Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

PROFMAT

UFPB

Matemática discreta: Tópicos de Recorrências Lineares e Suas Aplicações.

por

FABIANO JOSÉ DE CASTRO

sob orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

05/2016
João Pessoa - PB

C355m Castro, Fabiano José de.
Matemática discreta: tópicos de recorrências lineares e suas aplicações / Fabiano José de Castro.- João Pessoa, 2016.
77f.
Orientador: Carlos Bocker Neto
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Matemática discreta. 3. Ensino básico. 4. Sequências. 5. Recorrências. 6. Aplicações.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Matemática discreta: Tópicos de Recorrências Lineares e Suas Aplicações.

por

FABIANO JOSÉ DE CASTRO

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Carlos Bocker Neto

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto -UFPB (orientador)

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof^a. Dr^a. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes - UFPB

Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos - UFPE

Maio/2016

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Deus Grandioso por me fazer capaz através do esforço e dedicação concluir este trabalho. Gostaria de homenagear e agradecer ao meu pai, José Francisco de Castro (em memória), que do interior de Pernambuco como agricultor e bóia fria se mudou para a capital trazendo sobre o ombro o trabalho e a honestidade para nos criar com dignidade e todos tivemos nossa educação escolar nas escolas públicas. Assumiu e criou a Fabiana Castro, minha irmã mais velha, gerou e criou a Renata Castro, minha irmã do meio e a mim que gerou e durante 29 anos escolhi conviver com ele até me casar, quando modestamente o honrei em vida, aproveitando as oportunidades mesmo com muitas dificuldades, principalmente financeira. Agradeço a minha indispensável mãe Ana Lúcia Batista, fundamental importância de minha existência, a quem devo constantemente meu respeito e amor. Às irmãs da caridade que durante 10 anos, entre minha infância e adolescência, cuidaram de mim e me ofereceram a educação básica e complementar como aos outros menores carentes de minha época no **Educandário Magalhães Bastos**, mantido pela Santa Casa de misericórdia do Recife, gerido pelas Filhas da Caridade de São Vicente de Paulo e até hoje situado no bairro da Várzea em Recife, onde nasci e fui criado. Agradeço e homenageio meus irmãos e amigos Paulo Silas Barbosa, Fábio Souto da Silva, meu primeiro aluno e hoje Engenheiro de Produção. Sou eternamente agradecido aos amigos Esequias Araújo e Luiz Carlos que no leito da infermidade no hospital das clínicas da UFPE me apoiaram até ficar curado e poder, assim, iniciar minhas atividades acadêmicas na UFRPE, na qual recebi meu grau de licenciado em Matemática. Agradeço veementemente a minha querida esposa Marcela Castro que muitas vezes nas caladas da noite testemunhava tal sacrifício até a aurora do dia e entendeu tamanho esforço. Também sou grato ao meu filho Davi Fabiano que mesmo na sua tenra idade, muitas vezes compreendeu o enfado e cançaso físico-mental de seu papai. Sou muito agradecido também aos Doutores Professores Napoleon Caro Tuesta, Lizandro Challapa, Alexandre Simas, Bruno Ribeiro, Lenimar Nunes, Sérgio de Albuquerque, Gilmar Correia e Eduardo Gonçalves, docentes iluminados desse programa, que durante toda a minha vida acadêmica, como mestrando no estado da Paraíba, compartilharam seus conhecimentos e sem hesitar dedicaram seu tempo na construção profissional de um educador. Destaco minha gratidão ao meu orientador, Professor Doutor Carlos Bocker Neto, por me orientar com dedicação, assiduidade e presteza, sem medir esforços em me ajudar e a esta importante e estimada banca com a participação efetiva da Professora e Doutora Elisandra de Fátima Gloss de Moraes do departamento de matemática da UFPB e ao ilustríssimo convidado Professor e Doutor Maurício Cardoso Santos do departamento de matemática da UFPE. Gostaria de agradecer ainda a todos os colegas da turma 2014.1 do PROFMAT na UFPB, que unidos criamos uma turma dedicada, coesa e prestativa em estudar. Em especial aos amigos Ivelton Lustosa, Frank Werlly, Jucélio de Barros, Rafael Tavares, Carlos Alberto Muniz Júnior, Lincoln Pereira, Alyxandre Marinho e Sebastião Alves. Não poderia esquecer de homenagear e agradecer ao nobre amigo Edgar Manoel que acredita na melhoria da educação e incentivou a me inscrever no Exame de Acesso do Profmat, aos colegas e amigos de graduação e aos demais amigos, Engenheiro Elétrico Petrônio João, Professor Teólogo Dr. Bartolomeu Felipe Santiago, Pastor Wellington Siqueira, Engenheiro Marcelo Branner, Magistrado Rafael Manoel que de forma indireta contribuíram para meu aperfeiçoamento humano e acadêmico. Agradeço à coordenação do PROFMAT na UFPB que com competência acreditou em nós professores da educação básica nas escolas públicas e privadas. Agradeço também a CAPES pela bolsa que ajudou nas despesas durante todo esse período de curso e ao IMPA/SBM pala confecção de avaliações e seus excelentes livros, em aperfeiçoamento, entre os quais comprei e faço o devido uso na minha atuação de pesquisa profissional.

Dedicatória

Ao meu generoso Pai (em memória),
Mãe, Esposa e Filho.

Resumo

Mostrarei nesta dissertação as recorrências lineares começando com um breve comentário histórico sobre os principais autores de alguns problemas de recorrências lineares. Analisarei sequências elementares, fórmulas posicionais, métodos recursivos, progressões aritméticas e geométricas. Posteriormente, diferenciarei o que são relações de recorrências e equações de recorrências seguindo com a explicação da solução de uma recorrência, exposta em alguns exemplos e também as definições de recorrências de primeira e segunda ordens com suas classificações. Logo após discorrerei, brevemente, à respeito de alguns tipos de recorrências de terceira ordem e veremos também algumas generalizações para ordem superior. Tratarei, finalizando neste trabalho, aplicações das recorrências utilizando as fundamentações referidas anteriormente e problemas envolvendo combinatória.

Palavras-chave: Matemática Discreta, Ensino Básico, Sequências, Recorrências, Aplicações.

Abstract

I show this thesis linear recurrences starting with a brief historical review of the main authors of some problems of linear recurrences. Analyze elementary sequences, positional formulas, recursive methods, arithmetic and geometric progressions. Later, I will distinguish what are relations of relapses and recurrences following equations with the explanation of the solution of a recurrence, exposed in some instances and also the first recurrence settings and second orders with their ratings. Soon after I'll discuss briefly the respect of some types of third-order recurrences and also see some generalizations to higher order. Treat, finishing this work, applications of recurrences using the foundations mentioned above and problems involving combinatorial.

Keywords: Discrete Mathematics, Basic Education, Sequences, recurrences, Applications.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

No que tange à importância do tema, as sequências são fundamentais no ensino médio e à despeito de ser muito limitado o ensino de recorrências nas séries finais e ensino médio, acreditamos que este assunto precisa ser mais difundido no ensino básico e superior.

Pouco é discutido ou praticamente nada sobre relações de recorrências e equações de recorrências, apenas progressões aritmética e geométrica. Alguns tipos de sequências e problemas matemáticos de difícil resolução poderiam apoiar sua resolução no método recursivo. É pensando assim que esse método se torna imprescindível diante da necessidade de criar fórmulas que resolvem partes de problemas de contagem e iterações aplicadas em diversas áreas do ensino da matemática, especialmente nas deduções de fórmulas e a descoberta de vários métodos onde encontramos recursos didáticos para resolução com clareza.

Acreditamos, como já falamos antes, ser importante estudar no ensino básico este tema rico e continuar no ensino de graduação para facilitar as aplicações de algumas fórmulas, visto nos assuntos como, sequências, as mais diversas, progressões e problemas combinatórios, bem como nas aplicações em problemas complexos de difícil resolução.

No primeiro capítulo mostraremos alguns tipos elementares de sequências com suas definições, propriedades válidas para sequências em geral.

No segundo capítulo faremos um breve comentário histórico sobre recorrências lineares com algumas aplicações e seus respectivos criadores, trataremos de relações de recorrências, equações de recorrências e classificaremos as relações de recorrências destacando suas ordens, se homogênea ou não.

Ampliaremos em seguida a discussão sobre recorrências lineares de ordens múltiplas, no que tange ao estudo de alguns tipos de recorrências de ordem 3, destacando também suas propriedades e relacionando com a generalização em recorrências de ordem k.

No último capítulo deixaremos especialmente para as aplicações das recorrências lineares, em destaque aos três famosos problemas. As aplicações da torre de Hanoi - **Édouard Lucas**, das multiplicações dos coelhos - **Séries de Fibonacci** e do salvamento em uma embarcação - **Flavius Josephus**. Mostraremos também na apresentação deste trabalho que é possível inovar pedagogicamente o ensino-aprendizagem de temas relacionados a Recorrências, fazendo uso de materiais concretos, recursos computacionais de robótica, como novas ferramentas tecnológicas na escola ou universidade.

Enfim, é de suma importância reforçar o conhecimento, tanto na prática como na teoria, sobre esse assunto tão envolvente na matemática discreta e por isso trataremos de mostrar com muito afinco neste esforçado trabalho que no ensejo apresentamos.

Capítulo 1

Sequências Elementares

1.1 Um breve comentário histórico

Muitas sequências importantes são definidas recursivamente, fornecendo-se inicialmente uma fórmula que determina os demais termos a partir dos termos que os precedem. Essa fórmula é chamada de recorrência. A formulação de relações de recorrências é um recurso forte e versátil na resolução de problemas combinatórios e muitos algoritmos são baseados em relações recorrentes, parte destes problemas considerados difíceis à primeira mão são claramente resolvidos por esta técnica. Este tema é muito útil também em pesquisas e na vida, como a recursão que ocorre no domínio visual, do trabalho de M.C.Escher e também presente nos fractais presenciados por Mandelbrot como mostram as figuras abaixo. (Veja as figuras em: Drawing Hands - Escher M.C. - WikiArt.org www.wikiart.org Drawing Hands - Escher M.C. e Os Fractais | Teoria da Conspiração www.deldebbio.com.br)

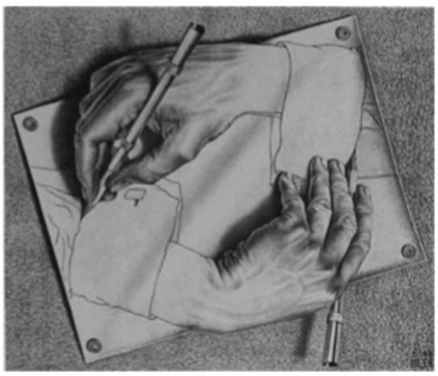

Figura 1.1: Drawing Hands de M.C.Escher

Figura 1.2: Conjunto Fractais Mandelbrot

Em se tratando deste importante recurso, destacaremos três famosas aplicações, dentre as demais que estudaremos mais adiante, com seus respectivos autores.

Nas aplicações de Recorrências Lineares temos a famosa torre de Hanoi, este jogo foi inventado pelo matemático francês **Édouard Lucas** $(1842-1891)$ inspirado numa lenda Hindu, em 1883. O nome do jogo surgiu do símbolo da cidade de Hanoi, no Vietnã. Existem várias lendas a respeito da origem do jogo, a mais conhecida diz respeito a um templo Benares, situado no centro do Universo. Diz-se que um ser superior, supostamente, havia criado uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Essa divindade ordenara aos monges que movessem todos os discos de uma estaca para outra segundo às suas instruções. As regras eram simples: apenas um disco podia ser movido de cada vez e nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo desmoronar-se-ia e o mundo desapareceria. Dessa forma criava-se um novo mundo, o mundo de Hanoi. Esse comentário histórico podemos ver com mais detalhes na referência [10].

Fibonacci, filho de Bonaccio, $(1175-1250)$, segundo alguns estudiosos, foi o matemático mais talentoso da Idade Média. Natural de Pisa, Itália, era também conhecido como Leonardo de pisa ou Leonardo Pisano. As atividades mercantis de seu pai, além da própria vocação comercial da cidade, favoreceram a Leonardo a oportunidade de estudar fora da Itália e de viajar entrando em contato com o pensamento matemático árabe e do oriente. Em seu livro Liber Abaci, publicado em 1202 assim que retornou de suas viagens, Fibonacci defendeu com vigor a adoção do sistema de numeração indo-arábico em lugar dos algarismos romanos então utilizados. É neste mesmo livro que encontramos, entre outros, o problema que deu origem à famosa sequência. Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, à partir de um único casal, se cada casal procria a cada mês um novo casal que se torna produtivo depois de dois meses? A questão é fascinante tanto por sua aparente simplicidade como pela multiplicidade de formas em que pode ser apresentada. Mais informações sobre Fibonacci vide [11].

Vemos também na matemática discreta um exemplo famoso de recorrência, atribuído a **Flavius Josephus**, um famoso historiador do primeiro século, que durante a guerra Judaica, se encontrava entre um bando de 41 judeus rebeldes encurralados pelos romanos em uma caverna. Sem chance de fuga o grupo decide pela morte ao invés do aprisionamento, os rebeldes formam um círculo e começariam a partir de certo ponto pular duas pessoas e a matar a terceira pessoa numa direção fixa, a eliminação procede em torno do círculo que irá se tornando menor conforme as pessoas mortas são removidas, até não restar alguém vivo. Conta a lenda que graças ao talento matemático de Josephus, o mesmo conseguiu escapar desta tolice do suicídio quando encontrou o local no círculo inicial e quem seria o último a escapar. Flavius Josephus atribui em sua biografia que devido à sorte ou a mão de Deus, ele e outro homem resolveram se entregar aos romanos, fato que inclui uma variação no problema, uma vez que historiadores consideram o tal homem como um cúmplice de Josephus, como a morte era administrada pela próxima escolha na fila, a forma de Josephus evitar o ato de assassinar um colega implica que ele colocou alguém de comum acordo para se render na penúltima posição. Vide referêcia bibliográfica [12]. Esses problemas fascinantes que estão neste breve comentário histórico, e outros não menos importantes, serão analisados detalhadamente no último capítulo do estudo das relações de recorrências lineares desta dissertação.

1.2 Fórmulas Posicionais e Métodos Recursivos

Uma sequência (infinita) de números reais é uma lista de infinitos números reais $(a_1, a_2, a_3, ...)$, ou seja, uma sequência de números na qual identificamos quem é o primeiro número da sequência, o segundo, quem é o terceiro, e assim sucessivamente. Vamos denotar uma sequência infinita como acima citada por $(a_k)_{k\geqslant 1}$ ou simplesmente por (a_k).

Já uma sequência (finita) de números reais, isto é, uma sequência ordenada finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de números, analogamente as sequências infinitas, identificamos quem é o primeiro número da sequência, o segundo, quem é o terceiro, e assim por diante até o útimo termo a_n. Também podemos denotar uma sequência finita como vimos imediatamente por $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ ou simplesmente por (a_k), esta última forma será por conveniência a notação adotada neste trabalho, onde a_k é o k^{o} termo da sequência.

Neste capítulo vamos mostrar alguns tipos elementares de sequências com suas definições, propriedades válidas para sequências em geral. Quando a sequência for finita tomaremos o cuidado de diferenciá-la para não confundi com sequências infinitas.

Dizemos que a sequência (a_k) com $k \geqslant 1$ está definida por uma fórmula posicional se os valores de $a_k \in \mathbb{R}$ forem dados por uma fórmula que depende explicitamente da posição k. Para melhor entender vamos observar o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1 *A sequência (a_k) dos quadrados perfeitos é a sequência $(1^2, 2^2, 3^2, ...)$. Portanto temos $a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$ e, mais geralmente, $a_k = k^2$ para $k \geqslant 1$ inteiro.*

Observação 1.1 *Em alguns casos, para simplificar a fórmula posicional que define os valores dos termos da sequência, é interessante pensar nas sequências definidas por fórmulas posicionais começando pelo índice $k = 0$. Por exemplo, a sequência das potências inteiras não negativas de 2, $(1, 2, 4, 8, \dots)$, pode ser tanto representada pela sequência de termo geral $a_k = 2^{k-1}$ com $k \geqslant 1$ quanto pela sequência de termo geral $b_k = 2^k$ com $k \geqslant 0$. Note que a última fórmula é ligeiramente mais simples que a anterior.*

Outro procedimento utilizado para definir uma sequência é o método recursivo que consiste em definir uma sequência em que cada termo, a partir de um certo índice k_0, é obtido através dos termos anteriores a ele. Este método faz parte do estudo das recorrências que será abordado com detalhes no capítulo 2. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.2 *Considere a sequência (a_k) com $k \geqslant 1$ definida por $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ e*

$$a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}, \quad \forall k \geqslant 3. \tag{1.1}$$

Fazendo $k = 3$ na relação acima, obtemos

$$a_3 = 2a_2 - a_1 = 2.5 - 2 = 8;$$

e fazendo $k = 4$, obtemos

$$a_4 = 2a_3 - a_2 = 2.8 - 5 = 11,$$

e assim sucessivamente. A relação (1.1) é uma relação recursiva satisfeita pela sequência (a_k) com $k \geqslant 1$. Note que cada termo é calculado em função dos dois termos imediatamente anteriores a ele. Assim, o conhecimento dos dois primeiros termos $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ permite calcular todos os demais termos da sequência.

Uma pergunta interessante é a seguinte: é possível obter uma fórmula posicional que defina a sequência acima? A resposta é positiva e será dada no próximo capítulo. Vale destacar também que o método recursivo é muito utilizado nas resoluções de problemas utilizando as iterações.

Agora, vamos passar ao estudo de dois tipos especiais de sequências que são vistas no ensino médio brasileiro, as chamadas progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG).

1.3 Progressões Aritméticas

Continuaremos o estudo de sequências elementares definindo e discutindo as progressões aritméticas.

Definição 1.1 *Uma sequência (a_k) com $k \geqslant 1$ de números reais é uma progressão aritmética PA se existir um número real r tal que a equação recursiva*

$$a_{k+1} = a_k + r \tag{1.2}$$

seja satisfeita para todo inteiro $k \geqslant 1$.

O número real r chama-se razão da PA, ela é a diferença comum entre dois termos consecutivos, além disso para que uma PA seja completamente determinada é preciso conhecer, além de sua razão r, também seu termo inicial a_1.

É comum ver no dia-dia situações e problemas com grandezas que sofrem aumentos iguais em intervalos de tempos iguais. Vejamos dois exemplos que representam tais situações.

Exemplo 1.3 *Uma determinada indústria começou em janeiro de* 2015 *sua produção mensal de* 10000 *toneladas e forneceu comódites agrículas ao governo brasileiro. Com a alta demanda, ela aumentou em* 10000 *toneladas por mês sua produção durante todo ano de* 2015*. Encontremos uma fórmula recursiva que determine uma PA tendo como termo inicial* a_1 *e razão* r.

Solução: Analisando as informações acima, temos que se em janeiro de 2015 a produção de comódites desta indústria foi de 10000 toneladas, logo em seguida, obedecendo a regra estabelecida, em fevereiro essa produção foi de 20000 toneladas, em março seguindo a mesma ordem, foi de 30000 toneladas.

Portanto a sequência (a_k) com $k \geqslant 1$, onde $a_1 = 10000$ cuja a fórmula recursiva é dada por $a_{k+1} = a_k + 10000$ para $k \geqslant 1$ é uma PA de termo inicial $a_1 = 10000$ e razão $r = 10000$. ◇

Exemplo 1.4 *Carlos estabeleceu uma meta para o ano de* 2016 *e como havia em* 2015 *economizado* 1000 *reais, precisava continuar poupando, pois a crise econômica no Brasil estava lhe ensinando a poupar. À partir do acumulado em* 2015 *as economias de Carlos que em tese crescerá todo mês* 200 *reais, mostrará uma fórmula recursiva que determinará uma PA tendo como termo inicial* a_1 *e a razão* r.

Solução: Vemos que se em 2015 Carlos economizou 1000 reais, em janeiro de 2016 ficará com 1200, em fevereiro, conforme a mesma ordem, terá economizado 1400 reais e assim por diante. Logo temos a sequência (a_k) com $k \geqslant 1$, onde $a_1 = 1000$ e a fórmula recursiva é dada por $a_{k+1} = a_k + 200$ para $k \geqslant 1$. Esta fórmula determina uma PA cujo termo inicial é $a_1 = 1000$ e razão $r = 200$. ◇

Note que se nos dois exemplos últimos exemplos tivéssemos apenas $a_{k+1} = a_k + 10000$ para $k \geqslant 1$ e $a_{k+1} = a_k + 200$ para $k \geqslant 1$, respectivamente, essas equações não caracterizariam *progressões aritméticas*, pois não seria possível identificar o valor do primeiro termo em cada uma delas, isto é, conhecer o termo inicial a_1.

A proposição a seguir trata de outra caracterização recursiva muito útil para *PA's*.

Proposição 1.1 *Uma sequência* (a_k) *com* $k \geqslant 1$ *de números reais é uma PA, se e só se,*

$$a_{k+2} + a_k = 2a_{k+1}, \forall k \geqslant 1. \tag{1.3}$$

Demonstração: Por definição, a sequência é uma PA, se e só se, $a_2-a_1 = a_3-a_2 =$ ..., isto é, se e só se, para todo $k \geqslant 1$ inteiro, tivermos $a_{k+2} - a_{k+1} = a_{k+1} - a_k$, que é uma maneira equivalente de escrevermos (1.3). ■

Alguns resultados que veremos a seguir tratam de propriedades de uma PA, eles enunciam principalmente como obter uma fórmula posicional para os termos desta PA.

Proposição 1.2 *Se (a_k) com $k \geqslant 1$ é uma PA de razão r, então*

(a) $a_k = a_1 + (k-1)r$, *para todo* $k \geqslant 1$.

(b) $a_1 + a_2 + ... + a_k = \frac{k(a_1+a_k)}{2}$, *para todo* $k \geqslant 1$

Demonstração:
(a) O diagrama

$$a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} a_{k-1} \xrightarrow{+r} a_k$$

mostra que para chegar a a_k a partir de a_1, são necessários $k-1$ passos, onde cada avanço equivale a somar r a um termo. Portanto, para obter a_k devemos somar, ao todo, $(k-1)r$ a a_1, de forma que $a_k = a_1 + (k-1)r$.
(b) A partir do diagrama

$$a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} \cdots \xleftarrow{-r} a_{k-2} \xleftarrow{-r} a_{k-1} \xleftarrow{-r} a_k$$

temos daí que

$$\begin{aligned}
a_1 + a_k &= (a_2 - r) + (a_{k-1} + r) = a_2 + a_{k-1}, \\
a_2 + a_{k-1} &= (a_3 - r) + (a_{k-2} + r) = a_3 + a_{k-2}, \\
a_3 + a_{k-2} &= (a_4 - r) + (a_{k-3} + r) = a_4 + a_{k-3}, \\
\cdots & \qquad\quad \cdots \qquad\qquad\quad \cdots .
\end{aligned}$$

Portanto, sendo $S = a_1 + a_2 + ... + a_k$, temos

$$\begin{aligned}
2S = &\ 2(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{k-2} + a_{k-1} + a_k) \\
= &\ (a_1 + a_k) + (a_2 + a_{k-1}) + (a_3 + a_{k-2}) + \ldots + (a_k + a_1) \\
= &\ \underbrace{(a_1 + a_k) + (a_1 + a_k) + (a_1 + a_k) + \ldots + (a_1 + a_k)}_{k \text{ parcelas}} \\
= &\ k(a_1 + a_k),
\end{aligned}$$

e concluímos que

$$S = \frac{k(a_1 + a_k)}{2},$$

donde temos a soma dos n primeiros termos em uma progressão aritmética. ■

As fórmulas dos itens *(a)* e *(b)* da proposição 1.2 são conhecidas como **fórmula do termo geral** e a **fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma** *PA*, respectivamente.

Exemplo 1.5 *Calcular a soma dos k primeiros inteiros positivos ímpares.*

Solução: Observe que a sequência dos inteiros positivos ímpares é $1, 3, 5, 7, ...,$ é uma *PA* de razão 2. Logo pela proposição 1.2*(a)*, o k-ésimo inteiro positivo é

$$a_k = 1 + (k-1).2 = 2k - 1.$$

Já a soma dos k primeiros inteiros positivos ímpares é obtida através da proposição 1.2*(b)*, ou seja

$$S_k = \frac{k[1 + (2k-1)]}{2} = k^2.$$

◇

Exemplo 1.6 *Considere a sequência (a_k) com $k \geqslant 1$ dada por $a_1 = 1$ e seja*

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + 2a_k}$$

para todo $k \geqslant 1$ inteiro. Calcular a_k em função de k.

Solução: Como todos os termos da sequência são positivos, podemos definir a sequência (b_k) com $k \geqslant 1$, fazendo $b_k = \frac{1}{a_k}$. Assim verificamos que

$$b_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1 + 2a_k}{a_k} = \frac{1}{a_k} + 2 = b_k + 2,$$

logo, (b_k) com $k \geqslant 1$ é uma *PA* com termo inicial $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$ e razão 2.

No entanto esta *PA* é similar a *PA* do exemplo anterior em que os termos são inteiros positivos ímpares, onde vimos que $b_k = 2k - 1$ para todo $k \geqslant 1$.

Daí temos que,

$$a_k = \frac{1}{b_k} = \frac{1}{2k-1}.$$

◇

1.4 Progressões Geométricas

Veremos nesta seção outra classe bastante útil de sequências formada pelas *progressões geométricas.*

Definição 1.2 *Uma sequência* (a_k) *com* $k \geqslant 1$ *de números reais é uma progressão geométrica (PG) se existir um número real* q *tal que a fórmula recursiva*

$$a_{k+1} = q.a_k \tag{1.4}$$

seja satisfeita para todo inteiro $k \geqslant 1$.

Semelhante às *PA's*, o número real q que aparece na definição de PG é a razão da mesma. Observemos que:

Se $q = 0$, então $a_k = 0$ para todo $k \geq 1$. Se por outro lado $q = 1$, então $a_{k+1} = a_k$ para todo $k \geqslant 1$.

Assim, uma PG (a_k) com $k \geqslant 1$ só será completamente determinada se dela conhecermos o primeiro termo a_1 e a razão q.

Para nossa compreensão sobre PG veremos adiante algumas proposições e suas demonstrações.

Proposição 1.3 *Sejam* q *e* a *reais positivos e* n *natural. Temos que*

(a) Se $0 < q < 1$, *então a sequência* (a_n) *de termo geral* $a_n = aq^n$ *é decrescente.*

(b) Se q>1, então a mesma sequência (a_n) *é crescente.*

Demonstração:

(a) Como q e a são positivos, multiplicando por aq ambos os membros sendo $q < 1$, obtemos

$$aq^2 < aq,$$

multiplicando novamente por q, segue

$$aq^3 < aq^2,$$

e daí

$$aq^3 < aq^2 < aq.$$

Continuando, chegamos ao resultado almejado, ou seja;

$$\cdots < aq^4 < aq^3 < aq^2 < aq,$$

logo, a sequência (a_n) de termo geral $a_n = aq^n$ é decrescente.

Em seguida temos que *(b)*, identicamente ao item *(a)*, como a e q são positivos, multiplicamos por aq ambos os membros, $q > 1$, obtemos

$$aq^2 > aq,$$

multiplicando novamente por q, segue

$$aq^3 > aq^2,$$

e daí

$$aq^3 > aq^2 > aq.$$

Continuando, chegamos ao resultado desejado, ou seja;

$$\cdots > aq^4 > aq^3 > aq^2 > aq,$$

logo, a sequência (a_n) de termo geral $a_n = aq^n$ é crescente. ■

Em seguida, veremos na proposição outra caracterização recursiva útil para a maioria das *PG's*.

Proposição 1.4 *Uma sequência (a_k) com $k \geqslant 1$ de números reais não nulos é uma PG se e só se*

$$a_{k+2}a_k = a_{k+1}^2, \forall k \geqslant 1. \tag{1.5}$$

Demonstração: A sequência é uma $P.G$ de razão q, por definição, se e só se

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = q,$$

ou seja, se e só se, para todo $k \geqslant 1$ inteiro, tivermos

$$\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

que é uma maneira parecida de escrever (1.5). ■

Agora, seguindo a mesma lógica do estudo das *PA's*, o resultado a seguir trará as fórmulas para o termo geral e para a soma de k primeiros termos de uma *PG*.

Proposição 1.5 *Se (a_k) com $k \geqslant 1$ é uma PG de razão q, então:*

(a) $a_k = a_1.q^{k-1}$, *para todo* $k \geqslant 1$.

(b) Se $q \neq 1$, *então* $a_1 + a_2 + ... + a_k = a_1\frac{(q^k-1)}{q-1}$, *para todo* $k \geqslant 1$.

Demonstração:
(a) No diagrama

$$a_1 \xrightarrow{\cdot q} a_2 \xrightarrow{\cdot q} a_3 \xrightarrow{\cdot q} \cdots \xrightarrow{\cdot q} a_{k-1} \xrightarrow{\cdot q} a_k$$

para chegar a a_k à partir de a_1, é preciso $k-1$ passos, onde cada passo se resume a multiplicar um termo por q. Portanto, temos de multiplicar a_1 por q um total de $k-1$ vezes, e daí

$$a_k = a_1.q^{k-1}.$$

(b) Denotamos por S_k a soma desejada, temos que, $S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$, segue então de (1.4) que

$$\begin{aligned} qS_k &= q(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{k-2} + a_{k-1} + a_k) \\ &= qa_1 + qa_2 + qa_3 + \ldots + qa_{k-1} + qa_{k-2} + qa_k \\ &= a_2 + a_3 + ... + a_{k-1} + a_k + a_{k+1}. \end{aligned}$$

logo, subtraindo a expressão desenvolvida acima por (S_k) temos,

$$\begin{aligned} (q-1)S_k &= qS_k - S_k \\ &= (a_2 + a_3 + ... + a_k + a_{k+1}) - (a_1 + a_2 + ... + a_k) \\ &= (a_2 + a_3 + ... + a_k) + a_{k+1} - a_1 - (a_2 + ... + a_k) \\ &= (a_2 + a_3 + ... + a_k) - (a_2 + ... + a_k) + a_{k+1} - a_1 \\ &= a_{k+1} - a_1. \end{aligned}$$

Agora dividimos ambos os membros da igualdade $(q-1)S_k = a_{k+1} - a_1$ por $q-1$. Daí temos

$$S_k = \frac{a_{k+1} - a_1}{q-1} = \frac{a_1q^k - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^k - 1)}{q-1},$$

como queremos demonstrar. ∎

Exemplo 1.7 *Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa* 1 *grão de trigo pela primeira casa,* 2 *grãos pela segunda,* 4 *pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada casa nova. Calculemos então a recompensa do inventor do xadrez:*

Solução: Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedidos pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica $1, 2, 4, ...$ O valor dessa soma é

$$S_k = a_1\frac{1-q^k}{1-q} = 1\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

◇

Calculando, obtemos 18446744073709551615.

Exemplo 1.8 *Considere a soma da PG infinita* $0,3 + 0,03 + 0,003 + ...$ *em que* $|q| < 1$.

Solução: Com base neste exemplo vamos encontrar uma fórmula para a soma de uma PG infinita. Observe que $a_1 = 0,3$ e $q = 0,1$, logo substituindo na fórmula da soma dos termos de uma PG finita, temos

$$S_k = \frac{a_k.q - a_1}{q-1} = \frac{a_k.0,1 - 0,3}{0,1-1} = \frac{3-a_k}{9}.$$

Daí segue, quando $k = 2$, então

$$S_2 = \frac{3-a_2}{9} = \frac{3-0,03}{9} = 0,33.$$

Quando $k = 3$, então

$$S_3 = \frac{3-a_3}{9} = \frac{3-0,003}{9} = 0,333.$$

Quando $k = 4$, então

$$S_4 = \frac{3-a_4}{9} = \frac{3-0,0003}{9} = 0,3333.$$

Quando $k = 5$, então

$$S_5 = \frac{3-a_5}{9} = \frac{3-0,00003}{9} = 0,33333.$$

Podemos ver que quanto maior for a quantidade de termos da PG, mais próximo de zero se torna a_k, isto é $3 - a_k$ fica mais próximo de 3, concluímoos, portanto que a soma dos infinitos termos dessa PG é a dízima periódica $0,33333... = \frac{1}{3}$. De modo geral, a soma dos termos de uma PG infinita é dada por

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \frac{a_1}{1-q}.$$

isto é,

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

◇

Ainda nos referindo a PG como soma infinita, temos no exemplo abaixo a seguinte situação-problema:

Exemplo 1.9 *Suponha que um atleta em um treino de Corrida deva correr 1 km. Inicialmente ele corre metade dessa distância, isto é,* $\frac{1}{2}$ *km; em seguida ele corre metade da distância que falta, isto é,* $\frac{1}{4}$ *km; depois metade da distância restante, isto é,* $\frac{1}{8}$ *km, e assim por diante. Depois de* n *etapas, quantos metros terá corrido esse atleta?*

Solução: Resolvendo esse problema, vemos que o atleta terá percorrido,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^k}\quad km.$$

Se k for grande, essa soma será aproximadamente igual a 1 *km* e daí calculamos a soma da progressão geométrica

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+....$$

Temos então que

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

O que converge para o valor já esperado de 1 *km*. ◇

Exemplo 1.10 *Seja* (a_k) *com* $k\geqslant 1$ *uma PA de números naturais de razão* $r>0$*, e* (b_k) *com* $k\geqslant 1$ *uma PG de números reais não nulos de razão* q*. Considere a sequência* (c_k) *com* $k\geqslant 1$ *tal que* $c_k=b_{a_k}$ *para todo* $k\geqslant 1$ *inteiro. Provar que* (c_k) *com* $k\geqslant 1$ *é uma P.G de razão* q^r*.*

Solução: Para provar que a razão entre dois termos consecutivos da sequência (c_k) com $k\geqslant 1$ é sempre igual a q^r, basta mostrar que

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}=\frac{b_{a_{k+1}}}{b_{a_k}}=\frac{b_1q^{a_{k+1}-1}}{b_1q^{a_k-1}}=q^{a_{k+1}-a_k}=q^r.$$

◇

Exemplo 1.11 *Calcular o valor da soma*

$$2.1+7.3+12.3^2+17.3^3+...+497.3^{99}+502.3^{100},$$

onde, da esquerda para a direita, a k^a *parcela é igual ao produto do* k^o *termo da PA* $(2,7,12,...,502)$ *pelo* k^o *termo da PG* $(1,3,3^2,...,3^{100})$.

Solução: Seguindo o mesmo raciocínio da demonstração, denotamos por S_k a soma pedida e como 3 é a razão da PG, calculamos daí o valor de $3S_k$. Portanto,

$$3S_k = 2.3 + 7.3^2 + 12.3^3 + 17.3^4 + ... + 497.3^{100} + 502.3^{101}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2S_k = &\ 3S_k - S_k \\ = &\ (502.3^{101} - 2) - 5(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{100}) \\ = &\ (502.3^{101} - 2) - \frac{5}{2}(3^{101} - 3), \end{aligned}$$

utilizando a fórmula da proposição 1.5 *(b)* e calculando, temos

$$\frac{1}{4}(999.3^{101} + 11).$$

◇

Capítulo 2

Recorrências

2.1 Relações de recorrências, equações de recorrências

Relação de recorrência é uma técnica matemática que permite definir sequências, conjuntos, operações ou até mesmo algoritmos partindo de problemas particulares para problemas genéricos, ou seja, por intermédio de uma regra pode-se calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

As **relações de recorrência** são compostas por duas partes importantes: a(s) condição(ões) inicial(is) que deve(m) ser conhecida(s) e a **equação de recorrência** que é a regra que permitirá calcular os próximos termos em função dos antecessores.

A **equação de recorrência** não pode definir sequências sem as condições iniciais, isto é, não é uma relação de recorrência. Muitas vezes não é possível resolver problemas de contagem diretamente combinando os princípios aditivos e multiplicativos.

Para resolver esses problemas utilizamos outros recursos: as fórmulas recursivas ou recorrências. A principal ideia por trás das recorrências é expressar uma quantidade X_n em função de quantidades anteriores $X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_1$.

Em certas sequências numéricas é possível determinar um termo geral X_n em função de um ou mais de um termo anterior, esse termos geral é expresso na forma de **equações de recorrências**.

Uma sequência é definida recursivamente se ela for dada por uma regra (recorrência) que também permita calcular um termo qualquer por meio de um ou mais termos anteriores.

São também equações de recorrências as PAs, PGs, fatorial, potências com expoente maior do que 1, como, por exemplo:

1. progressões aritméticas: $a_n = a_{n-1} + r$;

2. progressões geométricas: $a_n = a_{n-1}q$;
3. fatorial: $a_n = na_{n-1}$;
4. potências com expoente natural: $a_n = aa_{n-1}$

Para definir uma sequência recursivamente, não basta fornecer a recorrência, mas é preciso dizer qual é o seu primeiro termo. Isto é óbvio nos casos de *PAs*, *PGs*.

No caso (3), acima citado, obtemos o fatorial se tomarmos $a_1 = 1$. Se tomarmos $a_1 = 2$, por exemplo, obtemos a sequência

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 12, a_4 = 48, ...$$

que não representa o fatorial.

Temos também que (4) somente define as potências de a se tomarmos $a_1 = a$.

2.2 Classificação de Sequências Recorrentes

Podemos classificar os diversos tipos de sequências recorrentes, quanto:

(i) Ordem: A ordem nos dá o número de termos anteriores de quem o termo geral depende. Uma recorrência da primeira ordem expressa, por exemplo, X_{n+1} em função de X_n e uma recorrência é dita linear, de segunda ordem e com coeficientes constantes, em alusão ao fato de que cada termo, a partir do terceiro, é uma combinação linear com coeficientes constantes (i.e., uma soma de múltiplos constantes) de dois termos anteriores a ele.

(ii) Termo Independente: Uma equação que nos dá um termo em função de termos anteriores e outras constantes aditivas , ou seja, termos independentes, são ditas recorrências não homogêneas. Equações homogêneas são as recorrências com termos gerais sem termos independentes.

(iii) Linearidade: Uma recorrência é dita linear quando o expoente dos termos anteriores ao termo geral são todos iguais a 1, e caso contrário é dita não linear.

Exemplo 2.1 *A sequência* (X_n) *dos números naturais ímpares* $1, 3, 5, 7, ...$ *pode ser definida pela relação de recorrência* $X_{n+1} = X_n + 2$, *com*, $n \geqslant 1$ *e* $X_1 = 1$.

Exemplo 2.2 *Qualquer progressão aritmética* (X_n) *de razão* r *e primeiro termo termo igual a* a *é expressa pela relação de recorrência* $X_{n+1} = X_n + r$, *com* $n \geqslant 1$ *e* $X_1 = a$.

Exemplo 2.3 *Qualquer progressão geométrica* (X_n) *de razão* q *e primeiro termo igual a* a *é expressa pela relação de recorrência* $X_{n+1} = q.X_n$*, com* $n \geqslant 1$ *e* $X_1 = a$.

Nos exemplos acima, todos mostram exemplos de relações de recorrências de 1ª ordem, os exemplos 2.1 e 2.2 possuem termos independentes e o exemplo 2.3 indica uma recorrência homogênea, sendo todos exemplos de recorrências lineares.

É fácil ver que uma recorrência, por si só, não define a sequência. No exemplo 2.1, $X_{n+1}= X_n + 2$, esta recorrência é válida não apenas pela sequência dos números ímpares, mas por todas progressões aritméticas de razão 2 e para isso faz-se necessário conhecer o(s) primeiro(s) termo(s) para que a sequência seja determinada.

A **Sequência de Fibonacci**, por exemplo representa uma das mais famosas fórmulas da matemática discreta. Este tema que estudaremos melhor em forma de aplicação no quarto e último capítulo, será apresentado neste trabalho como **Cálculo do Tamanho de Uma População de Coelhos.**

Exemplo 2.4 *A sequência de Fibonacci, cujos termos são* $1, 1, 2, 3, 5, ...$ *e na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por* $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ $(n \geqslant 0)$*, com* $F_1=F_2=1$.

Ratificamos que os três primeiros exemplos de recorrências lineares são de primeira ordem, isto é, cada termo é escrito em função do antecessor imediato e no último exemplo, na sequência de Fibonacci, temos uma recorrência linear de segunda ordem, ou seja, cada termo é escrito em função dos dois antecessores imediatos.

Formular relações de recorrências é imprescindível para resolução de problemas combinatórios. Muitos problemas considerados inicialmente difíceis, se tornarão facilmente resolvidos por esta técnica. Em se tratando disso, mostraremos um problema particular como exemplo.

Exemplo 2.5 *Quantas são as sequências de* 10 *termos,* $(a_1, a_2, ..., a_{10})$ *tais que,* $a_j \in \{0, 1, 2\}$*, para todo* $1 \leqslant j \leqslant 10$ *que não possuam dois termos consecutivos iguais a* 0*?*

Solução: Chamando X_n o número de tais sequências com n termos, o valor de X_{n+2} será a soma das seguintes quantidades:

a) O número de sequência de $n + 2$ termos que começam por 1 e não possuem dois zeros consecutivos. Isso é exatamente igual a X_{n+1}, pois se o primeiro termo é 1, para formar a sequência basta determinar os termos a partir do primeiro, o que pode ser feito de X_{n+1} modos.

b) O número de sequência de $n + 2$ termos que começam por 2 e não possuem dois zeros consecutivos. Semelhantemente, isso é igual a X_{n+1}.

c) O número de sequência de $n + 2$ termos que começam por 0 e não possuem dois zeros consecutivos. Se o primeiro termo é zero, temos 2 modos de escolher o segundo termo (1 ou 2) e, escolhido o segundo termo, temos X_n modos de esolher os demais. Há, pois, $2X_n$ sequências que começam com 0.

Logo, $X_{n+2} = 2X_{n+1} + 2X_n$. Percebe-se logo que $X_1 = 3$ e que $X_2 = 8$. Então, tem-se que $X_3 = 2X_2 + 2X_1 = 22$, $X_4 = 60, ..., X_{10} = 24960$. $\diamond$

Exemplo 2.6 *Seja D_n o número de permutações caóticas de $1, 2, ..., n$, ou seja, a quantidade de permutações simples de $1, 2, ..., n$, nas quais nenhum elemento ocupa o seu lugar primitivo. Mostre que D_{n+2}=$(n + 1)(D_{n+1} + D_n)$, se $(n \geqslant 1)$.*

Solução: Seja D_{n+2}, o número de permutações simples de $1, 2, ..., (n + 2)$, onde nenhum elemento ocupa o seu lugar primitivo. As permutações podem ser divididas em dois grupos: as permutações que o 1 ocupa o lugar do número que ocupa o primeiro lugar e outras com as quais isso não ocorre.

Para formar uma permutação do primeiro grupo, se escolhe o número que trocará de lugar com o 1, o que pode ser feito de $n + 1$ modos e em seguida devemos arrumar os outros n elementos nos restantes n lugares, sem que nenhum desses elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que é possível ser feito de D_n modos. Logo existem,$(n + 1)(D_n)$ permutações no primeiro grupo.

Agora para formar no segundo grupo uma permutação, deve escolher o lugar a ser ocupado pelo número 1 (esse lugar será chamado de K), o que pode ser feito de $n+1$ modos e o restante $n+1$ dos outros $n+1$ lugares, sem que o elemento K ocupe o primeiro lugar e sem que nenhum dos outros elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_{n+1} modos. Existem, então, $(n+1)(D_{n+1})$ permutações no segundo grupo. Portanto, como se demonstrou, D_{n+2}=$(n + 1)(D_{n+1} + D_n)$. $\diamond$

2.3 Solução de uma Recorrência

Resolver uma relação de recorrência é encontrar uma fórmula posicional explícita para o termo geral da sequência. Para entender melhor o conceito de solução, vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 2.7 *A sequência (X_n) dos números naturais ímpares $1, 3, 5, 7, ...$ pode ser definida por $X_{n+1} = X_n + 2$ com $n \geqslant 1$ e $X_1 = 1$. Assim, $X_n = 2n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, é a solução dessa recorrência.*

Exemplo 2.8 *Qualquer progressão aritmética (X_n) de razão r e primeiro termo igual a a pode ser definida por $X_{n+1} = X_n + r$ com $n \geqslant 1$, e $X_1 = a$. É fácil ver que $X_n = a + (n - 1)r$ é uma solução dessa recorrência.*

Exemplo 2.9 *Qualquer progressão geométrica (X_n) de razão q e primeiro termo igual a a pode ser definida por $X_{n+1} = q.X_n$, com $n \geqslant 1$ e $X_1 = a$. É fácil ver também que $X_n = aq^{n-1}$.*

2.4 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Uma recorrência de primeira ordem expressa X_{n+1} em função de X_n. Ela é dita linear se (e somente se) essa função for do primeiro grau, ou seja, se ela é da forma

$$X_{n+1} = g(n)X_n + h(n)$$

onde g e h são funções reais definidas sobre $\mathbb{N}$. Dizemos que a recorrência é homogênea, se $h = 0$. Caso contrário ela será não-homogênea. Vejamos alguns exemplos de Recorrências Lineares e não-Lineares.

Exemplo 2.10 *As recorrências$X_{n+1} = 2X_n + n^2$ e $X_{n+1} = nX_n + n + 1$ são lineares e a recorrência $X_{n+1} = X_n^2$ não é linear.*

2.4.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem Homogêneas

No exemplo 2.10, a última recorrência não-linear é uma recorrência homogênea, por não possuir termo independente de X_n. Adiante temos duas resoluções de recorrências lineares homogêneas de primeira ordem.

Exemplo 2.11 *Resolver a recorrência $X_{n+1} = nX_n$, $X_1 = 1$.*

Solução: Tem-se que,

$$\begin{array}{rcl} X_2 & = & 1X_1 \\ X_3 & = & 2X_2 \\ X_4 & = & 3X_3 \\ ... & ... & ... \\ X_n & = & (n-1)X_{n-1}. \end{array}$$

Logo ao multiplicar, obtemos $X_n = (n-1)!X_1$. Como X_1=1, então $X_n = (n-1)!$. ◇

Exemplo 2.12 *Resolver a recorrência X_{n+1}=$2X_n$.*

Solução: Temos que,

$$\begin{array}{rcl} X_2 & = & 2X_1 \\ X_3 & = & 2X_2 \\ X_4 & = & 2X_3 \\ ... & ... & ... \\ X_n & = & 2X_{n-1}. \end{array}$$

Logo ao multiplicar, obtemos $X_n = 2^{n-1}X_1$. Como X_1 não foi expresso, existe uma infinidade de soluções para a recorrência $X_n = C.2^{n-1}$, onde C é uma constante arbitrária. ◇

2.4.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem Não-Homogêneas

São trivialmente resolvidas recorrências lineares não-homogêneas do tipo

$$X_{n+1} = X_n + f(n).$$

Claramente ao resolver, se verifica que

$$\begin{array}{rcl} X_2 & = & X_1 + f(1) \\ X_3 & = & X_2 + f(2) \\ X_4 & = & X_3 + f(3) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_n & = & X_{n-1} + f(n-1). \end{array}$$

Então, somando obtemos a solução da forma

$$X_n = X_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \tag{2.1}$$

Exemplo 2.13 *Resolver a recorrência* X_{n+1}=$X_n + 2^n$, X_1=*1.*

Solução: Temos que,

$$\begin{array}{rcl} X_2 & = & X_1 + 2 \\ X_3 & = & X_2 + 2^2 \\ X_4 & = & X_3 + 2^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_n & = & X_{n-1} + 2^{n-1}. \end{array}$$

Somando, resulta

$$\begin{array}{rcl} X_n & = & X_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}) \\ & = & 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} \\ & = & 1\dfrac{2^n - 1}{2 - 1} \\ & = & 2^n - 1. \end{array}$$

◇

Exemplo 2.14 *Resolver* $X_{n+1} = X_n + n$, X_1=*0.*

Solução: Temos que,

$$\begin{array}{rcl} X_2 & = & X_1 + 1 \\ X_3 & = & X_2 + 2 \\ X_4 & = & X_3 + 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_n & = & X_{n-1} + (n-1). \end{array}$$

Somando, resulta

$$\begin{array}{rcl} X_n & = & X_1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) \\ & = & 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) \\ & = & \dfrac{n(n-1)}{2}. \end{array}$$

◇

Qualquer recorrência linear não-homogênea de primeira ordem pode ser transformada em uma recorrência da forma $X_{n+1}{=}X_n + f(n)$, de acordo com o teorema expresso a seguir.

Teorema 2.1 *Se (a_n) é uma solução não nula da recorrência $X_{n+1}{=}G(n)X_n$, então a substituição $X_n = a_nY_n$ transforma a recorrência $X_{n+1} = G(n)X_n + H(n)$ em*

$$Y_{n+1} = Y(n) + H(n)[G(n).a_n]^{-1}. \tag{2.2}$$

Demonstração: Substituindo $X_n = a_nY_n$ em $X_{n+1}{=}G(n)X_n + H(n)$, obtemos $a_{n+1}Y_{n+1} = G(n)a_nY_n + H(n)$. Mas, $a_{n+1} = G(n)a_n$, pois a_n é solução de $X_{n+1} = G(n)X_n$.

Logo, a equação se expressa da forma $G(n)a_nY_{n+1} = G(n)a_nY_n + H(n)$, concluímos daí que, $Y_{n+1} = Y(n) + H(n)[G(n)a_n]^{-1}$. ■

Exemplo 2.15 *Resolver a recorrência $X_{n+1} = 2X_n + 1$, $X_1 = 2$.*

Solução: $X_{n+1} = 2X_n$ tem uma solução não nula que é $X_n = 2^{n-1}$, como já resolvemos no exemplo (2.12). Substituindo $X_n = 2^{n-1}Y_n$, obtemos $2^nY_{n+1} = 2^nY_n + 1$, isto é, $Y_{n+1} = Y_n + 2^{-n}$. Então,

$$\begin{array}{rcl} Y_2 & = & Y_1 + 2^{-1} \\ Y_3 & = & Y_2 + 2^{-2} \\ Y_4 & = & Y_3 + 2^{-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_n & = & Y_{n-1} + 2^{-(n-1)}. \end{array}$$

Somando, resulta

$$\begin{aligned} Y_n &= Y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + ... + 2^{-(n-1)} \\ &= Y_1 + 2^{-1}\frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1} \\ &= Y_1 - 2^{1-n} + 1. \end{aligned}$$

Como $X_n{=}2^{n-1}Y_n$ e $X_1{=}2$, temos que $Y_1{=}2$ e $Y_n{=}3 - 2^{1-n}$. Então,

$$X_n = 3.2^{n-1} - 1$$

é solução da recorrência. ◇

Exemplo 2.16 *Resolver a recorrência* $X_{n+1} = 3X_n + 3^n$, $X_1 = 2$.

Solução: $X_n = 3^{n-1}$ é um exemplo de solução não nula de $X_{n+1} = 3X_n$, qualquer progressão geométrica de razão 3, não nula, poderia ser outra solução.

Fazendo a substituição de $X_n = 3^{n-1}Y_n$, obtemos $3^nY_{n+1} = 3^nY_n + 3^n$, isto é, $Y_{n+1} = Y_n + 1$.

Então, Y_n é uma progressão aritmética de razão 1. Logo,

$$Y_n = Y_1 + (n-1)1.$$

Como $X_n = 3^{n-1}Y_n$ *e* $X_1 = 2$, temos $Y_1{=}2$ e $Y_n{=}n + 1$. Portanto,

$$X_n = (n+1)3^{n-1}.$$

◇

2.5 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Uma recorrência linear de segunda ordem é uma recorrência do tipo

$$X_{n+2} + g(n)X_{n+1} + f(n)X_n + k(n) = 0,$$

onde g, f e k são funções cujos domínios são o conjunto dos números naturais e $f(n)$ nunca se anula. Quando $k(n) = 0$, a recorrência é dita homogênea, caso contrário ela será não homogênea.

Para que uma recorrência do tipo acima nos defina uma sequência como solução, é preciso estipular os valores dos seus dois termos iniciais. Nesta seção, estudaremos apenas o caso em que as sequências $g(n)$ e $f(n)$ são constantes. Isto é, vamos estudar as equações da forma

$$X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = k(n), \quad \textit{com} \quad q \neq 0. \tag{2.3}$$

2.5.1 Recorrências Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

Inicialmente trataremos o caso homogêneo, ou seja, quando $k(n) = 0$, isto é quando a equação de recorrência (2.3) é do tipo

$$X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0, \quad com \quad q \neq 0. \tag{2.4}$$

Para isso, suponha que $X_n = r_0^n$, com $r_0 \neq 0$, seja solução da equação de recorrência (2.4). Então temos

$$r_0^{n+2} + pr_0^{n+1} + qr_0^n = 0.$$

Pondo r_0^n em evidência, obtemos

$$r_0^n(r_0^2 + pr_0 + q) = 0.$$

Como $r_0^n \neq 0$, devemos ter

$$r_0^2 + pr_0 + q = 0,$$

isto é, r_0 é solução da equação do 2° grau $r^2 + pr + q = 0$. De fato, o argumento acima mostra que a sequência $X_n = r_0^n$ é solução da recorrência (2.4) se, e somente se, r_0 é raiz da equação

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{2.5}$$

Esta última equação será chamada de *equação característica* associada a recorrência (2.4). Observe que, como $q \neq 0$, a equação (2.5) não possui raiz nula.

Exemplo 2.17 *Seja a recorrência $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$, cuja equação característica é $r^2 = r + 1$. As raízes da equação característica são*

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Os dois próximos lemas serão muito úteis para a obtenção dos principais resultados desta seção.

Lema 2.1 *Sejam (Y_n) e (Z_n) soluções da equação de recorrência (2.4) e sejam c, d números reais e arbitrários. Então $(T_n = cY_n + dZ_n)$ também é solução da mesma recorrência.*

Demonstração: Substituindo $T_n = cY_n + dZ_n$ na equação (2.4), temos

$$\begin{aligned} T_{n+2} + pT_{n+1} + qT_n &= cY_{n+2} + dZ_{n+2} + p(cY_{n+1} + dZ_{n+1}) + q(cY_n + dZ_n) \\ &= c(Y_{n+2} + pY_{n+1} + qY_n) + d(Z_{n+2} + pZ_{n+1} + qZ_n). \end{aligned}$$

Como (Y_n) e (Z_n) são soluções da equação (2.4), a última expressão coincide com $c.0 + d.0 = 0$. Logo, (T_n) também é solução da referida recorrência. ■

Lema 2.2 *Se* (Z_n) *é solução da recorrência* $X_{n+2}+pX_{n+1}+qX_n = 0$ *e* $Z_1 = Z_2 = 0$*, então* $Z_n = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: A prova será feita por indução completa. Note primeiramente que a hipótese $Z_1 = Z_2 = 0$ dá nossa base de indução. Suponha, por hipótese de indução, que $Z_n = 0$, para $n \leqslant k$ com $k \geqslant 2$ e k natural. Então, como por hipótese $(Z_n)_n$ é solução da recorrência, temos em particular que

$$Z_{k+1} + pZ_k + qZ_{k-1} = 0.$$

Pela hipotése de indução, $Z_k = Z_{k-1} = 0$ e, portanto, $Z_{k+1} + p.0 + q.0 = 0$, ou seja, $Z_{k+1} = 0$. Isso completa a indução e o resultado segue. ■

Corolário 2.1 *Se* r_1 *e* r_2 *são raízes da equação* $r^2 + pr + q = 0$*, então qualquer sequência da forma* $(a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n)$*, com* C_1 *e* C_2 *constantes é solução da recorrência* $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$.

Demonstração: Pela discussão feita no início desta seção, $(Y_n = r_1^n)$ e $(Z_n = r_2^n)$ são soluções de (2.4). Assim, usando o Lema 2.1, $(a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n)$ é solução da mesma recorrência. ■

Exemplo 2.18 *Seja a equação* $X_{n+2}+3X_{n+1}-4X_n = 0$*. Sua equação característica, é* $r^2 + 3r - 4 = 0$ *e tem raízes* 1 *e* -4*. Conforme o Corolário 2.1, as sequências, tais como* $a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n$*, são soluções da recorrência. De fato, o próximo teorema garante que essas são as únicas soluções da recorrência.*

A equação $r^2 + pr + q = 0$ pode ter duas raízes reais e distintas, duas raízes complexas conjugadas ou duas raízes reais e iguais. Veremos a seguir cada um dos casos.

Equações Características com duas raízes reais e distintas

Teorema 2.2 *Se as raízes de* $r^2 + pr + q = 0$*, são* r_1 *e* r_2*, com* $r_1 \neq r_2$*, então todas as soluções da recorrência* $X_{n+2}+pX_{n+1}+qX_n = 0$ *são da forma* $(a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n)$*,* C_1 *e* C_2 *constantes. Em particular, para cada condição inicial* $X_1 = a_1$*,* $X_2 = a_2$ *há uma única solução para a recorrência.*

Demonstração: Seja (Y_n) uma solução qualquer de $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$. Primeiramente vamos resolver o sistema a seguir, tendo C_1 e C_2 como incógnitas.

$$\begin{cases} C_1 r_1 & + & C_2 r_2 & = & Y_1 \\ C_1 r_1^2 & + & C_2 r_2^2 & = & Y_2 \end{cases},$$

a solução obtida é,

$$C_1 = \frac{r_2^2 Y_1 - r_2 Y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \quad e \quad C_2 = \frac{r_1 Y_2 - r_1^2 Y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \tag{2.6}$$

caso $r_1.r_2 \neq 0$. Note que $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$, pois $q \neq 0$.

Para provar o teorema, devemos mostrar que $Y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, para todo n natural.

Fazendo $Z_n = Y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$, mostremos que $Z_n = 0$ para todo n. Como (r_1^n) e (r_2^n) são soluções da equação de recorrência (2.4), logo pelo lema 2.1 temos que $Y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, para todo n natural também é solução da mesma equação de recorrências.

Temos também que sendo $C_1 r_1 + C_2 r_2 = Y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = Y_2$, então $Z_1 = Z_2 = 0$. Logo, se $Z_{n+2} + pZ_{n+1} + qZ_n = 0$ e $Z_1 = Z_2 = 0$ concluímos com base no lema 2.2 que $Z_n = 0$ para todo n. ■

Agora iremos aplicar num exemplo prático o teorema acima.

Exemplo 2.19 *Encontrar as soluções da recorrência*

$$X_{n+2} + 3X_{n+1} - 4X_n = 0.$$

Solução: A recorrência tem como equação característica,

$$r^2 + 3r - 4 = 0$$

cujas raízes são 1 e -4.

De acordo com o Teorema 2.2 as sequências da forma $(a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n)$ com C_1 e C_2 constantes arbitrárias, são todas as soluções da recorrência

$$X_{n+2} + 3X_{n+1} - 4X_n = 0.$$

◇

Exemplo 2.20 *Determinar a sequência de Fibonacci F_n definida por*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad com \quad F_1 = F_2 = 1.$$

Solução: A equação característica é $r^2 = r + 1$ e as raízes da equação são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Então,

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Determinando C_1 e C_2, mesmo sabendo que $F_1 = F_2 = 1$, se usará $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ para simplificar o cálculo das duas constantes arbitrárias, onde o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \end{cases}$$

tem solução $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Então:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

ou seja,

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

$\diamond$

Equações Características com duas raízes complexas conjugadas

Se as raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$, forem complexas (não reais), digamos r_1 e r_2, então para quaisquer que sejam as constantes complexas C_1 e C_2, a sequência de termo geral $(a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n)$ é solução (complexa) da recorrência (2.4). Escrevendo r_1 e r_2 na forma trigonométrica, temos:

$$r_1 = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta), \qquad r_2 = \rho(\cos\theta - i\text{sen}\,\theta)$$

$$r_1^n = \rho^n(\cos n\theta + i\text{sen}\,n\theta), \qquad r_2^n = \rho^n(\cos n\theta - i\text{sen}\,n\theta).$$

Então,

$$C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = \rho^n[(C_1 + C_2)\cos n\theta - i(C_1 - C_2)\text{sen}\,n\theta].$$

Em particular, tomando-se $C_1 = C_2 = 1/2$, temos que $(\rho^n \cos n\theta)$ é solução (real) da recorrência (2.4). E, analogamente, tomando-se $C_1 = -C_2 = i/2$, temos que $(\rho^n \text{sen}\,n\theta)$ também é solução (real) da recorrência. Mais geralmente, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3 *Se as raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$ forem os números complexos (não reais) $r_1 = \rho(\cos\theta + i sen\,\theta)$ e $r_2 = \overline{r_1}$, então todas as soluções da recorrência (2.4) são da forma $a_n = \rho^n(C_1 \cos n\theta + C_2 sen\,n\theta)$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.*

Demonstração: Sabemos que $(\rho^n \cos n\theta)$ e $(\rho^n \text{sen}\,n\theta)$ são soluções da equação (2.4) e, portanto, para quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2 reais, a sequência de termo geral $(a_n = \rho^n(C_1 \cos n\theta + C_2 \text{sen}\,n\theta))$ também é solução da mesma equação.

Agora, seja (W_n) uma solução arbitrária de (2.4) e considere o sistema nas incógnitas $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} c_1\rho\cos\theta + c_2\,\rho\text{sen}\,\theta = W_1 \\ c_1\rho^2\cos 2\theta + c_2\,\rho^2\text{sen}\,2\theta = W_2 \end{cases} \tag{2.7}$$

Note que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} \rho\cos\theta & \rho\text{sen}\,\theta \\ \rho^2\cos 2\theta & \rho^2\text{sen}\,2\theta \end{pmatrix}$ é igual a $\rho^3\text{sen}\,\theta$ que é diferente de zero, pois $\rho\text{sen}\,\theta$ é a parte imaginária de r_1. Assim o sistema (2.7) tem uma única solução $c_1 = C_1$ e $c_2 = C_2$.

Afirmamos que $W_n = \rho^n(C_1\cos n\theta + C_2\text{sen}\,n\theta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, pelo Lema 2.1, a sequência de termo geral $Z_n = W_n - \rho^n(C_1\cos n\theta + C_2\text{sen}\,n\theta)$ é solução da recorrência (2.4). Além disso, pela escolha de C_1 e C_2, $Z_1 = Z_2 = 0$. Então, pelo lema 2.2, $Z_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e o resultado segue. ■

Aplicaremos a seguir o teorema acima para melhor entendermos esse caso.

Exemplo 2.21 *Resolver a recorrência* $X_{n+2} - X_{n+1} + X_n = 0$.

Solução: A recorrência tem equação característica $r^2 - r + 1 = 0$, e suas raízes são

$$r_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

onde o módulo $\rho = 1$ e o argumento principal $\theta = \frac{\pi}{3}$. Daí concluimos que

$$X_n = \rho^n(C_1\cos n\theta + C_2\text{sen}\,n\theta) = C_1\cos\frac{n\pi}{3} + C_2\text{sen}\,\frac{n\pi}{3}.$$

◇

Equações Características com duas raízes reais iguais

Teorema 2.4 *Se as raízes de* $r^2 + pr + q = 0$ *são iguais, isto é,* $r_1 = r_2 = r$*, então,* $(a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n)$ *é solução da recorrência* $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$*, quaisquer que sejam os valores das constantes* C_1 *e* C_2.

Demonstração: Se $r_1 = r_2 = r$, então $r = \frac{-p}{2}$. Substituindo $(a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n)$ na recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, temos,

$$\begin{aligned} & C_1 r^{n+2} + C_2(n+2)r^{n+2} + p(C_1 r^{n+1} + C_2(n+1)r^{n+1}) + q(C_1 r^n + C_2 n r^n) = \\ & = (C_1 r^{n+2} + pC_1 r^{n+1} + qC_1 r^n) + (C_2(n+2)r^{n+2} + pC_2(n+1)r^{n+1}) + qC_2 n r^n) = \\ & = C_1(r^{n+2} + pr^{n+1} + qr^n) + C_2((n+2)r^{n+2} + p(n+1)r^{n+1} + qnr^n), \end{aligned}$$

portanto, temos

$$C_1(r^{n+2} + pr^{n+1} + qr^n) + C_2(nr^{n+2} + pnr^{n+1} + qnr^n) + 2C_2 r^{n+2} + pC_2 r^{n+1} =$$

$$= C_1r^n(r^2 + pr + q) + C_2nr^n(r^2 + pr + q) + C_2r^n r(2r + p),$$

como $r^2 + pr + q = 0$, $r_1 = r_2 = r$ e $r = \frac{-p}{2}$, então por agrupamento dos termos, obtemos,

$$C_1r^n(r^2 + pr + q) + C_2nr^n(r^2 + pr + q) + C_2r^n r(2r + p)$$
$$= C_1r^n0 + C_2nr^n0 + C_2r^n r0 = 0,$$

como queremos demonstrar. ∎

Teorema 2.5 *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$ são da forma $(C_1r^n + C_2nr^n)$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração: Seja Y_n uma solução qualquer de $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$. Determinar as constantes C_1 e C_2, tais que sejam soluções do sistema de equações.

$$\begin{cases} C_1r & + & C_2r & = & Y_1 \\ C_1r^2 & + & 2C_2r^2 & = & Y_2 \end{cases},$$

ou seja,

$$C_1 = 2\frac{Y_1}{r} - \frac{Y_2}{r^2} \quad e \quad C_2 = \frac{Y_2 - rY_1}{r^2}. \tag{2.8}$$

Como $r \neq 0$, então as equações (2.8) são válidas. Para provar o teorema, basta mostrar que $Y_n = C_1r^n + C_2nr^n$ para todo n natural.

Fazendo $Z_n = Y_n - C_1r^n - C_2nr^n$, mostraremos que $Z_n = 0$ para todo n. Pelo Teorema 2.4 $Y_n = C_1r^n + C_2nr^n$, para todo n natural é solução da recorrências. Entretanto, sendo $C_1r + C_2r = Y_1$ *e* $C_1r^2 + 2C_2r^2 = Y_2$, então, $Z_1 = Z_2 = 0$.

Portanto, se $Z_{n+2} + pZ_{n+1} + qZ_n = 0$ *e* $Z_1 = Z_2 = 0$, concluímos também com base no lema 2.2 que $Z_n = 0$ para todo n. ∎

Para ficar mais compreensível, vamos aplicar o teorema acima no exemplo a seguir.

Exemplo 2.22 *A recorrência $X_{n+2} - 4X_{n+1} + 4X_n = 0$ tem equação característica $r^2 - 4r + 4 = 0$. As raízes são $r_1 = r_2 = 2$ e a solução da recorrência é $X_n = C_12^n + C_2n2^n$.*

2.5.2 Recorrências Lineares de Segunda Ordem Não-Homogêneas

Para resolver recorrências de segunda ordem não-homogêneas se faz necessário observar o teorema a seguir.

Teorema 2.6 *Se* (a_n) *é uma solução da equação*

$$X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = f(n), \tag{2.9}$$

então qualquer outra solução de (2.9) *é da forma* $(a_n + X_n)$, *onde* (X_n) *é solução da equação homogênea*

$$X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0. \tag{2.10}$$

Demonstração: Seja (b_n) solução de (2.9), tome $X_n = b_n - a_n$. Assim (X_n) é solução da equação homogênea (2.10), pois

$$(b_{n+2} - a_{n+2}) + p(b_{n+1} - a_{n+1}) + q(b_n - a_n) =$$
$$= (b_{n+2} + pb_{n+1} + qb_n) - (a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) = f(n) - f(n) = 0.$$

Portanto $b_n = a_n + X_n$, como queremos demonstrar. ■

Para melhor entender a solução de recorrências lineares de segunda ordem não homogêneas é preciso observar o último teorema e verificar que sua solução se constitui em duas parcelas. Uma solução qualquer da não-homogênea e uma solução da homogênea, conforme as resoluções a seguir.

Exemplo 2.23 *Resolver a recorrência* $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 8X_n = n + 3^n$.

Solução: A recorrência tem equação característica $r^2 - 6r + 8 = 0$, em que as raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$ e cuja solução da homogênea $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 8X_n = 0$ é $h_n = C_1 2^n + C_2 4^n$. com c_1, c_2 arbitrários.

Para encontrar a solução particular, t_n da recorrência $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 8X_n = n + 3^n$, sustituimos t_n em $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 8X_n$ para achar $n + 3^n$. Por uma obsevação cuidadosa, sabemos que t_n é uma função representada pela soma de um polinômio do primeiro grau e uma exponencial de base 3, ou seja, fazendo a tentativa de $t_n = An + B + C3^n$ e substituindo em $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 8X_n = n + 3^n$, obtemos $3An + 3B - 4A - C3^n = n + 3^n$.

Assim, para que (t_n) seja solução devemos ter $3A = 1$, $3B - 4A = 0$ e $-C = 1$. Daí, $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{4}{9}$ e $C = -1$. Logo, $t_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n$.

Portanto, a solução geral da recorrência não-homogênea é

$$X_n = C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

◇

Exemplo 2.24 *Resolver a recorrência* $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 8X_n = 1 + 2^n$.

Solução: A recorrência tem equação característica $r^2 - 6r + 8 = 0$, em que as raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$ e cuja solução da equação homogênea $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 8X_n = 0$ é $h_n = C_1 2^n + C_2 4^n$.

Para encontrar a solução particular, t_n da recorrência $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 8X_n = 1 + 2^n$, sustituimos t_n em $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 8X_n$ e achamos $1 + 2^n$.

Obsevando cuidadosamente, sabemos que t_n é uma função representada pela soma de um polinômio constante e uma exponencial de base 2, ou seja, fazendo a tentativa de $t_n = A + Bn2^n$ e substituindo em $X_{n+2} - 6X_{n+1} + 8X_n = 1 + 2^n$, obtemos $3A - 4B2^n = 1 + 2^n$. Então, (t_n) tem solução se $3A = 1$, e $-4B = 1$.

Daí, $A = \frac{1}{3}$ e $B = -\frac{1}{4}$, logo $t_n = \frac{1}{3} - \frac{n2^n}{4}$. Portanto, a solução da recorrência é a soma de h_n com t_n, conforme a seguinte equação, $X_n = C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{1}{3} - \frac{n2^n}{4}$. $\diamond$

Observação 2.1 *É importante destacar neste trabalho que o Teorema 2.6 pode ser utilizado para resolver recorrências lineares não homogêneas de qualquer grau, uma vez que se conheça a solução geral Y_n da recorrência homogênea correspondente e uma solução particular a_n. Temos que $X_n = a_n + Y_n$ é a solução geral da equação não homogênea. Ao verificar a recorrência linear de primeira ordem no exemplo 2.16, percebemos que esta recorrência pode ser resolvida usando o método do teorema já citado inicialmente, o que mostrará o exemplo a seguir.*

Exemplo 2.25 *Resolver a recorrência $X_{n+1} = 3X_n + 3^n$, $X_1 = 2$, utilizando o método expresso no Teorema 2.6.*

Solução: A equação homogênea correspondente é $X_{n+1} = 3X_n$, de solução geral $Y_n = C3^n$ e com solução particular da forma $A_n = kn3^n$ para a recorrência não homogênea.

Ao substituir em $X_{n+1} = 3X_n + 3^n$ obtemos, $k(n+1)3^{n+1} = 3kn3^n + 3^n$. Portanto, $3kn + 3k = 3kn + 1$, o que faz $k = \frac{1}{3}$.

Então a solução geral da recorrência é $X_n = C3^n + \frac{1}{3}n3^n$. Daí, usando a condição inicial $X_1 = 2$, obtemos $2 = 3C + 1$ encontrando $C = \frac{1}{3}$.

Concluímos, finalmente que a solução da recorrência é

$$X_n = \frac{1}{3}3^n + \frac{1}{3}n3^n = (n+1)3^{n-1},$$

conforme solução anteriormente encontrada no exercício 2.16, das recorrências lineares de primeira ordem. $\diamond$

Concluímos esta seção reforçando a ideia de que as sequências definidas por recorrências lineares de coeficientes constantes e ordens maiores, serão comentadas brevemente na seção posterior.

2.6 Recorrências Lineares de Ordem Superior - Uma Generalização

As equações de recorrências lineares são da forma

$$X_{n+k} + u_{k-1}X_{n+k-1} + ... + u_0X_n = 0, \quad com \quad u_0 \neq 0$$

em que $u_1, u_2, ..., u_k$ são constantes independentes de n e os valores de X_i são conhecidos para $i = 0, 1, ..., k-1$. Supondo que essa equação de recorrência admita solução do tipo $X_n = z^n$ e substituindo na equação, temos

$$z^{n+k} + u_{k-1}z^{n+k-1} + ... + u_0z^n = 0.$$

Admitindo que $z \neq 0$ podemos determinar a equação característica da equação de recorrência,

$$u_kz^k + u_{k-1}z^{k-1} + ... + u_0 = 0.$$

Se a equação possui raízes complexas $z_1, z_2, ..., z_m$ de multiplicidade, respectivamente, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, então as soluções da equação de recorrência são da forma $X_n = q_1(n)z_1^n + q_2(n)z_2^n + ... + q_m(n)z_m^n$, onde $q_1, q_2, ..., q_m$ são polinômios com grau $(q_i) < \alpha_i$, $1 < i < m$. No caso em que z_i é uma raiz simples, então q_i é uma constante.

2.6.1 Recorrências Lineares de ordem n

Nas seções anteriores estudamos as recorrências lineares de 1ª e 2ª ordens. Nesta oportunidade, faremos um breve estudo das recorrências lineares com coeficientes constantes de ordem maior ou igual a três.

Inicialmente consideremos a proposição e o teorema a seguir, depois trataremos o caso de ordem 3 para recorrências lineares. Para o que segue, denotaremos por $\mathbb{K}$, os campos numéricos ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Proposição 2.1 *Dados elementos $a_1, a_2, ..., a_n$, $u_1, u_2, ..., u_n$ de $\mathbb{K}$, sendo $a_1, a_2, ..., a_n$ dois a dois distintos, o sistema linear de equações*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & ... & + & x_n & = & u_1 \\ a_1x_1 & + & a_2x_2 & + & ... & + & a_nx_n & = & u_2 \\ a_1^2x_1 & + & a_2^2x_2 & + & ... & + & a_n^2x_n & = & u_3 \\ & & & & & & & ... & \\ a_1^{n-1}x_1 & + & a_2^{n-1}x_2 & + & ... & + & a_n^{n-1}x_n & = & u_n \end{array}\right. , \tag{2.11}$$

conhecido por sistema de **Vandermonde***, admite uma única solução em $\mathbb{K}$.*

Demonstração: Notemos que o sistema (2.11) tem solução única se, e somente se, o determinante da matriz de seus coeficientes é diferente de zero.

No entanto, tal determinante é

$$Det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ {a_1}^2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {a_1}^{n-1} & {a_2}^{n-1} & \cdots & {a_n}^{n-1} \end{bmatrix}$$

conhecido como determinante de Vandermonde e coincide com

$$\prod_{i<j}(a_j - a_i).$$

Como $a_j \neq a_i$, se $i \neq j$, temos que o determinante acima é diferente de zero e o resultado segue. ■

O teorema a seguir mostrará como obter uma fórmula posicional para uma sequência recorrente linear a partir das raízes de seu polinômio característico, no caso em que tais raízes são duas a duas distintas.

Para efeito de generalização, consideraremos para o teorema e sua demonstração o conjunto dos números complexos.

Teorema 2.7 *Seja (X_k), para todo $k \geqslant 1$ a sequência satisfazendo, para todo $n \geqslant 1$, a relação de recorrência*

$$X_{n+k} + u_{k-1}X_{n+k-1} + ... + u_0X_n = 0, \tag{2.12}$$

onde $u_0, ..., u_{k-1}$ são números complexos dados, com $u_0 \neq 0$. Se as raízes complexas $z_1, z_2, ..., z_k \in \mathbb{C}$ do polinômio característico da sequência (X_k), para todo $k \geqslant 1$ que satisfaz a relação de recorrência (2.12), são todas distintas e $X_j = \alpha_j$ para $1 \leqslant j \leqslant k$, então

$$X_n = z_1^{n-1}x_1 + ... + z_k^{n-1}x_k, \forall n \geqslant 1,$$

onde $x_1, ..., x_k$ é solução do sistema de **Vandermonde**

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & ... & + & x_k & = & \alpha_1 \\ z_1x_1 & + & z_2x_2 & + & ... & + & z_kx_k & = & \alpha_2 \\ z_1^2x_1 & + & z_2^2x_2 & + & ... & + & z_k^2x_k & = & \alpha_3 \\ & & & & & & & & ... \\ z_1^{n-1}x_1 & + & z_2^{n-1}x_2 & + & ... & + & z_k^{k-1}x_k & = & \alpha_k \end{array}\right. . \tag{2.13}$$

Demonstração: Como $z_1, z_2, ..., z_k$ são dois a dois distintos, a proposição 2.1 garante a existência de uma única solução $x_1, x_2, ..., x_k$ do sistema (2.13). Podemos, então, definir a sequência (Y_n) para todo $n \geqslant 1$ pondo

$$Y_n = z_1^{n-1}x_1 + ... + z_k^{n-1}x_k, \forall n \geqslant 1.$$

Então, para $1 \leqslant j \leqslant k$, o sistema (2.13) fornece

$$Y_j = z_1^{j-1}x_1 + ... + z_k^{j-1}x_k = \alpha_j = X_j.$$

Por outro lado, segue da definição dos Y_j que

$$\begin{aligned}
&Y_{n+k} + u_{k-1}Y_{n+k-1} + ... + u_0 Y_n \\
&= \sum_{j=1}^{k} z_j^{n+k-1}x_j + u_{k-1}\sum_{j=1}^{k} z_j^{n+k-2}x_j + ... + u_0 \sum_{j=1}^{k} z_j^{n-1}x_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} z_j^{n-1}x_j(z_j^k + u_{k-1}z_j^{k-1} + ... + u_0) \\
&= \sum_{j=1}^{k} z_j^{n-1}x_j f(z_j) = 0
\end{aligned}$$

onde $f(z) = z^k + u_{k-1}z^{k-1} + ... + u_0$ é o polinômio característico da sequência (X_k).

Portanto a sequência (Y_n) para todo $n \geqslant 1$ satisfaz a mesma recorrência linear que (X_n) para todo $n \geqslant 1$ e seus k primeiros termos coincidem respectivamente com os k primeiros termos da sequência (X_n). Logo, utilizando indução finita sobre n, garantimos facilmente que $a_n = b_n$ para todo $n \geqslant 1$, conforme desejado. ■

2.6.2 Casos Particulares de Recorrências Lineares de Terceira Ordem

Seja (X_n) com $n \geqslant 1$ uma sequência que satisfaz uma relação de recorrência da forma

$$X_{k+3} + pX_{k+2} + qX_{k+1} + rX_k = 0, \qquad r \neq 0 \tag{2.14}$$

para todo $k \geqslant 1$ é dita de 3ª ordem. Aqui p, q e r são constantes reais dadas, não nulas, cuja equação característica, analogamente ao caso de recorrências de segunda ordem e conforme o corolário 2.1, é a equação polinomial de terceiro grau

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0. \tag{2.15}$$

No que segue, assumiremos que a equação característica (2.15) possui de fato três raízes reais α, β e γ.

Teorema 2.8 *Seja (X_n) com $n \geqslant 1$ uma sequência de números reais tal que, para todo $k \geqslant 1$ inteiro, temos*

$$X_{k+3} + pX_{k+2} + qX_{k+1} + rX_k = 0,$$

onde p,q e r são constantes reais dadas, não nulas. Se a equação característica $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ *tiver raízes reais* α, β *e* γ, *então existem constantes reais* A, B *e* C, *determinadas pelos valores de* X_1, X_2 *e* X_3, *tais que:*

(a) Se $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, *então* $X_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1}$, *para todo* $n \geqslant 1$.

(b) Se $\alpha = \beta \neq \gamma$, *então* $X_n = (A + B(n-1))\alpha^{n-1} + C\gamma^{n-1}$, *para todo* $n \geqslant 1$.

(c)Se $\alpha = \beta = \gamma$, *então* $X_n = (A + B(n-1) + C(n-1)^2)\alpha^{n-1}$, *para todo* $n \geqslant 1$.

Demonstração: Seja (Y_n) a sequência dada por $(Y_n = \alpha^{n-1})$, para todo $n \geqslant 1$. Como $\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r = 0$, temos também $\alpha^{k+2} + p\alpha^{k+1} + q\alpha^k + r\alpha^{k-1} = 0$ ou, ainda,

$$Y_{k+3} + pY_{k+2} + qY_{k+1} + rY_k = 0,$$

para todo $k \geqslant 1$. Portanto, a sequência (Y_n) com $n \geqslant 1$ satisfaz a mesma recorrência que a sequência (X_n). Analogamente, as sequências (Z_n) com $n \geqslant 1$ e (T_n) com $n \geqslant 1$, dadas para $n \geqslant 1$ por $(Z_n = \beta^{n-1})$ e $(T_n = \gamma^{n-1})$, satisfazem a mesma recorrência que a sequência (X_n) com $n \geqslant 1$.

Vamos considerar agora os casos (a), (b) e (c) no teorema 2.8 separadamente:
(a) Para todos $A, B, C \in \mathbb{R}$, a sequência u_n com $n \geqslant 1$ tal que

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1}$$

para $n \geqslant 1$ satisfaz a mesma recorrência que a sequência (X_n).

Por outro lado, como $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, escolhemos A, B e C de tal forma que $u_1 = X_1$, $u_2 = X_2$ e $u_3 = X_3$ e de acordo com o teorema 2.7 temos que pelo sistema de **Vandermonde** formado pelas sequências u_1, u_2 e u_2 admite solução única, X_1,X_2 e X_3 respectivamente. Daí se conclui que $u_n = X_n$, para todo $n \geqslant 1$.
(b) Seja a equação do terceiro grau, onde $\alpha = \beta \neq \gamma$ são suas raízes, então temos

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - \alpha)^2(x - \gamma),$$

é fácil a partir daí mostrar que a sequência $(Y_n = (n-1)\alpha^{n-1})$ também satisfaz a mesma recorrência que a sequência (X_n).

Análogo ao item (a), para todos $A, B, C \in \mathbb{R}$, a sequência u_n com $n \geqslant 1$ tal que,

$$u_n = (A + B(n-1))\alpha^{n-1} + C\gamma^{n-1}$$

para $n \geqslant 1$ satisfaz a mesma recorrência que a sequência (X_n).

Também podemos escolher A, B e C de tal forma que $u_1 = X_1$, $u_2 = X_2$ e $u_3 = X_3$, e pelo teorema 2.7 concluímos que $u_n = X_n$, para todo $n \geqslant 1$.
(c) Seja a equação do terceiro grau, onde $\alpha = \beta = \gamma$ são suas raízes, então temos

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - \alpha)^3,$$

podemos também facilmente mostrar que as sequências $Y_n = (n-1)\alpha^{n-1}$ e $Z_n = (n-1)^2\alpha^{n-1}$ satisfazem a mesma recorrência que a sequência (X_n), de maneira que o mesmo acontece com

$$u_n = (A + B(n-1) + C(n-1)^2)\alpha^{n-1}$$

que igualmente aos itens (a) e (b) satisfaz a mesma recorrência que a sequência (X_n).

Também podemos escolher A, B e C de tal forma que $u_1 = X_1$, $u_2 = X_2$ e $u_3 = X_3$, e de acordo com o teorema 2.7 temos que pelo sistema de **Vandermonde** formado pelas sequências u_1, u_2 e u_2, também admite solução única, X_1,X_2 e X_3 respectivamente. portanto analogamente concluímos que $u_n = X_n$, para todo $n \geqslant 1$.
$\blacksquare$

Com base no teorema 2.8 veremos um exemplo que melhor representa um dos casos estudados nos itens acima.

Exemplo 2.26 *Seja (X_n) com $n \geqslant 1$, a sequência tal que $X_1 = 1$, $X_2 = 4$, $X_3 = 14$ e*

$$X_{k+3} - 6X_{k+2} + 12X_{k+1} - 8X_k = 0,$$

para todo inteiro $k \geqslant 1$. Explicitar X_n em função de n.

Solução:

A recorrência acima tem equação característica

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$$

Como temos $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$ e pelo item (c) do teorema 2.8 segue que

$$X_n = (A + B(n-1) + C(n-1)^2).2^{n-1},$$

com A, B e C constantes, onde as condições iniciais $X_1 = 1$, $X_2 = 4$, $X_3 = 14$, formam o sistema de equações a seguir

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} A & & & & & = & 1 \\ A & + & B & + & C & = & 2 \\ A & + & 2B & + & 4C & = & \frac{7}{2} \end{array}\right. ,$$

resolvendo esse sistema encontramos, $A = 1, B = \frac{3}{4}, C = \frac{1}{4}$. Logo, obtemos

$$\begin{aligned} X_n &= (1 + \frac{3}{4}(n-1) + \frac{1}{4}(n-1)^2).2^{n-1} \\ &= (n^2 + n + 2).2^{n-3}. \end{aligned}$$

$\diamond$

Para efeito de pesquisa e estudos podemos conhecer algo sobre Recorrências Não-Lineares na seguinte referência: Pacheco (2013, p.49)[8].

Capítulo 3

Aplicações de Recorrências Lineares

3.1 A Torre de Hanoi

Vamos estudar agora a Torre de Hanoi, um jogo lúdico criado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883, que consiste em uma base contendo três pinos, onde em um deles são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem decrescente de diâmetro, de baixo para cima. (Veja a figura 3.1 em: A Torre de Hanoi www.cienciamao.usp.br)
O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer,

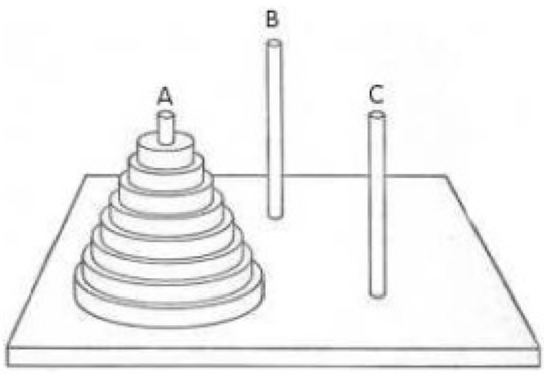

Figura 3.1: Torre de Hanoi

usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor.

Conta uma lenda que no início de tudo, um ser superior criou a Torre, que continha consigo outros dois pinos de mesma altura e colocou nesta torre 64 discos. Este ser supremo, então, chamou seus monges e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para o terceiro pino, seguindo as regras acima. Os monges, portanto, obedeceram cegamente e começaram o seu trabalho dia e noite. Garantia a lenda que quando eles terminassem tal proeza, a Torre iria ruir e o mundo com sua estrutura material se findaria observando três etapas.

Vamos começar de forma bem simples a resolução da Torre de Hanói:

- Saber qual o número mínimo de movimentos necessários para passar n discos de um pino para outro qualquer observando a disposição dos discos conforme a regra apresentada acima.

- Formular uma equação de recorrência.

- Resolver a relação de recorrência utilizando o conhecimento abordado no capítulo 2 de recorrências lineares de primeira ordem.

Para começar, consideremos alguns valores iniciais de n discos:
Quando $n = 1$.

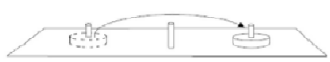

Figura 3.2: Teremos apenas um movimento

Quando $n = 2$.

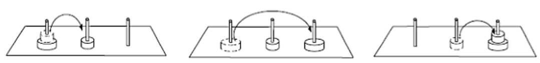

Figura 3.3: Teremos três movimentos

Quando $n = 3$.

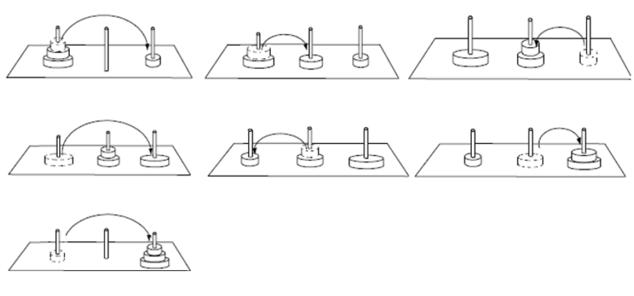

Figura 3.4: Teremos exatamente sete movimentos

Observemos que os três primeiros movimentos quando $n = 3$ é a solução de quando

$n = 2$, é a partir desta compreensão que precisaremos utilizar mais de uma vez o exemplo quando $n = 2$ e assim concluir o problema com três discos. Continuamos o raciocínio no objetivo de generalizar a ideia para quando n representar uma quantidade maior de discos.

Para buscarmos o segundo ponto que é formular uma equação de recorrência para a Torre de Hanoi, vamos agora considerar uma Torre com n discos conforme a figura abaixo.

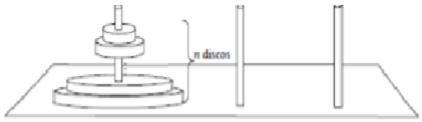

Figura 3.5: Torre com n discos

Admitindo que já sabemos resolver o problema quando houver $n-1$ discos.

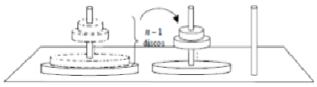

Figura 3.6: Torre com $n-1$ discos

Posteriormente movemos o disco maior.

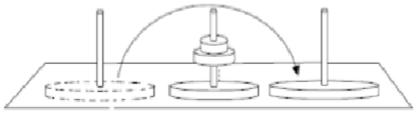

Figura 3.7: Torre com o maior disco

Usamos a mesma situação quando existem $n-1$ discos para construir a equação de recorrência.

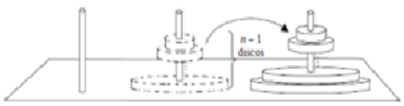

Figura 3.8: Torre com $n-1$ discos

Proseguindo na construção de uma fórmula recorrente e seja T_1 o número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema com apenas um disco, T_2 quando o número mínimo de movimentos na situação quando houver 2 discos e assim sucessivamente.

Logo, explicitando esse raciocínio e usando as ilustrações acima, concluímos que $T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1}$, ou seja,

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

Agora, dando continuidade, precisamos resolver a equação de recorrência que descreve todos os termos de uma sequência em função do termo anterior.

Vamos primeiro resolver a recorrência sem o termo independente de T_n, ou seja, a recorrência linear de primeira ordem homogênea $T_n = 2T_{n-1}$ com $T_1 = 1$. Portanto, temos

$$\begin{array}{rcl} T_2 & = & 2T_1 \\ T_3 & = & 2T_2 \\ T_4 & = & 2T_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ T_n & = & 2T_{n-1}. \end{array}$$

Multiplicando as equações temos

$$T_2.T_3.T_4.....T_n = 2T_1.2T_2.2T_3.....2T_{n-1}$$

multiplicando pelo inverso dos termos idênticos em cada membro, faremos os cancelamentos, isto é

$$T_n = 2^{n-1}T_1 \quad \Rightarrow \quad T_n = 2^{n-1}.$$

De acordo com o teorema 2.1, substituímos $T_n = 2^{n-1}Y_n$, e teremos

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2^n}.$$

Em seguida

$$\begin{array}{rcl} Y_2 & = & Y_1 + \dfrac{1}{2^1} \\ Y_3 & = & Y_2 + \dfrac{1}{2^2} \\ Y_4 & = & Y_3 + \dfrac{1}{2^3} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_n & = & Y_{n-1} + \dfrac{1}{2^{n-1}}. \end{array}$$

Somando as equações, ficamos com a expressão

$$Y_n = Y_1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Daí, como $T_n = 2^{n-1}Y_n$ e $T_1 = 1$ temos que $Y_1 = 1$. Fazendo a soma dos termos para uma progressão geométrica, teremos

$$Y_n = 1.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\Big[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\Big].$$

Portanto

$$T_n = 2^{n-1}.Y_n = 2^n\Big[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\Big] = 2^n - 1.$$

Podemos, daí concluir que serão necessários para n discos no mínimo $2^n - 1$ movimentos em transferi-los para um outro pino, conforme as regras antes estabelecidas.

3.2 A Sequência de Fibonacci

Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano ou ainda Leonardo Bigollo, foi um matemático italiano, conhecido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. É considerado por alguns como o mais talentoso matemático ocidental da Idade Média. Ficou conhecido por usar como exemplo, o que seria posteriormente conhecida por Sequência de Fibonacci, no **Liber Abaci**, a primeira obra importante sobre matemática desde Eratóstenes, isto é, mais de mil anos antes. (Veja a figura 3.9 em: Fibonacci's Liber Abaci Auctioned | Twisted Lifestyle www.twistedlifestyle.com).

O **Liber Abaci** introduziu os numerais hinduarábicos na Europa, além de discutir

Figura 3.9: Fibonacci Liber Abaci Book Of Calculation Auction

muitos problemas matemáticos. Dentre esses muitos problemas matemáticos, destacaremos dois importantes e criativos problemas de aplicação das **Sequências de Fibonacci**.

3.2.1 O Cálculo do Tamanho de Uma População de Coelhos

Vamos começar esta seção apreciando o seguinte caso do tamanho de uma população de coelhos.

Suponha que um casal de coelhos recém-nascidos é colocado numa ilha, e que eles não produzem descendentes até completarem dois meses de idade. Quando atingirem este tempo de vida, cada casal de coelhos produz exatamente um outro casal de coelhos por mês e cada novo casal gerado também produz somente após o segundo mês de vida. Qual seria a população de coelhos na ilha após doze meses, supondo que nenhum dos coelhos tenha morrido, não haja migração neste período e não há problemas genéticos no cruzamento entre eles?

Observando a figura abaixo representada, notaremos que no primeiro mês teremos apenas um casal jovem de coelhos. Já no segundo mês, esse casal será adulto.

Figura 3.10: Árvore genealógica até o quarto mês

Admitindo que esse casal já adulto possa produzir outro casal de coelhos jovens, esse mesmo casal poderá a cada mês reproduzir outro casal de coelhos jovens de maneira que no terceiro mês existirão dois pares de coelhos, porém um casal adulto e outro recém-nascido. Ao chegar no quarto mês, notamos que o casal de coelhos adulto do mês anterior gerará mais um casal de coelhos, assim no quarto mês serão exatamente o casal recém-nascido, o casal de apenas um mês de vida e o casal adulto, totalizando três casais representados na mesma figura 3.10.

Continuando o raciocínio temos que no início do quinto mês existirão dois pares adultos, sendo que cada um já reproduziu um novo par e outro par que completou um mês de vida, totalizando cinco pares.

Agora no início do sexto mês existirão três pares adultos, sendo que cada um já produziu um novo par e mais dois pares que completam um mês de vida. Daí existirão oito pares. Se observamos bem no esquema representado na segunda figura 3.11 disponível em: http://www.bpiropo.com.br/fpc20070108.htm, a quantidade de coelhos no sétimo mês será a soma da quantidade que há no quinto e sexto meses.

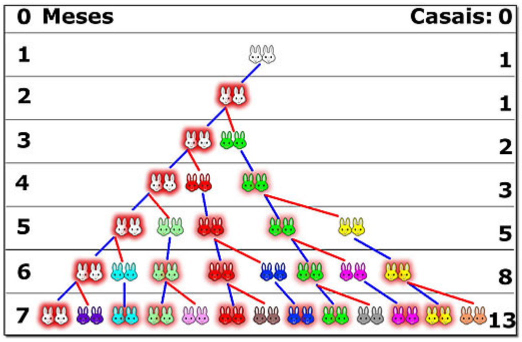

Figura 3.11: Árvore genealógica até o sétimo mês

Notamos também que anteriormente, a quantidade de casais de coelhos no quinto mês será resultado da soma das quatidades de coelhos do terceiro e o quarto meses, formulando assim uma sequência conhecida como **Sequência de Fibonacci** conforme a figura 3.12 e em seguida esta sequência gerará uma relação de recorrência.(A figura 3.12 se encontra disponível em: Mapli | Coelhos de Fibonacci - www.mapli.tumblr.com).

0+1=1
1+1=2
1+2=3
2+3=5
3+5=8
5+8=13
8+13=21
13+21=34
21+34=55
34+55=89
55+89=144

Figura 3.12: Uma sequência de Fibonacci

Mesmo que aparentemente a construção do esquema acima se torne cansativa, todavia ela nos fornece uma regra de formação para o desenvolvimento da população. Como calcular a população no início do sexto mês? Como não há mortes, podemos inicialmente contar com a população do quinto mês. O passo seguinte é calcular o número de nascimentos. Ora, estes correspondem ao número de casais com pelo menos um mês no início do quinto mês. Isto sugere que a população seja contabilizada por idade, como esquematizado na figura 3.11.

É possível evitar este trabalho todo, pois se observarmos que a população com pelo menos um mês de idade no quinto mês consiste exatamente da população total no quarto mês.

Denotando por F_n o número de casais de coelhos obtidos em n meses, o argumento acima produz a equação $F_6 = F_5 + F_4$. Mas o raciocínio se aplica a qualquer mês, ou seja, toda discussão pode ser refeita substituindo-se sexto por $n^{\underline{ésimo}}$, quinto por $(n-1)^{\underline{ésimo}}$ e quarto por $(n-2)^{\underline{ésimo}}$. Sendo assim, logo podemos escrever a equação

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad para \quad n \geqslant 3. \tag{3.1}$$

Daí temos que a sequência (F_n) da população de coelhos na ilha ao longo dos meses (supondo inexistência de mortes ou migração) satisfaz a equação de recorrência (3.1) acima. Observemos que, dados dois valores de elementos da sequência em quaisquer dois meses consecutivos, podemos calcular todos os valores dos elementos da sequência dos meses posteriores. Vemos no problema que a população inicial F_1 de coelhos consiste de um casal. Ficamos impedidos de calcular F_2 a partir da equação (3.1), pois esta envolveria o termo F_0, não definido. Fazendo uma breve análise sobre o problema em discussão, temos.

- A população F_2 deve ser calculada diretamente do enunciado, como feito para a construção da tabela 3.10. Observemos também que podemos medir a população em número de casais ou em número de coelhos. A relação entre os termos da sequência é (3.1) em qualquer dos casos.

- As condições iniciais seriam, portanto, diferentes. Se contarmos o número de casais de coelhos, teremos $F_1 = F_2 = 1$ e se contarmos o número de coelhos, teremos $F_1 = F_2 = 2$.

- A sequência de números gerada no primeiro caso é exatamente a sequência de Fibonacci e a sequência seguinte seria exatamente o dobro (termo a termo) da sequência de Fibonacci. Isso destaca um ponto relevante, no que tange a *relação de recorrência* que define a solução do problema é composta de duas partes: um conjunto de condições iniciais e uma fórmula que expresse o valor de um termo da sequência em função de termos anteriores. Logo, (3.1) é apenas uma parte da relação de recorrência que em sua forma completa, seria, se contássemos a população em termos de números de casais, conforme a relação de recorrência abaixo.

$$\begin{aligned} F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \quad para \quad n \geqslant 3. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Notemos que, uma vez que uma relação de recorrência é estabelecida, podemos calcular termos anteriores aos que definem as condições iniciais usando a fórmula de recorrência, estendendo, portanto a sequência. Logo, podemos na equação (3.2) calcular F_0 à partir da equação $F_2 = F_1 + F_0$ e das condições iniciais, obtendo $F_0 = F_2 - F_1 = 1 - 1 = 0$. Neste caso, poderíamos redefinir a relação de recorrência para descrever a sequência estendida:

$$\begin{aligned} &F_0 = 0, \\ &F_1 = 1, \\ &F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad para \quad n \geqslant 2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Em algumas situações teremos a necessidade de nos referir apenas à(s) *equação(ões) de recorrência*, que é(são) obtida(s) da relação de recorrência retirando-se as condições iniciais, na relação (3.3), por exemplo, a equação de recorrência é $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Depois da breve análise feita acima iremos agora, para o problema inicial, verificar em dois casos:

O cálculo do tamanho de uma população de coelhos conforme a relação de recorrência (3.2) para apenas os casais de coelhos com dois meses de idade produzam um casal de recém-nascidos.

O outro caso parte também da relação de recorrência (3.3), em que apenas os casais de coelhos com exatamente um mês de idade produzam um casal de recém-nascidos.

Vamos também, em seguida, achar uma fórmula explícita para F_n em função de n para ambos os casos.

- **Primeiro Caso**

Seja a relação de recorrência

$$\begin{aligned} &F_1 = 1, \\ &F_2 = 1, \\ &F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad para \quad n \geqslant 3, \end{aligned}$$

em que n é o número de meses.

Temos que a equação de recorrência é do tipo (2.4) estudada na seção 2.5 de **recorrências lineares de segunda ordem** e tem equação característica associada a equação ($F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) igual a $r^2 = r + 1$,, cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Esse caso está claramente exposto no exemplo 2.17, na seção das **recorrências lineares de segunda ordem**.

Continuando, temos as condições iniciais ($F_1 = 1 \quad e \quad F_2 = 1$) que indicam a população em relação ao número de casais e implicam no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}A + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B = 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 A + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 B = 1, \end{cases}$$

cuja solução é $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

Temos portanto que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

obtemos, portanto, a conhecida fórmula explícita para o problema do número de casais de coelhos obtidos em n meses.

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

- **Segundo Caso**

Agora suponha o caso em que apenas os casais de coelhos com exatamente um mês de idade produzam um casal de recém-nascidos. Quantos casais conterá a ilha após n meses?

Chamando de F'_n o número de casais após n meses, temos que $F'_1 = 1$, visto que inicialmente é colocado na ilha um casal de recém-nascidos. Portanto, no início do segundo mês este casal produz um segundo casal e $F'_2 = 2$, sendo que um dos casais é recém-nascido e o outro tem um mês de idade.

A população do $n^{\underline{ésimo}}$mês pode ser particionada em casais recém-nascidos e casais com pelo menos um mês de idade. O número de casais recém-nascidos é igual ao número de casais com exatamente um mês no $n^{\underline{ésimo}}$mês, o que corresponde à parte da população que era recém-nascida no $(n-1)^{\underline{ésimo}}$mês, o que por sua vez é igual à diferença entre as populações no $(n-1)^{\underline{ésimo}}$ e $(n-2)^{\underline{ésimo}}$meses, isto é, $F'_{n-1} - F'_{n-2}$. Já o número de casais com pelo menos um mês é o número de casais no $(n-1)^{\underline{ésimo}}$mês.

No entanto, a relação de recorrência que F'_n satisfaz é:

$$\begin{aligned} F'_1 &= 1, \quad F'_2 = 2 \\ F'_n &= (F'_{n-1} - F'_{n-2}) + F'_{n-1} = 2F'_{n-1} - F'_{n-2}. \end{aligned}$$

A equação característica associada é $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, ou seja, uma equação de segundo grau com uma única raiz (1) de multiplicidade 2 que estudamos no caso 2.5.1 para **Recorrências Lineares de Segunda Ordem**. Portanto, a solução geral é $A(1)^n + Bn(1)^n$, e utilizando as condições iniciais obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} A + B & = 1 \\ A + 2B & = 2, \end{cases}$$

cuja solução é $A = 0$ e $B = 1$, o que implica $F'_n = n$.

3.2.2 As Peças de Uma Caixa de Dominó 2 x n

Continuando ainda na ideia da Sequência de Fibonacci, vamos apreciar um problema proposto que estimula a curiosidade dos alunos e utilizar material concreto com o objetivo didático de facilitar o raciocínio e o processo pedagógico de ensino-aprendizagem da matemática no ensino da base curricular. Como sugestão, podemos disponibilizar alguns jogos de dominós para fazê-los pensar no seguinte problema.

De quantas maneiras podemos guardar n dominós 2×1 em uma caixa $2 \times n$?

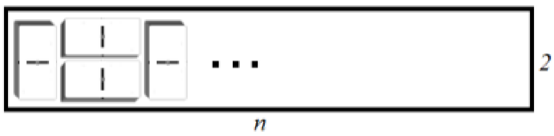

Figura 3.13: Caixa Dominó $2 \times n$

Ao disponibilizar as peças de dominós sobre uma mesa, podemos solicitar aos alunos para que tentem encontrar a solução para valores iniciais de n peças, para $n = 1, 2, 3, 4...$, até o momento em que eles sintam dificuldade de encontrar todas as possibilidades de posições para organizá-las dentro dessa caixa onde se guardam todas as peças. Vejamos algumas preliminares em cada caso para as $n^{\underline{ésimas}}$ primeiras peças de um dominó tradicional.

Com as peças do dominó (que pode ser disposta como 2×1 ou 1×2) os alunos devem verificar quantas maneiras existem e quais possibilidades de colocá-las em uma caixa para peças com dimensões 2×1, como mostraremos nas figuras a seguir. Para o caso onde $n = 1$

Figura 3.14: Possibilidade com uma peça

Caso $n = 2$

Figura 3.15: Possibilidades com duas peças

Caso $n = 3$

Figura 3.16: Possibilidades com três peças

Caso $n = 4$

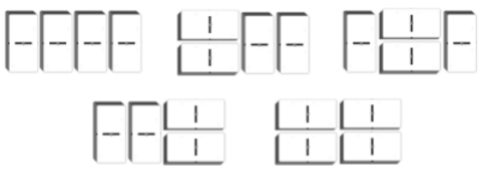

Figura 3.17: Possibilidades com quatro peças

Até esse momento a sequência criada foi $(1, 2, 3, 5, ...)$ que percebemos já ser diferente da Sequência de Fibonacci, pois os dois primeiros não são iguais a 1. Porém, o primeiro termo dessa sequência poderia ser o segundo da Sequência de Fibonacci, o segundo termo seria igual ou terceiro e assim por diante. Portanto, teríamos uma sequência definida pela seguinte relação de recorrência

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 2 \\ f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n, \end{aligned} \tag{3.4}$$

que possui as mesmas propriedades da Sequência de Fibonacci.

Lembrando que a ideia em recursão é obter cada valor em função dos anteriores, vejamos o que ocorre quando tiramos a última parte do caso $n = 4$. Observe que ao tirarmos a última peça (ou as duas últimas, quando estiverem deitadas) de cada possibilidade, obtemos um número menor de possibilidades. Como esses finais têm tamanho 1 ou 2, reduz-se ao caso anterior ou pré-anterior, de modo que $f_4 = f_3 + f_2$. Será que isso continuará ocorrendo? Por fim, o professor pode mostrar aos alunos que o problema resulta em uma recorrência linear homogênea de segunda ordem, exatamente a mesma Sequência de Fibonacci, e pode mostrar toda a resolução a seguir.

Temos na relação de recorrência (3.4) que a equação de recorrência também é do tipo (2.4) estudada na seção 2.5 de **recorrências lineares de segunda ordem** e tem equação característica associada a equação igual a $r^2 = r + 1$, cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Continuando, temos as condições iniciais ($f_1 = 1 \quad e \quad f_2 = 2$) que implicam no sistema:

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}A + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B = 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 A + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 B = 2, \end{cases}$$

cuja solução é $A = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ e $B = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$.

Temos portanto que

$$f_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

Obtemos portanto, a fórmula explícita para o problema do número de maneiras que podemos guardar n dominós 2×1 em uma caixa $2 \times n$.

Com estes dois últimos problemas, concluímos as Aplicações com **recorrências lineares de segunda ordem.**

3.3 O Problema dos Caminhos

Esse tipo de problema é conhecido como exercícios em cursos preparatórios para olimpíadas de Matemática do Ensino médio. Esse problema afirma e comporta o seguinte desafio.

Caminhando pelos segmentos unitários da figura abaixo, determine quantas são as maneiras de ir de A até B sem passar duas vezes pelo mesmo ponto.

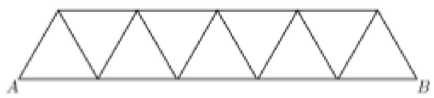

Figura 3.18: Caminhos pelos Segmentos

Como estratégia de resolução vamos enumerar os pontos da esquerda para a direita apenas por questão de orientação, conforme figura abaixo.

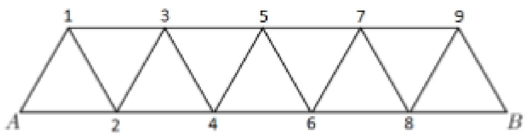

Figura 3.19: Caminhos Orientados

Seja n a posição em que queremos chegar (os vértices dos triângulos, considerando apenas os segmentos a esquerda da posição) e t_n o número de caminhos distintos que podemos tomar para sair de A até B sem passar duas vezes por um mesmo ponto. Note que o ponto B estará na posição 10 na figura acima. Vamos encontrar valores iniciais para t_n fazendo $n = 1, 2, 3, ...$

Para $n = 1$, temos apenas um caminho possível, direto de A para 1, conforme a figura a seguir.

Figura 3.20: Um Caminho Possível

Representamos essa possibilidade por

$$\underbrace{A1} \quad t_1 = 1.$$

Para o caso $n = 2$, temos duas possibilidades

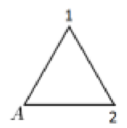

Figura 3.21: Dois Caminhos Possíveis

$$\underbrace{A12 \ e \ A2} \quad t_2 = 2.$$

Para o caso n = 3, temos quatro possibilidades

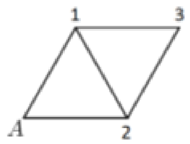

Figura 3.22: Quatro Caminhos Possíveis

$$\underbrace{A123, \ A23, \ A13 \ e \ A213} \quad t_3 = 4.$$

Para n = 4, temos sete possibilidades

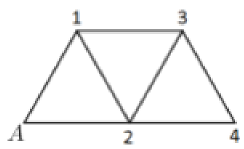

Figura 3.23: Sete Caminhos Possíveis

$$\underbrace{A1234, A234, A134, A2134, A124, A24 \ e \ A1324} \quad t_4 = 7.$$

Para $n = 4$, o número de caminhos depende justamente dos três casos anteriores.

Observe que os quatro primeiros caminhos é o caso $n = 3$ acrescentando apenas o 4 ao final. O quinto e o sexto caminho é o caso $n = 2$ acrescentando também o 4 ao final. E o último caminho é o caso $n = 1$ acrescentando 324 ao final, ou seja, podemos escrever $t_4 = t_3 + t_2 + t_1$.

Observe ainda que o mesmo raciocínio pode ser usado para contar os caminhos para os próximos pontos.

Para o caso $n = 5$, temos que o número de caminhos pode ser descrito conforme o esquema abaixo.

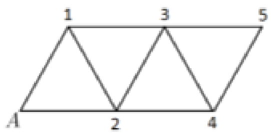

Figura 3.24: Treze Caminhos Possíveis

$$\underbrace{\overbrace{A1234}, \overbrace{A234}, \overbrace{A134}, \overbrace{A2134}, \overbrace{A124}, \overbrace{A24} \ e \ \overbrace{A1324}} + \overbrace{(5)}$$

$$\underbrace{\overbrace{A123}, \overbrace{A23}, \overbrace{A13} \ e \ \overbrace{A213}} + \overbrace{(5)}$$

$$\underbrace{\overbrace{A12} \ e \ \overbrace{A2}} + \overbrace{(435)}$$

isto é,

$$t_5 = t_4 + t_3 + t_2.$$

Observação 3.1 *O valor* $\overbrace{(*)}$ *adicionado em cada* t_{n-1}*,* t_{n-2} *e* t_{n-3} *a partir da representação acima, conforme figura 3.24 é utilizado na implementação de caminhos, completando portanto as possibilidades indicadas.*

Agora de modo geral e formulando uma recorrência para o problema é notório que

$$\underbrace{t_{n-1}} + \overbrace{(n)}$$

$$\underbrace{t_{n-2}} + \overbrace{(n)}$$

$$\underbrace{t_{n-3}} + \overbrace{(n-1\ n-2\ n)},$$

ou seja,

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}.$$

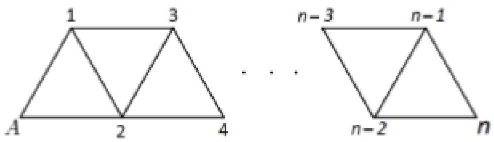

Figura 3.25: Generalizando Possíveis Caminhos

Pouparemos o leitor do método de resolução de recorrências múltiplas, uma vez que para resolver o problema proposto, é mais fácil e prático fazer as interações até a décima posição.

$$\begin{aligned}
t_4 &= t_3 + t_2 + t_1 = 4 + 2 + 1 = 7 \\
t_5 &= t_4 + t_3 + t_2 = 7 + 4 + 2 = 13 \\
t_6 &= t_5 + t_4 + t_3 = 13 + 7 + 4 = 24 \\
t_7 &= t_6 + t_5 + t_4 = 24 + 13 + 7 = 44 \\
t_8 &= t_7 + t_6 + t_5 = 44 + 24 + 13 = 81 \\
t_9 &= t_8 + t_7 + t_6 = 81 + 44 + 24 = 149 \\
t_{10} &= t_9 + t_8 + t_7 = 149 + 81 + 44 = 274.
\end{aligned}$$

Isto indica que existem 274 caminhos diferentes que podemos tomar para sairmos do ponto A e chegarmos ao ponto B.

3.4 Os Números de Stirling

James Stirling (1692 – 1770) foi um Matemático Escocês natural de Garden, Stirlingshire e autor de vários títulos como The Differential Method: Or, A Treatise Concerning Summation and Interpolation of Infinite Series, Lineae Tertii Ordinis Neutonianae, Methodus Differentialis Newtoniana Illustrata e A Description of a Machine to blow Fire by the Fall of Water. Embora tivesse fascínio pela física, seu campo de pesquisa foi essencialmente a Ciência Matemática. James foi o criador dos números ou fórmulas que trazem em memória seu nome, são eles: (*Os Números de Stirling de Primeiro e Segundo tipos*) que na combinatória muito contribuiu para a ciência.

Morreu aos 78 anos em Edimburgo, capital da Escócia desde 1492 no Reino Unido, situada na margem sul do estuário do rio Forth (Firth of Forth), Conforme a seguinte referência [9].

Nesta seção, definiremos *Os números de Stirling de Primeira e Segunda Espécies* e trataremos da dedução das *relações de recorrências* para os números de Stirling e logo após encaminharemos para a última aplicação com **O Problema de Josephus**.

Começaremos nosso estudo sobre *Os números de Stirling* analisando um problema bem simples e de fácil compreensão.

Exemplo 3.1 *Uma professora pede para que* 2 *de seus alunos pintem as bandeiras que serão utilizadas para a decoração da escola. A professora possui* 4 *cores de tinta para distribuir aos seus* 2 *alunos, Verde, Amarela, Lilás e Preta. De quantas maneiras a professora poderá distribuir essas cores para seus alunos,(não se fará distinção entre os alunos, só importará a distribuição das cores entre eles), de modo que cada um possua pelo menos uma cor de tinta com a qual possa colorir as bandeiras ?*

Em outras palavras, de quantas maneiras é possível distribuir os 4 elementos de um conjunto em dois subconjuntos não vazios. Tomando o conjunto V, A, L, P das cores que a professora distribuirá aos alunos, e separando seus elementos em dois subconjuntos não vazios,temos:

$$\{V\} \cup \{A, L, P\}; \{A\} \cup \{V, L, P\}; \{L\} \cup \{V, A, P\}; \{P\} \cup \{V, A, L\}$$
$$\{V, A\} \cup \{L, P\}; \{V, L\} \cup \{A, P\} \text{ e } \{V, P\} \cup \{A, L\}.$$

Portanto, existem 7 maneiras diferentes de separar os elementos de um conjunto de 4 elementos em 2 subconjuntos não vazios.

Com uma relação muito próxima com os coeficientes binomiais, os *números de Stirling* serão denotados em dois tipos: o de primeira espécie que convencionaremos por $S_{n,k}$ e o de segunda espécie por S_n^k.

3.4.1 Número de Stirling de Segundo Tipo

Começaremos definindo os números de Stirling de segundo tipo ou segunda espécie por ser de mais fácil entendimento e explanação.

Definição 3.1 *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant k \geqslant 1$. A notação S_n^k indicará o número de maneiras de escrever um conjunto A, com n elementos, como reunião de k subconjuntos não vazios e disjuntos. Em outras palavras, o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k recipientes idênticos, com nenhum recipiente vazio.*

- *Quando $k = 1$ temos apenas uma maneira de distribuir os objetos, todos no mesmo recipiente, portanto $S_n^1 = 1$.*
- *Quando $k = n$ temos apenas uma maneira, um objeto em cada recipiente, portanto $S_n^n = 1$.*
- *Quando $k > n$ a tarefa é claramente impossível, pois algum recipiente teria que ficar vazio.*
- *Quando $k \leqslant 0$ e $n > 0$ não podemos distribuir um número positivo de objetos dentre zero recipientes.*
- *Quando $1 < k < n$ e $n > 2$ encontraremos uma relação de recorrência satisfeita por S_n^k, ou seja, o número de maneiras de distribuir n objetos distintos dentre k recipientes idênticos, com nenhum recipiente vazio.*

No exemplo discutido no início desta seção, temos $A = \{V, A, L, P\}$ onde listamos todas as maneiras de escrever A como reunião de dois subconjuntos não vazios e disjuntos.

Neste caso, ilustremos o exemplo citado quando $n = 4$ e $k = 2$.

Para construirmos as distribuições consideremos também todas as cores das tintas V, A, L, P que a professora distribuirá aos alunos, onde desta forma separando seus elementos em dois subconjuntos não vazios, temos o seguinte esquema:

$$\boxed{V\quad\quad}\ \boxed{A\ L\ P}\ ;\quad \boxed{A\quad\quad}\ \boxed{V\ L\ P}\ ;\quad \boxed{L\quad\quad}\ \boxed{A\ V\ P}\ ;\quad \boxed{P\quad\quad}\ \boxed{V\ A\ L}$$

$$\boxed{V\ A\quad}\ \boxed{L\ P\quad}\ ;\quad \boxed{V\ L\quad}\ \boxed{A\ P\quad}\ ;\quad \boxed{V\ P\quad}\ \boxed{A\ L\quad}$$

Portanto, ratificamos que existem 7 maneiras diferentes de separar os elementos de um conjunto de 4 elementos em 2 subconjuntos não vazios, isto é,

$$S_4^2 = 7.$$

Exemplo 3.2 *Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vamos calcular S_5^2, isto é, queremos distribuir 5 objetos numerados de 1 a 5 em dois recipientes idênticos com nenhum recipiente vazio.*

Coloquemos um dos cinco objetos, por exemplo, o objeto de número 1 num recipiente e em seguida decidimos sobre os 4 restantes em qual recipiente ficarão.

Como são duas alternativas, teremos 2^4 modos de distribuição, onde está incluída a possibilidade dos cinco objetos juntos, isto é, o 1 juntamente com os outros quatros objetos, todos num mesmo recipiente. Eliminando o caso em que os quatro estarão no recipiente que está o objeto de número 1, deixando o outro vazio, concluímos que

$$S_5^2 = 15.$$

Agora em busca da construção de uma relação de recorrência para o número de Stirling de segundo tipo S_n^k, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.3 *Seja $A = \{1, 2, ..., n\}$. Vamos calcular S_n^2*

De modo análogo ao exemplo anterior queremos distribuir n objetos numerados de 1 a n em dois recipientes idênticos com nenhum recipiente vazio.

Coloquemos um dos n objetos, por exemplo, o objeto de número 1 num recipiente e em seguida decidimos sobre os $n-1$ restantes em qual recipiente ficarão.

Como também são duas alternativas, teremos 2^{n-1} modos de distribuição. Eliminando o caso em que os $n-1$ estarão no recipiente que está o objeto de número 1, deixando o outro vazio, concluímos que

$$S_n^2 = 2^{n-1} - 1.$$

Exemplo 3.4 *Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Vamos calcular S_4^3*

Quando temos mais do que dois recipientes ficará mais complicado repetir o mesmo raciocínio feito com dois, pois teríamos de descontar os vários casos onde ficariam recipientes vazios. Faremos outro procedimento que também funcionará no caso geral. Considerando o objeto de número 1 temos exatamente dois casos a considerar:

- O objeto de número 1 permanecerá sozinho num recipiente.
- O objeto de número 1 terá companhia.

$$\boxed{1} - \boxed{2} - \boxed{3,4}\ ;\ \boxed{1} - \boxed{3} - \boxed{2,4}\ ;\ \boxed{1} - \boxed{4} - \boxed{2,3}$$

$$\boxed{1,2} - \boxed{3} - \boxed{4}\ ;\ \boxed{1,3} - \boxed{2} - \boxed{4}\ ;\ \boxed{1,4} - \boxed{2} - \boxed{3}$$

Portanto

$$S_4^3 = 6$$

Exemplo 3.5 *Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vamos calcular S_5^3.*

Queremos distribuir 5 objetos, numerados de 1 a 5, em três recipientes idênticos, com nenhum deles vazio. Faremos o procedimento do exemplo anterior que também funcionará para o caso geral. Considerando o objeto de número 1 temos exatamente dois casos a considerar:

- O objeto de número 1 permanecerá sozinho num recipiente.
- O objeto de número 1 terá companhia.

No primeiro caso temos que distribuir 4 objetos em 2 recipientes, num total de $S_4^2 = 2^3 - 1 = 7$.

No segundo caso temos que distribuir 4 objetos em 3 recipientes, num total de S_4^3 e depois da distribuição colocar o objeto de número 1 em um dos três recipientes, portanto de 3 modos distintos.

Assim compreendemos que

$$S_5^3 = S_4^2 + 3S_4^3.$$

Concluímos então que,

$$S_5^3 = 7 + 3.6 = 25$$

Proposição 3.1 *Para $n, k \in \mathbb{N}$ com $1 < k \leqslant n$ e $n > 2$ vale que*

$$S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k.$$

Demonstração: Considerando $A = \{1, ..., n\}$, queremos escrever $A = A_1 \cup A_2 \cup, ..., \cup A_k$, onde os subconjuntos são não vazios e $|A| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_k|$. Novamente os elementos de A serão objetos numerados de 1 até n e os subconjuntos $A_1, A_2, ..., A_k$ serão os recipientes. Considerando o objeto de número 1 temos exatamente dois casos a considerar:

- O objeto de número 1 permanecerá sozinho num recipiente.
- O objeto de número 1 terá companhia.

No primeiro caso temos que distribuir $n-1$ objetos em $k-1$ recipientes, num total de S_{n-1}^{k-1}.

No segundo caso temos que distribuir $n-1$ objetos em k recipientes, num total de S_{n-1}^{k} e depois da distribuição colocar o objeto de número 1 em um dos k recipientes, portanto de k modos distintos.

Assim chegamos a conclusão que

$$S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k,$$

o que nos permite fornecer a relação de recorrência desejada. ∎

Com a demonstração da proposição acima, encontramos uma relação de recorrência satisfeita para quaisquer *Números de Stirling* do tipo S_n^k, ou seja, o número de maneiras de distribuir n objetos distintos dentro de k recipientes idênticos, com nenhum recipiente vazio.

Portanto chegamos a seguinte relação de recorrência

$$\begin{aligned} &S_n^1 = 1, \quad S_n^n = 1 \\ &S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k, \quad \textit{para} \quad 1 < k < n. \end{aligned}$$

3.4.2 Número de Stirling de Primeiro Tipo

Começaremos a tratar do primeiro tipo do Número de Stirling fazendo uma problematização.

Exemplo 3.6 *Um Carcereiro tem sob sua autoridade* 4 *prisioneiros prestes a sentarem a uma mesa. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?*

Este problema equivale a distribuição de 4 objetos distintos em um círculo, portanto a pergunta equivalente é: quantos ciclos distintos de 4 elementos existem.

Conforme podemos facilmente calcular, existem $\frac{4!}{4} = 6$ ciclos distintos com 4 elementos. A saber:

$$[1,2,3,4],[1,2,4,3],[1,3,2,4],[1,3,4,2],[1,4,2,3],[1,4,3,2]$$

Seguindo um raciocínio parecido com o número de Stirling do segundo tipo, vamos analisar o seguinte exemplo.

Exemplo 3.7 *Um carcereiro tem que distribuir* 4 *prisioneiros em* 2 *mesas idênticas, nenhuma vazia. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?*

Indicaremos o conjunto de prisioneiros que serão colocados nas 2 mesas por $A = \{1,2,3,4\}$.

Acomodando o prisioneiro número 1, temos duas possibildades:

- O prisioneiro número 1 ficará sozinho numa mesa.
- O prisioneiro número 1 terá companhia.

No primeiro caso, teremos que acomodar os 3 detentos restantes numa mesa. Como o número de maneiras de distribuir 3 elementos numa mesa é igual ao ciclo de 3 elementos, isto pode ser feito de 2 modos distintos $[2, 3, 4]$ ou $[2, 4, 3]$. Assim, neste caso temos 2 modos:

$$[1] \cup [2, 3, 4] \quad e \quad [1] \cup [2, 4, 3]$$

A notação usada $[1] \cup [2, 3, 4]$ representa que o prisioneiro de número 1 ficará numa mesa e os de números $2, 3, 4$ ficarão na outra, em posições estabelecidas pelo ciclo $[2, 3, 4]$. O símbolo $\cup$ é usado significando que reunindo os elementos das duas mesas teremos todos os prisioneiros, conforme visualizamos na figura 3.26.

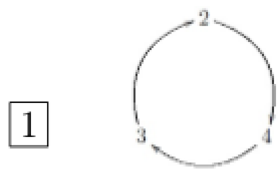

Figura 3.26: Disposição dos prisioneiros em duas mesas

No segundo caso temos que distribuir os três detentos restantes usando duas mesas, o que pode ser feito de 3 modos:

$$[2] \cup [3, 4], [3] \cup [2, 4] \ e \ [4] \cup [2, 3].$$

Agora, neste caso, o prisioneiro número 1 poderá ocupar uma das mesas de 9 modos:

$$[1, 2] \cup [3, 4], [1, 3] \cup [2, 4], [1, 4] \cup [2, 3], [2] \cup [1, 3, 4], [2] \cup [3, 1, 4], [3] \cup [1, 2, 4],$$

$$[3] \cup [2, 1, 4], [4] \cup [1, 2, 3] \ ou \ [4] \cup [2, 1, 3].$$

Portanto o número de fazer a distribuição de 4 detentos em duas mesas idênticas(nenhuma vazia) é igual a $2 + 9 = 11$.

Exemplo 3.8 *Um carcereiro tem que distribuir* 4 *prisioneiros em* 3 *mesas idênticas, nenhuma vazia. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?*

Usando as notações do exemplo anterior, temos 6 maneiras de fazer a distribuição, a saber:

$[1]\cup[2]\cup[3,4]$, $[1]\cup[3]\cup[2,4]$, $[1]\cup[4]\cup[1,2]$, $[2]\cup[3]\cup[1,2]$, $[2]\cup[4]\cup[1,3]$ *e* $[3]\cup[4]\cup[1,2]$

Com base nas argumentações acima, definiremos agora os números de Stirling de primeira espécie.

Definição 3.2 *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant k \geqslant 1$. O símbolo $S_{n,k}$ indicará o número de maneiras de arranjar n objetos distintos em k ciclos, ou equivalentemente, o número de maneiras de distribuir n prisioneiros em k mesas idênticas (nenhuma vazia).*

- *Quando $k = 1$ temos que $S_{n,1} = (n-1)!$ (n prisioneiros em uma mesa).*
- *Quando $k = n$ temos que $S_{n,n} = 1$ (um único modo, um prisioneiro em cada mesa).*
- *Quando $k > n$ a tarefa é claramente impossível, pois alguma mesa teria que ficar vazia.*
- *Quando $k \leqslant 0$ e $n > 0$ não podemos distribuir um número positivo de prisioneiros dentre zero mesas.*
- *Quando $1 < k < n$ encontraremos uma relação de recorrência satisfeita por $S_{n,k}$, ou seja, o número de maneiras de distribuir n prisioneiros distintos dentre k mesas idênticas, com nenhuma mesa vazia.*

Calculamos anteriormente que $S_{4,2} = 11$ e $S_{4,3} = 6$. Agora vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.9 *Tomando uma permutação de* 4 *elementos, por exemplo,* 1324*, onde $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$ e $f(4) = 4$, podemos representá-la por* 3 *ciclos, a saber:* $[1][2,3][4]$.

Listando todas as permutações de 4 elementos representadas pelos seus ciclos temos:

1. As escritas usando 1 ciclo, num total de 6, a saber:

$$[1,2,3,4] = 2341,\ [1,2,4,3] = 2413,\ [1,3,2,4] = 3421,\ [1,3,4,2] = 3142,$$

$$[1,4,2,3] = 4312,\ \ [1,4,3,2] = 4123.$$

2. As escritas usando 2 ciclos, num total de 11, a saber:

$$[1][2,3,4],\ [1][2,4,3],\ [2][1,2,4],\ [2][1,4,2],\ [3][1,2,4],\ [3][1,4,2],\ [4][1,2,3],\ [4][1,3,2],$$

$$[1,2][3,4],\ \ [1,3][2,4],\ \ [1,4][2,3].$$

3. As escritas usando 3 ciclos, num total de 6, a saber:

$$[1][2][3,4],\ \ [1][3][2,4],\ \ [1][4][2,3],\ \ [2][3][1,4],\ \ [2][4][1,3],\ \ [3][4][1,2].$$

4. As escritas usando 4 ciclos, uma única, a saber:

$$[1][2][3][4].$$

Donde obtemos $6 + 11 + 6 + 1 = 24 = 4!$

Esta interpretação de permutações escritas usando ciclos nos dará a seguinte igualdade;

$$\sum_{k=1}^{n} S_{n,k} = n!$$

A proposição seguinte estabelece uma relação de recorrência para os números de Stirling de primeira espécie.

Proposição 3.2 *Para números naturais* $1 < k < n$ *vale que*

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + (n-1)S_{n-1,k}.$$

Demonstração: Indicamos o conjunto de n elementos por $A = \{1, 2, ..., n\}$. Seus elementos serão distribuidos em k ciclos. Temos duas possibilidades:

- O elemento 1 constitui um ciclo isolado.
- O elemento 1 ficará num ciclo com mais de um elemento.
- O número de modos do primeiro caso é $S_{n-1,k-1}$, ou seja o número de maneiras de organizar $n-1$ elementos em $k-1$ ciclos.

No segundo caso, distribuímos os $n-1$ elementos restantes em k ciclos e em cada ciclo temos m posições para encaixar o 1, obtendo o número que é com m elementos

$$(n-1)S_{n-1,k}.$$

Portanto,

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + (n-1)S_{n-1,k}.$$

Assim, encontramos uma equação de recorrência satisfeita para quaisquer *Números de Stirling* do tipo $S_{n,k}$ ■

Com a demonstração da proposição acima, encontramos uma relação de recorrência satisfeita para quaisquer *Números de Stirling* do tipo $S_{n,k}$, ou seja, o número de maneiras de distribuir n prisioneiros distintos dentre k mesas idênticas, com nenhuma mesa vazia.

Portanto chegamos a seguinte relação de recorrência

$$\begin{aligned}
&S_{n,1} = 1, \quad S_{n,n} = 1 \\
&S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}, \quad para \;\; 1 < k < n.
\end{aligned}$$

3.5 O Problema de Josephus

O historiador judeu Flavius Josephus $(37-100)$ participou da revolta contra Roma no ano 66 e escapou do massacre após a captura da fortaleza em uma escura caverna, diz a lenda, que 41 rebeldes foram cercados por tropas romanas e antes de serem capturados, eles escolheram o suicídio em massa. Josephus e seu companheiro não pareciam muito convencidos do sacrifício, então ele propôs o seguinte: sentados em uma mesa circular, à partir de um certo escolhido, a terceira pessoa seria eliminada, até que apenas dois sobrevivessem. Josephus calculou as posições para que ele e seu companheiro sobrevivessem ao processo. Vide referência bibliográfica em [12].

Veremos a seguir o que talvez seja um dos primeiros problemas combinatórios da história, uma variação sobre o problema original de Josephus.

Sabendo que há n pessoas numeradas de 1 a n em um círculo, eliminaremos cada segunda pessoa restante até sobrar um única pessoa. Estamos interessados em calcular $J(n)$, o número do sobrevivente.

Para entendermos melhor a questão veremos o que acontece quando $n = 12$.

Após a primeira volta, eliminamos nessa ordem as pessoas de número $2, 4, 6, 8, 10$ e 12.

Na segunda volta descartamos $3, 7$ e 11. E finalmente, na última volta, eliminamos 5 e 1, restando somente a pessoa de número 9. Uma vez entendido o problema, vamos analisar os exemplos com valores pequenos:

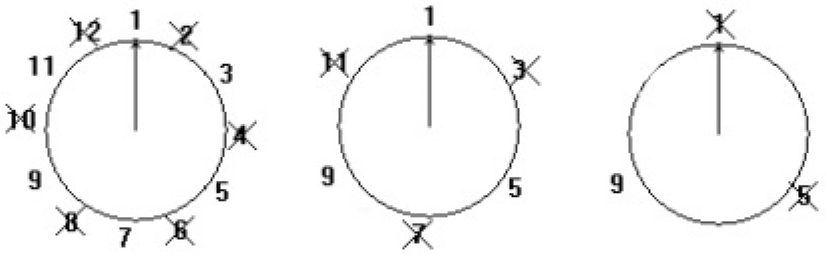

Figura 3.27: Eliminação por voltas

n	1	2	3	4	5	6
$J(n)$	1	1	3	1	3	5

Figura 3.28: Tabela de eliminação

Observamos que $J(n)$ é sempre ímpar, o que é coerente com o problema, uma vez que, como foi observado para $n = 12$, na primeira volta eliminamos todos que possuem número par.

Vamos supor então que temos $2n$ pessoas originalmente. Depois da primeira volta, em que eliminamos todos os pares, ficamos conforme a representação adiante.

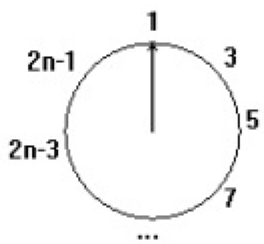

Figura 3.29: Eliminação para o caso 2n

Chegamos a uma situação semelhante à que começa com n pessoas, exceto que cada pessoa tem seu número dobrado e diminuído de 1, ou seja, $J(2n) = 2J(n) - 1$, $n \geqslant 1$. No caso ímpar, supondo que temos $2n + 1$ pessoas, a pessoa de número 1 é eliminada logo após a $2n$, restando novamente n pessoas que, desta vez, tiveram seus números dobrados e aumentados de 1.

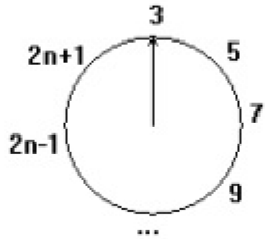

Figura 3.30: Eliminação para o caso 2n+1

Logo, $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$, $n \geqslant 1$. Combinando estas equações com sua condição inicial, chegamos à nossa relação de recorrência:

$$\begin{aligned} J(1) &= 1; \\ J(2n) &= 2J(n) - 1, \quad para \quad n \geqslant 1; \\ J(2n+1) &= 2J(n) + 1, \quad para \quad n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

A partir desta relação de recorrência podemos construir a seguinte tabela para valores pequenos de n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	...

Figura 3.31: Tabela de eliminação

Percebemos que a cada potência de 2 em n é formado um grupo que sempre se inicia com $J(n) = 1$ e, à medida em que n cresce, $J(n)$ aumenta de 2 em 2 dentro desse grupo. Então se escrevermos n na forma $n = 2^m + l$, em que 2^m é a maior potência de 2 que não é maior que n, e l é o que sobrou, teremos:

$$J(2^m + l) = 2l + 1, \quad m \geqslant 0 \quad e \quad 0 \leqslant l < 2^m \tag{3.6}$$

que é a forma fechada para (3.5) que procurávamos. Agora, temos que provar a validade de (3.6).

Vamos fazer a indução em m.

Quando $m = 0$, temos $l = 0$, logo o primeiro passo da indução nos dá $J(1) = 1$, o que é verdade.

Vamos dividir a segunda etapa da indução em duas partes: quando l é par ou ímpar.

Se l é par, como $m > 0$, $2^m + l = 2n$ e, pela segunda equação de (3.5) e usando a hipótese de indução, temos que:

$$J\underbrace{(2^m + l)}_{2n} = 2J\underbrace{(2^{m-1} + \frac{l}{2})}_{n} - 1 = 2(\frac{2l}{2} + 1) - 1 = 2l + 1$$

Se l é ímpar, como $m > 0$, $2^m + l = 2n + 1$, pela terceira equação de (3.5), temos:

$$J\underbrace{(2^m + l)}_{2n+1} = 2J\underbrace{(2^{m-1} + \frac{l-1}{2})}_{n} + 1 = 2(2\frac{l-1}{2} + 1) + 1 = 2l + 1$$

Logo, a indução está completa e a expressão (3.6) está provada.

Com este problema do salvamento, concluímos mais uma aplicação de recorrências lineares.

Referências Bibliográficas

[1] Muniz Neto, A. C., *Tópicos de Matemática Elementar, Números Reais*, -2.ed. Rio de Janeiro:SBM,2013. v.1; 235p. (Coleção do Professor de Matemática).

[2] Muniz Neto, A. C.,*Tópicos de Matemática Elementar, Combinatória*, -1.ed. Rio de Janeiro:SBM,2012. v.4; 237p. (Coleção do Professor de Matemática).

[3] Muniz Neto, A. C.,*Tópicos de Matemática Elementar, Polinômios*, -1.ed. Rio de Janeiro:SBM,2012. v.6; 248p. (Coleção do Professor de Matemática).

[4] Morgado, A. C., Pinto Carvalho , P.C.,*Matemática Discreta*, -2.ed. Rio de Janeiro:SBM,2015. 294p. (Coleção PROFMAT).

[5] Morgado, A. C., Wagner, E., Zani, S. C.,*Progressões e Matemática Financeira*, -6.ed. Rio de Janeiro:SBM,2015. 161p. (Coleção do Professor de Matemática).

[6] Hefez A., *Indução Matemática*, Niteroi: Programa de Iniciação Científica da OBMEP,2007. v.4 77p. (IC-OBMEP)

[7] Santos, J. Plínio O., Mello, M. P. e Murari, Idani T.C.*Introdução à Análise Combinatória*, -4.ed. revista. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.,2007. 389p.

[8] Pacheco, Adriano Mendes., *Modelagem matemática no ensino de equações de recorrência*, -Trabalhos de Conclusão de Curso: Mestrado Profissional em Matemática, 2013. 49p. (Profmat/SBM-UFMT).

[9] https://pt.wikipedia.org/wiki/James Stirling (matem

[10] www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre de hanoi.pdf.

[11] https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo Fibonacci.

[12] algoritmoconcreta.blogspot.com/2013/07/problema de josephus.html.