



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



# CEVIANAS E PONTOS ASSOCIADOS A UM TRIÂNGULO: UMA ABORDAGEM COM INTERFACE NO ENSINO BÁSICO †

por

**Genaldo Oliveira de Araújo**

sob orientação da

**Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente  
do Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB,  
como requisito parcial para obtenção do  
título de Mestre em Matemática.

Agosto/2014

João Pessoa - PB

---

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

# **Cevianas e pontos associados a um triângulo: uma abordagem com interface no ensino básico**

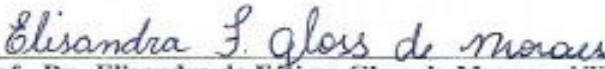
por

**Genaldo Oliveira de Araújo**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:



Prof. Dr. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes - UFPB  
(Orientadora)



Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera - UFPB



Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque - UFPB

Agosto/2014

# Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e por permitir mais essa importante conquista.

A minha família, especialmente a minha mãe, in memoriam, Maria José Ferreira de Araújo, que me agregou valores básicos ao longo da vida para que eu pudesse colher os frutos que eu estou colhendo agora.

Agradeço a minha namorada Wdineia Fernandes, que sempre esteve presente nessa jornada me apoiando e incentivando nos momentos mais difíceis.

Aos idealizadores do PROFMAT, pela sua proposta de imensa valia na formação continuada de professores de matemática assim como eu.

Agradeço a todos meus professores, por compartilharem comigo suas experiências e conhecimentos, e de forma especial a minha orientadora Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes.

Em fim, agradeço as pessoas que colaboraram de forma direta ou indireta para a realização desse trabalho.

À Capes pelo apoio financeiro.

# Dedicatória

*Dedico este trabalho a minha mãe  
Maria José Ferreira de Araújo, in  
memoriam.*

# Resumo

Desenvolvemos esse trabalho no sentido de contribuir de forma positiva para o ensino de geometria na educação básica, pois embora esse ramo da matemática seja muito importante na formação dos alunos ele é muito desprivilegiado nessa fase de ensino. Por meio dele, mencionamos alguns fatores que podem influenciar o quadro em que se encontra o ensino de geometria, visando servir de reflexão e um possível reposicionamento frente à situação. Fizemos também uma singela abordagem sobre o raciocínio dedutivo e o método axiomático no ensino básico, levando em consideração a importância desse método no estudo de geometria nessa fase. No sentido de desenvolver habilidade em geometria e ao mesmo tempo dar consistência a determinados conteúdos no ensino básico, mais precisamente sobre cevianas e pontos associados a um triângulo, criamos um modelo axiomático, através do qual, abordamos de maneira simples alguns teoremas e definições clássicas da Geometria Euclidiana Plana, sendo uns deles comuns no ensino básico, e outros, nem tanto. São eles: Teorema de Menelaus, Teorema de Ceva, Teorema de Stewart, os quatro pontos notáveis do triângulo (ortocentro, circuncentro, incentro e o baricentro), Reta de Euler, Circunferência dos Nove Pontos, Pontos de Euler, Ponto de Gergonne, Ponto de Nagel, os Pontos de Feuerbach, bem como introduziremos a definição de pontos isotômicos, retas isotômicas e pontos recíprocos. Nos teoremas, utilizamos

apenas métodos elementares da Geometria Sintética, constituindo-se um assunto de fácil compreensão que pode ser bem explorado no ensino básico. Acreditamos que os enfoques da estrutura do trabalho possam servir de motivação para alunos e professores do ensino básico que busquem aprimorar seus conhecimentos em geometria.

Palavras-chave: ensino da geometria, cevianas, pontos e triângulos

# Abstract

We have developed this work to contribute positively to teaching of geometry in basic education form, because although this branch of mathematics is very important in the training of students is very underprivileged in this phase of education. Through him, we mentioned some factors that can influence in the context in which it is teaching geometry, aiming to serve as a reflection and a possible repositioning apposite situation. We also made a simple approach to deductive and reasoning and the axiomatic method primary education, taking into account the importance of this method in the study of geometry that stage. To develop skills in geometry while giving consistency to certain content in basic education, and more precisely on cevianas associated with a triangle, we have created an axiomatic model, through we approach simply some classic definitions and theorems of Euclidean Geometry, some of them being common in primary education, and others, not so much. So they are: Menelaus's Theorem, Ceva's Theorem, Stewars's Theorem, the four notable points of the triangle (orthocenter, circumcenter, incenter and the centroid), Euler Line, Nine - Point circle, Euler Point, Gergonne Point, Nagel Point, Feuerbach Point, as well as introduce the definition of isotomic points, isotomic straights and reciprocal points. In the theorems, we use only elementary methods of Synthetic Geometry, becoming a subject easy to understand that can be exploited in basic education. We

believe the focus of the structure of this work can serve as a motivation for students and primary school teachers seeking to improve their knowledge of geometry.

Keywords: geometry teaching; ceviana, points and triangles.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Algumas observações sobre o ensino da geometria na educação básica</b>	<b>5</b>
1.1 A relação do professor diante do quadro atual do ensino de geometria	5
1.2 O método axiomático e raciocínio dedutivo no ensino básico . . . . .	8
<b>2 Teoremas de Menelaus, Ceva e Stewart</b>	<b>16</b>
2.1 Teorema de Menelaus . . . . .	17
2.2 Teorema de Ceva . . . . .	22
2.3 Teorema de Stewart . . . . .	25
2.4 Aplicações dos teoremas apresentados nesse capítulo . . . . .	29
2.4.1 O Teorema de Stewart e as medidas das medianas de um triângulo . . . . .	30
2.4.2 Baricentro e o Teorema de Ceva . . . . .	31
2.4.3 A razão 2:1 de uma mediana e o Teorema de Menelaus . . . . .	32
2.4.4 Medidas das bissetrizes internas de um triângulo e o Teorema de Stewart . . . . .	33
2.4.5 O incentro e o Teorema de Ceva . . . . .	36
<b>3 Cevianas e pontos notáveis básicos associados a um triângulo</b>	<b>40</b>

3.1	Definições e proposições inerentes aos pontos notáveis de um triângulo	41
3.2	Os pontos notáveis básicos . . . . .	43
3.3	Explorando as definições e propriedades das Seções 3.1 e 3.2 . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Teoremas clássicos não tão comuns associados a pontos e cevianas de um triângulo</b>	<b>68</b>
4.1	Introdução . . . . .	68
4.2	A reta de Euler . . . . .	69
4.3	Circunferência de nove pontos . . . . .	73
4.4	Ponto de Gergonne . . . . .	77
4.5	Circunferências Exinscritas a um Triângulo e o Ponto de Nagel . . . . .	79
4.6	Ponto de Feuerbach . . . . .	85
4.7	Pontos isotômicos e retas isotômicas em um triângulo . . . . .	86
<b>A</b>	<b>Construções</b>	<b>89</b>
A.1	Construção 1 . . . . .	89
A.2	Construção 2 . . . . .	90
A.3	Construção 3 . . . . .	91
A.4	Construção 4 . . . . .	93
A.5	Construção 5 . . . . .	94
A.6	Construção 6 . . . . .	96
A.7	Construção 7 . . . . .	98
A.8	Construção 8 . . . . .	100
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>104</b>

# Introdução

Levando em consideração a publicação de alguns trabalhos ligados ao ensino de geometria no ensino básico ([7], [12], [13], [15]) e a minha experiência como professor nessa área, é possível perceber que tal ensino, de modo geral, é bastante problemático. Esses problemas são diversos e não são simples de serem resolvidos. Entre vários motivos que contribuem para os mesmos, podemos citar como exemplo a fragilidade das políticas públicas voltadas para a educação, passando para casos mais específicos como a formação do professor, a formação continuada e até mesmo os livros didáticos adotados pelas escolas.

É comum encontrar alunos que terminam o Ensino Médio com pouca formação em geometria. Isto é muito prejudicial, pois o pensamento geométrico passa pela interpretação de registros gráficos, pela resolução de problemas, demonstrações que validam o conhecimento e valorizam a criatividade e pelo raciocínio dedutivo. Essas situações vivenciadas pelos alunos compreendem atividades importantíssimas para o aprendizado e o amadurecimento intelectual.

Sobre os livros didáticos de matemática do ensino básico, pesquisas revelam que existe um conjunto estável de conteúdos de geometria que figuram em quase todos eles nos últimos tempos. Essa tradição pode ser prejudicial, pois existem assuntos que são julgados importantes no estudo da mesma e geralmente ficam fora desse bloco. Sobre os assuntos ligados ao tema do nosso trabalho, pontos e cevianas associadas a um triângulo (observando livros aprovados por [4]), percebe-

se que geralmente eles fazem parte desse conjunto; porém, são abordados de maneira muito limitada e superficial, deixando muito a desejar. Alguns teoremas e conceitos importantes que poderiam ser relacionados a esses assuntos não são mencionados em tais livros e nem, até mesmo pelos professores. É evidente que o mesmo pode acontecer com tantos outros conteúdos; porém, esse tema nos chamou a atenção em virtude de suas implicações a vários outros conceitos associados a um triângulo.

Por outro lado, sabemos que a geometria já evoluiu muito desde o período grego até os dias atuais. Hoje, existem várias geometrias, as denominadas não euclidianas, a título de exemplo, podemos citar a Geometria Hiperbólica, a qual foi descoberta meio às tentativas de provar o quinto postulado de Euclides. Ao mesmo tempo em que avanços acontecem nessa área, até de forma paradoxal, mesmo com a sua aparente simplicidade, constata-se que muito precisa ser feito para que a geometria euclidiana esteja bem trabalhada no ensino básico. Nessa fase, é importante estudá-la, pois seus conceitos são bases sobre as quais se constrói outras teorias na área de geometria e em outras áreas; não se consegue compreender conceitos mais avançados e complexos ou fazer demonstrações com grau de dificuldade mais elevados se os conceitos básicos não estiverem consolidados.

Com o intuito de contribuir de forma positiva para as referidas preocupações, estruturamos esse trabalho de modo a ser útil a docentes e alunos do ensino básico interessados em estudar a Geometria, observando que o mesmo foi dividido em quatro capítulos.

No Capítulo 1, levantamos alguns pontos frágeis da relação entre o professor de matemática e o quadro atual do ensino de geometria, pois entendemos que a melhoria do ensino da citada no nível básico depende muito do professor. Tais observações foram feitas não no sentido de criticar, mas, sim, a fim de que as mesmas possam servir de reflexão para um possível reposicionamento diante do quadro em que se encontra o ensino de geometria. Nesse mesmo capítulo, fizemos uma breve

abordagem sobre o método axiomático e o raciocínio dedutivo no ensino básico. Apesar de esse método constituir os pilares da matemática, ele é pouco explorado no ensino básico. É comum abordar assuntos de matemática em sala de aula como sendo algo que surgiu do nada ou colocar os alunos como meros espectadores diante de certos fatos. “É preciso ir além do ato de observar e aceitar que certos fatos valem, é preciso demonstrá-los para acreditar neles” ([8], p.188 ).

No Capítulo 2, apresentamos três teoremas clássicos que, apesar de sua importância para resolver problemas envolvendo comprimentos de cevianas, colinearidade entre pontos e concorrência de cevianas, são pouco difundidos no ensino básico e muito menos nos livros didáticos referentes a essa etapa de ensino. São eles, o Teorema de Stewart, o Teorema de Menelaus e o Teorema de Ceva. Na primeira parte desse capítulo, fizemos a demonstração dos referidos teoremas, na segunda, fizemos algumas aplicações objetivando mostrar a importância desses teoremas diante da obtenção de certos resultados envolvendo o comprimento de algumas cevianas e na demonstração de alguns teoremas.

No Capítulo 3, abordamos os conhecidos pontos notáveis do triângulo, o incentro, o circuncentro, o ortocentro e o baricentro. Como estamos falando de pontos e cevianas associadas a um triângulo, estes não poderiam deixar de ser mencionados no nosso trabalho. Mesmo porque os teoremas que os caracterizam, que são bem conhecidos, serviram de base para a obtenção de vários resultados ligados a um triângulo, como também serviram para explorarmos algumas de suas propriedades intrínsecas.

No Capítulo 4, o último, tratamos de alguns conceitos, teoremas, cevianas e pontos clássicos associados a um triângulo que não são tão comuns quanto os quatro pontos notáveis e as três cevianas que foram mencionados anteriormente. Na verdade estamos entrando em universo de estudo muito amplo e vamos nos limitar a trabalhar apenas alguns desses conceitos, como a reta de Euler, a Circunferência

dos Nove Pontos, os Pontos de Euler, o Ponto de Gergonne, o Ponto de Nagel, os Pontos de Feuerbach, bem como introduzirmos a definição de pontos isotômicos, retas isotômicas e pontos recíprocos.

# Capítulo 1

## Algumas observações sobre o ensino da geometria na educação básica

### 1.1 A relação do professor diante do quadro atual do ensino de geometria

É comum aplicarmos conceitos geométricos no nosso dia-a-dia. Estes estão presentes em quase tudo que nos rodeia, naquilo que vemos, tocamos ou produzimos, sem falar nas inúmeras aplicações em outras áreas do conhecimento. Diante de tamanha importância, o ensino da geometria deveria ser tratado de forma consistente no currículo do ensino básico, mas, no Brasil, este conhecimento sempre enfrentou problemas. Observa-se que a valorização desse ramo tão importante da matemática, enquanto ensino-aprendizagem, parece ter sido esquecido ao longo dos anos.

Hoje, os resultados das avaliações externas como a Prova Brasil<sup>1</sup>, Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - SAEB<sup>2</sup> e dados do Índice de

---

<sup>1</sup>**Prova Brasil:** é uma avaliação criada em 2005 pelo Ministério da Educação. É complementar ao Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica e um dos componentes para o cálculo do índice de Desenvolvimento da Educação Básica.

<sup>2</sup>**SAEB:** implantado em 1990, é um conjunto de sistemas de avaliação do ensino brasileiro,

Desenvolvimento da Educação Básica - IDEB<sup>3</sup> mostram que, embora haja uma melhora significativa na qualidade da escola pública, o ensino de Matemática ainda registrou resultados insatisfatórios. Este resultado, não é mais do que reflexo das barreiras enfrentados pelo ensino matemático no Brasil, agravando-se mais no campo da geometria. Entre essas barreiras, podemos citar como exemplos: a formação profissional dos docentes de Matemática, a falta de políticas públicas para a formação continuada desses profissionais e interpretações equivocadas de teorias educacionais.

No tocante à formação inicial dos professores, pesquisas revelam que nos cursos de Licenciatura em Matemática, a Geometria possui uma fragilíssima posição, e isso pode prejudicar muito a formação do futuro professor e provocar uma deficiência no conhecimento, seja com relação ao conteúdo ou em termos de metodologia. Essa deficiência deve levar a um desdobramento muito maior por parte dos professores com relação as suas atividades docentes na área de geometria, na busca de orientações e atualizações através de cursos. Caso contrário, o que é muito frequente, o professor pode se encontrar em uma posição de não compreender a importância da geometria frente às competências propiciadas por ela no ensino básico (só como exemplo entre vários que existem, podemos citar a importância de conceitos geométricos para o desenvolvimento do pensamento matemático) e considerá-la como uma matéria de mínima importância com relação às demais e colocá-la em segundo plano. Quando isso acontece, os professores geralmente deixam para ensinar os conteúdos geométricos nos últimos momentos no final do ano, quando não há tempo para desenvolver o programa, ou fazem uma abordagem de maneira muito superficial.

Por outro lado, se a formação inicial agregar ao professor conhecimentos técnicos,

---

*desenvolvido e gerenciado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), autarquia do Ministério da Educação.*

<sup>3</sup> **IDEB:** criado em 2007, o indicador é calculado a partir dos dados sobre aprovação escolar, médias de desempenho nas avaliações do Inep.



sólidos conhecimentos básicos e uma boa formação metodológica, mesmo assim esse conjunto de fatores não é suficiente para a prática profissional, a formação continuada torna-se indispensável, pois é uma forma de o professor desenvolver competências de ensino e aprendizagem. Essa necessidade provém das mudanças que ocorrem em todos os campos do saber, as quais estimulam inovações e aprendizados constantes. Porém, a realidade nas nossas escolas mostra um quadro adverso, a formação continuada não é uma prática universalizada. Observa-se que as pesquisas sobre o ensino da geometria no ensino básico tem avançado; porém, esse progresso não tem como chegar aos professores em sala de aula, se estes não estiverem buscando atualizações em sua formação.

As políticas públicas, por sua vez, não oferecem incentivos para essa prática. Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas de sala de aula, os professores apoiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória, e que, tradicionalmente, abordam a geometria de forma inconsciente, muitas vezes no final do livro. Como também, diante da situação, os professores podem reproduzir práticas pedagógicas que lhes foram apresentadas em sua graduação. Certamente esse cenário torna a geometria uma área bastante frágil no ensino básico.

A interpretação equivocada de concepções pedagógicas também tem dado sua contribuição de forma negativa para o ensino da matemática e da geometria. É notória a preocupação dos estudiosos com relação ao ensino-aprendizagem de matemática no ciclo básico, e muitos trabalhos foram publicados nessa área. No entanto, em sala de aula, é comum distorções na aplicação de ideias inovadoras que surgem em diferentes propostas. Sobre o que estamos falando, vejamos exemplos citados nos PCNs [5], p. 22:

*... a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de*

*problemas - ainda bastante desconhecida da grande maioria - quando é incorporada, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos...*

*... de forma semelhante, nem sempre são observadas recomendações insistentemente feitas para que conteúdos sejam veículos para a aprendizagem de ideias fundamentais (como as de proporcionalidade, equivalência etc.) e que devem ser selecionados levando em conta sua potencialidade, quer para instrumentação para a vida, quer para o desenvolvimento de formas de pensar...*

Colocamos aqui apenas uma amostra, que evidencia problemas no ensino de Matemática e em particular o de geometria na rede básica no Brasil. Ressaltamos que existem vários outros fatores que contribuem para esse quadro negativo e não foram citados. É claro que existem casos de sucessos em determinadas escolas, ou de professores que desenvolveram projetos satisfatórios com relação ao citado ensino em sua sala de aula. Mas, comparando esses casos isolados com o conjunto de escolas do Brasil, não podemos considerar que os mesmos representem todo o sistema, o que leva a concluir que muito precisa ser transformado.

## **1.2 O método axiomático e raciocínio dedutivo no ensino básico**

No nosso trabalho (Capítulos 2, 3 e 4), enfocaremos alguns teoremas da geometria plana com interface no ensino básico, como as demonstrações dos teoremas em matemática são feitas por meio do raciocínio dedutivo, achamos pertinente fazermos uma abordagem sucinta sobre esse método. Vale ressaltar, que teremos uma forte oportunidade para percebermos, através dos teoremas abordados no nosso trabalho, que a geometria é convidativa a esse método, para melhor dizer, não há área melhor

do que esta para se trabalhar o método axiomático e o raciocínio dedutivo.

Outro motivo (mais amplo) que nos levou a fazer menção sobre o raciocínio dedutivo foi a necessidade de um aprimoramento e uma sistematização desse método no ensino básico. O ensino da Matemática enfrenta problemas nessa fase e principalmente o de geometria, como já mencionamos, a realidade nos mostra que muitos alunos desse ciclo se apropriam de algum conhecimento dentro da matemática e da geometria por meio da memorização de conceitos ou fórmulas. Dessa forma, os alunos podem ser levados a ter uma visão desses conteúdos como sendo um conjunto de regras mais ou menos desconexas, ou como algo que surgiu do nada. É comum encontrar alunos que, por exemplo, sabem enunciar o Teorema de Pitágoras: “o quadrado da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados das medidas de seus catetos”, porém, sem ter a mínima ideia de como se chegou a conclusão desse resultado. Levando em conta a forma como essa informação foi concebida pelo aluno, ele pode afirmar, que ela é verdadeira? Ou, de que maneira ela foi construída? Ela procede de outras informações? E se ela procede, como essas outras informações se relacionam para produzir essa última? Situações como essa, em que as informações se apresentam em um vazio, são comuns nas aulas de matemática, sendo mais acentuadas quando se trata do estudo da Geometria, seja no ensino fundamental ou no ensino médio.

Abordar a Matemática e Geometria dessa forma é prejudicial para a formação do aluno, em qualquer nível de estudo. Ao se trabalhar com a primeira em sala de aula, deveremos desenvolver ações que tenham como objetivo elevar o grau de criatividade e o potencial de raciocínio dos alunos. Necessitamos conduzir as nossas atividades de forma a propiciar a aquisição e a construção de conhecimentos mais consistentes, confiáveis e válidos, estando assim, trilhando o caminho do pensamento matemático. Mas afinal, em Matemática, como provamos que algo é verdadeiro? Como adquirimos e produzimos conhecimentos confiáveis? Responder

a essas perguntas significa dizer como é que funciona o raciocínio dedutivo. Nesse método, se queremos provar que uma declaração, digamos que seja  $p$ , é verdadeira, é necessário mostrar que outra declaração, digamos que seja  $q$ , é verdadeira e que  $p$  segue logicamente de  $q$ , ou seja, se  $q$  é verdade então  $p$  é verdade. Se há dúvidas sobre a declaração  $q$ , temos que mostrar que ele segue de outra declaração  $r$  e que  $r$  segue de  $s$  ... até chegarmos a uma declaração que é aceita como verdadeira, ou seja, esse método consiste em provar a veracidade de uma declaração<sup>4</sup> exclusivamente baseado na veracidade de outra afirmação e o uso de regras de inferências bem definidas.

Chamamos atenção para esse esquema simplificado que apresentamos. Procedendo como é proposto, corremos o risco de chegarmos a um ciclo vicioso, quando uma definição seria usada para definir uma outra e vice-versa, ou cada vez mais produzir declarações que levem a declaração desejada, desenvolvendo uma tarefa interminável. Essa situação sugere algumas exigências para o bom uso desse método de raciocínio dedutivo:

- Um ponto de partida, ou seja, objetos primeiros a partir dos quais todos esses outros objetos poderiam ser definidos. “ *Esses objetos precisam ser evidentes por si mesmos, cujos conceitos se aceitem naturalmente. Eles não são escolhidos por meras opiniões pessoais, isoladas; em geral, são frutos de opiniões de um consenso coletivo*”. ([8], p. 152). Os objetos escolhidos dessa forma, são chamados de conceitos primitivos.
- Afirmações simples dadas na forma de resultados envolvendo os conceitos primitivos. Essas afirmações são usadas, para, a partir das quais, seja possível deduzir os demais resultados. Afirmações desse tipo são chamadas de **postulados ou axiomas**; no caso, sentença matemática que não é uma definição e é aceita como válida sem precisar **demonstrar**.

---

<sup>4</sup>*Declaração: afirmação; explicitação; manifesto.*

- Regras ou argumentos básicos, que podemos usar para manipular os axiomas e as noções primitivas e **deduzir os teoremas**. Essas regras, são chamados de **regras de inferências**<sup>5</sup>.

*E o conjunto finito constituído de axiomas, de noções primitivas e de regras de inferência, usados para **definir objetos** e deduzir **teoremas***<sup>6</sup> conforme [8],pg 157, chama-se *modelo axiomático*. Observemos que o modelo ou método axiomático e o raciocínio dedutivo estão intimamente ligados.

Fizemos aqui abordagem básica e simples sobre o método dedutivo e sobre a teoria axiomática com o objetivo de sermos remetidos ao fato de que, o processo pelo qual se constroem conhecimentos matemáticos é bastante singular, ele caracteriza a matemática e a distingue das ciências experimentais. Os resultados de qualquer descoberta matemática, por mais simples que possam ser, são apresentados por meio de teoremas. Sendo assim, a **demonstração** desempenha um papel central na teorização da matemática.

Teoremas, provas, demonstrações, raciocínio dedutivo, será que os alunos do Ensino Fundamental dão conta desses aspectos da matemática?

De acordo com a nossa Legislação, os jovens de 6 a 14 anos devem estar matriculados no Ensino Fundamental. Como as demonstrações são atividades do

---

<sup>5</sup>Dentre as **regras de inferência** temos a **particularização**: se algo vale para todos os elementos de um conjunto, então vale para cada elemento desse conjunto; a **modus ponens**: a palavra *modus* de corre do latim, e significa maneira, modo. Já, *ponens* deriva de *ponere*, que significa afirmar. *Modus ponens* significa maneira de afirmar.

<sup>6</sup>**Teorema:** *é uma sentença matemática válida, cuja validade é garantida por uma demonstração. Nos teoremas existe uma parte chamada de hipótese, e outra, chamada de tese. A hipótese (se for mais de uma) do teorema são condições indispensáveis que aparecem no enunciado do teorema e devem ser usadas na demonstração. Já a tese, que também aparece no enunciado do teorema, é a conclusão que se deve deduzir na demonstração*([8], pg.105). Já sobre **demonstração**, em [8] pg. 109, diz que: ... Dentro de um modelo axiomático, dadas duas proposições  $H$  e  $T$ , uma demonstração de que uma proposição  $H$  (hipótese) implica a proposição  $T$  (tese) é uma cadeia dedutiva de raciocínio que usa argumentos válidos e uma sequência finita de sentenças  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , tais que cada uma delas é, ou um axioma, ou uma definição, ou uma hipótese ( $H$ ) ou uma sentença resultante das sentenças anteriores, deduzida por argumentações válidas. A proposição final  $P_k$  e a proposição  $T$  (tese), resultado de todo o processo dedutivo.

raciocínio, que mobiliza capacidades cognitivas, metodológicas e linguísticas, nesse período, seja no sentido de construir demonstrações ou compreendê-las, as mesmas devem estar em consonância com o desenvolvimento cognitivo desses adolescentes. É natural que alunos do Ensino Fundamental não construam ou até mesmo não compreendam demonstrações de problemas ou teoremas “complicados” e com alto grau de abstração. Em contrapartida, existem demonstrações que são belíssimas, pela simplicidade, criatividade e inovação. Sabemos que a demonstração serve para validar o conhecimento; porém, episódios como esse, podem ser bem explorados em sala de aula. Ela pode ser apresentada aos estudantes como motivação até para a criatividade, para ter um papel na formação de capacidades intelectuais, na organização e estruturação do pensamento.

Já no Ensino Médio, ciclo em que os alunos, geralmente ingressam com idade a partir dos 14 anos, constitui um momento de maturidade cognitiva. Nessa faixa etária, os jovens já possuem esquemas mentais que possibilitam compreender construções abstratas. É possível e desejável que essa abstração seja potencializada.

No Ensino Fundamental, as construções do conhecimento são necessárias para o exercício da cidadania; no Ensino Médio, o currículo é oferecido no sentido de dar suporte para que os adolescentes prossigam no caminho das ciências; nesse momento, é ampliado o conjunto de conhecimento e inserido o conhecimento científico. O Ensino Médio tem como um dos objetivos o aprimoramento e a depuração do conhecimento dos adolescentes. Como a Matemática e a Geometria são partes integrantes do currículo nesse período, os objetivos com relação a elas não devem ser diferentes. Surge nesse momento a necessidade de trabalhar o método científico, as construções axiomáticas, o pensamento dedutivo e as demonstrações. Vejamos o que colocam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) ([6], p. 151 e p. 152):

... *a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento*

*e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem a âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, proporcionando uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais ...*

*... a Matemática no Ensino Médio não possui apenas um caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como uma ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros que servem para validar instituições e dar sentido a técnicas aplicadas ...*

Observemos que esse sistema anteriormente mencionado é importante para que os alunos venham a alcançar alguns dos objetivos propostos no tocante a matemática no Ensino Médio. Porém, não estamos querendo propor que o método axiomático e o raciocínio dedutivo seja empregado a todas as construções matemáticas no ensino básico ou que ele é a chave para resolver o problema da matemática e da geometria em nossas escolas, até porque, o método axiomático é um método de construção do conhecimento e não um método pedagógico. É obvio que existem várias outras competências que devem ser consideradas e exploradas na busca de uma melhor educação matemática no ensino básico.

No método dedutivo, o conhecimento é construído através da validação pela demonstração de cada afirmação. No entanto, o objetivo muda, de validar o conhecimento, para validar a compreensão. Mas, não significa dizer que a demonstração inviabilize a compreensão, ela passa a ser mais um dos meios entre vários outros para validar a compreensão do conhecimento.

Uma demonstração garante que um determinado resultado é válido, que um

teorema é verdadeiro. Só que no ensino básico, dando maior ênfase para o médio, o foco de uma demonstração não deve ser apenas o de validar o conhecimento ou como um recurso para eliminar as dúvidas. Colocada dessa maneira, certamente ela não trará contribuições mais amplas para a matemática e à geometria enfocada nessa fase tão dinâmica da vida dos alunos. É importante destacar que a demonstração é um momento para se explorar várias funções que são acessíveis e importantes para alunos do ensino médio, tais como:

- **Verificação:** *convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;*
- **Desafio intelectual:** *satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;*
- **Explicitação:** *compreensão do por que uma demonstração é verdadeira;*
- **Descoberta:** *de novas teorias, conjecturas<sup>7</sup> ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;*
- **Comunicação:** *negociação do significado de objetos matemáticos;*
- **Sistematização:** *organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas. ... (extraído de [1], p5).*

Nesse contexto, além de validar, é possível enriquecer, valorizar e dinamizar o conhecimento matemático com a construção das demonstrações.

Voltemos ao cuidado de que o método dedutivo e a construção axiomática não precisam ser empregados a toda a construção matemática do Ensino Médio, não estamos propondo que os alunos tenham que produzir a demonstração de todo o

---

<sup>7</sup> **Conjecturas:** *uma conjectura matemática é uma afirmação para a qual ainda não se dispõe de uma demonstração que comprove sua validade ou de um contraexemplo para garantir que ela não é válida.*



conhecimento. Muitas demonstrações ou são excessivamente algébricas, ou com alto grau de abstração<sup>8</sup>, ou usam teorias que não são abordadas no Ensino Médio. Por outro lado, o professor pode desenvolver um trabalho no sentido de que o aluno conheça como são edificadas as teorias matemáticas e como são validados esses conhecimentos. É importante que o aluno perceba que, o que está sendo estudado não foi algo que nasceu pronto, mas sim, como sendo algo que o homem, diante de certas necessidades, mobilizou seus conhecimentos para conceber aquela teoria que viesse suprir tal necessidade dentro da Matemática. Com relação a esse aspecto, pode-se recorrer a História da Matemática, verificando qual foi a necessidade que impulsionou a criação da teoria, e que às vezes uma demonstração não foi concebida tão facilmente.

Experimentar o processo dedutivo como foi proposto, significa levar os alunos a compreender como funcionam os mecanismos da matemática e da geometria. Tal postura deve refletir no modo de pensar desses estudantes, deve gerar o hábito de questionar a validade de alguma afirmação, não só em Matemática ou Geometria, mas em todos os ramos científicos.

---

<sup>8</sup> **Abstração:** *construção mental.*

## Capítulo 2

# Teoremas de Menelaus, Ceva e Stewart

O triângulo é uma figura que sempre esteve em evidência no estudo da geometria plana. Sobre ela, matemáticos, ao longo da história, descobriram várias relações importantes envolvendo seus elementos, bem como a correlação dessa figura com várias outras. Entre essas relações, destacamos os teoremas de Menelaus, Ceva e Stewart, que serão abordados nesse capítulo. O interesse por esses teoremas veio em virtude das inúmeras aplicações diante de problemas envolvendo colinearidade de pontos, concorrência entre cevianas, medidas de segmentos e medidas de cevianas associadas a um triângulo. Ao mesmo tempo estamos resgatando tais teoremas que andam meio esquecidos e raramente são abordados no ensino básico e muito menos nos livros didáticos referentes a esse ensino.

Na primeira parte do capítulo, faremos a demonstração dos teoremas mencionados; na segunda, que se refere às aplicações desses teoremas, trataremos de alguns conceitos e teoremas que já são mais comuns no ensino básico via os teoremas de Menelaus, Ceva e Stewart. Dessa forma criaremos um ambiente no qual os mesmos poderão ser introduzidos e se apresentarem como mais uma opção

na abordagem de certos conteúdos no ensino básico. Salientamos que as aplicações foram escolhidas de forma a estarem intimamente ligadas ao tema do nosso trabalho.

Praticamente todos os teoremas abordados neste trabalho envolvem o conceito de ceviana; portanto, antes deles, cabe a definição a seguir.

**Definição 1** *Denomina-se ceviana de um triângulo qualquer segmento de reta que tem uma das extremidades num dos vértices do triângulo e a outra sobre a reta suporte do lado oposto ao vértice considerado.*

A palavra ceviana é decorrente do nome do matemático italiano Giovanni Ceva (1648-1734), o qual formulou o teorema que leva o seu nome.

As cevianas principais de um triângulo são:

- **Mediana**, que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.
- **Altura**, que é perpendicular à reta suporte do lado oposto ao vértice-extremidade.
- **Bissetriz (interna)**, que é a porção da semirreta bissetriz de um ângulo interno limitada pelo lado oposto.

## 2.1 Teorema de Menelaus

Menelau de Alexandria foi um astrônomo que viveu no fim do primeiro século D.C. Ele escreveu uma coleção de seis livros sobre “Cordas no Círculo”. Um livro de Menelau que sobreviveu aos tempos foi “*Sphaerica*”, um tratado em três volumes sobre geometria e trigonometria esférica<sup>1</sup>. Os dados históricos dessa seção foram extraídos de [18].

---

<sup>1</sup>A *geometria esférica* é um exemplo de geometria não euclidiana.

**Teorema 1** [Teorema de Menelaus - versão simples] Considere um triângulo  $ABC$  e uma reta transversal  $t$  que corta as retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{CA}$  nos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente. Então:

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = 1.$$

**Prova.** De fato, baixemos pelos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  perpendiculares a  $t$  e sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  respectivamente os pontos de interseção dessas perpendiculares com  $t$  (vide Figura 2.1). Dessa forma temos:

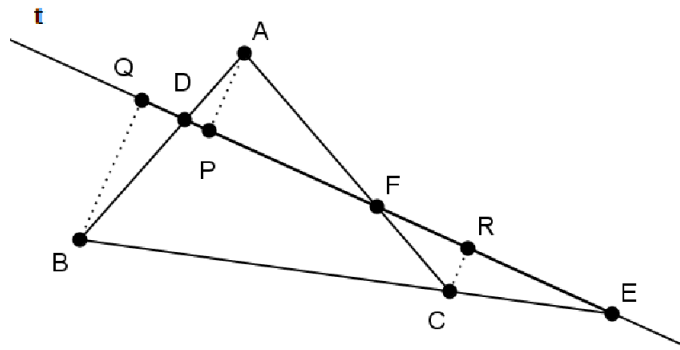


Figura 2.1: Teorema de Menelaus

$$\triangle_{ERC} \sim \triangle_{EQB} \implies \frac{EB}{EC} = \frac{QB}{RC} \quad (2.1)$$

$$\triangle_{BQD} \sim \triangle_{APD} \implies \frac{DA}{DB} = \frac{AP}{BQ} \quad (2.2)$$

$$\triangle_{APF} \sim \triangle_{CRF} \implies \frac{FC}{FA} = \frac{RC}{AP} \quad (2.3)$$

pelo caso ( $AA \sim$ ). Multiplicando membro a membro as equações (2.1), (2.2) e (2.3) obtemos:

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{DA}{DB} \cdot \frac{FC}{FA} = \frac{QB}{RC} \cdot \frac{AP}{BQ} \cdot \frac{RC}{AP} = 1 \implies \frac{AD}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1,$$

como queríamos mostrar. ■

Apresentamos aqui outra demonstração do Teorema de Menelaus, a saber:  
Dado um triângulo  $ABC$ , se uma reta transversal corta as retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{CA}$  nos pontos  $L$ ,  $M$  e  $N$ , respectivamente, então:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

**Prova.** Na Figura 2.2 consideremos:

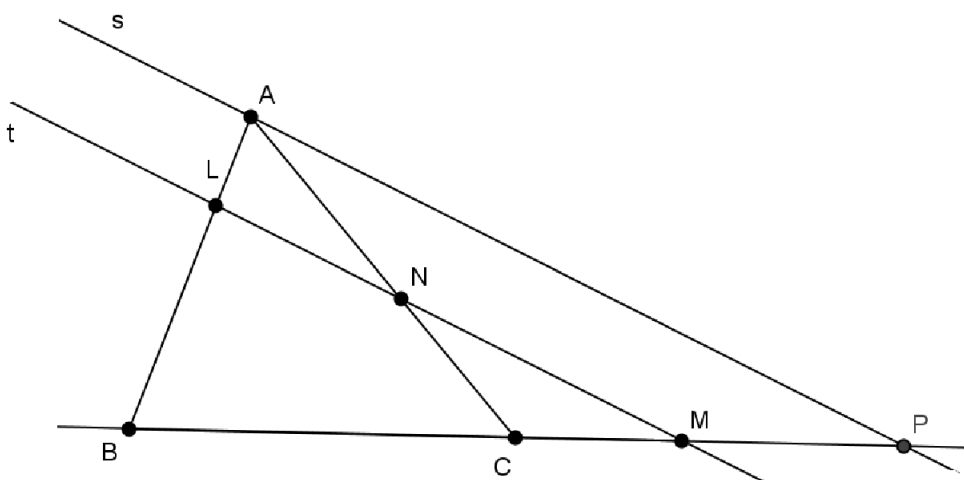


Figura 2.2: Outra demonstração do Teorema de Menelaus

- $s \parallel t$ ;
- $A \in s$ ;
- $\overleftrightarrow{BC} \cap s = \{P\}$ .

Usando o Teorema de Tales (veja [2, p. 144] ) com essas paralelas  $s$  e  $t$ , obtemos:

$$\frac{LA}{LB} = \frac{MP}{MB} \quad (2.4)$$

$$\frac{NC}{NA} = \frac{MC}{MP}. \quad (2.5)$$

Multiplicando membro a membro as equações (2.4) e (2.5), obtemos:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{MC}{MB}. \quad (2.6)$$

Multiplicando (2.6) por  $\frac{MB}{MC}$ , temos:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1,$$

como desejado. ■

A recíproca desse teorema não pode ser demonstrada nessa formulação pois, dado um número real positivo  $r$  existem dois pontos  $E$  e  $E'$  na reta  $\overleftrightarrow{CB}$ , um interno e o outro externo ao segmento  $CB$ , tais que:

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BE'}{E'C} = r.$$

Para que a recíproca do teorema seja verdadeira deveremos utilizar razões orientadas. Razões orientadas resultam de segmentos orientados. Para esse conceito de segmento deve-se estipular qual de suas extremidades é a inicial (primeira) e qual é a final (segunda). Quando se disser “o segmento de reta orientado  $\overrightarrow{AB}$ ”, fica subtendido que  $A$  é o ponto inicial e  $B$  o final.

**Observação 1** *Consideremos apenas os casos de segmentos não degenerados (por exemplo  $AB \neq 0$ ) caso contrário teremos o segmento com medida nula e isso não faz sentido nesse contexto.*

**Definição 2 (Razão orientada)** A razão orientada  $r = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}$  em que  $M$  pertence à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , é um número real tal que

$$|r| = \frac{x}{y},$$

onde  $x$  e  $y$  denotam os comprimentos dos segmentos  $\overline{AM}$  e  $\overline{BM}$ , respectivamente, com as propriedades:

- Se  $M \in \overline{AB}$ , então  $r > 0$ , (com  $M \neq A$  e  $M \neq B$ ). Nesse caso, as semirretas  $\overrightarrow{AM}$  e  $\overrightarrow{MB}$  tem a mesma orientação.
- Se  $M \notin \overline{AB}$ , então  $r < 0$ . Nesse caso, as semirretas  $\overrightarrow{AM}$  e  $\overrightarrow{MB}$  tem orientações opostas.

No teorema a seguir usamos razões orientadas.

**Teorema 2 (A recíproca do Teorema de Menelaus)** Se  $D$ ,  $E$  e  $F$  são pontos sobre as retas suportes dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , respectivamente, e  $\overline{AD}$ ,  $\overline{DB}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{CE}$ ,  $\overline{CF}$  e  $\overline{FA}$  são segmentos orientados, tais que:

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$$

então  $D$ ,  $E$  e  $F$  estão alinhados.

**Prova.** Suponha que os pontos  $D'$ ,  $E$  e  $F$  pertencem às retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{CA}$ , respectivamente e sejam colineares. Suponha também que  $\overline{AD'}$ ,  $\overline{D'B}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{CE}$ ,  $\overline{CF}$  e  $\overline{FA}$ , sejam segmentos orientados. Pelo Teorema de Menelaus temos que:

$$\frac{AD'}{D'B} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$$

Como por hipótese:

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$$

segue que

$$\frac{AD'}{D'B} = \frac{AD}{DB}$$

donde  $D'$  coincide com  $D$ , pois são pontos que dividem o segmento  $AB$  numa mesma razão. Portanto  $D$ ,  $E$  e  $F$  são colineares. ■

Observemos que o Teorema de Menelaus é importante para resolver problemas de colinearidade de três pontos.

## 2.2 Teorema de Ceva

O teorema de Ceva foi publicado em 1678 pelo italiano Giovanni Ceva (1647-1736). Ele, matemático, físico, geômetra e engenheiro hidráulico com destaque em probabilidade e cálculos geométricos, tem seu nome lembrado pelo teorema de Ceva ou das cevianas. A publicação foi feita em um artigo "De lineis rectis", sendo quase um corolário do teorema de Menelaus (já esquecido na época).

O teorema foi considerado um dos mais importantes resultados da geometria sintética do triângulo no período compreendido entre a Matemática da Antiga Grécia e o século XIX. Tal importância resulta das inúmeras aplicações, inclusive na área de mecânica. Em sua época, o trabalho não obteve muita repercussão, mas ele foi redescoberto pelo matemático francês Joseph Diaz Gergonne<sup>2</sup> (1771-1859) e o autor ganhou seu devido reconhecimento. As informações de caráter histórico dessa seção foram encontradas em [18].

**Teorema 3** [Teorema de Ceva] *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e sejam  $N$ ,  $L$ , e  $M$  respectivamente, pontos sobre as retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ . As retas  $\overleftrightarrow{AL}$ ,  $\overleftrightarrow{BM}$  e  $\overleftrightarrow{CN}$*

---

<sup>2</sup> Oficial de artilharia e professor de matemática francês nascido em Nanci. dedicou-se de forma relevante ao estudo da geometria projetiva.



são concorrentes, se e somente se,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

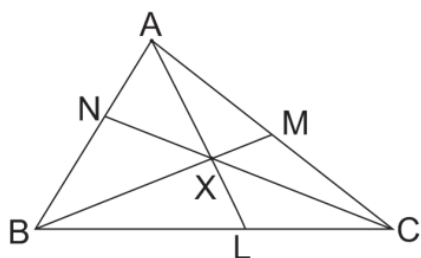


Figura 2.3: Retas  $\overleftrightarrow{AL}$ ,  $\overleftrightarrow{BM}$  e  $\overleftrightarrow{CN}$  concorrentes em X.

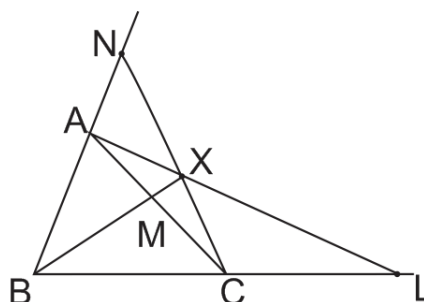


Figura 2.4: Retas  $\overleftrightarrow{AL}$ ,  $\overleftrightarrow{BM}$  e  $\overleftrightarrow{CN}$  concorrentes em X.

**Prova.** Primeiramente provaremos que se AL, BM e CN são concorrentes então:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Inicialmente tracemos uma reta  $t$  paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$  passando por A. Prolonguemos  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  até cortar  $t$ , respectivamente, em  $B'$  e  $C'$ .

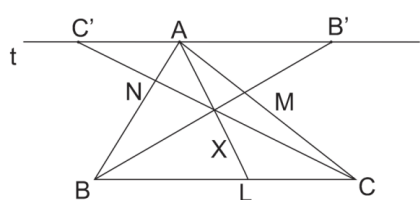


Figura 2.5:  $t \parallel \overleftrightarrow{BC}$ .

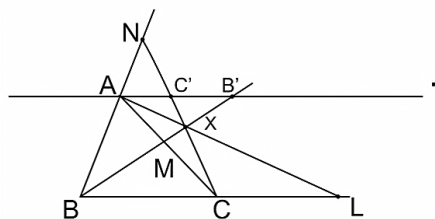


Figura 2.6:  $t \parallel \overleftrightarrow{BC}$ .

Com base no caso ( $AA \sim$ ) de semelhança de triângulos, temos:

$$\triangle_{ANC'} \sim \triangle_{BCN} \implies \frac{AN}{NB} = \frac{AC'}{BC} \quad (2.7)$$

$$\triangle_{BCM} \sim \triangle_{B'AM} \implies \frac{CM}{MA} = \frac{BC}{AB'} \quad (2.8)$$

$$\triangle_{BXL} \sim \triangle_{B'XA} \implies \frac{BL}{AB'} = \frac{XL}{XA} \quad (2.9)$$

$$\triangle_{CXL} \sim \triangle_{C'XA} \implies \frac{C'A}{LC} = \frac{XA}{XL} \quad (2.10)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (2.7)-(2.10), obtemos:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{BL}{AB'} \cdot \frac{C'A}{LC} = \frac{AC'}{BC} \cdot \frac{BC}{AB'} \cdot \frac{XL}{XA} \cdot \frac{XA}{XL} = \frac{AC'}{AB'}. \quad (2.11)$$

Agora multiplicando (2.11) por  $\frac{AB'}{AC'}$ , obtemos:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1. \quad (2.12)$$

Para a recíproca do teorema, supomos que (2.12) vale. Consideremos  $t$  paralela  $\overleftrightarrow{BC}$  como anteriormente e tracemos inicialmente as retas  $\overleftrightarrow{AL}$  e  $\overleftrightarrow{BB'}$  e que se cruzam em  $\mathbf{X}$  (ver Figura 2.5). Digamos que a reta  $\overleftrightarrow{CX}$  intercepta a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  em  $N'$ . Dessa forma temos que as retas  $\overleftrightarrow{AL}$ ,  $\overleftrightarrow{BM}$  e  $\overleftrightarrow{CN'}$  são concorrentes em  $X$ . Pelo que foi demonstrado anteriormente, temos:

$$\frac{AN'}{N'B} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1. \quad (2.13)$$

Comparando as igualdades (2.12) e (2.13), concluímos que  $N$  e  $N'$  correspondem ao mesmo ponto, logo, as retas  $\overleftrightarrow{AL}$ ,  $\overleftrightarrow{BM}$  e  $\overleftrightarrow{CM}$  são concorrentes. ■

## 2.3 Teorema de Stewart

Matthew Stewart nasceu em 1717, na Escócia, em uma pequena ilha chamada Ilha Bute. Entrou na Universidade de Glasgow em 1734, onde estudou com matemático Robert Simson<sup>3</sup>, com quem estudou a Geometria antiga. Por volta de 1747, Stewart torna-se professor de Matemática na Universidade de Edimburgo. A publicação de sua obra mais famosa: *Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts Mathematics*, provavelmente tenha ajudado a garantir a vaga como professor. Esse livro expande algumas ideias de Simson e apresenta a chamada Proposição II, que, nos dias de hoje, é conhecida como o Teorema de Stewart. Tal teorema relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo e o comprimento de uma ceviana dada.

As informações de caráter histórico dessa seção foram encontradas em [18].

**Teorema 4** [*Teorema de Stewart*] *Seja ABC um triângulo qualquer, com lados BC = a, AC = b e AB = c e seja d o comprimento de uma ceviana AD, com BD = m e DC = n. Então:*

$$b^2m + c^2n = a \cdot (d^2 + mn).$$

Apresentaremos a demonstração desse teorema de duas maneiras. Vamos à primeira.

**Prova.** Consideremos o triângulo abaixo onde  $H$  é o pé da perpendicular baixada do ponto  $A$  sobre o segmento  $\overline{BC}$ .

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos  $AHB$  e  $AHD$ , respectivamente, obtemos:

$$c^2 = h^2 + (m - p)^2 = h^2 + m^2 - 2mp + p^2$$

---

<sup>3</sup>**Robert Simson (1687 - 1768)**, foi um matemático inglês e professor de matemática. Desenvolveu trabalhos importantes ligados a restauração de obras de geômetras gregos.

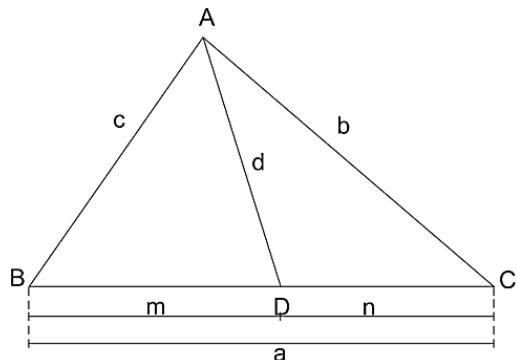


Figura 2.7: Teorema de Stewart

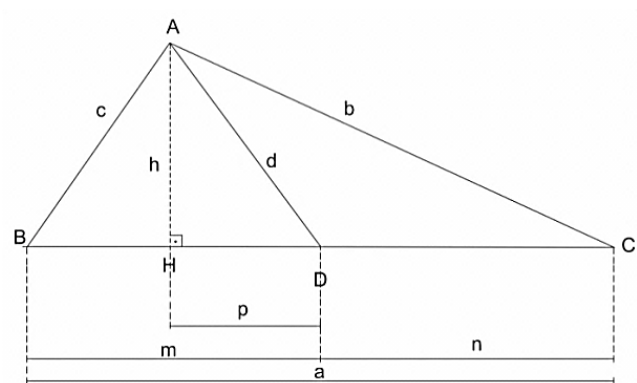


Figura 2.8: Medidas associadas ao triângulo.

donde

$$h^2 = c^2 - m^2 + 2mp - p^2 \tag{2.14}$$

e

$$d^2 = h^2 + p^2 \Rightarrow h^2 = d^2 - p^2. \tag{2.15}$$

Comparando (2.14) e (2.15), obtemos:

$$c^2 - m^2 + 2mp - p^2 = d^2 - p^2$$

de modo que:

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2mp. \quad (2.16)$$

Agora, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo  $AHC$ , obtemos:

$$b^2 = h^2 + (p + n)^2 = h^2 + p^2 + 2pn + n^2$$

o que implica que:

$$h^2 = b^2 - p^2 - 2pn - n^2. \quad (2.17)$$

Comparando (2.17) e (2.15), temos:

$$b^2 - p^2 - 2pn - n^2 = d^2 - p^2$$

o que nos fornece

$$b^2 = d^2 + 2pn + n^2. \quad (2.18)$$

Com isso, formamos o sistema:

$$\begin{cases} c^2 = d^2 + m^2 - 2mp \\ b^2 = d^2 + n^2 + 2pn. \end{cases}$$

Recorreremos ao escalonamento para eliminar  $p$  do sistema. Para isso, multiplicamos

(2.16) por  $n$  e (2.18) por  $m$ , o que nos dá

$$\begin{cases} c^2n = d^2n + m^2n - 2mnp \\ b^2m = d^2m + n^2m + 2mnp \end{cases}$$

e somamos membro a membro as equações obtidas chegando à igualdade

$$b^2m + c^2n = d^2(n + m) + mn(m + n). \quad (2.19)$$

Uma vez que  $m + n = a$ , segue de (2.19) que:

$$b^2m + c^2n = d^2a + mna = a(d^2 + mn),$$

como queríamos demonstrar. Para o ponto  $D$  pertencente à reta  $\overleftrightarrow{BC}$  e externo ao segmento  $\overline{BC}$ , de maneira análoga, obtemos o mesmo resultado. ■

Vamos à segunda demonstração.

**Prova.** Nesta prova aplicaremos a lei dos Cossenos (essa lei pode ser encontrada [2],p.193). Sem perda de generalidade consideremos o ponto  $D$  interno ao segmento  $\overline{BC}$ , como na Figura 2.9 com  $\widehat{ADB} = \theta$ . Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos

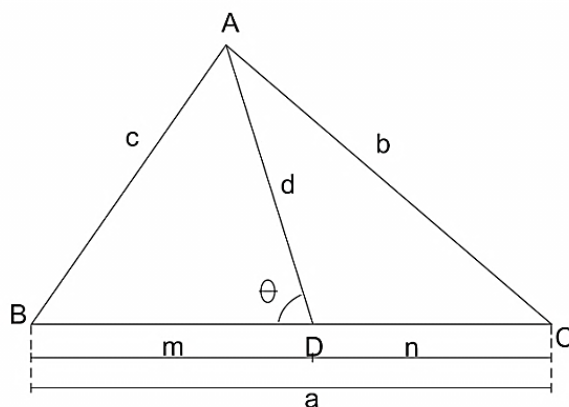


Figura 2.9:  $\widehat{ADB} = \theta$ .

$ADB$  e  $ADC$ , respectivamente, obtemos:

$$c^2 = m^2 + d^2 - 2 \cdot m \cdot d \cdot \cos \theta \quad (2.20)$$

$$b^2 = n^2 + d^2 - 2 \cdot n \cdot d \cdot \cos(180^\circ - \theta). \quad (2.21)$$

Como  $\cos \theta = -\cos(180^\circ - \theta)$ , ficamos com:

$$b^2 = n^2 + d^2 + 2 \cdot n \cdot d \cdot \cos \theta. \quad (2.22)$$

Agora multiplicamos (2.20) por  $n$  e (2.22) por  $m$ , obtemos:

$$c^2 n = m^2 n + d^2 n - 2 \cdot m \cdot n \cdot d \cdot \cos \theta \quad (2.23)$$

$$b^2 m = n^2 m + d^2 m + 2 \cdot n \cdot m \cdot d \cdot \cos \theta. \quad (2.24)$$

Somando membro a membro (2.23) com (2.24), segue-se que:

$$c^2 n + b^2 m = m \cdot n \cdot (m + n) + d^2 \cdot (n + m).$$

Como  $m + n = a$ , temos:

$$c^2 n + b^2 m = m \cdot n \cdot a + d^2 \cdot a = a \cdot (d^2 + m \cdot n),$$

como desejado. ■

## 2.4 Aplicações dos teoremas apresentados nesse capítulo

É comum se encontrar livros didáticos de matemática do ensino básico que apresentam resultados sem as demonstrações necessárias, ou que apresentem os

conteúdos como sendo um conjunto de regras isoladas entre si. Através de algumas aplicações que faremos nessa seção, perceberemos que certos resultados em matemática, e, em particular, em geometria, podem ser usados na construção de tantos outros.

### 2.4.1 O Teorema de Stewart e as medidas das medianas de um triângulo

**Proposição 1** *Sejam  $ABC$  um triângulo qualquer e  $m_a$ ,  $m_b$  e  $m_c$  as medianas relativas aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, e  $BC = a$ ,  $AC = b$  e  $AB = c$ .*

*Então:*

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2};$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2};$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2}.$$

**Prova.** A demonstração será feita aplicando o Teorema de Stewart. Comparando

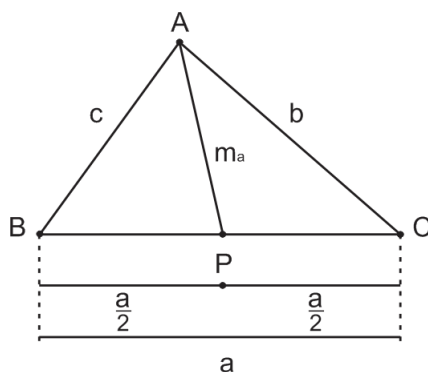


Figura 2.10:  $AP$  mediana relativa ao vértice  $A$  ou ao lado  $BC$ .

a Figura 2.7 com a Figura 2.10, temos que:

$$m = \frac{a}{2}, n = \frac{a}{2} \text{ e } d = m_a.$$



Então:

$$b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} = a \cdot \left( m_a^2 + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \right),$$

o que implica que

$$\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} = m_a^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Daí,

$$m_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

o que nos dá

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}.$$

De modo análogo, mostra-se as igualdades para  $m_b$  e  $m_c$ . ■

Ainda sobre as medianas de um triângulo, temos as seguintes propriedades:

## 2.4.2 Baricentro e o Teorema de Ceva

**Proposição 2** *As três medianas de um triângulo se encontram em um ponto.*

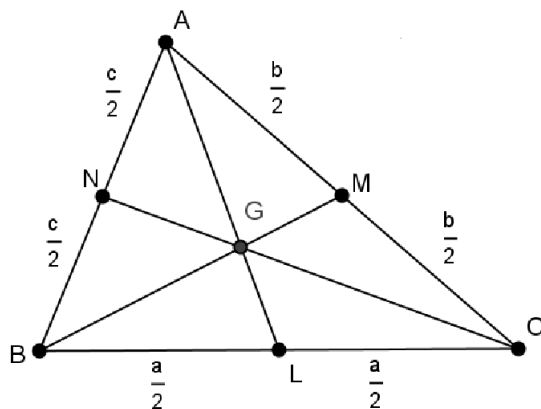


Figura 2.11:  $G$  é o baricentro do triângulo  $ABC$ , com:  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $AC = b$ .

**Prova.** Sejam  $AL$ ,  $BM$  e  $CN$  as medianas de um triângulo  $ABC$ . Então  $NA = NB$ ,  $BL = LC$  e  $CM = MA$ . Logo:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

De acordo com o Teorema de Ceva (ver Teorema 3), as medianas  $AL$ ,  $BM$  e  $CN$  se encontram em um único ponto. ■

O ponto de encontro das medianas de um triângulo é chamado de **baricentro** e denotado por  $G$ .

### 2.4.3 A razão 2:1 de uma mediana e o Teorema de Menelaus

**Proposição 3** *O baricentro  $G$  de um  $\triangle_{ABC}$ , divide cada mediana do triângulo na razão 2:1, conforme a ordem:*

$$\frac{AG}{GL} = \frac{CG}{GN} = \frac{BG}{GM} = \frac{2}{1}.$$

**Prova.** No triângulo  $ABC$  da Figura 2.11, consideremos:

$$AN = NB = \frac{c}{2}, \quad BL = LC = \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad CM = MA = \frac{b}{2}.$$

Observemos que os três pontos  $N$ ,  $G$  e  $C$  são colineares e os mesmos pertencem as retas suporte dos lados  $AB$ ,  $AL$  e  $BL$  do triângulo  $ABL$ . Assim, de acordo com o *Teorema de Menelaus*, no triângulo  $ABL$ , temos:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BC}{LC} \cdot \frac{LG}{GA} = 1 \Rightarrow 1 \cdot \frac{a}{\frac{a}{2}} \cdot \frac{LG}{GA} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{LG}{GA} = 1 \Rightarrow \frac{LG}{GA} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente mostramos que:

$$\frac{BG}{GL} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{CG}{GN} = \frac{1}{2}$$

como desejado. ■

## 2.4.4 Medidas das bissetrizes internas de um triângulo e o Teorema de Stewart

A bissetriz de um triângulo é outra ceviana que tem o seu lugar de destaque na geometria plana, e, aqui, vamos explorar algumas de suas propriedades via os teoremas do Capítulo 2.

**Proposição 4** *Sejam  $S_a$ ,  $S_b$  e  $S_c$  as medidas das bissetrizes internas relativas aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, de um triângulo  $ABC$ . Então:*

$$S_a = \frac{2 \cdot \sqrt{b \cdot c \cdot p \cdot (p - a)}}{b + c}, S_b = \frac{2 \cdot \sqrt{a \cdot c \cdot p \cdot (p - b)}}{a + c} \text{ e } S_c = \frac{2 \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot p \cdot (p - c)}}{a + b}$$

onde  $2 \cdot p = a + b + c$ .

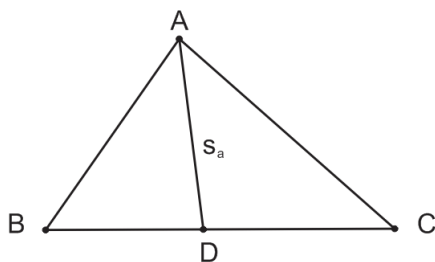


Figura 2.12:  $AD$  é a bissetriz relativa ao vértice  $A$ .

$$AD = S_a \text{ e } \widehat{BAD} \cong \widehat{DAC}$$

Antes da demonstração desse resultado, consideremos o lema a seguir.

**Lema 1** [Teorema da Bissetriz Interna] *Em todo triângulo, a bissetriz de um ângulo interno determina no lado oposto dois segmentos proporcionais aos lados desse ângulo.*

**Prova.** Seja  $\overline{AD}$ , com  $D \in \overline{BC}$ , a bissetriz interna do ângulo  $\widehat{A}$  e  $r$  a reta que passa por  $C$  tal que  $r \parallel \overline{AD}$ . Agora prolonguemos o segmento  $\overline{BA}$  até encontrar  $r$  em  $I$ , conforme a Figura 2.13.

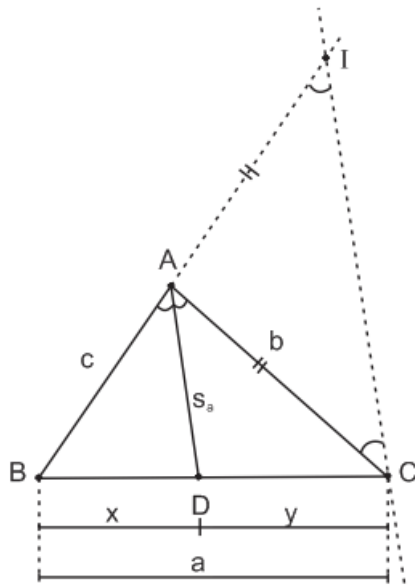


Figura 2.13:  $r \parallel \overline{AD}$ .

Dessa forma, temos que:

$$\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{ACI} = \widehat{CIA},$$

com isso concluímos que o  $\triangle ACI$  é isósceles e  $AC = AI$ . Aplicando o teorema de Tales ([2], p. 114) na Figura 2.13, obtemos:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AI}{DC} \implies \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC},$$

como desejado. ■

**Demonstração da Proposição 4:** No triângulo  $ABC$  da Figura 2.13, consideremos:

$$AB = c, BC = a, CA = b, BD = x, DC = y \text{ e } AD = S_a.$$

Do Lema 1 obtemos:

$$\frac{c}{x} = \frac{b}{y} \Rightarrow \frac{c+b}{x+y} = \frac{c}{x} = \frac{b}{y} \Rightarrow \frac{c+b}{a} = \frac{c}{x} = \frac{b}{y} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{ac}{b+c} \\ y = \frac{ab}{b+c} \end{cases}$$

No  $\triangle_{ABC}$  da Figura 2.13 o *Teorema de Stewart* nos diz que:

$$c^2 \cdot y + b^2 \cdot x = a \cdot (S_a^2 + x \cdot y).$$

Daí segue que:

$$c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} + b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} = a \cdot \left( S_a^2 + \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \right),$$

o que nos dá,

$$b \cdot c \cdot \frac{(c+b)}{(c+b)} = S_a^2 + \frac{a^2 \cdot b \cdot c}{(b+c)^2}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} S_a^2 &= c \cdot b \cdot \frac{[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \frac{c \cdot b \cdot [(b+c) + a] \cdot [(b+c) - a]}{(b+c)^2} \\ &= c \cdot b \cdot \frac{(a+b+c) \cdot (a+b+c-a-a)}{(b+c)^2}. \end{aligned}$$

Agora consideremos  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , de modo que:

$$2p = a + b + c \tag{2.25}$$

é o **perímetro do**  $\triangle_{ABC}$ . Então:

$$S_a^2 = c \cdot b \cdot \frac{(2p) \cdot (2p - 2a)}{(b+c)^2} = 2bcp \cdot \frac{(2p - 2a)}{(b+c)^2} = \frac{4bcp \cdot (p - a)}{(b+c)^2}$$

e finalmente

$$S_a = \frac{2\sqrt{bcp \cdot (p - a)}}{b + c}.$$

As medidas  $S_c$  e  $S_b$  são obtidas de maneira análoga. ■

### 2.4.5 O incentro e o Teorema de Ceva

**Proposição 5** *As bissetrizes internas de um triângulo se interceptam em um ponto, o qual chamamos de incentro.*

**Prova.** Consideremos  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  como sendo as bissetrizes internas do triângulo  $ABC$ , com  $D \in \overline{BC}$ ,  $E \in \overline{CA}$  e  $F \in \overline{AB}$ , como mostra a Figura 2.14.

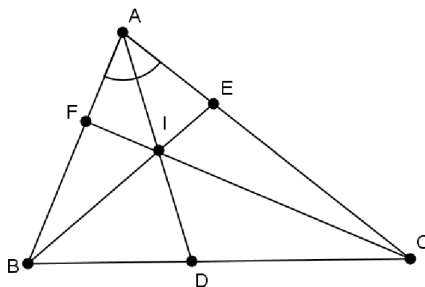


Figura 2.14:  $I$  é o incentro do  $\triangle ABC$ .

De acordo com o Lema 1 temos:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (2.26)$$

$$\frac{BC}{CE} = \frac{BA}{AE} \Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{BC}{BA} \quad (2.27)$$

$$\frac{CB}{BF} = \frac{CA}{AF} \Rightarrow \frac{AF}{BF} = \frac{CA}{BC}. \quad (2.28)$$

Multiplicando membro a membro (2.26)-(2.28), obtemos:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{BC} = 1$$

ou seja,

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$

De acordo com o *Teorema de Ceva* as bissetrizes  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  são concorrentes em um ponto. ■

A seguir apresentaremos uma aplicação envolvendo colinearidade de três pontos. O Teorema de Menelaus se apresenta como uma boa opção na resolução de questões desse tipo. Para a demonstração do resultado que queremos, precisamos do seguinte lema:

**Lema 2** [*Teorema da bissetriz externa*] Quando a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, ficam determinados, nesta reta, dois segmentos proporcionais aos lados desse triângulo.

**Prova.** Seja  $\overleftrightarrow{AM}$  a bissetriz do ângulo externo do vértice  $A$  no triângulo da figura abaixo.

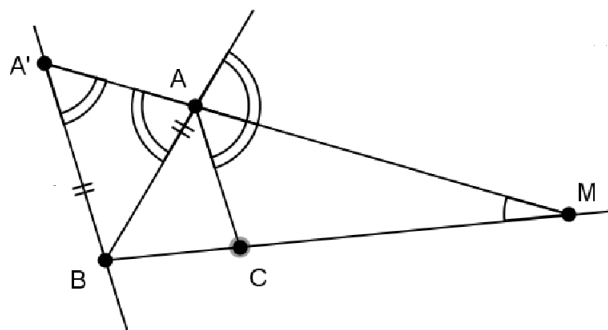


Figura 2.15: Bissetriz externa.

Agora consideremos uma reta  $r$  passando por  $B$  tal  $r \parallel \overleftrightarrow{AC}$  e prolonguemos  $\overline{MA}$  até interceptar a reta  $r$  em um ponto  $A'$ . Então:

- $\widehat{MA'B} = \widehat{MAC}$  (ângulos correspondentes);

- $\widehat{A'AB} = \widehat{MAC}$  (pois  $AM$  é bissetriz externa).

Com isso concluímos que:

- $\triangle A'MB \sim \triangle AMC$ ;
- $\triangle A'BA$  é isósceles, com  $BA' = AB$ .

Da semelhança entre os triângulos, temos que:

$$\frac{A'B}{BM} = \frac{AC}{CM} \Rightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM},$$

como desejado. ■

Vamos ao resultado.

**Proposição 6** *Seja  $ABC$  um triângulo escaleno. Então as bissetrizes internas de dois ângulos do  $\triangle ABC$  e a bissetriz externa do terceiro ângulo interceptam as retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  em três pontos colineares.*

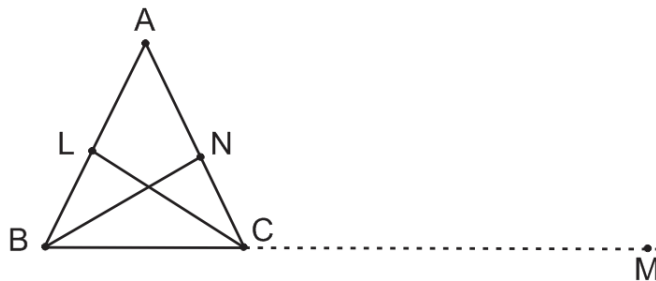


Figura 2.16:  $AB = AC$ ,  $BN$  e  $CL$  bissetrizes do  $\triangle ABC$ .

**Prova.** Sejam  $ABC$  um triângulo escaleno e,  $N$  e  $L$  pontos de interseções das bissetrizes internas dos vértices  $B$  e  $C$  com os lados  $AC$  e  $AB$ , respectivamente.



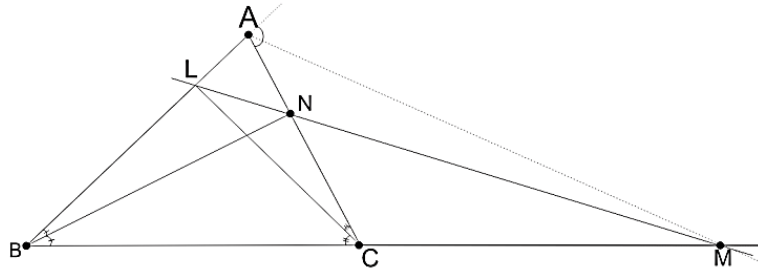


Figura 2.17:  $M$ ,  $N$  e  $L$  são alinhados.

Aplicando o Lema 1 às bissetrizes  $CL$  e  $BN$ , obtemos:

$$\frac{CA}{AL} = \frac{CB}{LB} \Rightarrow \frac{LB}{LA} = \frac{CB}{CA} \quad (2.29)$$

$$\frac{AB}{AN} = \frac{BC}{CN} \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC}. \quad (2.30)$$

Pelo Lema 2 temos que:

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{AC}{AB}. \quad (2.31)$$

Agora multiplicando membro a membro as igualdades (2.29), (2.30) e (2.31), obtemos:

$$\frac{LB}{LA} \cdot \frac{NA}{NC} \cdot \frac{MC}{MB} = \frac{CB}{CA} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1.$$

Segue da recíproca do *Teorema de Menelaus* que  $M$ ,  $N$  e  $L$  estão alinhados. ■

**Observação 2** Vejamos que o triângulo deve ser escaleno para que a proposição tenha efeito; caso contrário, teremos um triângulo  $ABC$  com pelo menos dois lados iguais, digamos  $AB = AC$ . Nesse caso as bissetrizes dos ângulos internos,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  interceptam os lados opostos em dois pontos, digamos que sejam  $N \in \overline{AC}$  e  $L \in \overline{AB}$ . Então  $\triangle_{LBC} \cong \triangle_{NCB}$ , conseqüentemente os dois triângulos terão a mesma altura com relação a  $BC$ , donde segue-se que  $LN \parallel BC$ .

## Capítulo 3

# Cevianas e pontos notáveis básicos associados a um triângulo

Nesse capítulo abordaremos os pontos notáveis do triângulo, o incentro, o circuncentro e o ortocentro, bem como as cevianas que os determinam. Seus conceitos são bastante conhecidos, porém, a forma como eles se relacionam, seja mutuamente, com os elementos do triângulo em questão ou com círculos associados, cria um ambiente riquíssimo, capaz de proporcionar a construção de tantos outros conceitos, propriedades e teoremas. É com esse pensamento, que vamos abordar os pontos notáveis do triângulo, não vamos nos limitar apenas em defini-los e demonstrar suas propriedades básicas, mas, sim, criar um contexto em que possamos relacioná-los com outros conceitos, postulados e teoremas ligados a um triângulo.

Começemos com algumas definições e proposições necessárias para os teoremas que vamos trabalhar.

### 3.1 Definições e proposições inerentes aos pontos notáveis de um triângulo

**Definição 3** [*Lugar geométrico (LG)*] Dada uma propriedade  $P$  relativa a pontos do plano, o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade  $P$  é o subconjunto de pontos  $\alpha$  do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

- a) Todo ponto de  $\alpha$  possui a propriedade  $P$ ;
- b) Todo ponto do plano que possui a propriedade  $P$  pertence a  $\alpha$ .

**Definição 4** Dado um número real positivo  $r$  e um ponto  $O$  do plano, o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a distância  $r$  do ponto  $O$  é o círculo de centro  $O$  e raio  $r$ .

**Definição 5** Dados dois pontos  $A$  e  $B$  no plano, definimos a mediatriz de  $AB$  como sendo a reta perpendicular a  $AB$  e que passa pelo seu ponto médio.

**Proposição 7** Dados os pontos  $A$  e  $B$  do plano, a mediatriz do segmento  $AB$  é o  $LG$  dos pontos do plano que equidistam de  $A$  e  $B$ .

**Prova.** Sejam  $M$  o ponto médio de  $\overline{AB}$  e  $s$  a sua mediatriz. Se  $T \in s$ , então, no triângulo  $TAB$ ,  $TM$  é a mediana e a altura, segue-se que  $\triangle_{TMB} \cong \triangle_{TMA}$  (caso  $LAL$ ), logo  $TA = TB$ . Reciprocamente, seja  $T$  um ponto do plano tal que  $TA = TB$ . Então, o triângulo  $TAB$  é isósceles de base  $AB$ , onde se segue que a mediana e a altura relativas a  $AB$  coincidem. Só que a mediana de  $TAB$  relativa  $AB$  é o segmento  $TM$ , segue que  $\overline{TM} \perp \overline{AB}$ , logo  $\overleftrightarrow{TM}$  é a mediatriz de  $AB$ . ■

Nas duas proposição a seguir, mostraremos o papel da bissetriz de um ângulo e da mediatriz de um segmento como  $LG$ .

**Proposição 8** Seja  $\sphericalangle AOB$  um ângulo dado. Se  $P$  é um ponto do mesmo, então  $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$  se, e somente se,  $P \in$  (bissetriz de  $\sphericalangle AOB$ ).

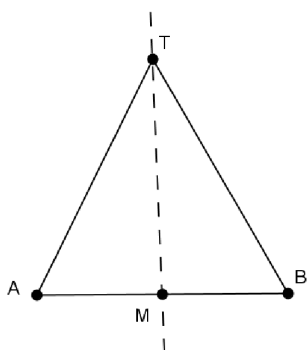


Figura 3.1:  $T \in s$  (mediatriz de  $\overline{AB}$ )  $\Leftrightarrow TA = TB$ .

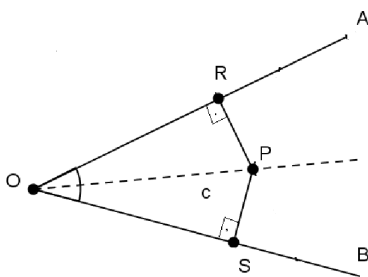


Figura 3.2:  $P \in$  (bissetriz de  $\sphericalangle AOB$ )  $\Leftrightarrow d(P, \overline{OA}) = d(P, \overline{OB})$

**Prova.** Suponhamos que  $P$  pertence à bissetriz de  $\sphericalangle AOB$  sejam  $R$  e  $S$ , respectivamente os pés das perpendiculares baixadas de  $P$  às retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ . Os triângulos  $ORP$  e  $OSP$  são congruentes pelo critério  $LAA_O$  visto que  $R\hat{O}P = S\hat{O}P$ ,  $O\hat{R}P = O\hat{S}P = 90^\circ$  e  $\overline{OP}$  é lado comum a eles. Segue-se que  $PR = PS$ , em outros termos,  $d(P, \overline{OA}) = d(P, \overline{OB})$ .

Reciprocamente, seja  $P$  um ponto do interior do ângulo  $\sphericalangle AOB$ , tal que  $PR = PS$ , onde  $R$  e  $S$  são os pés das perpendiculares, baixadas de  $P$  respectivamente às retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ . Dessa forma  $\triangle_{OPR} \cong \triangle_{OPS}$ , pois  $PR = PS$ ,  $\overline{OP}$  é uma hipotenusa comum aos triângulos  $POR$  e  $OPS$ , e aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos  $POR$  e  $OPS$  teremos  $OR = OS$ . Com isso, concluímos que  $R\hat{O}P = S\hat{O}P$ ,

de forma que  $P \in$  (bissetriz de  $\sphericalangle AOB$ ). ■

## 3.2 Os pontos notáveis básicos

**Proposição 9** *Em todo triângulo, as mediatrizes dos três lados se interceptam em um único ponto.*

**Prova.** Sejam  $ABC$  um triângulo qualquer,  $v$  e  $u$ , respectivamente as mediatrizes dos lados  $BC$  e  $CA$ , e  $O$  o ponto de interseção dessas retas. De acordo com a Definição 5, temos:

$$OB = OC \text{ e } OC = OA \implies OB = OA,$$

logo a reta que passa por  $O$ , digamos que seja  $t$ , perpendicular a  $AB$  é a mediatriz de  $AB$ . Dessa forma, mostramos que as três mediatrizes se interceptam em um único ponto. ■

Este ponto de encontro das mediatrizes dos lados do triângulo é chamado de **circuncentro**.

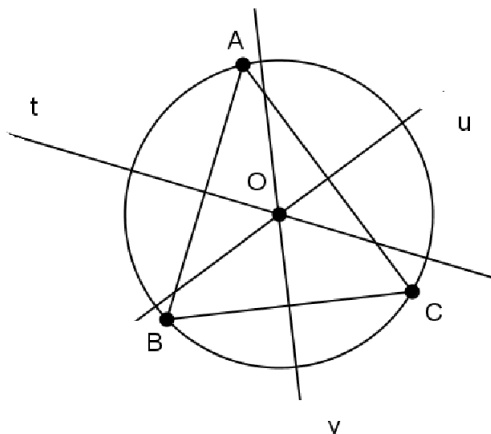


Figura 3.3:  $O$  é o circuncentro do triângulo.

**Proposição 10** *Todo triângulo admite um único círculo passando pelos seus vértices (círculo circunscrito ao triângulo) e o seu centro é o **circuncentro** do mesmo.*

**Prova.** Seja  $ABC$  um triângulo de circuncentro em  $O$ , então  $AO = OB = OC$  (como foi demonstrado). Considerando como sendo  $R$  essa distância, segue que o círculo de centro  $O$  e raio  $R$  passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Reciprocamente, o centro  $O$  do círculo que passa pelos vértices do triângulo  $ABC$  está a uma mesma distância dos mesmos. Logo o centro  $O$  pertence as mediatrizes dos lados de  $ABC$  e coincide com a interseção das mesmas, segue-se que  $O$  é o circuncentro. Para terminar, o raio do círculo tem medida igual a distância de  $O$  aos vértices, que é igual a  $R$ . ■

Na Aplicação 2.4.5 (do Capítulo 2), por meio do Teorema de Ceva, demonstramos que as três bissetrizes internas de um triângulo se interceptam em um único ponto, o **incentro**. Agora vamos a outra proposição que envolve esse ponto.

**Proposição 11** *Todo triângulo admite um único círculo contido no mesmo e tangente aos seus lados. O centro desse círculo é o **incentro** do triângulo e o círculo é dito **inscrito** no triângulo.*

**Prova.** Consideremos  $I$  como sendo o **incentro** de um triângulo  $ABC$ . Então  $I$  é o ponto de interseção das bissetrizes internas do triângulo  $ABC$ , logo:

$$d(I, \overline{AB}) = d(I, \overline{BC}), d(I, \overline{BC}) = d(I, \overline{CA}) \text{ e } d(I, \overline{CA}) = d(I, \overline{AB}).$$

Segue-se que

$$d(I, \overline{AB}) = d(I, \overline{BC}) = d(I, \overline{CA}),$$

ou seja,  $I$  é equidistante dos três lados do triângulo. Digamos que essa distância comum seja  $r$ , logo existe um círculo de centro  $I$  e raio  $r$  contido no triângulo  $ABC$ , e tangente a seus lados.

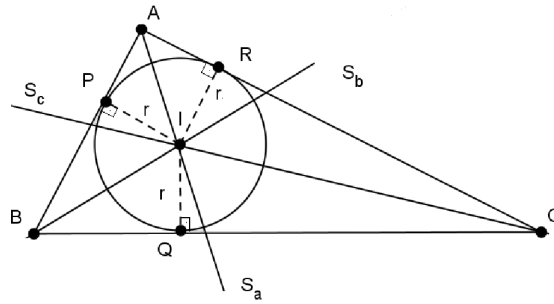


Figura 3.4: círculo inscrito no triângulo.

Reciprocamente, o centro de um círculo inscrito no triângulo  $ABC$  deve equidistar dos lados do mesmo. Portanto, o centro pertence às bissetrizes dos ângulos internos do triângulo  $ABC$ , logo coincide com o ponto de interseção das mesmas, que é o incentro  $I$ . Por fim, o raio do círculo, sendo a distância de  $I$  aos lados do triângulo, é igual a  $r$ . ■

**Proposição 12** *As medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto, o baricentro, e este divide cada mediana na razão de 2:1.*

**Prova.** Ver Aplicações 2.4.2 e 2.4.3 no Capítulo 2. ■

**Proposição 13** *Em um triângulo qualquer  $ABC$ , as três alturas concorrem em um ponto, denominado ortocentro.*

**Prova.** Para demonstração desta proposição, vamos considerar três casos:

### 1° Caso: Triângulo acutângulo

Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo e  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente, os pés das alturas desse triângulo sobre os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$ . De acordo com as considerações, temos que os triângulos  $DCA$  e  $FBA$  são semelhantes pelo caso

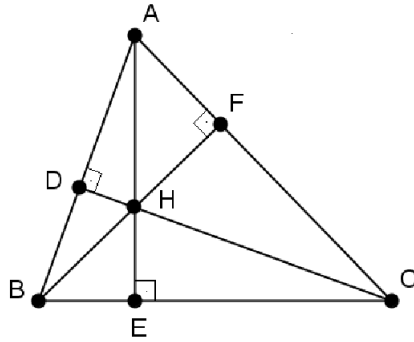


Figura 3.5: Ortocentro (H) de um triângulo acutângulo.

( $AA \sim$ ). Daí segue-se que:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AB}. \quad (3.1)$$

Analogamente, temos:

$$\triangle DBC \sim \triangle EBA,$$

o que nos dá

$$\frac{BE}{DB} = \frac{AB}{BC} \quad (3.2)$$

e

$$\triangle FBC \cong \triangle EAC,$$

resultando em

$$\frac{CF}{EC} = \frac{BC}{AC}. \quad (3.3)$$



Multiplicando membro a membro as equações (3.1), (3.2) e (3.3), obtemos:

$$\frac{AD}{AF} \cdot \frac{BE}{BD} \cdot \frac{CF}{EC} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} = 1$$

ou ainda

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1.$$

De acordo com o Teorema de Ceva (Teorema 3), as alturas  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AE}$  e  $\overline{BF}$  concorrem em um único ponto.

### 2° Caso: Triângulo retângulo

Seja  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$ . Então,  $A$  é o pé das alturas relativas aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ . Como o ponto  $A$  pertence (extremidade) à terceira altura,

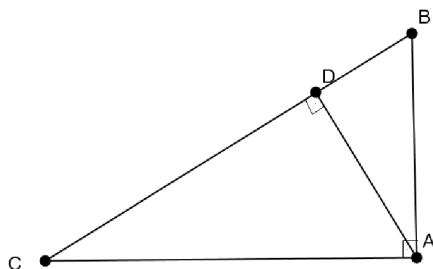


Figura 3.6:  $A$  é ortocentro do triângulo.

concluimos que as alturas do triângulo  $ABC$  concorrem em  $A$ .

### 3° Caso: Triângulo obtusângulo

Sejam  $\overline{AE}$  e  $\overline{BF}$  as alturas do  $\triangle_{ABC}$  que partem dos vértices dos ângulos agudos desse triângulo (conforme Figura 3.8). Prolonguemos os segmentos  $\overline{AE}$  e  $\overline{BF}$  no

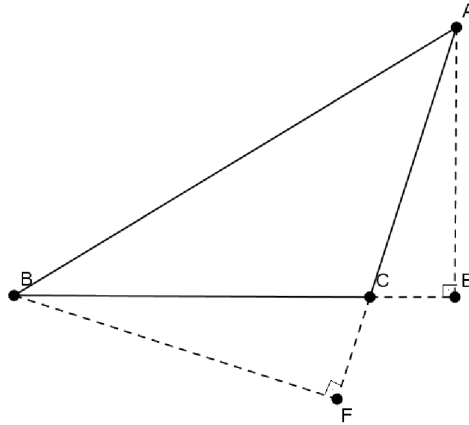


Figura 3.7:  $\overline{AE}$  e  $\overline{BF}$  são as alturas do triângulo obtusângulo.

sentido de se encontrarem em um ponto  $H$ .

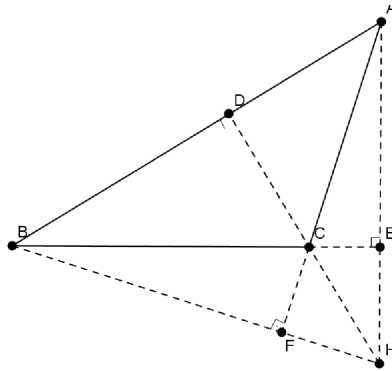


Figura 3.8: Triângulo acutângulo  $ABH$ .

Dessa forma, construímos o triângulo acutângulo  $ABH$ . Nele  $\overline{AF}$  e  $\overline{BE}$  são duas alturas que se encontram em  $C$ . Por meio da primeira demonstração, afirmamos que a altura que parte do vértice  $H$  ao lado oposto a esse vértice no triângulo  $ABH$  passa pelo ponto  $C$ , digamos que o pé dessa altura seja  $D$ . Dessa forma, temos  $\overline{HD} \perp \overline{AB}$ . Como  $C \in \overline{HD}$ , segue-se que  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ , logo  $\overline{CD}$  é a altura relativa ao lado  $\overline{AC}$  no triângulo  $ABC$ . Com o exposto, concluímos que  $\overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{BF} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{H\}$ ,

mostrando que as três alturas do triângulo  $ABC$  concorrem em  $H$ . ■

### 3.3 Explorando as definições e propriedades das Seções 3.1 e 3.2

Levando em consideração o contexto das seções apresentadas nesse capítulo, podemos chegar a outras conclusões importantes relacionadas a um triângulo, tais como: medidas de segmentos, áreas, colinearidade, paralelismo, entre outras.

Começemos explorando a Proposição 11. Para isso, vamos recorrer à Figura 3.4. Nela, vamos identificar a relação entre as medidas dos segmentos tangentes a circunferência inscrita no triângulo  $ABC$ .

**Proposição 14** *Se  $ABC$  é um triângulo circunscrito a uma circunferência, tal que os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$ , respectivamente, tangenciam a circunferência nos pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , então:*

$$AP = AR, BP = BQ \text{ e } CQ = CR.$$

**Prova.** Para tanto, consideremos a Figura 3.4. Nela, observemos que os triângulos  $QIB$  e  $PIB$  são congruentes, pois  $IQ = IP = r$ ,  $\widehat{IQB} = \widehat{IPB} = 90^\circ$  e  $\overline{IB}$  é lado comum (hipotenusa) dos triângulos  $QIB$  e  $PIB$ . Com isso temos  $\overline{BP} = \overline{BQ}$ . Analogamente, temos:

$$CQ = CR \text{ e } AR = AP$$

como desejado. ■

As igualdades  $AP = AR$ ,  $BP = BQ$  e  $CQ = CR$  da Proposição 14 podem se expressar em função das medidas dos lados do triângulo. Para isso consideremos no  $\triangle_{ABC}$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  e  $2p = a + b + c$ , conforme a Figura 3.9.

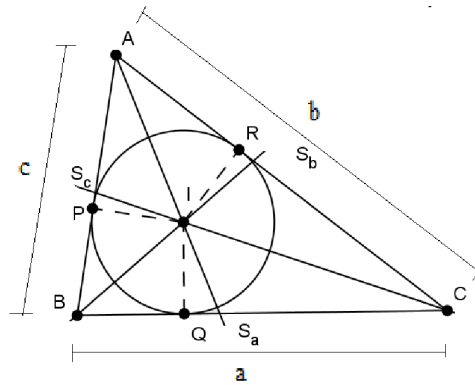


Figura 3.9: Circulo inscrito com  $BC = a$ ,  $CA = b$  e  $AB = c$ .

Da igualdade  $AP = AR$ , temos  $2AP = b + c - (BP + CR)$ . Já que

$$BP + CR = BQ + CQ = a,$$

segue-se que

$$2AP = b + c - a$$

ou ainda

$$AP = \frac{b + c - a}{2} = \frac{b + c - a - 2a}{2} = \frac{2p - 2a}{2} = p - a.$$

Analogamente, obtemos

$$BP = \frac{a + b - c}{2} = p - b$$

e

$$CR = \frac{a + b - c}{2} = p - c.$$

Portanto, podemos expressar as igualdades citadas da seguinte forma:

$$AP = AR = \frac{b + c - a}{2} = p - a$$

$$BP = BQ = \frac{a + c - b}{2} = p - b$$

$$CQ = CR = \frac{a + b - c}{2} = p - c.$$

Observando a Figura 3.9 percebemos uma situação propícia para obtermos um resultado importante sobre a área de um triângulo  $ABC$  ( $S_{ABC}$ ), em função da medida do raio da circunferência inscrita.

**Proposição 15** *Seja  $ABC$  um triângulo circunscrito em uma circunferência de raio  $r$  e lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Então a área  $S_{ABC}$  do triângulo  $ABC$  é  $S_{ABC} = r \cdot p$  sendo  $p$  o seu semiperímetro.*

**Prova.** Para nossa demonstração, tomemos como base a Figura 3.9. Nela temos que a área do  $\triangle_{BIC}$ , que vamos indicar por  $S_{BIC}$  pode ser expressa por  $S_{BIC} = \frac{a \cdot r}{2}$ , assim como  $S_{CIA} = \frac{b \cdot r}{2}$  e  $S_{AIB} = \frac{c \cdot r}{2}$ . Por outro lado, temos  $S_{ABC} = S_{BIC} + S_{CIA} + S_{AIB}$ . Logo

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = r \cdot \left( \frac{a + b + c}{2} \right) = r \cdot p,$$

como queríamos mostrar. ■

Na proposição anterior, tomamos o incentro como um referencial importante para obtermos a área de um triângulo. Esse resultado, por sua vez, pode ser empregado no cálculo da distância do incentro aos lados do triângulo associado a ele, ou seja, a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo. Para tanto, observemos dois outros resultados: a medida da altura de um triângulo (salientando que é uma ceviana) e a fórmula de Herão.

**Proposição 16** *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer tal  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $AC = b$ . Sejam também  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$ , respectivamente, os comprimentos das alturas relativas*

aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ . Então, valem as seguintes relações:

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}.$$

**Prova.** Vamos fazer a demonstração, levando em consideração dois casos:

1° Caso: a altura de um triângulo acutângulo;

Seja  $\overline{AE}$  a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ , com  $AE = h_a$  e  $BE = m$ , conforme a Figura 3.10.

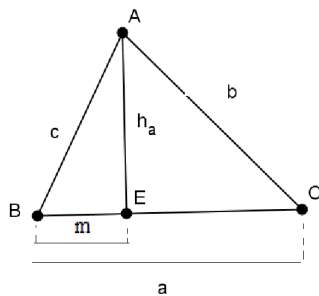


Figura 3.10: altura no triângulo acutângulo.

Dos triângulos retângulos  $AEB$  e  $AEC$ , temos:

$$c^2 = h_a^2 + m^2 \Rightarrow h_a^2 = c^2 - m^2 \quad (3.4)$$

$$b^2 = (a - m)^2 + h_a^2 = a^2 - 2am + m^2 + h_a^2 \Rightarrow b^2 = (a - m)^2 + h_a^2. \quad (3.5)$$

Aplicando (3.4) em (3.5), obtemos:

$$b^2 = a^2 - 2am + m^2 + c^2 - m^2 = a^2 - 2am + c^2,$$

o que implica que

$$m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \quad (3.6)$$

Agora substituimos (3.6) em (3.4), o que nos dá:

$$h_a^2 = c^2 - \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

e garante que:

$$\begin{aligned} 4a^2 h_a^2 &= 4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 \\ &= [2ac - (a^2 + c^2 - b^2)] \cdot [2ac + (a^2 + c^2 - b^2)] \\ &= [-(a^2 - 2ac + c^2) + b^2] \cdot [a^2 + 2ac + c^2 - b^2] \\ &= [-(a - c)^2 + b^2] \cdot [(a + c)^2 - b^2] \\ &= [b - (a - c)] \cdot [b + (a - c)] \cdot [(a + c) + b] \cdot [(a + c) - b] \\ &= (b + c - a) \cdot (a + c - b) \cdot (a + b - c) \cdot (a + b + c). \end{aligned}$$

Considerando que  $2p = a + b + c$ , segue-se que:

$$4a^2 h_a^2 = (2p - 2a) \cdot (2p - 2b) \cdot (2p - 2c) \cdot 2p = 2^4 \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c) \cdot p$$

e daí

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}.$$

De forma análoga, obtemos:

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}.$$

**2º Caso: o triângulo é obtusângulo e a altura parte de um dos vértices do ângulo agudo:**

Seja  $ABC$  um triângulo obtusângulo. Digamos que o ângulo interno desse triângulo no vértice  $A$  seja agudo,  $\overline{AE}$  seja a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$  e  $EB = m$ , conforme a Figura 3.11.

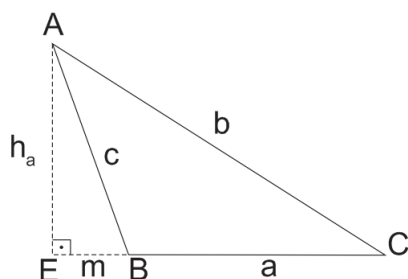


Figura 3.11: altura no triângulo obtusângulo.

Dos triângulos retângulos  $AEB$  e  $AEC$ , temos:

$$h_a^2 = c^2 - m^2 \tag{3.7}$$

$$b^2 = h_a^2 + a^2 + 2am + m^2. \tag{3.8}$$

Aplicando (3.7) em (3.8), ficamos com

$$m = \frac{-(a^2 + c^2 - b^2)}{2a}. \tag{3.9}$$



Agora vamos substituir (3.9) em (3.7), o que nos fornece

$$h_a^2 = c^2 - \left[ \frac{-(a^2 + c^2 - b^2)}{2a} \right]^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

A partir desse momento, o desenvolvimento é igual ao caso anterior. Portanto

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)},$$

como desejado. ■

**Observação 3** Na demonstração da proposição anterior, a igualdade (3.6) nos chamou a atenção. No triângulo acutângulo  $ABC$ , conforme Figura 3.10, a igualdade (3.6) determina a medida da projeção ortogonal ( $PO$ ) do lado  $\overline{AB}$  sobre o lado  $\overline{BC}$ . Com o raciocínio empregado em tal situação podemos obter:

- $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$ , medida da ( $PO$ ) do lado  $\overline{AC}$  sobre o lado  $\overline{BC}$
- $\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}$ , medida da ( $PO$ ) do lado  $\overline{BC}$  sobre o lado  $\overline{AC}$
- $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$ , medida da ( $PO$ ) do lado  $\overline{AB}$  sobre o lado  $\overline{AC}$
- $\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$ , medida da ( $PO$ ) do lado  $\overline{AC}$  sobre o lado  $\overline{AB}$
- $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$ , medida da ( $PO$ ) do lado  $\overline{BC}$  sobre o lado  $\overline{AB}$ .

No caso das medidas das projeções dos lados do ângulo obtuso em um triângulo  $ABC$ , colocamos o sinal negativo precedendo tal expressão, conforme (3.9).

Uma consequência da Proposição 16 é a *fórmula de Herão*<sup>1</sup>. Esta determina a área  $S_{ABC}$  de um triângulo qualquer  $ABC$  em função das medidas de seus lados.

**Corolário 1** [*Fórmula de Herão*] *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer, tal que  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$  e  $2p = a + b + c$ . Então a área  $S_{ABC}$  do triângulo  $ABC$  é dada por:*

$$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}.$$

**Prova.** Considerando  $h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$  como sendo a altura do triângulo  $ABC$  com relação a base  $BC$  (conforme Proposição 16), da fórmula tradicional da área de um triângulo ( $S_{ABC} = (1/2) \cdot (\text{base} \times \text{altura})$ ), temos que:

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}}{2} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

como desejado. ■

Em fim vamos determinar a distância do incentro aos lados do triângulo (medida do raio da circunferência inscrita no triângulo) em função das medidas desses lados.

**Teorema 5** *Seja  $r$  a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo  $ABC$ . Então*

$$r = \sqrt{\frac{(p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}{p}},$$

*sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas dos lados do triângulo  $ABC$  e  $p$  o seu semiperímetro.*

**Prova.** Seja  $ABC$  um triângulo circunscrito a uma circunferência de raio  $r$  com os lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Pela Proposição 15 temos que  $S_{ABC} = p \cdot r$ , já pelo Corolário

---

<sup>1</sup>**Herão de Alexandria** - (também escrito com *Hero* ou *Heran*, 10 d.C - 70 d.C.) foi um sábio matemático e mecânico grego. Seu trabalho mais importante no campo da geometria, **métrica**, permaneceu desaparecido até 1896. Na área de mecânica, ficou conhecido por inventar um mecanismo para provar a pressão do ar sobre os corpos, que ficou para a história como o primeiro motor a vapor.

1 (fórmula de Herão) tem-se  $S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$ . Segue-se que:

$$p \cdot r = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}.$$

Assim

$$r = \sqrt{\frac{(p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}{p}}$$

como afirmamos. ■

Na demonstração da Proposição 15 o incentro desempenhou um papel fundamental. Observando o baricentro de um triângulo  $ABC$ , também podemos obter conclusões interessantes sobre as áreas dos triângulos, que tem por vértices um vértice do triângulo  $ABC$ , o baricentro e o ponto médio do lado do mesmo.

**Teorema 6** *Seja  $G$  o baricentro do triângulo  $ABC$ , o ponto determinado pelas medianas  $AL$ ,  $BM$  e  $CN$ . Então*

$$S_{AGN} = S_{NGB} = S_{BGL} = S_{LGC} = S_{CGM} = S_{MGA}.$$

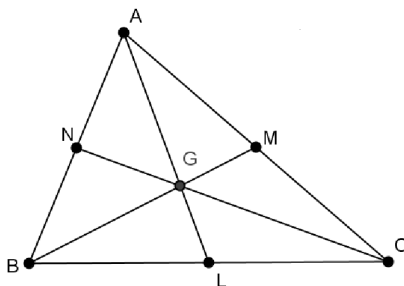


Figura 3.12: O  $\triangle_{ABC}$  dividido em seis triângulos de mesma área.

**Prova.** Observemos que os triângulos  $BGL$  e  $LGC$  possuem a mesma altura com relação ao lado  $BC$  e que  $BL = LC$ , logo  $S_{BGL} = S_{LGC}$ . Da mesma forma  $S_{CGM} = S_{MGA}$ . Analogamente os pares de triângulos  $AGN$  e  $NGB$ ,  $BAL$  e  $LAC$ ,

$ABM$  e  $MBC$ ,  $ACN$  e  $NCB$  possuem a mesma área. Segue-se que:

$$S_{BAL} = S_{LAC} \quad \text{e} \quad S_{BGL} = S_{LGC} \Rightarrow S_{AGN} + S_{NGB} = S_{CGM} + S_{MGA} \quad (3.10)$$

$$S_{ABM} = S_{MBC} \quad \text{e} \quad S_{AGM} = S_{CGM} \Rightarrow S_{AGN} + S_{NGB} = S_{BGL} + S_{LGC} \quad (3.11)$$

$$S_{ACN} = S_{NCB} \quad \text{e} \quad S_{AGN} = S_{BGN} \Rightarrow S_{BGL} + S_{LGC} = S_{CGM} + S_{MGA}.$$

Comparando (3.10) e (3.11), obtemos:

$$S_{CGM} + S_{MGA} = S_{BGL} + S_{LGC}. \quad (3.12)$$

Já que  $S_{MGA} = S_{CGM}$  e  $S_{BGL} = S_{LGC}$ , segue de (3.12) que

$$2 \cdot S_{CGM} = 2 \cdot S_{LGC} \Rightarrow S_{CGM} = S_{LGC}.$$

Com isso, temos que

$$S_{BGL} = S_{LGC} = S_{CGM} = S_{MGA}. \quad (3.13)$$

Um vez que  $S_{AGN} = S_{NGB}$ , segue-se de (3.10) e (3.13) que

$$2 \cdot S_{AGN} = 2 \cdot S_{MGA} \Rightarrow S_{AGN} = S_{MGA}. \quad (3.14)$$

Concatenando (3.13) e (3.14), segue o resultado

$$S_{BGL} = S_{LGC} = S_{CGM} = S_{MGA} = S_{AGN} = S_{NGB},$$

como queríamos provar. ■

Agora voltemos a atenção para os pontos  $L$ ,  $M$  e  $N$ , pés das medianas do  $\triangle_{ABC}$ .

Em um triângulo  $\triangle_{ABC}$ , o segmento que une dois pontos médios de seus lados

é chamado de **base média** do  $\triangle_{ABC}$ . Assim, o  $\triangle_{ABC}$  possui exatamente três *bases médias*, são elas os segmentos  $\overline{MN}$ ,  $\overline{NL}$  e  $\overline{LM}$ .

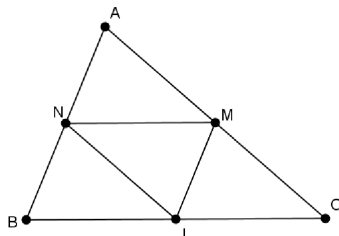


Figura 3.13:  $\overline{MN}$ ,  $\overline{NL}$  e  $\overline{LM}$ , são as bases médias do  $\triangle_{ABC}$ .

Na Figura 3.13, dizemos que  $\overline{NM}$  é a base média relativa ao lado  $\overline{BC}$  (ou ao vértice A), seguindo o mesmo padrão para  $\overline{NL}$  e  $\overline{LM}$ . Com base nessas colocações, definimos  $NLM$  como sendo o **triângulo medial** do  $\triangle_{ABC}$ .

A seguir provaremos alguns resultados relacionados ao triângulo medial que serão aplicados em breve.

**Teorema 7** *Num triângulo qualquer, o segmento de extremidade nos pontos médios de dois lados é paralelo ao outro lado e a sua medida é a metade deste.*

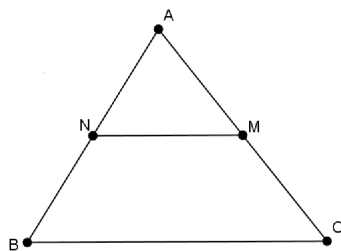


Figura 3.14:  $AM = MC$ ,  $AN = NB \Rightarrow \frac{NM}{BC} = \frac{1}{2}$  e  $MN = \frac{BC}{2}$ .

**Prova.** Na Figura 3.14, prolongando  $\overline{NM}$ , obtém-se um ponto  $N'$  tal que  $NM = MN'$ . Dessa forma surge o  $\triangle_{MN'C}$  congruente com  $\triangle_{MNA}$ , pois  $MN' = MN$ ,

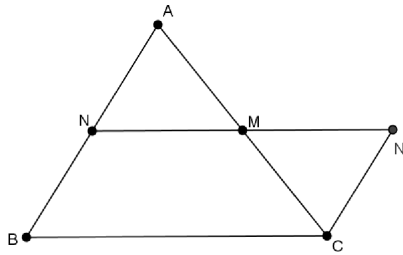
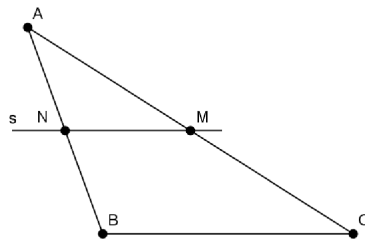


Figura 3.15:  $NN'BC$  é um paralelogramo.

$MC = MA$  e  $\widehat{CMN'} = \widehat{AMN}$ . Da congruência entre os triângulos temos que  $\widehat{N'NC} = \widehat{ANN'}$ , logo  $\overleftrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{CN'}$ . Como  $CN' = BN$ , concluímos que  $BNN'C$  é um paralelogramo (lados opostos são paralelos e congruentes). Segue-se que  $\overleftrightarrow{NN'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$  e  $NN' = BC$  e resultando em  $\overleftrightarrow{NM} \parallel \overleftrightarrow{BC}$  e  $NM = \frac{1}{2}BC$ . ■

**Proposição 17** *Se num triângulo uma reta passa pelo ponto médio de um lado e é paralela a um segundo lado, então, essa reta passa pelo ponto médio do terceiro lado.*



**Prova.** Faremos a demonstração por redução ao absurdo. Para tanto, consideremos os dados da Figura 3.3. Digamos que  $M$  não seja o ponto médio de  $\overline{AC}$ . Então existe um ponto  $P \in \overline{AC}$  tal que  $AP = PC$ , logo  $\overleftrightarrow{NP}$  seria uma paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$ , passando por  $N$ , distinta de  $s$ , o que é um absurdo, pelo **quinto postulado de Euclides**<sup>2</sup>. Na realidade,  $M = P$  e  $AM = MC$ . ■

<sup>2</sup>**Quinto postulado de Euclides:** "Se uma reta caindo sobre duas retas faz a soma dos ângulos internos do mesmo lado menor que dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas

**Observação 4** Com base nas proposições anteriores, é possível explorar relações importantes entre um triângulo  $ABC$  e o seu triângulo medial  $NLM$ .

Para o que se segue, consideremos um triângulo qualquer  $ABC$ , e  $N$ ,  $L$  e  $M$ , respectivamente, os pontos médios dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ .

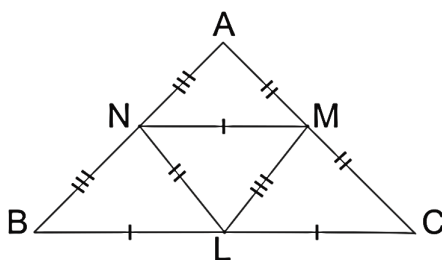


Figura 3.16:  $NLM$  triângulo medial do  $\triangle ABC$ .

Do Teorema 7, temos que  $NM = BL = LC$ ,  $LN = CM = MA$  e  $LM = BN = NA$ . Com isso concluímos que  $\triangle ANM \cong \triangle LMN \cong \triangle BLN \cong \triangle MLC$ , (caso LLL), logo  $S_{ANM} = S_{NML} = S_{BNL} = S_{MLC}$ . Observa-se também que a **razão de semelhança** (razão entre os comprimentos de dois segmentos correspondentes entre triângulo semelhantes) entre o triângulo  $NML$ , medial do triângulo  $ABC$ , e  $ABC$  é igual a  $\frac{1}{2}$ .

Mostramos algumas propriedades envolvendo semelhança e área entre um dado triângulo  $ABC$  e o seu triângulo medial. Entre esses dois triângulos também é possível extrair propriedades importantes entre cevianas e pontos notáveis. Para isso vejamos os teoremas a seguir.

---

*indefinidamente, encontram-se naquela dado em que a soma dos ângulos é menor que dois ângulos retos". (Extraído de [3], p.161). Este postulado é sobre retas paralelas, porém, não diz explicitamente que existem retas paralelas. Essa linguagem complicada, gerou preocupação em muitos matemáticos no decorrer da história. Eles viam esse postulado mais como um teorema. Na busca pela demonstração (geralmente por redução ao absurdo), ou seja transformá-lo em um teorema, construíram-se duas outras geometrias, que hoje faz parte da chamada geometria não euclidiana (o sistema de Lobachevsky, publicado em 1829, e o sistema de Riemann, publicado em 1854). O fato é que ninguém nunca conseguiu chegar a uma contradição em suas investidas. Hoje, em alguns livros, o quinto postulado se apresenta dessa forma: "Dado, no plano, uma reta  $r$  e um ponto  $A \notin r$ , existe uma única reta  $s$ , paralela a  $r$  e passando por  $A$ ".*

**Teorema 8** *O circuncentro de um triângulo qualquer coincide com o ortocentro do seu triângulo medial.*

**Prova.** Consideremos um triângulo  $ABC$  e sejam  $N$ ,  $L$  e  $M$  os pontos médios de seus lados conforme a Figura 3.17. Como  $\overline{NM}$  é paralelo a  $\overline{BC}$ , a mediatriz de

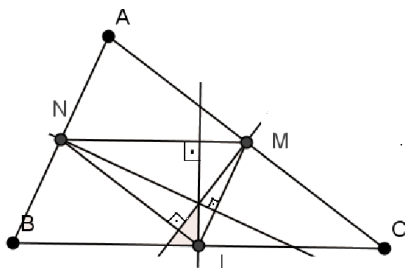


Figura 3.17:  $O$  é o circuncentro do  $\triangle_{ABC}$  e ortocentro do  $\triangle_{NLM}$ .

$\overline{BC}$  é perpendicular ao lado  $\overline{NM}$  do triângulo medial  $NLM$ . Da mesma forma, as mediatrizes de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  são as outras duas alturas do triângulo  $NLM$ . Portanto, as mediatrizes do triângulo  $ABC$  são as alturas do triângulo  $NLM$ , logo o circuncentro do triângulo  $ABC$  coincide com o ortocentro do seu triângulo medial. Os demais casos são totalmente análogos. ■

**Teorema 9** *O baricentro de um triângulo dado coincide com o baricentro do seu triângulo medial.*

**Prova.** Sejam  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  as medianas de um triângulo qualquer  $ABC$ , e  $G$  o seu baricentro, tal que  $\overline{AL} \cap \overline{NM} = \{A'\}$ ,  $\overline{BM} \cap \overline{NL} = \{B'\}$  e  $\overline{CN} \cap \overline{ML} = \{C'\}$ . Por construção, temos  $\overline{NA'} \parallel \overline{BL}$ , então o triângulo  $ANA'$  é semelhante ao triângulo  $ABL$ . Daí segue-se que  $\frac{NA'}{BL} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2}$ , visto que  $N$  é o ponto médio de  $\overline{AB}$ . Como  $BL = NM$  (ver Teorema 7) e  $BL = 2 \cdot NA'$ , temos  $BL = NM = 2 \cdot NA'$ , logo  $A'$  é ponto médio de  $\overline{NM}$ . Analogamente  $B'$  é médio de  $\overline{NL}$  e  $C'$  é médio de



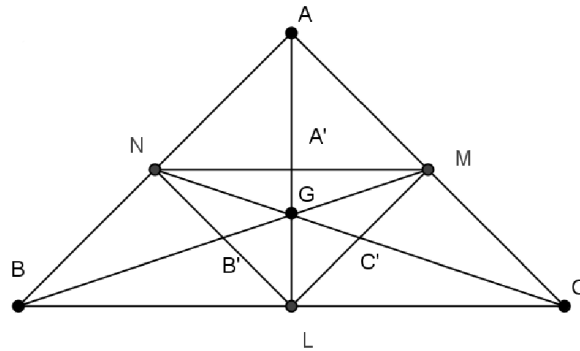


Figura 3.18:  $G$  é o baricentro dos  $\triangle_{ABC}$  e  $\triangle_{NLM}$ .

$\overline{ML}$ . Dessa forma,  $\overline{LA'}$ ,  $\overline{MB'}$  e  $\overline{NC'}$  são as medianas do triângulo  $LMN$ . Por outro lado, temos que  $A' \in \overline{LA}$ ,  $B' \in \overline{MB}$  e  $C' \in \overline{NC}$ , fazendo com que se cruzem também em  $G$ . ■

**Observação 5** *Pelas demonstrações dos Teoremas 8 e 9, observamos que*

- *As mediatrizes de um triângulo  $ABC$  contêm, ordenadamente, as alturas do seu triângulo medial.*
- *As medianas de um triângulo  $ABC$  contêm, ordenadamente, as medianas do seu triângulo medial.*

Outro triângulo que merece a nossa atenção e que também está ligado às cevianas de um dado triângulo é o **triângulo ótico**.

**Definição 6** *Chamamos de triângulo ótico de um triângulo acutângulo  $ABC$  ao triângulo obtido pela união dos pés das alturas do triângulo  $ABC$ .*

No intuito de explorarmos algumas propriedades do triângulo ótico, consideremos

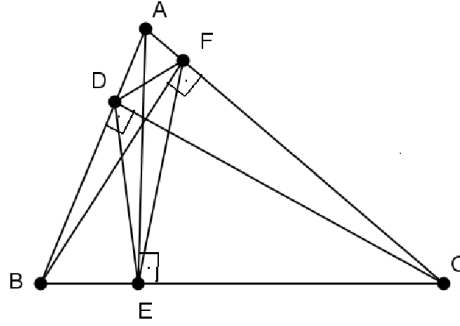


Figura 3.19: Triângulo ótico  $ABC$ .

os resultados a seguir sobre **quadrilátero inscrito**<sup>3</sup> e **ângulo inscrito**<sup>4</sup>, cujas demonstrações podem ser encontradas em [2].

**Proposição 18** *Um quadrilátero convexo  $ABCD$  de lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ , é inscrito se, e somente se, qualquer das condições a seguir for satisfeita:*

1<sup>a</sup>)  $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$ ;

2<sup>a</sup>)  $B\hat{A}C = B\hat{D}C$ .

**Proposição 19** *Todo ângulo inscrito que subtende um mesmo arco tem a mesma medida.*

**Teorema 10** *As alturas de um triângulo  $ABC$  são as bissetrizes do seu triângulo ótico.*

**Prova.** Seja um triângulo  $ABC$  e  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$  e  $\overline{CD}$  suas alturas. Consideremos também o seu ortocentro como sendo o ponto  $H$ , conforme a Figura 3.20. Observemos que  $HECF$  é inscrito, pois  $H\hat{E}C = H\hat{F}C = 90^\circ$  (2<sup>a</sup> condição da

<sup>3</sup>Um quadrilátero é inscrito quando existe uma circunferência passando pelos seus quatro vértices.

<sup>4</sup>Um ângulo se denomina inscrito em um círculo se seu vértice  $A$  é um ponto do círculo e seus lados cortam o círculo em pontos  $B$  e  $C$  distintos do Ponto  $A$ . Os pontos  $B$  e  $C$  determinam dois arcos. O arco que não contiver o ponto  $A$  é chamado arco correspondente ao ângulo inscrito dado, ou que o ângulo subtende o arco.

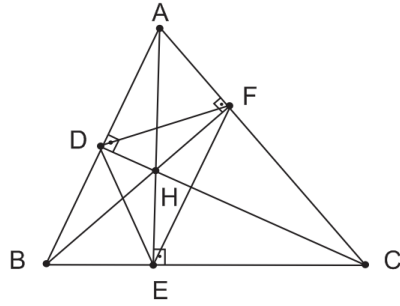


Figura 3.20:  $DEF$  é ótico de  $ABC \Rightarrow \overline{AE}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{BF}$  são, respectivamente, as bissetrizes de  $\widehat{DEF}$ ,  $\widehat{EDF}$  e  $\widehat{DFE}$ .

Proposição 18). Então existe uma circunferência circunscrita ao quadrilátero  $HECF$  na Figura 3.21, nela os ângulos inscritos  $\angle HEF$  e  $\angle HCF$  subtendem um mesmo arco. De acordo com a Proposição 19, temos  $\widehat{HEF} = \widehat{HCF} = \widehat{DCA} = 90^\circ - \widehat{A}$ . O quadrilátero  $HEBD$  também é inscritível ( $\widehat{BDH} = \widehat{BEH} = 90^\circ$ ) e na circunferência circunscrita a ele os ângulos inscritos  $\widehat{HED}$  e  $\widehat{HBD}$  também subtendem um mesmo arco, então  $\widehat{HED} = \widehat{HBD} = \widehat{FBA} = 90^\circ - \widehat{A}$ . Segue-se que  $\widehat{HEF} = \widehat{HED} = 90^\circ - \widehat{A}$ , mostrando que  $\overrightarrow{HE}$  é a bissetriz do ângulo  $\angle DEF$  do triângulo ótico,  $DEF$ . Analogamente, obtemos  $\widehat{FDH} = \widehat{EDH} = 90^\circ - \widehat{A}$ , mostrando que  $\overrightarrow{DH}$  é a bissetriz do ângulo  $\angle FDE$  e da mesma forma vemos que  $\overrightarrow{FH}$  é a bissetriz do ângulo  $\angle DFE$  do triângulo ótico. Como  $A \in \overrightarrow{EH}$ ,  $B \in \overrightarrow{FH}$  e  $C \in \overrightarrow{DH}$ , concluímos que as alturas  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$  e  $\overline{CD}$  do triângulo  $ABC$  são as bissetrizes do seu triângulo ótico  $DEF$ . ■

**Observação 6** Por meio da demonstração do Teorema 10, concluímos que:

- a) O ortocentro de um triângulo coincide com o incentro do seu triângulo ótico;
- b) Se  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  são ângulos internos de um triângulo acutângulo  $ABC$ , então os ângulos internos do seu triângulo ótico, opostos a  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, medem  $180^\circ - 2\widehat{A}$ ,  $180^\circ - 2\widehat{B}$  e  $180^\circ - 2\widehat{C}$ .

O próximo resultado trata das medidas dos lados de um triângulo ótico, de um triângulo  $ABC$  em função das medidas dos lados do triângulo. Para tanto, recorreremos à Observação 3 e a lei dos cossenos (a demonstração da lei dos cossenos encontra-se em [2, p.193]).

**Teorema 11** *Considere um triângulo  $ABC$  com  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $AC = b$ ; o triângulo  $DEF$ , ótico de  $ABC$  com  $D \in \overline{AB}$ ,  $E \in \overline{BC}$  e  $F \in \overline{AC}$ , sendo que  $DE = z$ ,  $EF = y$  e  $FD = x$ . Então*

$$\text{I)} \quad z = \left| \frac{(a^2 + c^2 - b^2) \cdot b}{2ac} \right|;$$

$$\text{II)} \quad y = \left| \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \cdot c}{2ab} \right|;$$

$$\text{III)} \quad x = \left| \frac{(b^2 + c^2 - a^2) \cdot a}{2bc} \right|.$$

**Prova.** Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $AC = b$ , sejam também  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente, os pés das alturas do triângulo  $ABC$  sobre os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , conforme a Figura 3.21. No triângulo  $DBE$ , temos:  $DB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$ ,

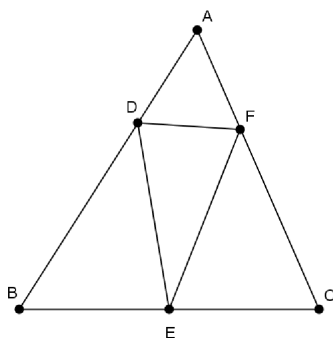


Figura 3.21: Medida dos lados do triângulo ótico.

$BE = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$  (conforme Observação 3) e  $DE = z$ . Nesse triângulo, de acordo

com a lei dos cossenos temos que:

$$\begin{aligned}
 z^2 &= \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right)^2 + \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2 - \frac{2(a^2 + c^2 - b^2)}{2c} \cdot \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2a} \cdot \cos \widehat{B} \\
 &= \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2} + \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} - \frac{2(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4ac} \cdot \cos \widehat{B} \\
 &= \frac{a^2 \cdot (a^2 + c^2 - b^2)^2 + c^2 \cdot (a^2 + c^2 - b^2)^2 - 2ac \cdot (a^2 + c^2 - b^2)^2 \cdot \cos \widehat{B}}{4a^2c^2} \\
 &= \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2 \cdot (a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B})}{4a^2c^2}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, no triângulo  $ABC$ , aplicando a mesma lei, temos que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \widehat{B}.$$

Sendo assim,

$$z^2 = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2 \cdot b^2}{4a^2c^2},$$

o que nos fornece

$$z = \left| \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac} \cdot b \right|.$$

De maneira totalmente análoga obtemos

$$y = \left| \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab} \cdot c \right| \quad \text{e} \quad x = \left| \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} \cdot a \right|,$$

como desejado. ■

Na verdade, os dois últimos triângulos que abordamos nessa seção pertencem a um grupo chamado de **triângulos pedais**. Os elementos desse grupo são triângulos formados pelos pés das cevianas de um triângulo  $ABC$ . Existem outros exemplos de triângulos pedais que também podem ser explorados em vários aspectos.

## Capítulo 4

# Teoremas clássicos não tão comuns associados a pontos e cevianas de um triângulo

### 4.1 Introdução

No ensino básico, quando falamos em cevianas ou em pontos notáveis do triângulo, a maioria dos alunos ou até mesmo dos professores se remetem apenas aos pontos e cevianas que abordamos nos capítulos anteriores do nosso trabalho, que são os mais conhecidos, mas esses não são os únicos. Ao longo dos tempos, foram descobertos inúmeros pontos associados a um triângulo.

Nesse capítulo serão apresentados mais algumas cevianas e pontos associados a um triângulo além dos que já apresentamos até aqui, objetivando torná-los mais comuns no ensino básico, pois os mesmos apresentam propriedades úteis e de grande importância. Também abordaremos mais algumas propriedades dos pontos notáveis básicos levando em conta o mesmo objetivo.

Sendo um assunto muito amplo, seria impossível tratarmos todos os pontos e

propriedades nesse trabalho. Portanto, vamos nos limitar a alguns destes.

## 4.2 A reta de Euler

Um importante resultado nesse contexto é o **Teorema da reta de Euler**<sup>1</sup>. Tal teorema refere-se à colinearidade de pontos notáveis (ortocentro, baricentro e o circuncentro) bem como a relação de distância entre eles. Mas antes consideremos o seguinte lema.

**Lema 3** *A distância do circuncentro ( $O$ ) de um triângulo a um de seus lados é igual à metade da distância do ortocentro ( $H$ ) ao vértice oposto.*

**Prova.** Faremos a demonstração do lema levando em consideração três casos:

### 1º Caso: Triângulo obtusângulo

Consideremos um triângulo obtusângulo  $ABC$  (digamos que o ângulo obtuso desse triângulo seja no vértice  $A$  e  $N$ ,  $L$  e  $M$ , respectivamente os pontos médios dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ ). Consideremos também  $F$ ,  $E$  e  $D$  como sendo os pés das alturas do triângulo  $ABC$ , respectivamente sobre as retas suporte dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ . Para facilitar o desenvolvimento da demonstração tomemos:

$$\widehat{BAC} = \theta, \widehat{ABC} = \alpha \text{ e } \widehat{BCA} = \beta.$$

Digamos que as alturas desse triângulo se encontrem em  $H$ , e as mediatrizes se encontrem em  $O$ , conforme a Figura 4.1

Pela Figura 4.1, percebemos que a demonstração deste caso resume-se basicamente em demonstrar que os triângulos  $HBC$  e  $OMN$  são semelhantes, visto que  $\frac{BC}{MN} = 2$  devido o teorema 7.3.3.8. Primeiro observemos que  $\triangle_{BFH} \sim \triangle_{CDH}$  (critério  $AA \sim$ ), então  $H\widehat{B}F = H\widehat{C}D$ . Por outro lado  $C\widehat{A}F = B\widehat{A}D = \alpha + \beta$

---

<sup>1</sup>**Leonard Euler:** matemático e físico suíço, nasceu na cidade de Basileia em 1707. Produziu muitos trabalhos em diversas áreas da Matemática, como Cálculo, Geometria e Grafos. Também se destacou por seus trabalhos em Mecânica, Óptica e Astronomia.

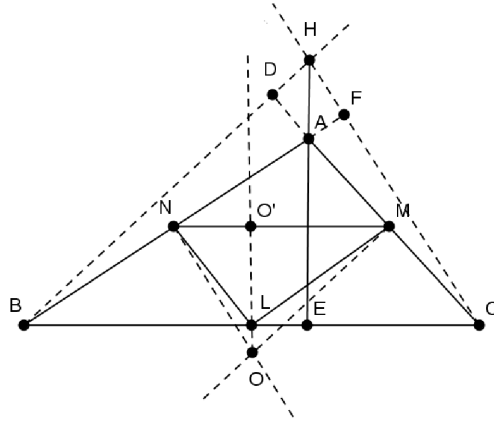


Figura 4.1:  $\triangle_{ABC} \cong \triangle_{OMN}$  e  $AH = 2 \cdot OL$ .

(teorema do ângulo externo aplicado no triângulo  $ABC^2$ ), com isso, temos que  $\widehat{ACF} = 90^\circ - (\alpha + \beta) = \widehat{ABD}$ . Voltemos à atenção para o fato que  $\triangle_{LMC} \cong \triangle_{BNL} \cong \triangle_{MLN} \cong \triangle_{NAM} \sim \triangle_{BAC}$  e  $NLMA$  é um paralelogramo. Como no paralelogramo  $NLMA$ ,  $\widehat{ANL} = \widehat{LMA} = \alpha + \beta$ , segue-se que  $\widehat{ONL} = \widehat{OMA} = 90^\circ - (\alpha + \beta)$ , pois  $\overline{ON} \perp \overline{AB}$  e  $\overline{OM} \perp \overline{AC}$ . Com isso concluímos que:

$$\widehat{ACF} = \widehat{ABD} = \widehat{OML} = \widehat{ONL} = 90^\circ - (\alpha + \beta)$$

e

$$\widehat{CBH} = \widehat{CBN} + \widehat{ABD} = \widehat{NML} + \widehat{LMO} = \widehat{NMO}$$

$$\alpha + 90^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ - \beta$$

e

$$\widehat{BCH} = \widehat{MNO} = \alpha + 90^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ - \beta$$

mostrando que  $\triangle_{HBC} \sim \triangle_{OMN}$  (**critério AA**  $\sim$ ). Consideremos  $O'$  como sendo o pé da altura do triângulo  $ONM$  sobre  $\overline{NM}$ . Da semelhança entre os triângulos

<sup>2</sup>A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele (a demonstração encontra-se em [2]).



$ABC$  e  $LMN$ , temos  $\frac{AE}{LO'} = 2$ , e da semelhança entre os triângulos  $HBC$  e  $OMN$ , temos:

$$\frac{HE}{OO'} = \frac{BC}{MN} = 2$$

bem como

$$\frac{HA + AE}{OL + LO'} = 2.$$

Assim,

$$HA + AE = 2OL + 2O'L = 2OL + AE = HA = 2OL = OL = \frac{HA}{2}.$$

Dessa forma demonstramos que a distância do circuncentro ( $O$ ) de um triângulo a um de seus lados (lado  $BC$  na Figura 4.1) é igual à metade da distância do ortocentro ( $H$ ) ao vértice oposto (vértice  $A$  na Figura 4.1).

### 2º Caso: Triângulo acutângulo

Na Figura 4.2 sejam  $L$  e  $M$ , respectivamente, pontos médios dos lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ ;  $E$  e  $D$ , pés das alturas do triângulo  $ABC$  sobre os lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente. Consideremos também  $H$  como o ortocentro e  $O$  como o circuncentro do triângulo  $ABC$ . Provaremos que  $OL = HA/2$ .

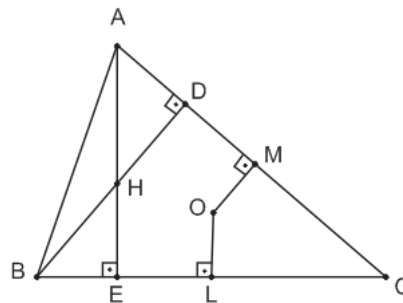


Figura 4.2:  $\triangle OLM \cong \triangle HAB$  e  $HA = 2 \cdot OL$ .

Temos  $\overline{OH} \parallel \overline{HA}$ ,  $\overline{OM} \parallel \overline{HB}$ ,  $\overline{LM} \parallel \overline{AB}$  e  $\overline{LM} = AB/2$  Proposição 3.3.8. Daí segue que  $\widehat{MLC} = \widehat{ABE} = \widehat{ABC}$  e  $\widehat{OLM} + \widehat{MLC} = 90^\circ - \widehat{MLC} = 90^\circ - \widehat{ABE}$ . Por

outro lado,  $H\hat{A}B = 90^\circ - A\hat{B}E$ , logo  $O\hat{L}M = H\hat{A}B$ . Analogamente mostramos que  $O\hat{L}M = A\hat{B}H$  e conseqüentemente os triângulos **OML** e **HBA** são semelhantes na razão  $1/2$ . Portanto  $OL = HA/2$ .

### 3º Caso: Triângulo retângulo

Observemos que num triângulo retângulo o circuncentro ( $O$ ) coincide com o ponto médio da hipotenusa e o ortocentro ( $H$ ) coincide com o vértice do ângulo reto, vejamos a Figura 4.3. Sendo  $\overleftrightarrow{ML}$  a mediatriz de  $\overline{BC}$ , temos que  $\overline{ML} \perp \overline{AB}$  e

$$ML = OL = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AH,$$

logo

$$AH = 2 \cdot OL,$$

o que conclui esta demonstração. ■

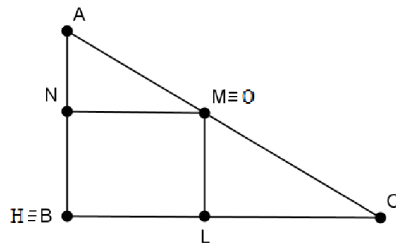


Figura 4.3:  $HA = 2 \cdot OL$  no triângulo retângulo.

**Teorema 12** [Reta de Euler] *Em um triângulo, o ortocentro ( $H$ ), o baricentro ( $G$ ) e o circuncentro ( $O$ ) estão alinhados. Além disso, o baricentro divide o segmento cujas extremidades são o circuncentro e o ortocentro, na razão  $1 : 2$ .*

**Prova.** Na Figura 4.4, sejam  $\overleftrightarrow{LO}$  a mediatriz do segmento  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AE}$  a altura do triângulo  $ABC$  com relação a base  $\overline{BC}$ ,  $H$  o ortocentro e  $O$  circuncentro de  $ABC$ .

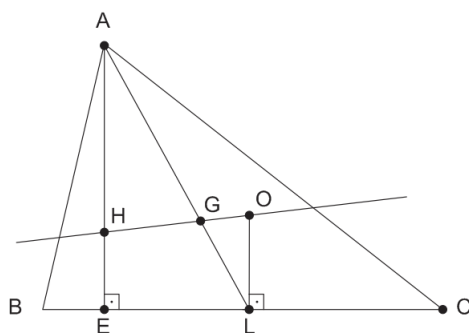


Figura 4.4: **HO** é a reta de Euler.

Digamos que a mediana  $\overline{AL}$  intercepte o segmento  $\overline{OH}$  em um ponto  $G$ . Pelo paralelismo entre os segmentos  $\overline{OL}$  e  $\overline{AE}$ , temos que  $\widehat{GAH} = \widehat{GLO}$ , e como  $\widehat{HGA} = \widehat{OGL}$  (ângulos opostos pelo vértice), os triângulos  $AHG$  e  $LOG$  são semelhantes. Da semelhança entre eles temos  $\frac{GA}{GL} = \frac{HA}{OL}$  e do Lema 3 temos  $AH = 2 \cdot OL$ , segue-se que  $\frac{GA}{GL} = 2$  sendo  $G$ , portanto, o baricentro do triângulo  $ABC$  conforme Proposição 3 da Aplicação 2.4.3. Ainda desta semelhança temos que  $\frac{GO}{GH} = \frac{OL}{HA} = \frac{1}{2}$ , mostrando assim que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são colineares e o baricentro divide o segmento  $\overline{OH}$  na razão 1 : 2. ■

### 4.3 Circunferência de nove pontos

A Circunferência dos Nove Pontos está relacionada a um triângulo de modo a passar pelos pontos médios de seus lados, pelos pés de suas alturas e pelos pontos médios dos segmentos que unem seus vértices ao ortocentro. Estes últimos pontos que mencionamos também são chamados de **Pontos de Euler**. Por esse motivo, alguns autores chamam a circunferência dos nove pontos de circunferência de Euler. Porém, foi o geômetra alemão Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) que recebeu os créditos pela descoberta da circunferência dos nove pontos. Embora tenha sido abordado em referências mais antigas, o teorema da circunferência dos nove pontos só

veio a ser demonstrado por Feuerbach no livro “*Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren*” (Propriedades de alguns pontos especiais no plano de um triângulo, várias retas e figuras determinadas por estes pontos: um tratamento analítico trigonométrico) com uma versão um pouco diferente da que temos hoje. Nessa demonstração, ele só menciona a incidência de seis pontos na circunferência: os três pontos médios dos lados e os três pés das alturas. Na verdade, Feuerbach descobriu a circunferência de seis pontos, a qual também ficou chamada de circunferência de **Feuerbach**.

A outra publicação (analítica) sobre esse problema foi feita pelo matemático francês Oby Terquem (1702-1862). Nessa versão, ele mostrou a incidência dos três pontos de Euler na circunferência e a chamou de “*le cercle des neuf points*” (circunferência dos nove pontos).

Outros autores descobriram mais pontos importantes que incidem sobre essa circunferência, é tanto que por muitos, ela é chamada de circunferência dos n-pontos.

A circunferência, que estamos mencionando, trata-se de uma figura complexa que guarda muitas propriedades, e o nosso objetivo aqui não é fazer uma ampla abordagem sobre esse tema, mas, sim, focar algumas propriedades básicas sobre tal assunto.

As informações de caráter histórico dessa seção foram encontradas em [14] e [16].

**Teorema 13** [*Circunferência dos Nove Pontos*] *Seja  $ABC$  um triângulo de circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$ . Então, os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que ligam  $H$  aos vértices estão em uma circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento  $\overline{OH}$  e cujo raio é a metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ .*

**Prova.** No triângulo  $ABC$  da Figura 4.6, sejam  $H$  o seu ortocentro,  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BD}$  e  $\overline{CF}$  suas alturas,  $O$  seu circuncentro e  $L$ ,  $N$ ,  $M$  os pontos médios de seus lados.

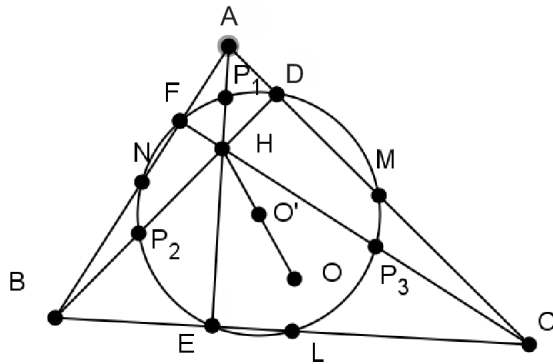


Figura 4.5: Circunferência dos nove pontos.

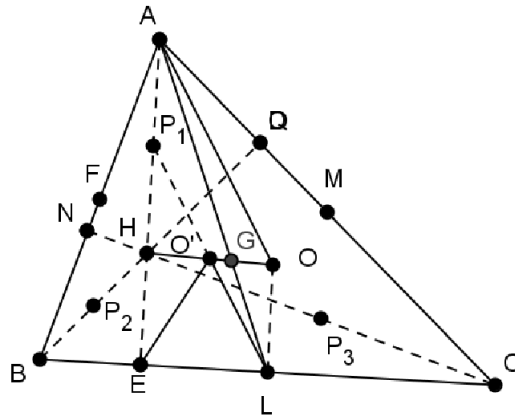


Figura 4.6:  $\overline{O'L}$  e  $\overline{OA}$  são paralelos.

Agora consideremos  $O'$  como sendo o ponto médio do segmento  $\overline{OH}$ . De acordo com o Teorema da reta de Euler (Teorema 12) o baricentro ( $G$ ) divide o segmento  $\overline{OH}$  na razão de 1 : 2, então:

$$GH = 2 \cdot OG \Rightarrow GO' + O'H = 2 \cdot OG.$$

Como  $O'H = O'O$ , temos

$$GO' + O'O = 2 \cdot OG \Rightarrow GO' + O'G + GO = 2 \cdot OG.$$

Assim

$$2 \cdot GO' = OG \Rightarrow \frac{GO'}{OG} = \frac{1}{2}. \quad (4.1)$$

Pela Aplicação 2.4.3 temos que

$$\frac{AG}{GL} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{GL}{AG} = \frac{1}{2}. \quad (4.2)$$

Por outro lado, temos

$$L\widehat{GO}' = A\widehat{GO}(\text{ângulos o.p.v.}). \quad (4.3)$$

Com base em (4.1), (4.2) e (4.3), concluímos que os triângulos  $LGO'$  e  $AGO$  são semelhantes (caso  $LAL \sim$ ). Segue-se que  $G\widehat{O}'L = G\widehat{O}A$ , o que implica que os segmentos  $\overline{O'L}$  e  $\overline{OA}$  são paralelos e  $\frac{O'L}{OA} = \frac{1}{2}$  (razão de semelhança entre  $\triangle_{LGO'}$  e  $\triangle_{AGO}$ ), donde

$$O'L = \frac{1}{2}OA. \quad (4.4)$$

Tomamos agora um ponto  $P_1$  tal que  $\{P_1\} = \overleftrightarrow{O'L} \cap \overleftrightarrow{AH}$ . Como  $O'$  é ponto médio de  $\overline{OH}$  e  $\overleftrightarrow{O'L} \parallel \overleftrightarrow{OA}$ , temos que o segmento  $\overline{OP_1}$  é a base média relativa a  $\overline{OA}$  do triângulo  $AHO$  (ver Proposição ??). Portanto  $P_1$  é o ponto médio de  $AH$  e

$$O'P_1 = \frac{1}{2}OA. \quad (4.5)$$

Observemos também que  $\overline{HO}$  é lado transverso do trapézio retângulo  $EHOL$  e  $O'$  é ponto médio desse lado, então

$$O'E = O'L. \quad (4.6)$$

Por meio das igualdades (4.4), (4.5) e (4.6), concluímos que

$$O'E = O'L = O'P_1 = \frac{1}{2}OA,$$

onde  $\overline{OA}$  é um raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ . Dessa forma, mostramos que passa um circunferência  $\Gamma$  pelos pontos  $P_1, E, L$  com raio igual a metade do raio do círculo circunscrito ao triângulo  $ABC$ . Com o mesmo raciocínio, aplicado aos vértices  $B$  e  $C$ , veremos que a circunferência  $\Gamma$  também passa pelos pontos  $P_2, P_3, F, D, M$  e  $N$ . ■

**Definição 7** [*Pontos de Euler*] Chamamos de *Pontos de Euler* os pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro aos vértices do triângulo, que coincide com os pontos de interseção da circunferência dos nove pontos com as alturas do triângulo.

Na circunferência dos nove pontos da Figura 4.5, os pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  são **Pontos de Euler**.

## 4.4 Ponto de Gergonne

Agora voltemos à atenção para a outra circunferência que já foi mencionada no nosso trabalho e é bastante conhecida, no caso, a inscrita a um triângulo. Sobre a mesma, já sabemos que ela tangencia os três lados do triângulo em questão e que o seu centro coincide com o incentro do mesmo. Os três pontos de tangência, por sua vez, são os pés de três cevianas que determinam mais um ponto clássico associado ao

triângulo que a circunscreve, o **ponto de Gergonne**<sup>3</sup>, o qual já não é tão comum como o incentro.

**Teorema 14** [O ponto de Gergonne] *Seja  $\Gamma$  uma circunferência inscrita em um triângulo  $ABC$ , tal que os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$  sejam, respectivamente, tangentes a  $\Gamma$  nos pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ . Então as cevianas  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{BR}$  e  $\overline{CP}$  são concorrentes em um ponto, chamado **Ponto de Gergonne** ( $P_g$ ).*

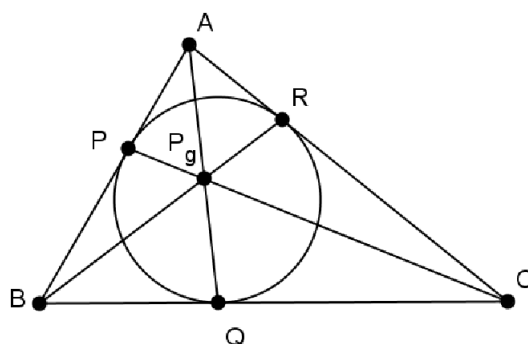


Figura 4.7:  $P_g$  é o Ponto de gergonne.

**Prova.** De acordo com a Proposição 14, temos  $AR = AP$ ,  $BP = BQ$  e  $CQ = CR$ .

Então,

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \frac{AR}{BQ} \cdot \frac{BQ}{CR} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

é a condição de Ceva (Teorema 3) para que as cevianas  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{BR}$  e  $\overline{CP}$  se interceptem em um único ponto, que nesse caso recebe o nome de **Ponto de Gergonne**. ■

**Observação 7** *Se o  $\triangle_{ABC}$  for equilátero então  $P_g$  coincide com o incentro de  $ABC$ .*

<sup>3</sup>**Joseph Diaz Geogonne(1771-1859)** foi oficial de artilharia e professor de matemática francês, nascido em Nancy. Desenvolveu trabalhos importantes tanto na geometria plana como na geometria projetiva.



## 4.5 Circunferências Exinscritas a um Triângulo e o Ponto de Nagel

Definido o ponto de Gergonne, agora vamos tomá-lo com um referencial para a obtenção de outro ponto clássico, o **Ponto de Nagel** ( $P_n$ ). Para isso consideremos a construção a seguir.

**Construção 4.5.1.** [*O Ponto de Nagel construído a partir do ponto de Gergonne*]

Consideremos em um mesmo triângulo  $ABC$ , o ponto de Gergonne  $P_g$  determinado pelas cevianas  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{BR}$  e  $\overline{CP}$ , e o baricentro  $G$  determinado pelas medianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$ , conforme a figura abaixo.

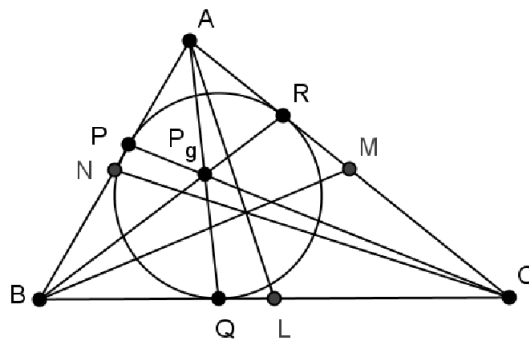


Figura 4.8: Ponto de Gergonne e as medianas do  $\triangle_{ABC}$ .

Agora fixemos:

- um ponto  $Q' \in BC$ , simétrico a  $Q$  com relação a  $L$ ;
- um ponto  $R' \in AC$ , simétrico a  $R$  com relação a  $M$ ;
- um ponto  $P' \in AB$ , simétrico a  $P$  com relação a  $N$ .

Dessa forma temos que

$$CR' = AR = AP = BP' \quad (4.7)$$

bem como

$$AP' = BP = BQ = Q'C \quad (4.8)$$

e de modo análogo, tem-se

$$BQ' = AR'. \quad (4.9)$$

Levando em consideração as igualdades (4.7), (4.8) e (4.9) e o **Teorema de Ceva**, concluímos que as cevianas  $\overline{AQ'}$ ,  $\overline{BR'}$  e  $\overline{CP'}$ , se encontram em um ponto, pois

$$\frac{BQ'}{Q'C} \cdot \frac{CR'}{AR'} \cdot \frac{AP'}{BP'} = \frac{AR'}{AP'} \cdot \frac{BP'}{AR'} \cdot \frac{AP'}{BP'} = 1.$$

Designemos o ponto de interseção das cevianas  $\overline{AQ'}$ ,  $\overline{BR'}$  e  $\overline{CP'}$  por  $P_n$ .

O ponto  $P_n$  assim obtido é chamado de **Ponto de Nagel**.

O Ponto de Nagel, que foi obtido pela construção que fizemos anteriormente, possui relações intrínsecas com as **circunferências exinscritas associadas ao triângulo**. Para o que se segue sobre o ponto de Nagel e essas circunferências, consideremos as seguintes proposições.

**Proposição 20** *Em todo triângulo  $ABC$ , existe uma única circunferência tangente ao lado  $\overline{AC}$  e aos prolongamentos dos lados  $\overline{BA}$  e  $\overline{BC}$ . Essa é a **circunferência exinscrita** ao lado  $\overline{AC}$  e o seu centro é o **exinscentro** do triângulo  $ABC$  relativo a  $\overline{AC}$ .*

**Prova.** Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Sabemos que o ângulo externo do vértice

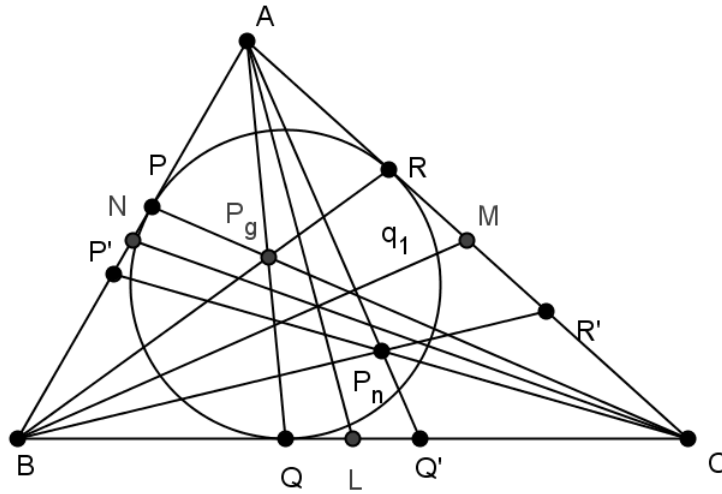


Figura 4.9:  $P_n$  é o Ponto de Nagel.

$A$ , que vamos designar por  $Ex\hat{A}$ , é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a esse vértice (ver [2], p.75). Então  $Ex\hat{A} = \hat{ABC} + \hat{BCA} < 180^\circ$ . Dessa forma, podemos afirmar que as bissetrizes dos dois ângulos externos do triângulo  $ABC$  contidas em um mesmo semiplano determinado pela reta  $\overleftrightarrow{AC}$  são concorrentes em um ponto, visto que tais bissetrizes formam ângulos agudos com o lado  $\overline{AC}$ . Consideremos  $u$  e  $v$  como sendo tais bissetrizes e  $I_b$  o ponto de interseção entre elas, conforme a Figura 4.10.

Como  $I_b \in u$  e  $I_b \in v$ , temos que:

$$d(I_b, \overleftrightarrow{BA}) = d(I_b, \overleftrightarrow{AC}) = d(I_b, \overleftrightarrow{BC}),$$

logo existe uma circunferência de centro em  $I_b$  e raio  $r = d(I_b, BC)$  tangenciando  $\overleftrightarrow{BA}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ .

Reciprocamente, o centro da circunferência que tangencia  $\overleftrightarrow{AC}$ ,  $\overleftrightarrow{BA}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$  deve equidistar dos mesmos. Portanto, ele pertence à interseção das bissetrizes  $u$  e  $v$ ,

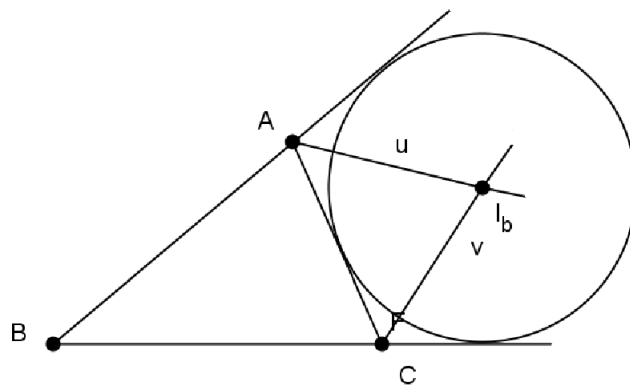


Figura 4.10: Circunferência exinscrita ao lado  $AC$  do  $\triangle_{ABC}$ .

donde coincide com o ponto  $I_b$  e tem raio igual a  $r$ . ■

**Observação 8** *Todo triângulo admite exatamente três circunferências exinscritas, sendo:*

- $I_b$  o exincentro relativo ao lado  $\overline{AC}$  (como já demonstramos);
- $I_c$  o exincentro relativo ao lado  $\overline{AB}$ ;
- $I_a$  o exincentro relativo ao lado  $\overline{BC}$ .

**Proposição 21** *Seja  $\Gamma_i$  a circunferência inscrita no triângulo  $ABC$ , tal que  $\Gamma_i$  tangencia os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  respectivamente, nos pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , sejam também  $\Gamma_a$ ,  $\Gamma_b$  e  $\Gamma_c$  as circunferências exinscritas ao triângulo  $ABC$ , tal que  $\Gamma_a \cap \overline{BC} = \{Q'\}$ ,  $\Gamma_b \cap \overline{AC} = \{R'\}$  e  $\Gamma_c \cap \overline{AB} = \{P'\}$ . Então:*

- $AP = BP'$ ;
- $CQ = BQ'$ ;
- $CR = AR'$ .

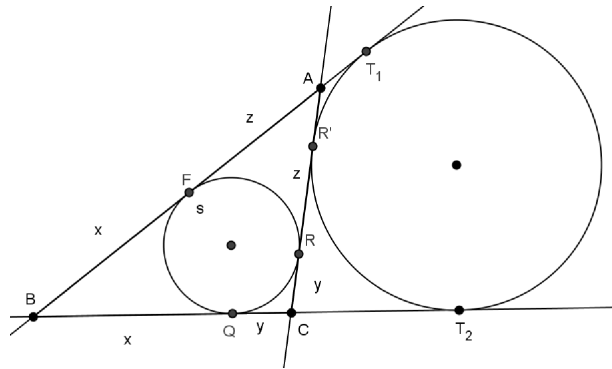


Figura 4.11:  $AR = CR'$ .

**Prova.** Vamos começar demonstrando que  $CR = AR'$ , para isso recorreremos à Proposição 14 e a Figura 4.11.

Na Figura 4.11 de acordo com a proposição mencionada, temos

$$BT_1 = BT_2 \Rightarrow BC + CT_2 = BA + AT_1.$$

Como  $AT_1 = AR'$  e  $CT_2 = CR'$ , segue que

$$BC + CR' = BA + AR'.$$

Dessa forma  $R'$  divide o perímetro do triângulo  $ABC$  em duas partes iguais. Agora tomemos,  $BQ = x$ ,  $QC = y$  e  $PA = z$ . Conseqüentemente

$$BQ = BP = x, AP = AR = z \text{ e } QC = CR = y.$$

Então o semiperímetro  $p$  do triângulo  $ABC$  é tal que  $p = x + y + CR'$ . Mas também temos  $p = x + y + z$ , pois  $2p = 2x + 2y + 2z$ . Segue que

$$x + y + CR' = x + y + z,$$

logo  $CR = z$ , o que implica

$$AR = CR' \text{ e } AR' = CR.$$

Repetindo os procedimentos para os lados  $\overline{BA}$  e  $\overline{BC}$  encontramos  $AP = BP'$  e  $CQ = BQ'$ . ■

**Observação 9** Vejamos que:

- $AP = BP' \Rightarrow AP' = PB = BQ = CQ'$ ;
- $BQ = CQ' \Rightarrow BQ' = CQ = CR = AR'$ ;
- $CR = AR' \Rightarrow CR' = AR = AP = BP'$ .

**Observação 10** Do que foi demonstrado é fácil ver que:

- o ponto médio de  $AB$  coincide com o ponto médio de  $PP'$ ;
- o ponto médio de  $BC$  coincide com o ponto médio de  $QQ'$ ;
- o ponto médio de  $AC$  coincide com o ponto médio de  $RR'$ .

Em fim, vamos ao teorema que relaciona o ponto de Nagel de um triângulo  $ABC$  com as circunferências exinscritas a ele.

**Teorema 15** *As três cevianas determinadas por um vértice e pelo ponto de tangência da circunferência exinscrita com o lado oposto a esse vértice são concorrentes em um ponto chamado ponto de Nagel.*

**Prova.** A demonstração segue imediatamente da Proposição 21, de suas observações e do **Teorema de Ceva**. Sejam  $ABC$  um triângulo qualquer,  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , os pontos de tangência da circunferência inscrita sobre os lados desse triângulo,  $P'$ ,  $Q'$  e  $R'$ , os pontos de tangência das circunferências exinscritas, conforme a Figura 4.12.

Da Proposição 21, temos que  $AP' = CQ'$ ,  $BQ' = AR'$  e  $CR' = BP'$ . Segue-se que

$$\frac{AP'}{P'B} \cdot \frac{BQ'}{Q'C} \cdot \frac{CR'}{AR'} = \frac{CQ'}{P'B} \cdot \frac{AR'}{Q'C} \cdot \frac{BP'}{AR'} = 1,$$

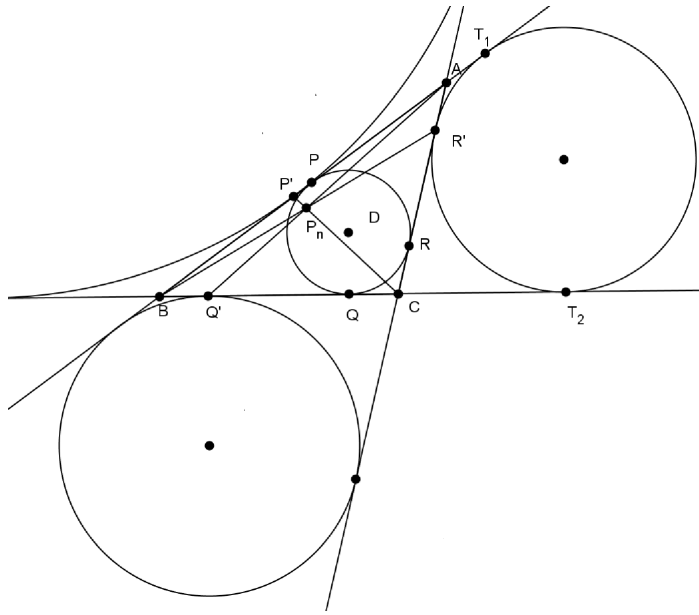


Figura 4.12:  $AR = CR'$ .

que é a condição de Ceva para que as cevianas  $\overline{AQ'}$ ,  $\overline{BR'}$  e  $\overline{CP'}$  sejam concorrentes em um único ponto, nesse caso o ponto de Nagel. ■

## 4.6 Ponto de Feuerbach

No nosso trabalho, mostramos o ponto de Nagel como sendo o resultado de certas relações (que já foram discriminadas) entre a circunferência inscrita e as circunferências exinscritas em um triângulo. Obviamente, existem relações entre esse conjunto de circunferências e a circunferência de nove pontos, como veremos a seguir. Este resultado é conhecido como **Teorema de Feuerbach**.

**Teorema 16** *A circunferência de nove pontos é tangente a circunferência inscrita e as três circunferências exinscritas ao triângulo.*

Não faremos a demonstração desse teorema, pois a mesma depende de assuntos que fogem aos objetivos do nosso trabalho. Porém, o leitor pode encontrá-la em [17]

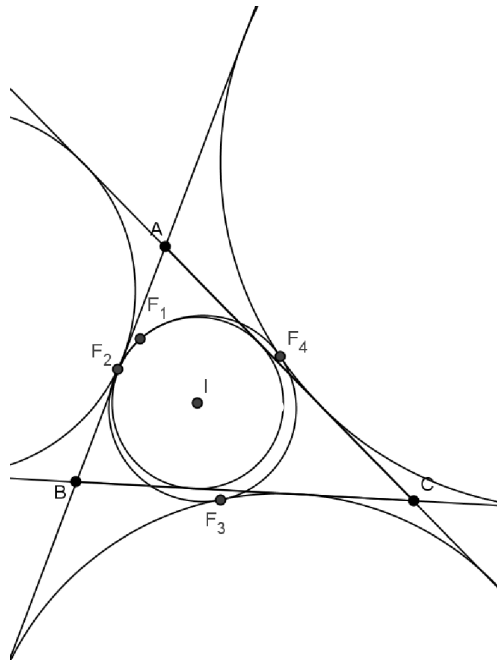


Figura 4.13:  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  e  $F_4$ , são os Pontos de Feuerbach.

**Definição 8** *Os pontos de interseção da circunferência de nove pontos e as circunferências inscritas e exinscritas associadas a um triângulo são chamados de pontos de Feuerbach.*

## 4.7 Pontos isotômicos e retas isotômicas em um triângulo

A construção do ponto de Nagel a partir do ponto de Gergonne (Construção 4.5.1.), a Proposição 21 (medidas de segmentos tangentes), bem como o Teorema 15 (Pontos de Nagel) estão ligadas aos conceitos de pontos isotômicos e retas isotômicas em um triângulo.



**Definição 9** *Dois pontos pertencentes a um mesmo lado de um triângulo dizem-se “isotômicos” se forem simétricos em relação ao ponto médio desse lado.*

**Definição 10** *Duas cevianas que partem de um mesmo vértice, dizem-se “conjugadas isotômicas” se seus pés no lado oposto são pontos isotômicos.*

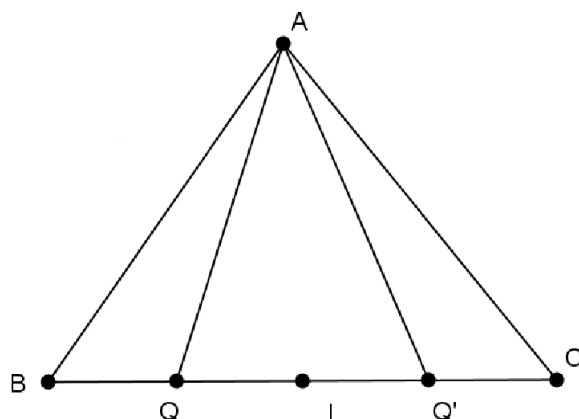


Figura 4.14:  $L$  é o ponto médio de  $BC$ ,  $Q$  e  $Q'$  são isotômicos.

**Teorema 17** *Seja  $V$  o ponto determinado por três cevianas de um triângulo  $ABC$ . Então, as conjugadas isotômicas das cevianas que determinam  $V$  se encontram em um ponto  $V'$  chamado recíproco de  $V$ .*

**Prova.** Sejam as cevianas  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{BR}$  e  $\overline{PC}$ , tal que  $\overline{AQ} \cap \overline{BR} \cap \overline{PC} = \{V\}$ . Segue que

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$

Agora tomemos as cevianas  $\overline{AQ'}$ ,  $\overline{BR'}$  e  $\overline{PC'}$  como sendo as conjugadas isotômicas das cevianas  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{BR}$  e  $\overline{PC}$ , respectivamente. Pela definição de conjugadas isotômicas, concluímos que:

$$AP = BP' \text{ e } AP' = BP;$$

$$BQ = CQ' \text{ e } BQ' = CQ;$$

$$CR' = AR \text{ e } AR' = CR.$$

Logo

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \frac{BP'}{AP'} \cdot \frac{CQ'}{BQ'} \cdot \frac{AR'}{CR'} = 1,$$

ou seja,

$$\frac{AP'}{P'B} \cdot \frac{BQ'}{Q'C} \cdot \frac{CR'}{R'A} = 1,$$

mostrando que as cevianas  $\overline{AQ'}$ ,  $\overline{BR'}$  e  $\overline{PC'}$  são concorrentes em um único ponto. ■

Pelo que foi apresentado percebemos que os pontos de Gergonne e de Nagel são pontos recíprocos (veja Observação 10).

# Apêndice A

## Construções

### A.1 Construção 1

Construção com régua e compasso da bissetriz de um ângulo  $\sphericalangle ABC$ .

**Descrição dos passos:**

1) Centre o compasso em  $O$  e, com a mesma abertura  $r$ , marque os pontos  $X \in \overrightarrow{OA}$  e  $Y \in \overrightarrow{OB}$ .

2) Fixe uma abertura  $s$  no compasso, com  $s > \frac{1}{2}XY$  e trace, dois arcos de circunferência de raio  $s$  e centros  $X$  e  $Y$  de modo que se interceptem num ponto  $C$ , interno aos lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ . Levando em consideração a construção apresentada acima e a Proposição 3.2.4., a semirreta é a bissetriz de  $\sphericalangle AOB$ .

Segue a figura ilustrativa dos passos apresentados na construção da bissetriz de um ângulo  $\sphericalangle BAC$ .

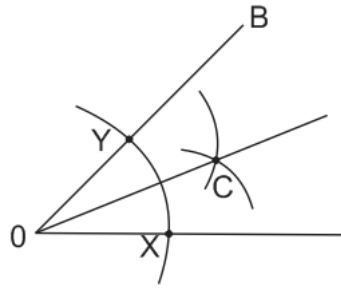


Figura A.1: Construção 1.

## A.2 Construção 2

Construção com régua e compasso da mediatriz de um segmento  $\overline{AB}$ .

**Descrição dos passos:**

1) Fixe no compasso uma abertura  $r > \frac{1}{2}AB$  e trace, dois arcos de circunferência de raio  $r$  e centros em  $A$  e  $B$ , de modo que os arcos se interceptem nos pontos  $X$  e  $Y$ .

De acordo com a construção acima e a Proposição 3.4., a reta  $XY$  é a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ .

Segue a figura ilustrativa dos passos apresentados na construção da mediatriz de um segmento  $\overline{AB}$ .

**Observação 11** Na figura acima,  $M$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , visto que  $M$  é equidistante de  $A$  e  $B$ . Então a construção do ponto médio de um segmento  $\overline{AB}$  trilha os mesmos passos da construção da mediatriz desse segmento.

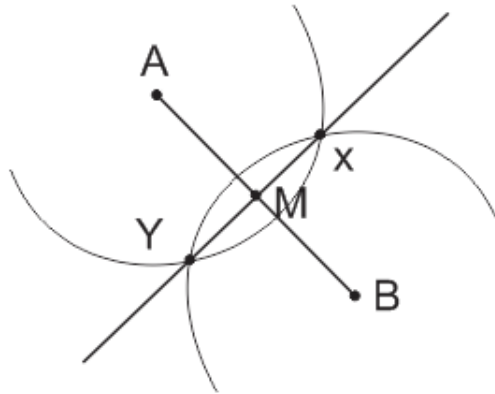


Figura A.2: Construção 2.

### A.3 Construção 3

Traçado de medianas e do baricentro de um triângulo  $ABC$  com régua e compasso.

#### Descrição dos passos:

1) Fixe no compasso uma abertura  $r > \frac{1}{2}AB$  e trace dois arcos de circunferência de raio  $r$  e centros em  $A$  e  $B$ , de modo que os arcos se interceptem nos pontos  $X_1$  e  $Y_1$ , conforme a figura que se segue.

Em seguida determinamos o ponto  $N$ , médio de  $\overline{AB}$  como sendo a interseção da reta  $\overleftrightarrow{X_1Y_1}$  com o segmento  $\overline{AB}$ , (conforme a observação na construção 2), ligue este ponto ( $N$ ) com o vértice  $C$  (vértice oposto ao lado onde se encontra o ponto  $N$ ).  $\overline{CN}$  é a mediana do triângulo  $ABC$  relativo ao lado  $\overline{AB}$ .

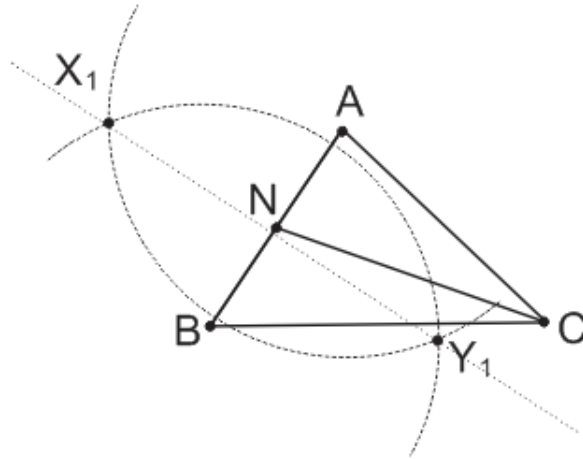


Figura A.3: Construção 3.

Para que a figura não fique sobrecarregada de traçados, pode-se omitir as linhas pontilhadas.

2) Repita o procedimento para o lado  $\overline{BC}$  do  $\triangle_{ABC}$ , obtendo  $L$  como sendo o ponto médio de  $\overline{BC}$  e  $\overline{AL}$ , a mediana relativa  $\overline{BC}$ .

3) Repita o procedimento para o lado  $\overline{AC}$  do  $\triangle_{ABC}$ , obtendo  $M$  como sendo o ponto médio de  $\overline{AC}$  e  $\overline{BM}$ , a mediana relativa  $\overline{AC}$ .

4) Marque o ponto de interseção das três medianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$ , com o ponto  $G$ , este é o baricentro do  $\triangle_{ABC}$ .

Segue a figura ilustrativa dos passos apresentados na construção das medianas e do baricentro de um  $\triangle_{ABC}$ .

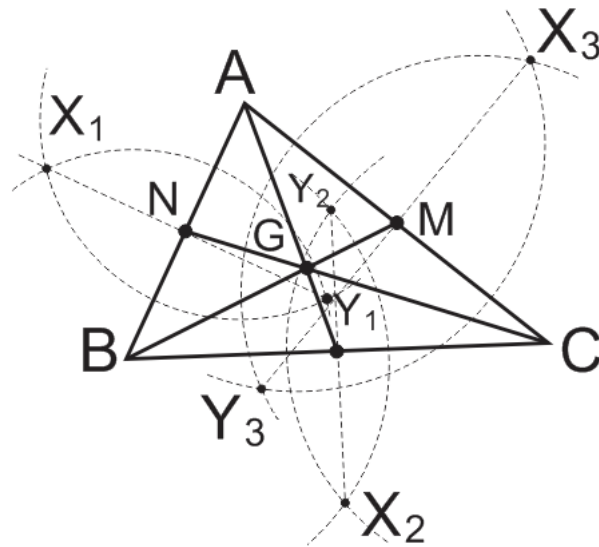


Figura A.4: Construção 3.1.

## A.4 Construção 4

Construção das bissetrizes internas de um triângulo  $ABC$  e do incentro.

**Descrição dos passos:**

1) Centre o compasso no vértice  $A$  e, com a mesma abertura  $r$ , marque os pontos  $X_1 \in \overline{AB}$  e  $Y_1 \in \overline{AC}$ . Fixe uma abertura  $s$  no compasso, com  $s > \frac{1}{2}X_1Y_1$  e trace, dois arcos de circunferência de raio  $s$  e centros  $X_1$  e  $Y_1$  de modo que se interceptem em um ponto  $S_a$ . Agora marque o ponto  $A_1$ , sendo este, a intersecção da semirreta  $\overrightarrow{AS_a}$  com o lado  $\overline{BC}$ . O segmento  $\overline{AA_1}$  é a bissetriz interna relativa ao lado  $\overline{BC}$  ou a bissetriz interna relativa ao vértice  $A$  do  $\triangle_{ABC}$ .

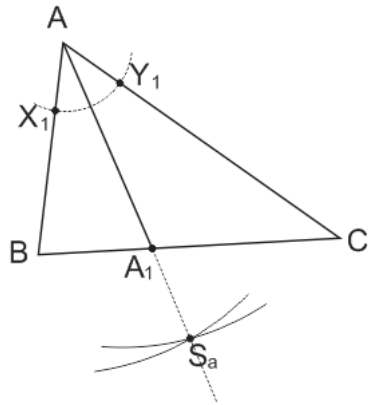


Figura A.5: Construção 4.

2) Repita o procedimento de forma conveniente para a vértice  $B$ , obtendo um ponto  $B_1 \in \overline{AC}$  tal que  $\overline{BB_1}$  seja a bissetriz interna relativa ao vértice  $B$ .

3) Repita o procedimento de forma conveniente para o vértice  $C$ , obtendo um ponto  $C_1 \in \overline{AB}$  tal que  $\overline{CC_1}$  seja a bissetriz interna relativa ao vértice  $C$ .

4) Marque o ponto de interseção das três bissetriz internas  $\overline{AA_1}$ ,  $\overline{BB_1}$  e  $\overline{CC_1}$  com o ponto  $I$ , este é o incentro do  $\triangle_{ABC}$ .

Segue a figura ilustrativa dos passos apresentados na construção das bissetrizes e do incentro de um  $\triangle_{ABC}$ .

## A.5 Construção 5

Construção das alturas e do ortocentro de um triângulo  $ABC$ .



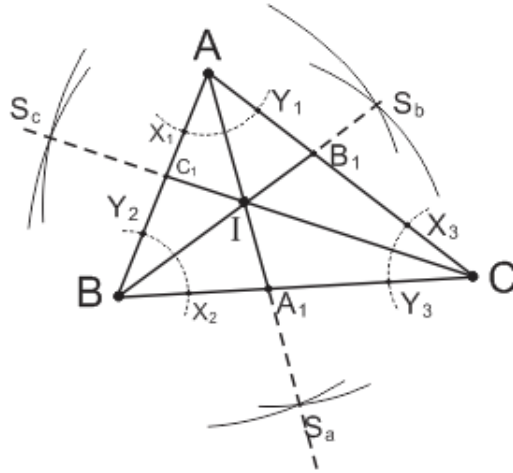


Figura A.6: Construção 4.1.

**Descrição dos passos:**

1) Posicione a ponta fixa do compasso no vértice  $A$  e, com uma mesma abertura marque os pontos  $X_1$  e  $Y_1$  sobre a reta suporte do lado  $\overline{BC}$ . Fixe uma abertura  $s$  no compasso, com  $s > \frac{1}{2}X_1Y_1$  e trace dois arcos de circunferência de raio  $s$  e centros em  $X_1$  e  $Y_1$  de modo que se intersectem em  $H_1$ . Trace a reta  $\overleftrightarrow{AH_1}$  e marque o ponto  $E$ , interseção de  $\overleftrightarrow{AH_1}$  com  $\overleftrightarrow{BC}$ . O segmento  $\overline{AE}$  é a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$  do  $\triangle_{ABC}$ . Veja a figura:

*Comentário:* Por construção  $A$  é equidistante de  $X_1$  e  $Y_1$ , assim como  $H_1$  é equidistante de  $X_1$  e  $Y_1$ . De acordo com a Proposição 3.4.,  $\overleftrightarrow{AH_1}$  é a mediatriz do segmento  $\overline{X_1Y_1}$ , então  $\overleftrightarrow{AH_1}$  é a perpendicular a  $\overleftrightarrow{BC}$ . Dessa forma temos  $\{E\} = \overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BC}$  que é o pé da perpendicular baixada de  $A$  sobre  $\overleftrightarrow{BC}$ .

2) Repita o procedimento de forma conveniente para a vértice  $B$ , obtendo um ponto  $F \in \overleftrightarrow{AC}$ , tal que  $\overline{BF}$  seja a altura relativa ao lado  $\overline{AC}$ .

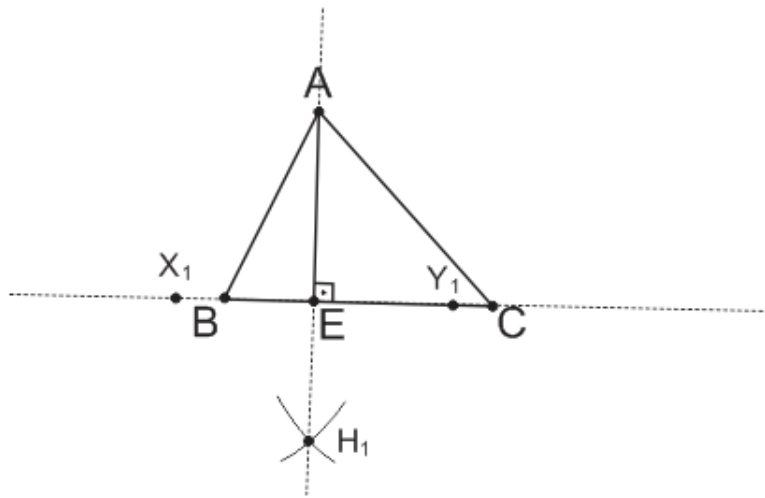


Figura A.7: Construção 5.

3) Repita o procedimento, de forma adequado, para o vértice  $C$ , obtendo um ponto  $D \in \overleftrightarrow{AB}$ , tal que  $\overline{CD}$  seja a altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ .

4) Marque o ponto de interseção das três alturas  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$  e  $\overline{CD}$  com o ponto  $H$ , este é o ortocentro do  $\triangle_{ABC}$ .

Segue a figura ilustrativa dos passos apresentados na construção das alturas e do ortocentro de um  $\triangle_{ABC}$ .

## A.6 Construção 6

Construção das mediatrizes e do circuncentro de um triângulo  $ABC$ .

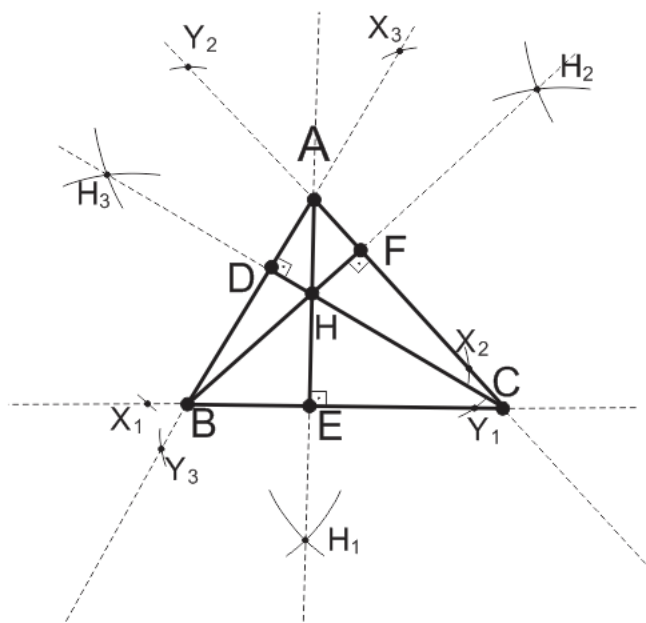


Figura A.8: Construção 5.1.

**Descrição dos passos:**

1) Trace as mediatrizes dos lados do  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , conforme a **Construção 2**.

2) Marque o ponto de interseção das três mediatrizes com o ponto  $O$ , este é o circuncentro do  $\triangle_{ABC}$ .

Segue a figura ilustrativo dos passos apresentados na construção das mediatrizes e do circuncentro de um triângulo  $ABC$ .

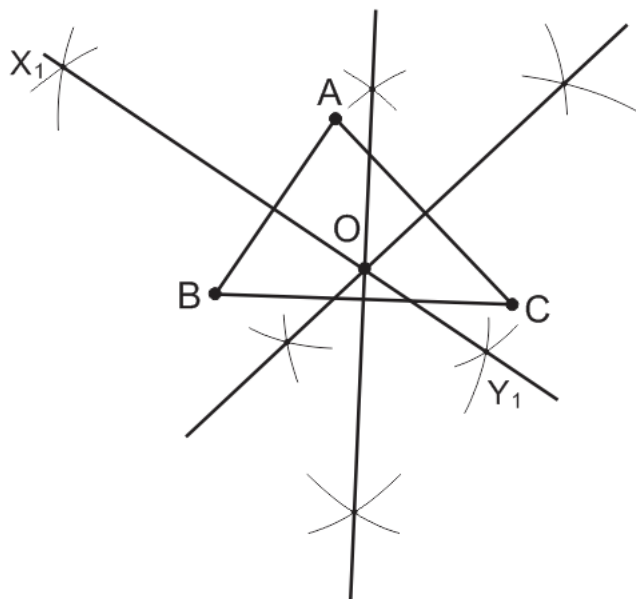


Figura A.9: Construção 6.

## A.7 Construção 7

Construção com régua e compasso da circunferência inscrita de um triângulo  $ABC$ .

**Descrição dos passos:**

1) Construa o incentro  $I$  do  $\triangle_{ABC}$ , de acordo com a **Construção 4**. Este é o centro da circunferência inscrita, conforme a Proposição 3.8.

2) Posicione a ponta fixa do compasso no ponto  $I$  e, com a mesma abertura marque os pontos  $X$  e  $Y$  sobre a reta suporte do lado  $\overline{BC}$  (poderia ser sobre as retas suporte dos lados  $\overline{AB}$  ou  $\overline{AC}$ ).

Fixe uma abertura no compasso, com  $s > \frac{1}{2}XY$  e trace dois arcos de circunferência de raio  $s$  e centros em  $X$  e  $Y$  de modo que se intersectem em  $H$ . Trace a reta  $\overleftrightarrow{IH}$  e marque o ponto  $Q$ , interseção de  $\overleftrightarrow{IH}$  com  $\overleftrightarrow{BC}$ . O segmento  $\overline{IQ}$  é perpendicular a  $\overline{BC}$ , conforme o 1º passo da Construção 5, sendo, portanto, o raio da circunferência de centro em  $I$  e inscrita no  $\triangle ABC$ .

**3)** Posicione a ponta fixa do compasso no ponto  $I$  e, com uma abertura igual a  $\overline{IQ}$ , trace uma circunferência, esta é a circunferência inscrita no triângulo  $ABC$ .

Segue a figura dos passos apresentados na construção da circunferência inscrita no triângulo  $ABC$ .

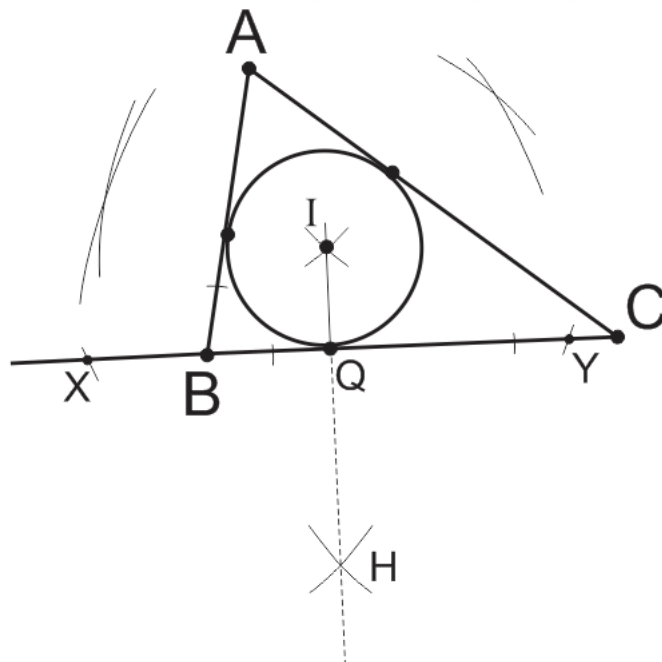


Figura A.10: Construção 7.

## A.8 Construção 8

Traçado com régua e compasso do exinscentro e da circunferência exinscrita relativa ao lado  $\overline{AC}$  do triângulo  $ABC$ .

### Descrição dos passos:

1) Trace as semirretas  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  e marque os pontos  $E \in \overrightarrow{BA}$  e  $F \in \overrightarrow{BC}$ , ambos externos aos segmentos  $\overline{BA}$  e  $\overline{BC}$ .

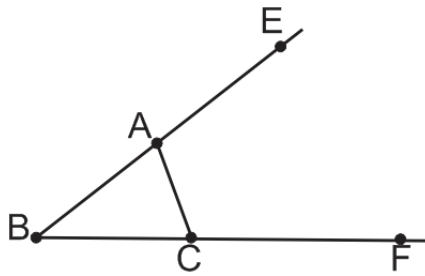


Figura A.11: Construção 8.

2) Trace as bissetrizes dos ângulos  $\sphericalangle EAC$  e  $\sphericalangle FCA$  (ângulos externos do  $\triangle ABC$ ) conforme a Construção 1. Marque o ponto de interseção dessas duas bissetrizes com o ponto  $I_b$ , este é o exinscentro relativo ao lado  $\overline{AC}$  do triângulo  $ABC$ .

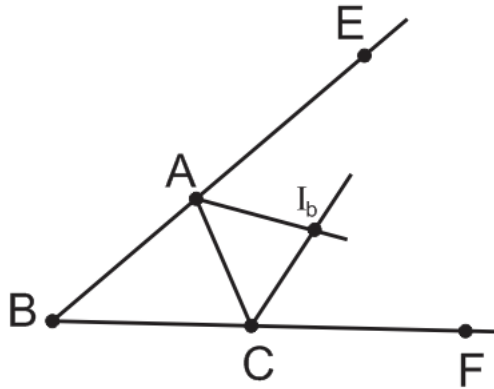


Figura A.12: Construção 8.1.

3) Marque  $T_2 \in \overleftrightarrow{BF}$  tal que  $T_2$  seja o pé da perpendicular baixada de  $I_b$  sobre  $\overleftrightarrow{CF}$  (para isso, siga o primeiro passo da Construção 5).

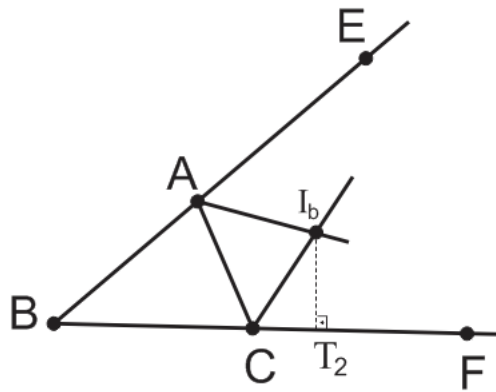


Figura A.13: Construção 8.2.

4) Posicione a ponta fixa do compasso em  $I_b$  e, com uma abertura igual a  $I_bT_2$ , trace uma circunferência, esta é a circunferência exinscrita relativa ao lado  $AC$  do triângulo  $ABC$ .

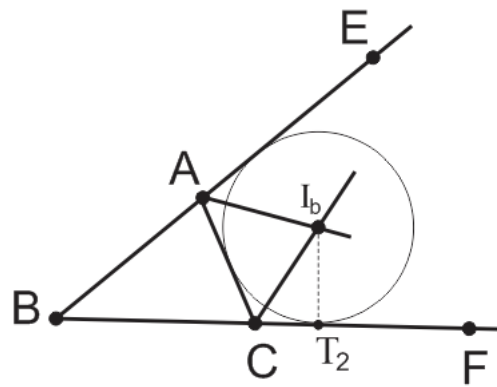


Figura A.14: Construção 8.3.

As circunferências exinscritas referente aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  do triângulo  $ABC$  são construídas de maneira análoga.



Associando de forma conveniente as construções que apresentamos até aqui, pode-se construir facilmente as demais figuras apresentadas nesse trabalho, como: a **Reta de Euler**, a **Circunferência dos Nove Pontos**, os **Pontos de Feuerbach**, os **Pontos Isotômicos** e as **Retas Isotômicas**.

## Referências Bibliográficas

- [1] ALMOULOU, Saddo A., *Provas e Demonstrações em Matemática: Um problema de seus processos de ensino e aprendizagem*, GT: Educação matemática/ n° 19. PUC/SP. Disponível em: < [www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo-producoes/docs-30/prova.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo-producoes/docs-30/prova.pdf) >. Acesso em 20 de maio de 2014.
- [2] BARBOSA, João L. M., *Geometria Euclidiana Plana*, Coleção Professor de Matemática. 10ªed., Rio de Janeiro/RJ, SBM, (2006).
- [3] BERLINGHOFF, Willam P. e GOUVÊA, Fernando Q., *A matemática através dos tempos*, 10ªed., Tradução: elsa F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Blucher, (2010).
- [4] BRASIL. Ministério da Educação. Programa Nacional do Livro Didático. Guia de Livros Didáticos. Disponível em: < <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-de-livro-didatico> >. Acesso em: 22 de maio de 2014.
- [5] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

- [6] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999.
- [7] CRESCENTI, Eliane Portalone. A Formação Inicial do Professor de Matemática: aprendizagem da geometria e atuação docente. Ponta Grossa: Práxis Educativa, v.3, n.1, p.81-94, jan-jun. 2008. Disponível em: < <http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa/index> >. Acesso em: 23 de maio de 2014.
- [8] DE MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro. Um Convite à Matemática. Coleção do Professor de Matemática. 2ª ed.-Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [9] FERREIRA, Ana Célia da Costa. Ensino da Geometria no Brasil: enfatizando o período do Movimento da Matemática Moderna. Disponível em: < <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/painel/TCCI136.pdf> >. Acesso em 12 de maio de 2014.
- [10] Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB). Disponível em: < <http://ideb.inep.gov.br/Site/> >.
- [11] MAGALHÃES, Elton Jones da Silva. Pontos Notáveis do Triângulo. Quantos Você Conhece?. Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Rede Nacional (PROFMAT). São Cristóvão - Sergipe: Universidade Federal de Sergipe, 2013.
- [12] MARTINS, Leocádia Figueredo. Motivando o Ensino de Geometria. Monografia de Pós-Graduação. Criciúma: UNESC, 2008.
- [13] MASCARENHAS, Jorge Alécio. Uma Análise do Ensino da Geometria no Ensino Médio Através de Teorema de Euler. Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Rede Nacional (PROFMAT). Salvador ? Bahia: UFBA, 2013.

- [14] NEVES, Elvis Donizeti. Caracterização e Localização dos Pontos Notáveis do Triângulo. Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Rede Nacional (PROFMAT). São Carlos: USP, 2013.
- [15] PAIS, Luiz Carlos. Estratégia de Ensino em Livros Didáticos de Matemática em Nível de 5<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental. GT: Educação Matemática / n° 19. UFMS. Disponível em:  
< [29reuniao.anped.org.br/trabalhos/trabalho/GT19 – 2019 – Res.pdf](http://29reuniao.anped.org.br/trabalhos/trabalho/GT19-2019-Res.pdf) >.  
Acesso em: 18 de maio de 2014.
- [16] —————- [pt.sctibd.com/doc/17772918/circunferencia-9-pontos](http://pt.sctibd.com/doc/17772918/circunferencia-9-pontos)
- [17] VÁRILIS, Joseph C.. Elementos de Geometria Plana. Escola de Matemática, Universidade de Costa Rica, 2013. Disponível em: < [//http :  
//163.178.101.243/claroline/claroline/backends/download.php?url](http://163.178.101.243/claroline/claroline/backends/download.php?url) >. Acesso em: 10 de junho de 2014.
- [18] —————- < [www.dec.ufcg.ed.br/biografias](http://www.dec.ufcg.ed.br/biografias) >