UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Waldek Rocha Nobre

Números complexos e algumas aplicações

Niterói - RJ

2013

WALDEK ROCHA NOBRE

Números complexos e algumas aplicações

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Orientadora: Professora Cecília de Souza Fernandez

Niterói/RJ
2013

WALDEK ROCHA NOBRE

Números complexos e algumas aplicações

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Aprovada em 10 de abril de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Professora Doutora Cecília de Souza Fernandez - Orientadora

UFF

Professor Doutor Dinamérico Pereira Pombo Jr.

UFF

Professor Doutor Sérgio Luiz Silva

UERJ

Dedico esse trabalho às minhas criações, Amanda, Adriana e Murilinho. Que herdem de mim a vontade de fazer o melhor.

Meus sinceros agradecimentos...

Aos meus pais, Walkyrio e Iraci, que mais do que me proporcionar uma boa infância, formaram os fundamentos do meu caráter. Obrigado por serem a minha referência de tantas maneiras e estarem sempre presentes (mesmo meu pai que nos deixou há tanto tempo) na minha vida de uma forma indispensável.

À minha mulher, Luana, que conhece meus segredos mais profundos e que representa minha paz e minha certeza de não estar só.

Aos meus filhos, Amanda, Adriana e Murilo, motivos de tudo!

Aos meus irmãos, Kyrinho, Débora e Wagner, responsáveis pela melhor infância e adolescência que um ser humano pode ter além da cumplicidade com os erros que cometi durante toda minha vida.

Aos amigos Geraldo Bull, Maia e Flávio Marinho pela força na época da graduação. Lembram?

Aos Mestres e amigos Romir Reis e Ricardo Falbo pelas perfeitas aulas de Física.

Ao amigo-irmão-filho Washington Júnior, sem ele eu não teria conseguido!

À minha professora e orientadora Cecília Fernandez, não conheci alguém tão capaz!

RESUMO

Apesar da existência dos números complexos, eles continuam estranhos para nós, pois têm menos relação com o nosso cotidiano se comparados com outros números que já conhecemos. De fato, um número complexo não serve para medir a quantidade de água num copo nem para contar as hemácias do sangue. Contudo os números complexos são a base da Análise Complexa, subárea da Matemática que tem aplicações na própria Matemática, assim como na Física e nas Engenharias. A grande maioria dessas aplicações exigem pré-requisitos que não poderiam ser apresentados nesse trabalho, lembrando o público alvo ao qual ele se destina.Como, então, aplicar os números complexos de modo que alunos e professores do Ensino Médio possam compreender?

O objetivo dessa dissertação é definir de modo rigoroso os números complexos, apresentando algumas de suas propriedades, e aplicá-los na Trigonometria e na Eletricidade. Também vamos apresentar de modo breve os quatérnios, que formam uma classe particular dos chamados números hipercomplexos

Palavras chaves: Números complexos, Ensino, Trigonometria, Circuitos Elétricos, Quatérnios.

ABSTRACT

Although the existence of complex numbers, they continue being strange for us, because they have less relation with our everyday life than other numbers we know. In fact, a complex numbers is not used to measure the quantity of water in a cup, nor to count red cells in the blood. However, complex numbers underlie Complex Analysis, which is a branch of Mathematics that has many applications in Mathematics itself, as well as in Physics and in Engineering. The majority of these applications requires some amount of prerequisites, which could not be presented in this work, remembering for whom it was writing for . So, how can we apply complex numbers in order to make students and teachers from basic education understand them?

The aim of this work is to define complex numbers in a rigorous way, presenting some of their properties, and to apply them in Trigonometry and in Electricity. We will also present briefly the quaternions, a particular class of the hipercomplex numbers.

Key words: Complex numbers, Teaching, Trigonometry, Eletric circuit, Quaternions

SUMÁRIO

Introdução..9

2. Um pouco de história...10

3. Números complexos...15

3.1 O corpo dos números complexos...15

3.2 Conjugado e valor absoluto...17

3.3 A forma polar...20

3.4 Extração de raízes...23

3.5 A exponencial...25

3.6 Logaritmos...27

4. O ensino dos números complexos nas escolas..28

4.1. Alunos que ingressaram no Ensino Superior, mas não ingressaram em cursos de Exatas...29

4.2. Alunos que ingressaram em cursos de graduação de Matemática ou Engenharia...34

4.3. Professores...39

5. Algumas aplicações dos números complexos 42

5.1 Números complexos e Trigonometria...43

5.2 Números complexos e Circuitos Elétricos.....................................46

5.3 Sobre os quatérnios...48

6. Considerações finais..52

7. Bibliografia..53

1. INTRODUÇÃO

Diariamente, milhões de pessoas utilizam uma matemática peculiar para realizarem com desenvoltura seus propósitos, quer seja profissionalmente, usando, por exemplo, a geometria para calcular a quantidade de tijolos, ladrilhos e massa para uma obra, ou mesmo na simples situação de dar ou receber um troco.

No caso dos estudantes do Ensino Básico, há um choque de ideias e de comportamentos, pois a escola faz com que os alunos se distanciem do seu mundo por algum tempo, como se eles tivessem dupla personalidade, ou seja, têm que aprender uma parte da Matemática que, de certa forma, não lhes servirá, ao menos momentaneamente, para deixar de lado aquela parte da Matemática que eles "usam e abusam" em seu cotidiano.

Sabe-se que a Matemática desempenha papel decisivo ao permitir, na formação do cidadão, o desenvolvimento de habilidades diversamente importantes no raciocínio lógico dedutivo, interferindo fortemente na capacitação intelectual e estrutural do pensamento, mas infelizmente constata-se que "O ensino da matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão"(PCN's, p. 15).

Surge, então, a seguinte pergunta: por que estou estudando isso?

Talvez essa pergunta seja muito ouvida pelos professores de Matemática quando lecionam alguns tópicos do conteúdo da educação básica. Um dos tópicos que, em geral, os alunos não entendem o porquê de estudá-lo é "números complexos", pois é usualmente apresentado no último ano do Ensino Médio , na maioria das vezes, de uma forma mecanizada.

O objetivo desta dissertação é definir, de modo rigoroso, os números complexos e apresentar algumas de suas propriedades. Também apresentamos algumas aplicações do tema a um nível em que os alunos do Ensino Médio possam compreender. Desta forma acreditamos que o presente trabalho pode contribuir com o professor de Matemática, pois ele pode encontrar aqui uma apresentação completa de números complexos além de algumas aplicações que, em geral, não são apresentadas em sala de aula e não são encontradas nos livros didáticos do Ensino Médio disponíveis no mercado brasileiro.

No Capítulo 2 apresentamos um pouco da história dos números complexos. Enunciamos o Teorema Fundamental da Álgebra, que está intimamente relacionado aos números complexos mas não o demonstramos aqui, pois a maioria das demonstrações do referido teorema envolve conceitos de Topologia Geral e, portanto, foge do objetivo do presente trabalho.

No Capítulo 3 definimos os números complexos e apresentamos suas propriedades aritméticas básicas. Além disso, definimos o algarismo imaginário i e explicamos como a definição formal de número complexo se relaciona com a representação desses números da forma $x + yi$ (x e y reais), que é a forma como normalmente trabalhamos com eles. Definimos o conceito de argumento e apresentamos sua forma polar. Consideramos o problema de extração de raízes de números complexos, mostrando que todo número complexo não nulo possui exatamente n raízes n-ézimas distintas, para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Introduzimos os conceitos de exponencial e logaritmo para números complexos e apresentamos algumas propriedades.

No Capítulo 4 apresentamos uma possível realidade do ensino dos números complexos nas escolas. Fizemos um levantamento, através de questionários, sobre a aprendizagem dos números complexos em algumas escolas de Niterói, RJ. Esses questionários foram aplicados também em algumas turmas de graduação da UFF. Os resultados desses questionários são apresentados e discutidos.

No Capítulo 5 aplicamos os números complexos na Trigonometria e também na Eletricidade. De fato, não só os alunos de graduação em Matemática estudam os números complexos, mas também os alunos de graduação de Física e Engenharias. Cabe observar que a teoria das funções complexas é de extrema importância em várias subáreas da Física e da Engenharia, como eletrostática, mecânica de fluidos, acústica e aerodinâmica. Portanto, existem muitas aplicações, fora da Matemática, de números complexos, porém de difícil compreensão para os alunos do Ensino Médio. No final do capítulo apresentamos, de modo breve, os quatérnios, que são uma generalização dos números complexos e que têm aplicação na Computação Gráfica.

No Capítulo 6 fazemos algumas considerações finais.

Terminamos observando que as notações usadas neste trabalho são usuais e não devem gerar dificuldades para o leitor. Mencionamos apenas que $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais (incluindo o zero), que $\mathbb{N}^*$ denota o conjunto $\mathbb{N}$ excluindo o zero, que $\mathbb{Z}$ denota o conjunto dos números inteiros e que $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais. Também observamos que os resultados apresentados nas Proposições não serão demonstrados aqui, pois são simples e suas demonstrações podem ficar como exercício.

2. UM POUCO DE HISTÓRIA

A maioria dos livros de Matemática do Ensino Médio fazem a incorreção histórica de afirmar que o corpo dos números complexos foi criado para solucionar o problema das equações quadráticas de coeficiente reais, mas sem raízes reais.

Neste Capítulo, vamos apresentar um pouco da história do surgimento dos números complexos, pois acreditamos que os professores do Ensino Básico precisam ter conhecimento da história da Matemática para poderem motivar seus alunos. De fato, segundo a M. A. A. (Mathematical Association of America), o conhecimento da história da Matemática mostra aos alunos que ela é uma importante conquista humana, geralmente desenvolvida de forma intuitiva e experimental a partir da necessidade de se resolver problemas nas mais diversas áreas do saber. Como veremos a seguir, a história dos números complexos ilustra esse fato. Veremos que estes números demoraram muito a serem bem compreendidos e aceitos pela comunidade matemática da época.

A resolução de equações sempre foi um desafio para os matemáticos. Durante vários séculos, este foi um dos objetos de estudo de vários deles. À medida que os resultados iam surgindo, novos horizontes iam sendo buscados. Por volta de 1600 a.C., surgiram os primeiros problemas envolvendo equações lineares, porém sua solução geral só pode ser obtida por volta de 300 a.C. graças à obra *Os elementos*, de Euclides (330 a.C.- 260 a.C.). Em seguida, surgiram novos desafios, associados principalmente à Geometria, e com isso, surgiram as equações quadráticas, para o cálculo de áreas, por exemplo. A existência de números negativos nas soluções dessas equações era geralmente descartada pelos matemáticos egípcios e babilônios, sendo formalizada posteriormente por Brahmagupta (589 - 668), matemático indiano, por volta do século V. Enquanto os hindus resolviam equações quadráticas pelo método de completar quadrados, Bháskara (1114 - 1185) finalmente encontrou uma solução geral, resolutiva para esse tipo de equação, por volta do século XII.

No início do século XIV, equações do segundo grau já eram resolvidas sem grandes dificuldades e constantemente associadas a problemas geométricos. Com isso, ao encontrar discriminantes negativos, simplesmente diziam que tais problemas não tinham solução. Por exemplo, um dos problemas surgidos nessa época foi determinar as medidas de um retângulo de forma que seu perímetro tenha medida 20 unidades de comprimento e sua área, 40 unidades de área. Definindo como x e y as dimensões do retângulo, algebricamente o problema se traduz no sistema $x + y = 10$ e $x.y = 40$, que nos leva a equação $x^2 - 10x + 40 = 0$. Nesse período, os matemáticos já tinham o conhecimento dos métodos para resolução de equações do segundo grau, como a descrita acima. Dentre estes métodos, a fórmula de Bháskara, que é um dos métodos atuais mais conhecidos entre os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Aplicando o método, chegamos às soluções $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$ e $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$. Observe que os resultados obtidos satisfazem a equação algébrica acima, já que a soma das raízes é igual a 10, enquanto seu produto, 40. Porém, o problema teve origem na Geometria, e isso significa que as duas soluções procuradas são números que trazem raízes quadradas de números negativos. Dessa forma então, afirmavam que tal problema geométrico não tinha solução.

Porém, os problemas geométricos não se resumiam em resoluções de equações quadráticas. Problemas relacionados ao cálculo do volume de sólidos nos remetem a resolução de equações cúbicas. E por isso, nesse período, se intensificou a busca por soluções de equações de terceiro grau. Alguns matemáticos já haviam descoberto soluções para tais equações em situações particulares, mas foi Niccolò Tartaglia (1500 - 1557) que conseguiu desenvolver um método para equações da forma $x^3 + px^2 = q$, a princípio, sem demonstrá-lo. Aliás, esse método proporcionou a Tartaglia a vencer um desafio com outro matemático, chamado Antônio Maria Fior. O desafio consistia em propor problemas matemáticos para que o outro resolvesse. Fior propôs cerca de 30 problemas, onde a maioria exigia conhecimentos para solucionar equações cúbicas, conhecimentos esses já desenvolvidos por Tartaglia. Esse desafio ficou conhecido entre os matemáticos da época, entre eles, Girolamo Cardano (1501 - 1576), que na época escrevia um livro chamado *Ars Magna*, que trazia conhecimentos para cálculos com raízes cúbicas e racionalizações de tais radicais. Cardano viu em Tartaglia a possibilidade de enriquecer sua obra com o método adquirido sobre equações cúbicas. Vale ressaltar que as soluções trazidas no livro tinham muita influência de matemáticos anteriores, ou seja, o que já havia sido demonstrado foi aproveitado por Cardano em sua obra. Depois de muita insistência, Cardano quebrou a promessa que havia feito a Tartaglia (caso Tartaglia o ensinasse tal método, colocaria em seu livro os créditos do conhecimento ao primeiro), e conseguiu publicar o *Ars Magna* que, na época, foi uma referência importante para os demais matemáticos.

Logicamente, para publicar todos os resultados obtidos, Cardano teve que demonstrá-los, assim como fez com equações completas da forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, reduzindo-as para formas mais adequadas, com objetivo de usar o método de Tartaglia. Ele também conseguiu reduzir essas equações completas para a forma $x^3 + px = q$, onde o termo quadrático não aparecesse. Substituindo x por $(y - a/3)$ na equação completa acima, obtemos:

$$(y - a/3)^3 + a.(y - a/3)^2 + b.(y - a/3) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + (a^2/3 - 2a^2/3 + b).y + (-a^3/27 + a^3/9 - ab/3 + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + (b - a^2/3)y + (2a^3/27 - ab/3 + c) = 0.$$

Chamando $p = (b - a^3/3)$ e $q = -(2a^3/27 - ab/3 + c)$, temos $y^3 + py = q$. Com conhecimentos de produto notáveis e substituições adequadas, a equação tem como solução $y = [q/2 + (q^2/4 + p^3/27)^{1/2}]^{1/3} - [-(q/2) + (q^2/4 + p^3/27)^{1/2}]^{1/3}$.

Em cada capítulo de seu livro, Cardano traz vários problemas, envolvendo soluções de equações de segundo e terceiro graus e, sempre que possível, fazendo associações à Geometria. Em algumas soluções, foram encontradas raízes quadradas de números negativos que, quando associadas à Geometria, eram automaticamente ignoradas. Mas ainda sim, essa descoberta trazia um enorme desconforto para Cardano, pois pensava como era possível soluções de problemas práticos envolverem raízes de números negativos. Inicialmente ele afirmava que esses números eram tão sutis quanto inúteis, mas a sua inquietação e preocupação despertou a necessidade e curiosidade em outros matemáticos de explorar melhor a ideia.

Foi um matemático contemporâneo de Cardano, chamado Rafael Bombelli (1526 - 1572), que deu continuidade ao estudo de raízes quadradas de números negativos. Bombelli foi o primeiro matemático a acreditar na existência dos números imaginários. Em seu livro, apresentou um problema de equação cúbica, reduzindo à forma para que pudesse aplicar o método de Tartaglia/Cardano, encontrando três soluções distintas, sendo uma delas real e as outras, com raízes quadradas de números negativos. Daí pensou: como poderia para um mesmo problema, trazer soluções reais e números “estranhos”?

O problema consistia em resolver a equação $x^3 - 15x = 4$. Usando o método de Tartaglia/Cardano para essa forma, encontramos $x = (2 - \sqrt{-121})^{1/3} + (2 + \sqrt{-121})^{1/3}$ como solução. Porém Bombelli sabia previamente que a equação acima era a forma reduzida de um problema anterior, que tinha três soluções reais. Isso representava que as raízes quadradas de números negativos passavam a ter uma legitimidade, pois admitindo a sua existência, era possível encontrar raízes reais para um problema. Aliás, $x = 4$ é uma das raízes da equação acima, pois $4^3 - 15.4 = 64 – 60 = 4$. As outras duas raízes encontradas são $(-2 + \sqrt{3})$ e $(-2 - \sqrt{3})$.

Observe que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = (2 + i)^3 = 2 + 11i = 2 + \sqrt{-121}$$

e

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = (2 - i)^3 = 2 - 11i = 2 - \sqrt{-121},$$

ou seja, teremos $(2 + \sqrt{-1}) = (2 + \sqrt{-121})^{1/3}$ e $(2 - \sqrt{-1}) = (2 - \sqrt{-121})^{1/3}$. Substituindo em x, no método citado acima, temos que:

$$x = (2 - \sqrt{-121})^{1/3} + (2 + \sqrt{-121})^{1/3} = (2 - \sqrt{-1}) + (2 + \sqrt{-1}) = 4.$$

Isso mostra que o método tem como solução uma raiz quadrada de número negativo que dá origem a uma solução real $x = 4$.

A partir desse ponto, baseado na experiência acima, Bombelli passou a investir seus estudos em como realizar as operações básicas com os números imaginários. Com os resultados desenvolvidos por Bombelli, os matemáticos que o sucederam passaram a incluir os números imaginários em seus trabalhos e cálculos, mas poucos deram ênfase à dedicação necessária ao desenvolvimento dos números complexos. Por outro lado, os resultados obtidos passaram a ter importância à medida que foram aproveitados por outros matemáticos para estabelecer outros resultados, de forma que o estudo dos complexos passasse a ganhar mais espaço dentro do universo dos conjuntos e equações.

Passou-se um período razoável para que os números imaginários passassem a ser bem mais aceitos e para que os resultados e as notações obtidas fossem de grande valia para o desenvolvimento do assunto. Por exemplo, Girard Desargues (1591 - 1661) associou o número de raízes de uma equação com seu grau e estabeleceu uma relação entre os coeficientes da equação e suas raízes, admitindo que as raízes pudessem ser reais ou não. Aliás, sua notação de raiz é a usada nos dias de hoje. Ele também foi o primeiro a introduzir o símbolo $\sqrt{-1}$. Por fim, Girard foi o primeiro matemático a enunciar, sem formalidade e sem apresentar uma prova rigorosa, o Teorema Fundamental da Álgebra, denotado por TFA a partir de agora, cujo enunciado é o seguinte: *Toda equação polinomial não constante com coeficientes reais (ou complexos) possui pelo menos uma solução no conjunto dos números complexos.* Por uma equação polinomial não constante entendemos uma equação da forma

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n = 0, \qquad (1)$$

onde $n \in \mathbb{N}^*$, z denota uma variável complexa e os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ são números complexos, com $a_n \neq 0$. Uma solução ou raiz para a equação (1) é um número complexo z_0 tal que

$$a_0 + a_1 z_0^1 + a_1 z_0^2 + ... + a_n z_0^n = 0.$$

Observemos que precisamos entender o que são a soma e a multiplicação de números complexos para entendermos a equação (1). De fato, como veremos no próximo capítulo, estas operações estão "incorporadas" na definição que daremos aos números complexos.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) foi o primeiro matemático a provar o TFA. De fato, Jean le Rond D'Alambert (1717 - 1783) havia tentado demonstrar o TFA mas Gauss mostrou que sua demonstração estava incompleta. Na literatura francesa, nacionalidade de D'Alambert, o TFA é conhecido como Teorema de D'Alambert. Euler e Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) também tiveram tentativas de demonstração contestadas. Cabe observar que atualmente existem várias demonstrações para o TFA. Embora de enunciado meramente algébrico, as demonstrações, até hoje apresentadas na literatura, fazem uso de algum argumento topológico. Indicamos [8] para o leitor interessado em estudar uma prova do TFA.

Como já mencionamos, o estudo dos números complexos foi sendo desenvolvido à medida que outros matemáticos encontravam teoremas que, de maneira direta ou indireta, influenciavam e davam sustentação aos futuros resultados. Além dos matemáticos já citados anteriormente, outros matemáticos tiveram grande importância nesse desenvolvimento. Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646 - 1716), um dos criadores do Cálculo, cita: “os números imaginários são como um recurso elegante e maravilhoso para a inteligência humana”. Terminamos observando que Jean Argand (1768 -1822), matemático suíço, associou os números complexos a uma representação geométrica no plano, e por isso deu uma grande contribuição. Para que Argand pudesse representar geometricamente um número complexo no plano, ele usou a representação algébrica definida por Willian Hamilton (1805 - 1865), matemático irlandês, que definiu um número complexo como um par ordenado de números reais, definição essa sugerida, neste trabalho, aos alunos do Ensino Médio. Hamilton observou que o sinal de adição encontrado na forma a + bi não define uma soma de dois elementos de mesma dimensão. Ele estabelece que a soma dos pares (a, 0) com (0, b) representa o número complexo a + bi, definindo as operações de adição e multiplicação entre pares ordenados como (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) e (a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc), respectivamente.

3. NÚMEROS COMPLEXOS

No Ensino Médio, geralmente um número complexo é definido como um número da forma a + bi, onde a e b são reais e i é um algarismo imaginário. Esta apresentação é artificial e gera questionamentos pelos alunos, já que a e b são números (reais) e i é um algarismo e não um número. De fato, no terceiro ano do Ensino Médio, o "maior" conjunto numérico que os alunos conhecem é o conjunto dos número reais. Se chamarmos i de número, ele não seria um número real, pois pelo fechamento das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, teríamos $a + bi \in \mathbb{R}$ e, então, um número complexo seria um número real. E chamar i de algarismo é artificial, pois os algarismos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Além do mais, esta definição apresenta uma soma e uma multiplicação que serão definidas a posteriori.

Neste capítulo vamos definir de modo rigoroso os números complexos. Como já mencionamos, a definição que será apresentada aqui segue as ideias de Hamilton. Embora seja uma definição antiga, acreditamos que ela seja a mais natural para os alunos do Ensino Médio, pois os números complexos são ensinados no 3º ano e, portanto, os alunos já conhecem as noções de par ordenado de números reais e vetores no plano.

3.1 O CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS.

Definimos o *corpo dos números complexos* como sendo o conjunto

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\},$$

com as operações de adição e multiplicação: se $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$ pertencem a $\mathbb{C}$, então

$$z + w = (x+a, y+b) \text{ e } z.w = (xa - yb, xb + ya). \qquad (1)$$

Os elementos de $\mathbb{C}$ são chamados de *números complexos.* Denotamos o número complexo (0; 0) simplesmente por 0 e o número complexo (1, 0) simplesmente por 1. Para cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, definimos

$$-z = (-x, -y) \text{ e } z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2} , \frac{-y}{x^2+y^2} \right) \text{ se } z \neq 0.$$

O número z^{-1} também é denotado por $\frac{1}{z}$ ou $1/z$.

Proposição 1. As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w, t \in \mathbb{C}$:

(a) $z + (w + t) = (z + w) + t$ (associatividade da adição);

(b) $z + w = w + z$ (comutatividade da adição);

(c) $0 + z = z$ (elemento neutro);

(d) $z + (-z) = 0$ (elemento simétrico);

(e) $z(wt) = (zw)t$ (associatividade da multiplicação);

(f) $zw = wz$ (comutatividade da multiplicação);

(g) $1z = z$ (elemento unidade);

(h) $zz^{-1} = 1$, se $z \neq 0$ (elemento inverso);

(i) $z(w + t) = zw + zt$ (distributividade da multiplicação em relação à adição).

Tendo definido as operações de adição e de multiplicação em $\mathbb{C}$, definimos as operações de *subtração e divisão,* da maneira usual: dados $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z - w = z + (-w) \text{ e } \frac{z}{w} = zw^{-1} \text{ se } w \neq 0.$$

Além disso, a *potenciação* também é definida da maneira usual:

$$z^0 = 1,\ z^n = z...z \text{ (n-vezes)},\ z^{-n} = (z^{-1})^n, \text{ se } z \neq 0\ (n \geq 1).$$

Decorre da Proposição 1 que diversas propriedades das operações aritméticas de números reais são válidas para os números complexos. Por exemplo, a soma e o produto de duas frações z_1/w_1 e z_2/w_2 de números complexos podem ser obtidos pelas fórmulas

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1w_2 + z_2w_1}{w_1w_2} \text{ e } \frac{z_1}{w_1}\ \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1z_2}{w_1w_2},$$

exatamente como ocorre no caso real.

Um conjunto no qual estão definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação satisfazendo as propriedades mencionadas na Proposição 1 é chamado um *Corpo*. Por essa razão é que chamamos $\mathbb{C}$ de corpo dos números complexos. Isso também explica por que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ são chamados de *corpos.* A Teoria dos Corpos é um ramo da Álgebra Abstrata, e assim está fora do objetivo da presente dissertação. Aqui, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ serão os únicos corpos que nós encontraremos.

O leitor que teve a oportunidade de ter estudado no Ensino Médio o assunto, certamente lembra de ter visto os números complexos como sendo os "números" da forma

$$x + yi,$$

onde x e y são números reais e *i* é um "algarismo imaginário" que satisfaz a estranha igualdade $i^2 = -1$. Vejamos como obter tal representação dos números complexos. Primeiramente, denotamos o número complexo $(x; 0)$, com $x \in \mathbb{R}$, simplesmente por x. Note que isto está de pleno acordo com o que já fizemos com o elemento neutro 0 e o elemento unidade 1[$0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$]. Em outras palavras fazemos a seguinte convenção:

$$x = (x, 0) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Dessa forma, passamos a ver $\mathbb{R}$ como um subconjunto de $\mathbb{C}$, ou seja, *todo número real é considerado um número complexo*. A princípio a inclusão $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ pode gerar uma certa ambiguidade: dados $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, o que entendemos por "x + a" e "xa" ? A soma e o produto dos números reais x e a ou a soma e o produto dos números complexos x e a ? A resposta é que tanto faz, uma vez que os valores são os mesmos. De fato,

$$(x, 0) + (a, 0) = (x + a, 0) = x + a.$$

e

$$(x, 0)\ (a, 0) = (xa - 0.0,\ x.0 + 0.a) = (xa, 0) = xa,$$

por (1) e nossa convenção (2). Agora, note que $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, ou seja, o número -1 possui uma "raiz quadrada" em $\mathbb{C}$! O número complexo (0, 1) é denotado por *i* e é chamado *algarismo imaginário*. Assim, temos a propriedade básica do algarismo imaginário:

$$i^2 = -1. \qquad (3)$$

Finalmente, dado um número complexo qualquer z = (x; y), temos

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1),$$

isto é,

$$z = x + yi \qquad (4)$$

Logo, o par (x; y) e a expressão (4) representam o mesmo número complexo. A forma x + yi é chamada a *forma algébrica* de z; essa é a forma na qual os números complexos são usualmente denotados.

Sempre que tomarmos um número complexo na forma z = x + yi assumiremos implicitamente que x e y são números reais.

Observamos que com a forma algébrica não precisamos nos preocupar em memorizar as definições de z + w e zw dadas em (1). De fato, basta usarmos algumas das propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{C}$ já apresentadas: se z = x+yi e w = a+bi são números complexos, então

$$z + w = (x+yi) + (a+bi) = x + a + yi + bi = (x + a) + (y + b)i$$

e

$$z.w = (x+yi)(a+bi) = xa + yia + xbi + ybi^2 = (xa - yb) + (xb + ya)i.$$

3.2 CONJUGADO E VALOR ABSOLUTO.

Dado um número complexo z = x + yi, definimos a *parte real* e a *parte imaginária* de *z* por

$$\operatorname{Re} z = x \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Im} z = y$$

respectivamente. Quando $\operatorname{Re} z = 0$, dizemos que z é *imaginário puro*.

Como um número complexo z = x + yi é o par ordenado (x, y), podemos representá-lo graficamente como o ponto do plano cartesiano de abscissa x e ordenada y, ou como o vetor que liga a origem a este ponto (Figura 1). Neste contexto, chamamos o plano cartesiano de *plano complexo*, o eixo dos x de *eixo real* e o eixo dos y de *eixo imaginário.*

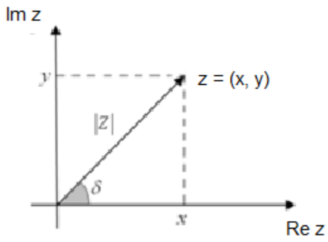


Figura 1

Vejamos agora a interpretação geométrica para a adição de dois números complexos. Se z e w são dois números complexos, então z + w é representado, geometricamente, pela diagonal do paralelogramo determinado pelos vetores que representam os números complexos z e w (Figura 2). Esta é a chamada regra de paralelogramo, apresentada em Geometria Analítica.

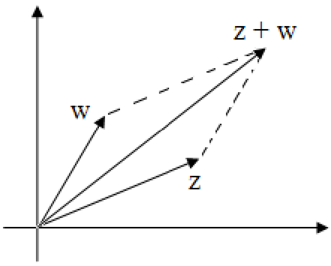


Figura 2

Definimos o *conjugado* de um número complexo z = x + yi como sendo o número complexo

$$\overline{z} = x - yi.$$

Graficamente, $\overline{z}$ é o ponto do plano complexo obtido através da reflexão de z em relação ao eixo real (Figura 3).

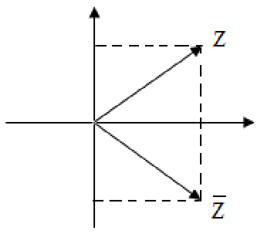


Figura 3

Proposição 2. As seguintes propriedades se verificam para quaisquer z, w ∈ ℂ:

(a) $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{(z + w)} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{(z - w)} = \overline{z} - \overline{w}$ e $\overline{(z.w)} = \overline{z}.\overline{w}$,

(b) $\overline{(z/w)} = \overline{z}/\overline{w}$ se $w \neq 0$;

(c) $z + \overline{z} = 2.\mathrm{Re}(z)$ e $z - \overline{z} = 2.\mathrm{Im}(z)$

(d) $z \in \mathbb{R}$ se e somente se $\overline{z} = z$;

(e) z é imaginário puro se e somente se $\overline{z} = -z$.

Através da noção de conjugado, podemos deduzir a expressão do inverso de um número complexo $z = x + yi \neq 0$ da seguinte maneira:

$$z^{-1} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}\,i.$$

O *valor absoluto (ou módulo)* de um número complexo $z = x + yi$ é definido por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Graficamente, o número real $|z|$ nos dá o comprimento do vetor correspondente a z no plano complexo (Figura 4). Mais ainda, $|z - w|$ é a distância entre os pontos do plano que representam z e w.

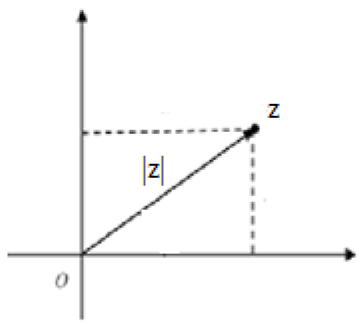


Figura 4

Proposição 3. As seguintes propriedades se verificam para quaisquer z, w ∈ ℂ:

(a) $\operatorname{Re} z \le |\operatorname{Re} z| \le |z|$ *e* $\operatorname{Im} z \le |\operatorname{Im} z| \le |z|$;

(b) $|z|^2 = z.\,\overline{z}$, $|\,\overline{z}\,| = |z|$ e $|z.w| = |z||w|$;

(c) $|z / w| = |z| / |w|$ *se* $w \neq 0$;

(d) $|z + w| \le |z| + |w|$;

(e) $|z + w| \ge \big||z| - |w|\big|$.

A desigualdade (d) é conhecida como *desigualdade triangular.*

Observemos que se $z \neq 0$, a proposição 3(b) implica que

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} . \qquad (5)$$

Em particular, $z^{-1} = \overline{z}$ se $|z| = 1$.

Vejamos a seguir uma outra forma de se representar um número complexo. Essa forma é de extrema importância no que diz respeito às aplicações desses números.

3.3. A FORMA POLAR.

Consideremos um número complexo $z = x + yi \neq 0$. Seja θ_0 o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z no sentido anti-horário (Figura 5).

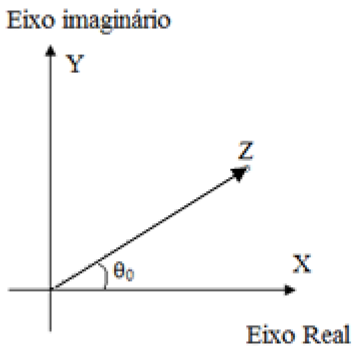


Figura 5

Como $\cos\theta_0 = x / |z|$ e $sen\,\theta_0 = y / |z|$, temos que

$$z = |z|(\cos\theta_0 + i\,sen\,\theta_0) .$$

Assim, é sempre possível representar z na forma

$$z = |z|(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta) \qquad (6)$$

que é chamada uma *representação polar* de z. Se $\theta \in \mathbb{R}$ satisfaz (6), dizemos que θ é um *argumento* de z. Assim, θ_0 é um argumento de z. Entretanto, qualquer θ da forma $\theta_0 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também satisfaz (6). Em particular, z possui infinitos argumentos. Por outro lado, se θ satisfaz (6) então $\cos\theta = \cos\theta_0$ e $\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\theta_0$, o que implica que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assim, o conjunto $\arg z$ de todos os argumentos de z é dado por

$$\arg z = \{\, \theta_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}.$$

Por exemplo,

$$1+i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\,\frac{\pi}{4}) \ \text{ e } \ 1+i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{-7\pi}{4} + i\,sen\,\frac{-7\pi}{4})$$

são representações polares do número $1+i$; note que $\arg(1+i) = \{\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

O único argumento de z que pertence ao intervalo $\left(-\pi,\pi\right]$ é chamado de *argumento principal* de z e é denotado por *Arg z*. Por exemplo,

$$Arg\, i = \frac{\pi}{2},\ Arg\,(-1,-i) = -\frac{3\pi}{4} \ \text{ e } \ Arg\left(-2\right) = \pi\,.$$

A identidade

$$z = \left|z\right|(\cos Arg\, z + i\, sen\, Arg\, z) \qquad (7)$$

é chamada a *forma polar de z*.

Já apresentamos a interpretação geométrica da adição de dois números complexos. A seguir, com o auxílio das representações polares, vamos obter a interpretação geométrica da multiplicação de dois números complexos. Inicialmente, tomemos z e w dois números complexos não nulos, ambos com módulo igual a 1. Então,

$$z = \cos\theta + i.\text{sen}\,\theta \text{ e } w = \cos\varphi + i.\text{sen}\,\varphi,$$

onde $\theta \in \arg z$ e $\varphi \in \arg w$. Note que z e w são representados geometricamente por pontos no círculo unitário. Como

$$\begin{aligned} iz &= i(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \\ &= -\text{sen}\,\theta + i\cos\theta \\ &= \cos(\theta + \pi/2) + i\,\text{sen}\,(\theta + \pi/2), \end{aligned}$$

segue que multiplicar z por i significa realizar em z uma rotação no sentido anti-horário de $\pi/2$. Agora,

$$z.w = (\cos \varphi + i.\text{sen } \varphi).z = \cos \varphi.z + \text{sen } \varphi.iz,$$

mostrando que o vetor que representa zw é a soma (diagonal do paralelogramo determinado pelos vetores cos φ.z e sen φ.iz) dos vetores perpendiculares cos φ.z e sen φ.iz. Note que o ângulo de z com zw é φ. Concluímos, assim, que multiplicar dois números complexos z e w, com módulo1, significa, geometricamente, dar a um deles uma rotação no sentido anti-horário de ângulo igual ao ângulo do outro (Figura 6).

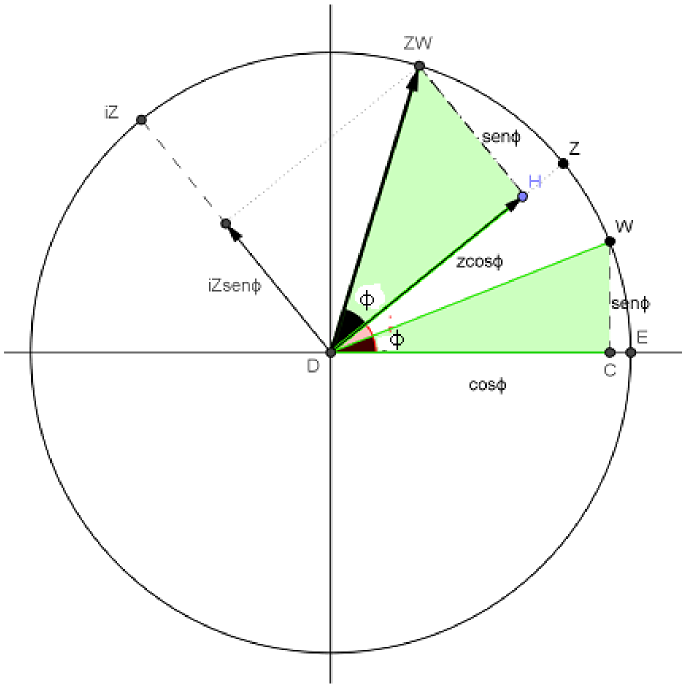


Figura 6

No caso de dois números complexos quaisquer z_1 e w_1, podemos escrever

$$z_1 = |z_1|.z \text{ e } w_1 = |w_1|.w,$$

onde z e w são números complexos de módulo 1. Note que z_1 e z têm um mesmo argumento θ, assim como w_1 e w têm um mesmo argumento φ. Logo,

$$z_1.\, w_1 = |z_1|.|w_1|.z.w,$$

mostrando que *o produto de dois números complexos z_1 e w_1 tem valor absoluto $|z_1|.|w_1|$ e tem $\theta + \varphi$ como um argumento*. Este fato será usado mais tarde para deduzirmos algumas expressões conhecidas da Trigonometria, ou seja,

$$z_1.w_1 = |z_1||w_1|[\cos(\theta + \varphi) + i.\text{sen}(\theta + \varphi)]. \qquad (8)$$

Seja

$$z = |z|(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$$

uma representação polar de um número complexo não nulo z. Vamos agora obter representações polares para z^{-1}. Ora, por (5),

$$z^{-1} = |z|^{-1}\left[\cos(-\theta) + i\,sen(-\theta)\right].$$

Definindo

$$-A = \{-a : a \in A\} \text{ e } A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}\ (A, B \subset \mathbb{C}),$$

decorre das fórmulas (8) e (9) que

$$\arg(z^{-1}) = -\arg z \text{ e } \arg(zw) = \arg z + \arg w. \qquad (10)$$

Porém, nem sempre é verdade que $Arg(z^{-1}) = -Arg\, z$ e que $Arg(zw) = Arg\, z + Arg\, w$.

De (8) e (10) obtemos, por indução, que

$$z^n = |z|^n \left[\cos(n\theta) + i\,sen(n\theta)\right] \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \qquad (11)$$

No caso em que $|z| = 1$, a igualdade (11) nos diz que

$$(\cos\theta + i\,sen\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,sen(n\theta)\,. \qquad (12)$$

Esta igualdade é conhecida como *fórmula de De Moivre*.

A extensão das operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) dos números reais para os números complexos não traz novidades algébricas. De fato, a adição e multiplicação dos números complexos é comutativa, associativa e tem elemento neutro. Como vimos também, a subtração e a divisão nos complexos são definidas de modo análogo ao definido nos reais. Essas semelhanças podem nos levar a esperar que a operação de radiciação nos complexos seja igual ao caso real. Como veremos a seguir, todo número complexo não nulo tem n raízes n-ésimas distintas. Além disso, essas raízes são apresentadas. Esse fato foi enunciado como Teorema e é o único resultado que é provado neste trabalho, pois serve para ilustrar ao aluno uma aplicação da representação polar de um número complexo. Na verdade, a extração de raízes de ordem maior ou igual a 3, no campo dos complexos, é um problema muito difícil de ser resolvido com ferramentas puramente algébricas.

3.4 EXTRAÇÃO DE RAÍZES.

Dados um número complexo w e um número $n \in \mathbb{N}^*$, dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é uma raiz n-ésima de w se

$$z^n = w.$$

Se $w = 0$ é claro que $z = 0$ é a única solução da equação $z^n = w$. Logo, o número 0 possui uma única raiz n-ézima que é o próprio 0. Provaremos a seguir que se $w \neq 0$ então existem exatamente n soluções distintas da equação $z^n = w$. Mais ainda, vamos apresentar a forma de cada uma dessas n soluções distintas.

Teorema 1. *Fixe* n ∈ $\mathbb{N}^*$. *Todo número complexo não nulo w possui exatamente n raízes n-ézimas complexas distintas, a saber,*

$$\sqrt[n]{|w|}\ \left[\cos\left(\frac{\text{Arg}(w) + 2k\pi}{n}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\text{Arg}(w) + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad (13)$$

onde $k = 0,1,....,n-1$.

Demonstração. Para cada k ∈ $\mathbb{Z}$, denotemos por z_k o número complexo dado em (13). Escreva w = |w|(cos a + i sen a), onde a = Arg w. Nós estamos procurando todos os números complexos z = |z|(cos b + i sen b) para os quais é verdade que

$$z^n = w.$$

Pela fórmula (11), a equação acima se transforma em

$$|z|^n[\cos(nb) + i\ \text{sen}(nb)] = |w|(\cos a + i\ \text{sen}\ a),$$

o que equivale a dizer que

$$|z|^n = |w|,\ \cos(nb) = \cos a \text{ e } \text{sen}(nb) = \text{sen}\ a.$$

A primeira condição é satisfeita precisamente quando $|z| = \sqrt[n]{|w|}$, enquanto as duas últimas são satisfeitas quando nb = a + 2kπ com k ∈ $\mathbb{Z}$, isto é, $b = \frac{a + 2k\pi}{n}$ com k ∈ $\mathbb{Z}$. Assim, as raízes n-ésimas de w são os números z_k para k ∈ $\mathbb{Z}$. Fazendo k = 0, 1,..., n - 1 obtemos distintas raízes n-ésimas de w. Entretanto, os demais valores de k nos dão apenas repetições das raízes $z_0, z_1,..., z_{n-1}$. De fato, tome k ∈ $\mathbb{Z}$ arbitrário. Escreva, pelo algoritmo da divisão de Euclides,

$$k = qn + r \text{ com } q \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq r < n.$$

Como

$$\frac{a + 2k\pi}{n} = \frac{a + 2(qn+r)\pi}{n} = \frac{a + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

vemos que

$$z_k = z_r \in \{z_0, z_1,..., z_{n-1}\},$$

o que finaliza a prova do Teorema.

A raiz n-ésima de w obtida fazendo k = 0 em (13) é chamada a *raiz n-ésima principal de w*. A notação $\sqrt[n]{w}$ é reservada para esta raiz. Note que esta notação é coerente com a notação $\sqrt[n]{|w|}$ que indica a única raiz real positiva de $|w|$. Portanto

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\ \left[\cos\left(\frac{\text{Arg}(w) + 2k\pi}{n}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\text{Arg}(w) + 2k\pi}{n}\right)\right].$$

Como a única raiz n-ésima do zero é o próprio zero, convencionamos que $\sqrt[n]{0}=0$. O símbolo $\sqrt{w}$ também é usado em lugar de $\sqrt[2]{w}$.

Observe que todas as n-ésimas raízes de w possuem o mesmo módulo, a saber, $\sqrt[n]{|w|}$. Logo, elas são representadas por n pontos sobre a circunferência com centro na origem e raio $\sqrt[n]{|w|}$. Além disso, estes pontos estão igualmente espaçados ao longo desta circunferência devido à relação de seus argumentos. Como exemplo, consideremos as raízes cúbicas de 8. Pelo teorema 1, elas são os números

$$z_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\,sen\,\frac{2k\pi}{3}\right) \quad \text{para } k = 0,1,2.$$

Calculando, obtemos $z_0 = 2,\ z_1 = -1 + i\sqrt{3}\ e\ z_2 = -1 - i\sqrt{3}$. Temos que $z_0,\ z_1\ e\ z_2$ dividem a circunferência de centro (0,0) em três partes congruentes.

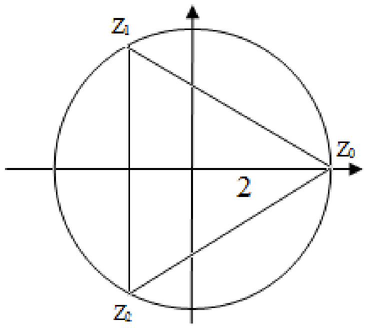


Figura 7

No Ensino Médio não se apresentam as noções de exponencial de um número complexo e de logaritmo de um número complexo não nulo. Por questão de completude de nosso trabalho, vamos apresentar aqui estas noções, pois elas são extensões para o caso complexo do que os alunos aprendem no caso real. Nas duas próximas seções veremos que algumas propriedades da exponencial e do logaritmo reais deixam de serem válidas no contexto dos complexos.

3.5 A EXPONENCIAL.

Nosso objetivo nesta seção é definir a exponencial[1] e^z de um número complexo z e apresentar algumas de suas propriedades.

[1] A definição dada acima pode parecer nada natural. Contudo, ela tem sua motivação no fato de que a expansão em série de Taylor (1685 - 1661) de e^t, para t real, é $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots$. Talvez este seja um motivo razoável para não tratar a exponencial de um número complexo no Ensino Médio.

Dado um número complexo $z = x + yi$, definimos a exponencial de z por

$$e^z = e^x(\cos y + i\, sen\, y)\,.$$

Fazendo y = 0, obtém-se $e^z = e^x$, ou seja, a exponencial complexa é uma extensão da exponencial real.

A notação exp z é frequentemente usada em lugar de e^z. Com $z = iy$ obtemos a fórmula de Euler:

$$e^{iy} = \cos y + i\, sen\, y\,.$$

Como exemplo,

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \quad e^{1+\pi i} = -e \quad e \quad e^{\pi - \frac{\pi i}{2}} = -e^{\pi} i\,.$$

Vemos diretamente da definição que

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \text{ e } \arg(e^z) = \{\operatorname{Im} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Em particular, $e^z \neq 0$ para todo número complexo z. A fórmula (11) implica diretamente que

$$(e^z)^n = e^{nz}$$

para quaisquer $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Em particular, $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Se $z = x + yi$ e $w = a + bi$ são dois números complexos, a fórmula (9) nos mostra que

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \left[e^x(\cos y + i\, sen\, y)\right]\left[e^a(\cos b + i\, sen\, b)\right] \\ &= e^{x+a}\left[\cos(y+b) + i\, sen(y+b)\right] = e^{z+w} \end{aligned}.$$

Em outras palavras,

$$e^{z+w} = e^z e^w\,.$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Como vimos acima, muitas propriedades da exponencial real são válidas no contexto dos números complexos. Observamos porém que, ao contrário do que acontece no caso real, é possível termos $e^z = e^w$ com $z \neq w$. Por exemplo $e^0 = e^{2\pi i} = 1$. A proposição abaixo esclarece por completo esse fenômeno.

Proposição 4. *Para quaisquer* $z, w \in \mathbb{C}$, *temos que* $e^z = e^w$ *se e somente se* $z = w + 2k\pi i$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$.

Na seção 3.3 vimos que todo número complexo não nulo z tem uma representação polar $z = r(\cos\theta + i\, sen\,\theta)$ onde $r = |z|$ e θ é um argumento de z. Com a noção de exponencial esta igualdade pode ser escrita de uma forma mais econômica, a saber, $z = re^{i\theta}$.

Observemos também que as n raízes n-ésimas de um número complexo não nulo w (dadas por (13)) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\sqrt[n]{|w|}\, e^{i\left(\frac{Arg(w)+2k\pi}{n}\right)} \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Em particular, as n raízes n-ésimas do número 1 (*conhecidas como as raízes n-ésimas da unidade*) são dadas por

$$\zeta_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \text{ para k = 0, 1, 2,..., n-1.}$$

Notemos também que as n raízes n-ésimas de w podem ser obtidas multiplicando-se a raiz n-ésima principal $\sqrt[n]{w}$ de w pelas raízes n-ésimas da unidade. De fato,

$$\sqrt[n]{|w|}\ e^{i\left(\frac{Arg(w)+\,2k\pi}{n}\right)} = \zeta_k \sqrt[n]{w} \text{ para k = 0, 1, 2,..., n-1.}$$

Por exemplo, se $n = 2$ então $\zeta_0 = 1$ e $\zeta_1 = -1$. Logo, as raízes quadradas de w são

$$\sqrt{w} \quad e \quad -\sqrt{w}.$$

3.6 LOGARITMOS.

Relembremos que um número real s é dito o logaritmo natural (ou logaritmo de base e) de um número real positivo t (em símbolos s = ln t) quando $e^s = t$. Imitando este conceito, dizemos que um número complexo w é um logaritmo de um número complexo não nulo z se $e^w = z$.

Existe uma diferença entre o caso real e o caso complexo. Enquanto no caso real todo número positivo possui um único logaritmo, veremos a seguir que todo número complexo possui uma infinidade de logaritmos. Denotamos por log z o conjunto de todos os logaritmos do complexo $z \neq 0$. Assim, para todo número complexo não nulo z,

$$\log z = \{ w \in \mathbb{C};\ e^w = z\}.$$

Vamos agora determinar log z. Se $w = \ln|z| + i\theta$ com $\theta \in \arg z$, então $e^w = e^{\ln|z|} e^{i\theta} = |z| e^{i\theta} = z$. Por outro lado, suponhamos $w \in \log z$, o que equivale dizer que

$$e^{\operatorname{Re} w} = |e^w| = |z| \quad e \quad \operatorname{Im} w = Arg\, z + 2k\pi \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

donde $w = \ln|z| + i\theta$ com $\theta \in \arg z$. Portanto,

$$\log z = \{\ln |z| + i\theta;\ \theta \in \arg z\} = \{ \ln |z| + i(\text{Arg } z + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z}\}. \qquad (14)$$

Fazendo k = 0 em (14) obtemos o logaritmo principal de z, que é denotado por Log z.

Assim,

$$\text{Log } z = \ln |z| + i\, Arg\ z. \qquad (15)$$

Por (14) e (15),

$$\log z = \{ \text{Log } z + 2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Notemos que Log x = ln x para todo número real positivo x. De agora em diante, escreveremos Log x em vez de $\ln x$ quando x for um número real positivo. Como exemplo, temos que

$$\text{Log}(-1) = \pi i,\ \text{Log}(e^2 i) = 2 + \frac{\pi}{2} i,\ \text{Log}(1 + i) = \text{Log}\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i.$$

Definindo

$$A - B = \{a - b : a \in A \ \ e \ \ b \in B\} \quad e \quad mA = \{ma : a \in A\}$$

para A, B ⊂ ℂ e m ∈ ℤ, temos a seguinte

Proposição 5. Dados dois números complexos não nulos $z_1 \ e \ z_2$, temos que:

(a) $\log(z_1 z_2) = \log\ z_1 + \log\ z_2$;

(b) $\log(z_1 / z_2) = \log\ z_1 - \log\ z_2$;

(c) $\log(z_1^m) = m \log z_1$ para todo m ∈ ℤ*.

Terminamos esta seção observando que não é sempre verdade que Log $(z_1 z_2)$ = Log z_1 + Log z_2, nem que Log (z_1/z_2) = Log z_1 - Log z_2 e nem que Log (z_1^m) = m Log z_1.

4. O ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NAS ESCOLAS

Uma parte deste trabalho consistiu na aplicação de questionários, cujo objetivo é investigar o conhecimento, tanto por professores como por alunos, sobre os números complexos e suas aplicações. Na metodologia usada, alunos e professores responderam questionários diferenciados. Foram entrevistados 50 professores, que foram selecionados de escolas públicas e particulares de Niterói, RJ. E foram entrevistados 100 alunos, sendo que 50 finalizaram o Ensino Médio, ingressaram no Ensino Superior mas não ingressaram nos cursos de Matemática ou Engenharia e 50 alunos são dos cursos de Matemática ou Engenharia da Universidade Federal Fluminense.

Vamos começar apresentando os resultados dos questionários aplicados aos alunos. Nossa apresentação será de questão por questão. No fim do questionário, apresentaremos uma análise dos dados obtidos, também questão por questão.

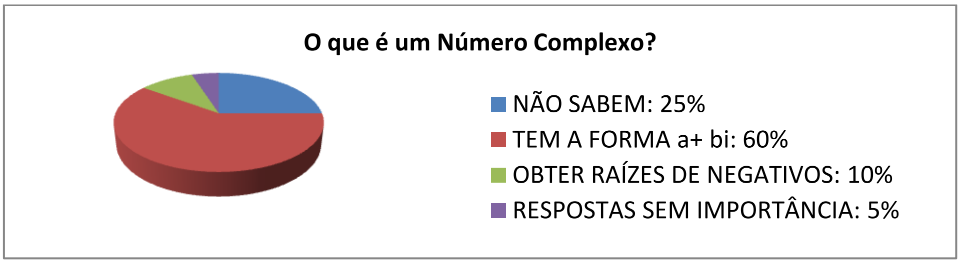
4.1. Alunos que ingressaram no Ensino Superior, mas não ingressaram nos cursos de Matemática ou Engenharia.

Questão 1: Na sua escola, números complexos fizeram parte do programa?

Cerca de 10% dos alunos entrevistados disseram que números complexos não fizeram parte do programa; 90%, sim.

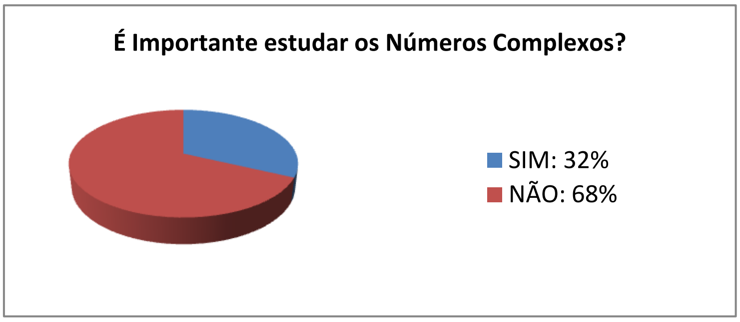
Questão 2: Você sabe o que é um número complexo?

Primeiramente vale ressaltar que 25% dos alunos responderam que não sabem o que é um número complexo. Cerca de 60% dos alunos disseram apenas que números complexos são números na forma (a + bi). Tivemos 10% dos alunos dizendo que números complexos são números para calcular raízes de números negativos. Os 5% restantes deram respostas variadas e julgadas sem importância, pois não tinham nenhum significado.



Questão 3: Você acha importante aprender números complexos no Ensino Médio? Por quê?

Aproximadamente 32% disseram não achar importante ou não ter opinião formada. 12% dos alunos entrevistados responderam que não acham importante porque não sabem ou acham que não tem aplicação alguma, enquanto 24% responderam que não acham importante porque não consta em exames de ingresso ao nível superior. Vale ressaltar que o exame citado por esse grupo é o ENEM. Por outro lado, 32 % dos alunos disseram achar importante aprender números complexos no Ensino Médio, mas não justificaram.

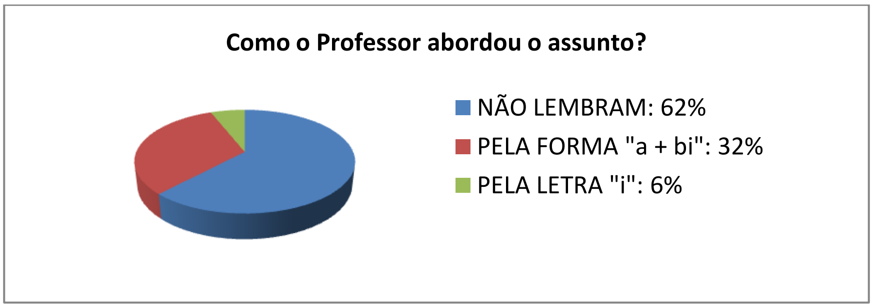


Questão 4: Você sabe ou conhece as aplicações de números complexos?

Aproximadamente 67% dos alunos entrevistados disseram não conhecer nenhuma aplicação dos números complexos. Enquanto aproximadamente 33% disseram saber alguma aplicação de números complexos, mas não disseram que aplicações são estas.

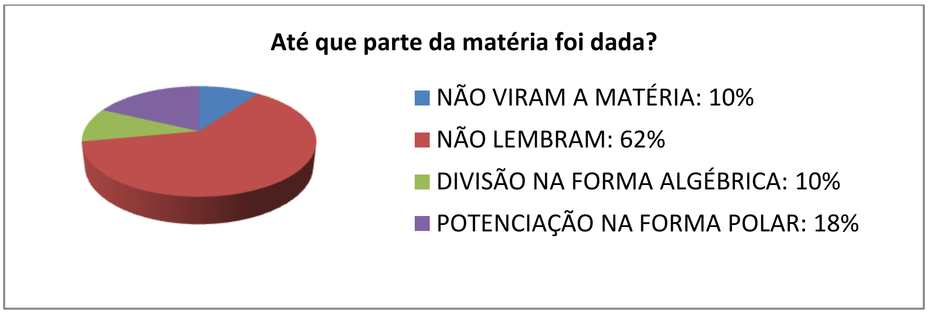
Questão 5: Você lembra de que forma o professor iniciou esse tema com sua turma?

Aproximadamente 62% dos entrevistados disseram não saber ou lembrar como foi a abordagem inicial do professor sobre esse tema. Cerca de 32% disseram que a primeira aula foi com o professor ensinando que um número complexo é um número na forma (a + bi). 6% dos entrevistados disseram que a primeira aula foi o professor ensinando que são números que usam a letra i, que representa a raiz quadrada de (-1).



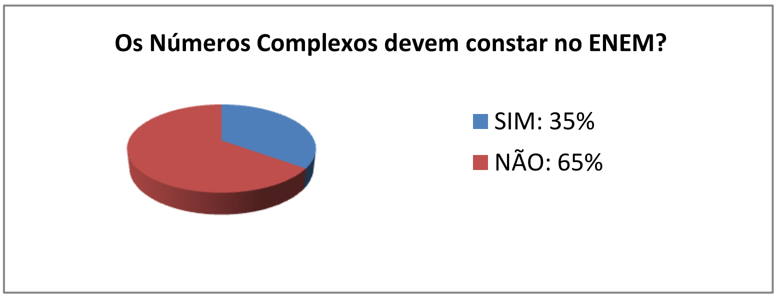
Questão 6: Você lembra ou sabe até qual parte da matéria números complexos foi dado?

Lembramos que cerca de 10% dos alunos entrevistados disseram não ter visto números complexos na escola. Aproximadamente 62% dos entrevistados disseram não saber ou não lembrar até que parte da matéria foi dado. 10% disseram que seu professor foi até divisão de números complexos usando a forma algébrica. Outros 18% disseram ter ido até a forma polar e potenciação de complexos.



Questão 7: Você concorda que números complexos não devem constar no programa de matérias do ENEM? Por quê?

30% dos entrevistados disseram concordar em números complexos não ser conteúdo nas provas de ENEM porque não é ensinado, ou muito pouco ensinado ou mal ensinado. Para 10% dos entrevistados, não deve ser cobrado porque acreditam que os complexos não tem aplicação no cotidiano das pessoas. 25% acham que não deve ser cobrado, sem um motivo específico. Cerca de 13% dos entrevistados acham indiferente, assim como 22% acham que devem ser cobrado.



ANÁLISE DOS DADOS:

Questão 1. A grande maioria, cerca de 90% afirma ter tido algum tipo de contato com a matéria. Isso nos possibilita ter um universo bem razoável para análise, assim como também aponta uma realidade por parte de algumas escolas que já não incluem o conteúdo em seu programa.

Questão 2. Temos aqui um dado interessante: A porcentagem de alunos que afirmaram não saber o que é um número complexo (25%) é maior do que os que disseram não ter visto números complexos no Ensino Médio (10%). Isso significa que uma parte dos alunos teve algum contato com o conteúdo, mas não aprenderam absolutamente nada. Cerca de 60% dos alunos disseram apenas que números complexos são números na forma (a + bi). Tivemos 10% dos alunos dizendo que números complexos são números para calcular raízes de números negativos. Os 5% restantes deram respostas variadas.

Esses dados são de extrema importância para o presente trabalho. Fica o questionamento se os 60% citados acima, sabem de fato o que representa a forma (a + b.i), ou seja, o que significa um número ser apresentado dessa forma. E a situação fica mais alarmante quando incluímos os 15% restantes (10% + 5%) com respostas variadas, e os 25% que afirmam não ter aprendido nada. É de grande valia ponderar se o método usual, aplicado nas escolas hoje em dia, tem sido eficaz no objetivo de ensinar ao aluno números complexos.

Questão 3. Esta questão apresentou diversas respostas, com uma frequência muito parecida. O que leva a 32% achar que números complexos não são importantes no Ensino Médio? É a indiferença sobre o assunto ou a forma como aprenderam?

Provavelmente teríamos uma mudança significativa nos percentuais de alunos que acham importante o conteúdo no Ensino Médio se soubessem um pouco mais de sua história ou de suas aplicações. O resultado mostra que 12% não acha importante porque não sabem ou acham que não tem aplicação alguma. Um resultado também interessante é que 24% responderam que não acha importante porque não consta em exames de ingresso no nível superior. Vale ressaltar que o exame citado por esse grupo é o ENEM. Mas por que esse conteúdo não é exigido na principal prova do país? Por saberem que nem todas as escolas, públicas ou particulares do Brasil conseguem ensinar a matéria? Para não prejudicar os alunos do 3º ano do Ensino Médio, dado que as datas de realização dos exames são anteriores à conclusão do curso? Será que a inclusão de números complexos no programa e no edital da prova não seria um fator de mudança nas escolas, tanto na presença do conteúdo em seus programas, quanto na abordagem das aulas?

Por fim, 32 % dos alunos disseram achar importante aprender números complexos no Ensino Médio, pois acreditam que o conteúdo tem alguma aplicação importante, ou que é cobrado nos vestibulares que farão. Certamente estão se referindo a algumas faculdades ou universidades que ainda não adotaram integralmente ou simplesmente não adotaram o ENEM como forma de ingresso. Aparentemente estamos diante de um conflito, pois no mesmo universo entrevistado, encontramos escolas que não lecionam porque não é cobrado no ENEM, mas ao mesmo tempo, alunos que afirmam a necessidade de aprenderem para obterem êxito em outros concursos e vestibulares.

Questão 4. A grande maioria (67% dos alunos entrevistados) disseram não conhecer nenhuma aplicação dos números complexos. Observe que essa porcentagem é maior do que o dobro da porcentagem dos alunos que disseram ser importante aprender números complexos, pois acreditam que tenha alguma aplicação (32%). Isso significa que, apesar desse grupo achar importante, achar que existe aplicação, uma parte razoável desconhece alguma aplicação. Mais uma vez, podemos avaliar o quanto isso é reflexo da forma como o conteúdo vem sido lecionado ao longo dos anos. Por outro lado, 33% disseram saber alguma aplicação de números complexos. Surgiu apenas uma resposta que o aluno afirmou que a aplicação é apenas para solucionar a fórmula de Bháskara quando encontramos raiz quadrada de um número negativo. Essa resposta pode nos levar a outro questionamento: o quanto desses 33% que disseram saber alguma aplicação, também pensam que essa aplicação é para resolver problemas com raízes quadradas de números negativos?

Questão 5. Esta é uma das perguntas mais importantes. Será que não devemos reavaliar a forma como o conteúdo é ensinado, quando é ensinado no Ensino Médio? Temos a grande maioria (62% dos entrevistados) dos alunos afirmando não saber ou lembrar como foi a abordagem inicial do professor sobre esse tema. Se a grande maioria sequer sabe ou lembra a respeito do conteúdo, alguma proposta de mudança deve ser feita.

Aproximadamente 32% dos alunos entrevistados afirmaram que a primeira aula foi com o professor ensinando que um número complexo é um número na forma (a + bi). De maneira geral, essa é a abordagem inicial que a maioria dos professores adotam em suas primeiras aulas. Isto é lamentável, pois acreditamos que os conteúdos matemáticos podem ser motivados através da utilização de resolução de problemas ou através da história relacionada ao tema ensinado. A falta de preparo profissional de parte dos professores de Matemática pode estar interferindo fortemente para o total desinteresse dos seus alunos. Por falta de preparo profissional entendemos formação acadêmica deficiente ou planejamento didático ruim. Por isso, é importante pensarmos que existe a possibilidade de uma grande parte dos 62% que afirmaram não saber ou como foi a primeira aula, ter tido essa primeira aula da forma usual.

Ainda temos 6% dos entrevistados afirmando que a primeira aula foi o professor ensinando que números complexos são números que usam a letra i, que representa a raiz quadrada de -1. Observe que, nessa pergunta, temos 100% das respostas diferentes do que se espera de um aluno sobre a definição de um número complexo.

Questão 6. O objetivo desta questão é entender, de maneira geral, como é a continuidade do professor de Matemática, após as primeiras aulas de apresentação de um número complexo. Apesar de uma parte lembrar, de forma concreta, até onde seu professor ensinou (operações com complexos ou potenciação), o que se torna alarmante é a grande maioria, aproximadamente 62% dos alunos entrevistados, não lembrar nada do desenvolvimento da matéria, ou até qual parte seu professor conseguiu ensinar. Provavelmente mais uma consequência do método utilizado pela maior parte dos professores para suas aulas de números complexos.

Questão 7. Aproximadamente 1/3 dos alunos entrevistados disseram que concordam que o ENEM não contemple números complexos, pelo fato de acreditarem que grande parte das escolas de Ensino Médio do país não lecione o conteúdo. Podemos então levar em consideração que se fosse cumprida em todas as escolas e a qualidade das aulas sobre complexos fosse melhor, essa parte dos entrevistados concordariam com a presença da matéria na prova.

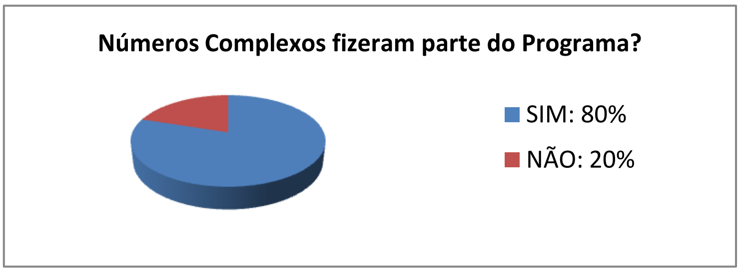
Outra parte, cerca de 10% dos entrevistados, acreditam que não deve ser cobrado porque acham que complexos não têm aplicações cotidianas, e como o ENEM privilegia conteúdos onde possa haver uma contextualização, não tem sentido aparecer na prova.

Por fim, 25% dos entrevistados acham que não deve ser cobrado, mas não definiram um motivo específico, enquanto 22% dos entrevistados acham indiferente e 22% acham que deve ser cobrado, também ser definir um motivo específico. Com esses percentuais, fica a seguinte dúvida: caso o ENEM adotasse o conteúdo, manter a abordagem tradicional, da forma como ainda é praticada nas escolas, traria benefícios aos alunos?

4.2. Alunos que ingressaram nos cursos de Matemática ou Engenharia.

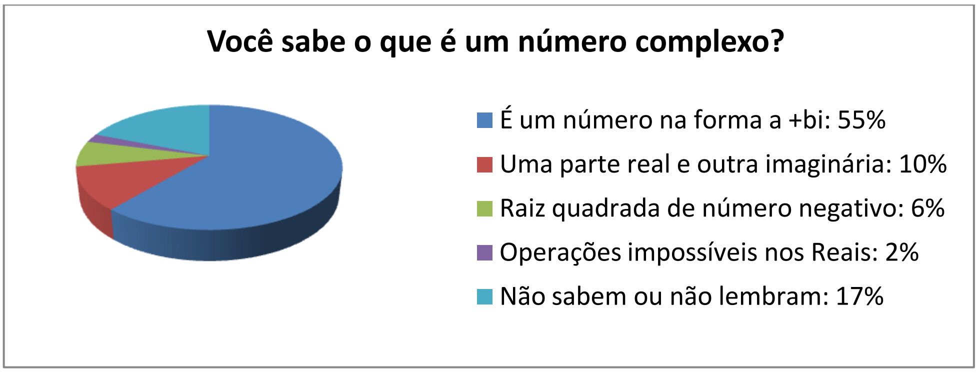
Questão 1: Na sua escola, números complexos fizeram parte do programa?

80% dos alunos entrevistados responderam que números complexos fizeram parte do programa, enquanto 20% responderam que não.



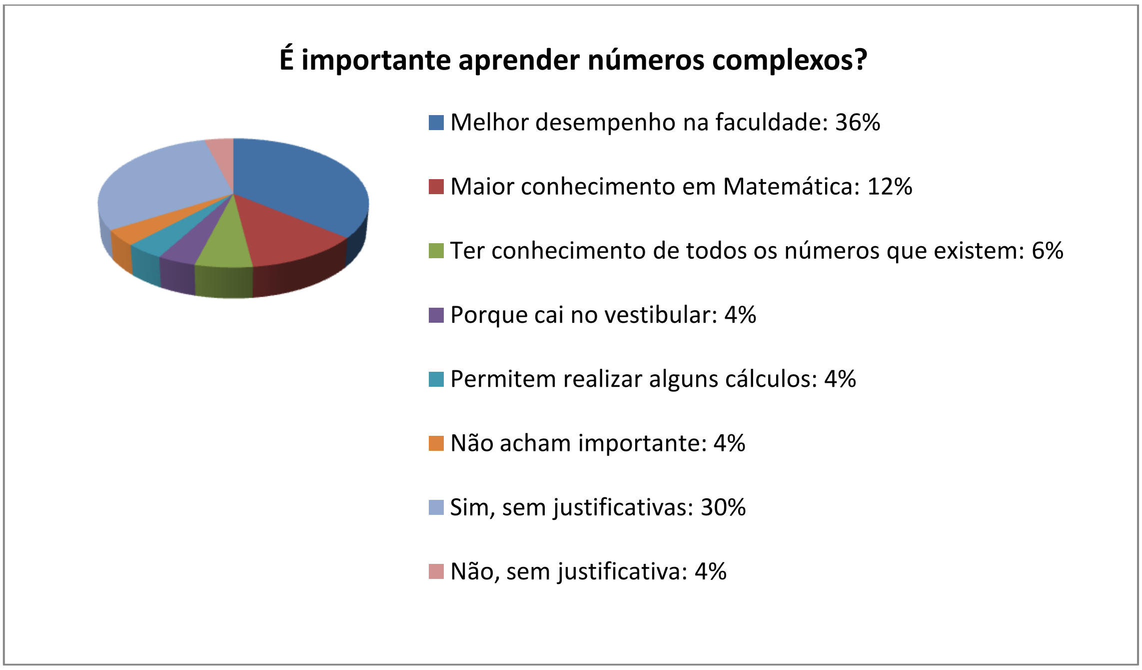
Questão 2: Você sabe o que é um número complexo?

O questionário apresentou 55% dos entrevistados afirmando que um número complexo é um número na forma a + b.i. 10% disseram que um número complexo e um número formado por uma parte real e outra imaginária enquanto 8% disseram que são números onde $i^2 = -1$. 6% afirmaram que números complexos são números para se calcular raiz quadrada de número negativo. Por fim, 2% disseram ser um número que possui mais de uma informação e 2% disseram que e um número capaz de realizar operações impossíveis no conjunto dos reais. Os 17% restantes afirmaram que não sabem ou não lembram o que é um número complexo.



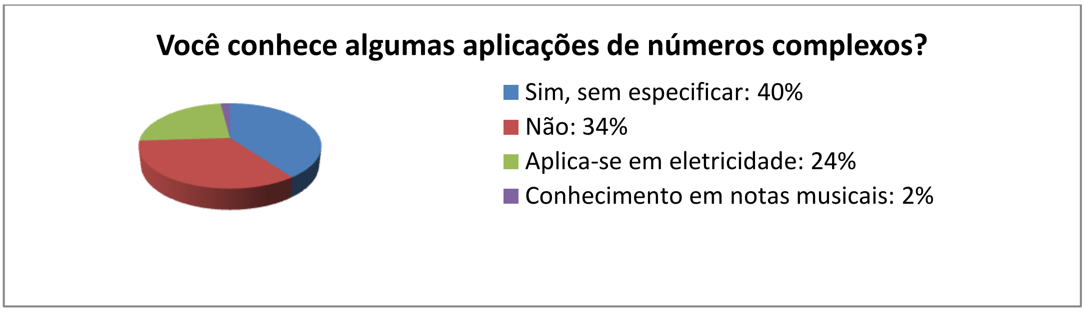
Questão 3: Você acha importante aprender números complexos no Ensino Médio? Por quê?

36% dos entrevistados disseram achar importante aprender números complexos no ensino médio para um melhor desempenho na faculdade. 12% disseram importante para terem mais conhecimento da Matemática, enquanto 6% acham importante para terem mais conhecimento de todos os números que existem. 4% acham importante porque cai nos vestibulares, 4% porque permitem realizar alguns cálculos enquanto 4% disseram não achar importante porque não cai nos vestibulares. Por fim, 30% disseram que sim, enquanto 4% disseram que não, ambos sem um motivo específico.



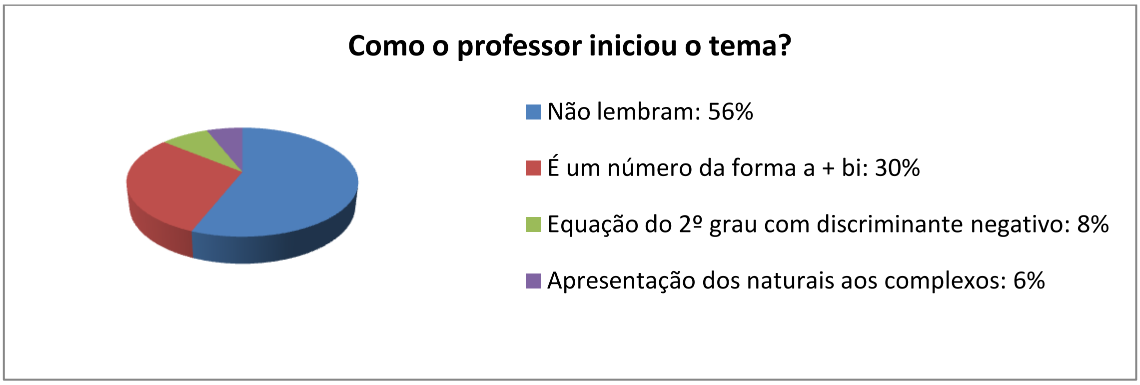
Questão 4: Você conhece algumas aplicações de números complexos?

Tivemos 40% dos entrevistados afirmando saber alguma aplicação de números complexos, enquanto 34% afirmaram não conhecer alguma aplicação. 24% disseram que números complexos se aplicam em eletricidade e 2% em conhecimentos de notas musicais.



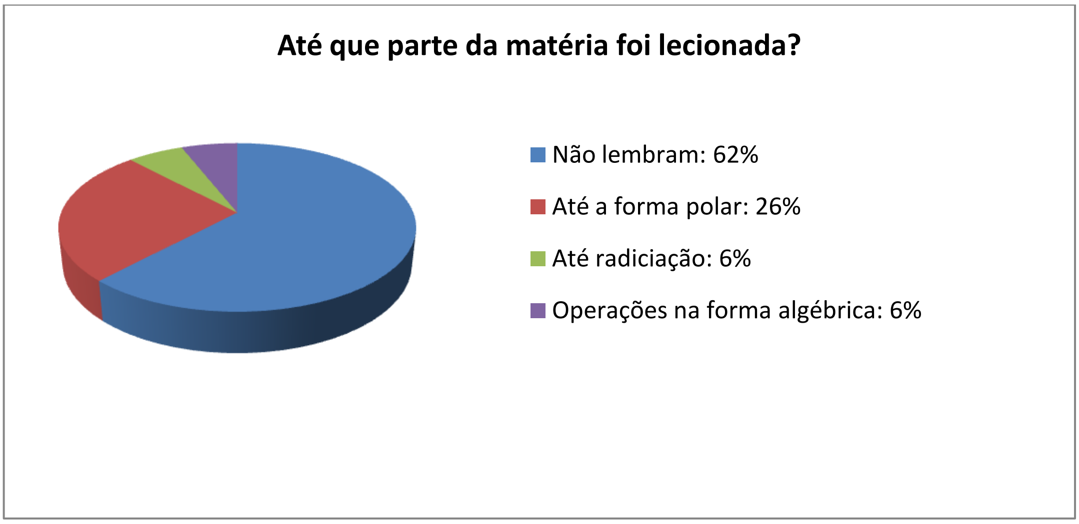
Questão 5: Você lembra de que forma o professor iniciou esse tema com sua turma?

56% disseram não lembrar de como foi a abordagem do professor nas primeiras aulas de números complexos, enquanto 30% afirmaram que o professor iniciou as aulas dizendo que um número complexo é um número na forma a + bi. Tivemos ainda 8% dos entrevistados afirmando que o professor iniciou as aulas apresentando equações do segundo grau com discriminantes negativos, onde $i^2 = -1$, enquanto 6% disseram que o professor iniciou as aulas explicando o desenvolvimento dos conjuntos numéricos que são abordados no ensino médio, até os complexos.



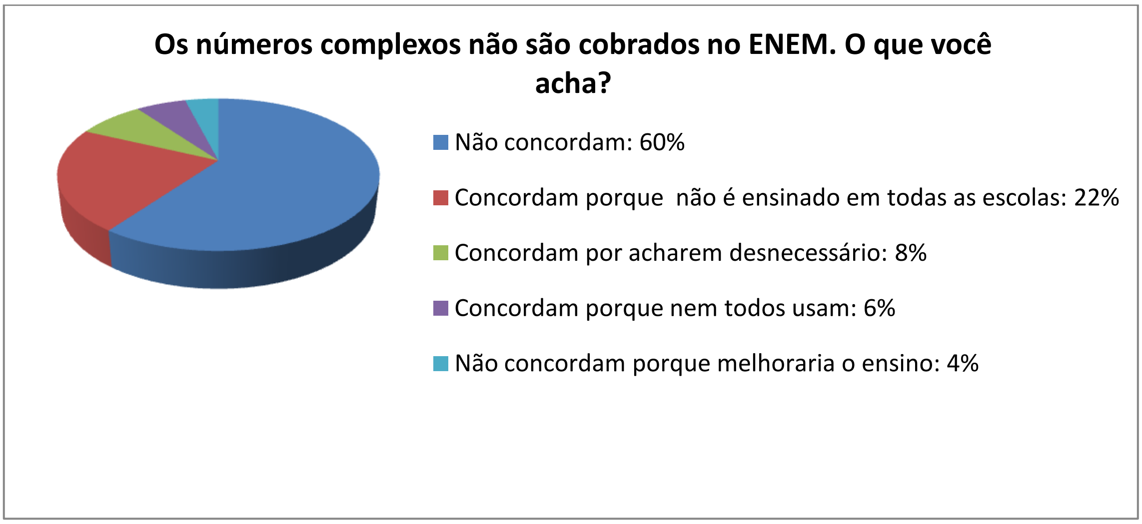
Questão 6: Você lembra ou sabe até qual parte da matéria números complexos foi dado?

62% dos alunos entrevistados disseram que não lembram até que parte da matéria sobre números complexos foi dado, enquanto 26% disseram que números complexos foi dado até a forma polar. 6% disseram que as aulas foram até radiciação, e por fim, 6% disseram que foram até as operações na forma algébrica a + b.i.



Questão 7: O que você acha do ENEM não constar esse tópico?

56% dos entrevistados disseram que não concordam que o ENEM não apresente números complexos em seu programa de prova. 22% concordam, porque números complexos não é ensinado em todas as escolas do país e 8% concordam pois acham desnecessário aprender números complexos no Ensino Médio, enquanto 6% dos entrevistados concordam pois nem todos usarão números complexos em seus cursos no Ensino Superior. Por fim, 4% disseram não concordar, pois se o ENEM cobrasse na sua prova, forçaria as escolas, principalmente as públicas, a melhorar o ensino.



ANÁLISE DOS DADOS:

Questão 1. 80% afirmaram que números complexos fizeram parte do programa na escola que fizeram o Ensino Médio, o que nos dá um universo razoável de alunos para análise.

Questão 2. Tivemos mais tentativas de se explicar o que é um número complexo em relação aos alunos entrevistados que não ingressaram em algum curso superior de exatas. Porém, o número de alunos que afirmaram que um número complexo é um número na forma a + bi, com uma parte real e outra imaginária, também foi alto: 65%. Assim como na Questão 3 da Seção 4.2, respostas afirmando que um número complexo é um número onde $i^2 = -1$ e que são números para se calcular raiz quadrada de números negativos também foram citados. Mais uma vez em 100% dos casos foram apresentadas respostas diferentes do que se espera de um aluno sobre a definição de um número complexo.

Questão 3. Se somarmos todas as porcentagens de respostas que acham que números complexos devem ser ensinados no Ensino Médio, encontraremos 92%, ou seja, apenas 8% acham que não é importante, sendo 4% porque não é cobrado nos vestibulares e 4% sem um motivo específico. Vale destacar que 36% dos entrevistados afirmaram achar importante aprender números complexos no Ensino Médio para proporcionar um melhor desempenho na faculdade, enquanto 12% afirmaram achar importante para terem mais conhecimento, de uma forma geral, sobre Matemática. Esses argumentos citados são coerentes com o público entrevistado, pois se trata de alunos que têm a Matemática como ferramenta de estudo.

Questão 4. Tivemos 64% dos entrevistados afirmando ter algum conhecimento das aplicações de números complexos. Esse número é aproximadamente o dobro do número de alunos entrevistados que afirmaram saber alguma aplicação e que não são dos cursos de Matemática ou Engenharia (33%). Isto parece ser coerente em função dos objetivos dos dois grupos de alunos em questão. Nesse momento, é válido levantar a mesma dúvida apresentada no questionário anterior em relação ao quanto desses 64% acreditam que a aplicação de números complexos está apenas em resolver equações do segundo grau com discriminantes negativos. Porém, desse grupo já se sabe que 24% dos entrevistados conhece que números complexos são aplicados em Física, mais especificamente, em Eletricidade.

Questão 5. Esta questão também apresentou um percentual elevado (56%) do número de alunos que não lembram como foi a abordagem inicial do professor nas primeiras aulas de números complexos no Ensino Médio, assim como na Questão 6, da Seção 4.2. Outro dado parecido é o percentual de alunos (30%) que foram entrevistados e que afirmaram que a abordagem do professor foi ensinando que um número complexo é um número na forma a + bi, com a e b denotando números reais e $i^2 = -1$. Em relação aos dados apresentados, fica a dúvida: Quanto dos 56% dos entrevistados, que afirmaram não lembrar como foi a primeira aula de números complexos, foram apresentados a forma tradicional a + bi ? Ou seja, não é maior o percentual de 30% que afirmaram ter aprendido números complexos da forma usual?

Questão 6. É importante destacar que o percentual apresentado na Questão 7 da Seção 4.2 foi o mesmo encontrado nesse questionário: 62% afirmaram não lembrar até qual parte da matéria os professores ensinaram. Tivemos 32% afirmando que foi ensinado até a forma polar ou radiciação de números complexos, enquanto os 6% restantes afirmam ter tido aula até operações de números complexos na forma algébrica.

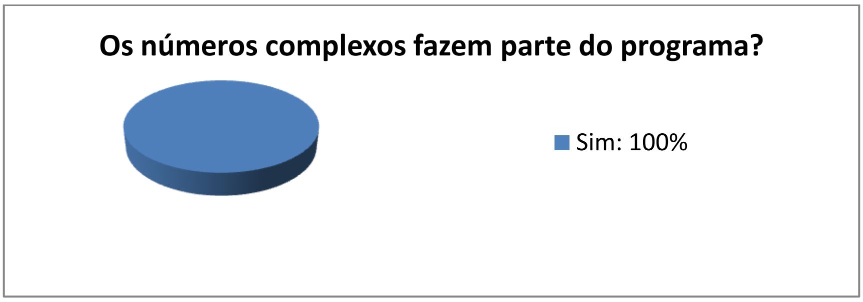
Questão 7. 60% acham que o ENEM deveria cobrar números complexos em sua prova. O que vale ressaltar nesse dado foram os argumentos apresentados. Como esse questionário foi aplicado para alunos da Universidade Federal Fluminense que cursam Matemática ou Engenharia, de maneira resumida, a grande maioria criticou o nível de prova do ENEM, dizendo que se trata de uma prova superficial. Por outro lado, cerca de

28% concordam que não seja cobrado porque não é ensinado em todas as escolas do país ou que nem todos usarão esse conhecimento ao chegar no curso superior. Por fim, 8% concordam porque acham desnecessário aprender números complexos no ensino médio enquanto 6% disseram que não concordam, sem apresentar argumentos.

4.3 Professores

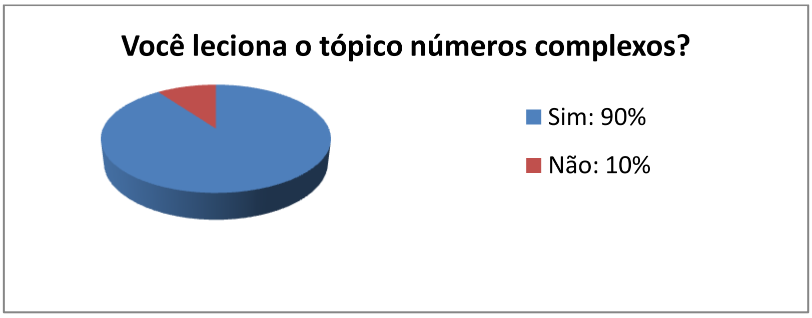
Questão 1: Nas escolas que você leciona, números complexos fazem parte do programa do Ensino Médio?

Tivemos 100% dos professores entrevistados afirmando que números complexos fazem parte dos programas das escolas que lecionam.



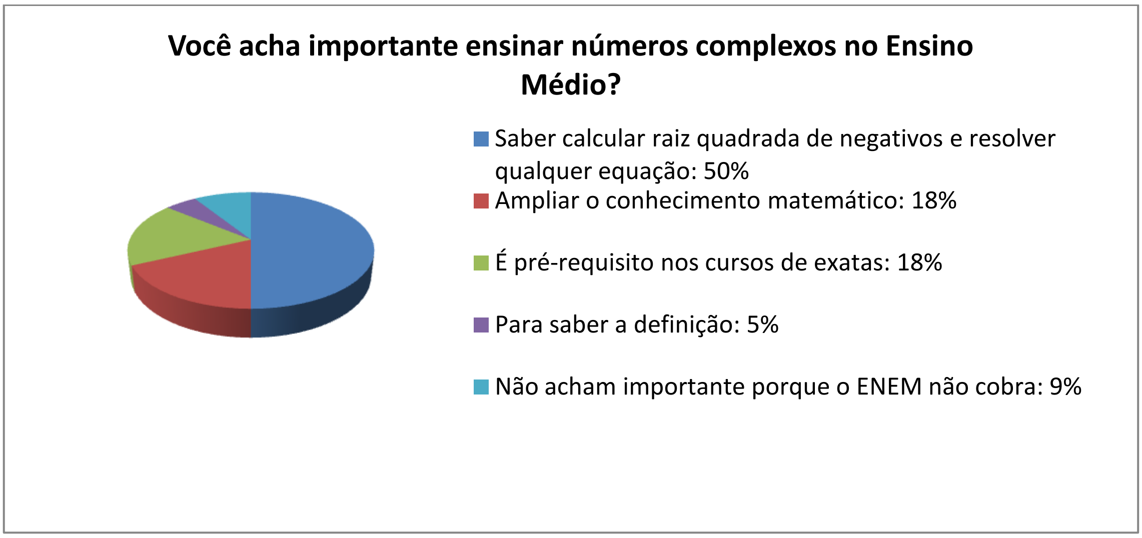
Questão 2: Em caso afirmativo, você chega a lecionar a matéria?

Aproximadamente 90% dos professores entrevistados afirmaram que lecionam a matéria.



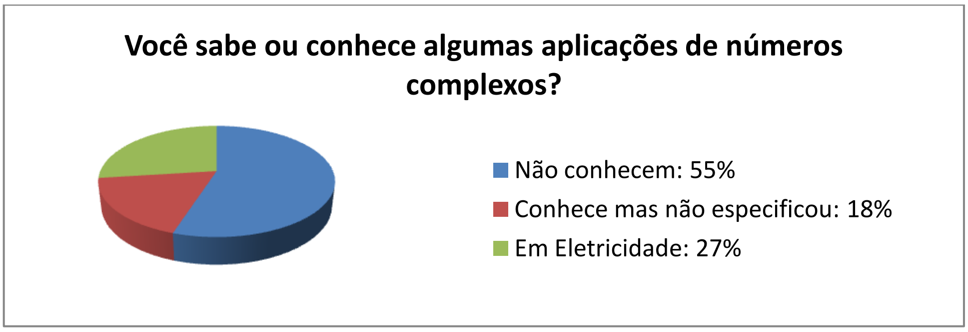
Questão 3: Você acha importante ensinar números complexos no Ensino Médio? Por quê?

Cerca de 50% dos entrevistados disseram achar importante ensinar números complexos no Ensino Médio para que o aluno saiba calcular raiz quadrada de um número negativo ou que o aluno saiba resolver qualquer tipo de equação. 18% disseram achar importante para ampliar o conhecimento matemático do aluno. Outros 18% disseram achar importante porque é pré-requisito nos cursos de Exatas nas universidades e 5% afirmaram achar importante saber pelo menos a definição. Por fim, 9% disseram não achar importante porque o ENEM não vem cobrando este assunto.



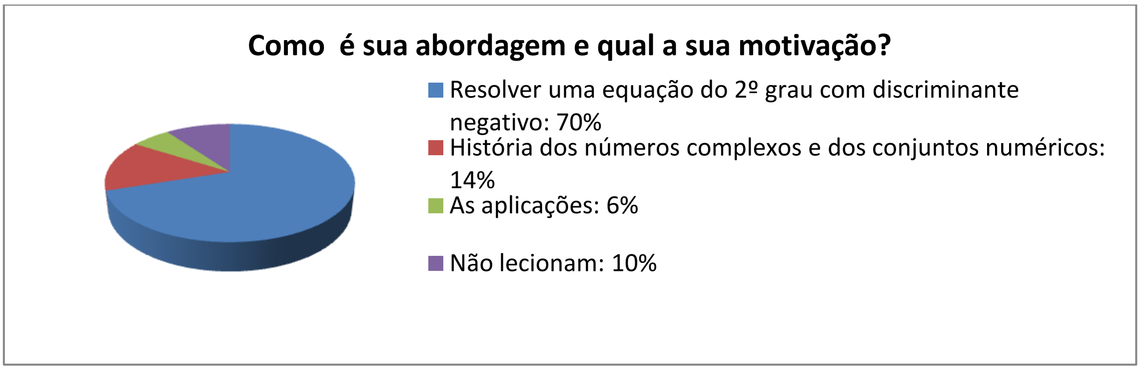
Questão 4: Você sabe ou conhece algumas aplicações de números complexos?

Cerca de 55% dos entrevistados afirmaram não saber ou conhecer alguma aplicação de números complexos. Tivemos 18% dizendo conhecer alguma aplicação, mas sem especificar e 27% disseram que a aplicação que conhecem é na Física, especialmente em Eletricidade.



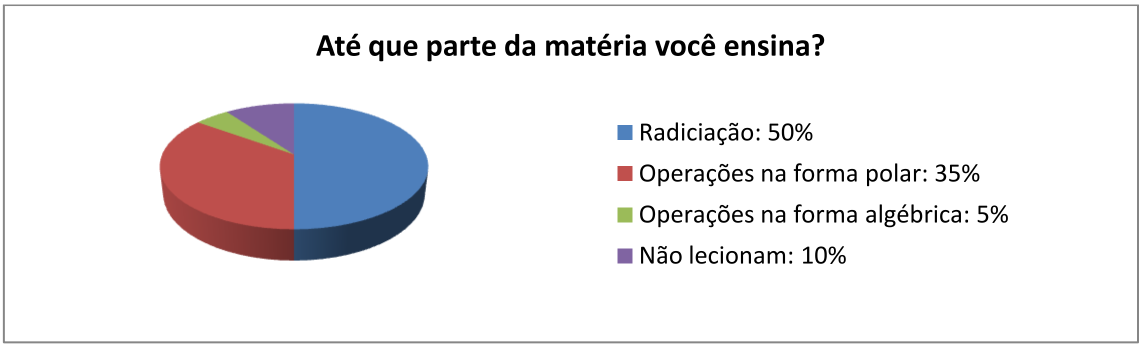
Questão 5: Como é a sua abordagem sobre esse tema com seus alunos? Em outras palavras, na sua primeira aula, qual a motivação inicial para a matéria?

Tivemos 70% dos professores entrevistados afirmando que inicialmente abordam o tema resolvendo uma equação do segundo grau, com discriminante negativo para, em seguida, apresentar um número complexo na forma a + bi, com $i^2 = -1$. 14% afirmaram que iniciam suas aulas falando da história dos números complexos e do desenvolvimento dos conjuntos numéricos. Por fim, 6% dos entrevistados afirmaram que iniciam suas aulas falando das aplicações de números complexos enquanto 10% não lecionam.



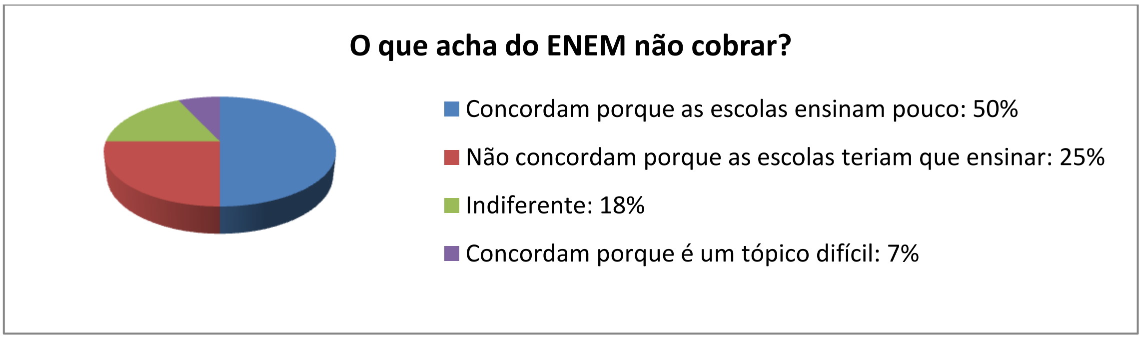
Questão 6: Até qual parte da matéria você ensina números complexos?

50% dos entrevistados afirmaram que ensinam até radiciação de números complexos. 35% afirmaram que ensinam até operações na forma polar e apenas 5% ensinam até operações na forma algébrica. Os outros 10% não lecionam a matéria.



Questão 7: O que você acha do ENEM não constar esse tópico?

50% dos entrevistados concordam que o ENEM não cobre porque acham que a maioria das escolas públicas não ensinam ou quando ensinam, ensinam muito pouco. 25% disseram que não concordam porque acham que se o ENEM cobrasse, as escolas seriam obrigadas a lecionar a matéria. 18% acham indiferente enquanto 7% concordam que o ENEM não cobre o assunto porque acham que a prova foi feita para nivelar o ensino e que números complexos são difíceis para o aluno.



ANÁLISE DOS DADOS:

Questão 1. Nessa questão, todos os professores afirmaram que números complexos constam no programa da escola.

Questão 2. Apenas 10% dos professores afirmaram que não lecionam a matéria, ou seja, temos um universo razoável de professores para análise.

Questão 3. O resultado interessante e importante nessa questão é que ninguém falou sobre as aplicações dos números complexos.

Questão 4. Essa pergunta é fundamental para esse trabalho. A maioria dos professores afirmaram não saber ou conhecer alguma aplicação de números complexos. Acreditamos que as aplicações aqui apresentadas aumentem a qualidade da aula e o estímulo dos alunos.

Questão 5. Acreditamos que seria melhor fazer a abordagem, seja ela qual for, após comentar sobre algumas aplicações dos números complexos.

Questão 6. A grande maioria dos professores, cerca de 85%, afirmaram que ensinam até operações de números complexos na forma polar incluindo radiciação. Podemos levantar o seguinte questionamento: Por que ensinam se não reconhecem a real necessidade?

Questão 7. A maior parte dos professores acham que o ENEM não deve cobrar porque as escolas, principalmente as públicas, não ensinam ou ensinam mal a matéria, e isso prejudicaria o aluno. Fica o questionamento: se o tópico números complexos fosse ensinado de uma forma diferente e se os livros didáticos trouxessem uma melhor abordagem para o assunto além de algumas de suas aplicações, será que esse percentual de 50% diminuiria? Acreditamos que sim!

5. ALGUMAS APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Apesar da existência dos números complexos, eles continuam estranhos para nós, pois têm aparentemente menos relação com o mundo real que os outros números já conhecidos. Um número complexo não serve para medir a quantidade de água num copo nem para contar o número de hemácias no sangue. Porém, os números complexos são a base da Análise Complexa que é uma subárea da Matemática.

A Análise Complexa está atualmente dividida em Análise Complexa de uma variável, Análise Complexa de várias variáveis e Análise Complexa de infinitas variáveis, também conhecida como Holomorfia. Todos estes estudos possuem aplicações na própria Matemática, assim como na Física e nas Engenharias. A grande maioria dessas aplicações são bastante elaboradas, exigindo pré-requisitos que não poderiam ser abordados aqui, lembrando o público alvo ao qual este trabalho se destina. Como, então, aplicar os números complexos de modo que alunos e professores do Ensino Médio possam compreender?

Vamos aplicar a teoria aqui desenvolvida na Trigonometria e na Eletricidade. Na Trigonometria, veremos que as demonstrações de muitas identidades trigonométricas ficam bastante simplificadas quando fazemos uso dos números complexos. Na Eletricidade, faremos uso dos números complexos para apresentar os circuitos elétricos.

Terminamos apresentando, de modo breve, os quatérnios, que formam uma classe particular dos chamados números hipercomplexos.

5.1. Números complexos e Trigonometria

Vamos apresentar as demonstrações de algumas identidades trigonométricas usando números complexos. Comecemos com as identidades do cosseno da soma e da diferença de dois arcos.

5.1.1. cos (a + b) e cos (a - b), onde a e b são números reais.

Sejam a e b números reais. Tome z = cos a + i sen a e w = cos b + i sen b. Pela interpretação geométrica do produto de dois números complexos de módulo 1, obtemos

$$z.w = \cos(a + b) + i.\mathrm{sen}(a + b).$$

Por outro lado, por propriedades das operações de adição e multiplicação dos números complexos, listadas na Proposição 1 (Capítulo 2), temos

$$z.w = (\cos a + i.\mathrm{sen}\, a).(\cos b + i.\mathrm{sen}\, b) =$$

$$= (\cos a.\cos b - \mathrm{sen}\, a.\mathrm{sen}\, b) + i.(\mathrm{sen}\, a.\cos b + \mathrm{sen}\, b.\cos a).$$

Comparando as duas expressões para z.w, obtemos

$$\cos(a + b) = \cos a.\cos b - \mathrm{sen}\, a.\mathrm{sen}\, b.$$

Note que também provamos a seguinte identidade trigonométrica:

$$\mathrm{sen}(a + b) = \mathrm{sen}\, a.\cos b + \mathrm{sen}\, b.\cos a.$$

Como |w| = 1, w ≠ 0. Consideremos, então, $\frac{z}{w}$. Pelo Capítulo 2, temos

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{\cos(-b) + i.\mathrm{sen}(-b)}{1} = \cos(-b) + i.\mathrm{sen}(-b).$$

Assim, pela interpretação geométrica do produto de dois números complexos de módulo 1, obtemos

$$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}} = z.w^{-1} = \cos(a - b) + i.\text{sen}(a - b).$$

Por outro lado, por propriedades listadas na Proposição 1 (Capítulo 2) segue que

$$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}} = z.\frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{z.\overline{w}}{1} = z.\overline{w} =$$

$$= (\cos a + i.\text{sen } a)(\cos(-b) + i.\text{sen}(-b) =$$

$$= (\cos a + i.\text{sen } a)(\cos b - i.\text{sen } b) =$$

$$= (\cos a.\cos b + \text{sen } a.\text{sen } b) + i.(\text{sen } a.\cos b - \text{sen } b.\cos a).$$

Comparando as duas expressões para $\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}}$, obtemos

$$\cos(a - b) = \cos a.\cos b + \text{sen } a.\text{sen } b.$$

Note que também provamos a seguinte identidade trigonométrica:

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen } a.\cos b - \text{sen } b.\cos a.$$

Vamos a seguir deduzir as expressões para cos 2a e sen 2a, $a \in \mathbb{R}$, usando números complexos.

5.1.2. cos 2a e sen 2a, onde a é número real.

Seja $a \in \mathbb{R}$. Tome $z = \cos a + i \text{ sen } a$. Pela interpretação geométrica do produto de dois números complexos de módulo 1, obtemos

$$z^2 = \cos(a + a) + i.\text{sen}(a + a) = \cos 2a + i.\text{sen } 2a.$$

Por outro lado, pela Proposição 1 (Capítulo 2) segue que

$$z^2 = (\cos a + i.\text{sen } a).(\cos a + i.\text{sen } a) =$$

$$= (\cos^2 a - \text{sen}^2 a) + i.(\text{sen } a \cos a + \text{sen } a.\cos a) =$$

$$= (\cos^2 a - \text{sen}^2 a) + i.(2 \text{ sen } a.\cos a).$$

Comparando as duas expressões para z^2, obtemos

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

e

$$\text{sen } 2a = 2.\text{sen } a \cos a.$$

Como sabemos, a lei dos cossenos é uma relação entre os lados e um dos ângulos de um triângulo qualquer. Mais precisamente, em um triângulo ABC, a lei dos cossenos garante que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A},$$

onde a, b e c são os lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. Vejamos a seguir como demonstrar a lei dos cossenos usando números complexos.

5.1.3. Lei dos Cossenos.

Para facilitar a visualização da demonstração usa-se um triângulo obtusângulo fazendo coincidir o vértice A com a origem de um sistema cartesiano e AB com o eixo OX. Sejam z o número complexo representado pelo ponto B e $w = b(\cos \hat{A} + i \operatorname{sen} \hat{A})$ o número complexo representado pelo ponto C, conforme a figura a seguir:

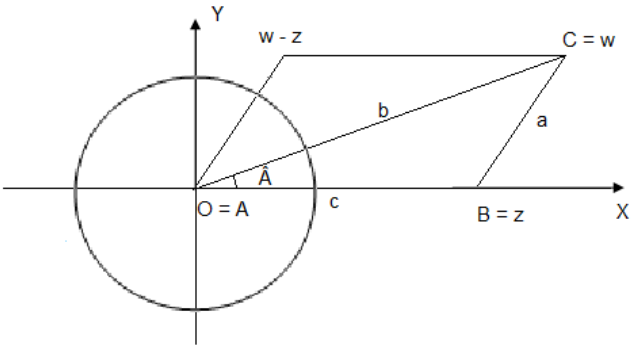


Figura 8

Então,

$$|w - z|^2 = (w - z).(\overline{w - z}) = (w - z).(\overline{w} - \overline{z}) = w.\overline{w} + z.\overline{z} - (z.\overline{w} + w.\overline{z}).$$

Como

$$w.\overline{w} = |w|^2 = b^2, \quad z.\overline{z} = |z|^2 = c^2,$$

$$z.\overline{w} = c(\cos 0° + i.\operatorname{sen} 0°).b[\cos(-\hat{A}) + i.\operatorname{sen}(-\hat{A})] = b.c(\cos \hat{A} - i.\operatorname{sen} \hat{A})$$

e

$$w.\overline{z} = b(\cos \hat{A} + i.\operatorname{sen} \hat{A}).c(\cos 0° + i.\operatorname{sen} 0°) = b.c(\cos \hat{A} + i.\operatorname{sen} \hat{A}),$$

temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}.$$

provando o desejado.

5.2. Números Complexos e Circuitos Elétricos

A primeira aplicação de números complexos à teoria de circuitos elétricos parece ter sido realizada pelo cientista alemão Hermann Von Helmholtz (1821-1894). A aplicação de números complexos na análise de circuitos elétricos de corrente alternada (CA) foi disseminada nos Estados Unidos por Arthur Edwin (1861-1939) e Charles Steinmetz (1865-1923) com auxílio de Julius Berg (1871-1941) no final do século XIX. Em 1823, Edwin adotou o termo *impedância* (inventado pelo matemático inglês Oliver Heaviside (1850 - 1925)) assim como os *números complexos* para os elementos dos circuitos elétricos CA, o que foi seguido por Steinmetz. Desde então, os números complexos são fundamentais para a Engenharia Elétrica.

É importante ressaltar que o objetivo desse trabalho é mostrar apenas a aplicação dos números complexos no estudo da Eletricidade, portanto não nos aprofundaremos nesses conceitos.

Vejamos a seguir a diferença entre corrente contínua e corrente alternada.

Uma corrente elétrica nada mais é que um fluxo de elétrons (partículas que carregam energia) passando por um fio, algo como a água que circula dentro de uma mangueira. Se os elétrons se movimentam num único sentido, essa corrente é chamada de contínua. Se eles mudam o sentido constantemente, estamos falando de uma corrente alternada. Na prática, a diferença entre elas está na capacidade de transmitir energia para locais distantes. A energia que usamos em casa é produzida por alguma usina e precisa percorrer centenas de quilômetros até chegar à tomada. Quando essa energia é transmitida por uma corrente alternada, ela não perde muita força no meio caminho. Já na contínua o desperdício é muito grande. Isso porque a corrente alternada pode, facilmente, ficar com uma voltagem muito mais alta que a contínua, e quanto maior é essa voltagem, mais longe a energia chega sem perder força no trajeto.

Se todos os sistemas de transmissão fossem em corrente contínua, seria preciso uma usina em cada bairro para abastecer as casas com eletricidade. O único problema da alta voltagem transportada pela corrente alternada é que ela poderia provocar choques fatais dentro das residências. Por isso, a alta voltagem é transformada no final em tensões baixas. As mais comuns são as de 127 ou 220 volts. Portanto, a corrente que chega à tomada de sua casa continua sendo alternada, mas com uma voltagem bem mais baixa.

O modo como os elétrons se movem determina o tipo de corrente. É o efeito "mão simples" e "mão dupla". Como vimos, na corrente contínua o fluxo de elétrons passa pelo fio sempre no mesmo sentido. Como não há alternância, essa corrente não é aceita pelos transformadores e, assim não sofre a transformação necessária, para mais ou menos. Resultado: a energia elétrica não pode seguir muito longe. Pilhas e baterias geram corrente contínua, ideal para percorrer circuitos internos de alguns aparelhos elétricos e todos os eletrônicos. Mas ela não serve para transportar energia entre uma usina e uma cidade. Já na corrente alternada, o fluxo de elétrons que carrega a energia elétrica dentro de um fio não segue um sentido único. Ora os elétrons vão para frente, ora para trás, mudando de rota 120 vezes por segundo. Essa variação é fundamental, pois os transformadores que existem numa linha de transmissão só funcionam recebendo esse fluxo de elétrons alternado. Dentro do transformador, a voltagem da energia transmitida é alterada conforme a necessidade, permitindo que ela seja transmitida a longas distâncias, desde uma usina até a sua casa.

Os números complexos têm grande influência na eletricidade. A análise de circuitos de corrente alternada é feita com a ajuda dos números complexos.

Quando a energia elétrica chega a uma residência comum os aparelhos eletrodomésticos usados normalmente consomem uma quantidade real de energia, ou seja, o que foi consumido é marcado no relógio. Entretanto, nas indústrias existem grandes motores e outros equipamentos que precisam de muita energia e normalmente são formados por bobinas que ao funcionarem produzem um campo magnético. Esse campo magnético gera o que chamamos de reatância indutiva que não é real pois não aparecem no consumo de energia e se não for contrabalanceada volta para o sistema de alimentação causando danos às estruturas de alimentação elétrica. Para contrapor a reatância indutiva são introduzidos no circuito os capacitores que geram a reatância capacitiva, responsável por essa contraposição. Essas reatâncias podem ser observadas na Figura 9.

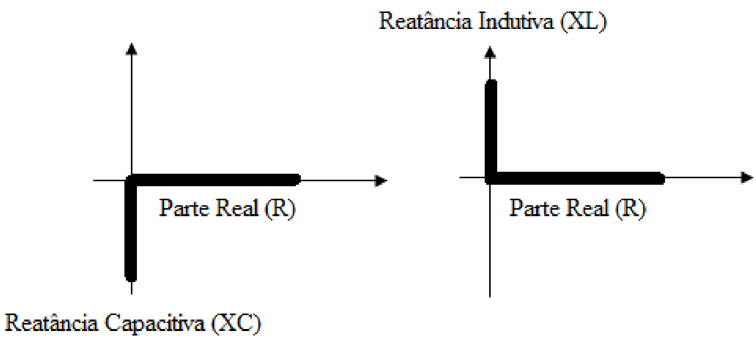


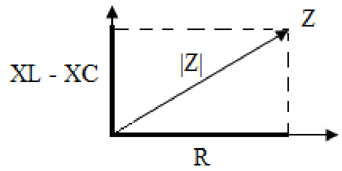
Figura 9

Ângulo de fase

Se tensão e corrente forem, ambas, funções senoidais do tempo, a representação gráfica de ambas , sobre a mesma escala de tempo , mostrará um deslocamento entre elas, salvo se for o caso de uma resistência pura, ou seja, que não haja reatâncias indutivas ou capacitivas. Esse deslocamento é o ângulo de fase e nunca excede 90º ou $\pi/2$ radianos. Por convenção, o ângulo de fase é sempre "o ângulo que a corrente i faz com a tensão v".

A impedância elétrica de um elemento, de um ramo ou de um circuito completo é a razão entre a tensão (v) e a corrente (i), onde tensão é a força que impulsiona os elétrons e corrente é o movimento ordenado dos elétrons.

A impedância é o módulo do número complexo $Z = R + jX$, ou na forma polar $Z = |Z|.(\cos\Phi + j\,\text{sen}\Phi)$, onde $j^2 = -1$, Φ é o ângulo (argumento) de defasagem entre a tensão aplicada e a corrente no circuito, R é a resistência e X (XL - XC) é a resultante das reatâncias indutivas e capacitivas do circuito. Os engenheiros usam j no lugar do i para evitar confusão com o i de corrente.



5.3 Os quatérnios

Na Geometria Analítica, o conjunto $\mathbb{R}^2$ apresenta duas operações que o torna um espaço vetorial[2]. Estas operações são a adição e a multiplicação por escalar dadas por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

e

$$k.(a, b) = (k.a, k.b); k \in \mathbb{R}, (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Esta estrutura algébrica[3] não permite que tenhamos um multiplicação e uma divisão entre os elementos de $\mathbb{R}^2$. Como vimos $\mathbb{C}$ é, como conjunto, o $\mathbb{R}^2$. Neste contexto, podemos multiplicar e dividir elementos de $\mathbb{R}^2$. Uma pergunta natural que surge é se podemos, em $\mathbb{R}^3$, obter uma estrutura algébrica análoga. Mais precisamente, se podemos definir em $\mathbb{R}^3$ uma estrutura de corpo. Note que isto equivale a perguntar se existem outros "números" (números "super complexos", "hiper complexos, "ultra complexos", como queiram!) tais que estes possam ser representados por pontos no espaço tridimensional.

Vários matemáticos tentaram responder a esta pergunta, dentre eles Argand e Gauss. Embora a definição da adição de ternos ordenados (x, y, z) de números reais fosse clara para eles, o mesmo não era com a multiplicação. Nesta definição é que as muitas tentativas falharam. Para se generalizar os números complexos, o corpo $\mathbb{R}^2$, seria necessário definir em $\mathbb{R}^3$ uma multiplicação em que fossem satisfeitas as propriedades de (e) até (i) da proposição 1 (Capítulo 2).

Existem evidências históricas de que , em torno de 1830, William Rowan Hamilton (1805 - 1865) procurava uma tal definição. Após várias tentativas, ficou claro para Hamilton que alguma daquelas propriedades não deveria ser satisfeita. Somente em 1843 que Hamilton descobriu como uma estrutura algébrica coerente poderia ser obtida, mas para isso abriu mão de uma das propriedades citadas. De fato, ele conseguiu a estrutura algébrica desejada abrindo mão de apenas uma propriedade: a comutatividade da multiplicação.

---

[2] Os espaços vetoriais são estudados em Álgebra Linear. Para os leitores interessados em ler sobre o assunto, indicamos [10].

[3] Para os interessados em ler sobre estruturas algébricas, indicamos [11].

A solução de Hamilton não foi por ternos ordenados de números reais, mas sim por objetos da forma (x, y, z, w), com x, y, z e w reais, ou seja, elementos de $\mathbb{R}^4$. Tal estrutura algébrica recebeu o nome de quatérnios.

Sejam $q_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ e $q_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)$, onde $x_1, y_1, z_1, w_1, x_2, y_2, z_2, w_2$ são números reais. Defini-se a soma de q_1 e q_2 denotada $q_1 + q_2$, como

$$q_1 + q_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2).$$

E defini-se a multiplicação de q_1 e q_2, denotada por $q_1 . q_2$, como

$$q_1 . q_2 = (x_1.x_2 - y_1.y_2 - z_1.z_2 - w_1.w_2,$$

$$x_1.y_2 + y_1.x_2 + z_1.w_2 - w_1.z_2,$$

$$x_1.z_2 + z_1.x_2 + w_1.y_2 - y_1.w_2,$$

$$x_1.w_2 + w_1.x_2 + y_1.z_2 - z_1.y_2).$$

A adição satisfaz as propriedades de (a) até (d) da Proposição 1. E a multiplicação, de expressão complicada, satisfaz todas as demais propriedades, exceto a propriedade (f). Ou seja, a multiplicação não é comutativa. Como exemplo, tome $q_1 = (0, 1, 0, 0)$ e $q_2 = (0, 0, 1, 0)$. Temos $q_1 . q_2 = (0, 0, 0, 1)$ e $q_2 . q_1 = (0, 0, 0, -1)$. Note que o elemento neutro da adição é (0, 0, 0, 0) e o elemento neutro da multiplicação é (1, 0, 0, 0). O oposto do quatérnio q = (x, y, z, w) é dado por -q = (-x, -y, -z, -w) e se q é diferente de zero, o inverso de q é dado por $q^{-1} = \frac{(x,-y,-z,-w)}{x^2+y^2+z^2+w^2}$.

Embora a multiplicação não seja comutativa, para efeitos de cálculo, isto não representa um problema, desde que existam algumas regras bem definidas. Para mostrarmos que tais regras existem, vamos introduzir as seguintes notações:

$$i = (0, 1, 0, 0),\ j = (0, 0, 1, 0),\ k = (0, 0, 0, 1)$$

e

$$t = (t, 0, 0, 0), \text{ para todo número real } t.$$

Lembrando que o elemento neutro da multiplicação é (1, 0, 0, 0), podemos escrever o quatérnio q = (x, y, z, w) na forma

$$q = x + yi + zj + wk. \qquad (1)$$

Lembram da forma algébrica de um número complexo (x, y)? A expressão em (1) é a forma algébrica de q. De fato, os números complexos podem ser identificados como os quatérnios da forma (x, y, 0, 0) = x + yi. Vamos, então, às regras que vão, junto com as propriedades da multiplicação, nos ajudar a multiplicar quatérnios sem nos preocuparmos em memorizar a definição de multiplicação. Ora,

$$i^2 = (0, 1, 0, 0). (0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 0, 0),$$

$$j^2 = (0, 0, 1, 0).\ (0, 0, 1, 0) = (-1, 0, 0, 0),$$

$$k^2 = (0, 0, 0, 1).\ (0, 0, 0, 1) = (-1, 0, 0, 0)$$

$$ij = -ji = k,$$

$$jk = -kj = i,$$

$$ki = -ik = j.$$

Como (-1, 0, 0, 0) = -1, vemos que os quatérnios têm três unidades imaginárias i, j e k.

Voltando ao problema de encontrar números relacionados ao espaço da mesma maneira que os números complexos estão relacionados com o plano, no caso dos quatérnios, temos que separar um quatérnio no que chamamos de parte real e parte pura. Dado um quatérnio $q = x + yi + zj + wk$ dizemos que x, usualmente denotado por Re(q), é sua parte real e dizemos que $yi + zj + wk$, usualmente denotado por Pu(q), é sua parte pura. A interpretação em termos do $\mathbb{R}^3$ se faz identificando a parte pura de um quatérnio com pontos de espaço. Nesse caso, i, j e k representam os vetores unitários (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (1, 0, 0), respectivamente.

Uma pergunta que o leitor pode estar se fazendo é por quê Hamilton não considerou os números da forma $x + yi + zj$ em sua procura de uma versão tridimensional dos números complexos, isto é, de um corpo com duas unidades imaginárias. O fato é que, da maneira como a multiplicação foi definida, para elementos da forma $x + yi + zj$ há a possibilidade da existência dos chamados divisores de zero ou, equivalentemente, a possibilidade de termos produtos nulos sem que nenhum dos fatores seja nulo. No caso dos quatérnios, temos que todos quatérnios não nulos têm inverso multiplicativo e, portanto, não existem divisores de zero entre os quatérnios. De fato, a preocupação de Hamilton era ter de abrir mão de propriedades da operação da multiplicação de um corpo. Com os quatérnios, a comutatividade é a única propriedade de corpo que a multiplicação definida deixa de ter.Os quatérnios formam uma classe particular dos números chamados hipercomplexos. Para os interessados em ler mais sobre o assunto, indicamos [12].

Terminamos observando que os quatérnios são muito usados em Computação Gráfica. Aliás o desenvolvimento dos tão desejados "joguinhos de computador em 3D" se deu graças ao uso dos quatérnios como um método para fazer a rotação de um corpo no espaço tridimensional. O método dado pelo teorema de rotação de Euler[4] consiste em usar as matrizes de rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno dos eixos coordenados. Essas matrizes são dadas por $R_x(\psi)$, $R_y(\theta)$ e $R_z(\phi)$, onde

$$R_x(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi \\ 0 & \operatorname{sen}\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

[4] O teorema de rotação de Euler pode ser enunciado da seguinte forma: Qualquer movimento de um corpo rígido de modo que um ponto do corpo permanece fixo é equivalente a uma rotação em torno de algum eixo que passa pelo ponto fixo.

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo ψ, θ e ϕ os ângulos de rotação em torno dos eixos x, y, e z, respectivamente. O teorema de rotação de Euler garante que as matrizes de rotação acima descritas podem ser multiplicadas em sequência para descrever qualquer rotação em $\mathbb{R}^3$. Uma tal sequência é chamada uma sequência de ângulos de Euler.

Embora o método de Euler seja de fácil representação matemática, existem sequências de ângulos de Euler em que pelo menos um ponto perde, o que se chama, grau de liberdade ou uma dimensão. Esse problema ocorre quando dois eixos coordenados se alinham um com o outro. No caso do uso do método dos quatérnios este problema não ocorre, pois com os quatérnios podemos fazer rotações em torno de um eixo arbitrário. Existindo apenas um eixo de rotação, e não uma sequência deles, os graus de liberdade[5] não se perdem.

[5] Para os leitores interessados em ler sobre o assunto indicamos [9].

6. Considerações finais

Esperamos com esse trabalho ter contribuído para a melhoria das aulas sobre números complexos a ponto de não mais precisarmos responder a pergunta: por que estou estudando isso?

Acreditamos que a pesquisa da parte histórica encontrada no Capítulo 2 tenha corrigido a falsa ideia de que os números complexos foram desenvolvidos para determinar raízes não reais de uma equação quadrática, ideia essa compartilhada por alguns professores e alunos do Ensino Médio. Entendemos que o modo rigoroso como foi apresentado no Capítulo 3, a partir de pares ordenados, dê oportunidade aos alunos e, principalmente, aos professores, de compreenderem um novo corpo diferente do seu conhecido corpo real. É importante realçar que pesquisamos alunos e professores do Ensino Médio, como pode ser visto no Capítulo 4, para concluirmos essas falsas ideias e conceitos errados.

Por fim, acreditamos que motivação é uma palavra chave para a melhor relação Ensino-Aprendizagem. Por isso apresentamos, no Capítulo 5, algumas aplicações dos números complexos na própria Matemática, na Engenharia Elétrica e na Computação Gráfica.

7. Bibliografia

[1] ABREU, Estela dos Santos; TEIXEIRA, José Carlos Abreu. *Apresentação de trabalhos monográficos de conclusão de curso.* 8 ed. Niterói: EdUFF, 2005.

[2] BOYER, Carl. *História da Matemática*. 2 ed.São Paulo: Edgard Blucher, 2003.

[3] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria / Números complexos.* 3 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).

[4] EDMINISTER, Joseph A. *Circuitos Elétricos*. *Reedição da edição clássica: resumo da teoria*, *350 problemas resolvidos*, *493 problemas propostos*. Tradução: Sebastião Carlos Feital; revisão e adaptação Antonio Pertence Júnior. 2. ed. São Paulo: Makron, McGraw-Hill, 1991. (Coleção Schaum).

[5] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* 2 ed. São Paulo: UNICAMP, 2002.

[6] FERNANDEZ, Cecília de Souza; BERNARDES Jr, Nilson da Costa. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa.* 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008. (Coleção Textos Universitários).

[7] FERNANDEZ, Cecília de Souza; SANTOS, Raphael Antunes dos. *O Teorema Fundamental da Álgebra.* V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. UFPB, 2010.

[8] FERNANDEZ, Cecília de Souza; SANTOS, Rafael Antunes dos. *Uma nota sobre o Teorema Fundamental da Álgebra.* Revista Matemática Universitária, nº 45. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.

[9] GRAVELLE, Matt. *Quaternions and their applications to rotation in 3D space.* 2006. www.moris.umn.edu/academi/math/Ma 4901/gravelle.pdf.

[10] HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção Profmat).

[11] HEFEZ, Abramo; *Curso de Álgebra.* Volume 1. 4ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[12] KLEIN, Félix. *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior - Volume 1 - 1ª Parte: Aritmética.* Tradução: Tiago Pedro e Suzana Metello de Nápoles. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

[13] PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: matemática/Ministério da Educação. Secretaria da Educação fundamental. 3. ed. Brasília: A Secretaria, 2001.

[14] http://www.igm.mat.br

[15]http://www.ltodi.est.ips.pt/mmoreira/PUBLICACOES_P/TemaIII_Trigonometria_Numeros_Complexos.pdf.

[16] http://www.mundoestranho.abril.com.br

[17] http://www.profezequias.net/complexo.html

[18] http://www.webartigos.com/artigos/as-dificuldades-no-ensino-de-matematica/5488/