Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Matemática Discreta: Aplicações do Princípio de Inclusão e Exclusão. †

por

SEBASTIÃO ALVES BEZERRA NETO

sob orientação do Prof. Eduardo Gonçalves dos Santos

Dissertação apresentada como requisito parcial de obtenção do Grau de Mestre no Ensino de Matemática PROFMAT-CCEN-UFPB.

08/2016
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

B574m Bezerra Neto, Sebastião Alves.
Matemática discreta: aplicações do Princípio de Inclusão e Exclusão / Sebastião Alves Bezerra Neto.- João Pessoa, 2016.
60f. : il.
Orientador: Eduardo Gonçalves dos Santos
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Princípio da Inclusão e Exclusão. 3. Crivo de Eratóstenes. 4. Função Fi de Euler. 5. Permutações caóticas. 6. Número de Funções Sobrejetoras;

UFPB/BC CDU: 51(043)

Matemática Discreta: Aplicações do Princípio de Inclusão e Exclusão.

por

SEBASTIÃO ALVES BEZERRA NETO

Dissertação apresentada como requisito parcial de obtenção do Grau de Mestre no Ensino de Matemática do PROFMAT-CCEN-UFPB.

Área de Concentração: Matemática Discreta, Princípio da Inclusão e Exclusão.

Aprovada por:

Eduardo Gonçalves dos Santos

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos -UFPB (orientador)

Uberlandio Batista Severo

Prof.Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

Rodrigo Genuino Clemente

Prof.Dr. Rodrigo Genuino Clemente - UFRPE

Agosto/2016

Agradecimentos

Quero agradecer em primeiro lugar a Deus que em cada momento de alegria, de aperto ou de frustação, sempre esteve comigo me proporcionando nova esperança, motivação e bastante força para que chegasse até o final deste curso.

A todos da turma PROFMAT-2014, além de outros alunos do PROFMAT com os quais tive o prazer de conviver nos dois últimos anos e que participaram de alguma forma desta importante conquista pessoal.

Ao meu pai, meus familiares e amigos que sempre tiveram compreensão quando não pude dar-lhes a atenção que mereciam durante as duríssimas jornadas de estudos.

Ao meu irmão Célio que tem amparado nosso pai, me proporcionando tranquilidade e disponibilidade de tempo, dois fatores primordiais para este nível de estudo.

Ao amigo Leonaldo Gonzaga, pela compreensão quando necessitava me afastar do trabalho além da ajuda com a tecnologia.

A Fabiano Castro que me orientou muito com o latex sempre que precisei durante a escrita deste trabalho, o que tornou possível a organização do mesmo.

Aos amigos Carlos Muniz Júnior, Francisco Nogueira, Ítalo Gusmão e Rafael Tavares companheiros de viagens à UFPB e de apoio em momentos de dificuldades no curso.

Aos amigos Edson Araújo, José Gonzales e Manoel Marcos, companheiro de estudos até altas horas da noite.

A todos que fazem parte das escolas que leciono por me incentivarem e se alegrarem com cada objetivo alcançado durante o curso e em minha vida profissional.

Agradecimento especial ao professor Ivelton Lustosa que com seu vasto conhecimento e humanidade ajudou muito a turma.

Ao meu orientador Prof. Eduardo Gonçalves dos Santos, que com seu profissionalismo, sua paciência e dedicação tornou possível a conclusão deste trabalho.

Ao Coordenador do Curso Bruno Ribeiro e todos os professores do PROFMAT, Alexandre Simas, Bruno Ribeiro, Carlos Bocker, Gilmar Correia, Eduardo Gonçalves, Lenimar Andrade, Lizandro Sanchez, Napoleon Tuesta e Sérgio de Albuquerque, que com paciência, dedicação e amizade, aliviaram a tensão produzida pelo curso.

À Prefeitura Municipal do Jaboatão dos Guararapes que através de liberações de Licenças para realização de cursos, proporciona incentivo a qualificação do professor.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus filhos que sempre estão comigo em todos os momentos e principalmente a minha querida esposa que com paciência e dedicação sempre me confortou nos momentos mais difíceis que passei durante o curso.

Em especial aos meus irmãos Jeferson e Wilton (in-memorian) que me incentivaram a realizar este Mestrado, apesar de todos os seus problemas de saúde.

A todos que se alegram com o nosso sucesso.

Resumo

O processo de ensino aprendizagem da Matemática está intimamente relacionado com a resolução de problemas teóricos e práticos, os quais geralmente envolvem situações do cotidiano de nossa sociedade. Esse trabalho tem como objetivo apresentar o Princípio da Inclusão e Exclusão como ferramenta para resolução de vários modelos de problemas que envolvem a contagem de elementos, principalmente aquelas que aparecem contagem duplas, triplas, dentre outras. Além disso, busca relacioná-lo com a determinação de números primos de um número e com o Crivo de Eratóstenes, utilizá-lo para sistematizar a Fórmula da Função Fi (Φ) de Euler, bem como para a determinação do Número de Permutações Caóticas e do Número de Funções Sobrejetoras.

Palavras-chave: Princípio da Inclusão e Exclusão, Crivo de Eratóstenes, Função Fi de Euler, Permutações Caóticas e Número de Funções Sobrejetoras.

Abstract

The process of teaching and learning of mathematics is closely related to the resolution of theoretical and practical problems, which often involve situations of everyday life in our society. This work aims to present the Inclusion and Exclusion Principle as a tool for solving many problems involving counting elements, especially those that appear double, triple counting, among others. It also seeks to relate it with the determination of prime numbers of a number and the Sieve of Eratosthenes, use it to systematize the Formula of the function Fi (*Phi*) Euler, as well as for determining the number of permutations Chaotic and number of Sobrejetoras functions.

Keywords: Inclusion and Exclusion Principle, Sieve of Eratosthenes, function Fi Euler, Permutations Chaotic and number of Sobrejetoras functions.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Pretendemos neste trabalho abordar a importância do Princípio da Inclusão e Exclusão como fonte alternativa para a resolução de muitos problemas de contagem, como por exemplo, problemas onde surge o fenômeno de contagem dupla, tripla, etc., propiciando a alunos de Ensino Médio uma percepção da união entre mais de três conjuntos, uma vez que normalmente conhecem o mecanismo (porém, muitas vezes não é apresentado como Princípio da Inclusão e Exclusão) para dois ou no máximo três conjuntos. São problemas típicos: a determinação da quantidade de números primos menores ou igual a um inteiro positivo, encontrar o número de soluções de certas Equações Diofantinas. Há muitos problemas matemáticos que são resolvidos através da contagem do Número de Funções Sobrejetoras entre dois conjuntos. A determinação deste número de funções pode ser obtido com facilidade e de maneira precisa pela utilização do Princípio da Inclusão e Exclusão. Veremos ainda que este princípio se relaciona com a Função Fi de Euler e com as Permutações Caóticas, portanto, é uma ferramenta muito importante para a contagem.

Nosso trabalho está dividido em três capítulos.

No Capítulo 1, estudaremos situações que servirão de motivação para o estudo do Princípio da Inclusão e Exclusão, como, por exemplo, a brincadeira do "amigo oculto". Desenvolveremos a Fórmula para o Princípio da Inclusão e Exclusão para a reunião de dois e de três conjuntos e, em seguida, veremos algumas aplicações.

No Capítulo 2, abordaremos a reunião entre quatro conjuntos, utilizando as ideias obtidas no capítulo anterior, para generalizar a fórmula para o Princípio da Inclusão e Exclusão para n conjuntos. Veremos uma outra maneira de apresentar este princípio e faremos algumas aplicações.

No Capítulo 3, intitulado Mais Algumas Aplicações, estudaremos O Crivo de Eratóstenes, a Função Fi de Euler, as Permutações Caóticas e a Determinação do Número de Funções Sobrejetoras.

O Crivo de Eratóstenes é um algoritmo e um método simples para encontrar números primos até certo valor limite. Foi criado pelo matemático grego Eratóstenes, o terceiro bibliotecário-chefe da Biblioteca de Alexandria, que viveu entre os anos 276 a.C. e 194 a.C. Ele desenvolveu uma tabela, que ficou conhecida como **Crivo de Eratóstenes**, onde ele conseguiu, não com uma fórmula (pois este é um dos desafios do Instituto Clay de Matemática, ver postagem do dia 07/05/2013 no www.claymath.org), mas com uma tabela os números naturais primos. Eratóstenes aplicou a determinação dos números primos escrevendo os números de 1 a 1000.

A Função Fi de Euler recebeu este nome por que foi o matemático suíço Leonhard Euler quem a determinou. Ela também é conhecida como Função Indicador Φ de Euler ou simplesmente por função Fi. Esta função indica a quantidade de números inteiros positivos menores que ou igual a certo número m natural, que são relativamente primos com m.

Em símbolos, escrevemos

$$\Phi(m) = \left|\{x \in \mathbb{N}/x \leq m \ e \ mdc(x, m) = 1\}\right|,$$

onde |A| indica o número de elementos do conjunto A.

A Matemática, particularmente, a Teoria dos Números, tem grande aplicação na Criptografia. A Criptografia é a área do conhecimento que tem como objetivo propriciar a troca segura de informações entre um transmissor e um receptor. Ela procura tornar a comunicação indecifrável para todos, exceto para órgãos autorizados, sendo utilizada em transações bancárias no internet banking, nas compras com cartões via internet, entre outras aplicações. A função Φ de Euler é aplicada em um método de Criptografia denominado RSA, método esse criado em 1977 por R. Rivest, A. Shamire e L. Adleman.

Desde que as primeiras sociedades foram formadas, a comunicação entre os seres humanos tornou-se primordial. A arte de cifrar/decifrar mensagens tem desempenhado papel indispensável em diversas áreas da vida cotidiana. Percebemos desta maneira a importância da função Φ de Euler. (Para aprofundamento deste assunto, recomendamos [5]).

A brincadeira do "amigo oculto", bastante difundida em nossa sociedade, nos remete a uma antiga e intrigante questão do século XVIII que motivou o célebre matemático Leonhard Euler a empenhar-se em difícil e surpreendente trabalho com a intenção de solucioná-la. A questão ficou conhecida como o "problema das cartas mal endereçadas" que consistia em descobrir de quantas maneiras distintas pode-se colocar n cartas em n envelopes, endereçados a n destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto. Em outras palavras, o problema equivale a:

Se um conjunto de n itens é permutado aleatoriamente, qual a probabilidade que nenhum deles volte à sua posição original.

Tanto a brincadeira do "amigo oculto" quanto o "problema das cartas mal endereçadas", são situações de Análise Combinatória conhecida como Permutações Caóticas ou simplesmente "desarranjos". Estas situações serão abordadas em nosso trabalho.

No Ensino Médio, é mais comum a resolução de questões que envolvem o Número de Funções Bijetoras e de Funções Injetoras, porém as que envolvem o Número de Funções Sobrejetoras, são menos exploradas. Pretendemos, neste trabalho, mostrar que o Princípio da Inclusão e Exclusão pode ajudar na determinação do cálculo desta quantidade de maneira mais prática.

Veremos a seguir um pouco da história do matemático que enunciou pela primeira vez o Princípio da Inclusão e Exclusão.

Daniel Augusto da Silva um dos mais importantes matemáticos portugueses do século XIX, recebeu o primeiro nome do seu padrinho, Daniel Nunes Ribeiro. Ele também foi oficial da marinha portuguesa, natural de Lisboa, nasceu no dia 16 de maio de 1814 e faleceu em 6 de outubro de 1878.

Iniciou a formação acadêmica na Academia Real da Marinha em 1829, concluindo seu curso em 1832. Em seguida, ingressou na Academia dos Guardas-Marinhas concluindo seus estudos nesta academia em 1835. A Academia Real da Marinha passou a integrar em 1837 a Escola Politécnica. Em 1845, a Academia dos Guardas-Marinhas deu origem à Escola Naval. Daniel foi para a Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra cursar Bacharelato em Matemática, concluindo-o em 1839. Na Academia Real da Marinha, frequentou o Curso Mathematico, trienal, que possibilitava o acesso a profissões não só da Marinha como também do Exército. Foi nomeado lente substituto da Escola Naval sem a necessidade de concurso, por intermédio de diligências feitas por lentes do Conselho da Escola Politécnica de Lisboa em 1848, passando três anos depois a lente proprietário. Exerceu este cargo até se jubilar em 1865. Nos finais de 1868, reformou-se de oficial de marinha, no posto de Capitão-de-Fragata. Passou a ser sócio livre da Academia Real das Ciências de Lisboa em 19 de fevereiro de 1851, sócio efectivo em 7 de janeiro de 1852 e em 20 de janeiro de 1859 tornou-se sócio de mérito, passando a receber uma pensão anual e vitalícia no valor de 200$000 réis. Em conversa com o amigo José Maria Latino Coelho, secretário-geral da Academia, anuncia a decisão de contrair casamento. Casou-se com Zefferina d'Aguiar (1825-1913) aos 44 anos na igreja de S. José de Lisboa, em 16 de abril de 1859. Desta união, nasceu um único filho, Júlio Daniel da Silva (1866-1891). Em uma de suas obras de Matemática ele enunciou e escreveu pela primeira vez um importante método da Teoria dos Conjuntos e da

Combinatória, que foi o Princípio da Inclusão-Exclusão. Os conceitos subjacentes a este princípio são atribuídos, frequentemente, a Abraham de Moivre, porém a fórmula matemática que o representa aparece pela primeira vez na Memória de Daniel da Silva, apresentada em 1852 à Academia de Ciências de Lisboa e publicada em 1854. Outra importante publicação matemática é a sua Memória sobre a rotação das forças em torno dos pontos de aplicação, em que ele corrige um resultado de August Möbius, apresentada em 1850 à Academia de Ciências de Lisboa onde antecipa em vários anos o trabalho científico de Gaston Darboux sobre rotação das forças em torno dos seus pontos de aplicação. Muito embora tenha sido professor por vinte anos, desde meados de 1852 até de 1859, por motivos de doença, Daniel da Silva precisou afastar-se tanto da docência na Escola Naval quanto da Academia das Ciências de Lisboa. Os longos períodos de ausência por motivos de saúde reduzem a sua carreira de magistério a cerca de sete anos de serviço efectivo.

A partir de meados da década de 1860 estudou questões relacionadas a viabilidade de planos de pensões de montepios de sobrevivência que tinha como objetivo pagar pensões aos herdeiros dos seus sócios, após o seu falecimento. A importância dos escritos que compôs não está no nível do valor científico e sim na introdução de métodos aconselhados pela ciência na organização de fundos de pensões, marcando o seu pioneirismo na introdução da Matemática Actuarial em Portugal.

Figura 1: Daniel Silva.

Capítulo 1

Princípio da Inclusão e Exclusão

Estudaremos neste capítulo situações que servirão de motivação para o estudo do Princípio da Inclusão e Exclusão. Comecemos com o seguinte exemplo:

Seja uma brincadeira de "amigo oculto", na qual n pessoas escrevem seu nome num pedaço de papel e o depositam num recipiente, de onde cada um retira aleatoriamente um dos pedaços de papel. O problema é descobrir qual a probabilidade de ninguém pegar seu próprio nome.

Vejamos uma ilustração deste problema utilizando apenas três amigos. Pelo Princípio Multiplicativo, teríamos um total de seis possibilidades de retiradas dos papéis, uma vez que: a primeira pessoa a retirar teria três nomes à sua disposição, a segunda pessoa teria dois nomes à sua disposição e, logicamente, sobraria apenas um nome para a terceira pessoa retirar do recipiente. Assim, teríamos $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras dos nomes serem retirados do recipiente aleatoriamente. Podemos separar essas seis maneiras em três casos:

Primeiro caso - A primeira pessoa poderá retirar seu próprio nome em duas situações:

1ª situação: Com a segunda e terceira pessoas também retirando seus próprios nomes.

2ª situação: Com a segunda retirando o nome da terceira e a terceira o nome da segunda. Neste caso, nenhuma das situações satisfazem nosso problema.

Observe a ilustração do primeiro caso na Tabela 1.1:

1ª	participante	p_1	p_2	p_3	2ª	participante	p_1	p_2	p_3
	nome retirado	n_{p_1}	n_{p_2}	n_{p_3}		nome retirado	n_{p_1}	n_{p_3}	n_{p_2}

Tabela 1.1: **Primeiro Caso.**

Segundo caso - A primeira pessoa poderá retirar o nome da segunda pessoa em duas situações:

1ª situação: Com a segunda pessoa retirando o nome da primeira e a terceira pessoa retirando seu próprio nome.

2ª situação: Com a segunda retirando o nome da terceira e a terceira retirando o nome da primeira. Neste caso apenas a 2ª situação satisfaz nosso problema.

Observe a ilustração do segundo caso na Tabela 1.2:

1ª	participante	p_1	p_2	p_3	2ª	participante	p_1	p_2	p_3
	nome retirado	n_{p_2}	n_{p_1}	n_{p_3}		nome retirado	n_{p_2}	n_{p_3}	n_{p_1}

Tabela 1.2: **Segundo Caso.**

Terceiro caso - A primeira pessoa poderá retirar o nome da terceira pessoa também em duas situações:

1ª situação: Com a segunda retirando o nome da primeira e a terceira pessoa o nome da segunda.

2ª situação: Com a segunda retirando seu próprio nome e a terceira retirando o nome da primeira. Analisando o terceiro caso, apenas a 1ª situação resolve nosso problema.

Observe a ilustração do terceiro caso na Tabela 1.3:

1ª	participante	p_1	p_2	p_3	2ª	participante	p_1	p_2	p_3
	nome retirado	n_{p_3}	n_{p_1}	n_{p_2}		nome retirado	n_{p_3}	n_{p_2}	n_{p_1}

Tabela 1.3: **Terceiro Caso.**

Portanto a probabilidade de que entre três amigos nenhum deles pegue seu próprio nome com retiradas aleatórias é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Vejamos agora o início da solução para o caso geral da brincadeira entre n amigos. A solução completa, veremos no Capítulo 3. Cada sorteio é uma bijeção do conjunto dos amigos sobre ele mesmo - o que é geralmente chamado de permutação. Em outros termos, cada sorteio é uma função bijetora do conjunto $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ sobre ele mesmo.

Notemos que o primeiro a escolher terá n nomes à sua disposição, o segundo $n-1$, o terceiro $n - 2$ e assim sucessivamente até que o penúltimo terá duas escolhas e o último apenas 1. Pelo Princípio Multiplicativo da Contagem obtemos a quantidade

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times ... \times 2 \times 1 = n!$$

funções bijetoras de $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ sobre ele mesmo.

Destas $n!$ funções possíveis de retirar os nomes do recipiente, aleatoriamente, precisaremos descontar aquelas em que uma ou mais pessoas retiram seus próprios nomes. Existem algumas maneiras possíveis para resolvermos este problema. Mas, antes de continuarmos a sua resolução, veremos outros problemas onde esse tipo de situação ocorre.

Os tipos de situações que exploraremos nesse trabalho serão aquelas em que aparecerão problemas de contagem dupla, tripla, etc. Para solucioná-las, iremos utilizar a técnica de subtrair as repetições e em seguida, repor os descontos a mais (técnica conhecida como Princípio da Inclusão e Exclusão).

Vejamos inicialmente a contagem dos elementos da União entre dois conjuntos disjuntos. Por definição, conjuntos disjuntos são aqueles que não possuem elementos comuns. Logo, a quantidade de elementos da União entre conjuntos deste tipo é dada pela soma da quantidade de elementos de cada conjunto.

Exemplo 1.1 *Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Vamos agora, representar o conjunto união entre esses dois conjuntos e, em seguida, verificarmos a quantidade de elementos do mesmo.*

A união de conjuntos é representada por $A \cup B$ para dois conjuntos, por exemplo, significa agrupar em um novo conjunto todos os elementos que pertençam aos conjuntos envolvidos. Assim, no nosso exemplo, temos

$$A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}.$$

Portanto a quantidade de elementos da união entre os conjuntos A e B do exemplo é 8.

Denotando por $|A|$ e $|B|$, as cardinalidades $\leftrightarrow$ *quantidades de elementos* $\leftrightarrow$ do conjunto A e do conjunto B, respectivamente, podemos calcular a cardinalidade da união entre os conjuntos A e B, disjuntos acima, que denotamos por $|A \cup B|$ da seguinte maneira:

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 3 + 5 = 8.$$

Como não tratamos apenas com conjuntos disjuntos, veremos a seguir que a determinação da quantidade de elementos da união entre dois ou mais conjuntos que não sejam disjuntos não é tão simples e a dificuldade aumenta quando a quantidade de conjuntos cresce. Quando desejarmos contar os elementos de conjuntos não disjuntos, será necessário, evidentemente, descontar a quantidade de elementos repetidos e observar se houve descontos a mais que necessitem serem repostos.

Exemplo 1.2 *Sejam os conjuntos* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$*. Vamos acompanhar a determinação do número de elementos da união desses dois conjuntos.*

Vamos inicialmente agrupar os elementos dos conjuntos, como se eles fossem disjuntos, isto é, realizar a união entre os conjuntos A e B.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 8\}.$$

Retirando as repetições, isto é, os elementos 2 e 4, obtemos

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} = 8 \ \ elementos.$$

É fato que 2 e 4 pertencem ao mesmo tempo aos dois conjuntos, o que define a operação de Interseção entre dois conjuntos representada por $A \cap B$. Para nosso exemplo $A \cap B = \{2, 4\}$, acarretando que $|A \cap B| = 2$ elementos. Assim a cardinalidade de elementos da união entre os conjuntos A e B, é dada pela fórmula:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (1.1) \\ &= 5 + 5 - 2 \\ &= 8. \end{aligned}$$

A fórmula (1.1) é a fórmula do Princípio da Inclusão e Exclusão para dois conjuntos não disjuntos. Esta fórmula serve também para conjuntos disjuntos, uma vez que a interseção entre conjuntos disjuntos é o conjunto vazio e, então, $|A \cap B| = 0$.

Observe a ilustração na figura 1.1.

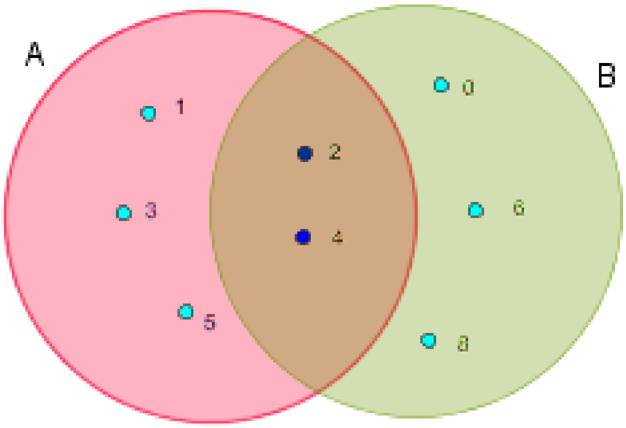

Figura 1.1: União entre dois conjuntos.

Exemplo 1.3 *Numa classe de* 30 *alunos,* 14 *falam inglês,* 5 *falam alemão e* 3 *falam inglês e alemão. A pergunta é, quantos alunos falam pelo menos uma língua dentre eles?*

Podemos, por exemplo, denotar os seguintes conjuntos:

I - Como o conjunto dos alunos que falam inglês. Assim, $|I| = 14$;

A - Como o conjunto dos alunos que falam alemão. Logo, $|A| = 5$.

A interseção entre esses conjuntos representa os alunos que falam as duas línguas e que possui 3 elementos, isto é, $|I \cap A| = 3$. Aplicando o Princípio da Inclusão e Exclusão para o cálculo da quantidade de elementos da união entre dois conjuntos, obtemos

$$\begin{aligned} |I \cup A| &= |I| + |A| - |I \cap A| \\ &= 14 + 5 - 3 \\ &= 16. \end{aligned}$$

Portanto, 16 alunos falam pelo menos uma língua.

Antes de solucionarmos o próximo exemplo, veremos um conceito bastante importante que será utilizado na resolução do mesmo.

Segundo [1], a notação $\lfloor x \rfloor$ é utilizada para representar o maior inteiro menor do que ou igual ao real x (às vezes chamado de chão de x), enquanto que $\lceil x \rceil$ (denominado teto de x), indica o menor inteiro maior do que ou igual a x. Os conceitos estão ilustrados na figura 1.2, onde a reta graduada representa o eixo dos reais e as marcações maiores representam números inteiros.

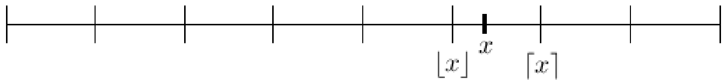

Figura 1.2: Representação do chão e do teto do número x.

Para resolvermos este exemplo, devemos encontrar a quantidade de múltiplos de 5, de 7 e de 35 que é o menor múltiplo comum entre 5 e 7 e, em seguida, aplicarmos o Princípio da Inclusão e Exclusão.

Exemplo 1.4 *Dentre os números de* 1 *até* 3600 *inclusive, quantos são divisíveis por* 5 *ou por* 7*?*

Seja A_i o conjunto dos inteiros positivos múltiplos de i e menores ou iguais a 3600. Observe que $|A_i| = \left\lfloor \frac{3600}{i} \right\rfloor$. O conjunto $A_i \cap A_j$ indica o conjunto dos múltiplos de i e de j menores ou iguais a 3600, isto é, indica o conjunto dos múltiplos comuns a i e a j, menores ou iguais a 3600. Então, temos que:

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{3600}{5} \right\rfloor = 720;$$

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{3600}{7} \right\rfloor = 514;$$

$$|A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{3600}{35} \right\rfloor = 102.$$

Assim, como desejamos calcular $|A_5 \cup A_7|$, segue pelo Princípio da Inclusão e Exclusão que

$$\begin{aligned} |A_5 \cup A_7| &= |A_5| + |A_7| - |A_5 \cap A_7| \\ &= 720 + 514 - 102 \\ &= 1132. \end{aligned}$$

Portanto, dentre os números de 1 até 3600 inclusive, temos 1132 números que são divisíveis por 5 ou por 7.

Para aplicarmos o Princípio da Inclusão e Exclusão na união de três conjuntos, devemos identificar as interseções dois a dois e a interseção entre os três conjuntos. Vejamos como devemos proceder para determinarmos a fórmula que nos forneça o número de elementos da união de três conjuntos através do exemplo abaixo.

Exemplo 1.5 *Sejam os conjuntos* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ *e* $C = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Determinemos as seguintes interseções:

1. $A \cap B = \{2, 4\}$;
2. $A \cap C = \{3, 4, 5\}$;
3. $B \cap C = \{0, 4, 6, 8\}$;
4. $A \cap B \cap C = \{4\}$.

Façamos, agora, a união dos três conjuntos como se fossem disjuntos

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C =& \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{0, 2, 4, 6, 7, 8\} \cup \{0, 3, 4, 5, 6, 8, 9\} \\ =& \{0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9\}. \end{aligned}$$

Retirando as repetições (interseções) dois a dois, ou seja, os elementos $0, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6$ *e* 8, obtemos

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Podemos notar que o elemento 4 que é a interseção entre os três conjuntos foi retirado totalmente da união, assim sendo, ele precisa ser incluído novamente, daí

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \textit{ possui } 10 \textit{ elementos.}$$

Então, a fórmula para determinar a cardinalidade de elementos da união de três conjuntos é:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (1.2) \\ &= 5 + 6 + 7 - 2 - 3 - 4 + 1 \\ &= 10 \textit{ elementos.} \end{aligned}$$

A fórmula (1.2) é a fórmula do Princípio da Inclusão e Exclusão para três conjuntos.

Observe a ilustração na figura 1.3.

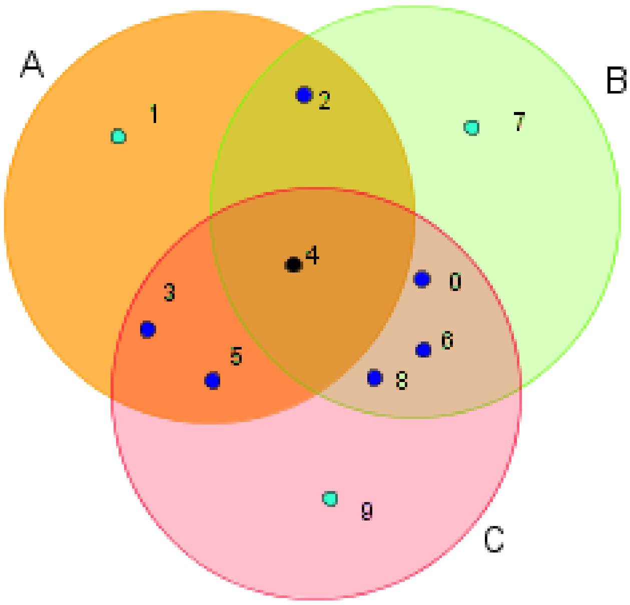

Figura 1.3: União entre três conjuntos.

Exemplo 1.6 *Numa classe de* 30 *alunos,* 14 *falam inglês,* 5 *falam alemão e* 7 *falam francês. Sabendo-se que* 3 *falam inglês e alemão,* 2 *falam inglês e francês,* 2 *falam francês e alemão e que* 1 *fala as* 3 *línguas, determinar o número de elementos dos que falam pelo menos uma destas três línguas.*

Para resolvermos este problema podemos aplicar o Princípio da Inclusão e Exclusão. Devemos determinar a união dos conjuntos I, A, F, em que I representa o conjunto dos alunos que falam inglês, A o conjunto dos alunos que falam alemão e F o conjunto dos alunos que falam francês, respectivamente. Temos que:

$$|I| = 14;$$

$$|A| = 5;$$

$$|F| = 7;$$

$$|I \cap A| = 3;$$

$$|I \cap F| = 2;$$

$$|A \cap F| = 2 \text{ e}$$

$$|I \cap A \cap F| = 1.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}|I \cup A \cup F| &= |I| + |A| + |F| - |I \cap A| - |I \cap F| - |A \cap F| + |I \cap A \cap F| \\ &= 14 + 7 + 5 - 3 - 2 - 2 + 1 \\ &= 20.\end{aligned}$$

Portanto temos que 20 alunos falam pelo menos um dos idiomas.

Exemplo 1.7 *Neste exemplo, devemos calcular o número de inteiros positivos menores do que ou igual a* 100 *que sejam múltiplos de* 2, 3 *ou* 5.

Para chegarmos a resposta, basta calcularmos a quantidade de elementos da união entre os múltiplos de 2, 3 ou 5. Para isto, aplicaremos novamente o Princípio da Inclusão e Exclusão.

$$\begin{aligned}|A_2 \cup A_3 \cup A_5| &= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + \\ &+ |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \\ &= \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor \\ &= 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 \\ &= 74.\end{aligned}$$

Logo, são 74 múltiplos de 2, 3 ou 5 menores ou igual a 100.

Exemplo 1.8 *Um paralelepípedo de dimensões* $150 \times 324 \times 375$ *é feito de cubos unitários. Pelo interior de quantos cubos unitários a diagonal do paralelepípedo passa?*

Esta resolução é uma adaptação de [1] e de [6], antes de resolvermos este problema, analisaremos uma situação bidimensional que nos permitirá entender melhor a solução deste exercício. Consideremos, por exemplo, a solução para um retângulo de dimensões 20×8. Na figura 1.4, podemos perceber que o retângulo está dividido em quadrados unitários o que nos fornece 20 retas verticais e 8 retas horizontais. Assim, poderíamos imaginar que o número de quadrados unitários que a diagonal passaria seria a soma dessas retas.

Acontece que partindo do ponto inicial do retângulo $(0, 0)$ ao ponto final (20,8), a diagonal atinge ao mesmo tempo as retas horizontal e vertical em quatro pontos os quais são: $(5, 2)$, $(10, 4)$, $(15, 6)$ e $(20, 8)$. Como nestes quadrados a diagonal atinge ao mesmo tempo as duas retas, elas não poderiam ter sido contadas individualmente. Desta maneira, devemos subtrair a quantidade de quadrados que tal fato ocorre.

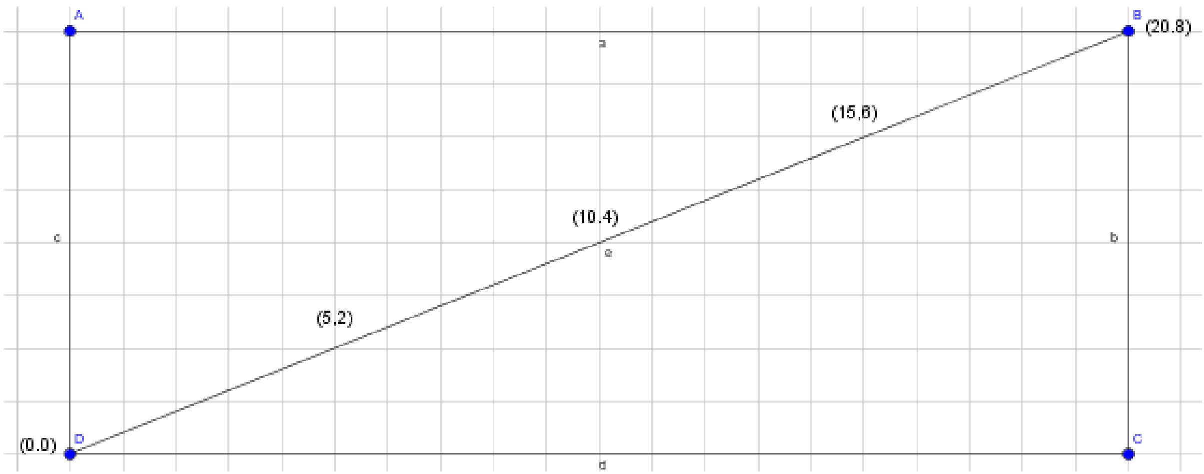

Figura 1.4: Retângulo 20x8.

Esta quantidade, refere-se exatamente ao mdc entre as dimensões do retângulo. Para o exemplo, temos $mdc(8, 20) = 4$. Obtemos as coordenadas do primeiro ponto dividindo as coordenadas do ponto final pelo mdc. Os demais pontos serão encontrados multiplicando-o por k, com $k \in \mathbb{Z}$, tal que $k = 1, 2, ..., (mdc - 1)$. Assim, denominando de:

V o conjunto das retas verticais, temos $|V| = 20$;

H o conjunto das retas horizontais, temos $|H| = 8$;

I o conjunto formado pelas interseções entre as retas horizontais e verticais, temos $|I| = 4$.

Logo, o número de quadrados unitários que a diagonal passa é o número de elementos da união entre os conjuntos V e H, ou seja,

$$\begin{aligned} |V \cup H| &= |V| + |H| - |I| \\ &= 20 + 8 - 4 \\ &= 24. \end{aligned}$$

Portanto, temos um total de 24 quadrados unitários atingidos pela diagonal.

Generalizando, para retângulo de dimensões a e b, o número de quadrados unitários que a diagonal passa é dado por $a + b - mdc(a, b)$.

De modo geral, podemos tomar como base um paralelepípedo do tipo $m \times n \times p$. Imaginemos este paralelepípedo cortado em m fatias longitudinais , n fatias transversais e p fatias verticais. A diagonal que parte do ponto $(0,0,0)$ ao ponto (m,n,p) teoricamente cortaria cada uma das fatias m, n e p, então teríamos $m+n+p$ fatias. Porém a diagonal poderá cortar o interior dos cubos unitários das seguintes maneiras:

Primeiramente na longitudinal, na transversal, ou na vertical, em duas dessas ao mesmo tempo ou ainda nas três simultaneamente. Ao designarmos L como conjunto dos cubos cortados primeiramente na longitudinal, T como conjunto dos inicialmente cortados na transversal e por V aqueles em que o corte ocorre na vertical por primeiro e calculando a quantidade de elementos da união entre esses conjuntos, obtemos a quantidade de cubos unitários cortados pela diagonal.

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos que:

$$|L \cup T \cup V| = |L| + |T| + |V| - |L \cap T| - |L \cap V| - |T \cap V| + |L \cap T \cap V|.$$

Aplicando o mesmo raciocínio do caso bidimensional, cada interseção representa um mdc entre o número de elementos dos conjuntos. Então para o paralelepípedo genérico $m \times n \times p$, o resultado é dado por

$$|L \cup T \cup V| = m + n + p - mdc(m,n) - mdc(m,p) - mdc(n,p) + mdc(m,n,p).$$

Como o paralelepípedo solicitado tem dimensões $150 \times 324 \times 375$, podemos supor que L possui 150 elementos, T possui 324 elementos e V possui 375 elementos, então,

$$\begin{aligned}
|L \cup T \cup V| &= 150 + 324 + 375 - mdc(150,324) - mdc(150,375) - mdc(324,375) + \\
&+ mdc(150,324,375) \\
&= 150 + 324 + 375 - 6 - 75 - 3 + 3 \\
&= 768,
\end{aligned}$$

isto é, a diagonal do paralelepípedo passa pelo interior de 768 cubos unitários.

Capítulo 2

Uma variante do Princípio da Inclusão e Exclusão e algumas aplicações

Neste capítulo, utilizaremos o Princípio da Inclusão e Exclusão para união entre quatro conjuntos. Em seguida, iremos generalizar a fórmula para este Princípio. Veremos também que o mesmo pode ser utilizado para a resolução de alguns tipos de equações.

Exemplo 2.1 *Sejam os conjuntos* $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 14\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 14\}$, $C = \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15\}$ *e* $D = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$. *Qual a quantidade de elementos da união desses quatro conjuntos?*

Vamos tentar descobrir, utilizando ideias do capítulo anterior, uma fórmula que nos forneça o número de elementos da união para quatro conjuntos. Com os quatro conjuntos acima, podemos determinar as seguintes interseções:

Entre dois conjuntos:

1. $A \cap B = \{2, 5, 9, 14\}$;

2. $A \cap C = \{4, 5, 8, 9\}$;

3. $A \cap D = \{7, 8, 9, 14\}$;

4. $B \cap C = \{5, 6, 9, 10\}$;

5. $B \cap D = \{9, 10, 11, 14\}$;

6. $C \cap D = \{8, 9, 10, 12\}$.

Entre três conjuntos:

1. $A \cap B \cap C = \{5, 9\}$;
2. $A \cap B \cap D$=$\{9, 14\}$;
3. $A \cap C \cap D = \{8, 9\}$;
4. $B \cap C \cap D = \{9, 10\}$.

Entre os quatro conjuntos:

1. $A \cap B \cap C \cap D = \{9\}$.

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado para dois e três conjuntos, devemos:

- Incluir a quantidade de elementos de cada um dos conjuntos;
- Excluir a quantidade de elementos das interseções de dois a dois conjuntos;
- Incluir a quantidade de elementos das interseções de três a três conjuntos;
- Excluir a quantidade de elementos da interseção dos quatro conjuntos.

Vejamos porque este último passo, haja visto que os três primeiros passos já foram explicados. Ao somarmos os elementos dos conjuntos individualmente, incluímos quatro vezes a quantidade de elementos da interseção entre os quatro conjuntos. Em seguida, essa quantidade é excluída seis vezes no segundo passo (através das interseções dois a dois). Na terceira etapa voltamos a incluir quatro vezes esta mesma quantidade de elementos (através das interseções três a três).

Até este momento, temos a seguinte contabilidade

$$4 - 6 + 4 = 2,$$

isto é, temos uma quantidade a mais da cardinalidade da interseção entre os quatro conjuntos a qual é retirada no quarto passo. Assim, a quantidade de elementos da união de quatro conjuntos é dada pela fórmula:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| = {} & |A| + |B| + |C| + |D| - \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - \\ & - |A \cap B \cap C \cap D|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observe a ilustração na figura 2.1.

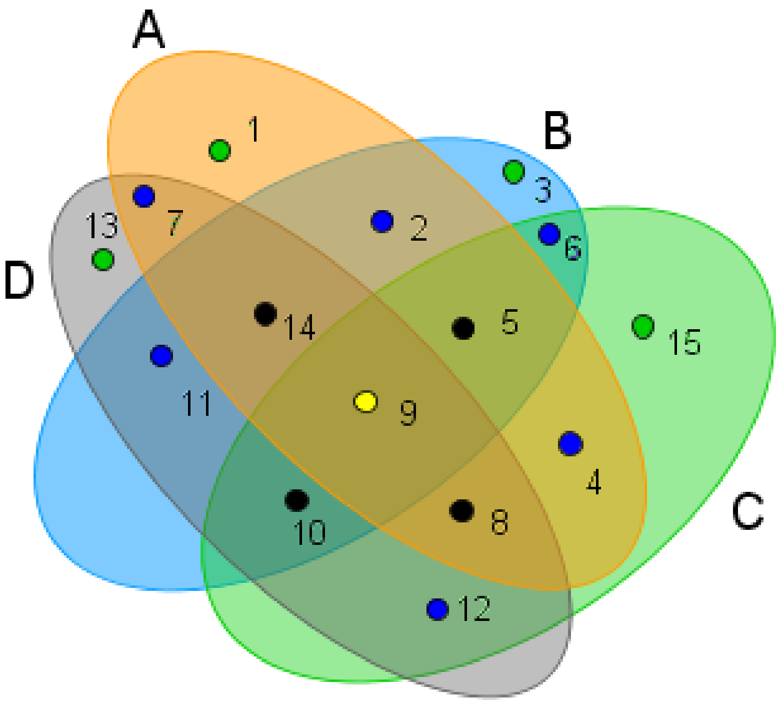

Figura 2.1: União entre quatro conjuntos.

A fórmula (2.1) é a fórmula do Princípio da Inclusão e Exclusão para quatro conjuntos. Portanto, para nosso exemplo, temos:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times 8 - 6 \times 4 + 4 \times 2 - 1 = 32 - 24 + 8 - 1 = 15 \; elementos.$$

Podemos generalizar a cardinalidade da união de n conjuntos finitos através do teorema a seguir, adaptado de [1] e [2]

Teorema 2.1 *(Princípio da Inclusão e Exclusão) O número de elementos da união de n conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n$ é dado por*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ - \sum_{1 \leq i < j < k < p \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p| + ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 ... \cap A_n|. \tag{2.2}$$

Demonstração: De acordo com [1], devemos mostrar que um elemento que pertença a qualquer quantidade de conjuntos, isto é, que pertença a p conjuntos com

$p = 1,2,3, ..., n$ dos conjuntos $A_i's$, é contado uma única vez por (2.2). Tomemos um elemento pertencente a exatamente p conjuntos, digamos $A_{i_1}, ..., A_{i_p}$. Este elemento estará sendo contado p vezes no somatório das cardinalidades individuais, ou seja, em

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i|,$$

estará sendo contado $C_{p,2}$ no somatório das cardinalidades das interseções dois a dois, isto é, em

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j|,$$

estará sendo contado $C_{p,3}$ no somatório das cardinalidades das interseções três a três, ou seja, em

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

e assim sucessivamente até o termo que nos dará a contribuição igual a 1. É claro que a interseção de mais do que p conjuntos é uma interseção sem elemento e, portanto, não contribuirá em nada para a quantidade de elementos de uma união. De acordo com o enunciado do teorema e como vimos intuitivamente anteriormente, as contribuições individuais são incluídas, as dois a dois são excluídas, as três a três são incluídas, as quatro a quatro são excluídas e assim por diante. Então, a participação de cada elemento é obtida pela expressão a seguir:

$$C_{p,1} - C_{p,2} + C_{p,3} - C_{p,4} + ... + (-1)^{(p-1)} \times C_{p,p}. \tag{2.3}$$

Como $C_{p,x} = C_{p,p-x}$ (Relação das Combinações Complementares ver [4]), podemos observar que $C_{p,0}$ − (2.3) = 0, ou seja,

$$C_{p,0} - C_{p,1} + C_{p,2} - C_{p,3} + C_{p,4} - C_{p,5} + ... + (-1)^{(p-1)} \times C_{p,p} = 0.$$

Ora, se $C_{p,0}$ vale 1, a soma em (2.3) também é igual a 1. Daí, chegamos a conclusão da demonstração. ■

Outra forma de apresentar o Princípio da Inclusão e Exclusão é dada pelo teorema abaixo, o qual será demonstrado pelo processo de indução sobre n.

De maneira objetiva, podemos dizer que o Princípio da Indução é um processo matemático de demonstração que consiste no seguinte método:

1. Verifica-se a validade para determinado valor;

2. Considera-se válido para n (hipótese da indução);

3. Prova-se a validade para $n+1$;

4. Concluímos que a expressão é válida para todo n.

De modo mais formal:

Seja P(n) uma propriedade relativa aos números naturais. Suponhamos que

1. $P(1)$ é válida;

2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo número natural n.

Demonstração: Ver [3] ■

Teorema 2.2 *Adaptado de [6],C sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos finitos, então o número de elementos da união $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ é*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\} \\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

Demonstração: Texto adaptado de [6],

1. Sabemos que a fórmula é verdadeira para $n = 2$ bem como para $n = 3$, como visto anteriormente;

2. Suponhamos que a fórmula seja válida para $n-1$;

3. Provemos agora para $(n-1)+ 1$, isto é, para n.

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \bigcap A_n\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right|.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Substituindo a hipótese de indução, obtemos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,n-1\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + |A_n| - \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,n-1\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I}(A_i\cap A_n)\right|.$$

Assim, quando agruparmos as interseções com a mesma quantidade de conjuntos, podemos observar que as retiradas e inclusões são respeitadas tanto no primeiro somatório quanto no segundo somatório. No primeiro, os sinais das interseções que não são realizadas com A_n são mantidos, a cardinalidade de A_n está corretamente com o sinal positivo, enquanto as interseções realizadas com o A_n (que possui um conjunto a mais) deverá ter seu sinal trocado, o sinal negativo na frente do somatório da última parcela, garante a inversão de sinal. ■

Vejamos mais algumas aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão:

Exemplo 2.2 *Dentre as permutações simples dos n elementos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, determine o número daquelas em que a_1 não está em primeiro lugar, a_2 não está em segundo lugar e nem a_3 está em terceiro lugar.*

Vamos calcular, inicialmente, exatamente o oposto do que pretendemos determinar, ou seja, a união entre os conjuntos A_1, A_2 e A_3 a seguir:

A_1 indica o conjunto daquelas permutações em que a_1 está na sua posição;

A_2 indica o conjunto daquelas permutações em que a_2 está na sua posição;

A_3 indica o conjunto daquelas permutações em que a_3 está na sua posição.

Quando um elemento encontra-se em sua posição original, dizemos que ele está no $i^{\underline{ésimo}}$ lugar, também denominado de ponto fixo. Temos que:

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = (n-1)!,$$

apenas um elemento encontra-se em sua $i^{\underline{ésima}}$ posição e, portanto, sobram $n-1$ posições para os demais elementos permutarem entre si. Notemos que

$$|A_1\cap A_2| = |A_1\cap A_3| = |A_2\cap A_3| = (n-2)!,$$

dois elementos encontram-se em suas $i^{\underline{ésimas}}$ posições sobrando, portanto, $n-2$ posições para os demais elementos permutarem entre si. Observemos, ainda que

$$|A_1\cap A_2\cap A_3| = (n-3)!,$$

três elementos encontram-se em suas posições originais sobrando, evidentemente, $n-3$ posições para os demais elementos permutarem entre si. Como nenhum dos elementos pertencentes a estes conjuntos fará parte da solução, a resposta da nossa questão será o complementar da união destes três conjuntos, ou seja,

$$\begin{aligned} n! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= n! - (|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= n! - 3(n-1)! + 3(n-2)! - (n-3)!. \end{aligned}$$

Exemplo 2.3 *Quantas são as permutações das letras da palavra BRASIL em que o B ocupa o primeiro lugar, ou o R em segundo lugar, ou o L em sexto lugar?*

Podemos definir os seguintes conjuntos:

$\widetilde{B}$ o conjunto das permutações das letras B,R,A,S,I,L tendo a letra B em primeiro lugar;

$\widetilde{R}$ o conjunto das permutações das letras B,R,A,S,I,L tendo a letra R em segundo lugar;

$\widetilde{L}$ o conjunto das permutações das letras B,R,A,S,I,L tendo a letra L em sexto lugar.

A quantidade de elementos de cada um dos conjuntos acima é a mesma. Logo precisamos efetuar este cálculo apenas para um deles. Considerando a letra B, obtemos o cálculo:

$$|\widetilde{B}| = \underline{B}\ \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 5!,$$

pois apenas a letra B não permutará. Como desejamos calcular a cardinalidade da união $\widetilde{B} \cup \widetilde{R} \cup \widetilde{L}$, devemos, evidentemente, calcular as interseções dois a dois e a interseção entre os três conjuntos, para em seguida aplicarmos o Princípio da Inclusão e Exclusão. Cada uma das interseções dois a dois estão nas mesmas condições, então, basta calcularmos a cardinalidade de uma delas. Se considerarmos as permutações em que B e R encontram-se em seus respectivos locais , a quantidade é:

$$|\widetilde{B} \cap \widetilde{R}| = \underline{B}\ \ \underline{R}\ \ \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 4!,$$

pois duas letras não irão permutar. O mesmo raciocínio devemos aplicar para o caso da interseção dos três conjuntos.

$$\widetilde{B} \cap \widetilde{R} \cap \widetilde{L}| = \underline{B}\ \underline{R}\ \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1}\ \underline{L} = 3!,$$

pois três letras não permutarão. O resultado que queremos é, facilmente obtido utilizando o Princípio da Inclusão e Exclusão:

$$|\widetilde{B} \cup \widetilde{R} \cup \widetilde{L}\ | = \ 3 \times 5! - 3 \times 4! + 3! = 3 \times 120 - 3 \times 24 + 6 = 360 - 72 + 6 = 294.$$

Exemplo 2.4 *De quantos modos 4 casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular com oito lugares de tal forma que marido e mulher não fiquem juntos?*

Sendo o número de permutações circulares calculado por $(n-1)!$, suponhamos uma mesa circular, com oito lugares numerados de 1 a 8. Observemos que $(n = 2q_c)$. Donde q_c é a quantidade de casais. Se não houvesse a restrição de que os componentes de um casal não poderiam ficar juntos, teríamos um total de

$$(n-1)!, \ ou\ seja, \ (8-1)! = 7! = 5040$$

permutações possíveis. Porém como há essa restrição, podemos calcular a união entre os conjuntos dos casais $C_i's$, para $i = 1, 2, 3, 4$, que estejam juntos. Como o casal C_i estará sempre junto, duas posições da mesa serão computadas como uma posição apenas, por exemplo, as posições 1 e 2 para o primeiro casal. Desta maneira, sobrarão sempre 6 posições para os demais participantes permutarem entre si. Como o marido (m_i) e a esposa (e_i) podem permutar seus lugares, para cada casal C_i, teremos:

$$|C_i| = 2 \times [(6+1)-1]! = 2 \times 6! = 2 \times 720 = 1440$$

permutações em que apenas uma casal permanece fixo. Devemos, evidentemente, calcular as interseções dois a dois, isto é, $C_1 \cap C_2$, $C_1 \cap C_3$, $C_1 \cap C_4$, $C_2 \cap C_3$, $C_2 \cap C_4$ e $C_3 \cap C_4$, ou seja, $C_{4,2} = 6$, que nos fornece, cada uma, a seguinte quantidade de elementos:

$$|C_i \cap C_j| = 2 \times 2 \times [(4+1+1)-1]! = 4 \times 5! = 4 \times 120 = 480$$

permutações para dois casais fixos. Teremos uma quantidade $C_{4,3} = 4$ de interseções entre três conjuntos, são elas $C_1 \cap C_2 \cap C_3$, $C_1 \cap C_2 \cap C_4$, $C_1 \cap C_3 \cap C_4$ e $C_2 \cap C_3 \cap C_4$, cada uma com a seguinte quantidade de elementos:

$$|C_i \cap C_j \cap C_k| = 2 \times 2 \times 2 \times [(2+1+1+1)-1]! = 8 \times 4! = 8 \times 24 = 192$$

permutações possíveis para três casais que permanecem fixo. È claro que teremos uma único conjunto possível $C_{4,4}$ de interseção entre os quatro conjuntos com a seguinte cardinalidade:

$$|C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4| = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

permutações. Agora, devemos calcular o complementar da união destes quatro conjuntos, pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, obtemos o seguinte resultado:

$$5040 - 4 \times 1440 + 6 \times 480 - 4 \times 192 + 1 \times 16 = 5040 - 5760 + 2880 - 768 + 16 = 1808.$$

Para n casais, a resposta seria

$$(2q_c - 1)! + \sum_{i=1}^{n} Cq_c, i \times (-1)^i \times 2^i \times (2q_c - 1 - i)!.$$

Ou ainda,

$$(2q_c - 1)! + (-1)^i \times \sum_{i=1}^{n} Cq_c, i \times 2^i \times (2q_c - 1 - i)!.$$

Podemos, também, utilizar o Princípio da Inclusão e Exclusão na determinação do número de soluções de certos tipos de equações. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.5 *Determinar o número de soluções, em inteiros positivos, de*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22 \tag{2.5}$$

tal que $x_1 \leq 7, x_2 \leq 6, x_3 \leq 9$ *e* $x_4 \leq 8$.

De acordo com [1], para encontrarmos o número de soluções inteiras positivas na equação (2.5) devemos calcular a combinação C_{t-1}^{p-1} onde p indica a quantidade de parcelas e t indica o somatório das parcelas. Portanto $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$ tem exatamente $C_{22-1}^{4-1} = C_{21}^{3}$. Definindo os conjuntos

A_1 como o conjunto de soluções em que $x_1 > 7 \Rightarrow |A_1| = C_{22-7-1}^{3} = C_{14}^{3}$;

A_2 como o conjunto de soluções onde $x_2 > 6 \Rightarrow |A_2| = C_{22-6-1}^{3} = C_{15}^{3}$;

A_3 como o conjunto de soluções sendo $x_3 > 9 \Rightarrow |A_3| = C_{22-9-1}^{3} = C_{12}^{3}$;

A_4 como o conjunto de soluções com $x_4 > 8 \Rightarrow |A_4| = C_{22-8-1}^{3} = C_{13}^{3}$.

O que nos interessa é determinar o número de soluções que não se encontram em nenhum dos conjuntos A_i, para $i = 1, 2, 3, 4$. Na interseção $A_1 \cap A_2$, em que $x_1 > 7$ e $x_2 > 6$, consideramos:

$$x_1 - 7 + x_2 - 6 + x_3 + x_4 = 22 - 7 - 6 = 9.$$

A aplicação $y_1 = x_1 - 7$, $y_2 = x_2 - 6$, $y_3 = x_3$ e $y_4 = x_4$, transforma de maneira biunívoca uma solução de inteiros positivos de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9$ em uma solução em inteiros positivos de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$, com as duas restrições $x_1 > 7$ e $x_2 > 6$. Assim, temos que:

$$|A_1 \cap A_2| = C_{9-1}^{4-1} = C_8^3,$$

utilizando a equação transformada, ou se preferirmos

$$|A_1 \cap A_2| = C_{22-7-6-1}^{4-1} = C_8^3,$$

utilizando a equação inicial. Aplicando o mesmo raciocínio, podemos concluir que

$$|A_1 \cap A_3| = C_{22-7-9-1}^3 = C_5^3;$$

$$|A_1 \cap A_4| = C_{22-7-8-1}^3 = C_6^3;$$
$$|A_2 \cap A_3| = C_{22-6-9-1}^3 = C_6^3;$$
$$|A_2 \cap A_4| = C_{22-6-8-1}^3 = C_7^3;$$
$$|A_3 \cap A_4| = C_{22-9-8-1}^3 = C_4^3.$$

Se observarmos que a adição de três parcelas utilizando os números $6, 7, 8$ *e* 9, é maior ou igual a 21, podemos concluir que a interseção de quaisquer 3 dos conjuntos A_1, A_2, A_3 *e* A_4 não terá elemento, ou seja, é o conjunto vazio. Pelo princípio da Inclusão e Exclusão, o número a ser determinado é igual a:

$$C_{21}^3 - \sum_{i=1}^{4} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$
$$= C_{21}^3 - (C_{14}^3 + C_{15}^3 + C_{12}^3 + C_{13}^3) + (C_8^3 + C_5^3 + C_6^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_4^3) - (0) + 0$$
$$= 70 \times 19 - (14 \times 13 \times 2 + 5 \times 7 \times 13 + 2 \times 11 \times 10 + 13 \times 2 \times 11) +$$
$$+ (56 + 10 + 20 + 20 + 35 + 4)$$
$$= 1330 - (364 + 455 + 220 + 286) + (56 + 10 + 20 + 20 + 35 + 4) =$$
$$= 1330 - 1325 + 145$$
$$= 150.$$

Por último, iremos apresentar outro exemplo de como podemos encontrar o número de soluções de uma equação utilizando o Princípio da Inclusão e Exclusão.

Exemplo 2.6 *Encontrar o número de soluções de* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ *em inteiros entre* -3 *e* 3 *inclusive.*

Podemos transformar o conjunto solução de x_i para $i = 1, 2, 3$ *e* 4 do conjunto solução $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ no conjunto solução $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ para y_i com $i = 1, 2, 3$ *e* 4 somando a cada x_i 4 unidades. Então encontraremos uma solução em inteiros positivos de

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 17, \qquad (2.6)$$

onde $y_i \leq 7$. Vamos definir A_i como sendo o conjunto das soluções da equação (2.6) com $y_i > 7$. Devemos calcular o complementar da união dos conjuntos $A_i's$, isto é, descontar de todas as soluções possíveis, as soluções que satisfaçam a união dos conjuntos $A_i's$.

Sendo o número total de permutações $|P| = C_{17-1}^{4-1} = C_{16}^3$, o número de soluções para $|A_i| = C_{17-7-1}^3 = C_9^3$ e como toda adição é maior que 7, qualquer interseção é vazia. Temos, portanto, que o número que procuramos é

$$C_{16}^3 - 4 \times C_9^3 = 8 \times 5 \times 14 - 4 \times (3 \times 4 \times 7) = 560 - 336 = 224.$$

Capítulo 3

Mais algumas aplicações

Neste capítulo, veremos outras aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão, o Crivos de Eratóstenes, a Função Fi de Euler, as Permutações Caóticas e a determinação do número de Funções Sobrejetoras.

3.1 O Crivo de Eratóstenes

Adaptado de [2], o Princípio da Inclusão e Exclusão como visto pode ser utilizado para encontrar o número de primos inferiores ou igual a determinado número positivo. Para facilitar nossos cálculos, devemos lembrar que qualquer número inteiro composto menor ou igual a m é sempre divisível por um primo não excedente à sua raiz quadrada.

Exemplo 3.1 *Temos como proposta, determinar a quantidade de números primos menores ou iguais a 100.*

Utilizando o Princípio da Inclusão e Exclusão, determinamos, primeiramente a raiz quadrada de 100 que é igual a 10 e então, temos que qualquer número composto até 100 é divisível por $2, 3, 5$ *ou* 7, que são os números primos menores ou iguais a 10. Consequentemente, retirando esses números compostos e excluindo também a unidade, encontraremos os números primos menores que 100. Vamos, então, determinar a quantidade de divisores menores ou iguais a 100 dos primos 2, 3, 5 *e* 7. Para chegarmos a resposta, basta calcularmos a quantidade de elementos da união entre os múltiplos de 2, de 3, de 5 e de 7 menores que ou iguais a 100. De acordo com o Princípio da Inclusão e Exclusão, essa quantidade é:

$$
\begin{aligned}
&|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = \\
&= |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - \\
&- |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7| + \\
&+ |A_2 \cap A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|. \\
&= \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor - \\
&- \left\lfloor \frac{100}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{35} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{70} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{105} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{210} \right\rfloor. \\
&= 50 + 33 + 20 + 14 - 16 - 10 - 7 - 6 - 4 - 2 + 3 + 2 + 1 + 0 - 0 \\
&= 78.
\end{aligned}
$$

Então, temos 78 números múltiplos de 2, 3, 5, e 7 inferiores ou iguais a 100, dos quais 4 são primos. Assim, a quantidade total de primos não excedentes a 100 é

$$100 - 78 - 1 + 4 = 25.$$

Observemos que a quantidade quatro, refere-se ao número de fatores primos de 100.

Através do chamado **Crivo de Eratóstenes** encontramos todos os primos não excedentes a um determinado número inteiro positivo.O crivo consiste em eliminar os múltiplos dos primos menores ou igual a raiz quadrada do inteiro positivo que estivermos trabalhando em uma tabela.

Erastótenes nasceu em Cyrene, uma colônia grega do Norte da África no ano de 276 a.C. e morreu em 194 a.C. na cidade de Alexandria (antigo Egito). Homem de ampla cultura, matemático, geógrafo (além de historiador , astrônomo e poeta grego), contribuiu muito para a cultura mundial, escrevendo sobre matemática, geografia, história e pelas críticas literárias que realizava. Um dos seus maiores feitos, foi o cálculo com precisão da circunferência da Terra. Os conteporâneos chamavam-no de "Beta" porque o consideravam o segundo melhor do mundo em vários aspectos.

Figura 3.1: Eratóstenes.

Vejamos a aplicação do Crivo de Eratóstenes para a questão levantada no exemplo 3.1. Numeramos os números de 1 a 100 e marcamos todos os múltiplos de 2, de 3, de 5 e de 7 que são os primos menores que a raiz quadrada de 100 com exceção deles próprios, pois são primos.

Utilizaremos os seguintes símbolos:

( ) para marcar os múliplos de 2 com exceção do 2 que é primo;

[ ] para marcar os múltiplos de 3 com exceção do 3 que é primo;

] [para marcar os múltiplos de 5 com exceção do 5 que é primo;

) (para marcar os múltiplos de 7 com exceção do 7 que é primo.

1 2 3 (4)]5[[(6)])7((8) [9]](10)[

11 [(12)] 13)(14)( ][15][(16) 17 [(18)] 19](20)[

)[21]((22) 23 [(24)]]25[(26) [27])(28)(29][(30)][

31 (32) [33] (34))]35[([(36)] 37 (38) [39]](40)[

41)[(42)](43 (44)][45][(46) 47 [(48)])49( ](50)[

[51] (52) 53 [(54)]]55[ )(56)([57] (58) 59][(60)][

61 (62))[63]((64)]65[[(66)] 67 (68) [69])](70)[(

71 [(72)] 73 (74)][75][(76))77([(78)] 79](80)[

[81] (82) 83)[(84)]( ]85[(86) [87] (88) 89][(90)][

)91((92) [93] (94)]95[[(96)] 97)(98)([99]](100)[.

Da tabela acima, retirando o número 1 e os números marcados, encontramos o conjunto formado por todos os números primos não excedente a 100.

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$$

com um total de 25 elementos, confirmando o resultado obtido através do Princípio da Inclusão e Exclusão.

3.2 A função Fi de Euler

Leonhard Paul Euler, nasceu em 15 de abril de 1707 em Basileia, terceira maior cidade da Suíça, cidade fundada pelos romanos com o nome de Basilia. É considerada a capital cultural do país. Ele morreu no dia 18 de setembro de 1783 em São Petersburgo na Rússia. Foi matemático e físico de origem suíça mas de língua alemã, viveu a maior parte do tempo na Rússia e na Alemanha. Ele fez importantes descobertas em várias áreas da Matemática, como o cálculo e a Teoria dos grafos. Em matemática pura , integrou o cálculo de Leibniz, em Análise Matemática ele integrou o método de Newton. Ele também criou muitas das terminologias da matemática moderna e da notação matemática, como exemplos, podemos citar o e, i, o símbolo π e o símbolo Σ particularmente na análise matemática. Ele melhorou também o conceito de função matemática.

Seu reconhecimento se deve também pelos trabalhos produzidos na mecânica, na dinâmica de fluidos, na óptica, na astronomia e em teoria da música. Euler é considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII além de ser considerado como um dos grandes matemáticos de toda história da Matemática.

Na teoria dos números, destacamos a Função Fi de Euler (Φ de Euler).

Figura 3.2: Leonhard Euler.

Definição 3.1 *De acordo com [1], chamamos de função Φ de Euler a função que atribui a cada inteiro m positivo o número de inteiros positivos menores do que ou igual ao inteiro m e relativamente primos com m.*

Exemplo 3.2 *Encontremos, por exemplo, o valor de* $\Phi(50)$.

Determinemos o conjunto dos inteiros menores que 50 que são primos relativos com 50. O conjunto procurado é formado pelo número 1, por todos os números primos menores que 50 exceto seus fatores primos, pela multiplicação entre os primos que não são divisores de 50, pelas potências destes e pelos produtos entre tais potências, desde que o produto não ultrapasse 50. Assim, designando este conjunto por X_{50} e como $50 = 2 \times 5^2$, obtemos que:

$$\begin{aligned} X_{50} =& \{1\} \cup \{3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\} \cup \{3^2, 3 \times 7, 3^3, 3 \times 11, 3 \times 13, \\ & 7^2\} \\ =& \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49\}. \end{aligned}$$

Portanto, $\Phi(50) = 20$.

Fica evidente a dificuldade que teríamos para determinar o valor de Φ *de Euler* para um número relativamente grande. Podemos obter a fórmula para o cálculo de $\Phi(m)$ utilizando o Princípio da Inclusão e Exclusão como veremos a seguir.

Teorema 3.1 *Segundo [1] O valor de $\Phi(m)$ é dado por:*

$$\Phi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

onde $p_1, p_2, ..., p_r$, são os divisores primos de m, ou seja, são primos obtidos pela decomposição de m em fatores primos. Então,

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}.$$

Demonstração: Segue uma adaptação da realizada em [1], consideremos os seguintes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, .., m\}$;

$A_1 = \{x \in A | x \text{ é múltiplo de } p_1\} \subset A$;

$A_2 = \{x \in A | x \text{ é múltiplo de } p_2\} \subset A$;

.

.

.

$A_r = \{x \in A | x \text{ é múltiplo de } p_r\} \subset A$.

Temos, então, que nenhum dos elementos pertencentes aos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_r$ são relativamente primos com m, visto que são números composto formados a partir de fatores primos de m ou são seus próprios fatores primos. Portanto, como desejamos os números que são relativamente primos com m, é só retirar estes números do conjunto A, que encontraremos o valor de $\Phi(m)$, em outras palavras, queremos exatamente o complementar da união dos A_i's em relação ao conjunto A, isto é,

$$\Phi(m) = |(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r)^c|$$

Assim, como

$$|A| = |(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r)| + |(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r)^c|,$$

temos que

$$|A| = |(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r)| + \Phi(m).$$

Logo ,

$$\Phi(m) = |A| - |(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r)|.$$

Pelo Princípio da inclusão e Exclusão, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Phi(m) = |A| - \Bigg[\sum_i |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ - \sum_{i,j,k,p} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p| + ... + (-1)^{r-1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r|\Bigg] \\ = |A| - \sum_i |A_i| + \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ + \sum_{i,j,k,p} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p| + ... + (-1)^{r}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r|. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

observemos que:

$|A| = m$

$|A_i| = \left(\dfrac{m}{p_i}\right)$ *pois se* $x \in A_i \to x = k \times p_i \to k = \dfrac{x}{p_i} \leq \dfrac{m}{p_i}$. Logo há no máximo $\dfrac{m}{p_i}$ possibilidades para k, uma vez que $k \in \mathbb{Z}$ e $k \geq 1$.

$|A_i \cap A_j| = \left(\dfrac{m}{p_ip_j}\right)$ *pois se* $x \in A_i \cap A_j \to x$ é múltiplo de p_i e de p_j. Como p_i e p_j são primos entre si, x é múltiplo de p_ip_j, então, $x = s \times p_ip_j$, *ou seja*, s $= \dfrac{x}{p_ip_j}$ e, assim, $s = \dfrac{x}{p_ip_j} \leq \dfrac{m}{p_ip_j}$ e, portanto, s só pode variar entre 1 e $\dfrac{m}{p_ip_j}$, já que $s \in \mathbb{Z}$ e $s \geq 1$.

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \left(\dfrac{m}{p_ip_jp_k}\right)$ pois se $x \in A_i \cap A_j \cap A_k \to x$ é múltiplo de p_i, de p_j e de p_k. Como p_i, p_j e p_k são primos entre si, x é múltiplo de $p_ip_jp_k$ e, portanto,

$x = t \times p_i p_j p_k$ e portanto, $t \leq \dfrac{m}{p_i p_j p_k}$ e como $t \geq 1$ *e* $t \in \mathbb{Z}$, os possíveis valores de t são são aqueles compreendidos entre 1 e $\dfrac{m}{p_i p_j p_k}$, ou seja, vale a afirmação. Procedemos dessa maneira para os demais casos. De posse desses fatos, temos que

$$\Phi(m) = m - \sum_{1\leq i}^{r}\left(\frac{m}{p_i}\right) + \sum_{1\leq i<j}\left(\frac{m}{p_i p_j}\right) - \sum_{1\leq i<j<k}\left(\frac{m}{p_i p_j p_k}\right) + \\ + \sum_{1\leq i<j<k<p}\left(\frac{m}{p_i p_j p_k p_p}\right) + ... + (-1)^r\left|\left(\frac{m}{p_i p_j p_k ... p_r}\right)\right|.$$

$$\Phi(m) = m\left[1 - \sum_{1\leq i}^{r}\left(\frac{1}{p_i}\right) + \sum_{1\leq i<j}\left(\frac{1}{p_i p_j}\right) - \sum_{1\leq i<j<k}\left(\frac{1}{p_i p_j p_k}\right) + \\ + \sum_{1\leq i<j<k<p}\left(\frac{1}{p_i p_j p_k p_p}\right) + ... + (-1)^r\left|\left(\frac{1}{p_i p_j p_k ... p_r}\right)\right|\right].$$

$\Phi(m) = \mathrm{m}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) ... \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$, o que conclui a demonstração. ■

Exemplo 3.3 *Calcular* $\Phi(m)$*, para* $m = 600$.

Efetuemos a fatoração de 600 para encontrarmos os primos que o formam. Temos que $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$, então,

$$\begin{aligned}\Phi(600) &= 600 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\\ &= 600 \times \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\\ &= \left(\frac{4800}{30}\right)\\ &= 160.\end{aligned}$$

Quando m for um número primo, o valor de $\Phi(m)$ será igual a $m - 1$. De fato, nenhum número menor do que um primo o divide. Assim, por exemplo, o $\Phi(7) = 6$, pois os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ são primos relativos com 7.

3.3 Permutações Caóticas

Temos como objetivo nesta seção identificar uma permutação caótica, como proceder para calcular o número de permutações caóticas, deduzir a fórmula do cálculo para n itens com o auxílio do Princípio da Inclusão e Exclusão e como determinar a probabilidade de uma ocorrência apesar de não conhecermos o número de ocorrências.

Definição 3.2 *Segundo [1] uma permutação de $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, é chamada de caótica quando nenhum dos a_is se encontra na posição original, isto é, não está na $i^{\underline{ésima}}$ posição.*

Numa brincadeira de "amigo oculto" este é o tipo de permutação ideal, uma vez que não faz sentido um dos participantes retirar seu própio nome. A questão é, qual a probabilidade deste fato acontecer já que as retiradas são de maneira aleatória?

É claro que a probabilidade é a divisão da quantidade de permutações caóticas (D_n) pela quantidade possíveis de permutações, ou seja, por $n!$.

Antes de apresentarmos uma fórmula para o cálculo desta probabilidade, vejamos as situações a seguir:

Relebremos o cálculo da probabilidade de permutações caóticas para três participantes, citados anteriormente, no início de nossos estudos.

Possibilidades de permutações: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA $= 6 = 3!$.

Permutações caóticas: BCA e CAB $= 2$, então $D_2 = 2$. Logo a probabilidade é $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Vejamos a situção para quatro participantes:

Possibilidades de permutações: ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA $= 24 = 4!$.

Permutações caóticas: BADC, BCDA, BDAC, CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCAB, DCBA $= 9$, ou seja, $D_4 = 9$. Logo a probabilidade é $\dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$.

Enunciaremos agora o teorema que fornece o número de permutações caóticas de um conjunto com n elementos.

Teorema 3.2 *De acordo com [2], o número de permutações caóticas de um conjunto com n elementos é*

$$D_n = n! \times \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

Demonstração: Faremos uma adaptação das demonstrações que constam em [1] e [2]. Como desejamos calcular o número de permutações sem nenhum ponto fixo, isto é, nenhum elemento em sua posição original, do total das permutações possíveis devemos retirar aquelas que não atendem nosso interesse, as quais podem apresentar apenas um elemento, dois, três ... ou até os n elementos fixos, ou seja, desejamos o complementar dos conjuntos $A_i's, com\ i = 1, 2, 3, ..., n$ onde A_i representa conjunto em que um participante se encontre em sua $i^{\underline{ésima}}$ posição. O princípio da Inclusão e Exclusão nos fornece uma maneira prática para calcularmos a quantidade de permutações caóticas para n elementos,

$$D_n = |n| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \\ + ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap A_3 ... \cap A_n|. \quad (3.2)$$

Temos que$|A_i| = (n-1)!$ é o número de permutações possíveis para os restantes dos elementos. Como podemos escolher 1 elemento dentre os n elementos, o total de permutações possíveis é

$$C_{n,1} \times (n-1)! = \frac{n!}{1!(n-1)!} \times (n-1)! = \frac{n!}{1!}.$$

Para o caso de dois pontos fixos, temos que

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ é a quantidade de permutações possíveis para os demais elementos. Como podemos escolher 2 elementos dentre os n elementos há, portanto, $C_{n,2}$ maneiras possíveis de escolha. Logo o total de permutações é

$$C_{n,2} \times (n-2)! = \frac{n!}{2!(n-2)!} \times (n-2)! = \frac{n!}{2!}.$$

Para o caso de três pontos fixos, temos que

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$ é a quantidade de permutações possíveis para os demais elementos. Como podemos escolher 3 elementos dentre os n elementos, obtemos, $C_{n,3}$ maneiras. Então o total de permutações é

$$C_{n,3} \times (n-3)! = \frac{n!}{3!(n-3)!} \times (n-3)! = \frac{n!}{3!}.$$

E assim sucessivamente até que tenhamos n pontos fixos o que evidentemente só há uma permutação em que esta situação ocorre e podemos representar por

$$\frac{n!}{n!} = 1.$$

Assim, substituindo na equação (3.2), obtemos:

$$D_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + ... + (-1)^n \frac{n!}{n!},$$

colocando o n! em evidência, encontramos o resultado:

$$D_n = n! \times \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right],$$

o que encerra a demonstração. ■

Vamos utilizar a fórmula acima para comprovarmos o resultado obtido para D_4.

$$\begin{aligned} D_4 &= 4! \times \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + (-1)^4 \frac{1}{4!}\right] \\ &= 24 \times \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) \\ &= 12 - 4 + 1 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P = \frac{9}{24} = \frac{1}{8} = 0,375.$$

Na tabela abaixo, estabelecemos a probabilidade de permutações caóticas até 10 elementos.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{D_n}{n!}$	0,5	0,333	0,375	0,36667	0,36806	0,36786	0,36788	0,36788	0,36788

Tabela 3.1: **A Probabilidade de uma permutação caótica.**

Voltando ao problema do amigo oculto, a probabilidade para que a brincadeira tenha sucesso para n amigos é dada por

$$P_n = \frac{D_n}{n!} = \left[n! \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)\right] \div n!.$$

Logo,

$$P_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Se tomarmos um valor muito grande para n, a probabilidade para que a brincadeira de "amigo oculto" para n amigos dar certo é de aproximadamente 36,8%, ou seja,

$$\frac{D_n}{n!} = 36,8\% \approx \frac{1}{e}.$$

Este fato nos fornece uma maneira rápida de calcularmos o valor inteiro de D_n, isto é,

$$\frac{D_n}{n!} \approx \frac{1}{e} \Rightarrow D_n \approx \frac{n!}{e}.$$

Mostraremos que este inteiro é o inteiro mais próximo do número $\frac{n!}{e}$, para isto, basta comprovarmos que a distância entre D_n e $\frac{n!}{e}$ é menor que $\frac{1}{2}$. Como podemos verificar para $n = 1$ e $n = 2$. Temos que

- $D_1 = 0$ e $\frac{1!}{e} = 0,33$. Logo $|0 - 0,33| = 0,33 < \frac{1}{2}$.
- $D_2 = 1$ e $\frac{2!}{e} = 0,7$. Logo $|1 - 0,7| = 0,3 < \frac{1}{2}$.

Teorema 3.3 *Segundo [1], para todo inteiro $n > 2$, temos*

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| < \frac{1}{2}.$$

Demonstração: Expandindo a função e^x como uma série de Taylor [8],temos
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$, então, $e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ...$,
logo,

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| =$$
$$= \left| n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] - n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... \right) \right|$$

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| = \left| n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} - n! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|, \text{ deste modo,}$$

$\left|D_n - \dfrac{n!}{e}\right| = \left|n! \displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^i}{i!}\right|$, ou ainda,

$\left|D_n - \dfrac{n!}{e}\right| = n! \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \dfrac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} + ...\right|$, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| &\leq n! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ...\right) \\ &= \left|\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + ...\right|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| \leq \left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + ...\right) = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{(n+1)}} = \frac{1}{n} < \frac{1}{2},$$

para $n > 2$.

Assim, comprovamos que D_n é o inteiro mais próximo de $\dfrac{n!}{e}$ e concluímos a demonstração. ■

Para mais informações sobre o número e, ver no apêndice.

Vejamos algumas aplicações: O próximo exemplo que veremos é uma variante da questão proposta no século XVIII, conhecida como o **problema das cartas mal endereçadas**.

Exemplo 3.4 *Em um escritório, certo funcionário desatento tinha diante de si* 6 *cartas com mensagens distintas e* 6 *envelopes com endereços diferentes para destinatários diferentes. Sabendo-se que o mesmo colocou as cartas aleatoriamente nos envelopes, pergunta-se:*

a) Qual é a probabilidade de nenhuma carta chegar ao endereço certo?

b) Qual é a probabilidade de todas as cartas chegarem ao endereço certo?

c) Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas chegar ao endereço certo?

d) Qual é a probabilidade de somente uma carta chegar ao endereço certo?

e) Qual é a probabilidade de somente três cartas chegarem ao endereço certo?

Para resolvermos a letra (a), podemos simplesmente aplicar a fórmula para determinação da quantidade de permutações caóticas.

$$D_n = n! \times \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

logo,

$$\begin{aligned}
D_6 &= 6! \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) \\
&= 720 \times \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720}\right) \\
&= 360 - 120 + 30 - 6 + 1 \\
&= 265.
\end{aligned}$$

Como temos um total de 6! permutações possíveis, a probabilidade de nenhuma carta chegar ao seu destino correto, é

$$P = \frac{D_6}{6!} = \frac{265}{720} = 0,3681 = 36,81\% \textit{ aproximadamente}.$$

Na resolução da letra (b) temos que apenas uma possibilidade nos satisfaz, portanto a probabilidade de ocorrer tal evento é

$$P = \frac{1}{720} = 0,0014 = 0,14\%.$$

Obtemos a solução da letra (c) simplesmente realizando o complementar em relação a letra (a), pois pelo menos uma carta chega ao seu destino correto ou nenhuma delas chega, assim a probabilidade é

$$P = 1 - 0,3681 = 63,19\% \textit{ aproximadamente}.$$

Para solucionar a letra (d), devemos fixar uma carta e permutar caoticamente as outras cinco. Portanto, temos $6 \times D_5$ possibilidades de apenas uma carta chegar ao seu destino certo. Assim

$$\begin{aligned}
P &= 6 \times D_5 \\
&= 6 \times \left[5! \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)\right] \\
&= 6 \times \left[120 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right)\right] \\
&= 6 \times (60 - 20 + 5 - 1) \\
&= 6 \times 44 \\
&= 264.
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade para que apenas uma carta chegue ao destino certo é

$$P = \frac{264}{720} = 0,3667 = 36,67\% \ aproximadamente.$$

Para resolvermos a letra (e), devemos escolher apenas três cartas dentre as seis para que as mesmas cheguem ao destino certo, isto pode ser feito $C_{6,3}$ maneiras, enquanto as que não forem escolhidas permutarão caoticamente. Desta maneira temos a seguinte quantidade de possibilidades

$$C_{6,3} \times D_3 = \frac{6!}{3!3!} \times 2 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 6} = 20 \times 2 = 40.$$

Então, a probabilidade de apenas três cartas chegarem ao destino correto

$$P = \frac{40}{720} = 0,0556 = 5,56\% \ aproximadamente.$$

Exemplo 3.5 *Uma empresa possui as salas para reuniões com* 10 *cadeiras pintadas, cada cadeira com uma cor diferente. Certo dia, durante uma reunião o ar condicionado quebrou e os* 10 *participantes resolveram passar para a sala ao lado. Ao saírem o presidente da reunião entregou aleatoriamente as cores da nova cadeira que iriam ocupar. Após todos se acomodarem, o presidente verificou que* 4 *deles estavam sentados em cadeiras da mesma cor que estavam na sala anterior. De quantas maneiras este fato pode ocorrer?*

Dos 10 participantes à disposição, 4 deles permanecerão em suas $i^{\underline{ésimas}}$ posições. Este fato pode ocorrer de $C_{10,4}$ maneiras distintas enquanto que os 6 que sobraram serão permutados de maneira caótica. Assim, encontramos a seguinte resposta:

$$\begin{aligned}
C_{10,4} \times D_6 &= C_{10,4} \times 6! \times \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) \\
&= \frac{10 \times 9 \times 8 \times \times 7 \times 6!}{4! \times 6!} \times 720 \times \left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720}\right) \\
&= 210 \times 265 \\
&= 55650.
\end{aligned}$$

Outra resolução para este problema, seria utilizando diretamente o Princípio da Inclusão e Exclusão. Veremos a solução através deste princípio (apesar de ser um pouco mais longa), uma vez que não é aconselhável sempre recorrermos a fórmulas matemáticas, pois podemos esquecê-las, ou seja, devemos colocar nossos conhecimentos sempre em prática. Vamos dividir em quatro passos a resolução deste problema:

Primeiro passo: Determinarmos de quantas maneiras podemos escolher 4 pessoas entre as 10. Isto é calculado por

$$C_{10,4} = 210.$$

Segundo passo: Aplicarmos o Princípio da Inclusão e Exclusão para os 6 participantes não escolhidos de maneira a obtermos o número de permutações em que $1, 2, 3, 4, 5$ ou os 6 participantes ocupem cadeiras da mesma cor que na sala anterior, utilizando novamente A_i como conjunto em que uma pessoa ocupa sua $i^{\underline{ésima}}$ posição, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{6}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le 6}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \\
&- \sum_{1\le i<j<k<l\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l| + \sum_{1\le i<j<k<l<m\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l\cap A_m| - \\
&- |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\cap A_6| \\
&= C_{6,1}\times 5! - C_{6,2}\times 4! + C_{6,3}\times 3! - C_{6,4}\times 2! + C_{6,5}\times 1! - C_{6,6}\times 0! \\
&= 720 - 360 + 120 - 30 + 6 - 1 \\
&= 455.
\end{aligned}$$

Assim, temos 455 combinações não caóticas entre os seis participantes não escolhidos.

Terceiro passo: Observemos que a quantidade de permutações caóticas que desejamos é exatamente o complemento da união desses conjuntos, isto é,

$$6! - 455 = 720 - 455 = 265.$$

Quarto passo: Determinarmos o resultado final, ou seja,

$$210 \times 265 = 55650.$$

Daí, comprovamos mais uma vez que as Permutações Caóticas e o Princípio da Inclusão e Exclusão são tópicos da Matemática que se relacionam.

3.4 Determinando o número de funções sobrejetoras

Nesta seção, iremos verificar que o número de funções sobrejetoras entre dois conjuntos finitos, bastante utilizado para a solução de vários problemas matemáticos, pode ser determinado através do Princípio da Inclusão e Exclusão.

É bastante comum encontrarmos em texto elementares de análise combinatória situações envolvendo o cálculo do número de funções de $f : A \to B$, onde A e B são conjuntos finitos com n e m elementos, respectivamente, mas com certa raridade para o caso em que $n \geq m$ no que se refere ao número de funções sobrejetoras. Abordaremos também este tipo de situação para estabelecermos uma maneira de facilitar o cálculo desta quantidade de funções.

As definições e demonstrações constantes nesta seção são adaptações de [1].

No que segue, consideremos os conjuntos A e B, com $|A| = n$ e $|B| = m$.

Teorema 3.4 *Se $m = n$, para $n > 0$, o número de funções bijetoras $f : A \to B$ é $n!$.*

Funções bijetoras são as aquelas que são injetoras e sobrejetoras simultaneamente, ou seja, são aquelas com a propriedade em que elementos diferentes do conjunto A, possuem correspondentes diferentes no conjunto B (função injetora) e ainda a propriedade de que todos os elementos de B são utilizados (função sobrejetora).

Demonstração: Como A possui n elementos $a_i's$ $i = 1, 2, 3, ..., n$ e B também possui n elementos, então para a_1, temos n possíveis escolhas em B, para a_2, temos $(n-1)$ possibilidades, para a_3, temos $(n-2)$, ... e logicamente, a_n terá apenas uma possibilidade. Assim, pelo Princípio Multiplicativo da contagem, o número de funções é

$$n(n-1)(n-2)(n-3)...1 = n!.$$

■

Como $0! = 1$, o resultado obtido também é válido para $n = 0$.

Teorema 3.5 *Sendo $n \leq m$, o número de funções injetoras $f : A \to B$ é*

$$m(m-1)(m-2)...(m-n+1).$$

Demonstração: Lembremos que funções injetoras são aquelas em que elementos diferentes do conjunto A possui imagens diferentes no conjunto B. Como A possui n elementos $a_i's$, para $i = 1, 2, 3, ..., n$ e B possui m elementos, então para a_1, temos m possíveis escolhas em B, para a_2, temos $(m-1)$ possibilidades de escolhas, para a_3, temos $(m-2)$, ..., e a_n terá $(m-n+1)$ possibilidades. Assim, pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, o número de funções injetoras é

$$m(m-1)(m-2)(m-3)...(m-n+1)$$

■

Vejamos uma ilustração deste teorema. Sejam os conjuntos $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, temos que:

- O elemento x poderá associar-se a um dos sete elementos, ou seja, aos elementos a, b, c, d, e, f ou g;
- o elemento y poderá associar-se a um dos seis elementos restantes. Supondo que x esteja relacionado com o elemento a sobrariam os elementos b, c, d, e, f ou g;
- o elemento z poderá associar-se a um dos cinco elementos restantes. Supondo, também, que y esteja associado com o elemento b, sobrariam os elementos c, d, e, f ou g.

Pelo princípio multiplicativo da Contagem, obtemos

$$7 \times 6 \times 5 = 210,$$

observemos que

$$7 \times 6 \times 5 \textit{ equivale a } 7 \times (7-1) \times (7-3+1),$$

portanto, comprovamos a validade da fórmula $m \times (m-1) \times (m-n+1)$.

Vamos comprovar este valor através da fórmula de arranjos simples:

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210.$$

Tanto para determinarmos o número de funções injetoras quanto o número de funções sobrejetoras, não foi necessário utilizarmos o Princípio da Inclusão e Exclusão, foi suficiente aplicarmos o Princípio Multiplicativo da Contagem. Porém para obtermos a fórmula que nos forneça a quantidade de funções sobrejetoras $f : A \to B$, utilizaremos o Princípio da Inclusão e Exclusão.

Teorema 3.6 *Sendo $n \geq m$, o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$, onde $|A| = n$ e $|B| = m$, é dado por:*

$$T(n, m) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_{m,i} (m-i)^n.$$

Observação: T(n,m) indica o número de maneira de distribuir n objetos distintos em m caixas distintas sem que nenhuma fique vazia. Lembremos que funções sobrejetoras são aquelas em que todos os elementos do conjunto B são utilizados, podendo está se correspondendo com um ou mais elementos do conjunto A.

Demonstração: Como A possui n elementos $a_i's$ $i = 1, 2, 3, ..., n$ e B possui m elementos com $n \geq m$, então, para qualquer dos elementos $a_i's$ do conjunto A temos m possibilidades de escolhas, o que nos fornece um total de m^n funções $f : A \to B$.

Deste total devemos excluir o número de funções que não são sobrejetoras.

Sendo o conjunto $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$, consideremos ainda o conjunto B_i de todas as funções em que algum elemento de B não tenha correspondente em A, ou seja, B_i = conjuntos de todas as funções $f : A \to B$ tais que $f^{-1}(b_i) = \emptyset$.

Desta maneira, para $i = 1, 2, ..., m$, temos que a união de todos esses conjuntos nos fornece o número (N) de funções não-sobrejetora. Portanto,

$$N = \left|\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right| = (B_1 \cup B_2 \cup B_3 ... \cup B_m).$$

Aplicando o Princípio da Inclusão e Exclusão, obtemos que

$$N = \sum_{i=1}^{m} |B_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |B_i \cap B_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |B_i \cap B_j \cap B_k| - ...$$

Como $|B_i| = (m-1)^n$; $|B_i \cap B_j| = (m-2)^n$, ...,
então,

$$\begin{aligned} N &= C_{m,1}(m-1)^n - C_{m,2}(m-2)^n + C_{m,3}(m-3)^n + ... + C_{m,m}(m-m)^n \\ &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} C_{m,i}(m-i)^n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Mas a resposta que no interessa é o complementar de N, isto ´$m^n - N$, ou seja,

$$m^n - \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} C_{m,i}(m-i)^n = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_{m,i}(m-i)^n$$

e, assim, concluímos a demonstração. ■

Exemplo 3.6 *Consideremos um conjunto de 9 pessoas, sendo que todas sabem dirigir. De quantas maneiras estas nove pessoas podem se agrupar para levar 4 carros da cidade A até a cidade B?*

(Não vamos considerar "quem dirige" no caso de duas ou mais estarem em um mesmo carro.)

Como todo carro necessita de um motorista, e dentro de um mesmo carro, poderemos ter mais de um motorista, o resultado que queremos, será obtido, calculando-se o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$, Sendo:

- A é o conjunto formado pelos motoristas;
- B é o conjunto formado pelos carros.

Logo, pelo teorema 3.6,

$$\sum_{i=0}^{4}(-1)^i C_{4,i}(4-i)^9 = 4^9 - C_{4,1}3^9 + C_{4,2}2^9 - C_{4,3} = 186.480.$$

Exemplo 3.7 *Adaptado de [7], Determinar o número de funções sobrejetoras* $f : A \to B$*, em que* $A = \{1,2,3,4\}$ *e* $B = \{5,6,7\}$*.*

Temos que o número de funções sobrejetoras é dada pela fórmula

$$T(n,m) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_{m,i}(m-i)^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(4,3) = & \sum_{i=0}^{3}(-1)^i C_{3,i}(3-i)^n \\ & = (-1)^0 C_{3,0}(3-0)^4 + (-1)^1 C_{3,1}(3-1)^4 + (-1)^2 C_{3,2}(3-2)^4 + \\ & + (-1)^3 C_{3,3}(3-3)^4 \\ & = 3^4 - 3\times 2^4 + 3\times 1^4 - 0 = 81 - 48 + 3 = 36. \end{aligned}$$

Portanto, teremos 36 funções sobrejetoras.

Vejamos esta solução com mais detalhes

- O número total de funções como sabemos é 3^4;
- O conjunto B nos fornece os seguintes subconjuntos com 2 elementos $\{5,6\}$, $\{5,7\}$ e $\{6,7\}$ que nos fornece $3\times 2^4 = C_{3,2}\times 2^4$, uma vez que temos 2^4 funções de A em cada um desses subconjuntos de B, as quais já foram contadas no total de funções, portanto devem ser retiradas.

Então, teríamos $3^4 - 3 \times 2^4 = 3^4 - C_{3,2} \times 2^4$.

Acontece que essas funções não são todas distintas pois, por exemplo, o número 5 formará duas funções iguais $\{(1,5),\ (2,5),(3,5),(4,5)\}$ uma vez no subconjunto $\{5,6\}$ e outra no subconjunto $\{5,7\}$, analogamente, temos para o 6 e para o 7. Como foram retiradas na contagem anterior, precisamos repor essas três funções. Notemos que $3 = C_{3,1} \times 1^4$.

Portanto, o número de funções sobrejetoras é, como visto:

$$3^4 - C_{3,2} \times 2^4 + C_{3,1} \times 1^4 = 81 - 48 + 3 = 36.$$

Considerações Finais

Este trabalho me levou a conhecer um pouco mais sobre a História da Matemática através da biografia sobre os matemáticos citados no mesmo. Além da satisfação pessoal que senti ao realizá-lo, ele me proporcionou um aprendizado muito significativo a respeito do Princípio da Inclusão e Exclusão, desde a dedução de sua fórmula até as diversas aplicações em que o mesmo pode ser utilizado. Como sugestão ao leitor, indico estudar a técnica da contagem que utiliza a divisão pelo fatorial da quantidade de termos repetidos, pois as vezes se faz necessário utilizar as duas técnicas para facilitar a resolução de certos problemas.

Pretendo aplicar sempre que possível a técnica desenvolvida neste trabalho para aprofundamento de assuntos que estiver ministrando em sala de aula. Acredito que com a utilização do Princípio da Inclusão e Exclusão motivem os alunos a resolver problemas e mais problemas, uma vez que esta técnica facilita bastante os cálculos, contribuindo desta maneira à exploração do raciocínio matemático, para o desenvolvimento intelectual de cada discente, no rendimento escolar da turma e ajudar a diminuir a evasão escolar.

Espero ainda ter oportunidade de transmitir este aprendizado aos colegas de profissão e que assim como eu pesquisei em outras dissertações, esta possa auxiliar em pesquisas de outros estudantes.

Referências Bibliográficas

[1] SANTOS, J. Plínio O.; Mello, M. P.; MURARI, Idani T.C. Introdução à Análise Combinatória. 4. ed. revista. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

[2] ROSEN, Kenneth H. Matemática Discreta e suas Aplicações. 6. ed. Editora Bookman, 2009.

[3] LIMA, Elon Lages et al. A Matemática do Ensino Médio. Volume 1. 10. ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.

[4] LIMA, Elon Lages et al. A Matemática do Ensino Médio. Volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2006.

[5] HEFEZ, Abramo. Aritmética. 1. ed Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

[6] **Combinatória (Princípio Da Inclusão-Exclusão - Contagem de Pólya) - Nível 3**. Programa Olímpico de Treinamento. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro: 2013. 85 minutos. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=52-cmBX_q1s. Acesso em fevereiro de 2016.

[7] GOMES, Carlos A. E as funções sobrejetoras? Disponível em http//www.olimpiada.ccet.ufrn.br. Acesso em: 02 de janeiro de 2016.

[8] STEWART, James. Cálculo, volume 2 / James Stewart; tradução Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. - São Paulo: Thonson Learning, 2007.

Apêndice

O número e.

A história do número $e = 2,718281828...$ está intimamente ligada com a história do cálculo integral e diferencial. Foi através da tentativa de calcular a área de uma curva aparentemente simples $\left(y = \dfrac{1}{x}\right)$ que fez com que Newton e Leibnitz se inspirassem em estudar processos infinitos, e assim depararam com o cálculo e com o próprio número "e". Eles não foram os únicos, visto que muitos outros já haviam encontrado um valor aproximado para o número "e" até os babilônios, em cálculos financeiros. Porém como eles não sabiam cálculo, não compreenderam a importância deste acontecimento. Antes de nos aprofundarmos sobre o número "e", falaremos um pouco sobre a história dos logaritmos. Uma ferramenta muito importante nos estudos passados era as famosas tabelas de logaritmos que vinham nos livros e as réguas de cálculo, que hoje em dia, estão ultrapassadas.

A palavra logaritmo é de origem grega, formada por duas partes: lógos (razão, evolução, discurso) e arithmós (número). Então, podemos dizer que logaritmo significa literalmente, a evolução dos números. Sua simbologia é log devido ao astrônomo Kepler. Os logaritmos foram inventados por John Napier (1550-1617), com o objetivo de obter uma forma menos trabalhosa para realizar cálculos. Uma multiplicação entre números grandes, por exemplo, era um verdadeiro sacrifício. Considerava-se que tais cálculos apenas sábios seriam capazes de realizá-los. Napier ficou conhecido também pelo nome de Neper, por isso logaritmos neperianos.

John Napier foi um rico escocês muito esperto. Conta-se que, desconfiava que estava sendo roubado por um de seus empregados, fez com que todos passassem a mão sobre um galo preto num quarto escuro, dizendo que o animal, posteriormente, identificaria o ladrão. Acontece que Neper, astuto como era, havia passado fuligem no galo e, ao saírem do recinto, todos os empregados teriam que mostrar as mãos, como um único empregado estava com as mãos limpas, foi identificado como culpado...

Para se ter uma ideia do porquê Neper ter inventado os logaritmos seria por exemplo obter o resultado de uma multiplicação através da operação de adição que é mais fácil. Vejamos com um exemplo como podemos utilizar a soma para ajudar na multiplicação.

Consideremos a tabela abaixo em que na linha superior temos os expoentes e na inferior o resultado de 2 elevado ao respectivo expoente.
Sabemos que para multiplicar potência de mesma base, basta conservar a base e somar o expoente. Assim, $2^5 \times 2^7 = 2^{12}$. De acordo com esta propriedade e utilizando a tabela, em vez de multiplicarmos 16×64, basta observarmos que é o mesmo que $2^{4+6} = 1024$.

A primeira linha da tabela é também a linha dos logaritmos na base 2 e, a de baixo, a dos respectivos antilogaritmos. Hoje parece muito fácil, mas na época, não parecia tão simples. Neper usou como base 0,9999999 porém não iremos nos aprofundar de saber o porquê dessa escolha. O fato é que, com essa base, Neper construiu suas tábuas de logaritmos e publicou um tratado: Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos).

2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Tabela 3.2: **Potências de 2.**

Henry Briggs (1561-1631), outro matemático, ao visitar Neper sugeriu o uso da base 10. Criou-se, desta maneira, o logaritmo decimal, cujas tabelas (dos Irmãos Maristas) todos os colegiais de antigamente possuiam, com a notação $\log N$ significando logaritmo de N na base 10. Na sequência, ensinavam-se logaritmos noutras bases, em especial o famoso lnN, significando logaritmo natural ou logaritmo na base "e", ou, ainda, logaritmo neperiano.

Para apresentar o número "e", vamos imaginar uma situação fictícia em que um banco pague juros de 100% ao ano.

Após um ano, teríamos o montante de R\$ 2,00 para cada R\$ $1,00$ aplicado.

Vamos supor ainda que os juros fossem creditados por:

- semestre; $n = 2$. Ao final de um ano teríamos $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2,25$.

- trimestre; $n = 4$. Ao final de um ano teríamos $\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4 = 2,44141$.
- bimestre; $n = 6$. Ao final de um ano teríamos $\left(1+\dfrac{1}{6}\right)^6 = 2,52162$.
- mês; $n = 12$. Ao final de um ano teríamos $\left(1+\dfrac{1}{12}\right)^{12} = 2,61303$.
- Supondo $n = 1\ 000\ 000$, obteríamos $2,71828$.
- Supondo, ainda, $n = 10\ 000\ 000$, obteríamos $2,71828$.

Se desejássemos obter o resultado para o crédito instantâneo, ou seja, com n tendendo ao infinito, o resultado tenderia a um limite que é um número irracional e transcendental chamado "e"(número de Euler). Um número é irracional quando não pode ser colocado na forma $\dfrac{a}{b}$ com a e b inteiros. É transcendental quando não pode ser resultado de uma equação polinomial com coeficientes inteiros do tipo: $ax^n + bx^{n-1} + ... + z = 0$.

A representação em símbolos é:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

"e"$= 2,7182818284590452353602874713526 6...$ e nunca finaliza.

Quem efetivamente calculou o número "e" foi Leonhard Euler, e dizem que a letra decorre da inicial de seu sobrenome, porém há a versão de que ela se deva à inicial da palavra exponencial. Esse número é a base dos logaritmos neperianos.

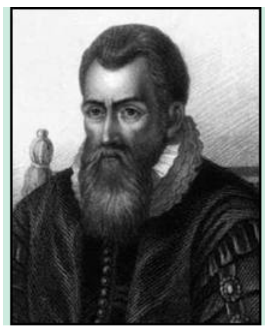

Figura 3.3: John Napier.