Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Otimização: uma aplicação para desigualdade das médias e para desigualdade de Cauchy-Schwarz †

por

Frank Werlly Mendes de Brito

sob orientação do

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2016
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Otimização: uma aplicação para desigualdade das médias e para desigualdade de Cauchy-Schwarz

por

Frank Werlly Mendes de Brito

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta - UFPB

Prof. Dr. José Vicente Moreira - UNIPE

Fevereiro/2016

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus, pela maravilhosa oportunidade que me deu para cursar esse mestrado; pela proteção dispensada a mim por tantas viagens longas da minha cidade até aqui e à minha família, pelo que fiquei ausente.

Aos meus avós Eletice Melo e Cezário Fernandes, já na companhia do Senhor, por terem me criado, me orientado com instruções simples mas tão importantes para minha vida, as quais trago sempre guardadas comigo.

A minha amada esposa Francisca Kelia, pelo companheirismo, incentivo e reconhecimento. Você foi determinante para que eu retomasse os estudos.

Aos meus filhos, Danilo Willard e Wallef Matheus, pela luz que me trouxeram sobre a importância de se dar bons exemplos, quanto a coragem que se deve ter para buscar conhecimento e melhores condições de vida.

As amizades feitas aqui no curso, turma maravilhosa da qual guardo muitas boas lembranças; em especial aos camaradas Fabiano Castro, sempre prestativo, e Ivelton Lustosa, nosso professor para todas as horas.

Aos professores por que passamos durante o curso: Napoleón Tuesta, Lizandro Sanchez, Bruno Ribeiro, Sérgio de Albuquerque , Lenimar Nunes, Carlos Bocker, Alexandre Simas e Gilmar Correia. Certamente cada um deles deixou grandiosas contribuições para minha formação.

Ao professor Eduardo Gonçalves, por ter me recebido como orientando. Sua paciência e disponibilidade para colaboração com a minha pesquisa, através diálogos ou por cessão de materiais, fizeram toda a diferença.

Ao professor Ronaldo Garcia, pelo entusiasmo e apoio a mim transmitidos nessa luta. Sua contribuição me trouxe persistência e foco.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para essa vitória, cujos nomes estejam ou não citados, agradeço. A todos guardarei sempre nas minhas lembranças.

Dedicatória

A minha esposa Francisca Kelia, nosso filhinho Danilo, meu filho Wallef e meus avós Eletice e Cezário.

Resumo

Com a intenção de oferecer uma alternativa ao Cálculo para determinar valores de máximo e mínimo de funções, este trabalho acadêmico explora o uso da desigualdade entre médias - com exclusividade para a aritmética e geométrica - e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Composto por enunciados, definições e demonstrações da validade das desigualdades antes relacionadas, o texto visa fornecer o respaldo necessário para aplicação do conteúdo temático a casos de otimização na geometria e de algumas expressões algébricas. Tal aplicabilidade será mostrada através da discussão de problemas propostos e minuciosamente resolvidos, a fim de fornecer para o leitor um entendimento sólido quanto a empregabilidade das desigualdades já listadas, mesmo sem conhecimento sobre assuntos matemáticos de nível superior, no tocante a questões de maximização e minimização de valores.

Palavras-chave: Desigualdade das médias, funções, Cauchy, Geometria, otimização.

Abstract

With the intention of offering an alternative to the Calculus to determine maximum and minimum values of functions, this academic paper explores the use of inequality between medium - exclusively for arithmetic and geometric - and the Cauchy-Schwarz inequality. Consists of statements, definitions and demonstrations of the validity of inequalities related before, the text aims to provide the necessary support for implementation of the thematic content optimization cases in geometry and some algebraic expressions. Such applicability is shown by discussing proposed and thoroughly resolved problems in order to provide for a solid understanding reader and the employability of the listed inequalities, even without knowledge of mathematical subjects at tertiary level, regarding the maximization and minimization issues values.

Keywords: Inequality of average, functions, Cauchy, geometry, optimization.

Sumário

Lista de Figuras

Prefácio

Este trabalho tem perfil de pesquisa bibliográfica acerca do tema Problemas de Otimização, restringindo esses aos casos em que se emprega a desigualdade das médias aritmética e geométrica e a desigualdade de Cauchy-Schwarz para sua resolução.

A justificativa para este estudo é a de contribuir para apropriação e assimilação do tema por parte de professores e alunos do Ensino Médio, pois trataremos sobre Otimização sem o uso do Cálculo Diferencial - conteúdo componente da grade curricular de disciplinas de muitos dos cursos em nível superior - para este fim.

Dotado de cinco capítulos, a introdução do texto começa com uma breve abordagem histórica, na qual a época e os nomes dos grandes matemáticos alusivos ao tema são mencionados. Os capítulos dois e três trazem os métodos de otimização antes definidos: sobre a Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica, esta é introduzida por meio de exemplos clássicos de sua aplicação, sendo feita a demonstração da relação de desigualdade entre essas médias para dois e para termos n termos de uma sequência $X_n = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$; quanto a Desigualdade de Cauchy-Schwarz trazemos, além da sua demonstração para n termos, uma forma alternativa para sua apresentação também minuciosamente verificada, para entendimento do leitor. O quarto capítulo traz a parte de Aplicações. Nesta, temos três problemas de cunho algébrico e quatro de cunho geométrico, tendo como característica minuciosidade na discussão destes. O capítulo final, Complementos, aborda a desigualdade entre as médias aritmética, geométrica e harmônica, com intuito de inspirar o leitor a aprofundar-se sobre métodos de otimização semelhantes aos abordados até agora.

Capítulo 1

Introdução

As desigualdades foram reveladas pela Matemática em uma época tão remota, que a História não define com precisão data nem circunstâncias de seu surgimento. Contudo, mostraremos um apanhado de informações que podem ser interessantes no sentido de fornecer um delineamento histórico para o tema desenvolvido neste trabalho, a seguir.

1.1 Abordagem histórica

Pouco se pode afirmar quanto à data de início dos estudos sobre desigualdades, mas estes surgiram junto com os números, pela necessidade de ordená-los, compará-los. O problema mais antigo sobre Otimização de que se tem conhecimento e que se vê a possibilidade do uso de desigualdade para sua resolução é o de Euclides, cujo enunciado apresentado no livro VI, da sua coleção Elementos, trazia basicamente o desafio de se determinar dentre todos os retângulos de perímetro idêntico, qual o de área máxima. Euclides (330 a.C. - 260 a.C.) foi um dos mais importantes matemáticos da Grécia Clássica e do mundo.

Os primeiros métodos para otimização através de desigualdades surgiram a partir do século XVII. Jensen, Minkowski, Bernoulli, Leibniz, Newton entre outros matemáticos cujas respectivas desigualdades publicadas receberam seu nome, são exemplos de pesquisadores dessa área.

A Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica trata-se de uma comparação por meio de manipulação algébrica básica e, talvez por isso, não teve sua "descoberta"requerida por algum matemático. No próximo capítulo mostraremos a demonstração de sua validade para n termos de uma sequência $X_n = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$.

A Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, também conhecida como Desigualdade de Schwarz, Desigualdade de Cauchy; contudo, mais disseminada no meio matemático com a denominação Desigualdade de Cauchy-Schwarz, fica situada na linha temporal pelo ano da publicação dos artigos de seus respectivos pesquisadores. É uma desigualdade aplicável a vários contextos como análise matemática e probabilidades, e cada um dos ilustres pesquisadores que compõe seu nome a abordou segundo sua vertente. Augustin Cauchy a publicou em 1821, defendendo sua aplicabilidade às somas infinitas.

Figura 1.1: Augustin Cauchy, matemático francês (1789-1857)

Com foco na sua aplicação a integrais, Viktor Yakovlevich Bunyakovsky publicou seu artigo em 1859.

Em 1888, os estudos sobre essa desigualdade foram redescobertos por Hermann Amandus Schwarz, quando escrevia um artigo para responder à questão de saber se o rendimento mínimo de determinada superfície é realmente dado por sua área mínima.

Com vasta aplicabilidade em Otimização, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz é abordada neste trabalho, com sua demonstração e exemplos de aplicação.

Figura 1.2: Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, matemático russo (1804-1889)

Figura 1.3: Hermann Amandus Schwarz, matemático alemão (1843-1921)

Contudo, por questões técnicas, iniciaremos pelas Desigualdades das Médias.

Capítulo 2

Desigualdade das médias

2.1 Definindo médias aritmética e geométrica

Seja X uma sequência finita de números reais. Chamamos de média a um valor $\bar{x}$, tal que esse $\bar{x}$, substituindo cada um dos elemento da sequência X, preserva uma determinada propriedade desta. O tipo de média a ser empregado é definido pela natureza do problema. Contudo, exploraremos aqui o estudo das médias aritmética e geométrica, a serem definidas.

Definição 2.1 *Considere uma sequência $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ de números reais. Definimos a média aritmética (MA) dessa sequência por:*

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

A média aritmética é empregada quando precisamos determinar, para uma sequência, um valor que seja capaz de substituir todos os valores desta sequência, obedecendo a expressão dada na definição acima.

Exemplo 2.1.1 *Consideremos que o CCEN da UFPB precise determinar o desempenho médio de um grupo de doutorandos numa disciplina do Programa de Matemática, cujas notas são: 5,5; 7,4; 8,1; 5,7 e 9,3.*

Calculando a média aritmética, temos:

$$MA = \frac{5,5 + 7,4 + 8,1 + 5,7 + 9,3}{5} = \frac{36}{5} = 7,2$$

Logo, o rendimento médio desse grupo de doutorandos é de 7,2 pontos.

Definição 2.2 *Considere uma sequência finita* $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ *de números reais não negativos. Definimos a média geométrica (MG) dessa sequência por:*

$$MG = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ ... \ x_n}$$

A média geométrica é utilizada para problemas em que os n termos da sequência são gerados através de produto do termo x_n por um valor $k, k \in \mathbb{R}$. Acréscimos e descontos percentuais são os exemplos de aplicação mais comuns.

Exemplo 2.1.2 *Suponhamos que o setor de tesouraria da UFPB detectou aumentos sucessivos de* 15% *no primeiro mês,* 12% *no segundo mês e* 21% *no terceiro mês, ao avaliar o gasto com combustíveis no decorrer de um trimestre, e necessita determinar a taxa média de aumento.*

Como se trata de taxas de aumentos sucessivos, convertendo-as para a forma unitária temos:

15% = 1,15; 12% = 1,12; 21% = 1,21

Agora, calculamos a média geométrica:

$$MG = \sqrt[3]{1,15.1,12.1,21} = \sqrt[3]{1,55848} = 1,1594$$

que é a taxa média de aumento ao mês. Isso significa que as taxas discriminadas no enunciado do problema podem ser substituídas por uma única, de $15,94\%$ ao mês, de modo a gerar o mesmo montante de custos ao final dos cálculos.

2.2 Desigualdade das médias aritmética e geométrica

Dada uma sequência finita X composta de n números reais não negativos, da qual calculamos respectivamente a média aritmética (MA) e a média geométrica (MG) de seus elementos, obtemos o resultado que segue:

Proposição 2.1 *Seja uma sequência finita X, de n números reais não negativos, com $n > 1, n \in N$ temos que:*

$$MA \geqslant MG$$

Analisemos essa proposição em dois casos, a serem demonstrados:

1º caso: $n = 2$. Dados a e b, não negativos, vale a desigualdade

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

com a igualdade valendo somente no caso de a = b.

Demonstração: Do produto notável $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, percebemos facilmente a relação $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. A partir desse raciocínio, podemos concluir que de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$, teremos: $a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geqslant 0$, donde concluímos que $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.
■

2º caso: Prova da generalização da **Proposição 2.1** - validade da desigualdade para $n > 2$.

Consideremos a sequência $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}, n \geqslant 3$, e a partir dessa extraiamos as médias aritmética e geométrica (MA e MG). Queremos provar que:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \; ... \; x_n}$$

A demonstração será obtida como consequência do lema abaixo, de muita importância para a meta definida há pouco.

Lema 2.1 *Seja dada a sequência* $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, *com* $n>1$ *e todos os elementos sendo reais positivos. Se* $x_1x_2x_3\ ...\ x_n = 1$, *então* $x_1+x_2+x_3+...+x_n \geqslant n$, *ocorrendo igualdade unicamente no caso de* $x_1 = x_2 = x_3 =\ ...\ = x_n = 1$.

Prova: Iniciaremos a verificação da validade do lema fazendo $n = 2$. Dada a imposição de que $x_1x_2 = 1$, queremos provar que $x_1 + x_2 \geqslant 2$. Mas $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$, o que nos dá a desigualdade equivalente $x_1 + \dfrac{1}{x_1} \geqslant 2$. Podemos manipular esta de modo a obtermos a desigualdade das médias aritmética e geométrica, cuja validade já foi comprovada nesse trabalho para $n = 2$:

$$\frac{x_1^2+1}{x_1} \geqslant 2 \Longleftrightarrow x_1^2+1 \geqslant 2x_1 \Longleftrightarrow \frac{x_1^2+1}{2} \geqslant x_1$$

Mas $x_1 = \sqrt{({x_1}^2)(1)}$, então:

$$\frac{x_1^2+1}{2} \geqslant \sqrt{({x_1}^2)(1)}$$

Daí, $x_1 + \dfrac{1}{x_1} \geqslant 2$ e portanto $x_1 + x_2 \geqslant 2$, uma vez que $\dfrac{1}{x_1} = x_2$. Verifiquemos agora para que x_1, x_2 se valida a igualdade:

$$x_1 + \frac{1}{x_1} = 2$$

Resolvendo essa equação, teremos:

$$\frac{x_1^2+1}{x_1} = 2 \Longleftrightarrow x_1^2+1 = 2x_1 \Longleftrightarrow x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x_1-1)^2 = 0$$

Logo, $x_1 = 1$. Como $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$, temos que:

$$x_1 = x_2 = 1$$

A prova desse lema para qualquer n será feita aqui pelo PIF (Princípio da Indução Finita). Como já verificamos anteriormente sua validade para $n = 2$, consideremos que também seja válido para $n = k$, a fim de verificar se a expressão continua verdadeira para $n = k + 1$.Vejamos:

Se $n = k+1$, teremos dois casos a considerar, de modo análogo ao visto na explanação para $n = 2$:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ ... \ = x_k = x_{k+1} = 1 \quad (A)$$

o que nos dará

$$x_1 x_2 x_3 \ ... \ x_k x_{k+1} = 1 \quad (B)$$

e, por consequência, teremos

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ ... \ + x_k + x_{k+1} = k+1 \quad (C)$$

Consideremos agora o caso em que os elementos da sequência sejam distintos de 1. Para que a condição (A) seja mantida, teremos elementos maiores que 1 e menores que 1. Consideremos os extremos do produto mostrado em (B). Pela afirmação anterior, podemos escolher $x_1 > 1$ e $x_{k+1} < 1$. Fazendo $x_1.x_{k+1}$=m_1 e substituindo em (B), temos:

$$x_1 x_2 x_3 \ ... \ x_k x_{k+1} = x_1 x_{k+1} x_2 x_3 \ ... \ x_k = m_1 x_2 x_3 \ ... \ x_k = 1$$

E pela hipótese da indução, temos que $m_1 + x_2 + x_3 + \ ... \ + x_k \geqslant k$. Manipulando o primeiro membro da expressão (C), temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ ... \ + x_k + x_{k+1} = (m_1 + x_2 + x_3 + \ ... \ + x_k) + x_1 + x_{k+1} - m_1$$

Usando esse resultado, fazemos:

$$\begin{aligned}
(m_1 + x_2 + x_3 + \ ... \ + x_k) + x_1 + x_{k+1} - m_1 &\geqslant k + x_1 + x_{k+1} - m_1 \\
&= k + 1 - 1 + x_1 + x_{k+1} - m_1 \\
&= k + 1 - 1 + x_1 + x_{k+1} - x_1.x_{k+1} \\
&= k + 1 + x_1 - x_1.x_{k+1} - 1 + x_{k+1} \\
&= k + 1 + x_1(1 - x_{k+1}) - 1(1 - x_{k+1}) \\
&= k + 1 + (1 - x_{k+1})(x_1 - 1)
\end{aligned}$$

Mas sabemos, do início dessa prova, que $(1 - x_{k+1})(x_1 - 1) > 0$, logo é correto afirmar que:

$$k + 1 + (1 - x_{k+1})(x_1 - 1) > k + 1$$

Portanto:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ \dots \ + x_k + x_{k+1} > k + 1$$

o que nos permite concluir, pelo PIF, que

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geqslant n,$$

caso tenhamos $x_1 x_2 x_3 \ \dots \ x_n = 1$, para todo $n > 1, n \in \mathbb{N}$, ocorrendo igualdade se e somente se $x_1 = x_2 = x_3 = \ \dots \ = x_n = 1$.

□

Retomemos agora à demonstração da validade da desigualdade das médias aritmética e geométrica. Usaremos como notação para médias aritmética e geométrica, ao invés de MA e MG, A e G respectivamente.

Demonstração: Seja a igualdade $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ \dots \ x_n}$.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ \dots \ x_n} = G \times 1 \Longleftrightarrow \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ \dots \ x_n}}{G} = 1$$

Como $G = \sqrt[n]{G^n}$, já que $G > 0$, temos:

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ \dots \ x_n}}{\sqrt[n]{G^n}} = 1 \Longleftrightarrow \sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 x_3 \ \dots \ x_n}{G^n}} = \sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 x_3 \ \dots \ x_n}{GGG \ \dots \ G}} = 1$$

Elevando ambos membros à n-ésima potência, temos:

$$\frac{x_1 x_2 x_3 \ \dots \ x_n}{GGG \ \dots \ G} = 1$$

Pelo Lema 2.1, podemos afirmar que:

$$\frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \frac{x_3}{G} + \dots \ + \frac{x_n}{G} \geqslant n$$

Assim, teremos:

$$\frac{1}{G} \times (x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n) \geqslant n \Longleftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \geqslant G \times n$$

Por fim, vem:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} \geqslant G$$

Ou seja:

$$A \geqslant G,$$

provando a validade da desigualdade $MA \geqslant MG$, cuja igualdade ocorre se, somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = \ ... \ = x_n$.

Dando prosseguimento, vamos à Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Capítulo 3

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

A desigualdade de Cauchy-Schwarz, muito útil na prova de desigualdades, será definida e demonstrada aqui de modo a completar a etapa de fundamentação necessária para o cumprimento do objetivo desse texto, que é a determinação de valores máximo e mínimo de funções sem o uso do Cálculo. A desigualdade de Cauchy (modo simplista de denominar a desigualdade em questão), se torna uma alternativa ao uso da desigualdade das médias aritmética e geométrica, por não limitar os valores da sequência a serem positivos. Isso sem dúvida vem alargar sua aplicabilidade em problemas algébrico-geométricos.

3.1 Enunciado

Sejam $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ números reais dados (não necessariamente positivos), não todos nulos e $n > 1$. Então:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$$

Ou, ainda:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Além disso, teremos a igualdade se, e somente se, os a_i e os b_i forem proporcionais, ou seja, se somente se, existir um real positivo λ tal que $b_i = \lambda a_i$, para todo $i \in \{1 \leq i \leq n\}$.

3.2 Prova da desigualdade de Cauchy-Schwarz

Demonstração: A demonstração clássica para essa desigualdade se dá com o uso da função quadrática. A razão disso é a possibilidade de a partir de $f(x) = (ax - b)^2$ termos sempre resultados positivos ou nulos ($f(x) \geqslant 0$), e de podermos manipular os números a e b de maneira independente da variável x, através do estudo do discriminante (Δ). A parábola gerada por essa função no plano cartesiano se mostrará tocando em um único ponto do eixo $0\vec{x}$, o que implica em $\Delta = 0$; ou não tocando-o em ponto algum, caso em que $\Delta < 0$. Para esse fim, vamos considerar a função quadrática:

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + (a_3x - b_3)^2 + ... + (a_nx - b_n)^2$$

Desenvolvendo os quadrados das diferenças teremos:

$$f(x) = (a_1^2x^2 - 2a_1b_1x + b_1^2) + (a_2^2x^2 - 2a_2b_2x + b_2^2) + ... + (a_n^2x^2 - 2a_nb_nx + b_n^2)$$

Após organizar os termos semelhantes, vem:

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Pela definição de f, observamos que $f(x) \geqslant 0$ para qualquer valor de x. Portanto, da condição $\Delta \leq 0$ (lembrando que para uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $\Delta = b^2 - 4ac$):

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \leq 0$$

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

O que nos dará:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2),$$

para $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ números reais, não todos nulos e $n > 1$, sendo que a igualdade ocorrerá caso exista um real positivo λ tal que $b_i = \lambda a_i$, com

$i \in \{1 \leq i \leq n\}$.

Verificaremos esse fato usando manipulações algébricas e Propriedades das Proporções, já que o emprego de Elementos Vetoriais tiraria a demonstração do foco de nosso trabalho, que é a acessibilidade aos conteúdos abordados independendo do nível de Ensino Superior.

Dado um $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, tomemos b_i e a_i tal que:

$$b_i = \lambda a_i$$

Multiplicando ambos membros por a_i, teremos:

$$b_i a_i = \lambda a_i a_i \Longleftrightarrow a_i b_i = \lambda a_i^2 \Longleftrightarrow a_i^2 = \frac{a_i b_i}{\lambda}$$

De modo análogo, multiplicando ambos membros por b_i, teremos:

$$b_i b_i = \lambda a_i b_i \Longleftrightarrow b_i^2 = a_i b_i \lambda$$

Substituindo esses resultados no segundo membro da desigualdade

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2),$$

teremos:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (\frac{a_1b_1}{\lambda} + \frac{a_2b_2}{\lambda} + ... + \frac{a_nb_n}{\lambda})(a_1b_1\lambda + a_2b_2\lambda + ... + a_nb_n\lambda)$$

E, ao manipularmos esse produto, chegamos a:

$$= [\frac{1}{\lambda}(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)][\lambda(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)]$$

Cancelando os λ, chegamos a identidade:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$$

como pretendíamos.

Mostremos agora que, se a igualdade é válida, então existe um λ tal que $b_i = \lambda a_i$. Para isso, nosso respaldo será a Teoria dos Números, tópico sobre divisibilidade; e tópicos sobre Proporcionalidade, cujas definições também se aplicam aos números reais.

Dados m, n, p, q_1 e q_2 reais e não nulos, temos:

$$m|p \Rightarrow p = mq_1$$

$$n|p \Rightarrow p = nq_2$$

Fazendo $p = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$, $m = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n$ e $n = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n$, temos conforme a relação anterior:

$$\frac{p}{m} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = q_1$$

e

$$\frac{p}{n} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} = q_2$$

Recordemos a seguinte propriedade das Proporções: dados s_1, s_2, s_3, ..., s_i e t_1, t_2, t_3, ..., t_i, é válido para todos s_i, t_i, e k reais não nulos e i natural ($i \geqslant 1$) que para:

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = ... = \frac{s_i}{t_i} = k$$

temos

$$\frac{s_1 + s_2 + ... + s_i}{t_1 + t_2 + ... + t_i} = k$$

Por essa razão, só podemos desmembrar $\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$ em n razões se houver proporcionalidade entre seus termos, como reza a propriedade destacada acima. Ou seja:

$$\frac{a_1b_1}{a_1^2} = \frac{a_2b_2}{a_2^2} = ... = \frac{a_nb_n}{a_n^2} = q_1$$

Melhor ainda,

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = ... = \frac{b_n}{a_n} = q_1$$

De modo análogo, também encontramos para $\dfrac{p}{n} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$ que:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = q_2$$

Como q_1 e q_2 são números reais não nulos que denotam a proporcionalidade entre a_i e b_i, podemos generalizar que, dado $(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$, então há necessidade da existência de $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $b_i = \lambda a_i$, com $i \in \{1 \leq i \leq n\}$, como condição para validade da igualdade na desigualdade de Cauchy. $\blacksquare$

Com isso, concluímos o referencial teórico sobre as desigualdade das médias e de Cauchy. Passemos agora às suas aplicações, que serão mostradas por meio de discussão de problemas.

Capítulo 4

Aplicações

Exporemos agora exemplos de aplicabilidade das desigualdades exploradas nesse trabalho,na intenção de determinar o valor máximo ou mínimo de expressões matemáticas anunciadas em situações problemas de cunho algébrico e também geométrico de modo a compor, conforme proposta inicial desse texto, uma alternativa ao uso do Cálculo para esse fim.

4.1 Aplicações de cunho algébrico

Aplicação 4.1.1 *Se a é uma constante positiva, encontre o valor mínimo para a expressão $E = x^2 + \frac{a}{x}$, para todos os valores positivos de x, ou seja, $x > 0$.*

O enunciado nos mostra uma expressão composta por duas parcelas, contudo não fornece nem soma constante ou produto constante, impedindo-nos a aplicação veemente da desigualdade das médias, já que isso é condição inicial para seu uso. Podemos, através de artifício abaixo, obter a condição exigida:

$$E = x^2 + \frac{a}{x} = x^2 + \frac{a}{2x} + \frac{a}{2x} = E',$$

onde $E' = x^2 + \frac{a}{2x} + \frac{a}{2x}$ é equivalente a E, porém nos fornece um produto constante, uma vez que:

$$x^2(\frac{a}{2x})(\frac{a}{2x}) = \frac{a^2}{4},$$

para $a > 0$.

Aplicando agora a desigualdade das médias aritmética e geométrica, teremos:

$$\frac{x^2 + \frac{a}{2x} + \frac{a}{2x}}{3} \geqslant \sqrt[3]{(x^2)(\frac{a}{2x})(\frac{a}{2x})} \Longleftrightarrow x^2 + \frac{a}{2x} + \frac{a}{2x} \geqslant 3\sqrt[3]{(x^2)(\frac{a}{2x})(\frac{a}{2x})}$$

Fazendo as devidas substituições visto que $x^2 + \frac{a}{2x} + \frac{a}{2x} = E' = E$ e que $(x^2)(\frac{a}{2x})(\frac{a}{2x}) = \frac{a^2}{4}$, vem que:

$$E \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}},$$

o que nos dá que o valor mínimo da expressão $E = x^2 + \frac{a}{x}$ é $3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}$.

Aplicação 4.1.2 *Determine o valor máximo da expressão $E = xy(72 - 3x - 4y)$, sendo x e y reais não nulos.*

Mais uma vez, o enunciado não atende à condição de mostrar soma ou produto constante para evidenciar a aplicabilidade da desigualdade das médias aritmética e geométrica. Temos em E um produto de três fatores melhor perceptíveis se reescritos da forma:

$$E = xy(72 - 3x - 4y)$$

Manipulemos E de modo a obtermos uma soma constante:

$$E = xy(72 - 3x - 4y) = \frac{3x}{3}\frac{4y}{4}(72 - 3x - 4y) = \frac{1}{12}[(3x)(4y)(72 - 3x - 4y)],$$

ou seja, $E = \frac{1}{12}$ $[(3x)(4y)(72 - 3x - 4y)]$. Desconsideremos momentaneamente o fator $\frac{1}{12}$, chegamos a:

$$E' = (3x)(4y)(72 - 3x - 4y)$$

Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$\frac{3x + 4y + (72 - 3x - 4y)}{3} \geqslant \sqrt[3]{3x \times 4y \times (72 - 3x - 4y)} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{72}{3} \geqslant \sqrt[3]{(3x)(4y)(72-3x-4y)} \iff$$
$$\sqrt[3]{(3x)(4y)(72-3x-4y)} \leq 24 \iff$$
$$(\sqrt[3]{(3x)(4y)(72-3x-4y)})^3 \leq 24^3 \iff$$
$$(3x)(4y)(72-3x-4y) \leq 13824$$

Trabalhando o primeiro membro da desigualdade e efetivando a substituição por E, temos:

$$(12)(xy)(72-3x-4y) \leq 13824 \iff 12E \leq 13824$$

Por fim, obtemos:

$$E \leq \frac{13824}{12} = 1152,$$

nos levando a conclusão de que o valor máximo de $E = xy(72-3x-4y)$ é 1152.

Aplicação 4.1.3 *Determine o menor e o maior valor da expressão $E = 2x+3y+6z$ para valores de x, y, z satisfazendo a condição $x^2+y^2+z^2 = 1$.*

Note que a condição imposta sobre x, y, z pode ser entendida geometricamente, sendo que esses valores representam coordenadas de um ponto que está situado sobre a esfera de centro na origem e raio 1. Fazendo analogia com a forma geral da desigualdade de Cauchy, que é da forma:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2),$$

teremos:

$$(2x+3y+6z)^2 \leq (2^2+3^2+6^2)(x^2+y^2+z^2) \iff (2x+3y+6z)^2 \leq (49)(1)$$

e, por fim:

$$(2x+3y+6z)^2 \leq 49$$

Podemos concluir que a expressão E tem -7 e $+7$ como valores mínimo e máximo, respectivamente. Contudo, podemos empregar a condição de proporcionalidade para verificar quais x, y, z determinam esses -7 e 7 como extremos. Como os membros da desigualdade de Cauchy se tornam iguais mediante a existência de proporcionalidade entre seus termos, conforme demonstrado anteriormente, temos:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}, \text{ onde } y = \frac{3x}{2} \text{ e } z = 3x$$

Substituindo $y = \dfrac{3x}{2}$ e $z = 3x$ em $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e resolvendo em função de x, obtemos as soluções:

$$(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}) \text{ e } (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$$

Assim, temos que a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ admite como valor mínimo -7 e como valor máximo 7. Vale reforçar que a solução constitui uma excelente alternativa ao uso do Cálculo, em que esse problema é resolvido utilizando o Método dos Multiplicadores de Lagrange.

4.2 Aplicações de cunho geométrico

Abordaremos a seguir problemas da Geometria, os quais vem confirmar a importância da otimização de valores no cotidiano principalmente setor industrial, como ferramenta, por exemplo, da Engenharia de Produção.

Aplicação 4.2.1 *Dentre todos os triângulos isósceles de perímetro* $30cm$*, determine aquele que tem área máxima.*

Eis aqui um exemplo interessante, que ilustra perfeitamente a aplicação da desigualdade das médias. O enunciado sugere a seguinte configuração para o triângulo:

Lembrando da fórmula de Herón, usada para determinar a área S de um triângulo qualquer de lados medindo a, b e c, temos que:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

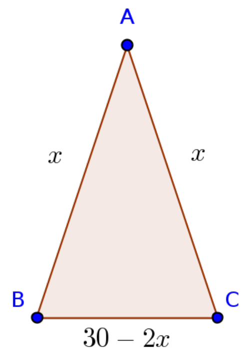

Figura 4.1: O triângulo isósceles do enunciado

onde p denota o semiperímetro que é definido por:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

No nosso caso, o semiperímetro será:

$$p = \frac{(30-2x)+x+x}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Substituindo na fórmula de Herón, vem:

$$S = \sqrt{15[15-(30-2x)](15-x)(15-x)} = \sqrt{15(2x-15)(15-x)(15-x)}$$

Mas o três últimos fatores do radicando acima apresentam soma constante. Daí:

$$\sqrt[3]{(2x-15)(15-x)(15-x)} \leq \frac{(2x-15)+(15-x)+(15-x)}{3} = 5,$$

logo:

$$\sqrt[3]{(2x-15)(15-x)(15-x)} \leq 5$$

O que devemos fazer agora é manipular essa desigualdade de modo a obtermos a fórmula de Héron no primeiro membro. Veja:

$$\sqrt[3]{(2x-15)(15-x)(15-x)}^{\,3} \leq 5^3 \Longleftrightarrow (2x-15)(15-x)(15-x) \leq 125$$

Multiplicando ambos membros por 15, temos:

$15(2x-15)(15-x)(15-x) \leq 15125 \Longleftrightarrow 15(2x-15)(15-x)(15-x) \leq 1875$

Extraindo a raiz quadrada de ambos membros, vem:

$$\sqrt{15(2x-15)(15-x)(15-x)} \leq \sqrt{1875},$$

que nos dará, já que alcançamos a fórmula da área segundo Herón no primeiro membro:

$$S \leq 25\sqrt{3}$$

Como o valor máximo será atingido quando os lados do triângulo forem congruentes - condição para que a desigualdade das médias se torne uma equação, temos que a área máxima de $25\sqrt{3}cm^2$ se dará forçosamente para o triângulo equilátero de perímetro igual a $30cm$ e de lados iguais a $10cm$.

Aplicação 4.2.2 *Considere um triângulo ABC. Seja P um ponto interno a esse triângulo, com D, E e F sendo pés das perpendiculares aos lados BC, CA e AB, respectivamente, pelo ponto P. Encontre o ponto P que minimiza a expressão* $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$.

Antes de iniciarmos a solução desse problema, vamos destacar uma composição diferente para a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, que apresenta formato bastante característico. Ele se torna vantajoso por permitir que associemos imediatamente sua aplicabilidade - ou possibilidade de aplicação - a problemas da Geometria, que envolvem principalmente triângulos. Assim, uma alternativa à desigualdade da forma

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

é:

$$(m_1 + m_2 + ... + m_n)^2 \leq (\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + ... + \frac{m_n}{k_n})(m_1k_1 + m_2k_2 + ... + m_nk_n),$$

com k_i, $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Para $n = 3$, temos:

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 \leq (\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3})(m_1k_1 + m_2k_2 + m_3k_3),$$

que confirma a vantagem anteriormente citada, uma vez que somos levados a perceber a configuração de semiperímetro, razão entre lados e altura (por exemplo) e as áreas de triângulos de lados m_1, m_2 e m_3 com alturas k_1, k_2 e k_3 nessa forma da Desigualdade de Cauchy.

Exporemos agora como chegar a esse formato alternativo da Desigualdade de Cauchy, reforçando que k_i é número real positivo. Primeiramente, preparemos as identidades:

$$a_1^2 = \frac{m_1}{k_1},\ a_2^2 = \frac{m_2}{k_2},\ ...\ ,a_n^2 = \frac{m_n}{k_n}$$

E também

$$b_1^2 = m_1k_1,\ b_2^2 = m_2k_2,\ ...\ ,b_n^2 = m_nk_n$$

Calculando o produto entre as identidades de índices correspondentes, teremos:

$$a_1^2b_1^2 = m_1^2,\ a_2^2b_2^2 = m_2^2,\ ...\ ,a_n^2b_n^2 = m_n^2$$

Extraindo a raiz quadrada membro a membro dessas identidades, ficamos com:

$$a_1b_1 = m_1,\ a_2b_2 = m_2,\ ...\ ,a_nb_n = m_n$$

Basta, agora, que substituamos esses resultados na desigualdade clássica de Cauchy. Isso nos dará:

$$(m_1 + m_2 + ... + m_n)^2 \leq (\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + ... + \frac{m_n}{k_n})(m_1k_1 + m_2k_2 + ... + m_nk_n)$$

Comprovada a validade da forma alternativa para a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, continuemos com a solução do problema. Fazendo $\overline{BC} = m_1$, $\overline{AC} = m_2$ e $\overline{AB} = m_3$ e $\overline{PD} = k_1$, $\overline{PE} = k_2$ e $\overline{PF} = k_3$, conforme o enunciado, teremos:

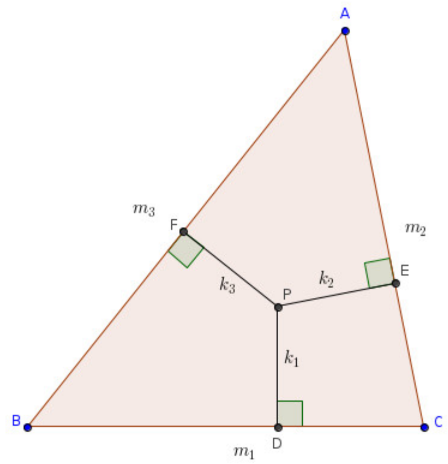

Figura 4.2: Uma configuração para o triângulo do enunciado

Podemos, ainda, destacar os triângulos BPC, CPA e APB, o que nos possibilitará trabalhar suas áreas em função de m_1, m_2 e m_3 que são suas respectivas bases; e k_1, k_2 e k_3, suas alturas:

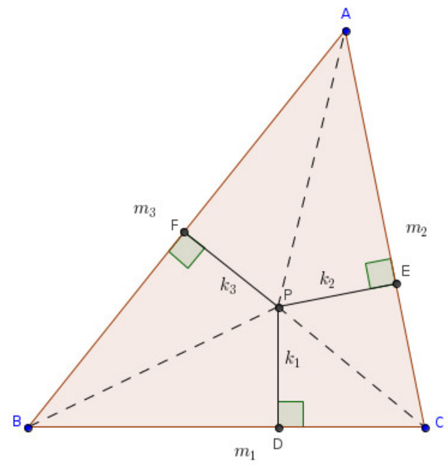

Figura 4.3: Os triângulos BPC, CPA e APB, destacados

Isso nos dá que a área do triângulo ABC, S_{ABC}, será:

$$S_{ABC} = \frac{m_1k_1}{2} + \frac{m_2k_2}{2} + \frac{m_3k_3}{2}$$

Ou seja:

$$m_1k_1 + m_2k_2 + m_3k_3 = 2S_{ABC}$$

Ademais, já temos o semiperímetro do triângulo ABC, que é $p = m_1 + m_2 + m_3$. Voltemos então à versão alternativa da desigualdade de Cauchy, no caso para $n = 3$:

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 \leq (\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3})(m_1k_1 + m_2k_2 + m_3k_3),$$

que após feitas as devidas substituições, fica:

$$p^2 \leq (\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3})(2S_{ABC})$$

Isolando o fator $\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3}$ no primeiro membro da desigualdade, temos:

$$\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3} \geqslant \frac{p^2}{2S_{ABC}}$$

Percebemos aqui a possibilidade de simplificar seu segundo membro, pois tendo

$$S_{ABC} = pr$$

com r sendo raio da circunferência inscrita, obteremos:

$$\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3} \geqslant \frac{p^2}{2pr} \iff \frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3} \geqslant \frac{p}{2r}$$

Mas $p = m_1 + m_2 + m_3$, daí:

$$\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{m_3}{k_3} \geqslant \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2r} = \frac{m_1}{2r} + \frac{m_2}{2r} + \frac{m_3}{2r}$$

onde $2r = q$, q real e não nulo.

Conforme o enunciado, obtivemos que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}} + \frac{\overline{CA}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{PF}} \geqslant \frac{m_1}{q} + \frac{m_2}{q} + \frac{m_3}{q}$$

donde podemos concluir que a soma $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{PD}} + \dfrac{\overline{CA}}{\overline{PE}} + \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PF}}$ terá valor mínimo se $\overline{PD} = \overline{PE} = \overline{PF} = q$, e essa identidade só ocorre quando P é incentro, já que tais congruências para o triângulo dado impõem que $\vec{AP}$, $\vec{EP}$ e $\vec{DP}$ sejam bissetrizes, conforme a imagem que segue.

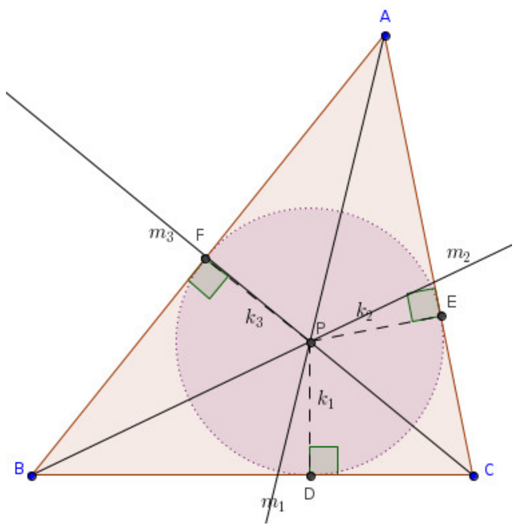

Figura 4.4: Incentro do triângulo ABC

Aplicação 4.2.3 *Encontre as dimensões do cilindro circular reto de maior área lateral que pode ser inscrito numa esfera de raio 6 m.*

Iniciemos com a construção que servirá como base para a resolução do problema, onde $a = R = 6cm$, onde R é raio da esfera e os lados a, b e c compõe um triângulo retângulo.

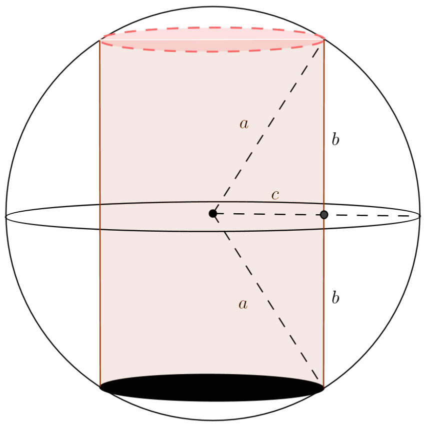

Figura 4.5: Configuração do enunciado que destaca o triângulo retângulo de lados a, b e c

Buscamos as dimensões do cilindro de modo que este apresente área lateral máxima. Para determinação da área de um cilindro, temos a expressão:

$$A_l = 2\pi rh$$

onde A_l é a área lateral, r é o raio da base do cilindro, e h é a medida da sua altura. Pela figura acima, ao fazermos as substituições na fórmula da área lateral teremos:

$$A_l = 2\pi(c)(2b) \iff A_l = 4\pi bc$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

mas $a = r = 6$, então:

$$6^2 = b^2 + c^2 \Longleftrightarrow b^2 + c^2 = 36$$

Dos resultados encontrados acima, $A_l = 4\pi bc$ e $b^2 + c^2 = 36$, percebemos a presença de uma soma constante, condição inicial para que se cogite o emprego da desigualdade das médias aritmética e geométrica. Portanto:

$$\frac{b^2 + c^2}{2} \geqslant \sqrt{b^2c^2} \Longleftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{2} \geqslant bc$$

Da equação $b^2 + c^2 = 36$ obtemos:

$$\frac{b^2 + c^2}{2} = \frac{36}{2} \Longleftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{2} = 18$$

Substituindo esse resultado na desigualdade das médias, temos $bc \leq 18$, a qual não mostra, ainda a área lateral $A_l = 4\pi bc$. Multiplicando ambos membros da inequação por 4π, fica:

$$4\pi bc \leq 18(4\pi)$$

ou seja,

$$A_l \leq 72\pi$$

O resultado acima nos permite concluir que a área lateral máxima atingível pelo cilindro é de 72π. Para descobrirmos a medidas b e $c = r$ do cilindro, devemos considerar que essa área máxima só ocorrerá para $b = c$, o que nos dá o sistema:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 36 \\ b^2 = c^2 \end{cases}$$

que resolvido nos dará que $b = c = 3\sqrt{2}$, o que encerra a solução do problema.

Aplicação 4.2.4 *Dispomos de uma folha de cartolina de $2m$ por $3m$ e queremos construir com a mesma uma caixa aberta com o maior volume possível. Quais devem ser as dimensões da caixa? Justifique sua resposta.*

Tratamos aqui de uma aplicação que envolve a Geometria Euclidiana Espacial. Uma configuração possível para o problema seria a que segue:

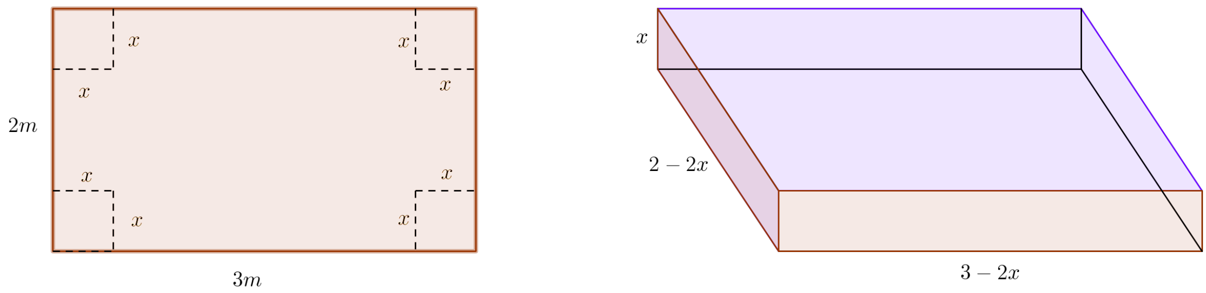

Figura 4.6: Cartolina demarcada e caixa aberta montada

Temos para o volume V, cujo valor máximo é buscado, as dimensões $3-2x$, $2-2x$ e x, tal que

$$V = (3-2x)(2-2x)x$$

Somos levados a experimentar, para esse problema de otimização, a desigualdade das médias aritmética e geométrica. Contudo, a condição para o emprego dessa desigualdade não é atendida: não temos soma nem produto constante, conforme a análise abaixo.

$$\sqrt[3]{(3-2x)(2-2x)x} \leq \frac{(3-2x)+(2-2x)+x}{3} \iff \sqrt[3]{(3-2x)(2-2x)x}^{3} \leq (\frac{5-3x}{3})^3$$

que nos dá:

$$V \leq (\frac{5-3x}{3})^3$$

Esta solução compromete a determinação do volume máximo, pois seu resultado ainda é dependente de x. Uma alternativa é usarmos valores m, n e p reais positivos como constantes multiplicadoras do comprimento, largura e altura da caixa, $m(3-2x)$, $n(2-2x)$, px, de modo que tenhamos:

$$V' = m(3-2x)n(2-2x)px$$

Ou ainda

$$V' = [(3-2x)(2-2x)x]mnp$$

Mas $V = (3-2x)(2-2x)x$, então:

$$V' = Vmnp$$

Voltemos agora à desigualdade das médias, empregando essas novas dimensões.

$$\frac{m(3-2x)+n(2-2x)+px}{3} \geqslant \sqrt[3]{m(3-2x)n(2-2x)px} \quad (*)$$

Aplicando a distributividade no primeiro membro e fazendo as devidas substituições no segundo, temos:

$$\frac{3m-2mx+2n-2nx+px}{3} = \frac{(-2m-2n+p)x+3m+2n}{3} \geqslant \sqrt[3]{V'}$$

Invertendo a posição dos membros da inequação, vem:

$$\sqrt[3]{V'} \leq \frac{(-2m-2n+p)x+3m+2n}{3}$$

A condição para que a expressão acima se torne independente de x, é que $-2m-2n+p=0$. Isso nos dá que $p = 2m+2n$. Substituindo p na no primeiro membro da inequação $(*)$, vem:

$$\frac{m(3-2x)+n(2-2x)+(2m+2n)x}{3} \geqslant \sqrt[3]{m(3-2x)n(2-2x)px}$$

Novamente aplicando a distributividade, obtemos a soma constante necessária para a efetiva aplicação da desigualdade das médias, pois esta se torna independente de x:

$$\frac{3m+2n}{3} \geqslant \sqrt[3]{m(3-2x)n(2-2x)px}$$

Manipulando a desigualdade acima, teremos:

$$(\sqrt[3]{m(3-2x)n(2-2x)px})^3 \leq (\frac{3m+2n}{3})^3 \iff$$

$$(\sqrt[3]{[(3-2x)(2-2x)x]mnp})^3 \leq (\frac{3m+2n}{3})^3 \iff$$

$$Vmnp \leq \frac{(3m+2n)^3}{27} \iff$$
$$V \leq \frac{(3m+2n)^3}{27mnp}$$

Com esse resultado, obtemos que para m, n e p reais positivos, o volume máximo atingido pela caixa é $\dfrac{(3m+2n)^3}{27mnp}$. E isso ocorrerá quando

$$m(3-2x) = n(2-2x) = px$$

donde podemos determinar os valores de x em função de m, n e p, com $p = 2m+2n$, em três possibilidades:

I) $m(3-2x) = n(2-2x)$

II) $m(3-2x) = px$, ou seja, $m(3-2x) = (2m+2n)x$

III) $n(2-2x) = px$, ou seja, $n(2-2x) = (2m+2n)x$

Resolvendo cada uma destas equações, temos as respectivas soluções para x:

I) $x = \dfrac{3m-2n}{2m-2n}$

II) $x = \dfrac{3m}{4m+2n}$

III) $x = \dfrac{2n}{4n+2m}$

Sabemos que o valor de x deve ser único. Daí, da condição que m, n e p são reais positivos, podemos atribuir valores aos mesmos. Atribuiremos aqui: $m = 1$, $n = 2$ e $p = 2\times 1 + 2\times 2 = 6$, a fim de descobrir qual dos itens acima melhor representa melhor o valor de x. Calculando com os valores escolhidos para m, n e p teremos:

I) $x = \dfrac{3m-2n}{2m-2n} = \dfrac{3\times 1 - 2\times 2}{2\times 1 - 2\times 2} = \dfrac{1}{2}$

II) $x = \dfrac{3m}{4m+2n} = \dfrac{3\times 1}{4\times 1 + 2\times 2} = \dfrac{3}{8}$

III) $x = \dfrac{2n}{4n+2m} = \dfrac{2\times 2}{4\times 2 + 2\times 1} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

Como $m = 1$, $n = 2$ e $p = 6$, temos que nosso valor máximo atingido para V será:

$$V = \frac{(3m+2n)^3}{27mnp} = \frac{(3\times 1 + 2\times 2)^3}{27\times 1\times 2\times 6} = \frac{343}{324} \cong 1,058641975$$

Contudo, não sabemos ainda que valor de x provocará esse volume, muito menos as dimensões que deve ter a caixa. Para isso, basta substituirmos cada valor de x encontrados nos itens acima na expressão original do volume, $V = (3-2x)(2-2x)x$, onde o resultado deverá se mostrar mais próximo possível da solução $\frac{343}{324} \cong 1,058641975$ já obtida.

I) $x = \frac{1}{2} \Rightarrow V = (3 - 2\times\frac{1}{2})(2 - 2\times\frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} = -2$

II) $x = \frac{3}{8} \Rightarrow V = (3 - 2\times\frac{3}{8})(2 - 2\times\frac{3}{8}) \times \frac{3}{8} \cong 1,0546875$

III) $x = \frac{2}{5} \Rightarrow V = (3 - 2\times\frac{2}{5})(2 - 2\times\frac{2}{5}) \times \frac{2}{5} = 1,056$

O item $III)$ forneceu o volume mais próximo de $1,058641975$, logo a expressão para x em função de m e n reais positivos válida é $x = \frac{2n}{4n+2m}$ e as dimensões da caixa para que seu volume seja máximo são:

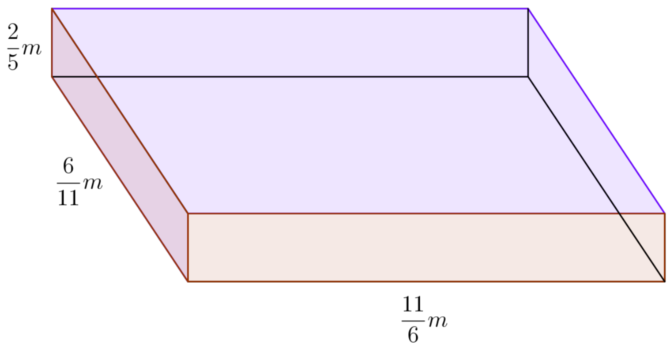

Figura 4.7: Representação das dimensões da caixa de volume máximo

E assim concluímos a discussão do problema.

Outras tipos de média também estão presentes no cotidiano. Entre elas, está a Média Harmônica, sobre a qual explanaremos no capítulo final.

Capítulo 5

Complementos

5.1 Média Harmônica

Além das médias aritmética e geométrica, exploradas neste trabalho, há uma outra: a média harmônica. Aplicada a problemas que envolvem grandezas inversamente proporcionais, a média harmônica se define como a razão entre o número de membros e a soma dos inversos destes, a saber:

Definição 5.1 *Dada a sequência* $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$*, com* $x_i \in \mathbb{R}_+^*$ *e* $n > 1$*, chamamos de média harmônica o valor* MH*, onde:*

$$MH = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}}$$

Vejamos um exemplo de aplicação para média harmônica.

Exemplo 5.1.1 *Suponhamos que o caminhão de transporte de mercadorias do almoxarifado da UFPB, ao executar uma entrega, desenvolveu duas velocidades distintas: durante a metade do percurso ele manteve a velocidade de* $50km/h$ *e durante a metade restante sua velocidade foi de* $60km/h$*; e o motorista deseja determinar a velocidade média do veículo no percurso.*

Notemos que o percurso fora dividido em duas partes iguais. E seu comprimento total do mesmo não será influenciado por tempo ou velocidade de tráfego. Porém, as grandezas tempo e velocidade se relacionam inversamente (quanto maior a velocidade desenvolvida, menor o tempo para concluir o percurso), e todo o trajeto será realizado num total de dois "tempos"distintos. Com isso, definimos este problema como característico para aplicação da Média Harmônica, em que $n = 2$, $x_1 = 50km/h$ e $x_2 = 60km/h$. Daí, fazemos:

$$MH = \frac{2}{\frac{1}{50} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{6+5}{300}} = 2 \times \frac{300}{11} = \frac{600}{11}$$

ou seja, a velocidade média desenvolvida pelo caminhão foi de aproximadamente $54km/h$.

Observação 5.1 *Imaginemos que o problema fosse diferente: "O caminhão percorre seu trajeto por um certo tempo t a uma velocidade de* $50km/h$ *e depois durante o mesmo tempo t ela passa a ser* $60km/h$*. Determine a velocidade média do caminhão." Neste caso, temos o trajeto considerado em "dois tempos" idênticos. Isso nos leva a considerar a relação entre as grandezas espaços percorridos e as respectivas velocidades, que por sinal são diretamente proporcionais (quanto maior a velocidade desenvolvida, maior o espaço decorrido). Por isso, então, não cabe aqui a aplicação da Média Harmônica e sim da Média Aritmética. A solução do problema é:*

$$MA = \frac{50+60}{2} = \frac{110}{2} = 55km/h$$

A média harmônica também pode ser envolvida na desigualdade das médias, como veremos a seguir.

5.2 Relação de desigualdade entre as médias aritmética (MA), geométrica (MG) e harmônica (MH)

A desigualdade entre as médias aritmética, geométrica e harmônica, dado $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, para $x_i \in \mathbb{R}_+^*$ e $n > 1$, apresenta-se da seguinte forma:

$MH \leq MG \leq MA$, ocorrendo igualdade se, somente se $x_1 = x_2 = ... = x_n$

Nos limitaremos a mostrar a validade desta igualdade para $n = 2$, por meio de uma prova visual e geométrica em que x_1 e x_2 são medidas de segmentos dados. A validade para qualquer n será admitida aqui sem a devida demonstração, que pode ser encontrada no item [4] da nossa lista de referências.

Consideremos a figura abaixo. Temos que $\overline{AD} = x_1$ e $\overline{BD} = x_2$. Além disso, o

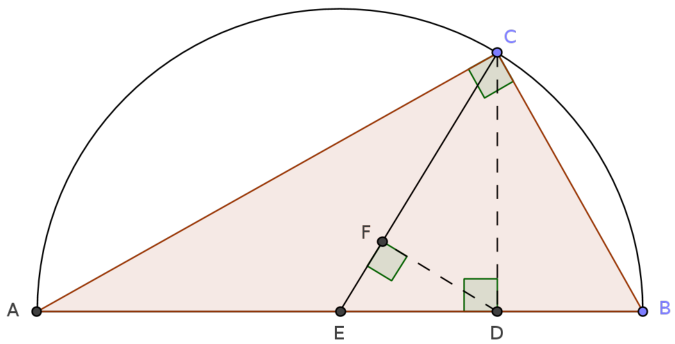

Figura 5.1: Triângulo ABC inscrito na semicircunferência

triângulo (BCE) é equilátero, pois o ponto C marca o arco BC como sendo $\frac{1}{3}$ da semicircunferência, o que faz com que o ângulo central CÊB meça 60°, nos dando

$$\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{EB} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ou seja, esses segmentos representam a Média Aritmética dos segmentos x_1 e x_2.

Tomemos agora a altura $\overline{CD}$ do triângulo ABC. Por Relações Métricas no Triângulo Retângulo, temos que

$$\overline{CD}^2 = x_1 x_2 \Longleftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{x_1 x_2}$$

nos dando que $\overline{CD}$ ilustra a Média Geométrica dos segmentos x_1 e x_2.

Por fim, consideremos os triângulos semelhantes CDF e CDE. Empregando os lados correspondentes convenientemente, obtemos:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \Rightarrow \frac{\overline{CF}}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{\frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Resolvendo essa equação, teremos:

$$\overline{CF} = \frac{(\sqrt{x_1x_2})^2}{\dfrac{x_1+x_2}{2}} \Rightarrow \overline{CF} = \frac{x_1x_2}{\dfrac{x_1+x_2}{2}} = \frac{2}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}}$$

o que nos permite concluir que $\overline{CF}$ é Média Harmônica dos segmentos x_1 e x_2.

Pelos procedimentos acima, podemos comprovar visualmente por meio das definições da Geometria, que

$$MH \leq MG \leq MA$$

sendo $MH = MG = MA$ somente no caso de $x_1 = x_2$.

Encerraremos esse capítulo com um exemplo aplicação para esta desigualdade, observando que por ela se tornam evidentemente válidas as seguintes afirmações:

$$MG \geq MH \text{ e } MA \geq MH$$

5.3 Aplicação

Aplicação 5.3.1 *Se x_1, x_2, x_3 e x_4 são variáveis positivas cuja soma vale* 20*, determine o valor mínimo para $x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} + x_4^{-1}$.*

O enunciado nos traz uma soma constante, e uma soma de inversos de termos. Essas informações nos induzem ao emprego da desigualdade das médias aritmética e harmônica, $MA \geq MH$, nos dando:

$$\frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}+x_3^{-1}+x_4^{-1}}{4} \geq \frac{4}{\dfrac{1}{(x_1)^{-1}}+\dfrac{1}{(x_2)^{-1}}+\dfrac{1}{(x_3)^{-1}}+\dfrac{1}{(x_4)^{-1}}}$$

Mas $\dfrac{1}{(x_1)^{-1}} = x_1$, $\dfrac{1}{(x_2)^{-1}} = x_2$, $\dfrac{1}{(x_3)^{-1}} = x_3$ e $\dfrac{1}{(x_4)^{-1}} = x_4$. Então:

$$\frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}+x_3^{-1}+x_4^{-1}}{4} \geq \frac{4}{x_1+x_2+x_3+x_4} \Longleftrightarrow x_1^{-1}+x_2^{-1}+x_3^{-1}+x_4^{-1} \geq \frac{16}{x_1+x_2+x_3+x_4}$$

Como $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, concluímos que:

$$x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} + x_4^{-1} \geq \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

Assim, o valor mínimo para $x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} + x_4^{-1}$ é $\frac{4}{5}$, e esse valor é obtido para $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 5$, pois $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Encerramos colocando que neste trabalho apresentamos uma discussão sobre as desigualdades mais usuais em Matemática, e seu potencial em solução de problemas evitando o Cálculo Diferencial.

Referências Bibliográficas

[1] Encinas, Aldo S., *Desigualdades e inecuaciones*, 1ª edição, Lumbreras: Lima, Perú, (2012).

[2] Niven, Ivan, *Maxima and minima without calculus*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, (1981).

[3] A. Hefez, *Aritmética*, Coleção PROFMAT, SBM, (2014).

[4] Manfrino, Radmila Bulajich; Ortega, José Antonio Gómez; Delgado, Rogelio Valdez. *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*, Birkhauser, (2009).

[5] Muniz Neto, Antonio Caminha, *Tópicos de Matemática elementar: números reais, Vol. 1*, SBM, (2013).

[6] Desigualdade de Cauchy-Schwarz. In: Wikipedia. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Desigualdade_de_Cauchy-Schwarz>. Acesso em: 12 Fev. de 2016.

[7] Viktor Bunyakovsky. In: Wikipedia. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Viktor_Bunyakovsky>. Acesso em: 12 Fev. de 2016.

[8] Hermann Schwarz. In: Math-Info. Disponível em: <http://learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Schwarz>. Acesso em: 12 Fev. de 2016.