Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Frações Contínuas - um estudo sobre "boas" aproximações. †

por

Rafael Tavares Silva Bezerra

sob orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2016
João Pessoa - PB

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

B574f Bezerra, Rafael Tavares Silva.
Frações contínuas: um estudo sobre boas aproximações / Rafael Tavares Silva Bezerra.- João Pessoa, 2016.
71f.
Orientador: Carlos Bocker Neto
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Frações contínuas. 3. Números racionais. 4. Números irracionais. 5. Resolução de problemas.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Frações Contínuas - um estudo sobre “boas” aproximações.

por

Rafael Tavares Silva Bezerra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Aritmética

Aprovada por:

Carlos Bocker Neto

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto - UFPB (Orientador)

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra - (UFPB)

Ricardo T. Bortolotti

Prof. Dr. Ricardo Turolla Bortolotti - (UFPE)

Fevereiro/2016

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, pois, sem ele não estaria vivendo esse momento, por ter me guiado pelos melhores caminhos, com tantas idas e vindas a João Pessoa e a Bayeux. Por me conceder conhecimento, coragem, determinação e paciência.

Agradeço a minha esposa Daniele Aparecida por me dar incentivo, apoio, compreensão pelas noites de estudo e viagens semanais. Por compartilhar junto a mim, os momentos de alegrias e os de angustias.

Aos meus pais, José Carlos e Ely Duarte, e minha irmã Juliana Tavares, que sempre me apoiaram nos estudos, dando apoio moral e conhecimentos valiosos que pude utilizar durante minha vida acadêmica.

Momento de agradecer a todos os meus grandes amigos, que foram de grande valia para minha construção cognitiva e pessoal, que serão eternamente lembrados nessa dissertação em minhas memórias.

Em especial gostaria de agradecer a Ítalo Gusmão, Sebastião Alves e Francisco Nogueira, que sempre estiveram ao meu lado nos momentos acadêmicos e não acadêmicos também. A Fabiano Castro, Carlos Jr, Lincoln Pereira e Frank Werlly, por serem também companheiros de repouso.

Sem esquecer claro, dos grandes professores mestres e doutores que fizeram parte de minha formação: Gilmar Correia, Lizandro Challapa, Carlos Bocker, Bruno Ribeiro, Eduardo Gonçalves, Napoleon Caro, Sérgio Souza, Lenimar Nunes e Alexandre Simas.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Professor Dr. Carlos Bocker Neto, pela paciência e ensinamentos passados a mim.

Dedicatória

Dedicado aos meus familiares, meu pai José Carlos, minha mãe Ely, minha irmã Juliana, mas principalmente a minha esposa Daniele, que esteve sempre ao meu lado nessa conquista.

Resumo

O estudo das frações contínuas terá inicio com alguns fatos históricos, visando uma melhor compreensão do tema. Traremos a definição de frações contínuas para um certo número α real, apresentando a definição para α racional e para α irracional. A discussão será centrada em resultados importantes para o cálculo de reduzidas e boas aproximações de números irracionais, visando também a determinação do erro entre a reduzida e o número irracional. Traremos um estudo sobre as frações contínuas periódicas, com enfase ao teorema de Langrange, que relaciona uma fração contínua periódica e uma equação do segundo grau. Finalizando com enfoque na resolução de problemas, como o cálculo de frações contínuas de números irracionais da forma $\sqrt{a^2+b}$, assim como a prova da irracionalidade de e através do cálculo de sua fração contínua.

Palavras-chave: Frações Contínuas; Números Racionais; Números Irracionais; Resolução de Problemas.

Abstract

The study of continued fractions will start with some historical facts, aiming at a better understanding of the subject. We will bring the definition of continued fractions for a number α real, with the definition for α rational and α irrational. The discussion will focus on meaning results for the calculation of reduced and good approximations of irrational numbers, also aimed at determining the error between the reduced and the irrational number. We will bring a study of the periodic continued fractions, with emphasis on Lagrange theorem, which relates a periodic continued fraction and a quadratic equation. Finishing with a focus on problem solving, as the calculation of continued fractions of irrational numbers of the form $\sqrt{a^2+b}$, as well as proof of the irrationality of e by calculating its continued.

Keywords: Continued fractions; Rational Numbers; Irrational numbers;

Sumário

Notações

Notações Gerais

- $\neq$ diferente.
- $e = 2,718281828\cdots$ número de Euler (número irracional).
- $\pi = 3,14159\cdots$ número pi (razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro).
- $\phi = 1,61803\cdots$ número phi (número de ouro, proporção áurea).
- $XIX = 19$ número em algarismo romano.
- $\sqrt{2}$ raiz quadrada de 2.
- $\cong$ aproximadamente.
- $a + \frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\ \ldots$ representação da fração contínua de $\sqrt{a^2+b}$.
- $a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}}$ representação da fração contínua de $\sqrt{a^2+b}$.
- $a + K_{i=1}^{\infty}\left(\frac{b}{2a}\right)$ representação de fração contínua de $\sqrt{a^2+b}$.
- $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_m]$ representação de uma fração contínua simples finita.
- $[a_0; a_1, a_2, \cdots]$ representação de uma fração contínua simples finita.
- $log(x)$ logaritmo na base 10 do número x.

- $tg(x)$ tangente de x.
- $arctg(x)$ arco tangente de x.
- $\lfloor \alpha \rfloor$ parte inteira de α.
- $\mathbb{N}$ conjunto dos números naturais.
- $\mathbb{Z}$ conjunto dos números inteiros.
- $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ conjunto dos números reais sem os números racionais (números irracionais).
- $\in$ pertence.
- $mdc(p, q)$ mínimo múltiplo comum entre os números p e q.
- $\forall$ para todo
- $\overset{def}{=}$ é igual por definição

Introdução

Este trabalho visa a compreensão dos teoremas e a resolução de problemas sob as frações contínuas. Este tema é bastante importante e utilizado em diversas áreas da matemática. Por exemplo podemos resolver a equação $x^2-2x-1=0$ com $x \neq 0$, de uma maneira não convencional, encontrando uma fração contínua como solução.

$$x^2 = 2x+1 \Rightarrow x = 2+\frac{1}{x} \Rightarrow x = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}} \Rightarrow x = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}$$

Observe que nesse caso, temos que a solução dessa equação foi expressa por uma fração contínua simples, pois os numeradores são iguais a 1, e também temos uma fração contínua infinita, veremos posteriormente que isso indica que o valor de x é irracional. Notaremos também que se x for racional teríamos que sua fração contínua seria finita, que será provado com o auxilio do algoritmo da divisão de Euclides. Os Gregos utilizavam essa ideia para comparar frações, pois eles sempre trabalhavam com frações unitárias, cujo o numerador é 1. Como por exemplo:

$$\frac{289}{135} = 2+\frac{19}{135} = 2+\cfrac{1}{\cfrac{135}{19}} = 2+\cfrac{1}{7+\cfrac{2}{19}} = 2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\cfrac{19}{2}}} = 2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2}}}$$

O uso das frações continuas revolucionou o cálculo das casas decimais de números irracionais, através das suas convergentes, ver proposição 2.1. Como exemplo temos $\sqrt{2} = 1,41421\cdots$,$\pi = 3,14159\cdots$, $e = 2,71828\cdots$ e o $\phi = 1,61803\cdots$. Com o uso das frações contínuas de π, através de suas convergentes, foi possível determinar aproximações muito boas, como por exemplo: $\frac{22}{7} = 3,14285\cdots$ e $\frac{333}{106} = 3,14150\cdots$. Note que $\frac{333}{106} < \pi < \frac{22}{7}$, essa propriedade será abordada na proposição 2.3.

Essa facilidade em oferecer aproximações de números reais, por meios de frações, transformou esse assunto no centro das atenções. Essa mudança ocorreu para todos os matemáticos, a partir do século XIX, que, segundo [10] foi considerada a idade dourada das frações contínuas.

Para uma melhor compreensão do conteúdo, organizamos o seguinte trabalho em quatro capítulos.

No capítulo 1 será abordada o contexto histórico e as definições sobre frações contínuas, através do algoritmo de Euclides para divisão, para o caso de números racionais e também para os números irracionais. Apresentaremos também uma interpretação geométrica das frações contínuas.

Já o capítulo 2 será destinado aos teoremas e proposições, incluindo as propriedades das convergentes, fator importante nesse estudo, a unicidade da representação em fração contínua de números irracionais, o teorema de Hurwitz e Markov.

No capítulo 3, será abordado o tema frações contínuas periódicas, que tem a mesma ideia de dízima periódica, como exemplo, o número $\sqrt{2} = [1, \overline{1, 2}]$, onde $\overline{1, 2}$ é a parte periódica da fração contínua de $\sqrt{2}$. Estudaremos o teorema de Lagrange, que relaciona as raízes irracionais de uma equação com uma fração contínua periódica, estudaremos a equação de Pell.

Para finalizar o trabalho, teremos um capítulo destinado a resolução de problemas, sobre a transformação de números racionais e irracionais em frações contínuas, assim como a generalização de algumas raízes, como $\sqrt{a^2+1}$. Também teremos a demonstração, não trivial, da fração contínua do número $e = 2,71828\cdots$. Assim como, aplicações práticas, das aproximações de números irracionais dadas por frações contínuas.

Capítulo 1

Definindo Frações Contínuas

Este capítulo será dedicado a apresentação histórica e definição de frações contínuas, formando uma base para o andamento coerente e progressivo da leitura, visando uma melhor compreensão sobre o conteúdo vivenciado neste trabalho.

1.1 Fatos Históricos sobre Frações Contínuas

A origem exata da primeira utilização de frações contínuas é imprecisa, mas é possível afirmar que a sua utilização não é recente. Já que, foram encontrados relatos de sua utilização há pelo menos 2000 anos. Este campo da Matemática é bastante agradável e trás uma nova ferramenta para representação de números reais, possibilitando facilmente identificar se um determinado número é racional ou irracional, que será visto mais a diante neste capítulo. Conforme Nascimento [5] (2013,p. 39 - 41), matemáticos como o indiano *Aryabhata (476-550)* utilizaram esse conhecimento para resolver equações diofantinas, porém sem utilizar de métodos gerais para resolve-las, apenas utilizando-se delas em situações específicas. Assim como, Rafael Bombelli (1526-1572), que não se dedicou ao estudo aprofundado do tema, porém, em seu ano de morte mostrou uma aproximação de $\sqrt{13}$, dada por:

$$\sqrt{13} \cong 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}} = \frac{18}{5}.$$

Observe que $\sqrt{13} \cong 3,60555$ e $\dfrac{18}{5} = 3,60$ que, pra época, é uma aproximação bastante razoável.

Outro matemático que obteve aproximações de raízes por meio de frações contínuas foi Cataldi (1548-1626) que, em 1613, obteve uma fração contínua para $\sqrt{18}$ e foi considerado o descobridor das frações contínuas. Porém, infelizmente, assim como Bombelli não prosseguiu com seus estudos.

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ddots}}}}$$

Que é um caso especial da fórmula

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}}.$$

Que será demonstrada, no capítulo 4, sendo utilizada também na resolução de exercícios.

Observe que esta forma de escrever é apenas uma das utilizadas em diversos trabalhos, como outros exemplos, no caso infinito temos: $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a+} \frac{b}{2a+} \frac{b}{2a+} \ldots$, também temos $\sqrt{a^2+b} = a + K_{i=1}^{\infty}\left(\frac{b}{2a}\right)$. No caso de frações contínuas simples ainda podemos escrever $[a_0; a_1, a_2, \cdots]$.

Conforme [6](p. 5-7), o nome *"fração contínua"* foi introduzido pela primeira vez por *John Wallis (1616-1703)*, em seu livro *"Opera Mathematica"(1695)*, onde também explicou como calcular o n-ésimo convergente e descobriu algumas propriedades de suas propriedades. Foi através de seu livro *Arithmetica Infinitorium"(1655)*, que as frações contínuas se transformaram em um campo de estudo, quando ele apresentou a seguinte identidade

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \cdots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \cdots}$$

Uma descoberta importante para o número $\pi = 3,14159\cdots$ foi feita por *Lord Brouncker (1620-1684)*, o presidente da Royal Society of London, transformando a identidade de *Wallis* em

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{4^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}}}} = 1 + \frac{1^2}{2+}\,\frac{3^2}{2+}\,\frac{4^2}{2+}\,\frac{5^2}{2+}\,\ldots .$$

Christiaan Huygens (1629-1695) foi o primeiro a utilizar as frações contínuas para resolver problemas práticos. Seu trabalho era voltado na construção de um planetário mecânico. A utilização das convergentes de uma fração contínua permitiu encontrar as melhores aproximações racionais para o número correto de dentes de uma coroa dentada.

Só a partir dos estudos de *Leonard Euler (1707-1783)*, *Johan Heinrich Lambert (1728-1777)* e *Joseph Louis Lagrange (1736-1813)* com frações contínuas que esse campo começou a ganhar o devido destaque.

O trabalho *"De Fractionlous Continious"(1737)* escrito por Euler mostrou que todo número racional pode ser expresso como fração contínua simples e mostrou uma expansão em frações contínuas do número e, que será demonstrada no capítulo 4 deste trabalho.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}.$$

Mostrando assim que, e e e^2 são números irracionais. O trabalho de Euler, sobre o número e, foi generalizado em 1766, por J.H. Lambert, que mostrou que

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\ddots}}}}.$$

Ele também desenvolveu, no ano de 1768, frações contínuas para as funções $log(1+x)$, $arctg(x)$ e $tg(x)$. Como exemplo:

$$tg(x)=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{7}{x}-\ddots}}}}.$$

Usando essas expressões para mostrar que e^x e $tg(x)$ são irracionais se x for racional.

Parte do trabalho realizado por Lagrange será discutido nesta dissertação no Capítulo 3, mostrando que os números quadráticos irracionais são dados por uma fração contínua periódica.

Os matemáticos do século XIX que se destacaram pelo trabalho prestado a esse tema foram *Karl Jacobi (1804-51)*, *Oskar Perron (1880-1975)*, *Charles Hemite (1822-1901)*, *Karl Friedrich Gauss (1777-1855)*, *Augustin Cauchy (1789-1857)* e *Thomas Stieltjes (1856-94)*, elevando o conhecimento iniciado por Wallis.

Embora, o tema frações contínuas tenha demorado bastante tempo para ser explorado, rapidamente se obteve resultados relevantes, que impulsionaram várias outras áreas, como por exemplo: algoritmos para computação, resoluções de equações diofantinas, dentre vários outros campos, mas ainda há muito a ser estudado.

1.2 Algoritmo da Divisão de Euclides

Dados m, n números naturais com $n \neq 0$. Existem dois únicos inteiros q e r tais que $n = mq + r$, com $0 \leq r < m$. Esse algoritmo criado por Euclides no ano de 300 a.c. será útil para a definição e para o calculo de frações contínuas de números racionais. Veja o Exemplo 4.1.

1.3 Definição de Fração Contínua de Números Reais

Definição 1.1 *Dado um número real α, denotaremos por $\lfloor \alpha \rfloor$ a parte inteira de α, que é definida como o maior inteiro menor ou igual a α. Por exemplo, temos*

$$\lfloor 4,3 \rfloor = 4; \quad \lfloor -5,3 \rfloor = -6; \quad \lfloor 3 \rfloor = 3; \quad \lfloor e \rfloor = 2$$

Seja $x \neq 0$ um número real, definiremos a fração contínua de x, de forma recursiva, da seguinte maneira

$$\alpha_0 = x, a_m = \lfloor \alpha_m \rfloor$$

$$\text{e, se } \alpha_m \notin \mathbb{Z}, \qquad \alpha_{m+1} = \frac{1}{\alpha_m - a_m} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}$$

Se, para algum $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_m = a_m$ temos

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m] \overset{def}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_m}}}}$$

Nesse caso dizemos que a fração contínua é finita, mais adiante veremos que esse caso está ligado com o fato de que x ser um número racional. Se para todo número m natural, $\alpha_m \neq a_m$, dizemos que a fração contínua é infinita, ou seja, x é um número irracional.

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots] \overset{def}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

No capítulo 2 veremos que esse limite está bem definido e é igual a x.

1.4 Interpretação Geométrica do Desenvolvimento em Frações Contínuas

1.4.1 Caso Racional

Considere x um número racional, então existem números p e q inteiros com $q \neq 0$, tais que $x = \dfrac{q}{p}$, considere sem perca de generalidade que $mdc(p, q) = 1$, pois caso contrário, se $mdc(p, q) = k$, então existem números a e b inteiros, tais que $p = ak$ e $q = bk$, nesse caso utilizaríamos os números a, b com $mdc(a, b) = 1$.

Consideremos um retângulo com lados p e q, onde p e q números inteiros positivos com $p < q$, queremos encontrar o número máximo de quadrados de lado p que possam ser construídos sobre o lado de comprimento q, essa quantidade será chamada de a_0 e será a parte inteira da fração $x = \alpha_0 = \dfrac{q}{p}$, ou seja, $a_0 = \lfloor x \rfloor$.

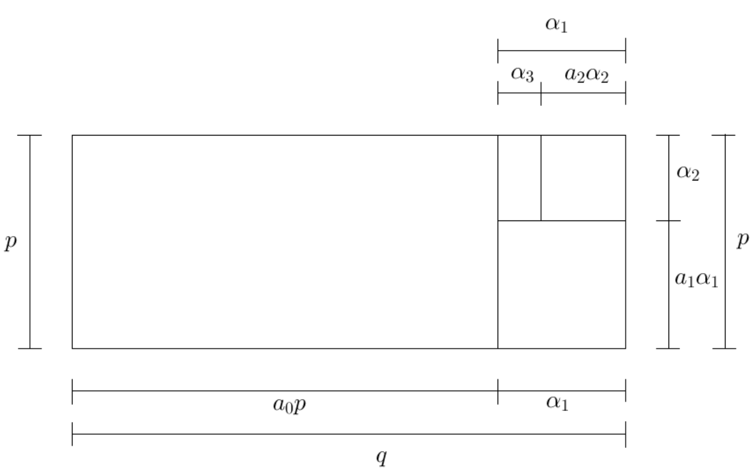

Figura 1.1: Representação Geométrica da Forma Racional

Temos que

$$q = a_0p + \alpha_1, \qquad 0 \leq \alpha_1 < p. \tag{1.1}$$

Dividindo a equação a cima por p temos

$$x = \frac{q}{p} = \frac{a_0 p}{p} + \frac{\alpha_1}{p} \Rightarrow \frac{q}{p} = a_0 + \frac{\alpha_1}{p}. \tag{1.2}$$

Da figura 1.1 temos também que

$$p = a_1\alpha_1 + \alpha_2, \qquad 0 \leq \alpha_2 < \alpha_1. \tag{1.3}$$

Substituindo (1.3) em (1.2) temos

$$x = a_0 + \frac{\alpha_1}{a_1\alpha_1 + \alpha_2}. \tag{1.4}$$

Em (1.4) observe que $\dfrac{\alpha_1}{a_1\alpha_1 + \alpha_2} = \dfrac{1}{\dfrac{a_1\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}} = \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}.$

fazendo a devida substituição, temos

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}. \tag{1.5}$$

Observemos em (1.5) que a_1 significa a quantidade máxima de quadrados com lado α_1 que podem ser construídos sobre o lado de comprimento p.

Da figura 1.1 podemos observar que

$$\alpha_1 = a_2\alpha_2 + \alpha_3, \qquad 0 \leq \alpha_3 < \alpha_2. \tag{1.6}$$

Substituindo (1.6) em (1.5), temos

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{\alpha_2}{a_2\alpha_2 + \alpha_3}}. \tag{1.7}$$

Observe que $\dfrac{\alpha_2}{a_2\alpha_2 + \alpha_3}$ em (1.7) é equivalente a $\dfrac{1}{\dfrac{a_2\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2}} = \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}}.$

Substituindo em (1.7) temos a seguinte relação

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}}}. \tag{1.8}$$

Como p e q são números inteiros, temos pelo algoritmo de Euclides, que para algum número m natural, teremos que $\alpha_{m-1} = a_m \alpha_m$.

Chegando a seguinte conclusão

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{\alpha_m}{a_m \alpha_m}}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_m}}}}. \tag{1.9}$$

1.4.2 Caso Irracional

Suponha agora que x seja um número irracional, então podemos definir sua fração contínua da forma semelhante ao caso anterior de, onde x é um número racional.

Vamos considerar desta vez um retângulo cujo os lados medem comprimentos 1 e x (veja a figura 1.2). Determinaremos quantos quadrados, de lado unitário, de forma a encontrarmos o maior número possível, a essa quantidade chamaremos de a_0 (parte inteira de x), simbolicamente temos $a_0 = \lfloor x \rfloor$.

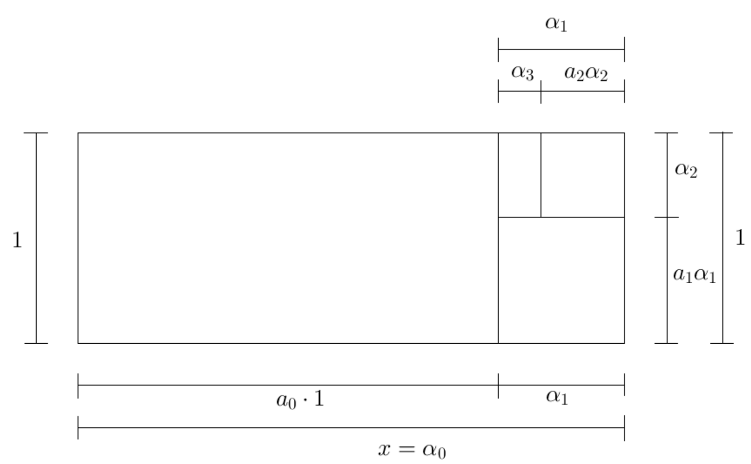

Figura 1.2: Representação Geométrica da Forma Irracional

Temos que

$$x = \alpha_0 = a_0 \cdot 1 + \alpha_1, \qquad 0 \leq \alpha_1 < 1. \tag{1.10}$$

Note na figura 1.2 que

$$1 = a_1\alpha_1 + \alpha_2, \qquad 0 \leq \alpha_2 < \alpha_1. \tag{1.11}$$

Note que podemos substituir (1.11) em (1.10) sem alterar a equação

$$x = \alpha_0 = a_0 + \frac{\alpha_1}{a_1\alpha_1 + \alpha_2}. \tag{1.12}$$

Observe que em (1.12) temos $\dfrac{\alpha_1}{a_1\alpha_1 + \alpha_2}$ que é equivalente a $\dfrac{1}{\dfrac{a_1\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}} = \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}$.

Substituindo em (1.12) temos

$$x = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}. \tag{1.13}$$

Novamente na figura 1.2 obtemos que

$$\alpha_1 = a_2\alpha_2 + \alpha_3, \qquad 0 \leq \alpha_3 < \alpha_2. \tag{1.14}$$

Substituindo (1.14) em (1.13) obtemos

$$x = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{\alpha_2}{a_2\alpha_2 + \alpha_3}}. \tag{1.15}$$

Calculando o inverso de $\dfrac{\alpha_2}{a_2\alpha_2 + \alpha_3}$ obtemos $\dfrac{1}{\dfrac{a_2\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2}} = \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}}$.

Substituindo temos

$$x = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}}}. \tag{1.16}$$

Neste caso temos que x não é um número racional, logo teremos para todo número m natural que $\alpha_{m-1} \neq a_m\alpha_m$, dessa forma o processo dado anteriormente pode se repetir infinitamente. Assim, temos:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3 + \ddots}}}. \tag{1.17}$$

Capítulo 2

Boas Aproximações de Números Reais por Frações Contínuas

Seja x um número irracional, podemos então fazer a seguinte pergunta: será que existe algum número y irracional, tal que, $y \cong x$? Se sim, como encontrar tal y? A resposta da primeira pergunta é sim. A resposta da segunda será apresentada neste capítulo através de teoremas, proposições e corolários que possibilitam o cálculo dessas aproximações racionais.

2.1 Teoremas e Proposições

Proposição 2.1 *Dada uma sequência (finita ou infinita)* $t_0, t_1, t_2, \cdots \in \mathbb{R}$ *tal que* $t_k > 0$, *para todo* $k \geq 1$, *definimos as sequências* (x_m) *e* (y_m) *por* $x_0 = t_0$, $y_0 = 1$, $x_1 = t_0 t_1 + 1$, $y_1 = t_1$, $x_{m+2} = t_{m+2} x_{m+1} + x_m$, $y_{m+2} = t_{m+2} y_{m+1} + y_m$ *para todo* $m \geq 0$.

Temos então

$$[t_0; t_1, t_2, \cdots, t_n] = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \ddots + \cfrac{1}{t_n}}} = \frac{x_m}{y_m}, \forall\ m \geq 0$$

Além disso,

$$x_{m+1}y_m - x_n y_{m+1} = (-1)^m, \ \forall\ m \geq 0.$$

Demonstração: Vamos provar por indução sobre m, para o caso $m = 0$, temos

$$[t_0] = \frac{t_0}{1} = \frac{x_0}{y_0} \tag{2.1}$$

Agora, mostraremos que vale para $m = 1$,

$$[t_0; t_1] = t_0 + \frac{1}{t_1} = \frac{t_0 t_1 + 1}{t_1} = \frac{x_1}{y_1}. \tag{2.2}$$

Mostraremos que vale para $m = 2$,

$$\begin{aligned}
[t_0; t_1, t_2] &= t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2}} = t_0 + \cfrac{1}{\cfrac{t_1 t_2 + 1}{t_2}} \\
&= t_0 + \frac{t_2}{t_1 t_2 + 1} = \frac{t_0 t_1 t_2 + t_0 + t_2}{t_1 t_2 + 1} \\
&= \frac{t_2(t_0 t_1 + 1) + t_0}{t_1 t_2 + 1} = \frac{t_2 x_1 + t_0}{t_1 t_2 + 1} = \frac{x_2}{y_2}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Mostraremos agora que vale para $m = 3$,

$$\begin{aligned}
[t_0; t_1, t_2, t_3] &= t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{1}{t_3}}} = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{\cfrac{t_2 t_3 + 1}{t_3}}} \\
&= t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{t_3}{t_2 t_3 + 1}} = t_0 + \cfrac{1}{\cfrac{t_1 t_2 t_3 + t_1 + t_3}{t_2 t_3 + 1}} \\
&= t_0 + \frac{t_2 t_3 + 1}{t_1 t_2 t_3 + t_1 + t_3} = \frac{t_0 t_1 t_2 t_3 + t_0 t_1 + t_0 t_3 + t_2 t_3 + 1}{t_1 t_2 t_3 + t_1 + t_3} \\
&= \frac{t_3(t_0 t_1 t_2 + t_0 + t_2) + t_0 t_1 + 1}{t_3(t_1 t_2 + 1) + t_1} = \frac{t_3(t_2(t_0 t_1 + 1) + t_0) + t_0 t_1 + 1}{t_3(t_1 t_2 + 1) + t_1} \\
&= \frac{t_3(t_2 x_1 + t_0) + x_1}{t_3 y_2 + y_1} = \frac{t_3 x_2 + x_1}{t_3 y_2 + y_1} = \frac{x_3}{y_3}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Suponha agora que valha para um $m+2$. Vamos mostrar que vale para $m+3$.

Primeiro, observe que, para a fração contínua $[t_0; t_1, t_2, \cdots, t_{m+2}]$ temos que $x_{m+2} = t_{m+2}x_{m+1} + x_m$ e $y_{m+2} = t_{m+2}y_{m+1} + y_m$, vale para um determinado $m+2$.

Segundo, temos que $[t_0; t_1, t_2, \cdots, t_{m+2}, t_{m+3}] = [t_0; t_1, t_2, \cdots, t_{m+2} + \dfrac{1}{t_{m+3}}]$, pois podemos considerar o último termo da igualdade, do lado esquerdo, sendo a soma do seu penúltimo elemento ao inverso do último do lado direito, dessa forma o lado direito da igualdade possui o mesmo número de elementos de $[t_0; t_1, t_2, \cdots, t_{m+2}]$.

Assim, temos que $[t_0; t_1, t_2, \cdots, t_{m+2} + \dfrac{1}{t_{m+3}}]$ será dada por

$$\begin{aligned}
\frac{(t_{m+2} + \frac{1}{t_{m+3}})x_{m+1} + x_m}{(t_{m+2} + \frac{1}{t_{m+3}})y_{m+1} + y_m} &= \frac{t_{m+2}x_{m+1} + \frac{1}{t_{m+3}}x_{m+1} + x_m}{t_{m+2}y_{m+1} + \frac{1}{t_{m+3}}y_{m+1} + y_m} \\
= \frac{\dfrac{t_{m+2}t_{m+3}x_{m+1} + x_{m+1} + t_{m+3}x_m}{t_{m+3}}}{\dfrac{t_{m+2}t_{m+3}y_{m+1} + y_{m+1} + t_{m+3}y_m}{t_{m+3}}} &= \frac{t_{m+2}t_{m+3}x_{m+1} + x_{m+1} + t_{m+3}x_m}{t_{m+2}t_{m+3}y_{m+1} + y_{m+1} + t_{m+3}y_m} \\
= \frac{t_{m+3}(t_{m+2}x_{m+1} + x_m) + x_{m+1}}{t_{m+3}(t_{m+2}y_{m+1} + y_m) + y_{m+1}} &= \frac{t_{m+3}x_{m+2} + x_{m+1}}{t_{m+3}y_{m+2} + y_{m+1}} = \frac{x_{m+3}}{y_{m+3}}. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Mostraremos agora a segunda parte, por indução.

Queremos mostrar que $x_{m+1}y_m - x_m y_{m+1} = (-1)^m$, para todo $m \geq 0$.

Vamos mostrar que vale para o caso $m = 0$, temos que

$$x_1 y_0 - x_0 y_1 = (t_0 t_1 + 1) - t_0 t_1 = 1 = (-1)^0.$$

Suponhamos que valha para algum valor de m, então

$$x_{m+1}y_m - x_m y_{m+1} = (-1)^m.$$

Mostremos agora que vale para o caso $m+1$,

$$x_{m+2}y_{m+1} - x_{m+1}y_{m+2} = (t_{m+2}x_{m+1} + x_m)y_{m+1} - (t_{m+2}y_{m+1} + y_m)x_{m+1}$$

$$= t_{m+2}x_{m+1}y_{m+1} + x_m y_{m+1} - t_{m+2}x_{m+1}y_{m+1} - y_m x_{m+1}$$

$$= -(x_{m+1}y_m - x_m y_{m+1}) = -(-1)^m = (-1)^{m+1}.$$

∎

A partir de agora, $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$ será considerado um número real, e $\left(\dfrac{p_m}{q_m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ dada por $\dfrac{p_m}{q_m} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m]$ será a sequência de reduzidas da fração contínua de x.

Corolário 2.1 *As sequências (p_m) e (q_m) satisfazem as recorrências $p_{m+2} = a_{m+2}p_{m+1} + p_m$ e $q_{m+2} = a_{m+2}q_{m+1} + q_m$ para todo $m \geq 0$ com $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_1 = a_1$.*

Além disso,

$$p_{m+1}q_m - p_m q_{m+1} = (-1)^m$$

para todo $m \geq 0$.

Demonstração: As sequências (p_m) e (q_m) definidas pelas recorrências acima satisfazem, pela proposição 2.1, as igualdades

$$\frac{p_m}{q_m} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_m] \text{ e } p_{m+1}q_m - p_m q_{m+1} = (-1)^m,\ \forall\ m \geq 0.$$

Como $p_{m+1}q_m - p_m q_{m+1} = (-1)^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que (p_m) e (q_m) dados pela recorrência a cima são primo entre si. Além disso, também segue da recorrência que $q_m > 0$, para todo $m \geq 0$.

∎

Corolário 2.2 *Temos, para todo $m \in \mathbb{N}$,*

$$x = \frac{\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}} \text{ e } \alpha_m = \frac{p_{m-2} - q_{m-2}x}{q_{m-1}x - p_{m-1}}.$$

Demonstração: Primeiro observe que x pode ser escrito como $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, \alpha_m]$, pela proposição 2.1 podemos escrever $x = \dfrac{\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}}$.

Para demonstrar a segunda equação, temos que

$$\begin{aligned}
(\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2})x &= \alpha_m p_{m-1} + p_{m-2} \\
\alpha_m q_{m-1}x + q_{m-2}x &= \alpha_m p_{m-1} + p_{m-2} \\
\alpha_m q_{m-1}x - \alpha_m p_{m-1} &= -q_{m-2}x + p_{m-2} \\
\alpha_m(q_{m-1}x - p_{m-1}) &= p_{m-2} - q_{m-2}x \\
\alpha_m &= \frac{p_{m-2} - q_{m-2}x}{q_{m-1}x - p_{m-1}}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.2 *Temos*

$$x - \frac{p_m}{q_m} = \frac{(-1)^m}{(\alpha_{m+1} + \beta_{m+1})q_m^2},$$

onde

$$\beta_{m+1} = \frac{q_{m-1}}{q_m} = [0; a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_1].$$

Em particular,

$$\frac{1}{(a_{m+1} + 2)q_m^2} < \left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| = \frac{1}{(\alpha_{m+1} + \beta_{m+1})q_n^2} < \frac{1}{a_{m+1}q_m^2}.$$

Demonstração: Primeiro observe que α_{m+1} se dá pelo corolário 2.2 e segue pela proposição 2.1 que $\beta_{m+1} = \dfrac{q_{m-1}}{q_m} = \dfrac{q_{m-1}}{a_m q_{m-1} + q_{m-2}} = \dfrac{1}{a_m + \dfrac{q_{m-2}}{q_{m-1}}}$, de forma recursiva obtemos que $\beta_{m+1} = [0; a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_1]$.

Note pelo corolário 2.2 que

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\alpha_{m+1}p_m + p_{m-1}}{\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1}} \\
x - \frac{p_m}{q_m} &= \frac{\alpha_{m+1}p_m + p_{m-1}}{\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1}} - \frac{p_m}{q_m} \\
&= \frac{(\alpha_{m+1}p_m + p_{m-1})q_m - (\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})p_m}{(\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})q_m} \\
&= \frac{\alpha_{m+1}p_m q_m + p_{m-1}q_m - \alpha_{m+1}q_m p_m - p_m q_{m-1}}{(\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})q_m} \\
&= \frac{p_{m-1}q_m - q_{m-1}p_m}{(\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})q_m} = \frac{-(p_m q_{m-1} - p_{m-1}q_m)}{(\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})q_m}.
\end{aligned}$$

Pelo corolário 2.1 temos

$$\begin{aligned}
x - \frac{p_m}{q_m} &= \frac{-(-1)^{m-1}}{(\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})q_m} = \frac{(-1)^m}{(\alpha_{m+1}q_m + q_{m-1})q_m} \\
&= \frac{(-1)^m}{(\alpha_{m+1} + \frac{q_{m-1}}{q_m})q_m^2} = \frac{(-1)^m}{(\alpha_{m+1} + \beta_{m+1})q_m^2}.
\end{aligned}$$

Em particular, observe que

$$\left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| = \frac{1}{(\alpha_{m+1} + \beta_{m+1})q_m^2},$$

e como $\lfloor \alpha_{m+1} \rfloor = a_{m+1}$ e $0 < \beta_{m+1} < 1$, pois, $\beta_{m+1} = [0; a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_1]$, além disso note que, $a_{m+1} < \alpha_{m+1} < a_{m+1} + 1$, assim temos que $a_{m+1} < \alpha_{m+1} + \beta_{m+1} < a_{m+1} + 2$, como $q_m > 0$, podemos multiplicar por q_m^2 sem alterar a desigualdade, obtendo $a_{m+1}q_m^2 < (\alpha_{m+1} + \beta_{m+1})q_m^2 < (a_{m+1} + 2)q_m^2$. Temos desta última desigualdade que

$$\frac{1}{(a_{m+1} + 2)q_m^2} < \frac{1}{(\alpha_{m+1} + \beta_{m+1})q_m^2} < \frac{1}{a_{m+1}q_m^2}.$$

■

Observação 2.1 *Segue imediatamente desta proposição que*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{p_m}{q_m} = x,$$

pois $\lim_{m\to\infty} q_m = +\infty$, *tendo que* (q_m) *é estritamente crescente, assim faz sentido escrever* $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$, *ou seja,* x *é irracional.*

Corolário 2.3 (Teorema de Dirichlet) *Para todo* α *irracional, a desigualdade* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ *possui infinitas soluções* $\frac{p}{q}$.

Demonstração: Segue imediatamente da proposição anterior, pois $\alpha_{m+1} \geq 1$.

■

Proposição 2.3 *Para todo* $k \geq 0$, *temos*

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

Demonstração: Observe que a proposição acima indica que x é maior que todas as reduzidas pares (convergentes pares) e x é menor que todas as reduzidas ímpares (convergentes ímpares). Primeiro vamos mostrar que as reduzidas pares formam uma sequência crescente $\left(\frac{p_0}{q_0} \leq \frac{p_2}{q_2} \leq \frac{p_4}{q_4} \leq \frac{p_6}{q_6} \leq \cdots\right)$, enquanto as reduzidas ímpares formam uma sequência decrescente $\left(\frac{p_1}{q_1} \geq \frac{p_3}{q_3} \geq \frac{p_5}{q_5} \geq \frac{p_7}{q_7} \geq \cdots\right)$. Considere o caso geral para todo $m \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{p_{m+2}}{q_{m+2}} - \frac{p_m}{q_m} &= \frac{a_{m+2}p_{m+1} + p_m}{a_{m+2}q_{m+1} + q_m} - \frac{p_m}{q_m} \\
&= \frac{(a_{m+2}p_{m+1} + p_m)q_m - (a_{m+2}q_{m+1} + q_m)p_m}{(a_{m+2}q_{m+1} + q_m)q_m} \\
&= \frac{a_{m+2}p_{m+1}q_m + p_m q_m - a_{m+2}q_{m+1}p_m - q_m p_m}{(a_{m+2}q_{m+1} + q_m)q_m} \\
&= \frac{a_{m+2}p_{m+1}q_m - a_{m+2}q_{m+1}p_m}{(a_{m+2}q_{m+1} + q_m)q_m} \\
&= \frac{a_{m+2}(p_{m+1}q_m - q_{m+1}p_m)}{(a_{m+2}q_{m+1} + q_m)q_m}.
\end{aligned}$$

Pelo corolário 2.1 temos

$$\frac{p_{m+2}}{q_{m+2}} - \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_{m+2}(-1)^m}{q_{m+2}q_m}. \tag{2.6}$$

A igualdade (2.6) nos diz que $\frac{p_{m+2}}{q_{m+2}} - \frac{p_m}{q_m} \geq 0$ se m for par e $\frac{p_{m+2}}{q_{m+2}} - \frac{p_m}{q_m} \leq 0$ se m for ímpar.

Logo, $\frac{p_{m+2}}{q_{m+2}} \geq \frac{p_m}{q_m}$ se $m = 2k$ para todo $k \geq 0$ e $\frac{p_{m+2}}{q_{m+2}} \leq \frac{p_m}{q_m}$ se $m = 2k+1\ \forall\ k \geq 0$.

Pela proposição 2.2 temos que $x - \frac{p_m}{q_m} = \frac{(-1)^m}{(\alpha_{m+1} + \beta_{m+1})q_n^2}$.

Desta igualdade temos que $x - \frac{p_m}{q_m} \geq 0$ se $m = 2k$ para todo $k \geq 0$ e $x - \frac{p_m}{q_m} \leq 0$ se $m = 2k + 1$ para todo $k \geq 0$.

Logo $x \geq \frac{p_m}{q_m}$ se $m = 2k$ para todo $k \geq 0$ e $x \leq \frac{p_{m+2}}{q_{m+2}}$ se $m = 2k + 1$ para todo $k \geq 0$.

Podemos concluir que

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}.$$

■

Proposição 2.4 *Sejam* $a_0, a_1, \cdots, a_m$ *inteiros com* $a_k > 0$*, para todo* $k \geq 1$*, e seja* $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\geq 0}$ *a sequência de reduzidas da fração contínua* $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m]$*. Então o conjunto dos números reais cuja representação por frações contínuas começa com* $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$ *é o intervalo*

$$I(a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m) = \left\{\frac{p_m}{q_m}\right\} \bigcup \{[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, \alpha], \alpha > 1\}$$
$$= \begin{cases} \left[\frac{p_m}{q_m}, \frac{p_m + p_{m-1}}{q_m + q_{m-1}}\right) & \textit{se } m \textit{ é par} \\ \left(\frac{p_m + p_{m-1}}{q_m + q_{m-1}}, \frac{p_m}{q_m}\right] & \textit{se } m \textit{ é ímpar.} \end{cases}$$

Além disso, a função $G : (1, +\infty) \to I(a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m)$ *dada por* $G(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, \alpha]$ *é monótona, sendo crescente para* n *ímpar e decrescente para* n *par.*

Demonstração: Pelo corolário 2.2 e proposição 2.2 temos,

$$G(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, \alpha] = \frac{\alpha p_m + p_{m-1}}{\alpha q_m + q_{m-1}} = \frac{p_m}{q_m} + \frac{(-1)^m}{(\alpha q_m + q_{m-1})q_m},$$

logo G é crescente se m for ímpar e decrescente se m for par.

Observe que $G(1) = \frac{p_m + p_{m-1}}{q_m + q_{m-1}}$ e que $lim_{\alpha\to+\infty}G(\alpha) = \frac{p_m}{q_m}$, então

$$G((1, +\infty)) = \begin{cases} \left(\frac{p_m}{q_m}, \frac{p_m + p_{m-1}}{q_m + q_{m-1}}\right) & \text{se m é par} \\ \left(\frac{p_m + p_{m-1}}{q_m + q_{m-1}}, \frac{p_m}{q_m}\right) & \text{se m é ímpar.} \end{cases}$$

Assim, temos,

$$\begin{aligned} I(a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m) &= \left\{\frac{p_m}{q_m}\right\} \bigcup \{[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, \alpha], \alpha > 1\} \\ &= \left\{\frac{p_m}{q_m}\right\} \bigcup G((1, +\infty)) \\ &= \begin{cases} \left[\frac{p_m}{q_m}, \frac{p_m + p_{m-1}}{q_m + q_{m-1}}\right) & \text{se m é par} \\ \left(\frac{p_m + p_{m-1}}{q_m + q_{m-1}}, \frac{p_m}{q_m}\right] & \text{se m é ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

■

Proposição 2.5 *Dados inteiros* $a_0, a_1, a_2, \cdots$ *, com* $a_k > 0$*, para todo* $k \geq 1$*, existe um único número real* α *irracional cuja representação por frações contínuas é* $[a_0; a_1, a_2, \cdots]$.

Demonstração: Considere as sequências (p_m) e (q_m) definidas, pela proposição 2.1, pelas recorrências

$$p_{m+2} = a_{m+2}p_{m+1} + p_m \quad \text{e} \quad q_{m+2} = a_{m+2}q_{m+1} + q_m$$

para todo $m \geq 0$, com $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$. Pela proposição 2.3 temos que

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \text{ para todo } k \geq 0.$$

Vamos formar os seguintes intervalos fechados

$$I_k = \left[\frac{p_{2k}}{q_{2k}}, \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right] \quad \textbf{e} \quad I_{k+1} = \left[\frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}}, \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}}\right].$$

Observe que $I_{k+1} \subset I_k$, para todo $k \geq 0$, pois $I_{k+1} = \left[\frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}}, \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}}\right]$, logo está contido em I_k, pela proposição 2.3.

Observe que o tamanho do intervalo I_k é dado por

$$|I_k| = \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{p_{2k+1}q_{2k} - p_{2k}q_{2k+1}}{q_{2k+1}q_{2k}}.$$

Pelo corolário 2.1 temos,

$$\frac{(-1)^{2k}}{q_{2k+1}q_{2k}} = \frac{1}{q_{2k+1}q_{2k}}.$$

Observe que quando k tende ao infinito, o denominador fica tão grande quanto quisermos, isto implica que $|I_k|$ tende a 0 quando k tendo ao infinito. Logo existe um único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\bigcap_{k \geqslant 0} I_k = \{\alpha\}.$$

Observe que, para todo $k \geqslant 0$,

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{2k}] = \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leqslant \alpha \leqslant \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1}].$$

Pela proposição 2.4 temos que $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{2k}]$ e $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1}]$ pertencem a $I(a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{2k})$, logo a fração contínua de α começa com $a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{2k}$, para todo $k \geqslant 0$, sendo $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$. Como a representação em frações contínua de α é infinita, temos que α é irracional.

■

2.2 Reduzidas e Boas Aproximações

Teorema 2.1 *Temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| \leq \frac{1}{q_m q_{m+1}} < \frac{1}{q_m^2}.$$

Além disso,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad ou \quad \left| x - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} \right| < \frac{1}{2q_{m+1}^2}.$$

Demonstração: Observe que x sempre pertence ao segmento de extremos $\frac{p_m}{q_m}$ e $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ cujo comprimento é

$$\left| \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{p_m}{q_m} \right| = \left| \frac{(-1)^m}{q_m q_{m+1}} \right| = \frac{1}{q_m q_{m+1}} \Rightarrow \left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| \leq \frac{1}{q_m q_{m+1}} < \frac{1}{q_m^2}.$$

Suponha que a afirmativa seja falsa, ou seja

$$\left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| \geq \frac{1}{2q_m^2} \text{ e } \left| x - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} \right| > \frac{1}{2q_{m+1}^2},$$

então

$$\frac{1}{q_m q_{m+1}} = \left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| + \left| x - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} \right| \geq \frac{1}{2q_m^2} + \frac{1}{2q_{m+1}^2} \Rightarrow q_{m+1} = q_m \text{, absurdo.}$$

■

Observação 2.2 *Temos $\left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{1}{q_m q_{m+1}} < \frac{1}{a_{m+1} q_m^2}$. Quanto maior for o valor de a_{m+1}, melhor será a aproximação $\frac{p_m}{q_m}$ de x.*

Teorema 2.2 (Hurwitz,Markov) *Para todo α irracional e todo inteiro $m \geq 1$, temos*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Para pelo menos um racional

$$\frac{p}{q} \in \left\{\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}, \frac{p_m}{q_m}, \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right\}.$$

Em particular, a desigualdade acima tem infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$.

Demonstração: Vamos supor que o teorema seja falso. Então teríamos $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ para todo $\frac{p}{q} \in \left\{\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}, \frac{p_m}{q_m}, \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right\}$. Pela proposição 2.2, para algum $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e algum $m \geq 1$, temos

$$\left|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right| = \left|\frac{(-1)^m}{(\alpha_m + \beta_m)q_m^2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_m^2},$$

logo

$$\frac{1}{(\alpha_m + \beta_m)q_m^2} \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_m^2} \Rightarrow \alpha_m + \beta_m \leq \sqrt{5}$$

.

Também temos que

$$\left|\alpha - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{m+1}}{(\alpha_{m+1} + \beta_{m+1})q_{m+1}^2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{m+1}^2},$$

logo

$$\frac{1}{(\alpha_{m+1} + \beta_{m+1})q_{m+1}^2} \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{m+1}^2} \Rightarrow \alpha_{m+1} + \beta_{m+1} \leq \sqrt{5}$$

.

E ainda

$$\left|\alpha - \frac{p_{m+2}}{q_{m+2}}\right| = \left|\frac{(-1)^{m+2}}{(\alpha_{m+2} + \beta_{m+2})q_{m+2}^2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{m+2}^2},$$

logo

$$\frac{1}{(\alpha_{m+2} + \beta_{m+2})q_{m+2}^2} \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_{m+2}^2} \Rightarrow \alpha_{m+2} + \beta_{m+2} \leq \sqrt{5}.$$

Observe que $a_{m+1} < \alpha_{m+1} + \beta_{m+1} \leq \sqrt{5}$ e como $a_{m+1} > 0$, temos que a_{m+1} pode ser igual a 1 ou igual a 2. Se para algum $a_k = 2$, onde k pertence ao conjunto $\{m, m+1, m+2\}$, teríamos $\beta_{m+1} \geq \dfrac{1}{a_k + 1} = \dfrac{1}{3}$ e $\alpha_{m+1} + \beta_{m+1} \geq 2 + \dfrac{1}{3} > \sqrt{5}$, que claramente é um absurdo, pois $2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3} < \sqrt{5}$. Assim, temos $a_{m+1} = 1$, da mesma forma temos $a_{m+2} = 1$. Fazendo $x = \dfrac{1}{\alpha_{m+2}}$ e $y = \beta_{m+1}$. Dessas duas igualdades, podemos obter também as seguintes igualdades.

$$\alpha_{m+2} = \frac{1}{\alpha_{m+1} - a_{m+1}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha_{m+1} - a_{m+1}} \Rightarrow \alpha_{m+1} = 1 + x.$$

Também temos

$$\alpha_{m+1} = \frac{1}{\alpha_m - a_m} \Rightarrow 1 + x = \frac{1}{\alpha_m - a_m} \Rightarrow \alpha_m = \frac{1}{1+x} + a_m.$$

Note, pela proposição 2.2, que

$$y = \beta_{m+1} = [0; a_m, a_{m-1}, \cdots, a_1] \Rightarrow \frac{1}{y} = [a_m; a_{m-1}, \cdots, a_1] = a_m + [0; a_{m-1}, \cdots, a_1].$$

Como $\beta_m = [0; a_{m-1}, \cdots, a_1]$, temos

$$\frac{1}{y} = a_m + \beta_m \Rightarrow \beta_m = \frac{1}{y} - a_m.$$

Observe que

$$\beta_{m+2} = [0; a_{m+1}, a_m, \cdots, a_1] \Rightarrow \frac{1}{\beta_{m+2}} = [a_{m+1}; a_m, \cdots, a_1] = a_{m+1} + [0; a_m, \cdots, a_1].$$

Ou seja

$$\frac{1}{\beta_{m+2}} = 1 + \beta_{m+1} \Rightarrow \beta_{m+2} = \frac{1}{1+y}.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}\alpha_m + \beta_m = \frac{1}{1+x} + a_m + \frac{1}{y} - a_m = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{y},\\ \alpha_{m+1} + \beta_{m+1} = 1 + x + y \ \ \text{e}\\ \alpha_{m+2} + \beta_{m+2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y}.\end{aligned}$$

Podemos assim, escrever

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \leq \sqrt{5}, \qquad 1 + x + y \leq \sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \leq \sqrt{5}.$$

Da segunda, temos

$$\begin{aligned}1 + x + y \leq \sqrt{5} \ &\Rightarrow \ 1 + x \leq \sqrt{5} - y\\ &\Rightarrow \ \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - y}\\ &\Rightarrow \ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-y} + \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{5}}{y(\sqrt{5}-y)}.\end{aligned}$$

Pela primeira desigualdade, temos $\dfrac{\sqrt{5}}{y(\sqrt{5}-y)} \leq \sqrt{5}$, implica em, $y(\sqrt{5}-y) \geq 1$.

Daí, temos a seguinte inequação $-y^2 + \sqrt{5}y - 1 \geq 0$, cuja a solução é

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Por outro lado, temos também que

$$\begin{aligned}1 + x + y \leq \sqrt{5} \ &\Rightarrow \ x \leq \sqrt{5} - 1 - y\\ &\Rightarrow \ \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{5} - 1 - y}\\ &\Rightarrow \ \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-1-y} + \frac{1}{1+y} = \frac{\sqrt{5}}{(1+y)(\sqrt{5}-1-y)}.\end{aligned}$$

Pela terceira desigualdade, temos

$$\frac{\sqrt{5}}{(1+y)(\sqrt{5}-1-y)} \leq \sqrt{5} \Rightarrow (1+y)(\sqrt{5}-1-y) \leq 1.$$

Daí, temos a seguinte inequação $-y^2 - (2-\sqrt{5})y + (\sqrt{5}-2) \geq 0$, cuja a solução é

$$\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Daí, temos que $y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, que é absurdo pois, $y = \beta_{m+1} = \dfrac{q_{m-1}}{q_m} \in \mathbb{Q}$.

■

Observação 2.3 *Em particular provamos que* $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{5}q^2}$ *tem infinitas soluções racionais* $\dfrac{p}{q}$*, para todo* α *irracional. O número* $\sqrt{5}$ *é o maior com essa propriedade.*

2.3 Boas Aproximações são Reduzidas

Teorema 2.3 *Para todo* $p, q \in \mathbb{Z}$*, com* $0 < q < q_{m+1}$ *temos*

$$|q_m x - p_m| \leq |qx - p|.$$

Além disso, se $0 < q < q_m$ *a desigualdade a cima é estrita.*

Demonstração: Observe que, como o $mdc(p_m, q_m) = 1$ e se $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p_m}{q_m}$ então $p = kp_m$ e $q = kq_m$ para algum inteiro $k \neq 0$ e neste caso temos que $|q_m x - p_m| \leq |kq_m x - kp_m|$, o que implica diretamente a desigualdade, onde a igualdade ocorre quando $k = 1$. Vamos supor então que $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_m}{q_m}$ tal que,

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_m}{q_m}\right| \geq \frac{1}{qq_m} > \frac{1}{q_m q_{m+1}}$$

pois $q < q_{m+1}$. Observe que $\dfrac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\dfrac{p_m}{q_m}$ e $\dfrac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ e logo

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_m}{q_m}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{q_m q_{m+1}}.$$

O que implica

$$|qx - p| \geq \frac{1}{q_{m+1}} \geq |q_m x - p_m|$$

Temos que a igualdade só ocorrerá quando $x = \dfrac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$.

■

Corolário 2.4 *Para todo $q < q_m$,*

$$\left|x - \frac{p_m}{q_m}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|$$

Demonstração: A demonstração segue imediatamente do teorema anterior.

■

Corolário 2.5 *Se $|qx - p| \leq |q'x - p'|$, para todo p' e $q' \leq q$ tais que $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, então $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de x.*

Demonstração: Basta tomar m tal que $q_m \geq q_{m+1}$. Pelo teorema 2.3, temos que $|q_m x - p_m| \leq |qx - p|$, assim a igualdade $|q_m x - p_m| = |qx - p|$ implica que $\frac{p}{q} = \frac{p_m}{q_m}$.

■

Teorema 2.4 *Se $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ então $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de x.*

Demonstração: Seguiremos com uma demonstração próxima a realizada no teorema 2.3. Seja m tal que $q_m \leq q < q_{m+1}$. Suponha que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_m}{q_m}$. Note, pelo argumento do teorema 2.3, que $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_m}$, onde $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_m}{q_m}$ e $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$. Obtendo assim, duas possibilidades:

(a) Se $q \geq \frac{q_{m+1}}{2}$ então $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_{m+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$, e isso é um absurdo.

(b) $q < \frac{q_{m+1}}{2}$,

$$\begin{aligned}
\left|x - \frac{p}{q}\right| &\geq \left|\frac{p_m}{q_m} - \frac{p}{q}\right| - \left|\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{p_m}{q_m}\right| \\
&\geq \frac{1}{qq_m} - \frac{1}{q_m q_{m+1}} = \frac{q_{m+1} - q}{qq_m q_{m+1}} \\
&> \frac{1}{2qq_m} \geq \frac{1}{2q^2}.
\end{aligned}$$

Que claramente é um absurdo.

■

Capítulo 3

Frações Contínuas Periódicas

Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$ uma fração contínua infinita, ou seja, α é irracional. A fração contínua de α é dita periódica se existe um inteiro $k \geq 0$ e l um número natural, tais que $a_m = a_{m+l}$ para todo inteiro $m \geq k$. O menor número natural l, tal que, $a_m = a_{m+l}$ para todo inteiro $m \geq k$. Será denotado por $l(\alpha)$ o comprimento do período de α.

3.1 Irracionais Quadráticos

Definição 3.1 *Um número $\alpha \in \mathbb{R}$ é denominado irracional quadrático quando é uma raiz de uma equação da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e $c \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$, ou seja,*

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}$$

Onde $P, Q \in \mathbb{Z}$, $Q \neq 0$ e $Q|(P^2 - D)$. Definimos também que $\alpha' = \dfrac{P - \sqrt{D}}{Q}$ é o conjugado de α.

Se α é um irracional quadrático, então $f(\alpha) = 0$ para algum $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Assim temos que $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. Pela fórmula de resolução da equação do segundo grau, temos

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \textbf{ou} \quad \alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sem perca de generalidade, vamos supor que $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $\alpha' = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ temos então que $b^2-4ac > 0$ e b^2-4ac será livre de quadrados, pois caso contrário $\alpha \in \mathbb{Q}$. Fazendo $P=-b$, $D=b^2-4ac$ e $Q=2a$ os irracionais α e α' são da seguinte forma

$$\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{Q} \quad \textbf{e} \quad \alpha' = \frac{P-\sqrt{D}}{Q}.$$

Observe que $Q|(P^2-D)$, pois $Q|(P^2-D) = (-b)^2 - b^2 + 4ac = 4ac = Q2c$. O irracional α' é o conjugado do irracional α.

Definição 3.2 *Um irracional quadrático* $\alpha = \dfrac{P+\sqrt{D}}{Q}$ *é reduzido se* $\alpha > 1$ *e* $-1 < \alpha' < 0$. *Com* $\alpha' = \dfrac{P-\sqrt{D}}{Q}$.

Teorema 3.1 *Seja* $\alpha = \dfrac{P_0+\sqrt{D}}{Q_0}$ *um irracional quadrático, onde* $D > 0$ *é livre de quadrados,* $Q_0 \neq 0$ *é um inteiro,* $P_0 \in \mathbb{Z}$ *e* $Q_0|(D-P_0^2)$. *Recursivamente definimos para* $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= \frac{P_m+\sqrt{D}}{Q_m}\\
a_m &= \lfloor \alpha_m \rfloor\\
P_{m+1} &= a_m Q_m - P_m\\
Q_{m+1} &= \frac{D-P_{m+1}^2}{Q_m}.
\end{aligned}$$

Então P_m *e* Q_m *são inteiros, com* $Q_m \neq 0$, *para todo* m *e* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$.

Demonstração: Mostraremos por indução sobre m.

Para $m=0$ temos P_0, Q_0 são inteiros e $Q_0|(D-P_0^2)$, pela definição 3.1. Suponha que valha para todos os valores até m, então $P_0, \cdots, P_m$ e $Q_0, \cdots, Q_m$ são todos inteiros e $Q_0|(D-P_0^2), \cdots, Q_m|(D-P_m^2)$. Vamos mostrar que P_{m+1} e Q_{m+1} são inteiros e $Q_{m+1}|(D-P_{m+1}^2)$. Temos por hipótese que a_m, Q_m e P_m são inteiros, então $P_{m+1} = a_m Q_m - P_m$ também será. Também note que

$$Q_{m+1} = \frac{D-P_{m+1}^2}{Q_m} = \frac{D-(a_m Q_m - P_m)^2}{Q_m} = \frac{D-P_m^2}{Q_m} + 2a_m P_m - a_m^2 Q_m.$$

Note que $D - P_m^2 = Q_m Q_{m-1}$, por definição, então

$$Q_{m+1} = \frac{Q_m Q_{m-1}}{Q_m} + 2a_m P_m - a_m^2 Q_m = Q_{m-1} + 2a_m P_m - a_m^2 P_m.$$

Como Q_m, a_m, Q_{m-1} e P_m são inteiros, por hipótese, então, temos que Q_{m+1} também é inteiro. Como temos $D - P_{m+1}^2 \neq 0$, pois D é livre de quadrados, termos então que $Q_{m+1} \neq 0$. Além disso, como $Q_m Q_{m+1} = D - P_{m+1}^2$ concluímos também que $Q_{m+1} | (D - P_{m+1}^2)$.

Agora vamos mostrar que as recorrências calculam a fração contínua simples de α.

Para isso, temos

$$\begin{aligned} \alpha_m - a_m &= \frac{P_m + \sqrt{D}}{Q_m} - a_m \\ &= \frac{\sqrt{D} - (a_m Q_m - P_m)}{Q_m}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como $P_{m+1} = a_m Q_m - P_m$, podemos substituí-la em (3.1), obtendo-se

$$\alpha_m - a_m = \frac{\sqrt{D} - P_{m+1}}{Q_m}. \tag{3.2}$$

Ao multiplicarmos o segundo membro da equação por $\frac{(\sqrt{D} + P_{m+1})}{(\sqrt{D} + P_{m+1})}$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_m - a_m &= \frac{(\sqrt{D} - P_{m+1})}{Q_m} \frac{(\sqrt{D} + P_{m+1})}{(\sqrt{D} + P_{m+1})} \\ &= \frac{D - P_{m+1}^2}{Q_m(\sqrt{D} + P_{m+1})}. \end{aligned}$$

Mas $Q_{m+1} Q_m = D - P_{m+1}^2$, assim temos que

$$\begin{aligned} \alpha_m - a_m &= \frac{Q_{m+1} Q_m}{Q_m(\sqrt{D} + P_{m+1})} \\ &= \frac{Q_{m+1}}{\sqrt{D} + P_{m+1}}. \end{aligned}$$

Tomando seu inverso, temos

$$\frac{1}{\alpha_m - a_m} = \frac{P_{m+1} + \sqrt{D}}{Q_{m+1}} = \alpha_{m+1}.$$

■

Corolário 3.1 *Fazendo $Q_0 = 1$ e $P_0 = 0$ temos o caso especial de $\alpha = \sqrt{D}$.*

3.2 Teorema de Lagrange

Teorema 3.2 *Seja x um número irracional. A expansão em frações contínuas de x é periódica se, e somente se, x é solução de uma equação quadrática com coeficientes inteiros.*

Demonstração: Para demonstrar esse teorema, vamos criar dois lemas.

Lema 3.2.1 *Se um número irracional x tem expansão periódica então satisfaz uma equação quadrática.*

Demonstração: Pelo corolário 2.2 temos que $\alpha_m = \dfrac{p_{m-2} - q_{m-2}x}{q_{m-1}x - p_{m-1}}$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$. Considere que x é periódico (ou pré-periódico). Neste caso, temos $\alpha_m = \alpha_{m+k}$, para algum $m \in \mathbb{N},\ k \geq 1$. Logo temos, pelo corolário (2.0.2) que

$$\alpha_m = \alpha_{m+k} \Rightarrow \frac{p_{m-2} - q_{m-2}x}{q_{m-1}x - p_{m-1}} = \frac{p_{m+k-2} - q_{m+k-2}x}{q_{m+k-1}x - p_{m+k-1}}$$

$$(p_{m-2} - q_{m-2}x)(q_{m+k-1}x - p_{m+k-1}) = (q_{m-1}x - p_{m-1})(p_{m+k-2} - q_{m+k-2}x)$$

que implica

$$p_{m-2}q_{m+k-1}x - p_{m-2}p_{m+k-1} - q_{m-2}q_{m+k-1}x^2 + q_{m-2}p_{m+k-1}x$$

$$= q_{m-1}p_{m+k-2}x - q_{m-1}q_{m+k-2}x^2 - p_{m-1}p_{m+k-2} + p_{m-1}q_{m+k-2}x.$$

Reorganizando os termos de x^2, x e o termo independente de x obtemos

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

onde

$A = q_{m-1}q_{m+k-2} - q_{m-2}q_{m+k-1}$

$B = p_{m+k-1}q_{m-2} + p_{m-2}q_{m+k-1} - p_{m+k-2}q_{m-1} - p_{m-1}q_{m+k-2}$

$C = p_{m-1}p_{m+k-2} - p_{m-2}p_{m+k-1}$.

Primeiro observe que A, B e C são números inteiros, pois p_m , $q_m \in \mathbb{N}$. Basta mostrar que $A \neq 0$ para caracterizar uma equação do segundo grau. Note pelo corolário 2.1 que $p_{m-1}q_{m-2} - p_{m-2}q_{m-1} = (-1)^m$, note que se m for par, temos $p_{m-1}q_{m-2}-$

$p_{m-2}q_{m-1} = 1$, ou se m for ímpar, temos que $p_{m-2}q_{m-1} - p_{m-1}q_{m-2} = 1$, note que em ambos os casos pelo algoritmo de Euclides para mdc, que $mdc(q_{m-2}, q_{m-1}) = 1$, logo $\dfrac{q_{m-2}}{q_{m-1}}$ é uma fração irredutível. Note, pelo mesmo motivo do caso anterior que $mdc(q_{m+k-2}, q_{m+k-1}) = 1$, logo $\dfrac{q_{m+k-2}}{q_{m+k-1}}$ com $q_{m+k-2} > q_{m-2}$, donde $\dfrac{q_{m-2}}{q_{m-1}} \neq \dfrac{q_{m+k-2}}{q_{m+k-1}}$, assim, temos que $q_{m-1}q_{m+k-2} - q_{m-2}q_{m+k-1} \neq 0$, o que caracteriza uma equação do segundo grau.

∎

Lema 3.2.2 *Considere um número irracional x que é solução de uma equação quadrática com coeficientes inteiros. Então a expansão em frações contínuas de x é periódica (ou pré-periódica).*

Demonstração: Vamos provar que se x é uma *irracionalidade quadrática*, ou seja, $x = r+\sqrt{s}, r, s \in \mathbb{Q}, s > 0$, nesse caso a fração contínua de x é periódica, logo existem $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}^*$ com $\alpha_{m+k} = \alpha_m$. Como, pelo corolário 2.1, $x = \dfrac{\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}}$, temos

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\Rightarrow a\left(\frac{\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}}\right)^2 + b\left(\frac{\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}}\right) + c = 0$$

$$a\frac{(\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2})^2}{(\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2})^2} + b\frac{(\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2})(\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2})}{(\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2})^2} + c\frac{(\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2})^2}{(\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2})^2} = 0$$

$$\Rightarrow a(\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2})^2 + b(\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2})(\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}) + c(\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2})^2 = 0$$

$\Rightarrow a(\alpha_m^2 p_{m-1}^2 + 2\alpha_m p_{m-1}p_{m-2} + p_{m-2}^2) + b(\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2})(\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}) +$
$c(\alpha_m^2 q_{m-1}^2 + 2\alpha_m q_{m-1}q_{m-2} + q_{m-2}^2) = 0$
$\Rightarrow a\alpha_m^2 p_{m-1}^2 + 2ap_{m-1}p_{m-2}\alpha_m + ap_{m-2}^2 + bp_{m-1}q_{m-1}\alpha_m^2 + bp_{m-1}q_{m-2}\alpha_m + bp_{m-2}q_{m-1}\alpha_m +$
$bp_{m-2}q_{m-2} + c\alpha_m^2 q_{m-1}^2 + 2cq_{m-1}q_{m-2}\alpha_m + cq_{m-2}^2 = 0.$

Desta última equação, isolando os coeficientes de α_m^2, α_m e termo independente de α_m, temos

$$A_m = ap_{m-1}^2 + bp_{m-1}q_{m-1} + cq_{m-1}^2$$
$$B_m = 2ap_{m-1}p_{m-2} + b(p_{m-1}q_{m-2} + p_{m-2}q_{m-1}) + 2cq_{m-1}q_{m-2}$$
$$C_m = ap_{m-2}^2 + bp_{m-2}q_{m-2} + cq_{m-2}^2.$$

Logo, obtemos a seguinte equação

$$A_m\alpha_m^2 + B_m\alpha_m + C_m = 0.$$

Note que $C_m = A_{m-1}$, pois $A_{m-1} = ap_{(m-1)-1}^2 + bp_{(m-1)-1}q_{(m-1)-1} + cq_{(m-1)-1}^2 = ap_{m-2}^2 + bp_{m-2}q_{m-2} + c_{m-2} = C_m$. Queremos mostrar agora que os valores de A_m, B_m e C_m são estritamente limitados, ou seja, existe um $M > 0$ tal que $0 < |A_m| \leq M$ para todo $m \in \mathbb{N}$, e portanto $0 < |C_m| \leq M$ para todo $m \in \mathbb{N}$, e que existe um M' tal que $0 < |B_m| < M'$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
A_m &= ap_{m-1}^2 + bp_{m-1}q_{m-1} + cq_{m-1}^2 \\
&= \frac{aq_{m-1}^2}{aq_{m-1}^2}(ap_{m-1}^2 + bp_{m-1}q_{m-1} + cq_{m-1}^2) \\
&= aq_{m-1}^2\left(\frac{ap_{m-1}^2}{aq_{m-1}^2} + \frac{bp_{m-1}q_{m-1}}{aq_{m-1}^2} + \frac{cq_{m-1}^2}{aq_{m-1}^2}\right) \\
&= aq_{m-1}^2\left(\frac{p_{m-1}^2}{q_{m-1}^2} + \frac{bp_{m-1}}{aq_{m-1}} + \frac{c}{a}\right).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Observe que se $aX^2 + bX + c = 0$ possui como raízes x_1 e x_2 então $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ e $\frac{c}{a} = x_1x_2$, Substituindo em (3.3), temos

$$\begin{aligned}
A_m &= aq_{m-1}^2\left(\frac{p_{m-1}^2}{q_{m-1}^2} - (x_1 + x_2)\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} + x_1x_2\right) \\
&= aq_{m-1}^2\left(\frac{p_{m-1}^2}{q_{m-1}^2} - x_1\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} - x_2\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} + x_1x_2\right) \\
&= aq_{m-1}^2\left[\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\left(\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} - x_1\right) + x_2\left(-\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} + x_1\right)\right] \\
&= aq_{m-1}^2\left[-\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\left(-\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} + x_1\right) + x_2\left(-\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} + x_1\right)\right] \\
&= aq_{m-1}^2\left(x_1 - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right)\left(x_2 - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right).
\end{aligned}$$

Pelo teorema 2.1 temos que

$$\left|x - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{1}{q_m^2} \leq 1 \Rightarrow q_m^2 \left|x - \frac{p_m}{q_m}\right| \leq 1.$$

Observe que

$$|A_m| = aq_{m-1}^2 \left|x_1 - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right| \left|x_2 - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right|. \tag{3.4}$$

Como $q_{m-1}^2 \left|x_1 - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right| \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned} |A_m| &\leq a \left|x_2 - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right| \\ &\leq a \left(|x_2 - x_1| + \left|x_1 - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}\right| \right) \\ &\leq M \overset{def}{=} a(|x_2 - x_1| + 1). \end{aligned}$$

Assim temos que $|A_m| \leq M$ e $|C_m| \leq M$.

Mostraremos agora que $B_m^2 - 4A_mC_m = b^2 - 4ac$. Para facilitar a visualização iremos primeiro calcular o valor de B_m^2.

Lembre que $B_m = 2ap_{m-1}p_{m-2} + b(p_{m-1}q_{m-2} + p_{m-2}q_{m-1}) + 2cq_{m-1}q_{m-2}$, assim

$$\begin{aligned} B_m^2 = &\underbrace{4a^2p_{m-1}^2p_{m-2}^2}_{(\alpha)} + \underbrace{b^2p_{m-1}^2q_{m-2}^2}_{(\beta)} + \underbrace{2b^2p_{m-1}p_{m-2}q_{m-1}q_{m-2}}_{(\gamma)} + \underbrace{b^2p_{m-2}^2q_{m-1}^2}_{(\delta)} \\ &+ \underbrace{4c^2q_{m-1}^2q_{m-2}^2}_{(\epsilon)} + \underbrace{8acp_{m-1}p_{m-2}q_{m-1}q_{m-2}}_{(\mu)} + \underbrace{4abp_{m-1}^2p_{m-2}q_{m-2}}_{(\zeta)} \\ &+ \underbrace{4abp_{m-2}^2p_{m-1}q_{m-1}}_{(\eta)} + \underbrace{4bcq_{m-2}^2q_{m-1}p_{m-1}}_{(\theta)} + \underbrace{4bcq_{m-1}^2q_{m-2}p_{m-2}}_{(\vartheta)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Vamos agora calcular $-4A_mC_m$.

Lembre que $A_m = ap_{m-1}^2 + bp_{m-1}q_{m-1} + cq_{m-1}^2$ e $C_m = ap_{m-2}^2 + bp_{m-2}q_{m-2} + cq_{m-2}^2$.

$$\begin{aligned} -4A_mC_m = &-\underbrace{4a^2p_{m-1}^2p_{m-2}^2}_{(\alpha')} - \underbrace{4abp_{m-1}^2p_{m-2}q_{m-2}}_{(\zeta')} - \underbrace{4acp_{m-1}^2q_{m-2}^2}_{(\beta')} \\ &- \underbrace{4abp_{m-2}^2p_{m-1}q_{m-1}}_{(\eta')} - \underbrace{4b^2p_{m-1}p_{m-2}q_{m-1}q_{m-2}}_{(\gamma')} - \underbrace{4bcq_{m-2}^2q_{m-1}p_{m-1}}_{(\theta')} \\ &- \underbrace{4acp_{m-2}^2q_{m-1}^2}_{(\delta')} - \underbrace{4bcq_{m-1}^2q_{m-2}p_{m-2}}_{(\vartheta')} - \underbrace{4c^2q_{m-1}^2q_{m-2}^2}_{(\epsilon')}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Observe que nas equações (3.5) e (3.6) as partes (α) e (α'), (ϵ) e (ϵ'), (ζ) e (ζ'), (η) e (η'), (θ) e (θ'), e (ϑ) e (ϑ') são simétricas. Assim, temos

$$\begin{aligned} B_m^2 - 4A_mC_m = &\underbrace{b^2p_{m-1}^2q_{m-2}^2}_{(\beta)} + \underbrace{2b^2p_{m-1}p_{m-2}q_{m-1}q_{m-2}}_{(\gamma)} + \underbrace{b^2p_{m-2}^2q_{m-1}^2}_{(\delta)} \\ &+ \underbrace{8acp_{m-1}p_{m-2}q_{m-1}q_{m-2}}_{(\mu)} - \underbrace{4acp_{m-1}^2q_{m-2}^2}_{(\beta')} \\ &- \underbrace{4b^2p_{m-1}p_{m-2}q_{m-1}q_{m-2}}_{(\gamma')} - \underbrace{4acp_{m-2}^2q_{m-1}^2}_{(\delta')}. \end{aligned}$$

Organizando, (β) com (β'), (γ) e (γ') com (μ) e (δ) com (δ'), temos

$$\begin{aligned} B_m^2 - 4A_mC_m &= (p_{m-1}^2q_{m-2}^2 - 2p_{m-1}p_{m-2}q_{m-1}q_{m-2} + p_{m-2}^2q_{m-1}^2)(b^2 - 4ac) \\ &= (p_{m-1}q_{m-2} - p_{m-2}q_{m-1})^2(b^2 - 4ac). \end{aligned}$$

Pela proposição 2.1, temos que $p_{m-1}q_{m-2} - p_{m-2}q_{m-1} = (-1)^{m-2}$.

Logo $(p_{m-1}q_{m-2} - p_{m-2}q_{m-1})^2 = 1$.

Concluímos então, que $B_m^2 - 4A_mC_m = b^2 - 4ac$.

Com isto temos que

$$\begin{aligned} B_m^2 &= 4A_mC_m + b^2 - 4ac \leq 4M^2 + b^2 - 4ac \\ \Rightarrow B_m &\leq M' \stackrel{def}{=} \sqrt{4M^2 + b^2 - 4ac}. \end{aligned}$$

Provamos assim, que existem apenas um número finito de equações com coeficientes A_m, B_m e C_m da forma $A_m X^2 + B_m X + C_m = 0$, portanto existe um número finito de valores possíveis para α_m. Assim, necessariamente $\alpha_{m+k} = \alpha_m$ para algum número m natural diferente de zero.

■

Unindo os lemas 3.1.1 e 3.1.2, obtemos a demonstração do Teorema 3.1, que afirma que se x é irracional, então a fração contínua de x é periódica (ou pré-periódica), se e somente se, x é solução de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros.

■

3.3 A equação de Pell

Teorema 3.3 *A equação $x^2 - Ay^2 = 1$ tem infinitas soluções inteiras (x, y), com A diferente de um quadrado perfeito. Além disso, as soluções com x e y inteiros positivos podem ser enunciados por (x_m, y_m), $m \geq 1$ de modo que, para todo m, $x_m + y_m\sqrt{A} = (x_1 + y_1\sqrt{A})^m$, e portanto*

$$x_m = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^m + (x_1 - y_1\sqrt{A})^m}{2} \quad e \quad y_m = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^m + (x_1 - y_1\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}.$$

Demonstração: Primeiro formaremos o conjunto $D = \left\{x + y\sqrt{A} \;\mid\; x, y \in \mathbb{Z}\right\}$ então podemos criar uma função N multiplicativa.

$$N : D \to \mathbb{Z}, N(x + y\sqrt{A}) = x^2 - Ay^2.$$

A função N é multiplicativa, pois

$$N((x + y\sqrt{A})(u + v\sqrt{A})) = N(x + y\sqrt{A})N(u + v\sqrt{A}).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
(x + y\sqrt{A})(u + v\sqrt{A})) &= xu + xv\sqrt{A} + yu\sqrt{A} + yvA \\
&= (xu + yvA) + (xv + yu)\sqrt{A}.
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}
N((x+y\sqrt{A})(u+v\sqrt{A})) &= N((xu+yvA)+(xv+yu)\sqrt{A}) \\
N((x+y\sqrt{A})(u+v\sqrt{A})) &\overset{def}{=} (xu+yvA)^2 - A(xv+yu)^2 \\
&= (xu)^2 + 2xuyvA + (yvA)^2 - A(xv)^2 - 2xuyvA - A(yu)^2 \\
&= (xu)^2 - A(xv)^2 + (yvA)^2 - A(yu)^2 \\
&= x^2(u^2 - Av^2) - Ay^2(u^2 - Av^2) \\
&= (x^2 - Ay^2)(u^2 - Av^2) \\
&= N(x+y\sqrt{A})N(u+v\sqrt{A}).
\end{aligned}$$

Assim, temo que N é multiplicativa.

Como $\sqrt{A}$ é irracional, pois A não é um quadrado perfeito, poderemos utilizar o teorema de Dirichlet, obtendo que o seguinte resultado possui infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$

$$\left|\sqrt{A} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Desta desigualdade obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\left|p^2 - Aq^2\right| &= \left|p - q\sqrt{A}\right| \left|p + q\sqrt{A}\right| \\
&= q\left|\sqrt{A} - \frac{p}{q}\right| \left|p + q\sqrt{A}\right| < q\frac{1}{q^2}\left|p + q\sqrt{A}\right|.
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\left|p^2 - Aq^2\right| < \left|\frac{p}{q} + \sqrt{A}\right|.$$

Observe que $\left|\sqrt{A} + \frac{p}{q}\right| = \left|2\sqrt{A} + \frac{p}{q} - \sqrt{A}\right| \leq \left|2\sqrt{A}\right| + \left|\sqrt{A} - \frac{p}{q}\right|$.

Logo,temos

$$\left|p^2 - Aq^2\right| \leq 2\sqrt{A} + \left|\sqrt{A} - \frac{p}{q}\right|.$$

Como $\left|\sqrt{A}-\dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2} < 1$, então

$$\begin{aligned} \left|p^2 - Aq^2\right| &\leq 2\sqrt{A} + \frac{1}{q^2} \\ \left|p^2 - Aq^2\right| &< 2\sqrt{A} + 1. \end{aligned}$$

Como existe uma infinidade de pares (p_m, q_m) com $\left|\sqrt{A}-\dfrac{p_m}{q_m}\right| < \dfrac{1}{q_m^2}$, teremos então sempre que $|p_m^2 - Aq_m^2| < 2\sqrt{A}+1$, logo temos que existe um número finito de possibilidades para valores inteiros de $p_m^2 - Aq_m^2$. Dessa forma existe um número $k \neq 0$ tal que $p_m^2 - Aq_m^2 = k$ para infinitos valores de m. Observe agora que, podemos criar duas sequências de pares de inteiros positivos que chamaremos de (u_r) e (v_r), r $\in \mathbb{N}$ tais que $u_r^2 - Av_r^2 = k$ para todo r.

Observe que existem inteiros a e b, com uma infinidade de valores de r tais que $u_r \equiv a(mod\,|k|)$ e $v_r \equiv b(mod\,|k|)$. Tomemos $r < s$, tais que $u_r \equiv u_s(mod\,|k|)$ e $v_r \equiv v_s(mod\,|k|)$. Vamos verificar que $\dfrac{u_s+v_s\sqrt{A}}{u_r+v_r\sqrt{A}}$ é da forma $x+y\sqrt{A}$ com x e y inteiros.

$$\begin{aligned} \frac{u_s+v_s\sqrt{A}}{u_r+v_r\sqrt{A}} &= \frac{(u_s+v_s\sqrt{A})}{(u_r+v_r\sqrt{A})}\frac{(u_r-v_r\sqrt{A})}{(u_r-v_r\sqrt{A})} \\ &= \frac{(u_s+v_s\sqrt{A})(u_r-v_r\sqrt{A})}{u_r^2-Av_r^2} \\ &= \frac{u_su_r - usv_r\sqrt{A}+u_rv_s\sqrt{A}-Av_sv_r}{k} \\ &= \frac{u_su_r-Av_sv_r}{k} + \left(\frac{u_rv_s-u_sv_r}{k}\right)\sqrt{A}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Fazendo $x = \dfrac{u_su_r-Av_sv_r}{k}$ e $y = \left(\dfrac{u_rv_s-u_sv_r}{k}\right)$, obtemos a relação desejada. Basta provar que x e y são inteiros. Para isso, note que, como r e s possuem a propriedade de $u_r \equiv a(mod\,|k|)$, $u_s \equiv a(mod\,|k|)$, $v_r \equiv b(mod\,|k|)$ e $v_s \equiv b(mod\,|k|)$, note que $u_r \equiv u_s(mod\,|k|)$ e $v_r \equiv v_s(mod\,|k|)$, logo podemos escrever $u_su_r - Av_sv_r \equiv u_r^2 - Av_r^2 = k \equiv 0(mod\,|k|)$ e $u_rv_s - u_sv_r \equiv ab - ab = 0(mod\,|k|)$, e portanto $x = \dfrac{u_su_r-Av_sv_r}{k}$ e $y = \dfrac{u_rv_s-u_sv_r}{k}$ são números inteiros.

Observe também, pela equação (3.7), que

$$\begin{aligned}(x+y\sqrt{A})(u_r+v_r\sqrt{A}) &= (u_s+v_s\sqrt{A}) \\ \Rightarrow N(x+y\sqrt{A})N(u_r+v_r\sqrt{A}) &= N(u_s+v_s\sqrt{A}).\end{aligned}$$

Como $N(u_r+v_r\sqrt{A}) = N(u_s+v_s\sqrt{A}) = k$, já que r e s possuem a mesma propriedade, então $N(x+y\sqrt{A})k = k$, logo $N(x+y\sqrt{A}) = 1$. Pela definição, sobre N, temos $N(x+y\sqrt{A}) = x^2-Ay^2 = 1$. Além disso, como $s > r$, $u_r+v_r\sqrt{A} > u_s+v_s\sqrt{A}$, que implica $x+y\sqrt{A} = \dfrac{u_s+v_s\sqrt{A}}{u_r+v_r\sqrt{A}} > 1$.

Vamos pegar x_1 e $y_1 \in \mathbb{Z}$, tais que $x_1+y_1\sqrt{A} > 1$ e $x_1^2-Ay_1^2 = 1$, onde $x_1+y_1\sqrt{A} > 1$ é o menor valor do conjunto D. Vamos mostrar que, se z e $w \in \mathbb{Z}$ são tais que $z+w\sqrt{A} > 1$ e $z^2-Aw^2 = 1$, então $z+w\sqrt{A} = (x_1+y_1\sqrt{A})^m$, para algum inteiro positivo m. Pegue um $m \geq 1$ tal que

$$(x_1+y_1\sqrt{A})^m \leq z+w\sqrt{A} < (x_1+y_1\sqrt{A})^{m+1} \tag{3.8}$$

Note que, $(x_1+y_1\sqrt{A})^m(x_1-y_1\sqrt{A})^m = (x_1^2-Ay_1^2)^m = 1^m = 1$, assim multiplicando (3.8) por $(x_1-y_1\sqrt{A})^m$, temos

$$1 \leq (z+w\sqrt{A})(x_1-y_1\sqrt{A})^m < x_1+y_1\sqrt{A}$$

Note ainda que, D é fechado para multiplicação, pois, seja a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$ tal que $a+b\sqrt{A}$ e $c+d\sqrt{A}$, tomemos $(a+b\sqrt{A})(c+d\sqrt{A}) = (ac+Abd)+(ad+bc)\sqrt{A}$, temos que $ac+Abd, ad+bc \in \mathbb{Z}$, logo D é fechado para multiplicação. Assim podemos dizer que $(z+w\sqrt{A})(x_1-y_1\sqrt{A})^m = u+v\sqrt{A}$, com $u, v \in \mathbb{Z}$. Como N também é multiplicativa, temos

$$u^2-Av^2 = N(u+v\sqrt{A}) = N(z+w\sqrt{A})N(x_1-y_1\sqrt{A})^m = 1$$

Observe que $1 \leq u + v\sqrt{A} < x_1 + y_1\sqrt{A}$, como $x_1 + y_1\sqrt{A}$ é o menor elemento de D, temos que $u + v\sqrt{A} = 1$, assim

$$\begin{aligned}
(z + w\sqrt{A})(x_1 - y_1\sqrt{A})^m &= 1 \\
z + w\sqrt{A} &= \frac{1}{(x_1 - y_1\sqrt{A})^m} \\
&= \frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^m}{(x_1 - y_1\sqrt{A})^m (x_1 + y_1\sqrt{A})^m} \\
&= \frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^m}{(x_1^2 - Ay_1^2)^m} \\
&= (x_1 + y_1\sqrt{A})^m \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Logo, em particular temos $x + y\sqrt{A} = (x_1 + y_1\sqrt{A})^m$.

Como existem infinitos pares (x_m, y_m) com $x_m^2 - Ay_m^2 = 1$, obtemos que

$$x_m + y_m\sqrt{A} = (x_1 + y_1\sqrt{A})^m. \qquad (3.10)$$

Observe que podemos tomar os valores opostos de y_m e y_1, assim

$$x_m - y_m\sqrt{A} = (x_1 - y_1\sqrt{A})^m. \qquad (3.11)$$

Somando as equações (3.10) e (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}
2x_m &= (x_1 + y_1\sqrt{A})^m + (x_1 - y_1\sqrt{A})^m \\
x_m &= \frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^m + (x_1 - y_1\sqrt{A})^m}{2}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.12) em (3.10), temos

$$\begin{aligned}
\frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^m + (x_1 - y_1\sqrt{A})^m}{2} + y_m\sqrt{A} &= (x_1 + y_1\sqrt{A})^m \\
y_m\sqrt{A} = (x_1 + y_1\sqrt{A})^m &- \frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^m + (x_1 - y_1\sqrt{A})^m}{2} \\
y_m &= \frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^m + (x_1 - y_1\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Resolvendo Problemas

Este capítulo é dedicado a resolução de problemas relacionado as frações contínuas, como a sua importância nos cálculos sobre a aproximação de irracionais por números racionais. Assim como, trazer a demonstração da irracionalidade do número e, ϕ e $\sqrt{5}$.

Exemplo 4.1 *Determine a fração contínua de* $\dfrac{381}{266}$.

Solução: Observe pelo algoritmo da divisão de Euclides que

$$\begin{aligned} 381 &= 266.\underline{1} + 115 \\ 266 &= 115.\underline{2} + 36 \\ 115 &= 36.\underline{3} + 7 \\ 36 &= 7.\underline{5} + 1 \\ 7 &= 1.\underline{7} + 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Assim, temos

$$\frac{381}{266} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}}}.$$

■

Exemplo 4.2 *Determine a fração contínua de* $\sqrt{5}$.

Solução: Para resolver utilizaremos o seguinte produto notável, utilizando $\lfloor\sqrt{5}\rfloor$ para indicar a parte inteira de $\sqrt{5}$.

$$(\sqrt{5}+\lfloor\sqrt{5}\rfloor)(\sqrt{5}-\lfloor\sqrt{5}\rfloor) = (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 5-2^2 = 1.$$

Dai temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{5}-2 &= \frac{1}{\sqrt{5}+2} \\ \sqrt{5} &= 2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Fazendo substituições sucessivas, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= 2+\cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}} = 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}} \\ &= 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}}} = 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}}}. \end{aligned}$$

Observe que, temos uma fração contínua periódica, onde $\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, \cdots] = [2; \overline{4}]$.

Mostramos assim, que o número $\sqrt{5}$ é um número irracional, pois sua fração contínua é infinita.

■

Exemplo 4.3 *Seja* $\alpha = [1; 2, 1, 2, 1, \cdots]$, *determine o número irracional* α *que gerou essa fração contínua.*

Solução: Primeiro note que como $a_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que $\alpha > 0$. Agora note que se $\alpha = [1; 2, 1, 2, 1, \cdots]$ então $\alpha = [1; 2, \alpha]$.

Desenvolvendo α em frações contínuas temos

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\alpha}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2\alpha+1}{\alpha}} = 1 + \frac{\alpha}{2\alpha+1} = \frac{3\alpha+1}{2\alpha+1}.$$

Assim temos que

$$\alpha = \frac{3\alpha+1}{2\alpha+1} \Rightarrow 2\alpha^2 + \alpha = 3\alpha + 1 \Rightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau acima temos

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Como $\alpha_2 < 0$ e $\alpha > 0$ temos que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

■

Exemplo 4.4 *Seja $x = [a; a, a, a, a, \cdots]$, $a > 0$. Determine qual a forma de x.*

Solução: Note que $x = [a; x]$, logo

$$x = a + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = ax + 1 \Rightarrow x^2 - ax - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação e descartando a solução negativa, pois $a > 0$, obtemos

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}.$$

■

Exemplo 4.5 *Mostre que a fração contínua de $\sqrt{a^2+1} = [a; \overline{2a}]$, para todo número inteiro positivo a.*

Solução: Note que a parte inteira de $\sqrt{a^2+1}$ é a, pois $a^2 < a^2 + 1 < (a+1)^2$ $\Rightarrow a < \sqrt{a^2+1} < a + 1$.

Usando produtos notáveis temos:

$$(\sqrt{a^2+1}+a)(\sqrt{a^2+1}-a) = (\sqrt{a^2+1})^2 - a^2 = a^2+1-a^2 = 1$$

$$\sqrt{a^2+1}-a = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a}$$

$$\sqrt{a^2+1} = a + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a}. \tag{4.2}$$

Observe que o processo se dá por substituições sucessivas de (4.2) na própria equação (4.2), dessa forma temos:

$$\sqrt{a^2+1} = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\sqrt{a^2+1}+a} + a}$$

$$\sqrt{a^2+1} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\sqrt{a^2+1}+a}}. \tag{4.3}$$

Fazendo o mesmo processo repetidamente, obteremos a seguinte expressão

$$\sqrt{a^2+1} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \ddots}}}} \tag{4.4}$$

Concluímos que $\sqrt{a^2+1} = [a; 2a, 2a, 2a, \cdots] = [a; \overline{2a}]$

∎

Exemplo 4.6 *Mostre que* $\sqrt{a^2-1} = [a-1; \overline{1, 2a-2}]$, *para todo número inteiro positivo a.*

SOLUÇÃO: Primeiro note que a parte inteira de $\sqrt{a^2-1} = a-1$, $\forall\ a > 1$, pois $\sqrt{(a-1)^2} < \sqrt{a^2-1} < \sqrt{a^2} \Rightarrow a-1 < \sqrt{a^2-1} < a$.

Usaremos o seguinte produto notável

$$[\sqrt{a^2-1}+(a-1)][\sqrt{a^2-1}-(a-1)] = a^2-1-a^2+2a-1 = 2a-2$$

$$\sqrt{a^2-1}-(a-1)=\frac{2a-2}{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}$$

$$\sqrt{a^2-1}=(a-1)+\frac{2a-2}{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}$$

$$\sqrt{a^2-1}=(a-1)+\cfrac{2a-2}{(a-1)+\cfrac{2a-2}{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}+(a-1)}$$

$$\sqrt{a^2-1}=(a-1)+\cfrac{2a-2}{(2a-2)+\cfrac{2a-2}{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}}$$

$$\sqrt{a^2-1}=(a-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}}$$

$$\sqrt{a^2-1}=(a-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(a-1)+\cfrac{2a-2}{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}+(a-1)}}$$

$$\sqrt{a^2-1}=(a-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(2a-2)+\cfrac{2a-2}{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}}}. \tag{4.5}$$

Observe que na equação (4.4) a equação começa a se repetir, logo trata-se de uma dízima periódica, com período $\overline{1,2a-2}$, assim temos

$$\sqrt{a^2-1}=(a-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2a-2+\ddots}}}}=[a-1;\overline{1,2a-2}].$$

∎

Exemplo 4.7 *Mostre que $\sqrt{a^2+2}=[a;a,2a,a,2a,\cdots]=[a;\overline{a,2a}]$, para todo número inteiro positivo a.*

SOLUÇÃO: Note que $\lfloor\sqrt{a^2+2}\rfloor=a$ então, fazendo o produto notável

$$(\sqrt{a^2+2}+a)(\sqrt{a^2+2}-a)=a^2+2-a^2=2,$$

obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2+2} &= a + \frac{2}{a+\sqrt{a^2+2}} \\
&= a + \frac{1}{\dfrac{a+\sqrt{a^2+2}}{2}} \\
&= a + \cfrac{1}{a + \left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+2}}{2} - a\right)} \\
&= a + \cfrac{1}{a + \dfrac{\sqrt{a^2+2}-a}{2}} \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Observe que $\dfrac{\sqrt{a^2+2}-a}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+2}+a}$, substituindo em (4.5) temos

$$\sqrt{a^2+2} = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a+\sqrt{a^2+2}}}. \qquad (4.7)$$

Em (4.6) iremos fazer substituições sucessivas, obtendo

$$\sqrt{a^2+2} = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a+\sqrt{a^2+2}}}}}.$$

Continuando com esse processo, obtemos

$$\sqrt{a^2+2} = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{2a + \ddots}}}}$$

Logo, $\sqrt{a^2+2} = [a; a, 2a, a, 2a, \cdots] = [a; \overline{a, 2a}]$.

■

Exemplo 4.8 *Mostre que* $\sqrt{a^2-a} = [a-1; \overline{2, 2a-2}]$, *número inteiro positivo* a

SOLUÇÃO: Note que a parte inteira de $\sqrt{a^2-a} = a-1$, pois, $\sqrt{(a-1)^2} \leq \sqrt{a^2-a} < \sqrt{a^2} \Rightarrow a-1 < \sqrt{a^2-a} < a$.

Temos o seguinte

$$[\sqrt{a^2-a}+(a-1)][\sqrt{a^2-a}-(a-1)] = a^2-a-a^2+2a-1 = a-1$$

$$\sqrt{a^2-a}-(a-1) = \frac{a-1}{\sqrt{a^2-a}+(a-1)}$$

$$\sqrt{a^2-a} = (a-1)+\frac{a-1}{\sqrt{a^2-a}+(a-1)}$$

$$\sqrt{a^2-a} = (a-1)+\cfrac{a-1}{(a-1)+\cfrac{a-1}{\sqrt{a^2-a}+(a-1)}+(a-1)}$$

$$\sqrt{a^2-a} = (a-1)+\cfrac{a-1}{2(a-1)+\cfrac{a-1}{\sqrt{a^2-a}+(a-1)}}.$$

Simplificando a última equação temos

$$\sqrt{a^2-a} = (a-1)+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{a^2-a}+(a-1)}}.$$

Observe que o processo se dá por substituições sucessivas sobre $\sqrt{a^2-a}$, substituindo novamente, temos

$$\sqrt{a^2-a} = (a-1)+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{(a-1)+(a-1)+\cfrac{a-1}{\sqrt{a^2-a}+(a-1)}}}$$

$$\sqrt{a^2-a} = (a-1)+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{a-1}{\sqrt{a^2-a}+(a-1)}}}.$$

Substituindo novamente, obtemos

$$\sqrt{a^2-a} = (a-1)+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{a-1}{(a-1)+(a-1)+\cfrac{a-1}{\sqrt{a^2-a}+(a-1)}}}}$$

$$\sqrt{a^2-a} = (a-1)+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{a-1}{2(a-1)+\cfrac{a-1}{\sqrt{a^2-a}+(a-1)}}}}.$$

Simplificando a última igualdade, temos

$$\sqrt{a^2-a} = (a-1) + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{a^2-a}+(a-1)}}}}. \tag{4.8}$$

Observe que na equação (4.7) a equação começa a se repetir, logo trata-se de dízima periódica, com período $\overline{2, 2a-2}$, assim temos

$$\sqrt{a^2-a} = (a-1) + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2a-2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2a-2+\ddots}}}} = [a-1; \overline{2, 2a-2}].$$

■

Exemplo 4.9 *Mostre que* $\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ddots}}} = a + K_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{2a}\right),$

com a, b números inteiros positivos, tal que $b < 2a+1$.

SOLUÇÃO: Primeiro notemos que a restrição de b se dá por querermos $\sqrt{a^2+b} < \sqrt{(a+1)^2} = a+1$, caso contrário, teríamos a parte inteira de $\sqrt{a^2+b} > a$. Assim, temos que $\lfloor\sqrt{a^2+b}\rfloor = a$, então $a^2+b < (a+1)^2 \Rightarrow a^2+b < a^2+2a+1 \Rightarrow b < 2a+1$.

Seja

$$N = a^2+b \Rightarrow N - a^2 = b \Rightarrow (\sqrt{N})^2 - a^2 = b$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{N}+a)(\sqrt{N}-a) &= b \\
\sqrt{N}-a &= \frac{b}{\sqrt{N}+a} \\
\sqrt{N} &= a + \frac{b}{\sqrt{N}+a} \\
\sqrt{N} &= a + \frac{b}{\sqrt{N}+a} \\
\sqrt{N} &= a + \cfrac{b}{a+\cfrac{b}{(\sqrt{N}+a)}+a} \\
\sqrt{N} &= a + \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{a+\sqrt{N}}}
\end{aligned}$$

Observe que o processo se dá por substituições sucessivas sobre $\sqrt{N}$. Através de substituições contínuas, obtemos o seguinte resultado

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}} = a + K_{i=1}^{\infty}\left(\frac{b}{2a}\right).$$

■

Exemplo 4.10 *Mostre que se $N = a^2 + b$ com $b < 2a + 1$, Então*

$$\sqrt{N} \cong \frac{N + a^2}{2a}, \text{ se } b{<}a$$

$$\sqrt{N} \cong \frac{N + (a+1)^2}{2(a+1)}, \text{ se } b{>}a$$

Onde o símbolo $\cong$ indica uma aproximação.

SOLUÇÃO: Primeiro note que $\forall\ N \in \mathbb{N}$, que não seja um quadrado perfeito, temos que existem $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $N = a^2 + b$, onde $a = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ e $b < 2a + 1$.
Pelo Exemplo (4.9) temos que $\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}}$

Podemos particionar essa fração contínua, da seguinte forma:

$$\frac{x_1}{y_1} = a + \frac{b}{2a} = \frac{2a^2 + b}{2a} = \frac{(a^2 + b) + a^2}{2a} = \frac{N + a^2}{2a}$$

Pela Proposição 2.3 temos que $\sqrt{N} < \dfrac{N + a^2}{2a}$.

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{N+a^2}{2a} - \frac{N+(a+1)^2}{2(a+1)} &= \frac{N(a+1)+a^2(a+1)-Na-(a+1)^2a}{2a(a+1)} \\
&= \frac{Na+N+a^3+a^2-Na-a^3-2a^2-a}{2a(a+1)} \\
&= \frac{N-a^2-a}{2a(a+1)} \\
&= \frac{a^2+b-a^2-a}{2a(a+1)} \\
&= \frac{b-a}{2a(a+1)}
\end{aligned}$$

Temos então que, se $b < a$, então $\sqrt{N} < \dfrac{N+a^2}{2a} < \dfrac{N+(a+1)^2}{2(a+1)}$, tendo então $\dfrac{N+a^2}{2a}$ como uma melhor aproximação para $\sqrt{N}$.

Se $b > a$ então, $\sqrt{N} < \dfrac{N+(a+1)^2}{2(a+1)} < \dfrac{N+a^2}{2a}$, assim $\dfrac{N+(a+1)^2}{2(a+1)}$ é uma melhor aproximação para $\sqrt{N}$.

Note que ambas as equações são válidas quando $a = b$, observe que se

$$\begin{aligned}
\frac{N+a^2}{2a} &= \frac{N+(a+1)^2}{2(a+1)} \\
\frac{2a^2+b}{2a} &= \frac{2a^2+2a+1+b}{2(a+1)} \\
4a^3+4a^2+2ab+2b &= 4a^3+4a^2+2a+2ab \\
b &= a
\end{aligned}$$

Assim, temos que, se $a = b$, ambas as fórmulas geram a mesma aproximação.

■

Exemplo 4.11 *Este exercício, retirado de* [3], *tem como objetivo calcular a fração contínua de e. Provando assim que o número e é um número irracional.*

(a) São dadas as sequências A_m, B_m e C_m definidas por

$$A_m = \int_0^1 \frac{x^m(x-1)^m}{m!} e^x dx$$

$$B_m = \int_0^1 \frac{x^{m+1}(x-1)^m}{m!} e^x dx$$

$$C_m = \int_0^1 \frac{x^m(x-1)^{m+1}}{m!} e^x dx$$

.

Mostrar que para todo $m \geq 1$ se cumprem as relações

$(i) A_m + B_{m-1} + C_{m-1} = 0$

$(ii) B_m + 2mA_m - C_{m-1} = 0$

$(iii) A_m - B_m + C_m = 0$

(b) Dadas as sequências $\{p_m\}$ e $\{q_m\}$ definidas recursivamente como $p_0 = q_0 = p_1 = 1$, $q_1 = 0$ e

$$p_{3m} = p_{3m-1} + p_{3m-2}, \qquad q_{3m} = q_{3m-1} + q_{3m-2}$$

$$p_{3m+1} = 2mp_{3m} + p_{3m-1}, \qquad q_{3m+1} = 2mq_{3m} + q_{3m-1}$$

$$p_{3m+2} = p_{3m+1} + p_{3m}, \qquad q_{3m+2} = q_{3m+1} + q_{3m}.$$

Mostrar por indução que para todo $m \geq 0$ se cumprem as relações

$$A_m = q_{3m}e - p_{3m}, \quad B_m = p_{3m+1} - q_{3m+1}e \quad \textbf{\textit{e}} \quad C_m = p_{3m+2} - q_{3m+2}e.$$

(c) Mostre que

$$e = \lim_{m\to\infty} \frac{p_m}{q_m} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \cdots, 1, 1, 2m, \cdots].$$

SOLUÇÃO: (a)

(i) Primeiro observe, pela regra da cadeia, que se

$$u = \frac{x^m(x-1)^m}{m!} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{mx^{m-1}(x-1)^m}{m!} + \frac{mx^m(x-1)^{m-1}}{m!}$$

$$\Rightarrow du = \left(\frac{x^{m-1}(x-1)^m}{(m-1)!} + \frac{x^m(x-1)^{m-1}}{(m-1)!}\right) dx$$

e

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x.$$

Pela Integração por partes temos

$$\int_0^1 \frac{x^m(x-1)^m}{n!} e^x dx = \frac{x^m(x-1)^m}{m!} e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \left(\frac{x^{m-1}(x-1)^m}{(m-1)!} + \frac{x^m(x-1)^{m-1}}{(m-1)!}\right) dx$$

Observe que $\frac{x^m(x-1)^m}{m!} e^x \Big|_0^1 = \frac{0^m(0-1)^m}{m!} e^0 - \frac{1^m(1-1)^m}{m!} e^1 = 0 - 0 = 0$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^m(x-1)^m}{n!} e^x dx &= -\int_0^1 \frac{x^{m-1}(x-1)^m}{(m-1)!} e^x dx - \int_0^1 \frac{x^m(x-1)^{m-1}}{(m-1)!} e^x dx \\ A_m &= -C_{m-1} - B_{m-1} \\ A_m + B_{m-1} + C_{m-1} &= 0 \end{aligned}$$

(ii) Seja $u = \dfrac{x^m(x-1)^{m+1}}{m!}e^x$, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{mx^{m-1}(x-1)^{m+1}}{m!}e^x + \frac{(m+1)x^m(x-1)^m}{m!}e^x + \frac{x^m(x-1)^{m+1}}{m!}e^x \\
&= \frac{x^{m-1}(x-1)^m(x-1)}{(m-1)!}e^x + \frac{(m+1)x^m(x-1)^m}{m!}e^x + \frac{x^m(x-1)^m(x-1)}{m!}e^x \\
&= \frac{x^m(x-1)^m}{(m-1)!}e^x - \frac{x^{m-1}(x-1)^m}{(m-1)!}e^x + \frac{x^m(x-1)^m}{(m-1)!}e^x + \frac{x^m(x-1)^m}{m!}e^x \\
&+ \frac{x^{m+1}(x-1)^m}{m!}e^x - \frac{x^m(x-1)^m}{m!}e^x \\
&= \frac{x^m(x-1)^m}{(m-1)!}e^x - \frac{x^{m-1}(x-1)^m}{(m-1)!}e^x + \frac{x^m(x-1)^m}{(m-1)!}e^x + \frac{x^{m+1}(x-1)^m}{m!}e^x \\
&= \frac{mx^m(x-1)^m}{m!}e^x - \frac{x^{m-1}(x-1)^m}{(m-1)!}e^x + \frac{mx^m(x-1)^m}{m!}e^x + \frac{x^{m+1}(x-1)^m}{m!}e^x \\
&= \frac{2mx^m(x-1)^m}{m!}e^x - \frac{x^{m-1}(x-1)^m}{(m-1)!}e^x + \frac{x^{m+1}(x-1)^m}{m!}e^x
\end{aligned}
$$

Desta última igualdade temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 du &= \int_0^1 \frac{2mx^m(x-1)^m}{m!}e^x dx - \int_0^1 \frac{x^{m-1}(x-1)^m}{(m-1)!}e^x dx + \int_0^1 \frac{x^{m+1}(x-1)^m}{m!}e^x dx \\
u\Big|_0^1 &= 2mA_m - C_{m-1} + B_m.
\end{aligned}
$$

Observe que, como $u = \dfrac{x^m(x-1)^{m+1}}{m!}e^x$, então $u\Big|_0^1 = \dfrac{0^m(0-1)^{m+1}}{m!}e^0 - \dfrac{1^m(1-1)^{m+1}}{m!}e^1 = 0 - 0 = 0$

Logo, $B_m + 2mA_m - C_{m-1} = 0$.

(iii) Este requer apenas manipulação algébrica, note que

$$A_m + C_m = \int_0^1 \frac{x^m(x-1)^m}{m!}e^x dx + \int_0^1 \frac{x^m(x-1)^{m+1}}{m!}e^x dx$$

$$A_m + C_m = \int_0^1 \frac{x^m(x-1)^m}{m!}e^x(1+x-1)dx$$

$$A_m + C_m = \int_0^1 \frac{x^{m+1}(x-1)^m}{m!}e^x dx$$

$$A_m + C_m = B_m$$

Logo, $A_m - B_m + C_m = 0$.

(b) Primeiro note que da igualdade $p_{3m+1} = 2mp_{3m} + p_{3m-1}$, com $m = 0$ temos, $p_1 = p_{-1} = 1$ e da igualdade $p_{3m} = p_{3m-1} + p_{3m-2}$, temos para $m = 0$ que $p_0 = p_{-1} + p_{-2}$, logo $1 = 1 + p_{-2}$, assim $p_{-2} = 0$.

Vamos calcular os valores de A_0, B_0 e C_0, lembrando que $p_0 = q_0 = p_1 = 1$ e $q_1 = 0$.

$A_0 = q_0 e - p_0 = 1e - 1 = e - 1$
$B_0 = p_1 - q_1 e = 1 - 0e = 1$.

Note que, de $p_{3m+2} = p_{3m+1} + p_{3m}$ para $m = 0$, obtemos $p_2 = p_1 + p_0 = 1 + 1 = 2$ e de $q_{3m+2} = q_{3m+1} + q_{3m}$, também para $m = 0$, obtemos $q_2 = q_1 + q_0 = 0 + 1 = 1$.

$C_0 = p_2 - q_2 e = 2 - 1e = 2 - e$.

Suponhamos que valha para m, vamos provar que as relações valem para $m+1$. Pelo item (i), temos que

$$\begin{aligned}
A_{m+1} &= -B_m - C_m \\
A_{m+1} &= -(p_{3m+1} - q_{3m+1}e) - (p_{3m+2} - q_{3m+2}e) \\
A_{m+1} &= -(p_{3m+1} + p_{3m+2}) + (q_{3m+1} + q_{3m+2})e \\
A_{m+1} &= q_{3m+3}e - p_{3m+3} \\
A_{m+1} &= q_{3(m+1)}e - p_{3(m+1)}.
\end{aligned}$$

Pelo item (ii), também temos que

$$\begin{aligned}
B_{m+1} &= -2(m+1)A_{m+1} + C_m \\
B_{m+1} &= -2(m+1)[q_{3(m+1)}e - p_{3(m+1)}] + p_{3m+2} - q_{3m+2}e \\
B_{m+1} &= 2(m+1)p_{3(m+1)} + p_{3m+2} - [2(m+1)q_{3(m+1)} + q_{3m+2}]e \\
B_{m+1} &= p_{3(m+1)+1} - q_{3(m+1)+1}e.
\end{aligned}$$

Ainda pelo item (iii), temos

$$\begin{aligned}
C_{m+1} &= B_{m+1} - A_{m+1} \\
C_{m+1} &= p_{3(m+1)+1} - q_{3(m+1)+1}e - (q_{3(m+1)}e - p_{3(m+1)}) \\
C_{m+1} &= p_{3(m+1)+1} + p_{3(m+1)} - (q_{3(m+1)+1} + q_{3(m+1)})e \\
C_{m+1} &= p_{3(m+1)+2} - q_{3(m+1)+2}e.
\end{aligned}$$

(c) Primeiramente, pelo corolário 2.1, temos que $p_{m+2} = a_{m+2}p_{m+1} + p_m$.

Note também, pelo item (b), que a recorrência $p_{3m} = p_{3m-1} + p_{3m-2}$ vale.

Substituindo $m+2$ por $3m$ em $p_{m+2} = a_{m+2}p_{m+1} + p_m$, obtemos $p_{3m} = a_{3m}p_{3m-1} + p_{3m-2}$. Assim, temos:

$$p_{3m} = a_{3m}p_{3m-1} + p_{3m-2} \qquad \textbf{e} \qquad p_{3m} = p_{3m-1} + p_{3m-2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_{3m}p_{3m-1} + p_{3m-2} &= p_{3m-1} + p_{3m-2} \\ a_{3m}p_{3m-1} &= p_{3m-1} \\ a_{3m} &= 1. \end{aligned}$$

Observe também que,

$$p_{3m+1} = a_{3m+1}p_{3m} + p_{3m-1} \qquad \mathbf{e} \qquad p_{3m+1} = 2mp_{3m} + p_{3m-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_{3m+1}p_{3m} + p_{3m-1} &= 2mp_{3m} + p_{3m-1} \\ a_{3m+1}p_{3m} &= 2mp_{3m} \\ a_{3m+1} &= 2m. \end{aligned}$$

E também, que

$$p_{3m+2} = a_{3m+2}p_{3m+1} + p_{3m} \qquad \mathbf{e} \qquad p_{3m+2} = p_{3m+1} + p_{3m}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_{3m+2}p_{3m+1} + p_{3m} &= p_{3m+1} + p_{3m} \\ a_{3m+2}p_{3m+1} &= p_{3m+1} \\ a_{3m+2} &= 1. \end{aligned}$$

Observe que os valores de a_{3m}, a_{3m+1} e a_{3m+2} são oriundos da fração $\frac{p_m}{q_m} = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$. Que mais adiante será verificado que se trata da fração contínua de e.

Formando uma tabela para encontrar os valores de a_{3m}, a_{3m+1} e a_{3m+2}, obtemos os seguintes resultados.

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	...
a_{3m}	1	1	1	1	1	1	1	...
a_{3m+1}	0	2	4	6	8	10	12	...
a_{3m+2}	1	1	1	1	1	1	1	...

Note, ainda que, pelo corolário 2.1, que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{p_m}{q_m}=[1;0,1,1,2,1,1,4,1,1,6,\cdots,1,1,2m,\cdots].$$

Observe que,

$$[1;0,1,1,2,1,1,4,1,1,6,\cdots,1,1,2m,\cdots]=[2;1,2,1,1,4,1,1,6,\cdots,1,1,2m,\cdots].$$

Para ficar mais fácil a compreensão, lembre do seguinte fato: $\dfrac{1}{\dfrac{1}{c}}=c.$

Assim, temos

$$1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}=1+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}$$
$$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}.$$

Nesse caso o $c=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}$.

Agora vamos mostrar que $\lim_{m\to\infty}\dfrac{p_m}{q_m}$, para todo $m\geq 0$, é igual a e. Para isso, vamos dividir a sequência em três outras subsequências, sendo elas, $\left\{\dfrac{p_{3m}}{q_{3m}}\right\}$, $\left\{\dfrac{p_{3m+1}}{q_{3m+1}}\right\}$ e $\left\{\dfrac{p_{3m+2}}{q_{3m+2}}\right\}$. Observe que os números da forma $3m$, $3m+1$ e $3m+2$ formam todos os números naturais. Do item (b) temos,

$$A_m=q_{3m}e-p_{3m}\Rightarrow\frac{A_m}{q_{3m}}=e-\frac{p_{3m}}{q_{3m}}\Rightarrow\lim_{m\to\infty}\frac{A_m}{q_{3m}}=e-\lim_{m\to\infty}\frac{p_{3m}}{q_{3m}}$$

Note que, $\lim_{m\to\infty} \dfrac{A_m}{q_{3m}} = 0$, logo $\lim_{m\to\infty} \dfrac{p_{3m}}{q_{3m}} = e$.

$$B_m = p_{3m+1} - q_{3m+1}e \Rightarrow \frac{B_m}{q_{3m+1}} = \frac{p_{3m+1}}{q_{3m+1}} - e \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \frac{B_m}{q_{3m+1}} = \lim_{m\to\infty} \frac{p_{3m+1}}{q_{3m+1}} - e$$

Note que, $\lim_{m\to\infty} \dfrac{B_m}{q_{3m+1}} = 0$, logo $\lim_{m\to\infty} \dfrac{p_{3m+1}}{q_{3m+1}} = e$.

$$C_m = p_{3m+2} - q_{3m+2}e \Rightarrow \frac{C_m}{q_{3m+2}} = \frac{p_{3m+2}}{q_{3m+2}} - e \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \frac{C_m}{q_{3m+2}} = \lim_{m\to\infty} \frac{p_{3m+2}}{q_{3m+2}} - e$$

Note que, $\lim_{m\to\infty} \dfrac{C_m}{q_{3m+2}} = 0$, logo $\lim_{m\to\infty} \dfrac{p_{3m+2}}{q_{3m+2}} = e$.

Note ainda que $\lim_{m\to\infty} \dfrac{A_m}{q_{3m}} = 0$, $\lim_{m\to\infty} \dfrac{B_m}{q_{3m+1}} = 0$ e $\lim_{m\to\infty} \dfrac{C_m}{q_{3m+2}} = 0$ se cumprem pois verifica-se de forma fácil que os $|A_m|$, $|B_m|$ e $|C_m|$ são uniformemente limitados e que $\lim_{m\to\infty} q_m = +\infty$.

Concluímos assim, que

$$e = \lim_{m\to\infty} \frac{p_m}{q_m} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \cdots, 1, 1, 2m, \cdots].$$

Com esse resultado, temos uma demonstração formal da irracionalidade do número e, pois possui uma fração contínua finita.

■

Exemplo 4.12 *Mostre que* $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, \cdots]$.

SOLUÇÃO: Primeiro note que o número ϕ é a representação da proporção áurea, então ele é definido por $\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\phi}{1+\phi}$, disso temos a seguinte equação $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Resolvendo a equação temos $\phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Por outro lado, observe que $\alpha = [1; 1, 1, 1, 1, \cdots] = [1; \alpha]$ então temos

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

Assim, temos que $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Note que $\alpha > 0$, pois todos os $a_j > 0$ para todo $j \geq 0$, temos que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pela proposição 2.5, que diz que a representação de α irracional é única, então temos que $\alpha = \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, \cdots]$.

Esse resultado é importante, pois prova a irracionalidade do número ϕ. Por possuir uma fração contínua infinita.

■

Exemplo 4.13 *Um relojoeiro pretende fazer um jogo com duas rodas dentadas para um relógio, sendo que a razão entre as quantidades de dentes deve ser $\sqrt{2}$. Se as rodas dentadas não podem ter mais de 20 dentes, determine a melhor opção para a quantidade de dentes, para que a razão seja melhor aproximada.*

SOLUÇÃO: Pelo exemplo 4.4 temos que $\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$.

Então a sequência de reduzidas, pelo teorema 2.1, de $\sqrt{2}$ é, $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}$, observe que o número de dentes deve ser inferior a 20, logo o número de dentes que as rodas devem conter é 17 e 12. Observe que a razão que se queria era $\sqrt{2} \cong 1,41$ e $\frac{17}{12} \cong 1,41$.

■

Exemplo 4.14 *Determine boas aproximações racionais de π sabendo que*

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, \cdots].$$

SOLUÇÃO: Utilizaremos a proposição 2.1 para resolver esse problema.

Note que $\pi \cong 3$ é a primeira convergente de π. A sequência foi "quebrada " em a_0, assim temos um convergente par, pela proposição 2.3, então $\frac{x_0}{y_0} = 3 < \pi$.

Se "quebrarmos " a sequência em $a_1 = 7$, obtemos $\pi \cong 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$. Obtemos um convergente ímpar, assim, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{22}{7} > \pi$.

No próximo “quebraremos ”em $a_2 = 15$, obtendo um convergente par. Obtendo, $\pi \cong 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106}$. Temos também que $\frac{x_2}{y_2} = \frac{333}{106} < \pi$. Seguindo com esse raciocínio podemos encontrar as demais convergentes de π, tão próximas quanto se queira.

Logo abaixo, tem-se uma tabela com os primeiros convergentes de π.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	...
x_m	3	22	333	355	103993	104348	208341	...
y_m	1	7	106	113	33102	33215	66317	...
$\frac{x_m}{y_m}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{333}{106}$	$\frac{355}{113}$	$\frac{103993}{33102}$	$\frac{104348}{33215}$	$\frac{208341}{66317}$	...

■

Referências Bibliográficas

[1] **Pommer, W.M.** *Frações Contínuas no Ensino Médio?.* Seminário de Ensino de Matemática. São Paulo: FEUSP,2009.

[2] **Pommer, W.M.** *O uso de Frações Contínuas como Tema Articulador no Ensino Médio.* Revista Eletrônica de Matemática, 2013.

[3] **Martinez, Fabio Brochero; et al.** *Teoria dos Números: Um Passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro.* Rio de Janeiro: IMPA,2013.

[4] **Moeira, C.G.T.de.A.** *Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas.* 1º Coloquio da Região Sudeste: IMPA, 2013.

[5] **Nascimento, A.M.** *Frações Contínuas e aplicações no Ensino Médio.* Trabalho de conclusão de Curso de Mestrado. Goiânia, 2013.

[6] **Hefez, A.** *Iniciação à Aritmética.* Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Niterói, 2009. p.53-55.

[7] **Silva. A.S.** *Um Estudo Sobre Aplicação do Algoritmo de Euclides.* Niterói, 2009. p.30.

[8] **Santos. T.V.B.dos.** *A transformação de Gauus.* Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. São Carlos-SP, 2010.

[9] **Pommer, C.P.C.R** *Números Racionais: Uma Perspectiva Envolvendo as Frações Contínuas.* V Seminário de Educação Matemática. Nova Andradina, Agosto, 2013

[10] **Lima, M.A.F.de.** *Frações Contínuas que Correspondem a Séries de Potências em dois Pontos.* Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. São José do Rio Preto-SP,2010.

[11] **Silva, R.P.da.** *Interseção de Números Geométricos Via Equação de Pell.* Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Catalão-GO,2015.

[12] **Mollin, R.A.** *Frações Contínuas e Palindromia.* Matemática Universitária nº26/27. Universidade de Calgary-Canadá,1999. p.29-47.

[13] **Moreira, C.G.T.de.A.** *Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas.* 1º Colóquio da Região Sudeste,2011.

[14] **Díaz, L.J. e Jorge, D.de.R.** *Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas.* 26º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro, 2007.

[15] **Santos, J.B. e Câmara, M.A.da.** *Expansão de funções em frações contínuas.* Congresso de Matemática Aplicada e Computacional. Uberlândia-MG,2011.