadas aos alunos, para que não reste dúvidas durante o jogo.

## Tabuleiro – Jogo Vai e Vem

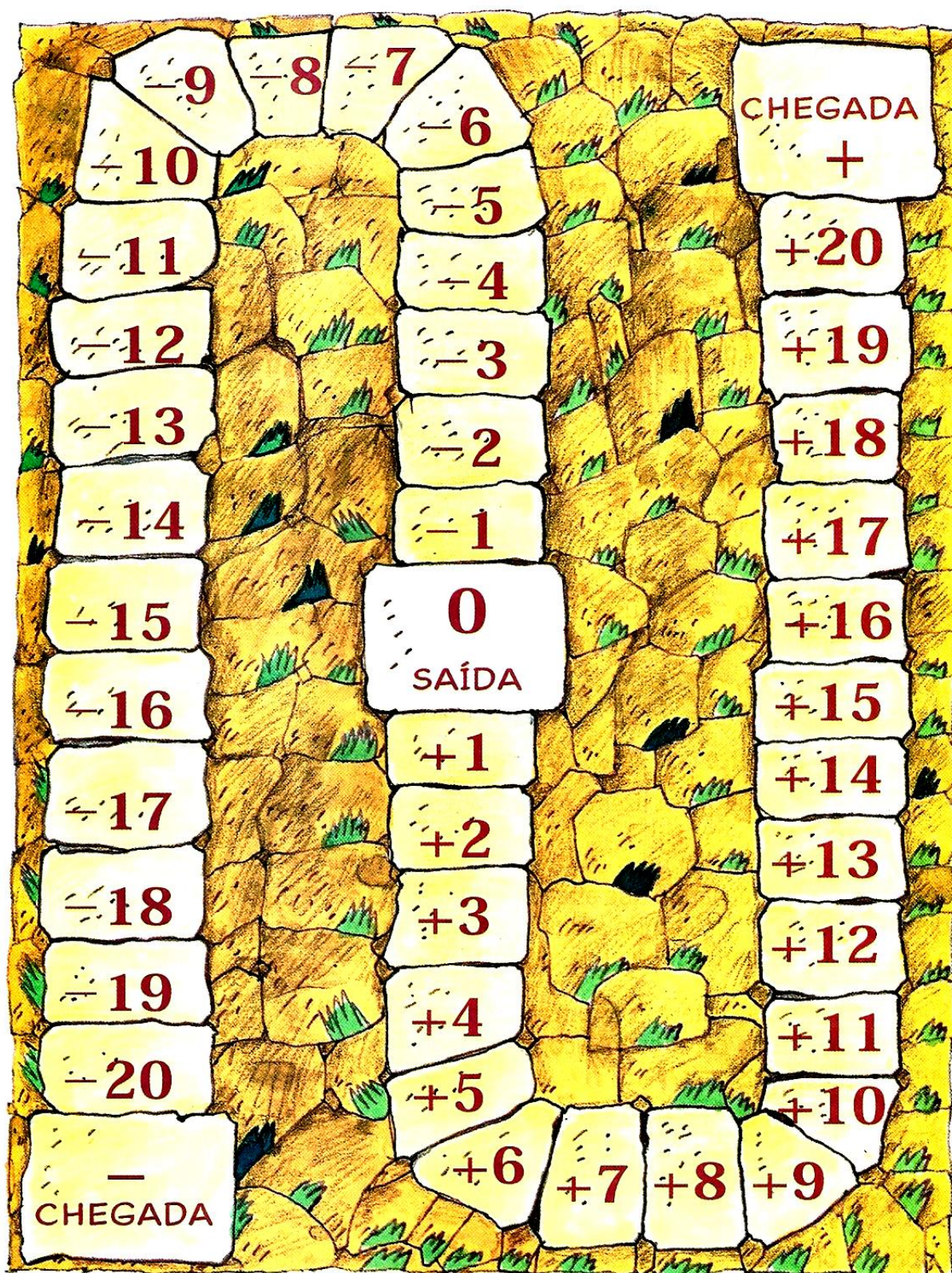
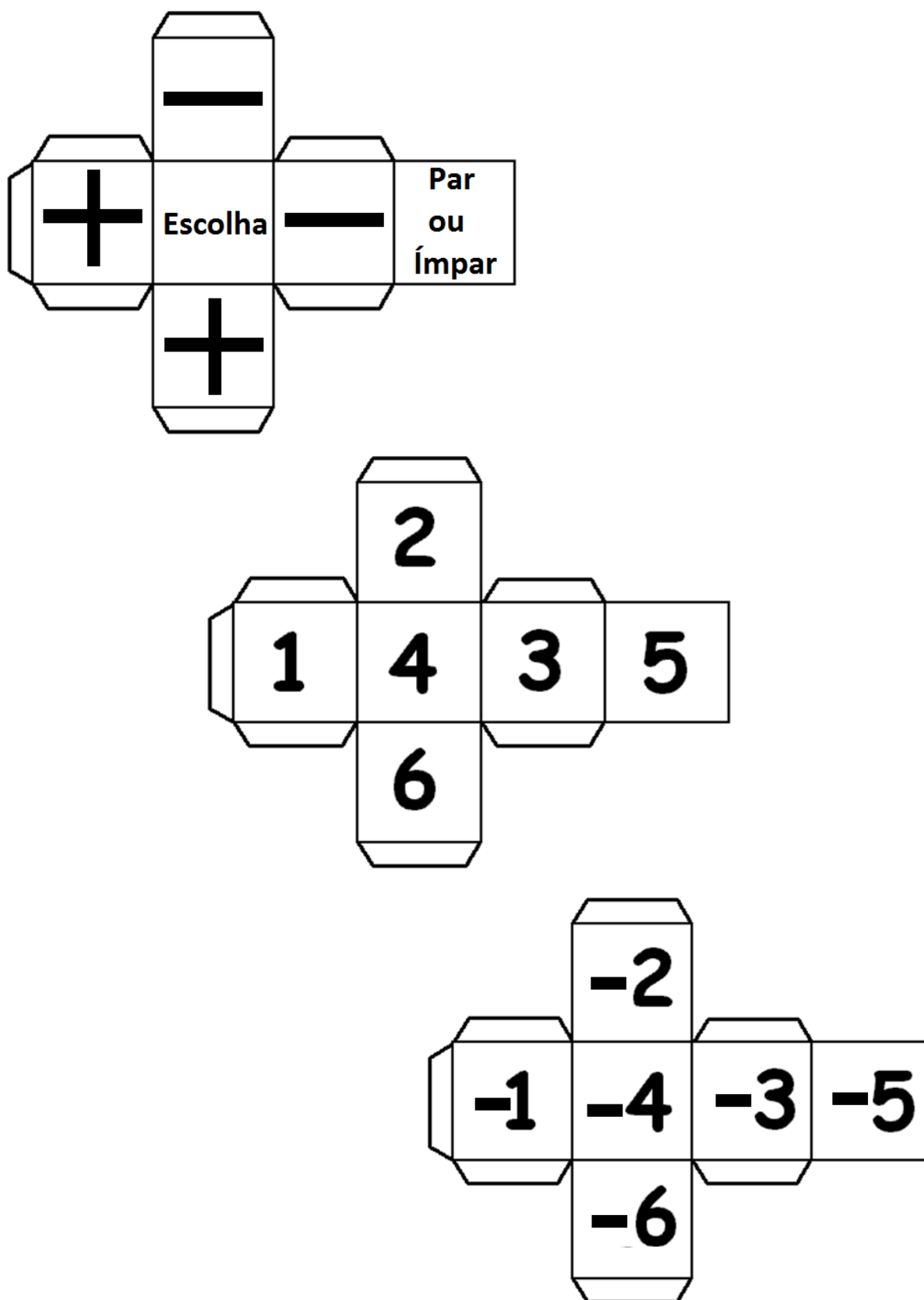


Figura 2: Tabuleiro utilizado no Jogo Vai e Vem  
 Fonte: Grasseschi, 1999, p.61

## Dados para o Jogo Vai e Vem



*Figura 3: Dados utilizados para o Jogo Vai e Vem*  
*Fonte: o autor*

NOME DO JOGADOR:.....

NOME DO ADVERSÁRIO:.....

#### REGRAS DO JOGO VAI E VEM

Joga-se os três dados simultâneos e realiza a operação com os registros das faces superiores. Dispondo o dado de operações no meio dos outros dois dados numéricos, realiza-se a operação necessária e desloca-se:

- No sentido positivo da trilha, se obter resultado positivo a partir dos três dados;
- No sentido negativo da trilha, se obter resultado negativo a partir dos três dados;
- Opte por adição ou subtração (+ ou -) quando na face superior do dado aparecer ESCOLHA;
- Se a face superior do dado for PAR ou ÍMPAR, deve realizar a soma dos dois dados numéricos e deslocar no sentido positivo caso o módulo do resultado seja par ou no sentido negativo caso o módulo do resultado seja ímpar;

O jogo termina quando um dos jogadores alcançar (ou passar) uma das duas casas de chegada! Caso isso não ocorra, ganha quem estiver mais próximo de uma das chegadas!

#### TABELA DE REGISTROS

JOGADA	ESTOU?	DADO 1	SINAL	DADO 2	CASAS	PAREI
1º.						
2º.						
3º.						
4º.						
5º.						
6º.						
7º.						
8º.						
9º.						
10º.						
11º.						
12º.						
13º.						
14º.						
15º.						
16º.						
17º.						

GANHADOR:.....

### TAREFA 18 (1 hora/aula)

Esta Tarefa se caracteriza como um exercício de fixação, onde o aluno deverá expor seu conhecimento por meio da resolução individual, apresentando soluções originais para as expressões propostas. Nesta Tarefa, não fornecemos o registro da reta numérica, afim de verificar quais métodos de resolução os alunos irão utilizar. Se os mesmos julgarem necessário, podem estar realizando o desenho da reta, porém esta Tarefa deve valorizar o cálculo mental. Nesta etapa, o aluno já poderá perceber a existência de tal regra quando tomamos o elemento oposto de um número.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Exercício	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Discursivas. Registros: Monofuncionais.
Grau de desafio matemático:	Reduzido-Médio	
Grau de estrutura:	Fechado	
Relação com a realidade:	Não	
Duração:	1 hora/aula	

**Quadro 21: Classificações da Tarefa 18**

**Fonte: o autor**

#### Sugestões de Aplicação

O professor poderá revisar o método utilizado nas Tarefas anteriores para realizar as operações de somas simples e complexas e, quando necessário, realizar a substituição de um número pelo seu elemento oposto. O professor pode resolver coletivamente a questão 1 afim de exemplificar as operações ou ainda propor outras expressões que julgue necessário. A questão 2 o aluno deve resolver sozinho afim de colocá-lo em Atividade e produzir o seu próprio conhecimento. Acreditamos que esta Tarefa, sendo aplicada logo após o jogo que elaboramos, trará melhores resultados no que diz respeito às soluções apresentadas pelos alunos.

Nome:	
1. Agora que você aprendeu a operar com Números Inteiros, vamos resolver as expressões abaixo. Não esqueça do elemento oposto quando for necessário:	
$(+ 5) - (+ 2) =$	$(+5) - (- 2) =$
$(- 5) - (+ 2) =$	$(-5) - (- 2) =$
2. Agora é sua vez: resolva as subtrações abaixo, com base no exemplo.	
$(+ 4) - (- 3) =$	$(+3) - (- 4) =$
$(- 4) - (+ 3) =$	$(- 3) - (- 4) =$
$(- 4) - (- 3) =$	$(- 3) + (- 4) =$
$5 + (- 2) =$	$4 - (- 3) =$
$3 + (- 5) =$	$- 2 + (- 3) =$
$- 1 + (- 3) =$	$- 1 - (- 5) =$

**TAREFA 19** (1 hora/aula)

As questões que propostos nesta Tarefa são comuns em livros didáticos quando tratamos de operações com naturais. Todavia, adaptamos três modelos afim de contemplar os Números Inteiros e as operações em questão, configurando um maior grau de desafio aos alunos.

As duas primeiras questões são pirâmides de soma, onde o número de um retângulo é resultado obtido por meio de alguma operação entre os dois retângulos imediatamente abaixo. Esta operação poderá ser de adição ou subtração, e o aluno deverá descobri-la por meio dos dados fornecidos nela.

A terceira questão é uma adaptação do quadrado mágico, no qual o aluno deverá completa-lo com Números Inteiros para que a soma mágica seja  $-6$ .

Na última questão, chamada de soma zero, o aluno deve completar as três regiões interiores a cada círculo com os números apresentados, afim de que a soma dos três resulte em zero.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Problema	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico.
Grau de desafio matemático:	Elevado	
Grau de estrutura:	Fechado	Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos.
Relação com a realidade:	Não	Representações: Discursivas; Não Discursivas;
Duração:	1 hora/aula	Registros: Multifuncionais e Monofuncionais.

**Quadro 22: Classificações da Tarefa 19**

**Fonte: o autor**

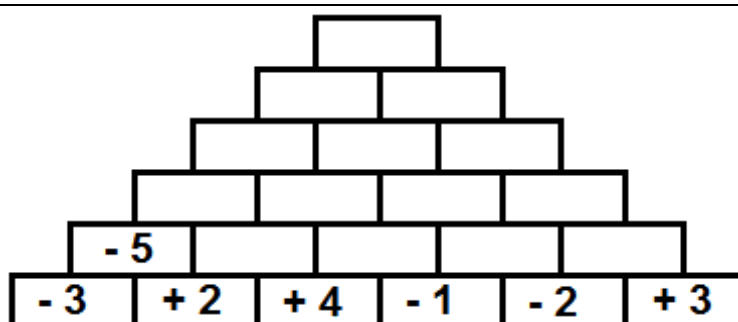
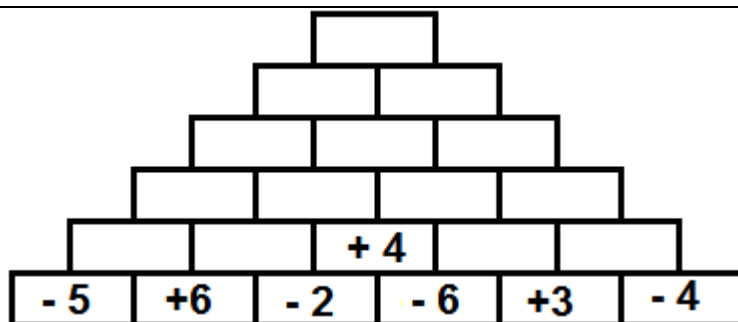
## Sugestões de Aplicação

Antes de aplicar esta Tarefa, é necessário que o professor dialogue com a turma afim de verificar a familiaridade destes modelos de questões aos alunos. A situação ideal seria o professor deixá-los livres para que os mesmos investiguem a Tarefa e descubram as lógicas de resolução que deverão ser empregadas. Todavia, o professor poderá intervir e se utilizar de exemplos caso a situação exija.



Nome:

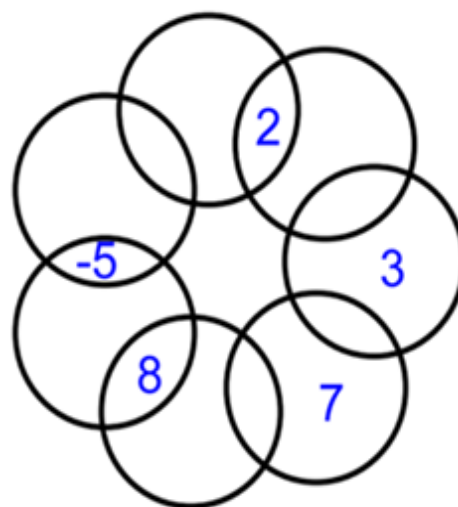
1. Nas pirâmides abaixo, dois retângulos consecutivos resultam no retângulo acima, por meio de uma operação. Descubra qual é a operação de formação da pirâmide e complete-as corretamente:



2. Complete o quadrado mágico abaixo, de modo que todas as linhas e todas as colunas somam  $-6$ :

<b>-9</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	
<b>2</b>			<b>-1</b>
	<b>0</b>	<b>1</b>	
<b>3</b>		<b>-8</b>	<b>6</b>

- Soma Zero: utilizando os números  $-1, -7, -3, 5, -8, -9, -8, 1$  e  $6$  complete o diagrama de modo que a soma dentro de cada círculo seja zero:



**TAREFA 20** (1 hora/aula)

Esta Tarefa se constitui em mais um momento de análise e reflexão das Tarefas desenvolvidas anteriormente, e o resgate dos principais conceitos apresentados até o momento. É importante que os alunos participem ativamente e colaborem com exemplos e experiências ocorridas durante a execução das Tarefas. Assim se constrói um momento rico de diálogo onde os alunos podem aprender com os próprios colegas sob a orientação do professor.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Exercício	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico.
Grau de desafio matemático:	Reduzido	
Grau de estrutura:	Fechado	Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos.
Relação com a realidade:	Não	Representações: Discursivas; Não Discursivas;
Duração:	1 hora/aula	Registros: Multifuncionais e Monofuncionais.

**Quadro 23: Classificações da Tarefa 20**

Fonte: o autor

## Sugestões de Aplicação

É necessário ao professor observar atentamente as respostas apresentadas pelos alunos nas seis Tarefas aplicadas até o momento, apontando os erros mais frequentes e as colocações mais pertinentes do ponto de vista de nossa pesquisa. A correção deverá ser coletiva e os alunos devem participar da construção dos conceitos que irão surgindo durante a correção.

Observamos que desde a última Tarefa que se constituiu em um momento reflexivo, já foi desenvolvido uma quantidade maior de Tarefas, o que requer agora um aprofundamento maior na reflexão das Tarefas e dos obstáculos observados e relatados pelos alunos, afim de superá-los.

### 5.3.3 Tarefas de Multiplicação e Divisão com Números Inteiros

Neste bloco de Tarefas vamos propor àquelas que remetem às operações de multiplicação e divisão, nas quais se transita gradativamente de uma a outra, por serem operações inversas que desfrutam propriedades semelhantes, onde uma complementa a outra.

Deste modo, preferimos desenvolver ambas simultaneamente, afim de estabelecer relações entre as duas. Com isso, ao elaborarmos questões que tratem da operação inversa, já estamos propondo possíveis variações de Tarefas, com objetivos diferentes e que requerem o trânsito por diversos registros, requerendo muitas vezes maior Atividade por parte do aluno.

A Tarefa 21 trata da operação de multiplicação desenvolvida por meio da soma de parcelas, conceito que muitas vezes não é desenvolvido com os alunos. Entendemos que este conceito se faz importante para uma melhor compreensão da multiplicação entre Números Inteiros.

Na Tarefa 22 tratamos da comutatividade da multiplicação e apresentamos um recurso que, por meio da sequência numérica exposta, o aluno poderá generalizar a regra de sinais, sem obrigar-lhe a decorar a regra, como tradicionalmente ocorre. Além disso, fazemos uma rápida introdução à multiplicação entre dois números negativos, mas sem formalizar este conceito.

Na Tarefa 23 apresentamos mais questões de multiplicação e ampliamos o conhecimento por meio de questões que remetem ao uso da operação inversa, isto é, a divisão. Ausentamos o multiplicando ou o multiplicador para que o aluno os calcule com base na resposta da multiplicação já fornecida. Nesta Tarefa, introduzimos discretamente e gradativamente a operação de divisão.

Na Tarefa 24 apresentamos questões de aprofundamento da operação divisão com Números Inteiros, mesclando a tipologia das questões em uma mesma Tarefa. Iniciamos com divisões tradicionais, onde se deve calcular o resultado (quociente) e transitamos para operações em que o resultado é fornecido e o aluno deve calcular o dividendo ou o divisor.

Por meio destas quatro Tarefas, se forem devidamente exploradas e aprofundadas, já é possível desenvolver as operações de multiplicação e divisão de Números Inteiros ao ponto de os alunos obterem domínio satisfatório.

**TAREFA 21** (1 hora/aula)

Esta Tarefa tem por objetivo desenvolver a multiplicação por meio da soma de parcelas, para posteriormente melhor explicar as situações em que pelo menos um dos números da multiplicação for negativo. Para isso, será necessário desenvolver o conceito inicial e formal de multiplicação. Nosso objetivo não é apresentar a Regra de Sinais e trabalhar com a multiplicação por meio da regra, e sim, desenvolver Tarefas que possibilitem ao aluno inferir a regra e generalizar por si só.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Exercício	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico.
Grau de desafio matemático:	Reduzido	
Grau de estrutura:	Fechado	Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos.
Relação com a realidade:	Não	Representações: Discursivas.
Duração:	1 hora/aula	Registros: Monofuncionais.

**Quadro 24: Classificações da Tarefa 21**

Fonte: o autor

## Sugestões de Aplicação

O professor pode exemplificar o princípio formal da multiplicação por meio da adição de parcelas, ainda sem envolver números negativos. Tomemos como exemplo a multiplicação  $5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ .

Em nossas experiências como professor, notamos que uma grande parte dos alunos não compreende a multiplicação de números deste modo, como somas de parcelas. Assim, após a contextualização exemplificada, o professor deve estender o conceito de multiplicação com naturais para os Números Inteiros. Todavia, nesta Tarefa vamos explorar somente a multiplicação em que a primeira parcela é positiva e a segunda parcela é negativa. Como exemplo,  $3 \times (-4)$  pode ser entendido como  $(-4) + (-4) + (-4)$ , resultando em  $-12$ . A partir deste conhecimento, os alunos poderão então avançar para modelos de expressões mais complexos.

Nome:			
1. A multiplicação é uma operação que simplifica a soma de várias parcelas. Por exemplo: $5 + 5 + 5$ pode ser simplificado como $3 \times 5$ . Com base nesse exemplo, represente as somas pela multiplicação e resolva-as:			
$3 + 3 + 3 + 3 =$	$7 + 7 =$	$4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$	$9 + 9 + 9 =$
2. Agora, escreva as multiplicações como somas e resolva:			
$5 \times 2 =$		$2 \times 5 =$	
$3 \times 7 =$		$6 \times 8 =$	
3. Escreva as somas de parcelas na forma de multiplicação e resolva-as:			
$(-3) + (-3) + (-3) + (-3) =$		$(-9) + (-9) + (-9) =$	
4. Do mesmo modo, é possível realizar a multiplicação em que uma das parcelas sejam negativas. Por exemplo: $3 \times (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$ . Resolva as multiplicações abaixo de acordo com o exemplo:			
$6 \times (-3) =$		$5 \times (-4) =$	
$2 \times (-10) =$		$2 \times (-5) =$	
$3 \times (-4) =$		$7 \times (-3) =$	
$8 \times (-6) =$		$4 \times (-6) =$	

**TAREFA 22** (1 hora/aula)

Esta Tarefa tem por objetivo reforçar a multiplicação entre os Números Inteiros, porém neste momento necessitando da comutatividade das parcelas, sendo que a primeira é negativa e a segunda parcela é positiva.

A questão 2 traz uma sequência numérica que poderá conduzir o aluno a generalização da regra de sinais aplicada na multiplicação dos Inteiros. Após, se utilizando de suas próprias conclusões, finalizamos a Tarefa com uma rápida introdução à multiplicação de dois números negativos.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Exercício	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Discursivas. Registros: Multifuncionais e Monofuncionais.
Grau de desafio matemático:	Reduzido	
Grau de estrutura:	Fechado	
Relação com a realidade:	Não	
Duração:	1 hora/aula	

**Quadro 25: Classificações da Tarefa 22**

**Fonte:** o autor

**Sugestões de Aplicação**

Será necessário que o professor explore a comutatividade da multiplicação, tomando como exemplo anterior a comutatividade da soma. Assim, o professor pode mostrar a equivalência representada pela expressão  $5 \times 3 = 3 \times 5$ , por exemplo. O professor deve conduzir os alunos a compreenderem que a comutatividade também pode ser aplicada a expressões com Números Inteiros:  $-4 \times 5 = 5 \times (-4)$ .

O aluno deve compreender que, para utilizar o método da soma aplicada à multiplicação, se faz necessário a comutatividade dos termos, pois para a multiplicação  $-4 \times 5$ , temos a falta de sentido matemático, onde não se pode adicionar menos quatro parcelas de cinco. Logo, pela comutatividade temos  $5 \times (-4)$ , e podemos entender o mesmo fato como adicionar cinco parcelas de menos quatro.

Nome:			
1. A multiplicação é comutativa: $3 \times 8 = 8 \times 3 = 24$ . Esta propriedade se estende aos números negativos, ou seja, $(-3) \times 8 = 8 \times (-3) = -24$ . Assim, resolva as multiplicações que seguem:			
$-5 \times 2 =$	$-3 \times 7 =$		
$-8 \times 5 =$	$-6 \times 7 =$		
$-5 \times 9 =$	$-7 \times 7 =$		
2. Agora observe o exemplo ao lado: os números obedecem um padrão. Identifique este padrão, com a ajuda do professor, e complete a sequência corretamente. Depois, observe a sequência e responda à questão que segue:	$  \begin{array}{l}  -1 \left( \begin{array}{l} 4 \times (-5) = -20 \\ 3 \times (-5) = -15 \\ 2 \times (-5) = \dots\dots\dots \end{array} \right) \begin{array}{l} +5 \\ +5 \end{array} \\  \dots\dots\dots \times (-5) = \dots\dots\dots \\  \dots\dots\dots \times (-5) = \dots\dots\dots \\  \dots\dots\dots \times (-5) = \dots\dots\dots \\  \dots\dots\dots \times (-5) = \dots\dots\dots  \end{array}  $		
3. Você observou alguma propriedade relacionada aos sinais envolvidos na multiplicação? Descreva e tente generalizar, ou seja, criar uma regra para a multiplicação e os sinais das respostas:			
4. De acordo com o observado, resolva as multiplicações abaixo:			
$(-3) \times 9 =$	$(-8) \times 5 =$	$6 \times (-7) =$	$4 \times (-8) =$
$(-2) \times (-5) =$	$(-3) \times (-6) =$	$(-7) \times (-7) =$	$(-6) \times (-8) =$

### TAREFA 23 (1 hora/aula)

Nesta Tarefa vamos reforçar a operação de multiplicação com Números Inteiros: propomos situações em que o aluno reflita sobre a operação inversa da multiplicação para completar os espaços que representam parcelas da multiplicação. Assim, visamos a compreensão da operação inversa para que o aluno possa estender os mesmos conceitos para a operação de divisão.

Embora a multiplicação pareça uma operação simples e direta, o aluno pode desenvolver obstáculos dos mais variados tipos existentes quando aprendeu mecanicamente e sem a devida reflexão.

Um obstáculo que tem se mostrado presente em nossas experiências em sala de aula é quando o aluno aprende, pela regra de sinais, que negativo multiplicado por negativo resulta em positivo. Ao se deparar com uma soma de  $-2 - 3$ , por exemplo, ele tende a atribuir resultado positivo. Esse é um dos motivos pelo qual não apresentamos de imediato a regra de sinais.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Problema	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Discursivas; Não Discursivas. Registros: Monofuncionais.
Grau de desafio matemático:	Elevado	
Grau de estrutura:	Fechado	
Relação com a realidade:	Não	
Duração:	1 hora/aula	

**Quadro 26: Classificações da Tarefa 23**

**Fonte: o autor**

#### Sugestões de Aplicação

Esta Tarefa se faz necessário que o professor evite a sua intervenção, afim de verificar as capacidades de produção individual e original de soluções. Ela não traz conceitos diferentes a que os alunos já não tiveram acesso antes. Se necessário, o professor poderá intervir somente nas questões de divisão, já que esta operação não foi desenvolvida formalmente junto aos alunos.



Nome: _____										
1. Complete a tabela da multiplicação: cuidado com o sinal!										
x	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
6	24									
2. Outra tabela da multiplicação para você completar:										
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	
-4										
3. Observe as pirâmides abaixo, compreenda a lógica e complete-a:										
4. Complete as lacunas para que a multiplicação esteja correta:										
$5 \times \dots = 15$			$\dots \times 7 = 35$			$\dots \times (-3) = 21$			$(-4) \times \dots = 16$	
$\dots \times (-1) = 2$			$(-3) \times \dots = -27$			$\dots \times (-4) = 0$			$(-7) \times \dots = 56$	
$7 \times \dots = -28$			$(-5) \times \dots = 45$			$\dots \times 2 = -14$			$\dots \times (-6) = -42$	
5. Observe os exemplos abaixo:										
<b><math>10 \div 2 = 5</math>, pois <math>5 \times 2 = 10</math></b>					<b><math>20 \div 5 = 4</math>, pois <math>4 \times 5 = 20</math></b>					
Agora é sua vez de calcular as divisões seguindo o exemplo acima:										
$30 \div 5 = \dots$ , pois $\dots \times \dots = \dots$										
$28 \div 4 = \dots$ , pois $\dots \times \dots = \dots$										
$72 \div 7 = \dots$ , pois $\dots \times \dots = \dots$										
6. Desafio: de acordo com o Tarefa anterior, resolva as divisões com números negativos abaixo:										
$-48 \div 6 = \dots$ , pois $\dots \times \dots = \dots$										
$35 \div (-5) = \dots$ , pois $\dots \times \dots = \dots$										

**TAREFA 24 – (1 hora/aula)**

Procuramos desenvolver Tarefas que conduzam a compreensão da operação divisão como sendo a operação inversa da multiplicação. Neste sentido, as propriedades operatórias que são válidas para o produto, também são válidas para o quociente, com exceções particulares. Assim, o aluno deve perceber que as regras de sinais, as quais ele deve ter generalizado por meio das Tarefas, se estendem a esta operação. Procuramos mesclar as operações de multiplicação e divisão em algumas questões afim de que o aluno perceba a associação existente entre as duas.

A tabela abaixo mostra a classificação desta Tarefa:

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Problema	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico. Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Discursivas. Registros: Monofuncionais.
Grau de desafio matemático:	Elevado	
Grau de estrutura:	Fechado	
Relação com a realidade:	Não	
Duração:	1 hora/aula	

**Quadro 27: Classificações da Tarefa 24**

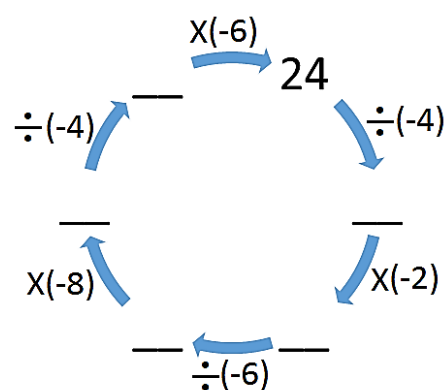
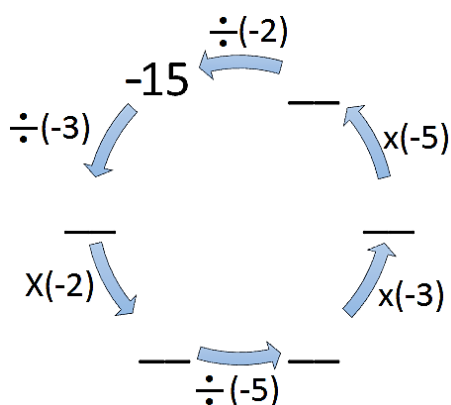
**Fonte: o autor**

**Sugestões de Aplicação**

A exemplo da Tarefa anterior, o aluno deverá resolver esta apenas com sua leitura e interpretação, além dos conhecimentos prévios desenvolvidos até agora. Buscamos desenvolver a autonomia e a capacidade de produção individual e original de soluções por parte do aluno. Se necessário, o professor poderá mediar a reflexão do aluno, estabelecendo uma ponte entre seu conhecimento e a Atividade requerida na execução da Tarefa.

Nome:			
1. Observe o exemplo para responder às questões que seguem:			
$(-10) \div (-2) = +5$ , pois $+5 \times (-2) = -10$		$20 \div (-2) = -10$ , pois $(-10) \times (-2) = 20$	
De acordo com os exemplos, calcule as divisões e justifique as respostas:			
$12 \div (-4) =$		$-15 \div 3 =$	
$24 \div (-4) =$		$(-30) \div (-5) =$	
$-35 \div 7 =$		$(-20) \div (-4) =$	
2. Agora que você compreendeu a divisão, pode resolver as divisões diretamente, sem justificar pela multiplicação:			
$100 \div (-5) =$	$80 \div (-8) =$	$-50 \div 10 =$	$-48 \div 6 =$
$(-64) \div (-4) =$	$(-40) \div (-5) =$	$(-120) \div (-20) =$	$(-55) \div (-5) =$
3. Complete os espaços para que as expressões se apresentem corretas:			
$45 \div \dots = -5$	$20 \div \dots = -4$	$-16 \div \dots = 4$	
$\dots \div (-2) = -15$	$\dots \div (-3) = 4$	$\dots \div 5 = -7$	

4. Complete corretamente os ciclos operacionais:



### 5.3.4 Tarefa De Múltiplas Operações

Neste último bloco vamos propor uma Tarefa com grau elevado de desafio que irá requerer a administração simultânea de vários processos cognitivos, colocando assim o aluno em Atividade afim de extrapolar o conhecimento já consolidado até o momento.

Vamos propor uma Tarefa Lúdica por meio de um Jogo que adaptamos do tradicional Banco Imobiliário, afim de contemplar todos os conceitos e operações sobre Números Inteiros estudados ao longo desta Proposta. Assim, ela tem a natureza de concluir nossa Proposta Metodológica.

Nomeamos este bloco de Tarefa de Múltiplas Operações por dois motivos: o primeiro diz respeito a necessidade do aluno ter aprendido as quatro operações que desenvolvemos para que ele possa realizar estratégias e ter sucesso no jogo. Caso o aluno não tenha consolidado os conteúdos que desenvolvemos, este momento pode ser a oportunidade de que, por meio da intervenção dos colegas de jogo, o conhecimento que almejamos seja alcançado.

O outro motivo deste nome nos remete a necessidade do aluno desenvolver múltiplas operações mentais, a que chamamos de Atividade, afim de manter-se com sucesso no jogo. Já destacamos que estes momentos lúdicos constituem-se em ricas oportunidades de trocas de experiências entre os alunos e favorece a correção imediata e não impactante dos possíveis erros que irão ocorrer nesta esfera, além de favorecer o trânsito entre diversos Registros subjacentes ao jogo.

Assim, cremos que esta Tarefa tem potencialidades para alavancar diversas vantagens para todos os envolvidos nesta Proposta. Por meio dela, o professor terá a oportunidade de verificar a validade da Proposta como um todo, sendo avaliada por meio da aplicação em um momento lúdico, além de refletir sobre sua atuação em sala de aula e sobre a qualidade das Tarefas, contribuindo assim para a Educação Matemática em geral.

## TAREFA 25 – JOGO BANCO DOS NEGATIVADOS (4 horas/aula)

Este jogo é uma adaptação do Banco Imobiliário tradicional, a versão mais simples que pode ser encontrado no mercado. Não é difícil encontrar alunos que possuam o referido jogo, o que facilita a organização dos grupos de trabalho com o material dos próprios alunos.

Para realizar o jogo, serão necessários o tabuleiro normal do Banco Imobiliário, os peões, as cartas que representam posse de terrenos ou companhias, o conjunto de dinheiro que acompanha o jogo, as cartas de sorte ou revés que elaboramos especialmente para este jogo, as fichas de jogadas que elaboramos e três dados adaptados para a nossa proposta com o jogo.

As cartas tradicionais de sorte e revés que acompanham o jogo devem ser retiradas e substituídas por cartas adaptadas, onde cada uma possui um cálculo matemático que o aluno deverá executar, relacionado com os Números Inteiros, objeto de estudo de nossa pesquisa. As cartas encontram-se abaixo para serem impressas e recortadas. Para melhorar a qualidade destas cartas, colamos a impressão em papel cartão, como mostra a imagem abaixo.



**Figura 4: Cartas de Sorte e Revés confeccionadas para o jogo**

**Fonte: o autor**

Os dados necessários para que ocorra o jogo devem ser adaptados, preferencialmente sendo dois dados com números (ao invés de pontos que representam quantidades), de cor e sinal diferente. Para cada tabuleiro de jogo,

utilizaremos um dado vermelho, os quais adaptamos para que todos os números dele sejam negativos, e um dado branco, que mantivemos os números positivos. Independentemente da cor, ambos devem possuir sinais contrários para que atendam a nossa proposta com o jogo.



**Figura 5: Dados adaptados e utilizados para o jogo**  
Fonte: o autor

Além dos dois dados numéricos, será necessário um terceiro dado com as quatro operações matemáticas básicas, sendo duas faces que contenham o sinal de adição, duas faces que contenham o sinal de subtração, uma face para multiplicação e uma face para divisão. Este dado optamos por construir em papel cartão, conforme mostra a imagem abaixo:



**Figura 6: Dados de operações construídos para o jogo**  
Fonte: o autor

Para que ocorra o jogo, é necessário que haja um jogador que represente o bancário, este que deverá monitorar as jogadas e receberá uma ficha para

preenchimento, e no mínimo outros dois jogadores, que também receberão suas fichas individuais de jogada. As fichas servirão de base para que o professor possa avaliar se as jogadas, assim como os cálculos se deram corretamente durante o jogo.

Tarefa		Atividade
Tipologia:	Investigação	Conversão: do registro de representação gráfica e registros escritos na linguagem materna para o registro simbólico numérico.
Grau de desafio matemático:	Elevado	
Grau de estrutura:	Aberto	Tratamento: operação realizada entre os registros simbólico numéricos. Representações: Não Discursiva; Discursiva. Registros: Multifuncionais; Monofuncionais;
Relação com a realidade:	Sim	
Duração:	4 horas/aulas	

**Quadro 28: Classificações da Tarefa 25**

**Fonte: o autor**

### Sugestões de Aplicação

Esta Tarefa exigirá muita atenção do professor e o envolvimento total dos alunos no jogo. Em um primeiro momento, o professor poderá discutir e esclarecer as regras, além de simular jogadas para que os mesmos compreendam as regras na prática. Num segundo momento, o professor pode deixá-los jogar, em caráter exploratório, mas sem esperar muita produtividade, pois é o momento em que os alunos estarão conhecendo o jogo e suas regras, dada a complexidade do mesmo.

Quando os alunos se sentirem confortáveis e habituados previamente com as regras do jogo, o professor pode propor o início do mesmo, com duração de duas horas/aula, num caráter mais sério e avaliativo. É importante que os alunos realizem os registros destinados ao jogo, de acordo com a função de cada um. É natural que alguns alunos, durante o jogo, necessitem da intervenção do professor, este que poderá auxiliá-los a todo momento. O professor deve conduzir o aluno à reflexão das situações que irão aparecendo no decorrer das jogadas, orientando a releitura das regras, à construção de conceitos matemáticos já estudados e até mesmo a discussão entre os alunos do mesmo grupo de jogo sobre as dificuldades encontradas.

## “BANCO DOS NEGATIVADOS” - REGRAS DO JOGO

### INÍCIO DO JOGO:

- Necessário, no mínimo 3 pessoas para jogar, sendo uma delas obrigatoriamente o banqueiro e fiscal do jogo.
- Distribuição do dinheiro para cada jogador (exceto banqueiro): dez notas de \$1, seis notas de \$5, seis notas de \$10, oito notas de \$50, cinco notas de \$100 e uma nota de \$500, totalizando \$1500. O dinheiro restante permanecerá para o banco, juntamente com os títulos de propriedades.
- Joga-se os dados positivo e negativo: quem obtiver a maior soma começa o jogo. A partir de então, o sentido de jogada dos próximos jogadores é horário.
- O jogo inicia com os peões na casa de Partida.
- Cada jogador lança os três dados (um com números positivos, um com números negativos e um com operações matemáticas), deslocando-se o número de casas de acordo com o resultado da operação matemática obtida com os números dos dados, levando-se em conta o sinal. A operação obtida pelo dado deve ficar ao meio dos números obtidos pelos dois dados numéricos, estes que podem ser escolhidos a posição de acordo com a vontade e estratégia do jogador. Se o resultado for positivo, anda no sentido horário da trilha (sentido tradicional do jogo). Se o resultado for negativo, anda no sentido anti-horário da trilha (contrário ao tradicional). No caso da divisão com resto, considera-se a parte inteira do resultado.

### DURANTE O JOGO:

- Se cair nas companhias e propriedades, poderá compra-las pelo valor anunciado no tabuleiro, recebendo o cartão de posse da companhia ou propriedade.
- Se cair em uma casa de sorte-revés, deverá retirar uma carta e cumprir com a exigência da carta.
- Duas casas são relativas à prisão: se cair nesta casa, deverá tirar soma zero nos dados para poder sair e voltar na próxima rodada. Caso não consiga soma zero até a terceira tentativa, o jogador deverá pagar fiança de \$50 e andar a partir da prisão o resultado obtido nos dados durante a terceira tentativa.
- Uma casa é parada livre, sem implicações financeiras quando cair nesta casa.
- Cada vez que passar pela casa de Partida, receberás \$10 do Banco, não importando o sentido que passar por esta casa.

### Companhias

Quando comprar uma companhia, você receberá aluguel dos demais jogadores que caírem nesta casa. O custo do aluguel está definido no cartão da companhia do seguinte modo: o módulo do resultado obtido pelo jogo dos três dados, multiplicado pelo valor especificado em cada companhia; Caso necessite vendê-la, deverá vender ao banco, pelo valor especificado na hipoteca do cartão.

### Propriedades

Quando comprar uma propriedade, você receberá o aluguel de acordo com o cartão da propriedade. Quanto mais construções você possuir na propriedade, maior o aluguel. A primeira vez que você cair na propriedade, poderá apenas comprar o lote e receberá o aluguel dos demais jogadores que cair nesta casa de jogo. A segunda vez que você cair na sua propriedade, poderá construir uma casa somente, pelo



valor especificado em “cada casa” no cartão. A terceira vez que cair em sua propriedade poderá construir a segunda casa, a quarta vez que cair poderá construir a terceira casa e a quinta vez que cair poderá construir a quarta casa. Somente na sexta vez é que poderá trocar as casas por um hotel, pagando ao banco o valor de construção do hotel e recebendo dos demais jogadores o aluguel referente ao hotel. Se precisar vender a propriedade, deverá vender ao banco pelo valor de hipoteca no cartão.

## EM CASOS EMERGENCIAIS

### Venda de bens

Se faltar dinheiro, e você adquiriu bens, o primeiro passo para continuar no jogo é entregar todos seus hotéis e casas ao banco pela metade do valor que as comprou, de acordo com o cartão, ficando em sua posse as propriedades e companhias para receber aluguel. Se ainda precisar de dinheiro, entrega ao banco as propriedades e companhias como forma de hipoteca, a sua escolha, de modo que você consiga se levantar financeiramente! Os bens hipotecados ficam a disposição para serem comprados pelos jogadores que caírem na casa daquele bem, caso haja interesse, inclusive do antigo dono se já houver condições financeiras para resgatá-lo da hipoteca. Terrenos e companhias hipotecadas devem ter aumento de 20% no valor de compra pagos ao banco, para a legalização e custos operacionais da hipoteca. Alternativamente a tudo isso, pode também negociar suas propriedades e bens com outros jogadores com valores a ser combinado, na tentativa de diminuir os prejuízos de entregar ao banco.

### Empréstimo Bancário

Ao terminar os bens e o dinheiro, poderá emprestar do banco uma quantidade igual do começo do jogo ou menor, observando as seguintes exigências que o banqueiro deve fiscalizar:

- Terá que devolver o dobro do valor que emprestou do banco.
- Terá carência de 2 rodadas para se recompor financeiramente, sendo que na terceira deverá efetuar o pagamento ao banco em 10 parcelas iguais (do dobro do valor emprestado); Se emprestar \$30 do banco, terá de devolver \$60, divididas em 10 parcelas de \$6, começando a pagar na terceira vez que você jogar após o empréstimo.
- Não poderá realizar outro empréstimo até que o anterior seja totalmente pago.

## TÉRMINO DO JOGO

Há dois modos de terminar o jogo:

- estipula-se um horário (tempo de jogo, antes de começar, fiscalizado pelo banqueiro): quando terminar o tempo, o banqueiro faz um levantamento de todos os jogadores, e classifica do mais rico até o menos rico ao termino do jogo.
- joga-se sem estipular um tempo e, quando houver o consentimento de todos quanto a vontade de parar o jogo, o banqueiro faz um levantamento de todos os jogadores, e classifica do mais rico até o menos rico ao termino do jogo.

Bom Jogo!!!

### CARTAS DE SORTE E REVÉS

<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>
<p>Está com sorte! Ande duas casas para qualquer lado se resolver</p> <p style="text-align: center;">-12 + 7</p>	<p>Vida boa... Receba R\$ 10 do banco se resolver</p> <p style="text-align: center;">-12 - 7</p>	<p>"Tá favorável..." Receba R\$ 5 do banco se resolver</p> <p style="text-align: center;">8 - 15</p>	<p>Azar de todos... Receba R\$ 2 de cada jogador se resolver</p> <p style="text-align: center;">- 5 + 12</p>	<p>Sorte grande... Receba R\$ 5 do banco se resolver</p> <p style="text-align: center;">0 - 12</p>
<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>
<p>Sorte... Avance 3 casas para o lado que quiser se resolver</p> <p style="text-align: center;">-7 - 4</p>	<p>13º Salário Receba R\$ 15 do banco se resolver</p> <p style="text-align: center;">-24 : (-4)</p>	<p>Salário Extra Receba R\$ 20 do banco se resolver</p> <p style="text-align: center;">-60 : (-4)</p>	<p>Foi Premiado Para ganhar R\$ 10 do banco resolva</p> <p style="text-align: center;">- 72 : 8</p>	<p>Ganhou na Rifa Para receber R\$ 10 do banco apresente o resultado de</p> <p style="text-align: center;">42 : (-6)</p>
<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>	<b>*Sorte*</b>
<p>Sorte... Avance 4 casas para o lado que quiser se resolver</p> <p style="text-align: center;">-7 + 16</p>	<p>Beleza pura... Avance 3 casas para qualquer lado se resolver</p> <p style="text-align: center;">7 x (-6)</p>	<p>"Tá tranquilo..." Receba R\$ 5 do banco se resolver</p> <p style="text-align: center;">7 x (-6)</p>	<p>Muita sorte... Receba R\$ 10 do banco se resolver</p> <p style="text-align: center;">-7 x (-4)</p>	<p>Sorte grande... Receba R\$ 5 do banco se resolver</p> <p style="text-align: center;">-3 x 8</p>
<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>
<p>Pouca sorte! Vá para a prisão se não resolver</p> <p style="text-align: center;">-12 + (-7)</p>	<p>A sorte se foi... Pague R\$ 10 ao banco se não resolver</p> <p style="text-align: center;">- 5 - (-7)</p>	<p>Dançou... Pague R\$ 5 ao banco se não resolver</p> <p style="text-align: center;">8 - (+15)</p>	<p>Azar o seu... Pague R\$ 2 a cada jogador se não resolver</p> <p style="text-align: center;">- 5 - (-12)</p>	<p>Azar inquestionável  Dirija-se à prisão e respeite as regras da cadeia!</p>
<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>
<p>Falta de Sorte... Devolva ao banco R\$ 20 caso não resolva</p> <p style="text-align: center;">-(-7) - (-4)</p>	<p>Imposto de Renda Pague R\$ 5 ao banco se não resolver</p> <p style="text-align: center;">-9 x (-4)</p>	<p>Pague Juros Pague R\$ 15 ao banco se não resolver</p> <p style="text-align: center;">-90 : (-3)</p>	<p>Nada favorável Pague R\$ 2 para cada jogador se não resolver</p> <p style="text-align: center;">- 48 : 8</p>	<p>Você aprontou...  Para não ir para a prisão resolva</p> <p style="text-align: center;">63 : (-9)</p>
<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>	<b>Revés *</b>
<p>A casa caiu...  Devolva R\$ 10 aos cofres públicos por sonegar impostos</p>	<p>Problemas...  Pague R\$ 5 ao banco se não resolver</p> <p style="text-align: center;">54 : (-6)</p>	<p>Azarado...  Pague R\$ 10 ao banco se não resolver</p> <p style="text-align: center;">-12 x (-5)</p>	<p>Que sorte que nada... Pague R\$ 20 ao banco se não resolver</p> <p style="text-align: center;">-15 x (-8)</p>	<p>Você foi multado  Pague R\$ 5 ao banco se não resolver</p> <p style="text-align: center;">-16 x 5</p>

**Figura 7: Cartas de Sorte e Revés elaboradas para o jogo**  
**Fonte: o autor**





## 6 ANÁLISES E DISCUSSÕES

Neste capítulo apresentamos considerações acerca das Tarefas propostas nesta pesquisa de acordo com a análise de conteúdos que, segundo Bardin (1977, p. 31), é “um conjunto de técnicas de análise das comunicações”. Segundo a autora, não se trata de um único instrumento de análise, mas sim de um leque de opções marcados por uma grande disparidade de formas e adaptável ao vasto campo das comunicações.

De acordo com Bardin (1977, p. 38), “a intenção da análise de conteúdo é a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção (ou, eventualmente, de recepção), inferência esta que recorre a indicadores (quantitativos ou não)”. Este tipo de análise se mostra bastante relevante nas pesquisas em educação e também nas que tratam sobre o ensino e aprendizagem da Matemática.

Seguimos a organização da análise em torno dos três polos sugeridos por Bardin (1977): a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, inferência e interpretação.

A fase da pré-análise é a organização, que se divide em leitura flutuante, escolha dos documentos, formulação de hipóteses, referenciação dos índices e elaboração de indicadores, e a preparação do material.

A fase de exploração do material é a administração sistemática das decisões tomadas a partir das operações realizadas durante a pré-análise.

A fase do tratamento dos resultados e interpretação consiste na validação e atribuição de significados dos resultados brutos.

Além das fases sugeridas, adotamos o processo de categorização, onde Bardin (1977, p. 117) a define como “uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos”. As categorias são classes que se reúnem por grupos de elementos sob um título genérico.

Esta categorização ocorreu previamente por blocos de Tarefas que contemplavam a mesma competência matemática, ainda quando elaborávamos a proposta metodológica. Em um primeiro momento (elaboração do pré-projeto), imaginávamos toda a Proposta categorizada em três blocos: Tarefas de Introdução aos Números Inteiros, Tarefas de Operações com Números Inteiros e Tarefa Lúdica.

Porém, durante o planejamento e construção das Tarefas, observamos a necessidade de expandir e desdobrar estes blocos de Tarefas em subitens, além de excluir o bloco de Tarefas Lúdicas, já que entendemos que estas Tarefas deveriam ser mescladas às demais. A formatação dos blocos se concluiu conforme apresentamos nesta pesquisa. Neste momento, entendemos que estes blocos poderiam se tornar possíveis categorias de análise, estas que também dependeriam das soluções e reflexões apresentadas pelos alunos.

Após a leitura flutuante dos resultados coletados já foi possível observar o surgimento de outros tópicos importantes a se considerar na análise do conteúdo, as quais vieram a se converter em categorias de análise. Todavia, as categorias de análise de Conteúdo não necessariamente devem seguir a mesma formatação dos blocos de Tarefas que propomos, ou seja, durante a análise podem emergir outras categorias dentro de um bloco.

Nossa análise consistirá em elencar as principais Tarefas ou seções de Tarefas que melhor caracterizem a categoria em estudo. Serão valorizados os registros escritos pelos alunos nas folhas de Tarefas e o Diário de Campo utilizado pelo professor durante as aulas que ocorreram o desenvolvimento da proposta metodológica.

Para referenciar os comentários e respostas elaborados pelos alunos, estabelecemos uma simbologia que os representam, para melhor contabilizar e organizar os resultados de nossa pesquisa por meio das Tarefas.

Assim, simbolizaremos por A seguido de um número atribuído aleatoriamente para cada aluno constituinte desta turma afim de melhor organizar nossos resultados e preservar a identidade dos sujeitos desta pesquisa. O quadro abaixo apresenta as dez categorias que propomos nesta pesquisa:

<b>Categorias de Análise</b>	
Categoria 1	Conhecimentos Prévios dos Inteiros
Categoria 2	Utilização e Representação dos Inteiros
Categoria 3	Reconstrução Histórica dos Inteiros
Categoria 4	Elementos da Reta Numérica
Categoria 5	Comparação entre os Números Inteiros
Categoria 6	Antecessor e Sucessor dos Inteiros
Categoria 7	Módulo e Oposto Simétrico dos Inteiros
Categoria 8	Operações com Números Inteiros
Categoria 9	Tarefas Simples
Categoria 10	Tarefas Complexas

**Quadro 29: Categorias de Análise**

**Fonte: o autor**

## 6.1 CATEGORIA 1: CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS INTEIROS

Nesta categoria de análise, analisamos o conhecimento prévio e informal dos sujeitos da pesquisa sobre os Números Inteiros, com ênfase nos Números Negativos, visto que não apresentamos o conteúdo a eles.

Todavia, destacamos que alguns alunos já cursaram esta série anteriormente, o que viabiliza a realização das Tarefas por meio da utilização dos Números Negativos. Também não descartamos a hipótese de que existam alunos que poderão utilizar tais números se utilizando de conhecimentos informais e cotidianos sem mesmo tê-los estudado anteriormente.

Para a análise desta categoria, foram escolhidos como sujeitos de pesquisa 29 alunos, os quais realizaram a Tarefa 1 e a Tarefa 2. Afim de manter qualidade de pesquisa, foram excluídos desta análise alunos que realizaram apenas uma das Tarefas ou nenhuma delas.

A Tarefa 1 teve por objetivo o cálculo de notas de cinco alunos fictícios, por meio de uma situação problema sobre os acertos e erros de cada um, seguido por questões reflexivas acerca das notas obtidas. A questão 5 desta Tarefa, relacionada à nota de Ernesto em uma prova, conduzia a uma situação com número negativo, na qual esperava-se que os alunos atribuíssem nota menos três ( $-3$ ). O quadro abaixo retrata as respostas apresentadas pelos alunos a esta categoria:

Resposta (Valor atribuído pelos alunos)	Quantidade de Alunos (Frequência Absoluta)	Porcentagem (%) (Frequência Relativa)
Zero (0)	10	34,48
Três Positivo (3)	6	20,69
Zero Virgula Quatro (0,4)	5	17,24
Três Menos (3 -)	1	3,45
Outras Notas	7	24,14
<b>TOTAL</b>	<b>29</b>	<b>100</b>

**Quadro 30: Respostas dos alunos na questão 5 da Tarefa 1**

Fonte: o autor

Nota-se que nenhum aluno apresentou a resposta conforme o esperado, todavia o aluno A19 apresentou ter conhecimento prévio sobre números negativos, o qual exibiu resposta com o sinal de negativo após o número. Ainda observamos que este aluno escreveu o algoritmo da subtração na ordem em que o problema exigia.

5. O aluno Ernesto acertou 1 questões e errou 5:	$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ -5 \\ \hline 3 \end{array} \quad \text{Nota } 3-$
--	--

**Figura 8: Resposta da questão 5 da Tarefa 1 (A19)**

Fonte: aluno A19

A maioria dos alunos que se deparam com esta situação procuram inverter o minuendo pelo subtraendo, gerando erros de cálculo comum no cotidiano escolar, conforme apresentaremos a seguir.

Outros seis alunos apresentaram como resposta o resultado 3: neste caso, eles deveriam subtrair 5 de 2, obtendo  $-3$ . Ao utilizarem o algoritmo da subtração para resolver, se depararam com a impossibilidade e inverteram a ordem de subtração, trocando o minuendo pelo subtraendo, conforme mostra a imagem da resposta apresentada pelo aluno A22:

5. O aluno Ernesto acertou 1 questão e errou 5:	$\frac{1}{\cancel{2}}$ $\frac{5}{-2}$ $\frac{3}{3}$
---	---

**Figura 9: Resposta da questão 5 da Tarefa 1 (A22)**

Fonte: aluno A22

Esse fato nos remete à História dos Números Negativos e a impossibilidade de cálculo apresentada no capítulo anterior, onde o aluno, assim como os antigos matemáticos, buscavam adaptar o cálculo para superar as dificuldades encontradas, gerando erros matemáticos que permeiam até hoje o ensino da Matemática, em consonância com os obstáculos epistemológicos que já discutimos anteriormente.

Alguns alunos apresentaram respostas incoerentes com o enunciado e incompatível com os demais alunos da turma. Esses 7 alunos mostraram-se confusos na resolução da Tarefa como um todo, nos levando a acreditar que não compreenderam o contexto da Tarefa, já que a maioria deles declarou dificuldade na resolução desta situação, na questão aberta de número 8.

Cinco alunos apresentaram como resposta a nota 0,4, bastante inusitada para a situação. Ao serem indagados sobre a atribuição desta nota, o aluno A32 expôs que “o aluno tem 2 pontos ganhos de 5 perdidos”, e o modo como interpretaram suas próprias afirmações (2 de 5) os levou a dividir 2 por 5, obtendo assim 0,4, conforme imagem da resposta apresentada pelo aluno A7:

5. O aluno Ernesto acertou 1 questão e errou 5:	$\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{2}{2} = 1$ $\frac{5}{-2} = -2,5$ $\frac{2}{5} = 0,4$
---	--


**Figura 10: Resposta da questão 5 da Tarefa 1 (A7)**

Fonte: aluno A7



Esses alunos relacionaram, segundo eles, a interpretação ao conteúdo de probabilidade que estudaram em anos anteriores. Esse aluno escreveu o algoritmo da subtração e encontrou a impossibilidade de cálculo.

O que nos chamou a atenção é o fato de 10 alunos apresentarem como resposta a esta questão o resultado zero, frente a impossibilidade de subtrair 5 de 2, conforme resposta apresentada pelo aluno A16:

5. O aluno Ernesto acertou 1 questão e errou 5:	$5 - 2 = 2 =$ 
---	---

**Figura 11: Resposta da questão 5 da Tarefa 1 (A16)**  
**Fonte: aluno A16**

Ao serem questionados sobre alguma dificuldade encontrada na resolução desta Tarefa, alguns alunos declararam não ser possível subtrair 5 de 2, como mostra a resposta apresentada pelo aluno A3, na questão 8:

<p>8. Você notou alguma diferença ou dificuldade ao resolver esta Tarefa?</p> <p>Explique: <i>Não na 5 (do Ernesto) que fiquei com dúvida porque não tinha como tirar 5 de 2, então pela lógica é 0.</i></p>
--

**Figura 12: Resposta da questão 8 da Tarefa 1 (A3)**  
**Fonte: aluno A3**

O aluno A4 ainda declarou verbalmente, quando indagado num momento reflexivo após o término da Tarefa que, “ao tirar 5 de 2, não sobra nada, pois esgota as notas”. Ainda o aluno A5 declarou que “o aluno merece nota zero, pois é a menor nota que existe”.

Estas afirmações não são de todo modo incorretas, pois quando trazemos situações matemáticas, as quais deveriam ser tratadas formalmente, para uma situação que a relacione com o concreto, as interpretações pessoais e coletivas obtidas de fatos empíricos interferem na análise do problema.

Em nossa pesquisa já apontamos que Moretti (2012) orienta para o desenvolvimento formal deste conteúdo em sala de aula, evidenciando que as associações realizadas com o cotidiano podem levar a obstáculos didáticos e erros permanentes a longo prazo, difícil de serem superados.

Este fato nos levou a elaborar e aplicar a Tarefa 2 que, mesmo havendo relação com a realidade por se tratar de pontuação de um jogo, não vemos problema em haver pontos negativos, buscando eliminar as ambiguidades apresentadas pelos alunos.

Quando os alunos A4 e A5 expuseram as afirmações anteriores, o aluno A17 questionou-os sobre a possibilidade de que o aluno fictício de nossa Tarefa ficasse devendo nota para o professor, embora eles nunca presenciaram tal situação, mas não descartavam esta possibilidade.

Isso revela que esta Tarefa mobilizou o aluno para que este aluno estivesse em Atividade, de acordo com nossa pesquisa, apresentando reflexão sobre a mesma. Esse momento se constituiu em um rico aprendizado para toda a turma que, a partir desta afirmação, mostrou mais interação e reflexão sobre esta Tarefa como um todo.

Do total de sujeitos participantes desta categoria, 16 alunos escreveram na questão aberta (questão 8) que encontraram dificuldade para resolver a questão 5, a qual se reportava à utilização de números negativos.

Entendemos que esta dificuldade é importante para que os alunos reconheçam a necessidade de haver algum conteúdo matemático que possa suprir essa dificuldade, a qual já havia sido relatada a muitos anos atrás, como revela a História.

Na Tarefa 2 também foi possível observar os conhecimentos prévios dos alunos sobre Números Negativos e o conjunto dos Inteiros, especialmente na pontuação dos alunos fictícios Danilo e Emílio, jogadores do jogo adaptado Pega Varetas presentes na situação problema elaborado por nós.

O jogador Danilo pontuou  $-11$  (valor esperado) no jogo, enquanto Emílio pontuou  $-13$  (valor esperado). O quadro abaixo mostra as pontuações atribuídas a cada jogador pelos alunos participantes da pesquisa, salientando que nenhum aluno apresentou os valores como o esperado:

Danilo		Emílio	
Pontuação	Quantidade	Pontuação	Quantidade
11 –	1	13 –	1
11 (positivo)	4	13 (positivo)	6
0 (zero)	12	0 (zero)	14
Outros resultados	12	Outros resultados	8
<b>Total</b>	<b>29</b>	<b>Total</b>	<b>29</b>

**Quadro 31: Respostas dos alunos na Tarefa 2**

**Fonte: o autor**

Observa-se que o mesmo aluno (A19), o qual apresentou conhecimentos prévios sobre números negativos na Tarefa 1, legitimou nossas expectativas nesta Tarefa, mesmo que o registro de representação do número negativo esteja incorreto, com o sinal após o número, conforme imagem a seguir:

Danilo	3	1	2	4	2	4	16
$\frac{3}{15}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{2}{2}$   $\frac{4}{4}$   $\frac{2}{6}$   $\frac{4}{6}$   $\frac{15}{10}$   $\frac{20}{30}$   $\frac{19}{11}$   $\frac{-30}{11}$	Ele está com 11- mesalvo						
Emílio	4	1	2	6	2	5	20
$\frac{4}{20}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{6}{6}$   $\frac{2}{6}$   $\frac{5}{6}$   $\frac{20}{24}$   $\frac{25}{37}$   $\frac{24}{13}$	Ele está com 13- mesalvo						

Figura 13: Respostas da Tarefa 2 (A19)

Fonte: aluno A19

Notamos que, para a classificação “Outros resultados”, os alunos apresentaram resultados incoerentes ou incompatíveis com os demais alunos e com o valor esperado, sendo que não compreenderam a Tarefa proposta ou mesmo compreendendo, equivocaram-se no cálculo da pontuação dos alunos fictícios da Tarefa.

Nesta classificação, o aluno A22 não apresentou resposta numérica, conforme mostra a imagem a seguir:

$\frac{15}{12}$   $\frac{19}{15}$   $\frac{15}{6}$   ?	não darei resposta nem tive só que encomplicado de resolver						
Emílio	4	1	2	6	2	15	20
$\frac{20}{12}$   $\frac{18}{18}$   $\frac{18}{12}$   ?	a mesma coisa do Danilo com						

Figura 14: Respostas da Tarefa 2 (A22)

Fonte: aluno A22

Nota-se que após várias tentativas de cálculo (marcas de escritas que foram apagadas) o aluno A22 demonstra incerteza, representado pelo símbolo de interrogação, afirmando que o resultado poderia ser negativo, porém complicado de resolver.

Isso é fruto da reflexão realizada a partir da Tarefa 1, quando alguns alunos expuseram suas angústias frente a impossibilidade de resolução da questão proposta, surgiram reflexões interessantes na Tarefa 2, a exemplo do aluno A5, o qual atribuiu nota zero e apresentou o seguinte comentário escrito:

\* Poderia usar números negativos, mas fica muito ruim de resolver.

**Figura 15: Reflexões sobre a Tarefa 2 (A5)**

Fonte: aluno A5

Assim como este aluno, um número expressivo de alunos atribuiu zero para a impossibilidade de pontuar um resultado negativo. O aluno A3 expôs o seguinte comentário escrito ao atribuir zero:

\* O Danilo e o Emílio terão que emprestar as pontas no próximo jogo.

**Figura 16: Reflexões sobre a Tarefa 2 (A3)**

Fonte: aluno A3

Podemos inferir que estes alunos já compreendem a necessidade de haver algum conteúdo matemático que possa suprir este obstáculo de origem epistemológica, norteando-nos para uma possível reflexão de nossos questionamentos de pesquisa apresentados na introdução, mas ainda estão fixos à ideia de que não se pode retirar grandezas maiores de outras menores, restando assim o zero como resposta.

O aluno A11 escreve que o jogador “ficou sem nada” em resposta a questões que resultariam em números negativos, conforme imagem:

Danilo	3	1	2	4	2	4
	15	2	2 + 4	6	20	
			ela ficou sem nada por ele ganhar 19 e perdeu 30.			
Emílio	4	1	2	6	2	5
	$\begin{array}{r} 24 \\ - 37 \\ \hline \end{array}$	20	2	2 - 6	6	25
		Ele ganhou 24 e perdeu 37 ficou sem nada.				

**Figura 17: Respostas da Tarefa 2 (A11)**

Fonte: aluno A11

Esse aluno compreendeu a subtração necessária para resolver esta situação, apresentando o algoritmo que possivelmente gerou o obstáculo para prosseguir o cálculo e validar seu conhecimento.

A exemplo deste aluno, outro grupo exposto em nossos resultados por meio da tabela, na tentativa de contornar o fato do subtraendo ser maior que o minuendo, inverteram a ordem da subtração no algoritmo, calculando assim respostas positivas.

O modo como pensaram não é de todo incorreto, mas neste caso lhes faltou conhecimentos para realizar a análise deste resultado, isto é, a implicação matemática desta inversão do minuendo e subtraendo, que deve ser traduzida na atribuição do sinal de negativo ao resultado, por meio da inversão da operação matemática.

A próxima categoria emergiu da análise desta, pois durante a resolução das Tarefas 1 e 2, houveram alunos que, mesmo não apresentando as respostas principais com números negativos, os utilizaram no processo de resolução.

## 6.2 CATEGORIA 2: UTILIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DOS INTEIROS

Nesta categoria, vamos analisar como os alunos utilizaram e como representaram os Números Negativos durante a resolução das situações propostas no bloco 1, como na Tarefa 2 e na Tarefa 3, mediante algumas palavras do cotidiano que, quando imersas nas situações matemáticas, podem remeter ao uso destes números.

Na Tarefa 2, dos 29 alunos sujeitos desta Categoria de análise, 11 alunos utilizaram números negativos para representar a pontuação perdida de acordo com cada cor de vareta coletada pelos jogadores fictícios. A imagem do registro apresentado pelo aluno A20 pode exemplificar este fato:

ALUNO	Azul	Verde	Amarelo	Branco	Vermelho	Preto
Amarildo	3	2	0	0	1	1
Bernardo	2	2	2	1	2	1

**Figura 18: Respostas da Tarefa 2 (A20)**

Fonte: aluno A20

Outros 17 alunos agruparam os pontos perdidos, representando-os por números positivos e apenas utilizaram o sinal de menos como operação, afim de subtrair a pontuação perdida da pontuação ganha.

A História da Matemática revela que o homem utilizou diversos símbolos ao longo dos tempos, inclusive também já utilizou letras que antecediam os números, a exemplo do matemático *Luca Pacioli*, que atribuía *p* para número positivo e *m* para número negativo, ambos em caráter de operação.

Deste modo, o aluno A4 utilizou a letra *p* antecedendo o número, para representar *perda* de pontuação, conforme mostra a imagem:

ALUNO	Azul	Verde	Amarelo	Branco	Vermelho	Preto
Amarildo <sup>7</sup>	3	2	0	0	1	1
total: 11	$\begin{array}{r} 15 \\ - 5 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ - 3 \\ \hline 1 \end{array}$	0	P1	P3	P5
Bernardo <sup>10</sup>	2	2	2	1	2	1
total: 8	$\begin{array}{r} 10 \\ - 5 \\ \hline 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \\ - 4 \\ \hline 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ - 1 \\ \hline 1 \end{array}$	P1	P6	P5
Camila <sup>11</sup>	4	0	3	2	0	2
total: 19	$\begin{array}{r} 20 \\ - 1 \\ \hline 19 \end{array}$		$\begin{array}{r} 3 \\ - 3 \\ \hline 1 \end{array}$	P1		P3

**Figura 19: Respostas da Tarefa 2 (A4)**  
Fonte: aluno A4

De certa forma, este aluno reconheceu que estes números são diferentes e necessitam de alguma representação para isso. Este aluno estava em Atividade e atreveu-se a criar um símbolo para representar os números negativos, o que vai ao encontro da proposta sobre Registros de Representações Semióticas presente em nossa pesquisa.

A Tarefa 3, na qual vamos analisar o uso dos Registros de Representações, apresenta palavras que podem remeter ao uso de números negativos, sendo algumas diretas e outras indiretamente, a partir do senso comum, conhecimento empírico e prévio dos alunos.

Nesta Tarefa, os alunos deveriam realizar a operação de Conversão dos registros escritos na linguagem materna para os registros simbólico numéricos utilizados na Matemática. No quadro abaixo apresentamos as palavras que remetiam ao uso de números negativos, os símbolos utilizados pelos alunos durante a resolução da Tarefa e a quantidade de alunos que apresentaram cada registro.

Palavras	Registro Esperado	Outro Registro
Menos trinta e cinco graus Celsius	- 35° C <b>9 alunos</b>	35° C <b>20 alunos</b>
Cinco graus abaixo de zero	- 5° C <b>23 alunos</b>	5° C <b>6 alunos</b>
Dez graus Celsius negativos	- 10° C <b>18 alunos</b>	10° C <b>11 alunos</b>
Segundo andar abaixo do térreo	Andar -2 <b>16 alunos</b>	Andar 2 <b>13 alunos</b>
Devendo mil e duzentos reais	- 1200 reais <b>2 alunos</b>	1200 reais <b>27 alunos</b>
Seis metros abaixo do nível do mar	- 6 m <b>7 alunos</b>	6 m <b>22 alunos</b>
Emagrecer vinte gramas por dia	- 20 g <b>4 alunos</b>	20 g <b>26 alunos</b>
Queda de oito por cento na cotação	- 8 % <b>7 alunos</b>	8 % <b>22 alunos</b>

**Quadro 32: respostas apresentadas pelos alunos na Tarefa 3**

**Fonte: o autor**

Através do quadro elaborado a partir desta Tarefa, verificou-se que as palavras que mais remeteram ao uso de números negativos foram: *abaixo* (no sentido de andar/pavimento de um prédio e no sentido de temperatura) e a própria palavra *negativo* (no sentido de temperaturas). As demais palavras não configuraram, de modo geral, a necessidade da utilização de números negativos a esse grupo de alunos.

Por entendermos que o Modelo Comercial, também citado por Moretti (2012), pode levar a um obstáculo didático no ensino e aprendizagem dos Números Inteiros, procuramos evitá-lo em nossas Tarefas. Todavia, com intuito investigativo, nesta Tarefa propomos a conversão da linguagem materna para a linguagem simbólico-numérica afim de verificar se há alunos que se utilizam deste modelo, principalmente aqueles que estão repetindo esta série.

Assim como Moretti (2012), consideramos que *lucro* e *dívida* são palavras que podem remeter a obstáculos quando associadas aos Números Inteiros e por isso não fortalecemos o uso destas nesse contexto, com objetivo de excluir essa associação de nossa Proposta Metodológica.

Esta Tarefa apresentou a frase “devendo mil e duzentos reais”, a qual esperávamos, embora não seja nosso objetivo, que um grande número de alunos associar aos Números Negativos, já que há bastante alunos repetentes. Contudo, nos favorece observar que apenas 2 alunos atrelaram a palavra dívida aos Números

Negativos, já que num primeiro momento não abordamos este conjunto numérico com este enfoque dito Modelo Comercial por Moretti (2012).

O modo como os alunos acessam os objetos matemáticos é de extrema importância para nossa pesquisa, visto que esses objetos são abstratos e inacessíveis ao homem, quando no concreto. Assim, buscamos avaliar como os alunos os representam para poder manipulá-los.

Em resposta a um de nossos questionamentos, já podemos observar que vários alunos já estão representando os números negativos como o esperado, sem mesmo termos comentado ou transmitido tal conteúdo.

O fato do aluno A4 se utilizar da letra  $p$  antecedendo o número é prova de que o homem é capaz de criar simbologias que o favoreça para melhor operar matematicamente, enaltecendo a riqueza de Registros de Representações Semióticas no passado e nos remetendo a uma reconstrução histórica que ainda permeia o cotidiano escolar.

### 6.3 CATEGORIA 3: RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA DOS INTEIROS

Nas Tarefas 1, 2 e 3 os alunos não receberam instrução, orientação ou conteúdo sobre os Números Inteiros e especialmente os negativos. O professor pesquisador apenas orientou-os quanto ao modo de responder as folhas de Tarefas e esclareceu dúvidas pontuais que surgiam no momento em que os alunos se encontravam em Atividade.

Após o término do bloco 1, foi realizado um momento construtivo e reflexivo junto com os alunos, o qual chamamos de Tarefa 4, no intuito de mostrar-lhe a necessidade da existência de um novo conjunto numérico que viesse a suprir as defasagens matemáticas oriundas das dificuldades encontradas pelos alunos durante a resolução das Tarefas deste bloco.

Por meio da apresentação audiovisual e dialogada, foi realizado a formalização contextualizada com os alunos, onde na oportunidade eles esboçaram bastante interesse na História e evolução dos números negativos até se chegar ao conjunto formal dos Números Inteiros.

Assim, o objetivo desta categoria é verificar quais informações os sujeitos, em número de 30 alunos, filtraram deste momento de Reconstrução Histórica e como passarão a reconhecer este “novo” Conjunto numérico.



A Tarefa 5 apresentava questões parcialmente abertas, onde solicitava ao aluno elaborar situações escritas na linguagem materna e, por meio da operação de Conversão apresentar o registro simbólico numérico que traduzia o exemplo elaborado por ele. A única restrição foi o dever de empregar número negativo no exemplo elaborado.

Dos 30 alunos participantes deste bloco, apenas 1 não atendeu ao que lhe foi solicitado como Tarefa, sendo que os demais (29 alunos) elaboraram corretamente exemplos relacionados com a realidade e emprego de números negativos. O aluno A13 expôs seus exemplos do seguinte modo:

<i>Situação</i>	<i>Registro Simbólico Numérico</i>
Uma geladeira marcou cinco graus negativos	$-5^{\circ}\text{C}$
Antem desci dez andares abaixo do Subsolo.	$-10$ andares
Eu estava no sexto andar e desci no primeiro	$-5$ andares

**Figura 20: Respostas da questão 1 da Tarefa 5 (A13)**

**Fonte: aluno A13**

Com base nos exemplos criados e apresentados por esses alunos, podemos inferir que foi altamente satisfatório a aceitação desta classe numérica por parte deles. Podemos notar ainda que, mesmo sem adentrar no conteúdo de operações matemáticas com Números Inteiros, este aluno apresentou um exemplo que remete ao uso de operação, quando menciona estar no sexto andar e descer ao primeiro, ou seja, desce 5 andares, representando por  $-5$ .

Este aluno revela que estava em Atividade no momento em que desenvolvia esta Tarefa, acessou corretamente os objetos matemáticos envolvidos por meio dos Registros de Representações esperados, além de superar obstáculos impregnados nesse contexto. Assim, esse aluno é prova de que muitas de nossas indagações que nos levaram a elaborar essa pesquisa estão sendo satisfatoriamente respondidas e os entraves superados.

A exemplo deste aluno, todos os exemplos elaborados pelos alunos têm semelhança com as conversões que realizaram na Tarefa 3, onde os termos mais

utilizados foram temperatura e andares abaixo do térreo. Nenhum aluno, neste momento, apresentou exemplo diferente do exposto.

A questão 3 da Tarefa 5 questiona ao aluno se é possível resolver a expressão  $2 - 5$ , com base no que estudaram até o momento, além de justificar a resposta. Dos 30 alunos participantes, 28 responderam *sim* a este questionamento, justificando que o resultado será um número negativo. O aluno A17 apresentou a seguinte resposta:

3. Com base no que você estudou até o momento, ao se deparar com um cálculo do tipo  $2 - 5$ , você classifica como sendo possível resolver esta situação? Justifique sua resposta.

Sim. Por que  $2 - 5$  dá números negativos.

Ex.  $\begin{array}{r} -2 \\ 5 \\ \hline -3 \end{array}$   $\begin{array}{r} -1 \\ 5 \\ \hline -4 \end{array}$

Figura 21: Resposta da questão 3 da Tarefa 5 (A17)  
Fonte: aluno A17

É possível notar que este aluno também estava em Atividade, apresentando resposta além do esperado, atrevendo-se a exemplificar subtrações que resultam em números negativos. Além de que este aluno já superou esse obstáculo epistemológico, já compreende que o erro matemático é necessário para que o conhecimento se consolide e faz parte da dinâmica do ensino e aprendizagem, pois de caso contrário não se arriscaria a exemplificar uma situação que ainda não foi estudada formalmente em sala.

O aluno A18 apenas respondeu “vai ter que emprestar”, revelando que ainda não superou obstáculos presentes no tratamento deste conteúdo. O aluno A22 respondeu “Não, pois é só fazer com o número negativo”, conforme imagem:

3. Com base no que você estudou até o momento, ao se deparar com um cálculo do tipo  $2 - 5$ , você classifica como sendo possível resolver esta situação? Justifique sua resposta.

Não, pois é só fazer com o número negativo

Figura 22: Resposta da questão 3 da Tarefa 5 (A18)  
Fonte: aluno A18

Este aluno compreendeu corretamente as reflexões discutidas em sala, e quando respondeu “não”, foi em relação ao conjunto dos Números Naturais, justificando que esse cálculo só é possível de se operar no Conjunto dos Números Inteiros.

O saldo desta questão revelou que 12 alunos do 28 que responderam sim, apresentaram a resposta da expressão como sendo  $-3$ , assim como o esperado. Destes, 3 alunos extrapolaram o esperado, apresentando respostas que vão além do senso comum apresentado pelos demais alunos. O aluno A13 por exemplo fez referência a História da Matemática:

3. Com base no que você estudou até o momento, ao se deparar com um cálculo do tipo  $2 - 5$ , você classifica como sendo possível resolver esta situação? Justifique sua resposta.

Sim é possível na matemática antiga, não era possível, mas se foi aceita no século XVI.

**Figura 23: Resposta da questão 3 da Tarefa 5 (A13)**  
**Fonte: aluno A13**

Esses resultados coletados por meio das Tarefas e associados aos relatos dos alunos (Diário de Campo) mostram que o modo como foi abordado o conteúdo inédito a eles foi satisfatório até o presente momento, revelando um grande salto cognitivo em 5 Tarefas, onde os próprios alunos foram construindo seus conhecimentos por meio da reflexão. Assim, temos convicção que nossa Proposta Metodológica por meio da Diversificação de Tarefas está contribuindo para o processo de ensino e aprendizagem dos Números Inteiros.

Assim como ocorreu na História dos Números Inteiros, houve, num primeiro momento, resistência à aceitação deste conjunto numérico. Mas, com a evolução da Matemática e dada a necessidade, se criou e se aperfeiçoou as técnicas operatórias com este conjunto.

Os alunos puderam experimentar, por meio das Tarefas, esta necessidade de haver um conjunto numérico que suprisse a defasagem existente para os Números Naturais. Essa necessidade foi posta por meio da problematização e não por meio da exposição direta de conteúdo, como tradicionalmente ocorre em sala de aula.

#### 6.4 CATEGORIA 4: ELEMENTOS DA RETA NUMÉRICA

Entendemos que o bloco de Tarefas sobre compreensão e representação dos Números Inteiros tem a proposta de formalizar elementos importantes e necessários para a construção deste conjunto numérico.

Assim, emerge esta categoria com o objetivo de avaliar o grau de entendimento sobre os principais elementos deste conjunto numérico: a reta numérica dos Inteiros, o elemento neutro aditivo, o sentido da reta e as duas semirretas à esquerda e à direita do zero.

Para a análise desta categoria, a qual computa 30 alunos participantes, utilizaremos as Tarefas 6 e 7, esta última que possui perguntas abertas sobre os elementos da reta numérica. A reta numérica foi inicialmente apresentada, implicitamente, na Tarefa 6 por meio do termômetro, um registro vertical da reta em questão.

A primeira parte da Tarefa 6 solicitava aos alunos o registro simbólico numérico da temperatura que cada um dos termômetros media na representação gráfica apresentada. Nesta seção, todos os alunos apresentaram os registros corretamente, mostrando, nesta altura das Tarefas, o domínio e aceitação dos Números Inteiros sobre a reta (representada pelo termômetro).

A segunda parte desta Tarefa solicitava aos alunos que organizassem os registros anteriores em ordem crescente, visto que este conceito não foi desenvolvido até o momento. Alguns alunos utilizaram o registro gráfico (elevação da marcação em vermelho do termômetro) para organizar os valores, obtendo assim sucesso na Tarefa, conforme mostra a imagem das respostas do aluno A28:

**Agora que você observou o registro das temperaturas que cada termômetro está medindo, organize-os de forma crescente, ou seja, do termômetro que registrou menor temperatura até o que registrou maior. Para isso, utilize o registro simbólico numérico que representa cada temperatura:**

$-35^{\circ}\text{C}$	$-30^{\circ}\text{C}$	$-5^{\circ}\text{C}$	$+5^{\circ}\text{C}$	$+30^{\circ}\text{C}$	$+35^{\circ}\text{C}$
-----------------------	-----------------------	----------------------	----------------------	-----------------------	-----------------------

**Figura 24: respostas apresentadas na Tarefa 6**  
**Fonte: aluno A28**

A exemplo deste aluno, outros 14 alunos apresentaram respostas igualmente satisfatórias, sendo que os demais apresentaram certa ordenação, porém não como

havíamos solicitado na Tarefa. A terceira parte desta Tarefa solicitava aos alunos para que obtivessem, por meio da análise do registro gráfico, a diferença de temperatura entre duas temperaturas que o aluno respondeu na primeira parte.

As respostas superaram nossas expectativas, já que todos os alunos apresentaram corretamente a diferença de temperatura a partir de suas temperaturas dadas. Por meio desta Tarefa já é possível introduzir operações com Inteiros a partir da reta numérica, mostrando mais uma vez a eficiência de se utilizar este registro para abordar os Números Inteiros.

Na Tarefa 7 foi realizada, com intervenção do professor, a Conversão de Registros de Representação Semiótica, onde a escala termométrica pôde ser estendida para a reta numérica dos Números Inteiros.

A questão (a) solicitava se o número 20 e o número  $-20$  são iguais, onde o aluno pôde se utilizar da reta numérica vertical para respondê-la. Todos os 30 alunos afirmaram que *não* são iguais, dos quais 15 deles relataram que o número 20 é maior que o número  $-20$  (ou  $-20$  é menor que 20), assim como era esperado, a compreensão qualitativa dos Números Inteiros.

Outros 8 alunos justificaram apenas que o número  $-20$  está abaixo de zero, assim como o número 20 está acima do zero, fazendo apenas uma relação de ordem geométrica. De modo análogo, 3 alunos justificaram apenas que o número  $-20$  é negativo, assim como o número 20 é positivo, fazendo relação apenas com o sinal que antecede o número. Ainda, outros 3 alunos utilizaram ambas justificativas acima citadas.

Podemos inferir que estes 14 alunos não compreenderam por completo a qualidade dos Números Inteiros, isto é, a disposição geométrica, a atribuição do sinal e principalmente a relação de ordem entre eles.

Ainda, 1 aluno apresentou resposta incompleta e incoerente com o esperado, alegando que *“um é quente”*, fazendo menção somente a temperatura do termômetro. Podemos inferir que este aluno não estabeleceu ligação entre o termômetro e a reta numérica dos Números Inteiros.

O quadro abaixo mostra as competências matemáticas apresentadas pelos alunos durante a resolução desta Tarefa, na qual o foco centrava-se na associação da escala termométrica com a reta numérica, afim de melhor compreender a comparação entre Números Inteiros:

Competências	Alunos
Estabeleceu relação de maioria, relação geométrica e relação com o sinal de negativo	15
Estabeleceu relação geométrica e relação com o sinal de negativo	3
Estabeleceu apenas relação de ordem e disposição geométrica	8
Estabeleceu apenas relação com o sinal de negativo	3
Estabeleceu apenas relação com as temperaturas apresentadas na imagem	1

**Quadro 33: Competências apresentadas pelos alunos na Tarefa 7**

Fonte: o autor

Outra questão de importante análise faz menção ao zero, indagando qual o seu significado na reta numérica. Dos 30 alunos, 19 afirmaram que o zero é o centro (no sentido de meio, número que divide geometricamente a reta) dos Números Inteiros. Outros 10 alunos afirmaram que o zero é “começo da reta numérica”, no sentido de que este elemento é o ponto de referência para análise dos demais números desta reta. Um aluno apresentou resposta incompatível com a pergunta, justificando que “ele representa a linha numérica”.

Na Proposta Metodológica que apresentamos, é de interesse que os alunos compreendam que o zero é um ponto de referência, pois este conceito servirá de base para outros importantes conceitos dos Números Inteiros, tais como elemento oposto, elemento simétrico e módulo. Neste sentido, nenhum aluno apresentou resposta que assim relacionasse o zero, de modo que o professor pesquisador teve que interferir para conduzir os alunos a esse entendimento em reflexão posterior à aplicação.

Nesta Tarefa também foi questionado sobre a quantidade de números existentes nos dois sentidos da reta, tomando o zero como referência, isto é, a quantidade de números no sentido positivo da reta e no sentido negativo da reta.

Dos 30 alunos, 15 apresentaram como resposta *infinitos números*, justificando apenas que “eles não acabam”. Outros 13 alunos apresentaram também como resposta infinitos números, mas justificaram por meio da ideia de antecessor e sucessor, conforme mostra a imagem das respostas apresentadas pelo aluno A10:

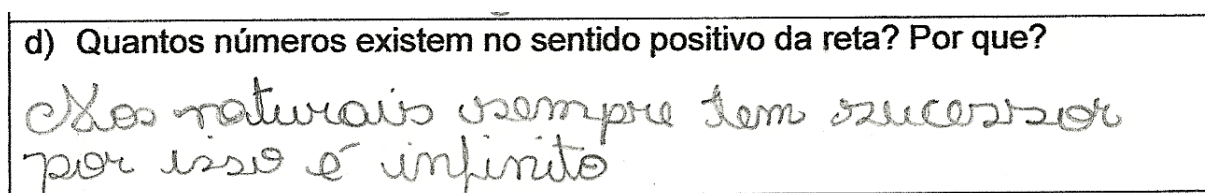


Figura 25: Respostas da Tarefa 7 (A10)

Fonte: aluno A10

f) Quantos números existem no sentido negativo da reta? Por que?

Os negativos sempre tem um antecessor por isso é infinito

**Figura 26: Respostas da Tarefa 7 (A10)**

**Fonte: aluno A10**

Estas respostas foram satisfatórias e atendem às nossas expectativas de compreensão do infinito no Conjunto dos Números Inteiros. Entendemos que este conjunto diversificado de Tarefas contribui para o processo de ensino e aprendizagem, colocando os alunos em Atividade, fruto de nossos questionamentos que nos levaram a realizar tal pesquisa.

Prova disso foram os resultados apresentados por este aluno, os quais mostram que o mesmo extrapolou o conhecimento apresentado pelos demais alunos, onde observa-se que ele já compreendeu que a reta numérica dos Números Inteiros se desdobra no conjunto dos Naturais e no subconjunto dos Números Negativos.

Ainda, 2 alunos apresentaram resposta incoerente com as perguntas acerca da quantidade de números em cada sentido da reta, apresentando respostas como “*é porque são temperaturas positivas*” ao que se refere a quantidade de números existentes no sentido positivo da reta, e “*por que são negativas*” ao se referir no sentido negativo da reta.

O término desta Tarefa foi orientado pelo professor pesquisador afim de propor a operação de Tratamento dos Registros Gráficos, isto é, a tradicional representação da reta numérica horizontal.

Outra importante Tarefa realizada ao término deste bloco (Tarefa 8) buscou refletir, juntamente com os alunos por meio do diálogo e exemplos, os importantes conceitos destacados. Houve a valorização da superação dos erros apresentados pelos alunos durante a resolução das Tarefas, processo importante para a compreensão dos objetos matemáticos em estudo.

## 6.5 CATEGORIA 5: COMPARAÇÃO ENTRE OS NÚMEROS INTEIROS

A análise desta categoria tem por base as Tarefas do bloco 3, em especial as Tarefas 9 e 11. Constituem como sujeitos de pesquisa 29 alunos que participaram de todas as Tarefas propostas neste bloco.

Buscamos estabelecer comparação entre os Números Inteiros por meio dos elementos da reta numérica, geometricamente e por meio da relação com o sinal do número, mas principalmente utilizando os conceitos de antecessor e sucessor de um número.

Na Tarefa 9 propomos aos alunos que comparassem dois números a partir da reta numérica vertical, a exemplo do termômetro e os números que representam temperaturas. Deste modo, buscamos estabelecer relação geométrica de comparação entre dois Números Inteiros.

Nesta Tarefa, apresentamos oito questões de comparação numérica e uma questão aberta, na qual os alunos deveriam generalizar regras para comparação entre dois números, a partir da observação das questões anteriores.

Nas oito questões de comparação, 18 alunos responderam e justificaram corretamente todas elas a partir do conceito de que o maior número entre dois números comparados é o que se posiciona mais acima na reta numérica vertical. O registro abaixo foi apresentado pelo aluno A31:

<p>c) <math>-20</math> ou <math>0</math>?  <math>0</math> está acima do número <math>-20</math>.</p>	<p>d) <math>20</math> ou <math>-40</math>?  <math>20</math> está acima do <math>0</math> e o <math>-40</math> está abaixo do <math>0</math></p>
--	---

**Figura 27: Respostas da Tarefa 9 (A31)**

Fonte: aluno A31

O aluno A8 também mostra ideia semelhante em seus registros, conforme imagem abaixo:

<p>g) <math>-7</math> ou <math>-8</math>?  <math>-8</math> está acima do <math>-7</math></p>	<p>h) <math>-4</math> ou <math>12</math>?  <math>12</math> está acima do <math>0</math> e o <math>-4</math> está abaixo do <math>0</math></p>
--	---

**Figura 28: Respostas da Tarefa 9 (A8)**

Fonte: aluno A8

Observa-se que estes alunos, além da relação geométrica e posicional entre os dois números comparados, também apresentam uma relação com o zero, número que propomos como referencial para diversas análises.



Os demais 11 alunos, além de utilizarem este modelo geométrico de comparação principalmente nas questões que envolviam dois números negativos, também utilizaram a justificativa de que um número positivo é maior que um número negativo, nas questões de comparação que os envolviam.

Na comparação entre os números 40 e  $-40$ , o aluno A24 mostrou conhecer que números positivos são maiores que negativos, conforme mostra a imagem abaixo.

<p>e) 40 ou <math>-40</math>?</p> <p>40 Por que todo Número positivo é maior que um negativo</p>	<p>f) <math>-20</math> ou <math>-40</math>?</p> <p><math>-20</math> porque é maior do <math>-40</math></p>
--	--

**Figura 29: Respostas da Tarefa 9 (A24)**

Fonte: aluno A24

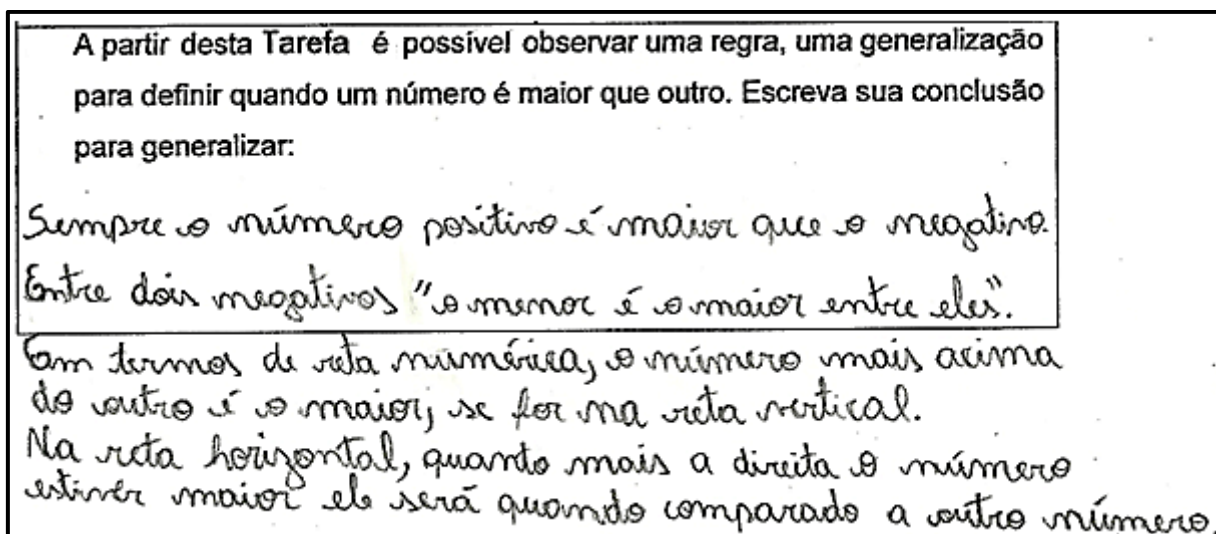
Esse entendimento é importante, pois servirá para generalizar conceitos que permitam aos alunos comparar dois números Inteiros. Generalizações não habitam tradicionalmente o ambiente escolar, durante as aulas de Matemática.

Assim, estabelecemos uma questão aberta de generalização, apresentou grau elevado de dificuldade, pois uma pequena parte dos alunos conseguiram estabelecer regras gerais para os números. Por meio do diálogo reflexivo e mediação do professor, os alunos compreenderam as generalizações elaboradas pelos colegas.

O aluno A29 elencou corretamente algumas generalizações sobre a comparação entre Números Inteiros e apresentou para a turma. Todavia, a frase de comparação entre dois negativos utilizada pelo aluno, “o menor é o maior entre eles”, quando apresentada ao grupo de alunos, soou estranho aos colegas.

O aluno se referia ao módulo de um número, sendo que a frase acima poderia ser reescrita como: entre dois números negativos, o maior entre eles é aquele que apresentar menor módulo numérico. Até o momento de aplicação desta Tarefa, o conceito de módulo não havia sido trabalhado com os alunos e o professor interviu na explicação para que todos os alunos pudessem compreender.

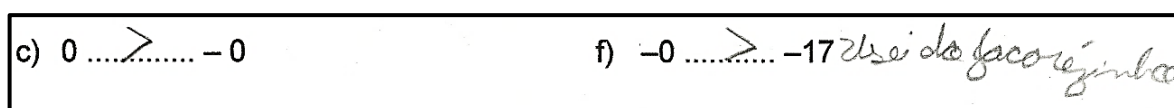
Este aluno esboçou muito interesse na intervenção realizada pelo professor, já que a explicação coletiva, segundo ele, referia-se ao seu conhecimento prévio. A figura que segue retrata as “propriedades” que este aluno elaborou em caráter de conclusão da Tarefa e apresentou à turma:



**Figura 30: Respostas da Tarefa 9 (A29)**  
**Fonte: aluno A29**

As generalizações compartilhadas pelos alunos colaboraram para que todos pudessem resolver a Tarefa 11, esta que também tratava de comparação numérica, utilizando os símbolos matemáticos  $<$  (menor que),  $>$  (maior que) e  $=$  (igual). Além disso, o registro gráfico da reta numérica horizontal já estava impresso na folha de Tarefa para que os alunos utilizassem durante as comparações de Números Inteiros.

Nesta Tarefa praticamente todos os alunos desenvolveram corretamente a comparação entre dois números, com algumas exceções pontuais: 5 alunos equivocaram-se ao classificar  $0 > -0$ , como mostra a figura da resposta apresentada pelo aluno A13:



**Figura 31: Respostas da questão 2 da Tarefa 11 (A13)**  
**Fonte: aluno A13**

Além do fato apresentado da alternativa c), o que nos chamou a atenção na alternativa f) foi a justificativa apresentada pelo aluno, onde escreve “usei do jacarézinho” quando se refere ao símbolo “maior que”. Provavelmente algum professor de anos anteriores utilizou tal expressão afim de que os alunos memorizassem o símbolo e sua aplicação. Embora alguns recursos didáticos sejam válidos afim de que o aluno aprenda o conteúdo necessário, buscamos tratar desta Ciência com o máximo de rigor e formalismo possível, visto que estas distorções podem gerar obstáculos irreparáveis a longo prazo.

Outros 2 alunos equivocaram-se ao classificar que  $17 < +17$ , a exemplo do aluno A18:

a) $17 \leq \dots +17$	d) $0 \leq \dots 17$
------------------------	----------------------

**Figura 32: Respostas da questão 2 da Tarefa 11 (A18)**  
**Fonte: aluno A18**

Observa-se que este aluno havia comparado corretamente por meio do sinal de igual, que ficou apagado atrás do símbolo “menor que”. Para este aluno, não ficou claro que todo número que não apresenta sinal que o antecede, é por natureza positivo.

As questões 3 e 4 desta mesma Tarefa solicitavam para organizar um conjunto de números em ordem crescente e decrescente, respectivamente nesta ordem. Dos 29 alunos, 13 ordenaram corretamente os conjuntos de números inteiros nas ordens solicitadas, sem apresentar qualquer erro, como mostra a imagem da resposta apresentada pelo aluno A5:

<p>3. Ordene os números em ordem crescente (do menor para o maior):</p> <p style="text-align: center;"> <del>6</del>   <del>3</del>   <del>8</del>   <del>2</del>   0   9   <del>-5</del>   <del>-7</del> </p> <p style="text-align: center;"> <math>-8, -7, -5, -4, -1, 0, 2, 3, 6, 9.</math> </p>
<p>4. Ordene os números abaixo em ordem decrescente:</p> <p style="text-align: center;"> <del>-20</del>   <del>45</del>   <del>5</del>   <del>15</del>   -40   0   -10   <del>25</del>   30   <del>35</del> </p> <p style="text-align: center;"> <math>45, 35, 30, 25, 15, 0, -5, -10, -20, -40.</math> </p>

**Figura 33: Respostas das questões 3 e 4 da Tarefa 11 (A5)**  
**Fonte: aluno A5**

Dos 16 alunos restantes, 12 erraram as duas ordenações propostas, 1 acertou somente a ordem decrescente e 3 acertaram somente a ordem crescente. Nota-se que os alunos, em grande parte, compreenderam a ordenação crescente ou decrescente dos Números Inteiros.

Os erros cometidos geralmente ocorrem no momento de unir os números negativos com os números positivos ou na ordenação como um todo dos números negativos. Porém, embora a ordenação como um todo apresente erros, existe uma lógica de ordenação parcial dentro do conjunto, como mostra a imagem da resposta apresentada pelo aluno A3:

4. Ordene os números abaixo em ordem decrescente:

$-20^x$   $45^x$   $-5^x$   $15^x$   $-40^x$   $0^x$   $-10^x$   $25^x$   $30^x$   $35^x$

45, 35, 30, 25, 15, 0, -40, -20, -10, -5.

**Figura 34: Respostas da questão 4 da Tarefa 11 (A3)**

Fonte: aluno A3

Esse mesmo equívoco é apresentado pelo aluno A22, conforme mostra a imagem de sua resposta:

4. Ordene os números abaixo em ordem decrescente:

~~-20~~ ~~45~~ ~~-5~~ ~~15~~ ~~-40~~ ~~0~~ ~~-10~~ ~~25~~ ~~30~~ ~~35~~

-5, -10, -20, -40, 0, 15, 25, 30, 35, 45.

**Figura 35: Respostas da questão 4 da Tarefa 11 (A22)**

Fonte: aluno A22

Após a aplicação desta Tarefa, realizamos o momento reflexivo onde esses alunos relataram não utilizarem a reta numérica como base de suas análises, ao contrário do relato dos alunos que acertaram por completo estas questões.

Assim como Moretti (2012) sugere o uso da reta numérica e o princípio de extensão dos Naturais para os Inteiros, acreditamos que o entendimento e uso da reta numérica dos Números Inteiros se faz necessário para a compreensão de diversos conceitos, tais como o módulo de um número, a comparação entre números, a ordenação, entre outros.

## 6.6 CATEGORIA 6: ANTECESSOR E SUCESSOR DOS INTEIROS

Nesta categoria pretendemos avaliar como os alunos interpretam a ideia do antecessor e do sucessor de um número. Quando se trata do conjunto dos Números Naturais, esses conceitos são relativamente fáceis, atentando-se para o zero, quando tomado como Natural, não apresenta antecessor.

Todavia, nos Números Inteiros o antecessor do zero existe e pode se constituir em um obstáculo epistemológico no ambiente escolar, principalmente se tratando dos números negativos. A superação deste obstáculo poderá ocorrer para os alunos que compreenderem o modelo geométrico proposto em nossa pesquisa: a reta numérica dos Números Inteiros.

A Tarefa 10 começa com uma questão que solicita aos alunos que estes desenhem a reta numérica dos Números Inteiros, no intervalo de  $-10$  a  $10$ , para que o aluno possa utilizar sua própria representação geométrica e possa perceber as disposições numéricas. De modo geral, todos os alunos apresentaram satisfatoriamente este registro requerido.

Na sequência, apresenta um quadro com alguns números, escolhidos propositalmente pelo professor pesquisador, afim de verificar como os alunos apresentarão o antecessor e o sucessor de cada um.

Do total de 29 alunos, 21 responderam corretamente todo o quadro proposto na Tarefa sobre antecessor e sucessor, atendendo com sucesso nossa proposta. Dos 8 alunos que apresentaram ao menos um erro no quadro proposto, 4 deles apresentaram corretamente o número 1 como sucessor do zero, porém apresentaram o zero como sendo antecessor do próprio zero.

Outros 6 alunos apresentaram inversão quanto ao antecessor e sucessor dos números negativos. O quadro abaixo representa as respostas apresentadas pelo aluno A17, que ilustra as duas situações expostas acima:

<i>Antecessor</i>	<i>Número</i>	<i>Sucessor</i>	<i>Antecessor</i>	<i>Número</i>	<i>Sucessor</i>
2	3	4	-5	-5	-7
7	8	9	-7	-8	-9
9	10	11	-9	-10	-11
999	1000	1001	-28	-29	-30
0	0	1	-99	-100	-101
-1	-2	-3	-298	-299	-300

**Figura 36: Respostas da Tarefa 10 (A17)**

**Fonte: aluno A17**

Estes alunos não compreenderam, até o momento em que foram aplicadas essas Tarefas, a necessidade do uso da reta numérica e os conceitos inerentes e implícitos na reta, embora a maioria deles tenham afirmado que a reta foi importante na resolução desta questão.

Por outro lado, 9 alunos declaram que a representação gráfica da reta numérica não foi útil, pois se utilizaram de cálculo mental. Todavia, 3 destes alunos foram justamente os que erraram ao apresentar o antecessor e o sucessor de todos os números negativos.

Assim, destacamos que num primeiro momento, a reta numérica é de fundamental importância para que os alunos possam compreender a sequência numérica e aferir corretamente o antecessor e o sucessor dos Números Inteiros.

### 6.7 CATEGORIA 7: MÓDULO E OPOSTO SIMÉTRICO DOS INTEIROS

Entendemos que estes dois conceitos estão diretamente ligados quando o assunto é Números Inteiros. Anteriormente à aplicação desta Tarefa, o professor explicou aos alunos o conceito de Módulo de um Inteiro como sendo a distância, sobre a reta numérica, do número em questão até o zero, além do símbolo que representa este conceito.

Em um primeiro momento, procuramos apresentar o elemento oposto simétrico como sendo um outro número sobre a reta que apresenta o mesmo módulo do número em questão. Por exemplo, o oposto simétrico do número 7 é o  $-7$ , pois ambos apresentam módulo de valor 7. Somente com essa interferência por parte do professor, os alunos realizaram a Tarefa 12.

Dos 29 alunos que realizaram esta Tarefa, 23 alunos acertaram completamente todos os valores de módulo solicitado. Três alunos erraram por completo os resultados esperados, revelando não terem compreendido o conceito de módulo, embora no enunciado desta questão há explicitamente explicado este conceito.

Os outros 3 alunos equivocaram-se quanto ao sinal do módulo de números negativos, não se atentando que módulo se refere a uma distância e, portanto, é positivo. A imagem abaixo mostra a resposta apresentada pelo aluno A10 a esta questão:

3. Nesta atividade, você deverá usar o conceito de módulo, ou seja, a distância do número até o zero, na reta numérica. Logo, verifique o módulo dos números representado por:					
A	B	C	D	E	F
2	-7	-3	9	6	-9

**Figura 37: Respostas da questão 3 da Tarefa 12 (A10)**

**Fonte: aluno A10**

Esses alunos forneceram a posição de cada letra sobre a reta numérica e não a distância conforme solicitada. Todavia, os resultados obtidos por meio desta questão foram satisfatórios, dado o grande número de alunos que apresentaram resposta assim como o esperado.

Ao término desta questão, o aluno A32 fez a seguinte colocação oral, em relação ao equívoco desse colega: “o módulo de um número é sempre positivo, pois é uma distância, e não existe distância negativa”. Mediante este comentário, devemos observar a maturidade conceitual deste aluno, além de que o mesmo mostrou-se bastante envolvido com a Tarefa, estando ele comprometido com a proposta.

A questão 4 desta Tarefa se refere ao oposto simétrico e também apresenta explicação com exemplos no enunciado, além daquela previamente realizada pelo professor. Na primeira parte, a qual apenas solicitava qual número sobre a reta numérica representa o oposto simétrico de um dado número, 18 alunos acertaram por completo toda a questão.

Dos outros 11 alunos que apresentaram algum equívoco, um aluno apresentou o número 1 como oposto de zero, e outro apresentou o  $-1$ . Nove alunos apresentaram o resultado  $-0$  para o oposto simétrico de 0, conforme mostra a imagem da resposta apresentada pelo aluno A12:

4. Com base na reta numérica, obtenha o oposto de cada número:							
7	-7	+8	-8	0	-0	-5	+5
-1	+1	-6	+6	25	+25	-10	+10

**Figura 38: Respostas da questão 4 da Tarefa 12 (A12)**  
**Fonte: aluno A12**

Esta resposta não está totalmente incorreta, porém isso revela que 8 alunos não compreenderam que  $-0 = 0$ , já que este fato foi observado e registrado pelo aluno A30:

4. Com base na reta numérica, obtenha o oposto de cada número:							
7	-7	+8	-8	0	-0=0	-5	5
-1	1	-6	6	25	-25	-10	10

**Figura 39: Respostas da questão 4 da Tarefa 12 (A30)**  
**Fonte: aluno A30**

O término desta questão se refere ao que os professores chamam tradicionalmente de regra de sinais. Porém, não foi por esta regra que procuramos explicar o aparecimento de sinais contínuos que antecedem um número. Buscamos explicar pelo conceito formal do elemento oposto, afim de que o próprio aluno generalize esta regra.

Solicitamos aos alunos para encontrarem o oposto simétrico de alguns números que exigiam uma sucessão de oposto simétrico. Nesta seção, todos os alunos realizaram, de modo implícito, a regra de sinais. Porém, nenhum aluno apresentou corretamente todos os números que representavam o oposto simétrico de números solicitados, mas generalizaram a ideia do elemento oposto, apresentando o número equivalente de cada um solicitado, como mostra a imagem da resposta apresentada pelo aluno A10:

$-(-2) =$	$-(-5) =$	$-(-(-3))) =$	$-(-(-7)) =$	$-(-(-(-4))) =$
+ 2	+ 5	- 3	- 7	+ 4

**Figura 40: Respostas da questão 4 da Tarefa 12 (A10)**  
**Fonte: aluno A10**

Inferimos que, devido à exigência de vários elementos opostos, os alunos apenas apresentaram um valor equivalente, porém esqueceram-se de finalizar e apresentar o elemento oposto de cada valor.

Ao final desta seção de questões, alguns alunos perceberam que o oposto simétrico é uma “reflexão” em relação ao zero, onde o aluno A5 expôs verbalmente que “o oposto é sempre simétrico a partir do zero, como se tivesse um espelho sobre ele”.

Essa expressão oral associada aos resultados obtidos na Tarefa mostra que o conceito do elemento oposto simétrico em alternativa à regra de sinais foi eficiente, já que todos os alunos converteram corretamente os registros simbólicos.

O aluno A24 esboçou uma generalização que se assemelha a tradicional regra de sinais, onde o mesmo coloca que “quando tem par sinais de menos, o resultado fica positivo, e quando tem ímpar sinais de menos, o resultado fica negativo”, quando se refere ao número equivalente.



O bloco 3 se encerrou com a Tarefa 13, a qual se constitui em um momento reflexivo e aberto ao diálogo, onde os alunos puderam expor seu conhecimento, suas dúvidas e seus equívocos cometidos durante a resolução das Tarefas, estes que se converteram em aprendizado para toda a turma, em consonância com a proposta de valorizar o erro afim de proporcionar conhecimento por meio da reflexão coletiva.

## 6.8 CATEGORIA 8: OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Nesta categoria de análise, nos basearemos em todas as Tarefas restantes, a começar pela 14, com término na Tarefa 24, isto é, utilizaremos 11 Tarefas como suporte à nossa análise, esta que tem por objetivo avaliar a compreensão do aluno sobre as operações que envolvam Números Inteiros.

Vamos separar nossas análises em dois momentos, sendo o primeiro sobre a operação Soma com Números Inteiros (adição, subtração e regra de sinais), e num segundo momento trataremos da operação de Multiplicação e Divisão com Números Inteiros. Além disso, estaremos valorizando a evolução cognitiva do aluno sobre o conteúdo que é foco de nossa pesquisa.

Para a análise da operação Soma, selecionamos 24 alunos que participaram de todas as Tarefas que envolvem esta operação, sendo a partir da Tarefa 14 até a Tarefa 19, além da Tarefa 24 que se constitui no Jogo que envolve todas as operações.

Iniciaremos pela Tarefa 14, a qual foi realizada com a intervenção do professor pesquisador e explicada somente com base no deslocamento sobre a reta numérica. Ressaltamos que este foi o primeiro momento que os alunos tiveram contato com a operação de Números Inteiros por meio da Proposta Metodológica.

O quadro abaixo mostra a distribuição de acertos na questão 1 desta Tarefa, a qual apresentava 16 operações:

<b>Alunos</b>	<b>Erros Apresentados</b>
8 alunos	Nenhum erro
4 alunos	Exatamente 1 erro
7 alunos	De 2 à 5 erros
5 alunos	Mais de 5 erros

**Quadro 34: Quantidade de erros obtidos na Tarefa 14**  
**Fonte: o autor**

A imagem que segue revela as respostas apresentadas pelo aluno A6, o qual não cometeu nenhum equívoco em suas resoluções, a exemplo dos outros sete alunos que também atingiram este feito:

1. Nesta Tarefa, vamos realizar operações envolvendo números negativos, se utilizando da reta numérica abaixo:

$2 + 3 = 5$	$4 - 7 = -3$	$-7 + 3 = -4$	$-2 + 5 = 3$
$6 - 2 = 4$	$0 - 6 = -6$	$-4 + 4 = 0$	$-1 - 8 = -9$
$2 - 3 = -1$	$5 - 10 = -5$	$-5 + 0 = -5$	$-3 - 2 = -5$
$-3 + 3 = 0$	$-7 + 7 = 0$	$-1 + 1 = 0$	$-10 + 10 = 0$

**Figura 41: Respostas da questão 1 da Tarefa 14 (A6)**  
**Fonte: aluno A6**

Este aluno, assim como os demais que apresentaram nenhum ou apenas 1 erro, fez uso a reta numérica para realizar os deslocamentos afim de realizar a operação proposta. Em diálogo com a turma, num momento de reflexão sobre esta Tarefa, o aluno E8, que apresentou mais que 5 erros, revelou ter utilizado cálculo mental em alternativa à reta numérica proposta pelo professor.

Salientamos que nesta etapa da Proposta Metodológica, ainda não foi valorizado o cálculo mental e os alunos que se utilizaram deste modo para operar foram os alunos que mais apresentaram erros nesta Tarefa.

Os alunos que cometeram apenas 1 erro, assim como os alunos que cometeram de 2 a 5 erros, equivocaram-se majoritariamente na representação dos números negativos, ausentando o símbolo dos resultados.

Deste modo, entendemos que estes 11 alunos compreenderam a operação de Soma com Números Inteiros, equivocando-se na representação dos números negativos, que nesta etapa já deveria ser superado.

A figura que segue revela as respostas registradas pelo aluno A11, que apresentou apenas 1 erro, a exemplo dos outros três alunos:

$2 + 3 = 5$	$4 - 7 = -3$	$-7 + 3 = -4$	$-2 + 5 = +3$
$6 - 2 = 4$	$0 - 6 = -6$	$-4 + 4 = 0$	$-1 - 8 = -9$
$2 - 3 = 1$	$5 - 10 = -5$	$-5 + 0 = -5$	$-3 - 2 = -5$
$-3 + 3 = 0$	$-7 + 7 = 0$	$-1 + 1 = 0$	$-10 + 10 = 0$

**Figura 42: Respostas da questão 1 da Tarefa 14 (A11)**  
**Fonte: aluno A11**

Este aluno, ao resolver a expressão  $2 - 3$ , atribuiu resposta 1, sendo que o esperado é  $-1$ . Ele compreendeu o modelo sugerido pelo professor para resolver operações com números inteiros, inclusive apresentou registros de deslocamentos sobre a reta numérica.

Por meio desta Tarefa, concluímos que as operações realizadas por meio de deslocamentos sobre a reta numérica são muito eficientes, em alternativa ao modelo comercial, já que a maioria dos alunos mostraram sucesso na resolução desta primeira Tarefa de operações com Inteiros.

Porém, notamos que este modelo demanda mais tempo na resolução de operações quando comparado ao tradicional modelo comercial, já que o aluno depende da conversão do registro gráfico para o registro numérico.

Na Tarefa 15 o aluno é conduzido ao entendimento de comutatividade da operação soma com números inteiros, por meio da reta numérica. Os resultados foram bastante satisfatórios no que diz respeito à compreensão das operações sobre a reta numérica e a comutatividade.

Ao término desta Tarefa, observamos que a maioria dos alunos (23 alunos) apresentaram resposta semelhante ao exemplo que mostraremos a seguir, revelando que compreenderam a propriedade comutativa da soma e, especialmente, tratando-a por meio da reta numérica.

A imagem que segue abaixo mostra as respostas apresentadas pelo aluno A6 nas duas questões abertas, onde para  $-6 + 3$ , o mesmo escreve “*vamos sair do menos seis e andar mais três casas, que o resultado é:  $-3$* ”. De modo análogo, ele escreve para a expressão  $-3 + 6$ :

Qual é o resultado da soma  $-6 + 3$ ? Qual é a interpretação na reta numérica?

Comemos 6 doces e memorizamos e comemos mais 3 doces  
que o resultado é  $-3$

E qual será o resultado da soma  $+3 - 6$ ? Qual a interpretação na reta?

Comemos 3 doces e memorizamos e comemos 6 doces  
que o resultado é  $-3$

Figura 43: respostas da primeira parte da Tarefa 15  
Fonte: aluno A6

O término desta Tarefa solicitava aos alunos para que estes desenvolvessem as operações propostas, as quais estavam registradas na linguagem materna, por meio da linguagem simbólico numérica, utilizando a comutatividade. A imagem abaixo traduz as respostas apresentadas pela maioria dos alunos, a exemplo do aluno A9:

Para cada situação descrita, converta as informações para o registro simbólico numérico e as resolva de acordo com a reta numérica:	
Dois mais sete negativo $2 + -7 = -5$ $-7 + 2 = -5$	Doze mais oito negativo $12 + -8 = 4$ $-8 + 12 = 4$
Doze negativo mais oito $-12 + 8 = -4$ $+8 - 12 = -4$	Três mais oito negativo $3 + -8 = -5$ $-8 + 3 = -5$
Doze negativo mais oito negativo $-12 + -8 = -20$ $-8 + -12 = -20$	Menos três mais dois negativo $-3 + -2 = -5$ $-2 + -3 = -5$
Dois negativo menos cinco $-2 - 5 = -7$ $-5 - 2 = -7$	Sete menos dez $7 - 10 = -3$ $10 - 7 = 3$

Figura 44: respostas da segunda parte da Tarefa 15  
Fonte: aluno A9

Observamos que este aluno, a exemplo da grande parte dos sujeitos analisados, apresentou respostas corretas às expressões solicitadas, sendo que o mesmo se utilizou da reta numérica para realizar e validar suas respostas. Embora o método da reta numérica seja ligeiramente mais lento, revela-se bastante eficiente.

Na Tarefa 16 apresentamos as operações com Números Inteiros que necessitam de regras de sinais. Todavia, procuramos explicar por meio dos deslocamentos sobre a reta numérica e a existência do elemento oposto, afim de evitar a transmissão de regras para decorar.

Como a resolução destas expressões requer duas Atividades simultâneas (regra de sinais e operação de soma), esta Tarefa se mostrou de grau elevado de dificuldade, pois somente dois alunos acertaram todas as trocas de sinais necessárias e os resultados das somas. A tabela abaixo traduz os resultados observados:

Alunos	Resultados
2 alunos	Acertaram todas as trocas de sinais e todas as operações de soma
3 alunos	Utilizaram cálculo mental e erraram as trocas de sinais e as operações
10 alunos	Acertaram as trocas de sinais, porém erraram a operação de soma
9 alunos	Erraram as trocas de sinais e consequentemente as somas

**Quadro 35: Relação de Erros e Acertos na Tarefa 16**

Fonte: o autor

A figura abaixo mostra os resultados apresentados pelo aluno A24, que acertou todas as operações propostas:

2. Agora é sua vez: resolva as operações abaixo de acordo com o exemplo:			
$2 + (-3) =$ $2 - 3 = -1$	$4 - (-7) =$ $4 + 7 = 11$	$-7 + (-3) =$ $-7 - 3 = -10$	$-2 + (-5) =$ $-2 - 5 = -7$
$6 - (-2) =$ $6 + 2 = 8$	$0 - (-6) =$ $0 + 6 = 6$	$-4 + (-4) =$ $-4 - 4 = -8$	$-1 - (-8) =$ $-1 + 8 = 7$
$2 - (-3) =$ $2 + 3 = 5$	$5 - (-10) =$ $5 + 10 = 15$	$-5 + (-0) =$ $-5 - 0 = -5$	$-3 - (-2) =$ $-3 + 2 = -1$
$-(-3) + 3 =$ $3 + 3 = 6$	$-(-7) + (-7) =$ $7 - 7 = 0$	$-(-1) + 1 =$ $1 + 1 = 2$	$-10 + (+10) =$ $-10 + 10 = 0$

**Figura 45: Respostas da questão 2 da Tarefa 16 (A24)**

Fonte: aluno A24

Quanto aos 3 alunos que apresentaram cálculo mental, não pudemos analisar com precisão quais operações utilizaram, pois apresentaram apenas os resultados incorretos para cada expressão. Os 9 alunos que erraram tanto as trocas de sinais quanto as operações não compreenderam a associação do elemento oposto às operações com Inteiros que cada expressão exige.

Já os outros 10 alunos que acertaram as trocas de sinais revelaram que se preocuparam com o elemento oposto, mas não se atentaram para a operação matemática a expressão demandava após realizar a troca de sinais, ou equivocaram-se na interpretação dos números envolvidos no momento de analisar os deslocamentos sobre a reta numérica. A figura a seguir mostra os resultados apresentados pelo aluno A4, que exemplifica a resposta dos demais:

2. Agora é sua vez: resolva as operações abaixo de acordo com o exemplo:			
$2 + (-3) =$ $2 - 3 = -1$	$4 - (-7) =$ $4 + 7 = 11$	$-7 + (-3) =$ $-7 - 3 = -4$	$-2 + (-5) =$ $-2 - 5 =$ $-5 - 2 = -3$
$6 - (-2) =$ $6 + 2 = 8$	$0 - (-6) =$ $0 + 6 = 6$	$-4 + (-4) =$ $-4 - 4 = 0$	$-1 - (-8) =$ $-1 + 8 = +7$
$2 - (-3) =$ $2 + 3 = 5$	$5 - (-10) =$ $5 + 10 = 15$	$-5 + (-0) =$ $-5 - 0 = 0$	$-3 - (-2) =$ $-3 + 2 = -1$
$-(-3) + 3 =$ $+3 + 3 = 6$	$-(-7) + (-7) =$ $+7 + -7 = 0$	$-(-1) + 1 =$ $+1 + 1 = 2$	$-10 + (+10) =$ $-10 + 10 = 0$

**Figura 46: Respostas da questão 2 da Tarefa 16 (A4)**  
**Fonte: aluno A4**

Observa-se que este aluno realizou todas as trocas de sinais (regras de sinais) necessárias, porém equivocou-se em duas expressões, quando para  $-7 - 3$  apresentou resposta  $-4$ , e para  $-4 - 4$  apresentou resposta  $0$ .

Preocupado com o aprendizado desse grande número de alunos que apresentaram resultados insatisfatórios ao nosso ver, o professor fez uma intervenção coletiva de retomada de conteúdos e, na tentativa de amenizar as dificuldades

apresentadas, foi aplicada a Tarefa 17, que se constitui no Jogo de trilha Vai e Vem, que adaptamos para que haja operações com Números Inteiros.

O Jogo tem por objetivo a troca de conhecimentos e a correção dos erros de forma menos impactante, já que os colegas farão isso por meio das situações lúdicas, conforme já discutimos em capítulo anterior.

Deste modo, a Tarefa 17 será analisada em outra categoria adiante e, afim de medir os efeitos desta intervenção, vamos observar a Tarefa 18, a qual foi aplicada após a Tarefa lúdica e a retomada de conteúdo. Esta Tarefa possui 12 expressões que deveriam ser resolvidas pelos alunos, sem intervenção do professor. Já pudemos observar uma melhora significativa no aprendizado dos alunos. A tabela a seguir mostra os resultados obtidos por meio desta Tarefa:

<b>Alunos</b>	<b>Resultados</b>
2 alunos	Acertaram todas as trocas de sinais e as operações de soma
2 alunos	Utilizaram cálculo mental e erraram as trocas de sinais e as operações
20 alunos	Acertaram todas as trocas de sinais, porém erraram até 4 operações

**Quadro 36: Relação de Erros e Acertos na Tarefa 18**

**Fonte: o autor**

Os dois alunos que acertaram todas as expressões nesta Tarefa são os mesmos dois que acertaram todas na Tarefa 16, conforme esperado. Dos 3 alunos que resolveram por meio do cálculo mental na Tarefa 16, um optou por resolver pelo método apresentado pelo professor e obteve êxito em suas resoluções, sendo que os outros 2 mantiveram seu método de cálculo mental e erraram todas as expressões.

Nesta Tarefa, podemos generalizar que 20 alunos apresentaram melhora de desempenho, sendo que acertaram todas as trocas de sinais e erraram até 3 resultados de expressões.

A figura abaixo mostra os resultados apresentados pelo aluno A31, a qual apresentou grande número de erros na Tarefa 16 e encontrava-se entre os 9 alunos citados na Tabela que erraram as trocas de sinais e conseqüentemente as expressões:

2. Agora é sua vez: resolva as subtrações abaixo, com base no exemplo.	
$(+4) - (-3) =$ $4 + 3 = 7$	$(+3) - (-4) =$ $3 + 4 = 7$
$(-4) - (+3) =$ $-4 - 3 = -7$	$(-3) - (-4) =$ $-3 + 4 = 1$
$(-4) - (-3) =$ $-4 + 3 = -1$	$(-3) + (-4) =$ $-3 - 4 = -7$
$5 + (-2) =$ $5 - 2 = 3$	$4 - (-3) =$ $4 + 3 = 7$
$3 + (-5) =$ $3 - 5 = -2$	$-2 + (-3) =$ $-2 - 3 = -5$
$-1 + (-3) =$ $-1 - 3 = -4$	$-1 - (-5) =$ $-1 + 5 = 4$

**Figura 47: Respostas da questão da Tarefa 18 (A31)**

Fonte: aluno A31

Mediante os resultados apresentados pelos alunos após a aplicação do Jogo em sala de aula, em resposta às nossas indagações, podemos afirmar que a utilização desta metodologia contribuiu para o aprendizado sobre Números Inteiros, uma vez que os próprios sujeitos da pesquisa mediarão o conhecimento entre seus semelhantes, favorecendo a abordagem do erro e a correção simultânea, havendo mudança de postura dos alunos pela busca do conhecimento em questão.

A Tarefa 19 será analisada em outra categoria adiante, seguida da Tarefa 20, que se constituiu em um momento de reflexão coletiva, no qual buscamos apresentar os principais erros cometidos aos alunos afim de evitar a propagação dos mesmos. Esse momento é de construção do conhecimento, onde os alunos colaboram com suas experiências adquiridas na elaboração das Tarefas.

Sobre as operações de Multiplicação e Divisão, entendemos que estas devam ser estudadas simultaneamente, já que são operações opostas e que desfrutam de propriedades que se completam. Essas operações foram contempladas nas Tarefas 21, 22, 23 e 24. Primeiramente buscamos desenvolver a operação de multiplicação por meio da soma de parcelas. Depois, gradativamente inserimos a operação de divisão.



Nesse primeiro momento, não procuramos explicitar a regra de sinais para a multiplicação, pois buscamos a generalização deste conceito a partir das Tarefas propostas. Para a análise deste segundo momento, selecionamos 29 alunos, os quais participaram de todas as Tarefas que envolvem as operações de Multiplicação e Divisão.

Na Tarefa 21, procuramos desenvolver a multiplicação pelo conceito formal de soma de parcelas, onde o multiplicador (número à frente do sinal de multiplicação) representa o número de vezes que o multiplicando (número atrás do sinal de multiplicação) deve ser repetido, isto é, a quantidade de parcelas que devem ser somadas. Este é um conceito simples, mas fundamental para a compreensão da multiplicação de Números inteiros.

Na questão 1, dos 28 alunos participantes, verificamos que 17 alunos compreenderam esse conceito fundamental, representando corretamente o registro da multiplicação das somas requeridas, a exemplo das respostas apresentadas pelo aluno A5, conforme figura a seguir:

$3 + 3 + 3 + 3 =$ $4 \times 3 = 12.$	$7 + 7 =$ $2 \times 7 = 14.$	$4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$ $5 \times 4 = 20.$	$9 + 9 + 9 =$ $3 \times 9 = 27.$
---	---------------------------------	---	-------------------------------------

**Figura 48: Respostas da questão 1 da Tarefa 21 (A5)**  
Fonte: aluno A5

Podemos notar que este aluno representou corretamente, no primeiro caso, a existência da soma de quatro parcelas do número três, assim como nos demais casos. Todavia, houveram 11 alunos que não compreendam este conceito fundamental, que é tratado no Ensino Fundamental 1 e foi retomado pelo professor pesquisador em sala de aula.

Esses alunos representaram a multiplicação equivalente, porém equivocaram-se na representação conceitual esperada. A figura mostra as respostas do aluno A11 que, embora estejam todas corretas, não representa corretamente o conceito esperado.

$3 + 3 + 3 + 3 =$ $3 \times 4 = 12$	$7 + 7 =$ $7 \times 2 =$ $14$	$4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$ $4 \times 5 =$ $20$	$9 + 9 + 9 =$ $9 \times 3 =$ $27.$
--	-------------------------------------	---	--

**Figura 49: Respostas da questão 1 da Tarefa 21 (A11)**  
Fonte: aluno A11

Por se tratar de um conceito importante, que é base para justificar a multiplicação de Números Inteiros, o professor realizou uma intervenção coletiva após esta questão, afim de recapitular este conceito. Com isso, o número de alunos que compreenderam e representaram corretamente ao que foi solicitado na questão 2 passou a ser 22, sendo que outros 6 alunos apresentaram os mesmos equívocos da questão anterior.

A figura mostra os resultados apresentados pelo aluno A17, o qual mostrou não ter compreendido o conceito da multiplicação e após a intervenção apresentou resultados de acordo com o esperado:

2. Agora, escreva as multiplicações como somas e resolva:	
$5 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$	$2 \times 5 = 5 + 5 = 10$
$3 \times 7 = 7 + 7 + 7 = 21$	$6 \times 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$

**Figura 50: Respostas da questão 2 da Tarefa 21 (A17)**  
**Fonte: aluno A17**

A questão 3 resolvemos coletivamente no quadro afim de explicar a multiplicação com Números Inteiros. Já na questão 4, os alunos resolveram sem a intervenção do professor, na qual deveriam escrever o produto como soma de parcelas de negativas e apresentar o resultado.

O resultado obtido por meio desta questão foi satisfatório, sendo que 25 alunos resolveram a questão conforme o esperado, demonstrando que compreenderam o conceito fundamental da multiplicação e apresentaram o símbolo de negativo em suas respostas. Os outros 3 alunos apresentaram resultados corretos para a multiplicação, porém positivas, sendo que 2 alunos resolveram a multiplicação por meio da soma de parcelas e 1 realizou a multiplicação mentalmente, errando o sinal das respostas.

Podemos notar que nesta etapa de nossa Proposta Metodológica, os alunos já apresentam muita segurança para resolver situações com Números Inteiros, em especial, com números negativos, registrando corretamente o símbolo que caracteriza esta classe numérica.

Podemos observar esta situação por meio da figura abaixo, a qual mostra as respostas apresentadas pelo aluno A33:

<p>4. Do mesmo modo, é possível realizar a multiplicação em que uma das parcelas sejam negativas. Por exemplo: <math>3 \times (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15</math>. Resolva as multiplicações abaixo de acordo com o exemplo:</p>	
$6 \times (-3) =$ $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -18$	$5 \times (-4) =$ $(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) =$ $-20$
$2 \times (-10) =$ $(-10) + (-10) = -20$	$2 \times (-5) =$ $(-5) + (-5) = -10$
$3 \times (-4) =$ $(-4) + (-4) + (-4) = -12$	$7 \times (-3) =$ $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) =$ $-21$
$8 \times (-6) =$ $(-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) =$ $-48$	$4 \times (-6) =$ $(-6) + (-6) + (-6) + (-6) = -24$

Figura 51: Respostas da questão 4 da Tarefa 21 (A33)

Fonte: aluno A33

A Tarefa 22 foi realizada integralmente sem a intervenção do professor, pois os alunos deveriam realizar a leitura, a interpretação e colocar em prática as questões por meio dos exemplos que foram fornecidos. Nesta Tarefa, a questão 1 explica a comutatividade da multiplicação, a qual 25 alunos acertaram integralmente a mesma, e outros 3 alunos não atribuíram o sinal de menos para representar o resultado negativo.

A questão 2 traz uma sequência numérica que tem por objetivo induzir o aluno a refletir sobre a regra de sinais que deverá ser generalizada na questão 3. Ambas servirão de base para que o aluno resolva corretamente a questão 4, que exige a regra de sinais para a multiplicação.

Dos 28 alunos, apenas 17 alunos generalizaram corretamente a regra de sinais e obtiveram êxito na resolução total da questão 4. Os outros 11 alunos que não generalizaram corretamente a regra de sinais, equivocaram-se no sinal das respostas apresentadas, embora os valores numéricos das multiplicações estejam corretos.

Houve alunos que apresentaram todas as respostas positivas, assim como houve alunos que apresentaram todas as respostas negativas, demonstrando a não

compreensão da regra de sinais. A figura abaixo mostra as repostas do aluno A30, que generalizou corretamente a regra de sinais bem como todas as repostas da questão 4, assim como os outros 16 alunos.

<p>3. Você observou alguma propriedade relacionada aos sinais envolvidos na multiplicação? Descreva e tente generalizar, ou seja, criar uma regra para a multiplicação e os sinais das repostas:</p> <p>+ com + → +  + com - → -  - com + → -  - com - → +</p>			
<p>4. De acordo com o observado, resolva as multiplicações abaixo:</p>			
$(-3) \times 9 =$ -27	$(-8) \times 5 =$ -40	$6 \times (-7) =$ -42	$4 \times (-8) =$ -32.
$(-2) \times (-5) =$ +10	$(-3) \times (-6) =$ +18	$(-7) \times (-7) =$ +49	$(-6) \times (-8) =$ +48

Figura 52: Respostas das questões 3 e 4 da Tarefa 22 (A30)

Fonte: aluno A30

A Tarefa 23 traz questões de multiplicação, a qual foi retomada afim de atingir um maior número de alunos quanto ao conhecimento, e questões de introdução à divisão, esta que foi explicada como operação inversa da multiplicação. Aqui, já observamos que 25 alunos apresentaram corretamente as multiplicações com Números Inteiros. Por outro lado, 3 alunos equivocaram-se na resolução das questões que tratavam desta operação.

A figura abaixo mostra as repostas apresentadas pelo aluno A22 na questão 1 e 2, sendo que o mesmo apresentou baixa compreensão na Tarefa anterior:

1. Complete a tabela da multiplicação: cuidado com o sinal!										
x	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
6	24	18	12	6	0	-6	-12	-18	-24	-30
2. Outra tabela da multiplicação para você completar:										
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	
-4	+24	+20	+16	+12	+8	+4	-0	-4	-8	

Figura 53: Respostas da questão 1 da Tarefa 23 (A22)

Fonte: aluno A22

A questão 6 solicita aos alunos para que estes resolvam duas operações de divisões com números negativos e justifiquem a resposta por meio da multiplicação, conforme questão exemplificada anteriormente. Sem a intervenção do professor, 17 alunos resolveram e justificaram corretamente a operação solicitada. A figura mostra as respostas apresentadas pelo aluno A27:

6. Desafio: de acordo com o Tarefa anterior, resolva as divisões com números negativos abaixo:
$-48 \div 6 = \dots -8 \dots$ , pois $\dots -8 \dots \times \dots 6 \dots = \dots -48 \dots$
$35 \div (-5) = \dots -7 \dots$ , pois $\dots -7 \dots \times \dots -5 \dots = \dots 35 \dots$

**Figura 54: Respostas da questão 6 da Tarefa 23 (A27)**  
 Fonte: aluno A27

Dos 28 alunos totais, 11 se equivocaram na atribuição do sinal nas respostas, sendo o mesmo grupo de alunos que tardou a compreender as regras de sinais para a multiplicação.

Com base nestas informações, realizamos intervenção no intuito de retomar o conteúdo para que todos os alunos pudessem se apropriar do conteúdo em questão, visto que um número elevado de alunos apresentou defasagens operatórias e conceituais sobre a multiplicação e divisão de Números Inteiros, o que foi realizado por meio da Tarefa 24.

Pudemos verificar resultados satisfatórios por meio da Tarefa 24, a qual foi resolvida integralmente correta por 18 alunos. Dos outros 10 alunos, 7 apresentaram de 1 a 5 erros esporádicos de sinais nas respostas, possivelmente por falta de atenção, já que a grande parte da Tarefa está correta.

Apenas 3 alunos, ao longo dessas Tarefas, apresentaram erros em grande quantidade que nos remete a concluir que não se apropriaram conforme o esperado na operação de divisão. Todavia, a Tarefa 25 se apresenta como uma Tarefa potencial para que estes alunos possam, de uma vez, buscar compreender o conteúdo em questão, por se tratar de um momento lúdico. A análise desta Tarefa será apresentada em outra categoria adiante.

A figura abaixo, em caráter de exemplificação dos demais alunos, mostra as respostas das questões 2 e 3, apresentadas pelo aluno A22, o qual apresentou apenas 3 erros na questão 3, entre todas desta Tarefa:

2. Agora que você compreendeu a divisão, pode resolver as divisões diretamente, sem justificar pela multiplicação:			
$100 \div (-5) =$ -20	$80 \div (-8) =$ -10	$-50 \div 10 =$ -10	$-48 \div 6 =$ -8
$(-64) \div (-4) =$ +16	$(-40) \div (-5) =$ +8	$(-120) \div (-20) =$ +60	$(-55) \div (-5) =$ +11
3. Complete os espaços para que as expressões se apresentem corretas:			
$45 \div \dots (-9) \dots = -5$	$20 \div \dots (-5) \dots = -4$	$-16 \div \dots (+4) \dots = 4$	
$\dots +30 \dots \div (-2) = -15$	$\dots +12 \dots \div (-3) = 4$	$\dots -25 \dots \div 5 = -7$	

Figura 55: Respostas das questões 2 e 3 da Tarefa 24 (A22)

Fonte: aluno A22

## 6.9 CATEGORIA 9: TAREFAS SIMPLES

Esta categoria surgiu da exposição verbal e da observação das Atividades desempenhadas nas Tarefas que os alunos julgaram simples, com base em seus preconceitos e experiências de anos anteriores, mas que, do ponto de vista do professor pesquisador, apresentaram alto potencial para o aprendizado dentro de nossa Proposta, fazendo com que os alunos se envolvessem profundamente, colocando-os em real Atividade.

Destacamos que o termo *simples* não remete necessariamente a Tarefas de fácil execução e que não exijam Atividade por parte do aluno. Há Tarefas de enunciado ou construção simples que podem requerer muita Atividade mental por parte do aluno em sua resolução. Essas Tarefas que intitulamos simples estão ao alcance de qualquer professor aplicar em suas aulas, pois requerem materiais de fácil aquisição e pouca intervenção do professor.

Além disso, as Tarefas simples que se mostram de fácil resolução ou até mesmo as de resolução mecânica também têm seus objetivos no ensino da Matemática e não devem ser desprezadas, sejam elas com a finalidade de desenvolver agilidade mental ou de cálculo, prática de certos algoritmos ou até mesmo com a finalidade de motivar o aluno para que este avance progressivamente no que diz respeito ao nível de dificuldade das Tarefas requeridas.

Entendemos que as Tarefas, quando bem planejadas e com objetivos em acordo com nossa pesquisa, mesmo que se mostrem simples, podem mobilizar o

aluno para que este se coloque em Atividade e possa gerar conhecimentos significativos.

O professor precisa estar preparado para elaborar ou escolher Tarefas que realmente favoreçam a Atividade dos alunos, e isso ocorre quando o aluno está motivado a se envolver com a Tarefa, refletir e construir seu conhecimento. Nossas Tarefas foram elaboradas com base nesta percepção, onde o aluno é o protagonista de seu aprendizado e o professor é o mediador.

Assim, vamos elencar as 3 principais Tarefas que melhor representam esta categoria, com base nos registros realizados pelos alunos e no Diário de Campo sobre as experiências vividas em sala de aula durante a aplicação das Tarefas. Nesta categoria não estamos interessados na quantidade de alunos que apresentaram soluções conforme o esperado, mas sim a qualidade das Tarefas elaboradas e das respostas apresentadas.

A primeira Tarefa que julgamos simples, mas que favorece o desenvolvimento da Atividade dos alunos é a Tarefa 12, a qual já analisamos parcialmente na categoria 7. Entendemos que esta Tarefa traz exercícios (fechados e de grau reduzido de dificuldade) com conceitos fundamentais ao desenvolvimento de todo o conteúdo dos Números Inteiros, porém são conceitos inéditos aos alunos, o que requer maior grau de Atividade por parte deste.

A questão 1 e 2 traz um conjunto de elementos que vão ao encontro de nossa Proposta. Estas duas questões traduzem grande parte do bloco sobre Introdução aos Números Inteiros, além de ilustrar as teorias que apresentamos nesta pesquisa.

A figura abaixo mostra as respostas apresentadas pelo aluno A31:

Na reta numérica a seguir, alguns números estão ausentes e sendo representados por letras:					
1. Associe corretamente cada número disposto abaixo com cada letra presente na reta numérica acima:					
9	-7	2	-9	-3	6
D	B	A	F	E	BE
2. Agora, verifique qual(is) número(s) não foram representados, entre:					
F e B	B e C	C e A	A e E	E e D	
-8	-4 e -6	-2, -1 e 1	3 e 4	7 e 8	

Figura 56: Respostas das questões 1 e 2 da Tarefa 12 (A31)

Fonte: aluno A31

Primeiramente, percebemos que por meio desta Tarefa, o aluno se envolveu em busca das soluções, se colocando em Atividade como esperávamos. A figura mostra que o aluno se equivocou por algumas vezes, mas após a reflexão, apresentou as soluções corretas. Este aluno superou seus próprios obstáculos e outros presentes nos conceitos envolvidos na Tarefa. Muitos alunos oferecem resistência ao utilizar a simbologia correta e necessária aos Números Inteiros, além de não os posicionar corretamente na reta numérica.

Estas questões traduzem nitidamente a utilização dos Registros de Representações Semióticas, sendo que o aluno deveria se utilizar do registro gráfico (reta numérica), do registro puramente simbólico (representar letras por números), do registro simbólico numérico, além dos sinais dos números envolvidos.

Estão explícitas as operações de Tratamento (quando o aluno deve verificar os números não representados na reta numérica), operação que ocorre dentro de um mesmo sistema simbólico, e a operação de Conversão (quando o aluno deve converter as marcações da reta numérica em números, converter os números em letras), operação na qual o aluno deve transitar de um sistema de registros a outros. Neste caso está garantida a Conversão Bilateral, operação de ida e volta entre dois sistemas de registros.

Esta Tarefa não tem associação com a realidade, sendo puramente de conceitos matemáticos. Todavia, já destacamos que a Matemática necessita deste tipo de Tarefas, pois nem sempre a associação com a realidade traz bons resultados no ensino e aprendizagem de um conteúdo. Moretti (2012) evidencia que o ensino dos Números Inteiros deva ocorrer de maneira formal, majoritariamente ao nosso ver, pois também há a necessidade da associação com a realidade, quando esta não interferir erroneamente no sentido de desconstrução ou de causar obstáculos no ensino e aprendizagem de certo conteúdo.

Além de todos os conceitos já citados, o aluno necessita da compreensão de antecessor e sucessor de um Número Inteiro, da continuidade numérica e ordenação, e da comparação entre Números Inteiros para apresentar soluções coerentes com a Tarefa, conceitos estes que são base para a compreensão de módulo e oposto simétrico.

Verificamos que esta é uma Tarefa do tipo exercício (de grau de desafio reduzido e grau de estrutura fechado), a qual pode ser facilmente aplicada a qualquer turma, mas que requer um agrupamento de conceitos formais e de introdução aos



Números Inteiros. A intervenção do professor pode se fazer necessária, visto a importância da compreensão destes conceitos.

Outra Tarefa que classificamos como simples, mas que garante qualidade de aprendizagem foi a Tarefa 14, a qual também já foi analisada parcialmente na categoria 8. A questão 2 desta Tarefa foi realizada sem intervenção do professor e remetia à resolução de expressões de soma simples com Números Inteiros.

Usando um simples Registro de Representação Semiótica os alunos apresentaram soluções corretas sem a explicação do professor, este que fez uma intervenção após o término desta Tarefa afim de validar os conceitos envolvidos. A figura abaixo mostra as soluções apresentadas pelo aluno A2, o qual apresenta muita dificuldade nesta disciplina e frequenta a Sala de Apoio em Matemática, no contra turno escolar, duas vezes por semana:

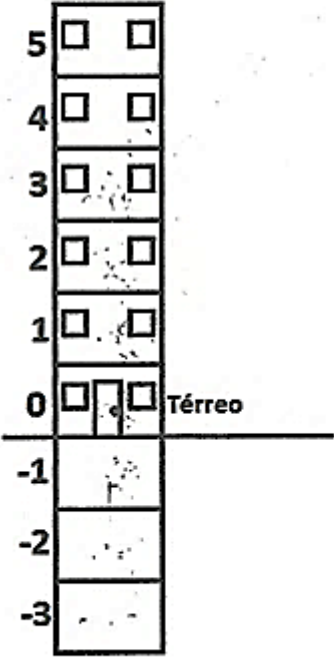
<p>2. Um pequeno prédio composto pelo térreo, 5 andares acima do térreo e 3 pavimentos no subsolo, tem um elevador que se desloca por todos os andares.</p> 	<p>Suponha que o primeiro número da expressão numérica representa o andar em que o elevador se encontra e os demais números representam deslocamentos que elevador realizou, verifique no qual andar ele irá parar:</p> $-2 + 3 - 1 + 4 = 4$ $4 - 6 + 3 - 2 = -1$ $1 + 3 - 5 - 2 = -3$ $-3 + 1 + 4 - 2 = 0$ $3 + 1 - 5 - 1 = -2$ $2 - 3 - 2 + 4 = 1$ $0 - 2 + 4 - 3 = -1$ $-3 + 3 + 4 - 5 = 1$
---	--

Figura 57: Respostas da questão 2 da Tarefa 14 (A2)  
Fonte: aluno A2

Podemos notar que este aluno entrou em Atividade ao resolver esta Tarefa, se utilizando do Registro de Representação Semiótica (o prédio, que representa uma reta numérica disposta na vertical) em busca das soluções requeridas. Além disso, esta Tarefa tem relação com a realidade, o qual nos auxilia para tratar dos conceitos formais e necessários à resolução.

Na resolução desta questão foi necessário a operação de Conversão (entre o registro gráfico do prédio para o registro gráfico da reta numérica e posteriormente para o registro simbólico numérico) e a operação de Tratamento (dentro de um mesmo sistema simbólico, das expressões aos resultados).

Esta Tarefa, que se classifica como um exercício (com grau de estrutura fechado e grau de desafio reduzido), representa os conceitos operatórios com Números inteiros pode ser adaptada para desenvolver expressões com operações complexas, àquelas que requerem o uso da regra de sinais, bastando desenvolver a ideia de oposto simétrico.

Salientamos que o professor não realizou a explicação antecipada desta Tarefa: os alunos realizaram a leitura do exemplo e por meio de suas interpretações resolveram as expressões. Após o término da mesma, o aluno A32 observou que esta ideia poderia ser traduzida para a reta numérica horizontal afim de realizar estas operações. Deste modo, a maioria dos alunos compreenderam a Tarefa e se mostraram em Atividade durante a resolução desta questão.

Assim como esta Tarefa simples que apresenta recursos metodológicos que podem garantir qualidade de aprendizagem, elencamos a Tarefa 17, a qual requer atenção e envolvimento por parte do aluno, além da Atividade cognitiva, por se tratar de um momento lúdico.

Vamos utilizar os registros produzidos por uma dupla de alunos que jogaram como adversários no Jogo Vai e Vem. Os alunos A4 e A5 jogaram três partidas no tempo disponibilizado, sendo que o aluno A4 venceu duas partidas e o aluno A5 venceu uma. Todavia, não estamos interessados em avaliar o aluno vencedor, mas sim os resultados obtidos pelas operações complexas com Números Inteiros.

A figura abaixo mostra a Tabela de Registros realizada durante o jogo e apresentada pelo aluno A4:

TABELA DE REGISTROS

JOGADA	ESTOU?	DADO 1	SINAL	DADO 2	CASAS	PAREI
1º.	0	1	-	-1	2	+2
2º.	+2	5	P	-3	+2	+4
3º.	+4	2	+	-3	-1	+3
4º.	+3	1	-	-4	5	+8
5º.	+8	2	-	-2	4	+12
6º.	+12	1	I	-2	-1	+11
7º.						
8º.	0	3	-	-3	+6	+6
9º.	+6	1	-	-1	2	+8
10º.	+8	5	+	-3	+2	+10
11º.	+10	-5	+	6	+1	+11
12º.	+11	-3	I	2	-1	+10
13º.	+10	5	-	-1	+6	+16
14º.	+16	1	-	-4	+5	Chegada
15º.	0	6	+	-4	-2	-2
16º.	-2	6	+	-3	+1	+1
17º.	+1	5	-	-6	+11	+12
18º.	+12	-1	+	3	-2	+10.
19º.						
20º.						

Figura 58: Respostas da Tarefa 17 - Jogo Vai e Vem (A4)

Fonte: aluno A4

Observa-se nos registros deste aluno que ele finalizou a primeira parte dos registros (que significa o término de uma rodada do jogo) em +11 na 6ª linha, demonstrando que o aluno adversário venceu o jogo, não possibilitando a este finalizar o jogo na chegada, após cruzar +20 ou -20. A figura abaixo mostra a Tabela de Registros apresentada pelo aluno A5, adversário do aluno anterior e que finalizou a primeira rodada na 7ª linha, sendo o vencedor:

TABELA DE REGISTROS

JOGADA	ESTOU?	DADO 1	SINAL	DADO 2	CASAS	PAREI
1º.	0	1	-	-5	6	6
2º.	6	5	-	-6	11	17
3º.	17	2	+	-5	(11) -3	14
4º.	14	-4	+	2	(11) -2	12
5º.	12	4	+	-6	-2	10
6º.	10	5	-	-3	8	18
7º.	18	3	-	-4	chegada	chegada
8º.	-					
9º.	0	5	+	-4	1	1
10º.	1	1	+	-5	-4	-3
11º.	-3	4	+	-4	0	-3
12º.	-3	5	+	-5	0	-3
13º.	-3	-4	-	3	7	-10
14º.	-10	1	-	-3	4	-14
15º.	0	-4	-	4	0	0
16º.	0	6	-	-4	10	10
17º.	10	4	-	-1	5	15
18º.	15	-4	-	1	5	20
19º.	20	2	-	-3	5	chegada
20º.						

Figura 59: Respostas da Tarefa 17 - Jogo Vai e Vem (A5)  
 Fonte: aluno A5

Este aluno finalizou a primeira parte dos registros com a palavra “chegada”, pois ele se encontrava na posição 18, retirou os dados + 3 e -4, separados pela operação de menos, que resultou no deslocamento de 7 casas (não registrado pelo aluno), passando pela chegada do jogo e assim finalizando.

Como já destacamos, estes momentos lúdicos se constituem em ricas oportunidades de aprendizagem e troca de experiências entre os alunos, no qual podemos observar que ocorreram correções simultâneas às jogadas e naturalmente entre os próprios jogadores.

Observamos que este último registro apresenta correções (registro apagado com corretor) que ocorreram no momento do jogo que, segundo a dupla, foi refletida e discutida pelos jogadores. Este tipo de dinâmica descentraliza a figura do professor como autoridade ao afirmar o erro do aluno e os coloca todos no mesmo nível, em que as correções realizadas pelos próprios colegas tendem a não ser impactantes na vida escolar destes alunos.

Esta Tarefa que se constituiu em um momento lúdico tem tipologia de problema (com grau de estrutura fechado e grau de desafio elevado), pois requer maior mobilidade cognitiva por parte do aluno. É uma Tarefa simples que pode colocar os alunos em Atividade e contribuir para a superação de obstáculos presentes no ensino e aprendizagem deste conteúdo.

Por meio da reflexão das soluções apresentadas pelos alunos nas Tarefas citadas e com base no Diário de Campo, observamos que as Tarefas que classificamos como Simples são Tarefas fechadas (as quais trazem enunciados claros e diretos), se desdobrando nos dois casos quanto aos graus de desafio reduzido e grau de desafio elevado, sendo elas do tipo exercícios e/ou problemas. Destacamos a possibilidade de uma Tarefa habitar a fronteira destas duas classificações, pois podem haver Tarefas que são de grau médio-reduzido ou médio-elevado. Esta classificação depende do nível de conhecimento e abstração dos alunos a que se aplica tais Tarefas.

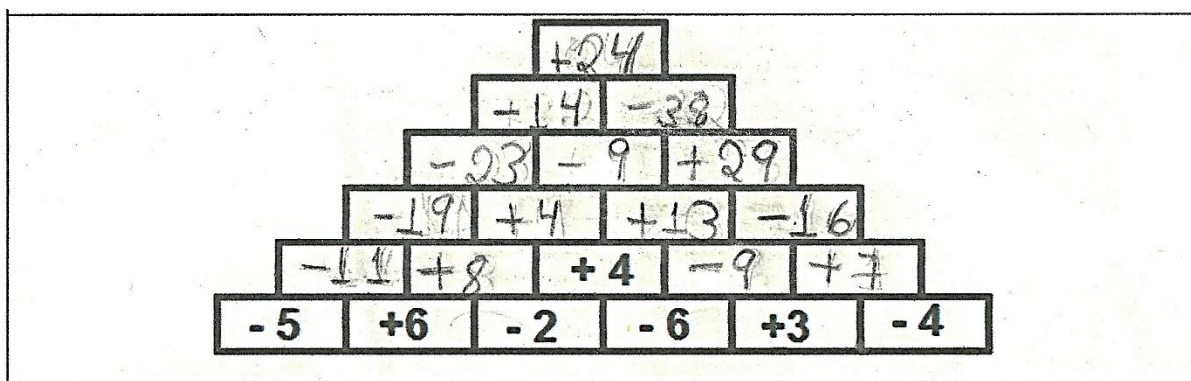
## 6.10 CATEGORIA 10: TAREFAS COMPLEXAS

Nesta categoria vamos analisar as principais Tarefas que se apresentaram complexas, as quais exigiram a mobilização de vários Registros de Representações Semióticas, além das operações de Conversão e Tratamento simultâneas, extrapolando o senso comum e requerendo maior grau de Atividade e reflexão por parte do aluno.

Destacamos que o termo *Complexo* não remete necessariamente a Tarefa difícil, mas sim Tarefas que requerem a mobilização de vários processos cognitivos simultâneos e maior experiência (conhecimento prévio).

Dentro desta analogia, iniciamos nossa análise por meio da Tarefa 19, a qual nenhum aluno acertou por completo todas as questões que ela exigia. Entendemos que esta Tarefa não é de grau elevado de dificuldade, mas requer Atividade investigativa por parte do aluno.

A questão 1 desta Tarefa apresenta uma pirâmide na qual os números de dois retângulos seguidos, munidos de uma operação, resultam no valor do retângulo imediatamente acima destes. Dos 22 alunos que elencamos para a análise desta Tarefa, 13 apresentaram respostas conforme o esperado e outros 9 apresentaram equívocos durante a resolução. A figura abaixo mostra as respostas apresentadas corretamente pelo aluno A13:



**Figura 60: Respostas da questão 1 da Tarefa 19 (A13)**  
**Fonte: aluno A13**

Percebemos que este aluno se equivocou por muitas vezes até elaborar as soluções corretamente. Neste tipo de Tarefa, além de que ele precisa compreender a lógica e a operação envolvida na pirâmide, é necessário efetuar as operações corretamente.

Entre os alunos que não apresentaram respostas conforme o esperado, houveram aqueles que se desestimularam ao resolver questões que exigiram maior desempenho, e assim abandonaram a resolução antes de completar toda a pirâmide.

Observamos que esta primeira questão foi desenvolvida com intervenção do professor, já que a maioria dos alunos afirmaram nunca ter tido contato com questões deste modelo. Assim, o professor inicialmente generalizou a lei de formação matemática que origina os próximos termos da pirâmide, por meio da discussão e reflexão da turma.

Depois muitas tentativas frustradas dos alunos, o professor revelou apenas o último resultado da pirâmide, momento em que a grande parte dos alunos se motivou a tentar novamente, conduzindo assim mais da metade deles ao êxito na resolução.

Após a aplicação desta questão, nossa reflexão nos conduz afirmar que ela se caracteriza como uma Tarefa de exploração a esses alunos, já que é tem grau de estrutura aberta (pois não estava claro no enunciado a lei de formação da pirâmide)

de grau de desafio reduzido (após compreender a lógica existente na Tarefa, bastava realizar as operações).

A questão 2, por se tratar de uma Tarefa de fixação, já que os alunos adquiriram experiência por meio da questão anterior, classificamos erroneamente como um exercício (Tarefa de estrutura fechada e de grau de desafio reduzido. Todavia, ao aplicarmos esta questão, observamos que dos 22 alunos, apenas 6 alunos apresentaram as respostas conforme o esperado, sendo que os demais 16 alunos se equivocaram nesta questão.

Salientamos que neste momento o professor não fez interferência por entender erroneamente que a Tarefa se caracteriza como um exercício. Com base no exposto, após refletirmos sobre os resultados coletados por meio da resolução desta questão, estamos certos de que esta questão, assim como a anterior, pode ser classificada como uma Tarefa de estrutura aberta e grau de desafio reduzido.

A questão 3 apresenta um quadrado mágico 4x4, no qual a soma mágica (resultado da soma de todas as linhas, todas as colunas e as duas diagonais) deveriam ser -6. Para completar o mesmo, o aluno poderia utilizar qualquer Número Inteiro, inclusive com repetência se fosse necessário.

Porém, observamos que nenhum aluno apresentou resposta conforme o esperado. Esta questão se traduz como fechada de grau elevado (problema). Abaixo apresento a solução (em negrito) esperada para este quadrado mágico:

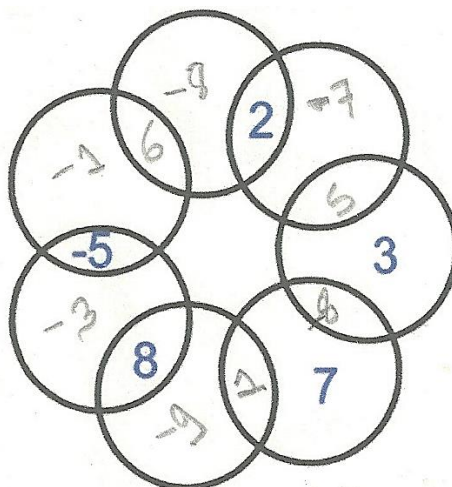
-9	5	4	<b>-6</b>
2	<b>-4</b>	<b>-3</b>	-1
<b>-2</b>	0	1	<b>-5</b>
3	<b>-7</b>	-8	6

**Figura 61: Solução da questão 3 da Tarefa 19**  
**Fonte: o autor**

A última questão desta Tarefa (questão 4) apresenta um diagrama intitulado Soma Zero, no qual o objetivo é realizar a soma dos três números contidos dentro da circunferência afim de obter resultado zero. Neste caso, foram dados nove números que o aluno deveria utilizá-los para completar o diagrama.

Dos 22 alunos, apenas um acertou completamente o diagrama proposto, outros 5 alunos acertaram a posição dos números, porém equivocaram-se nos sinais

e os demais (16 alunos) apresentaram soluções incoerentes ou não realizaram a questão proposta. A figura mostra a solução correta apresentada pelo aluno A22:



**Figura 62: Respostas da questão 4 da Tarefa 19 (A22)**  
**Fonte: aluno A22**

Durante a elaboração desta Tarefa (conjunto das 4 questões), a classificamos erroneamente como um exercício (grau de estrutura fechado e grau de desafio reduzido), porém ao aplicarmos e analisarmos os resultados coletados, podemos afirmar que esta é uma Tarefa de exploração (grau de estrutura aberto e grau de desafio reduzido).

Para o encerramento de nossa Proposta Metodológica, aplicamos a Tarefa 25, a qual planejamos para se constituir em um momento lúdico e para isso elaboramos o Jogo Banco dos Negativados. Trata-se de um jogo complexo com um conjunto de regras bem definidas que visa, além das vantagens que um jogo pode oferecer em sala de aula, aplicar o conhecimento sobre Números Inteiros.

A primeira aplicação do Jogo que realizamos não coletamos dados significativos, pois neste momento os alunos estavam em fase de experiência, conhecendo e acomodando as regras e dinâmica do Jogo. De imediato os alunos esboçaram dificuldades em administrar todas as exigências necessárias.

Ainda na fase do projeto desta pesquisa, imaginávamos que esta Tarefa seria mais voltada a um exercício de revisão das operações com Números Inteiros por meio de um simples jogo. Todavia, durante o planejamento e construção, observamos que esta Tarefa tomou corpo e se apresentou bastante complexa, mas não é impossível de aplicar esta Tarefa aos alunos durante as aulas.

Nesta ótica, visando elevar o grau cognitivo dos alunos propomos este jogo em caráter desafiador afim de obter ascensão do abstrato ao concreto, assim



possibilitando o trânsito entre diversos Registros de Representações Semióticas presentes no ato de jogar. Obtivemos poucos registros apresentados pelos alunos durante a aplicação do jogo, pois cada jogada exigiu a faculdade de análise de todas as ações que o jogo requereu, demandando maior tempo de Atividade de cada aluno por jogada.

Todavia, os poucos registros demonstram total Atividade e dedicação ao jogo. A figura abaixo mostra a ficha de jogadas do aluno A33:

Jogada	Dado 1	Dado Operações	Dado 2	Desloca	Fichas de Sorte ou Revés			
					S	R	Operação	Resultado
1º.	4	-	-1	+5				
2º.	6	-	-2	8		X	$-5 - (-12)$	7
3º.	2	-	-3	5				
4º.	3	X	-1	-3				
5º.	1	+	-1	0				
6º.	2	+	-1	1				
7º.	-6	+	1	-5				
8º.								

**Figura 63: Respostas na Ficha de Jogadas - Tarefa 25 (A33)**  
Fonte: aluno A33

Podemos perceber que este aluno participou de 7 jogadas e em uma delas parou sobre a casa de sorte ou revés, onde retirou uma carta de revés e cumpriu corretamente com o cálculo que a carta exigia. Além disso, este aluno escreveu no verso da ficha de jogadas os bens adquiridos durante o jogo e a movimentação financeira, como mostra a figura:

Companhia ferroviária.									
(1) - 2 -									
Paral 200 o ganhei 50.									
avenida Augusto.									
Companhia ferroviária.									

**Figura 64: Contabilidade de Jogo - Tarefa 25 (A33)**  
Fonte: aluno A33

O aluno A5 atuou como bancário nas jogadas em que o aluno A33 participou. A figura abaixo mostra a movimentação das jogadas de todos os alunos que participaram deste grupo de jogo. Afim de preservar a identidade dos alunos, utilizamos a simbologia adotada neste trabalho. Destacamos as jogadas do aluno A33:

Jogador	Dado 1	Sinal	Dado 2	Anda	Jogador	Dado 1	Sinal	Dado 2	Anda
Aluno A3	2	-	-1	+3	Aluno A21	5	+	-2	-3
Aluno A33	4	-	-1	+5	Aluno A25	3	+	-1	2
Aluno A22	1	-	-4	+5	Aluno A3	1	-	-5	6
Aluno A33	6	-	-2	+8	Aluno A25	2	+	-4	6
Aluno A22	-4	+	4	0	Aluno A3	2	-	-3	5
Aluno A33	2	-	-3	5	Aluno A25	-5	+	3	+2
Aluno A22	5	+	-3	3	Aluno A3	2	+	-1	1
Aluno A21	1	+	-4	-3	Aluno A33	-3	x	1	-3
Aluno A25	-6	+	4	-2	Aluno A22	4	-	-5	+9.
Aluno A3	3	+	-5	-2	Aluno A21	5	+	-4	1.
Aluno A33	1	+	-1	0	Aluno A25	3	-	-5	+8
Aluno A22	-6	+	3	-3	Aluno A3	-1	x	5	-5
Aluno A21	4	+	-3	1	Aluno A33	2	+	-1	1
Aluno A25	5	+	-3	+2	Aluno A22	1	-	-3	4
Aluno A3	-3	+	6	+2	Aluno A21	4	-	-2	6.
Aluno A33	-6	+	1	-5	Aluno A25	6	-	-2	+8
Aluno A22	2	x	-4	-8					

**Figura 65: Respostas na Ficha do Bancário - Tarefa 25 (A5)**  
**Fonte: aluno A5**

Podemos observar que o jogador que assumiu a função de bancário cumpriu com as regras do jogo e monitorou corretamente as jogadas dos alunos, a exemplo do aluno A33 que destacamos. Além disso, não podemos deixar de notar que estes alunos participantes da Proposta mostraram grande avanço de aprendizagem relacionado aos Números Inteiros.

Devido a estrutura e dinâmica deste jogo, associado ao modo como aplicamos o mesmo em sala de aula, o consideramos uma Tarefa de investigação, com grau de estrutura aberto e grau de desafio matemático elevado. Deixamos num primeiro momento os alunos livres para ler e discutir as regras, testar jogadas e resolver as operações que o jogo contém. Desta forma não estava claro aos alunos toda a dinâmica de jogo. Além disso, os alunos relataram se tratar de um jogo bastante difícil.

Assim, categorizamos estas duas Tarefas, ambas de grau de desafio matemático elevado como Tarefas Complexas, onde o grau de estrutura variou entre os polos aberto (Tarefa 25) e fechado (Tarefa 19).

## 7 TECENDO CONSIDERAÇÕES

Neste trabalho de pesquisa tivemos a possibilidade de estudar os referenciais teóricos específicos para o ensino da Matemática e aplicá-los em sala de aula afim de contribuir para o ensino e aprendizagem desta Ciência.

Um trabalho pautado na Diversificação de Tarefas conduz ao ensino *exploratório* que, segundo Ponte (2014), é um modelo que se opõe ao tradicional ensino por meio da *exposição de conteúdo*. No ensino exploratório, o professor propõe Tarefas aos alunos, estimulando-os a mobilizar seu conhecimento para produzirem soluções originais.

Neste caso, evidenciamos o aluno como protagonista na construção individual e coletiva de seu próprio conhecimento, afastando-se do modelo em que o aluno é visto como mero expectador, no qual repetição, memorização e reprodução são sinônimos de aprendizagem.

Em nossa Proposta Metodológica, buscamos desenvolver as faculdades de análise e potencialidades dos alunos envolvidos. Isso também foi possível devido o estudo e análise dos erros produzidos pelos alunos durante a resolução das Tarefas, o qual tem tanta importância quanto o acerto em Matemática. A superação do erro pode, em muitos casos, ser mais valoroso que um acerto não refletido.

O ensino por meio da Diversificação de Tarefas favorece a discussão dos erros e visa a superação dos mesmos, conduzindo ao conhecimento significativo, além de possibilitar que o professor assuma a postura de mediador desse conhecimento.

Além disso, as Tarefas também possibilitam o trânsito entre diversos Registros de Representações Semióticas, já que a Matemática desfruta de uma linguagem própria e universal, arraigada de simbologias, permitindo assim o acesso aos objetos matemáticos que são inacessíveis ao homem.

Através das análises das Tarefas podemos destacar que o ensino e aprendizagem desenvolvido por meio da Diversificação de Tarefas traz vantagens para o desenvolvimento da Matemática escolar que, além da variabilidade de Registros, se pode mesclar diversas metodologias consolidadas dentro de uma só, permitindo momentos mais lúdicos, hora mais tradicionais, hora mais exploratórios, enfim, cada uma com seus propósitos num dado momento.

Em hipótese alguma estamos menosprezando as demais metodologias matemáticas existentes e consolidadas nesta Ciência, pelo contrário, visamos que o professor comprometido com o ensino possa cada vez mais buscar as diferentes metodologias e por meio destas consiga propor diferentes Tarefas em suas aulas.

Devemos reforçar que a Diversificação de Tarefas a qual nos reportamos não se trata apenas de uma variação estrutural ou adaptação para melhorar a apresentação visual da Tarefa, mas sim buscamos uma variabilidade das quatro dimensões que apresentamos ao longo desta pesquisa. Enquanto professores, devemos propor Tarefas com variabilidade da tipologia (aberta ou fechada), no grau de dificuldade (elevado ou reduzido), além de considerar o tempo de aplicação e o contexto com a realidade.

Mesmo quando propomos Tarefas Simples (exercícios e problemas), temos a oportunidade de propor variações de acordo com as dimensões citadas, afim de favorecer o trânsito entre os Registros de Representações Semióticas. Os resultados analisados e aqui expostos mostram que é possível elencar exercícios que atinjam todas as variações que buscamos. A partir disso, é possível progredir para os problemas, para as explorações e para as investigações.

Nosso objetivo gerou indagações que pudemos investigar de modo aprofundado durante a realização de nossa pesquisa. Parte dessas indagações nos persegue desde o início de carreira como professor de Matemática, ao observar dificuldades e erros apresentados por alunos que cursam o Ensino Médio e teoricamente já deveriam ter superado tais obstáculos.

Sobre a principal questão que norteia este trabalho, a qual questiona “*as contribuições da Diversificação de Tarefas que podem favorecer o acesso aos objetos matemáticos relacionados aos Números Inteiros*”, podemos afirmar que é por meio desta variabilidade que o professor tem a oportunidade de propor através das Tarefas, a maior quantidade de Representações de Registros Semióticos afim de garantir o trânsito bilateral nas operações de Conversão de Registros e o Tratamento.

Os resultados de nossa pesquisa mostram que é por meio da organização de Tarefas que o professor pode proporcionar a libertação das aulas rotineiras e com isso possibilitar o acesso aos objetos matemáticos por diferentes vias. Entenda o tradicionalismo que mencionamos como exercícios mecânicos de memorização que não são refletidos por parte do professor e são utilizados por ele repetidamente sem variações em suas tipologias.

Quando pensamos na *“importância do trânsito entre os diversos Registros de Representações Semióticas para a aprendizagem em Matemática”*, observamos por meio da análise de nossa Proposta que quanto mais o aluno transitar por essas diferentes vias de representação, será requerida maior Atividade mental, validando a aprendizagem significativa. Os alunos que se motivaram e se mobilizaram mais durante as Tarefas, arriscaram-se em transitar diferentes sistemas de representação, ao ponto de haver àqueles que criaram suas próprias simbologias para tratar de objetos matemáticos. Estes alunos se sobressaíram em diversas Tarefas provando a importância de transitar entre os Registros de Representações Semióticas.

Quanto a indagação se *“esta Proposta Metodológica poderá superar os obstáculos epistemológicos e didáticos citados na História dos Números Inteiros”*, em resposta afirmativa, observamos nas análises que os obstáculos arraigados no cotidiano escolar que surgem a partir deste conteúdo não se multiplicaram com esta turma. Até o término desta pesquisa, observamos que nenhum aluno está utilizando o modelo comercial para realizar operações com Números Inteiros, tão pouco fazem referência ao uso da regra de sinais, causador de muitos dos obstáculos presentes nas aulas de Matemática. Destacamos que um dos obstáculos didáticos mais comuns sobre a regra de sinais ocorre na multiplicação entre dois números negativos que, quando associados ao contexto de dívidas, resulta em um lucro (número positivo). Essa associação com o concreto pode prejudicar a longo prazo o aprendizado destes conceitos tão importantes para o desenvolvimento deste conteúdo.

Outro obstáculo deriva deste primeiro, pois quando o aluno já memorizou (sem a devida compreensão formal) a regra de sinais, e retorna das operações de multiplicação para as operações de soma, geralmente tende a atribuir sinal positivo à resposta da subtração de um inteiro de um número negativo (por exemplo:  $-2 - 5 = -7$ , onde o aluno propaga um antigo obstáculo e realiza a regra de sinais, atribuindo resposta  $+7$  erroneamente). A possibilidade de eliminação destes e outros obstáculos que possam surgir ocorre quanto tratamos formalmente dos Números Inteiros por meio da reta numérica dos Inteiros, juntamente com os conceitos e operações sobre ela. Superada a fase de propagação dos obstáculos, se pode apresentar outros modelos (como o comercial, por exemplo) aos alunos, assim como fizemos a critério de conhecimento. Todavia, felizmente os alunos repudiaram este modelo em detrimento do uso da reta numérica, alegando terem aprendido melhor o *“primeiro jeito”* de operar.

Em resposta de *“quais mudanças esta proposta causará na postura dos alunos quanto ao modo pela busca de conhecimentos”*, observamos que anteriormente à aplicação desta Proposta, os alunos eram regrados a executar Tarefas em troca de nota, logo após o professor fornecer o conteúdo acompanhado de um conjunto de exemplos que os gabaritariam a resolver uma lista de exercícios. Logo no início do ano letivo, observávamos muitos alunos propagando a cópia de Tarefas realizadas por outros colegas afim de garantir a nota ou apenas status perante a turma. Esta dinâmica nos causou estranhamento e uma ambição insaciável de transformar esta cruel realidade que ao nosso ver se alongava de anos anteriores. Propomos transformações por meio da nossa Proposta Metodológica, valorizando a importância da construção do próprio conhecimento.

A observação e análise contínua dos resultados de nossa pesquisa mostram que esta transformação ocorreu gradativamente em grande parte dos sujeitos de pesquisa após muito diálogo e reflexões com a turma. Uma minoria de alunos continuou resistente a dinâmica anterior e desse modo não tiveram sucesso de aprendizagem neste modelo que propomos. Notamos que, após a aplicação da Proposta, esta maioria de alunos está buscando a compreensão dos conceitos por meio da construção de seus conhecimentos, valorizando o verdadeiro papel da escola, que tem como principal função a de difundir o conhecimento científico. Para esta transformação foi necessário a resignificação do erro na disciplina de Matemática e sua importância. Antes, o erro em Matemática era visto como sinônimo de incapacidade mental. Desta forma, os alunos se utilizavam de todos os artifícios repudiáveis pelo professor afim de evitar o erro e apresentar somente respostas coerentes e esperadas por todos.

Após a aplicação desta Proposta que tinha também a intensão de responder a pergunta *“como os alunos passarão a compreender a importância do erro em Matemática?”*, procuramos no desenvolver de nossa pesquisa mostrar que o erro não é algo repudiável como todos os alunos pensavam, além de salientar que o erro faz parte da construção do conhecimento. Nos primeiros momentos de aplicação da Proposta, quando ainda retratávamos a História da Matemática e os principais atores, procuramos mostrar que todos erraram que foi principalmente na busca da superação do erro que surgiram as grandes obras, heranças matemáticas que nasceram de erros matemáticos. Gradativamente, os sujeitos constituintes desta turma compreenderam que a reflexão realizada a partir de um erro pode gerar grande aprendizado. Desta

forma, ao término da aplicação da Proposta, pudemos notar por meio da análise dos dados coletados que os alunos já se arriscam mais a elaborar soluções autênticas e, mesmo que equivocadas, buscam se expressar e refletir o erro produzido quando existente. Eles começaram a perceber que o erro que produziram a partir de uma dúvida era comum a vários colegas e a reflexão realizada a partir dele supera obstáculos experimentados por todos.

Além desses fatores que observamos a partir das questões que buscávamos responder, os resultados apontam para a existência de um preconceito mal elaborado e distorcido daquilo que entendemos por momento lúdico em Matemática. Já salientamos a importância dos Jogos em Matemática, mas esta mesma visão não estava clara aos alunos. Quando nos reportamos à existência de Tarefas Lúdicas dentro de nossa Proposta, a maioria dos alunos interpretaram como um momento descompromissado, sem relação com a disciplina e possivelmente um momento que os livraria de algumas horas/aula, ao que chamaram de “*matar aula*”. Esta ideia vem possivelmente de professores que assim o fizeram deste momento em sala de aula. Neste sentido, houve a necessidade de intervir e desconstruir esta ideia distorcida da real função dos Jogos em Matemática. Com nossa intervenção, pudemos observar que dos 5 grupos que foram formados para a prática do principal jogo desta Proposta, apenas um não compreendeu a verdadeira essência dos Jogos Matemáticos e fez deste momento a mesma ideia distorcida. Todavia, isto não afetou o brilho que este momento causou ao encerramento de nossa Proposta.

Somos sensatos em entender que é impossível ao professor trabalhar o período letivo inteiro somente com metodologias diferenciadas e projetos no contexto e organização curricular atual. Esta organização tem favorecido a propagação de um ensino mais tradicional, pautado na exposição verbal, com foco nos exercícios mecânicos, na repetição e na memorização. Mas afinal, que conclusões podemos refletir após todo o desenvolvimento desta pesquisa?

Podemos dizer que o professor é o principal responsável da organização do ensino afim de garantir que os conhecimentos da Matemática historicamente elaborados possam ser apropriados pelos indivíduos. Pensar o ensino por meio de Tarefas possibilita identificar as principais ações dos sujeitos envolvidos no processo, em especial o professor e o aluno. Deste modo, o papel do professor neste processo consiste na organização do ensino por meio das Tarefas e o aluno deve buscar sua Atividade, onde ele é o principal responsável por sua aprendizagem.

Organizar o ensino exige a elaboração criteriosa e ordenada das Tarefas diferenciadas, as quais se tornarão situações desencadeadoras de aprendizagem que podem ser materializadas por meio de diferentes recursos metodológicos e o trânsito entre os vários Registros de Representações Semióticas. As Tarefas no ensino da Matemática possibilitam ao aluno entrar em Atividade visando a apropriação do conhecimento.

Os resultados coletados e analisados apontam para uma real necessidade da diversificação de Tarefas no planejamento metodológico de qualquer professor que busque a apropriação do conhecimento de seus alunos, sendo esta uma Metodologia condizente com o contexto e escolar e com grandes potencialidades no que diz respeito ao ensino e aprendizagem.

De modo geral, nos enaltece afirmar que, além dos objetivos traçados para a elaboração deste trabalho de pesquisa, os quais acreditamos que foram alcançados satisfatoriamente, cumprimos com um dos principais objetivos deste Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que visa qualificar o professor de Nível Básico afim de melhorar o ensino e aprendizagem desta disciplina.

Acreditamos que as metodologias abordadas neste trabalho para tratar dos conceitos e das operações no Conjunto dos Números Inteiros se consolidaram em significativas contribuições para o Ensino da Matemática e podem vir a ser consideradas como possibilidades de cursos nos programas de capacitação pedagógica dos professores, além de se revelar como um tópico oportuno para prosseguir nossas pesquisas visando melhorar gradativamente a didática do professor em sala de aula.

As metodologias e sugestões aqui apresentadas, embora aplicadas em uma turma do Ensino Fundamental com vistas aos Números Inteiros, mostram-se potenciais para serem aplicadas a qualquer conteúdo matemático, bem como a qualquer série ou nível de ensino, tornando-as ferramentas úteis ao professor comprometido com a verdadeira aprendizagem de seus alunos.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACHELARD, G.: A formação do espírito científico. Tradução de Estela dos Santos Abreu. 5ª reimpressão. São Paulo: Contraponto, 2005.

BARDIN, L.. Análise de Conteúdo. Lisboa: Edições 70 LDA, 1977.

BARRETO, M. C.; [et al.] ... Matemática, aprendizagem e ensino. Fortaleza: EdUECE, 2013.

BERLINGHOFF, W. P. A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução de Elza Gomide, Helena Castro. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BOYER, B. C. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: Ensino de quinta à oitava série. Brasília: MEC, 1998.

BRENELLI, R. M. O jogo como espaço para pensar: A construção de noções lógicas e aritméticas, 8ª ed. Campinas: Papirus, 1996.

BURTON, D. M. The History of Mathematics: an introduction. Six Edition. New York: McGraw-Hill, 2007.

CARVALHO, R. PONTE, J. P. O papel das tarefas no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais in: PONTE, J. P. (Org.) Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. 1ª ed. Lisboa: IEUL, 2014.

CATTAL, A. P. Licenciatura em Matemática: Fundamentos de Análise – 1ª ed. Bahia: FTC-EAD, 2007.

COLOMBO, J. A. A.; MORETTI, M.T. Contribuições das representações semióticas para refletir sobre a elaboração curricular: um exemplo de prática significativa no campo aditivo dos naturais. In: DICKEL, A. (Orgs.) ... [et al] Processos educativos e linguagem: teorias e práticas. Passo Fundo: UPF, 2010, p. 105 – 128.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de representações semióticas nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. In: ZETETIKÉ: Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. V. 16, n. 29, jan./jun. Campinas, 2008, p. 41 – 72.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas: Unicamp, 2004.

D'AMORE, B. Elementos de Didática da Matemática. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DICKEL, A. (Orgs.) ... [et al] Processos educativos e linguagem: teorias e práticas. Passo Fundo: UPF, 2010.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

DUVAL, R. Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, v. 5, p. 37-65. 1993.

GLAESER, G. Epistemologia dos números negativos. Boletim do GEPEM, nº17. p.29-124, 1985.

GOMES, M. G. Obstáculos na Aprendizagem Matemática: identificação e busca de superação nos cursos de formação de professores das séries iniciais. 2006. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

GRANDO, R.C. O Conhecimento Matemático e o uso de Jogos na Sala de Aula. 2000. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

GRASSESCHI, M. C. C. *et al.* PROMAT: Projeto Oficina de Matemática. VOL. 2. Coleção PROMAT. São Paulo: FTD, 1999.

LIMA, E. L. Curso de Análise, VOL. 1. 12ª edição. IMPA, Rio de Janeiro. 2007.

LIMA, E. L. *Análise Real*, VOL. 1. Coleção Matemática Universitária. 10ª edição. IMPA, Rio de Janeiro. 2008.

MACHADO, S. D. A. (Org.) *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, 2003.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. *Números: Uma introdução à Matemática*, 3ª edição. São Paulo: Edusp, 2001.

MONTEIRO, L. H. J. *Iniciação às Estruturas Algébricas*, 7ª edição. São Paulo: Livraria Novel, 1968.

MORETTI, M. T. A regra dos sinais para a multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em Matemática. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 691-714, abr. 2012.

PETTY, A. L. S. *Ensaio sobre o Valor Pedagógico dos Jogos de Regras: uma perspectiva construtivista*. São Paulo, SP, 1995. 133p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Psicologia, USP.

PONTE, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Coleção Tendências em Educação Matemática. 1ª ed., 2ª reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P. (Org.) *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. 1ª ed. Lisboa: IEUL, 2014.

PONTE, J. P. *Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática* in: PONTE, J. P. (Org.) *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. 1ª ed. Lisboa: IEUL, 2014.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C.. *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico*. 2ª ed. Novo Hamburgo: Freevale, 2013.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de; Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I.; MILANI, E. Jogos de Matemática do 6º ao 9º ano. Cadernos do Mathema. Porto Alegre: Artmed 2007.

THIOLLENT, M. Metodologia da Pesquisa-Ação. 2ª ed. São Paulo: Cortez: Autores associados, 1986.

ZETETIKÉ: Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. V. 16, n. 29, jan./jun. Campinas, 2008.