Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Matemática Discreta: Médias e Princípio das Gavetas. †

por

CARLOS ALBERTO MUNIZ JÚNIOR

sob a orientação do Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB,como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

08/2016
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Matemática Discreta: Médias e Princípio das Gavetas.

por

CARLOS ALBERTO MUNIZ JÚNIOR

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto -UFPB (orientador)

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho - UFRPE

Agosto/2016

Agradecimentos

A Deus, primeiramente, que se fez presente em todas as etapas dessa caminhada.

Aos meus pais, Carlos e Marlene, por terem me apoiado diante das dificuldades, e me incentivado nas horas difíceis;

A todos meus familiares pela compreensão nos momentos em que estive ausente;

A todos os colegas de turma, pelo vínculo de amizade que construímos durante as aulas e os dias e noites de estudos que nos proporcionaram aprendizado e fortaleceram os laços de amizade;

Aos colegas de trabalho, que mesmo de longe me deram suporte quando foi necessário me ausentar, ou quando estive envolvido com outras tarefas e fui substituído;

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Bocker Neto, pela paciência e dedicação no desenvolvimeto desse trabalho;

Aos professores, ao coordenador, e toda equipe da UFPB pela dedicação durante cada disciplina, documentação solicitada, ou período de matrícula, por estarem sempre nos motivando e apoiando.

Dedicatória

Dedico aos meus familiares por estarem sempre presentes em todas as etapas de minha vida, em especial aos meus pais. E também aos amigos de curso, que estiveram junto a mim em todo esse percusso.
"O que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem." - Gauss

Resumo

Neste trabalho apresentamos os principais conceitos de médias: Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática e também o Princípio das Gavetas de Dirichlet. Destacamos como principais direções deste trabalho, as aplicações destes conceitos nas diversas áreas da matemática e a possibilidade de se trabalhar tais conteúdos no Ensino Médio. Ressaltamos também os principais teoremas abordados, os quais são, a Desigualdade das Médias e os Teoremas de Ramsey e de Dirichlet que são aplicações não triviais do Princípio das Gavetas.

Palavras-chave: Médias, Desigualdade das Médias, Princípio das Gavetas.

Abstract

We present the main concepts of averages: Arithmetic, Geométrica, Harmonica and Quadratic and also the Dirichlet's Drawer Principle. We highlight as the main directions of this work, the application of these in various areas of mathematics and the ability to work with such content in high school. We also emphasize the main theorems approached, which are the Inequality of Medium and theorems Ramsey and Dirichlet that are nontrivial applications of the Drawer Principle.

Keywords: Medium, Inequality of Means, Principle of Drawers.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

No presente trabalho, trataremos sobre as Médias, suas Desigualdades e o Princípio das Gavetas de Dirichlet. As médias são bastante conhecidas e trabalhadas no Ensino Básico, já as desigualdades nem tanto, apesar de tantas possibilidades de aplicações, como mostraremos nesse trabalho. No entanto, o Princípio das Gavetas, é um tema pouco ou quase nunca lembrado pelos professores de Ensino Médio. E aqui, tratamos dele como ferramenta bastante eficiente na resolução de problemas, já que é possível aplicar tal princípio em diversas áreas da Matemática. Nesse sentido, dividimos o trabalho em quatro capítulos.

O primeiro capítulo trata das Médias Aritmética, Geométrica, Harmonia e inclusive a Quadrática que pouco é vista no Ensino Médio. Definimos cada um delas, trazendo ainda algumas aplicações de cada tipo de média e exemplificando com problemas voltados para o Ensino Médio, a partir de [1]. Assim, como também tratamos das desigualdades entre as médias, demonstrando essa relação bastante útil na resolução de problemas, e apresentando diversos exercícios onde podemos aplicar tais desigualdades em diversas áreas da matemática, com mais informações em [2]. Além de fazer a representação de tais médias geometricamente, utilizando diversas construções e aplicando relações e conceitos matemáticos. Permitindo a percepção de forma lúdica das da desigualdade entre as médias.

No segundo capítulo, o Princípio das Gavetas de Dirichlet é apresentado e demonstrado, assim como sua generalização, a fim de evidenciar sua eficácia como ferramenta matemática, uma vez que diversos problemas podem ser resolvidos usando este princípio em diversas áreas da matemática. Apresentamos diversos exemplos da sua aplicação, inclusive de caráter lógico e uma seção com exercícios resolvidos onde já podemos perceber sua importância na resolução de problemas matemáticos, baseados em [3], [4], [5], [6], [7] e [8] . Por fim, relacionamos algumas áreas da matemática com o princípio das gavetas, ressaltando os conhecimentos prévios na resolução, como pode ser visto em [2].

De forma a certificar a importância do Princípio das Gavetas, o terceiro capítulo traz dois teoremas onde este princípio é utilizado como ferramenta na sua demonstração, são eles o Teorema de Dirichlet e o Teorema de Ramsey, aplicações clássicas do Princípio das Gavetas e um convite a se aprofundar mais no assunto através da leitura de [2] , [9] e [10].

No quarto e último capítulo, apresentamos a experiência em sala com a aplicação de testes e seus respectivos resultados. Foram aplicados dois teste versando sobre o Princípio das Gavetas. O primeiro teste foi aplicado aos alunos sem apresentar o Princípio das Gavetas. E, antes da aplicação do segundo teste, o Princípio das Gavetas foi apresentado aos alunos, de forma expositiva, e ainda foi feita a resolução do primeiro teste. Os resultados são apresentados pelos percentuais de acertos em ambos os testes, além de gráficos que fazem um comparativo entre cada teste.

Percebendo o interesse e a curiosidade dos alunos do Ensino Médio, em utilizar o Princípio das Gavetas, sugerimos aos professores que procurem abordar o tema quando possível, em suas aulas. Esse é o principal objetivo desse trabalho, mostrar que podemos aplicar os temas aqui apresentados para tornar o ensino de matemática mais atrativo para os alunos.

Capítulo 1

Médias

Neste capítulo fazemos uma breve introdução das principais médias. As médias estão associadas a ideia de substituir uma sequência de números por um único que represente toda sequência. Observamos que, geralmente, as médias estão associadas a uma determinada operação sobre a sequência dos números. Após definir cada média a partir de [1], fazemos aplicações da utilização com alguns exemplos e propondo alguns exercícios para que haja uma melhor fixação das ideias, tomando como referências [2] e [6].

As Médias são essenciais para fazer estimativas de tendências de crescimento populacional, de taxas de rendimento em investimentos ao longo de um dado tempo, velocidade média ou, até mesmo, para aplicar na geometria plana e espacial. Apesar do conceito de Média ser extremamente simples, é importante saber identificar as situações adequadas para uma aplicação correta de cada tipo de relação envolvendo os conceitos de Média, pois uma aplicação incorreta pode gerar erros relevantes e estimativas discrepantes com a realidade.

1.1 Definições de Médias

Para as médias que trabalhamos podemos dar uma conceitualização geral. A ideia chave é a da substituição de uma sequência de valores por um valor que represente todos.

Definição 1.1 *Considere uma sequência finita de números reais* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $\star$ *uma operação sobre os membros da sequência. Uma média dos elementos da sequência com respeito à operação* $\star$ *é um número real* M *com a propriedade de substituir todos os elementos da sequência no que diz respeito a operação* $\star$ *, isto é*

$$x_1 \star x_2 \star \ldots \star x_n = \underbrace{M \star M \star \ldots \star M}_{n \quad termos}.$$

Observação 1.1 *O conceito geral de média descrito acima é abstrato. Portanto, devemos especializá-lo para encontrar importantes tipos usuais de média. Nos casos que trabalhamos a média é, de fato, um número intermediário, entre o menor e o maior elemento da sequência. Isto é,*

$$min\{x_i\} \leq M \leq max\{x_i\}$$

Claramente, se o menor e o maoir números são iguais, a média é igual a estes números.

Observação 1.2 *Quando for dito que uma sequência de termos está em ordem* **crescente** *queremos dizer que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Quando a desigualdade for estrita, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ diremos que a sequência de termos é* **estritamente crescente***.Para as médias que trabalhamos e na maioria dos resultados obtidos a ordem dos termos não é relevante, pois estamos lidando com operações comutativas como adição e multiplicação entre números reais.*

1.1.1 Média Aritmética

Definição 1.2 *A* **média aritmética (simples)** *de uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o número A com respeito a operação de adição, desta forma*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \underbrace{A + A + \ldots + A}_{n \quad termos} = n.A.$$

Portanto,

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Aplicação 1.1 *Cada termo de uma progressão aritmética (PA), exceto os extremos, pode ser obtido pela média aritmética dos termos equidistantes. Em particular;*
$a_i = \dfrac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$ *para* $i = 2, 3, \ldots, n-1 \Leftrightarrow a_{i+1} - a_i = a_i - a_{i-1} = r$
onde $(..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ...)$ *estão em PA cuja razão é* r.

Exemplo 1.1 *Considere uma PA tal que $a_3 = 7$ e $a_{19} = 55$. Determine a_7.*

Solução: Basta perceber que

$$a_{11} = \frac{a_3 + a_{19}}{2} = \frac{7 + 55}{2} = 31$$

e

$$a_7 = \frac{a_3 + a_{11}}{2} = \frac{7 + 31}{2} = 19.$$

◇

Exemplo 1.2 *Em seis provas, onde as notas atribuidas variam de 0 a 100, um estudante obteve média 83. Se a menor nota for desprezada a sua média sobe para 87. Qual foi a menor nota obtida nas 6 provas?*

Solução: Considere x_4 a menor nota. Então,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = 83 \quad logo \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 498 \quad (1.1)$$

e

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6}{5} = 87 \quad logo \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 435. \quad (1.2)$$

Subtraindo 1.2 de 1.1, temos

$$x_4 = 498 - 435 \Rightarrow x_4 = 63$$

Portanto a menor obtida nota foi 63 . ◇

Exemplo 1.3 *Suponha que a média aritmética de uma turma de* 20 *pessoas seja* 7 *numa determinada prova. Qual será a média das* 19 *pessoas restantes se retirarmos da turma o único aluno que tirou nota* 10.

Solução: Temos pela média artmética que

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{20}}{20} = 7 \Longrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} = 140.$$

Ou seja, a soma das notas é 140. Considere $x_n = 10$ o aluno com nota 10. Desta forma,

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} - x_n}{19} = \frac{140 - 10}{19} = \frac{130}{19} \approx 6,84$$

Portanto, a média das 19 pessoas seria $6,84$. ◇

Lema 1.1 Propriedade da Média Artmética *Se a média aritmética dos números $x_1, x_2, ..., x_n$ é igual a $\overline{x}$, pelo menos, um dos números $x_1, x_2, ..., x_n$ é maior que ou igual a $\overline{x}$. Podendo o leitor consultar [2] para mais detalhes.*

Demonstração: Supor, por contradição, que $x_i < \overline{x}$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.
Ou seja, $x_1 < \overline{x}, x_2 < \overline{x}, ..., x_n < \overline{x}$. Assim, $x_1 + x_2 + ... + x_n < n.\overline{x}$, e dividindo a desigualdade por n, temos, $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} < \overline{x}$. E portanto $\overline{x} < \overline{x}$, o que é absurdo. Logo, existe $i \in 1, 2, ..., n$ tal que $x_i \geq \overline{x}$. ■

A possibilidade de ocorrer vários x_i iguais inspira a definição de uma média aritmética onde as grandezas possam ter pesos a elas associados, pesos estes que de alguma forma deem uma ideia de multiplicidade. Então, se agruparmos os termos iguais e multiplicarmos pela frequência de cada um deles teremos a conhecida média aritmética ponderada.

1.1.2 Média Ponderada

Definição 1.3 *A* **média aritmética (ponderada)** *de uma sequência de números* $(x_1, x_2, \dots x_n)$ *e de pesos* $(p_1, p_2, \dots p_n)$*, com os* $p_{i^s} > 0$*, é o número* P *com respeito à operação de adição com pesos, desta forma,*

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = p_1P + p_2P + \ldots + p_nP.$$

Portanto,

$$P = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

Exemplo 1.4 *Em um grupo de pessoas,* 70% *das pessoas são adultos e* 30% *são crianças. A massa média dos adultos é* 70 *kg e a massa média das crianças é de* 40 *kg. Qual a massa média do grupo? Retirado de [6].*

Solução: A massa média será a média aritmética ponderada dos dois subgrupos, com pesos relativos de $0,7$ e $0,3$.

$$P = \frac{0,7.70 + 0,3.40}{0,7 + 0,3} = \frac{49 + 12}{1} = 61$$

Logo, o grupo tem 61 kg de massa média. $\diamond$

Média Aritmética Simples e Média Aritmética Ponderada

Verifica-se que a Média Aritmética Simples não traduz precisamente diferenças de desempenho, crescimento populacional etc., por considerar que todos os elementos componentes possuem o mesmo peso, ou seja, a Média Aritmética Simples não considera repetições dos elementos, tampouco as variações destes mesmos elementos ao longo do tempo. Por isso, a Média Aritmética é mais precisa para mostrar retornos numéricos de problemas que não envolvam repetições dos elementos constituintes ou grandes variações entre os valores destes elementos ao longo do tempo. Nestes casos, a Média Aritmética Ponderada mostra resultados mais precisos.

Exemplo 1.5 *Em um departamento de uma empresa qualquer, um funcionário recebe um salário de R$ 1.000,00 por mês, enquanto outro recebe R$ 12.500,00 por mês. Qual é a média salarial mensal destes funcionários?*

Solução: Como temos que $x_1 = 1000, x_2 = 12500$ e que $n = 2$, o número funcionários. Então,

$$A = \frac{1000 + 12500}{2} \Rightarrow A = 6750$$

Logo, a média salarial mensal será de R$ 6.750,00. $\diamond$

Verifica-se que o valor obtido por meio da Média Aritmética Simples não possui uma correspondência, que pareça verdadeira, com os salários apresentados.

Vamos verificar, no próximo exemplo, se haverá essa discrepância entre os valores apresentados e a média:

Exemplo 1.6 *Verifique a tabela a seguir e, com base nos dados nela contidos, calcule a média salarial mensal:*

Quantidade de Funcionários	Salários / mês (em R$)
15	800,00
3	3.000,00
2	5.250,00
1	12.100,00

Tabela 1.1: Tabela dos Salários dos Funcionários

Solução: Como há repetições do mesmo valor salarial, ou seja, mais de um funcionário recebe o mesmo salário, o uso da Média Aritmética Ponderada é mais indicado. Como temos os valores

$$x_1 = 800, \quad x_2 = 3000, \quad x_3 = 5250 \;\; e \;\; x_4 = 12.100$$

e os pesos

$$p_1 = 15, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 2 \;\; e \;\; p_4 = 1$$

Então, aplicando a Média Ponderada temos

$$P = \frac{(15.800) + (3.3000) + (2.5250) + (1.12100)}{15 + 3 + 2 + 1}$$

$$P = \frac{12000 + 9000 + 10500 + 12100}{21} \Rightarrow P = 2076,19$$

Portanto a média salarial mensal seria de R$ 2076,19. $\diamond$

Se os funcionários confrontassem seus salários e as médias mensais dos seus salários com os outros funcionários, certamente, ninguém concordaria com tais valores, tanto os que ganham mais quanto os que ganham menos. Por essa razão, consideramos as Médias Aritméticas(simples ou ponderadas) apenas como uma tentativa de minimizar as relações entre duas ou mais medidas, não tendo muita utilidade prática, a não ser em situações nas quais exista uma grande quantidade de elementos a medir e se faz necessário determinar apenas uma amostra para lidar com o tema abordado. Por consequência, as Médias Geométricas e as Médias Harmônicas possuem mais utilidade prática.

1.1.3 Média Geométrica

Definição 1.4 *A* **média geométrica** *de uma sequência de números reais positivos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *é o número* G *com respeito à operação de multiplicação, desta forma*

$$x_1.x_2.\ldots.x_n = \underbrace{G.G.\ldots.G}_{n \quad termos} = G^n.$$

Portanto,

$$G = \sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n}.$$

Aplicação 1.2 *Cada termo de uma progressão geométrica (PG), exceto os extremos, pode ser obtido pela média geométrica, em módulo, dos termos equidistantes. Em particular*

$$|a_i| = \sqrt{a_{i-1}.a_{i+1}} \quad para \quad i = 2, 3, \ldots, n-1 \Leftrightarrow \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_{i+1}}{a_i} = q$$

onde $(..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ...)$ *estão em PG cuja razão é* q.

Exemplo 1.7 *Considere uma PG tal que* $a_8 = 1$ *e* $a_{16} = 625$. *Determine* a_{10}.

Solução: Basta perceber que a_{12} é a média geométrica entre a_8 e a_{16}, portanto

$$a_{12} = \sqrt{a_8.a_{16}} = \sqrt{1.625} = \sqrt{625} = 25$$

e que a_{10} é a média geométrica entre a_8 e a_{12}, portanto

$$a_{10} = \sqrt{a_8.a_{12}} = \sqrt{1.25} = \sqrt{25} = 5$$

$\diamond$

Aplicação 1.3 *O módulo do produto dos* n *primeiros termos de uma PG é:*

$$|P_n| = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$$

De fato, se considerarmos o produto $P_n = a_1.a_2.\ldots.a_{n-a}.a_n$ *e reescrevermos esse produto na ordem inversa dos termos, ou seja,* $P_n = a_n.a_{n-a}.\ldots.a_2.a_1$. *A multiplicação das duas expressoes termo a termo, na ordem será*

$$P_n^2 = (a_1.a_n).(a_2.a_{n-1})\ldots(a_{n-1}.a_2).(a_n.a_1)$$

sabemos que $a_1.a_n = a_2.a_{n-1} = \ldots = a_{n-1}.a_2 = a_n.a_1$, *logo*

$$P_n^2 = (a_1.a_n)^n \Leftrightarrow |P_n| = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$$

Exemplo 1.8 *Determine o produtos dos 40 primeiros termos de uma PG cujo primeiro e o quadragésimo termo são 1 e 2 respectivamente.*

Solução:

$$|P_{40}| = (1.2)^{\frac{40}{2}} = 2^{20}$$

Como a_1 e a_{40} são ambos positivos, então a PG é positiva, logo, $P_{40} = 2^{20}$ ◇

Aplicação 1.4 *É muito comum se fazer uso das Médias Geométricas em geometria plana e espacial:*

Exemplo 1.9 *A altura de um triângulo retângulo em relação à hipotenusa é a média geométrica das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.*

Solução: Observe a construção abaixo, aplicando a razão de semelhança nos triângulos semelhantes AHC e BHA teremos:

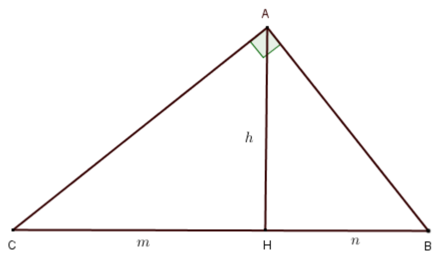


Figura 1.1: A altura é a Média Geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} \Leftrightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Leftrightarrow h = \sqrt{m \times n}.$$

◇

Exemplo 1.10 *Podemos interpretar a Média Geométrica de três números a, b e c como a medida l da aresta de um cubo, cujo volume é o mesmo de um prisma retangular reto, desde que este tenha arestas medindo exatamente a, b e c.*

Solução: Sabemos que o volume de um Prisma de dimeñsões a, b, c é dada por $V = a.b.c$ e o volume de um cubo de aresta l é dada por $V = l^3$. Igualando os volumes:

$$a.b.c = l^3 \rightarrow l = \sqrt[3]{a.b.c}$$

Portanto temos que l é a Média Geométrica entre a, b e c. ◇

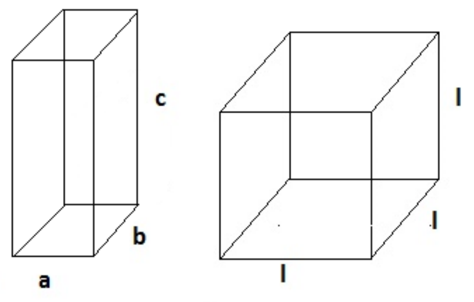


Figura 1.2: Prisma de dimensões a,b,c e Cubo de aresta l.

Aplicação 1.5 *A Média Geométrica é frequentemente usada na Matemática Financeira quando discutimos taxas de rendimento em investimentos, ou ainda em juros sucessivos.*

Exemplo 1.11 *Um investimento rendeu anualmente conforme a seguinte tabela: Qual a média anual de rendimento desse investimento?*

2013	2014	2015
15%	5%	7%

Tabela 1.2: Tabela de Rendimentos Anuais

Solução: Queremos encontrar uma determinada taxa i tal que

$$(1+i)^3 = (1+0,15).(1+0,05).(1+0,07).$$

Logo,

$$(1+i) = \sqrt[3]{1,15.1,05.1,07} \approx 1,0891.$$

que nos dá uma taxa média de aproximadamente 9%. Assim, temos que $i = 9\%$. $\diamond$

Aplicação 1.6 *Numa aplicação a juros compostos o fator de aumento médio é a média geométrica dos fatores de aumento individuais.*

Exemplo 1.12 *Considere que a taxa de rendimento de um fundo de renda fixa tenham sido 10% no primeiro quadrimestre, 20% no segundo e 15% no terceiro. Determine a taxa média de rendimentos anuais admitindo regime de capitalização composta entre os quadrimestres.*

Solução: Queremos encontrar uma determinada taxa i, tal que:

$$(1+i)^3 = (1+0,1).(1+0,2).(1+0,15).$$

Logo,

$$(1+i) = \sqrt[3]{1,1.1,2.1,15} \approx 1,1493$$

que nos da uma taxa media de aproximadamente $14,93\%$. $\diamond$

1.1.4 Média Harmônica

Definição 1.5 *A* **média harmônica** *de uma sequência de números reais não nulos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *é o número* H *com respeito a operação de soma dos inversos, desta forma*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \ldots + \frac{1}{H}}_{n \quad termos} = \frac{n}{H}.$$

Portanto,

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Observação 1.3 *Alguns dos problemas práticos mais interessantes sobre médias estão relacionados à média harmônica. É importante que saibamos reconhecer esses problemas. A seguir colocamos alguns exemplos onde surge a ideia da média harmônica. Nesses problemas o que geralmente ocorre é o fornecimento de taxas de variação (velocidades, períodos, vazões etc) e se pede algo relativo a taxa de variação média.*

Aplicação 1.7 *Um automóvel vai da cidade* A *para* B *com uma velocidade média de* v_1 *e volta, pelo mesmo caminho, de* B *para* A *com uma velocidade média de* v_2*. A velocidade média em todo percurso será a média harmônica de* v_1 *e* v_2*.*

Solução: De fato, sendo d a distância entre A e B , temos que $t_1 = \frac{d}{v_1}$, tempo de ida, e $t_2 = \frac{d}{v_2}$ tempo de volta. Se v é a velocidade média em todo percurso, então $v = \frac{2d}{t_1 + t_2}$, donde

$$\frac{2d}{v} = t_1 + t_2 = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$$

e portanto,

$$\frac{2}{v} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Portanto, temos que v é a média harmônica entre v_1 e v_2.
Note que a argumentação não se altera se tivermos n deslocamentos iguais com velocidades médias em cada parte $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ou seja, se v é a velocidade média em todo percurso, temos

$$\frac{n}{v} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}}.$$

◇

Exemplo 1.13 *Um veículo faz metade da distância de um trajeto qualquer a 90 km/h e a outra metade a 50 km/h, a velocidade média do trajeto será:*

Solução: Como temos que $x_1 = 90 \;\; km/h$, $x_2 = 50 \;\; km/h$, e duas partes do trajeto, logo $n = 2$. A velocidade média será a média harmônica entre x_1 e x_2, portanto

$$H = \frac{2}{\dfrac{1}{90} + \dfrac{1}{50}} = \frac{2}{\dfrac{5+9}{450}} = \frac{2}{\dfrac{14}{450}} = \frac{900}{14} = 64,3.$$

A velocidade média é portanto de $64,3 \;\; km/h$. ◇

Aplicação 1.8 *Se um tanque pode ser enchido individualmente por uma torneira 1 em um tempo T_1 , por uma torneira 2 em um tempo T_2 , assim sucessivamente até uma torneira n em um tempo T_n , então se pusermos todas as torneiras simultaneamente para encher o tanque, o inverso do tempo que levarão é a soma dos inversos dos tempos delas separadas. Note que cada uma das torneiras pode ser substituída por torneiras de mesma vazão, de modo que o tempo necessário para que esta torneira substituta encha o tanque é a média harmônica dos tempos individuais.*

Solução: A razão $\dfrac{1}{T_i}$ corresponde a fração do tanque que é cheia em uma unidade de tempo pela torneira i , ou seja, a vazão da torneira i . Logo, se T for o tempo necessário para as torneiras juntas encherem todo tanque e $\dfrac{1}{t}$ a vazão de n torneiras idênticas encherem juntas o tanque, teremos: $\dfrac{n}{t} = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{T_1} + \dfrac{1}{T_2} + \ldots + \dfrac{1}{T_n}$. ◇

Exemplo 1.14 *Três torneiras ligadas sozinhas enchem um tanque em 3 h, 4 h e 6 h respectivamente. Ligando as tres torneiras simultaneamente, quanto tempo levarão para encher o tanque sabendo que há um vazamento capaz de esvaziar o tanque em 12 h.*

Solução: Observe que o problema tem um *vazamento*, que é considerado como uma torneira que *enche* o tanque em tempo negativo. Basta fazer,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{8}{12}\end{aligned}$$

Obtendo assim $T = 3/2$.
Portanto, para encher o tanque será preciso $\frac{3}{2}$h, ou seja, 1h 30min. ◇

Médias Harmônicas são usadas quando temos que lidar com uma série de valores inversamente proporcionais como um cálculo de uma velocidade média, relações entre velocidade e tempo, um custo médio de compras com uma taxa fixa de juros e resistências elétricas em paralelo, por exemplo.

Podemos exemplificar essa representação mostrando relação entre a resistência total, R_T, de um sistema em paralelo e a soma das suas resistências, R_1 e R_2, por exemplo. Temos: $\frac{1}{R_T} = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$, uma relação com o inverso das resistências.

Exemplo 1.15 *Prove que média geometrica entre dois termos é média geometrica entre as médias harmônica e aritmética desses dois termos.*

Solução: Dados x e y reais positivos, temos:

$$G = \sqrt{x.y}, \quad A = \frac{x+y}{2} \quad e \quad H = \frac{2xy}{x+y}.$$

logo,

$$\sqrt{A.H} = \sqrt{(\frac{x+y}{2}).(\frac{2xy}{x+y})} = \sqrt{x.y} = G.$$

$\diamond$

1.1.5 Média Quadrática

Definição 1.6 *A* **média quadrática** *de uma sequência de números reais não nulos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *é o número* Q *com respeito a operação de soma dos quadrados, desta forma*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \underbrace{Q^2 + Q^2 + \ldots + Q^2}_{n \quad termos} = nQ^2.$$

Portanto

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

Exemplo 1.16 *Determine a Média Quadrática entre os números 1 e 7. Adaptado do [6].*

Solução: De forma direta : $Q = \sqrt{\frac{1^2+7^2}{2}} = \sqrt{\frac{1+49}{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5.$ $\diamond$

Aplicação 1.9 *Estatisticamente, a forma mais natural de medir o quanto uma sequência de números se dispersou da média aritmética é através do* **desvio padrão** *(σ). O desvio padrão é a média quadrática dos desvios individuais.*

Ou seja, dados $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e denotando por* $\overline{x}$ *a média aritmética dos* $x_i^{'}s$ *temos*

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

Exemplo 1.17 *Considere a função real de variável real:*

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \ldots + (x_n - x)^2}{n}}.$$

Prove que $\overline{x}$ *, a média aritmética dos* $x_i^{'}s$ *é o valor que minimiza o desvio padrão.*

Solução: Para minimizar σ , basta minimizar a função $\sigma(x)^2$. Desenvolvendo $\sigma(x)^2$, temos,

$$\sigma(x)^2 = x^2 - 2.(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}).x + \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}.$$

Como essa função é uma função quadrática, da forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, o mínimo ocorre no vertice, onde $x_v = \dfrac{-b}{2a}$. Logo,

$$x_v = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \Rightarrow x_v = \overline{x}$$

◇

1.2 Desigualdade das Médias

Nesta seção faz-se uma comparação entre as várias médias, resultando numa desigualdade fundamental entre as médias aritmética, geométria, harmônica e quadrática, a partir das referências [1] e [2]. Verificamos diversas aplicações envolvendo as desigualdades das médias e a importância de tais desigualdades no desenvolvimento das competências, em diversas áreas da matemática, dos alunos do Ensino Médio.

Teorema 1.1 Desigualdades das Médias *Sejam $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ números reais positivos e denotemos por H, G, A, Q respectivamente as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática desses números, então temos as seguintes desigualdades:*

$$H \leq G \leq A \leq Q.$$

Além disso, a igualdade em qualquer ponto das desigualdades acima é possível se, e somente se, $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n)$ e, nestas condições, teremos necessariamente a igualdade de todas as médias. Baseado em [6].

Demonstração: Vamos começar mostrando que a desigualdade $G \leq A$ implica a desigualdade $H \leq G$. De fato, aplicando a desigualdade $G \leq A$ para $(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n})$, temos

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}.$$

O que é equivalente a

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

isto é, a desigualdade $H \leq G$ vale para a n-upla $(x_1 \ldots x_n)$.

Para demonstrar a desigualdade $A \leq Q$, consideramos a desigualdade elementar

$$(x_1 - A)^2 + \cdots + (x_n - A)^2 \geq 0.$$

De onde observamos que $(x_1 - A)^2 + \cdots + (x_n - A)^2 = 0$ se, e somemte se, $x_1 = \cdots = x_n = A$. Desenvolvendo a desigualdade acima, temos

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 2A(x_1 + \cdots + x_n) + nA^2 \geq 0.$$

Lembrando que $x_1 + \cdots + x_n = nA$, da última desigualdade temos

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq nA^2.$$

Portanto,

$$A \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} = Q.$$

Ocorrendo a igualdade somente quando $x_1 = \cdots = x_n$. Para concluir a prova do teorema falta mostrar que $G \leq A$ e que a igualdade só ocorre quando $x_1 = \cdots = x_n$. Isto seguirá dos dois próximos lemas. ■

Antes de darmos os próximos dois lemas que nos permitirão a conclusão do precedente teorema, vamos introduzir a seguinte definição.

Definição 1.7 *Dizemos que a desigualdade das médias ($A \geq G$) vale para $n \in \mathbb{N}$ se para todo lista $x_1, \ldots, x_n$ de n números reais positivos vale a desigualdade*

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

ocorrendo a igualdade somente quando $x_1 = \cdots = x_n$.

Lema 1.2 *A desigualdade das médias ($A \geq G$) vale para $n = 2^k$ para $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: A prova será feita por indução sobre k. Para $k = 1$, $n = 2^1 = 2$, temos:

$$A - G = \frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} = \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2}{2} \geq 0$$

ocorrendo a igualdade somente quando $x_1 = x_2$. Supondo, por hipótese de indução, que o resultado valha para $n = 2^k$, provemos que o resultado também vale para $2n = 2^{k+1}$. De fato, aplicando o caso $k = 1$, para os números $\dfrac{(x_1 + \cdots + x_n)}{n}$ e $\dfrac{(x_{n+1} + \cdots + x_{2n})}{n}$, temos

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} \cdots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt{\frac{(x_1 + \cdots + x_n)}{n} \frac{(x_{n+1} + \cdots + x_{2n})}{n}}.$$

Agora, aplicando a hipótese de indução, para $\dfrac{(x_1 + \cdots + x_n)}{n}$ e $\dfrac{(x_{n+1} + \cdots + x_{2n})}{n}$, a última igualdade nos dá

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} \cdots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \sqrt[n]{(x_{n+1} \ldots x_{2n})}}.$$

o que é equivalente a

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} \cdots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_n x_{n+1} \ldots x_{2n}},$$

ocorrendo a igualdade somente quando $x_1 = \cdots = x_n$, $x_{n+1} = \cdots = x_{2n}$ e $x_1 + \cdots + x_n = x_{n+1} + \cdots + x_{2n}$, o que implica que a igualdade só ocorre quando $x_1 = \cdots = x_n = x_{n+1} = \cdots = x_{2n}$. Portanto, pelo princípio de indução finita, o lema segue. ■

Lema 1.3 *Se a desigualdade das médias $A \geq G$ é válida para algum $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 3)$, então ela também vale para para $n-1$.*

Demonstração: Sejam $x_1, \ldots, x_{n-1}$ números reais positivos. Defina $x_n = A = \dfrac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$. Note que $\dfrac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n} = \dfrac{(n-1)A}{n} + \dfrac{A}{n} = A$. E, portanto, por hipótese,

$$A \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_{n-1} A}$$

ocorrendo a igualdade somente quando $x_1 = \cdots = x_{n-1} = A$.

Como a última desigualdade é equivalente a $A^n \geq x_1 \ldots x_{n-1} A$, concluímos daí que

$$A \geq \sqrt[n-1]{x_1 \ldots x_{n-1}} = G,$$

ocorrendo a igualdade somente quando $x_1 = \cdots = x_{n-1}$. ■

Corolário 1.1 *Se a desigualdade das médias $A \geq G$ é válida para algum $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 3)$, então ela também vale para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq n$.*

Demonstração: Segue imediatamente aplicando o Lema 1.3, recursivamente $n-2$ vezes. ■

Conclusão da prova do Teorema 1.1

Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pelo Lema 1.2, vale a desigualdade das médias $(A \geq G)$ para 2^n. Como $n < 2^n$, segue do Corolário 1.1 que a desigualdade $A \geq G$ vale para n. Isso conclui a prova do Teorema 1.1

Exemplo 1.18 *Mostre que, entre todos os retângulos de perimetro $2p$, o quadrado é o de maior área. Retirado de [6].*

Solução: Sendo x e y os lados do retângulo, temos que $x + y = p$,logo a média aritmética entre x e y é $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{p}{2}$.
E ainda temos que a área do retângulo $A = x.y$, daí:

$$\sqrt{A} = \sqrt{x.y} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{p}{2}.$$

portanto,

$$A \leq \frac{p^2}{4}$$

e a igualdade só é obtida quando $x = y$.
Portanto, o retângulo de maior área é o quadrado cuja área $A = \dfrac{p^2}{4}$ ◇

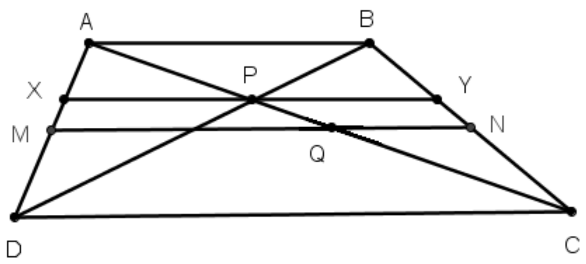


Figura 1.3: Trapézio ABCD

Exemplo 1.19 *No trapézio $ABCD$, da figura 1.3, M e N são pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Seja P é o ponto de interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$. Temos que $\overline{XY}$ é paralelo a $\overline{AB}$ e passa pelo ponto P.*

Mostre que $\overline{XY}$ é a média harmônica e que $\overline{MN}$ e a média aritmética dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Solução: Como o $\triangle ABD \sim \triangle XPD$, temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{XD}}{\overline{XP}} \Rightarrow \overline{XD} = \frac{\overline{AD}.\overline{XP}}{\overline{AB}}. \tag{1.3}$$

Pela semelhanca $\triangle AXP \sim \triangle ADC$, temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}} \Rightarrow \overline{AX} = \frac{\overline{AD}.\overline{XP}}{\overline{DC}}. \tag{1.4}$$

Somando as expressões 1.4 e 1.3 obtemos

$$\overline{AD} = \overline{AX} + \overline{XD} = \frac{\overline{AD}.\overline{XP}}{\overline{DC}} + \frac{\overline{AD}.\overline{XP}}{\overline{AB}}. \tag{1.5}$$

Dividindo 1.5 por $\overline{AD}$, obtemos

$$1 = \frac{\overline{XP}}{\overline{DC}} + \frac{\overline{XP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{XP}} = \frac{1}{\overline{DC}} + \frac{1}{\overline{AB}}.$$

De modo análogo, como $\triangle ABC \sim \triangle PYC$ e $\triangle BDC \sim \triangle BPY$, obtemos que $\frac{1}{\overline{PY}} = \frac{1}{\overline{DC}} + \frac{1}{\overline{AB}}$. Logo concluímos que $\overline{XP} = \overline{PY}$, e portanto a expressão acima pode ser reescrita como, $\frac{2}{\overline{XY}} = \frac{1}{\overline{DC}} + \frac{1}{\overline{AB}}$. Provando que $\overline{XY}$ é a Média Harmônica de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

Para a segunda parte, basta observar que $\overline{QN} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$, pois $\triangle CNQ \sim \triangle CBA$. Segue que $\overline{MQ} = \dfrac{\overline{DC}}{2}$ já que $\triangle AMQ \sim \triangle ADC$. Assim,

$$\overline{MN} = \overline{MQ} + \overline{QN} = \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{DC}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}.$$

Observe que o problema acima nos fornece uma demonstração para a desigualdade entre as médias aritmética e harmônica, para dois termos, ou seja, $A \geq H$, com a igualdade ocorrendo apenas quando $\overline{AB} = \overline{DC}$. $\diamond$

Exemplo 1.20 *De todos os paralelepípedos, conhecida a soma das suas três arestas, perpendiculares entre si, encontrar o paralelepípedo de maior volume.*

Solução: Suponha $m = a + b + c$ a soma das arestas e $V = abc$ o volume do paralelepípedo.

Aplicando a desigualdade $A \geq G$ temos:

$$\frac{m}{3} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{V}$$

então

$$\frac{m}{3} \geq \sqrt[3]{V} \Rightarrow V \leq \frac{m^3}{27}.$$

A igualdade ocorre se $a = b = c = \dfrac{m}{3}$, isto é, quando o paralelepípedo representa um cubo. $\diamond$

Exemplo 1.21 *Qual o maior valor que a soma das coordenadas de um ponto, pertencente a circunferência $x^2 + y^2 = 50$, pode assumir?*

Solução: Pela desigualdade

$$A \leq Q \ \ temos, \quad \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = 5.$$

Portanto, $x + y \leq 10$. Então o valor máximo que a soma das coordenadas pode assumir é $x + y = 10$, se $x = y = 5$ vale a igualdade. $\diamond$

Exemplo 1.22 *Se $1200\ \ cm^2$ de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa e as dimensões para que isso ocorra.*

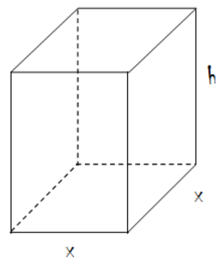


Figura 1.4: Paralelepípedo de arestas x, x e h

Solução: Considere o Paralelepípedo da figura 1.4. Observemos que $A_b = x^2$ e $A_l = 4(xh)$, logo a área total da caixa $A_t = x^2 + 4xh$ e seu volume é igual a $V = x^2h$. Aplicando a desigualdade $A \geq G$, temos

$$\frac{1200}{3} = \frac{x^2 + 2xh + 2xh}{3} \geq \sqrt[3]{x^2.2xh.2xh} = \sqrt[3]{4(x^2h)^2} = \sqrt[3]{4V^2}$$

Como $x^2 + 4xh = 1200$ o volume será máximo se, e somente se, $x^2 = 2xh$, logo $x = 2h$. Portanto $2xh + 4xh = 6xh = 1200$ ou seja $xh = 200$, mas como $x = 2h$ resulta que $2h.h = 200, h^2 = 100, h = 10$ e $x = 20$. Concluimos que as dimensões são $h = 10 \quad cm$ e $x = 20 \quad cm$ e o volume máximo da caixa será $V = 4000 \quad cm^3$. $\diamond$

Exemplo 1.23 *Determinar as dimensões do paralelepípedo de menor diagonal possível, sabendo que a soma dos comprimentos de todas suas arestas é 12.*

Solução: Considere um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c, como o comprimento de todas suas arestas é 12, podemos escrever, $4a + 4b + 4c = 12$, então $a + b + c = 3$. Uma vez que $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, usando $A \leq Q$ temos

$$\frac{a + b + c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

Mas como $a + b + c = 3$

$$1 \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

Elevando ao quadrado temos

$$1 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Obtendo assim

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3.$$

Como queremos a menor diagonal e sabendo que igualdade $A = Q$, ocorre quando $a = b = c$, tomaremos $d = \sqrt{3} \Longrightarrow a = b = c = 1$. $\diamond$

Exemplo 1.24 *Se uma lata de zinco de volume* $16\pi \quad cm^3$ *deve ter a forma de um cilindro circular reto, figura 1.5. Determine a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material usado em sua fabricação seja a menor possível.*

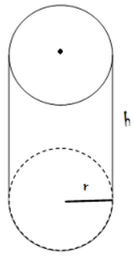


Figura 1.5: Lata de Zinco

Solução: Seja r o raio da base, h a altura e S a área da superfície total do cilindro. Então

$$V = \pi r^2.h = 16\pi \text{ cm}^3 \Longrightarrow r^2.h = 16 \quad e \quad S = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Usando a desigualdade das médias em S, obtemos

$$\frac{S}{3} = \frac{\pi rh + \pi rh + 2\pi r^2}{3} \geq \sqrt[3]{\pi rh\pi rh 2\pi r^2} =$$

$$= \sqrt[3]{2(\pi)^3(r^2h)^2} = \sqrt[3]{2(\pi)^3(16)^2} = \sqrt[3]{2^9(\pi)^3} = 8\pi.$$

E a área S será mínima se, e somente se, ocorrer a igualdade , isto é, quando $\pi rh = 2\pi r^2$. Obtemos $h = 2r$ e portanto $2r^3 = 16$, resulta $r = 2 \quad cm$ e chegamos a $h = 4 \quad cm$, verificando-se que, o mínimo para S ocorre para esses valores. $\diamond$

Podemos perceber que existem várias formas de demonstrar as Desigualdades. No entanto priorizamos as formas mais básicas, devido ao público que queremos atingir . Apresentamos questões contextualizadas bastante significativas para despertar o interesse dos alunos, sabendo que a resolução de problemas é fundamental no ensino de Matemática, fazendo com que o aluno enfrente novos desafios e desenvolva sua capacidade de raciocínio. Observamos a aplicação das desigualdades nos conteúdos do ensino médio, quando se trata de problemas de otimização envolvendo áreas de figuras planas, no cálculo de área e volume de figuras espaciais , no cálculo com aplicações de máximo e mínimo e em diversas situações-problemas. Percebendo ainda que o estudos acerca das desigualdades é muito significativo e deve ser abordado com maior frequência no ensino médio.

1.3 Representação Geométrica para as Médias

Utilizaremos alguns conceitos e construções geométricas para representar geométricamente as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, bem como verificar a desigualade existente entre essas médias a partir de dois segmentos distintos a e b.

1.3.1 Representação da Média Aritmética

Sejam a e b dois segmentos distintos. Iremos construir uma circunferência, cujo diâmetro é a soma dos segmetos a e b, ou seja, $D = a + b$. (figura 1.6)

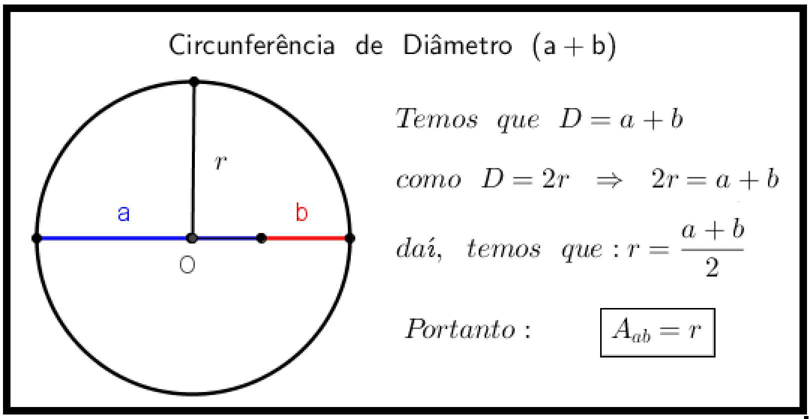


Figura 1.6: Representação da Média Aritmética

A Média Aritmética (A_{ab}) é o raio r da circunferência cujo Diâmetro é $D = a+b$.

1.3.2 Representação da Média Geométrica

A partir da circunferência construida na figura 1.6, traçaremos h perpendicular ao Diâmetro, exatamente no ponto de interseção de a e b, determinando um ponto na circunferência que forma um triângulo com as extremidades desse Diâmetro. Esse triângulo é retângulo, já que o Diâmetro é um de seus lados, o que nos permite utilizar a relação métrica entre a altura e a projeção dos catetos.

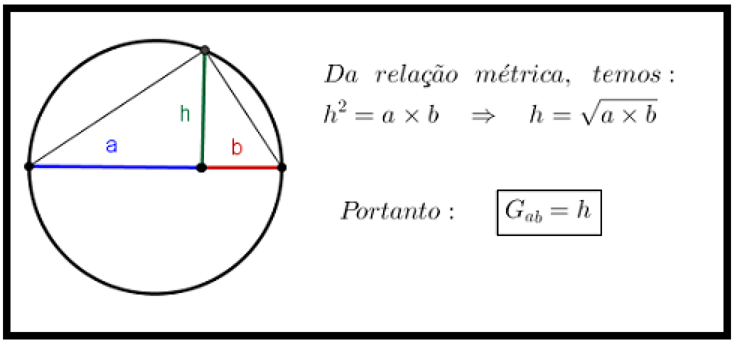


Figura 1.7: Representação da Média Geométrica

A Média Geométrica (G_{ab}) é a altura h relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo.

1.3.3 Representação da Média Harmônica

A partir do circunferência construída na figura 1.6, e da altura determinada na figura 1.7, traçaremos um raio r, que vai do centro até o ponto em que h toca a circunferência, obtendo um triângulo retângulo onde hipotenusa coincide com o raio r e catetos m e h. Traçando ainda uma perpendicular a esse raio passando no ponto de interseção de a e b , determinamos um outro triângulo retângulo de hipotenusa h e catetos e e c. Aplicaremos semelhança nesses triangulos.

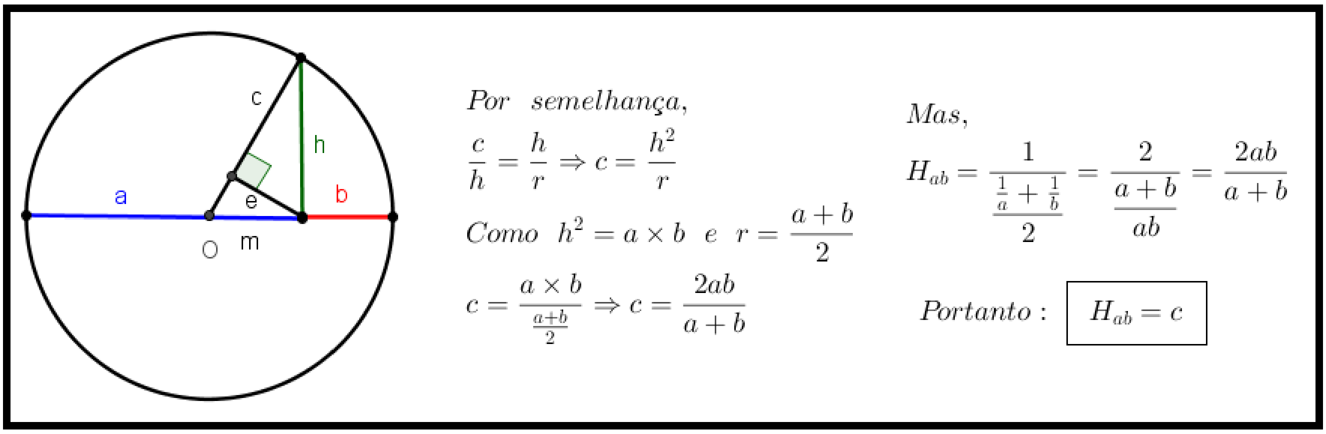
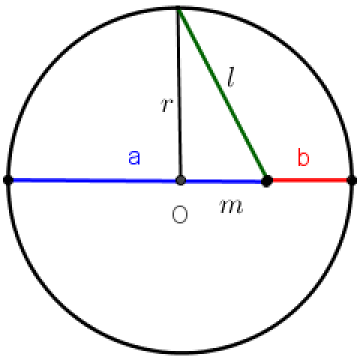


Figura 1.8: Representação da Média Harmônica

A Média Harmônica (H_{ab}) é o cateto c do triângulo retângulo cuja hipotenusa coincide com a altura h da figua 1.7

1.3.4 Representação da Média Quadrática

A partir do raio r determinado na figura 1.6 construiremos o segmento l, de extremidades onde r toca a circunferência e na interseção de a e b. Temos que l será a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos são r e m, observados na figura 1.9. Aplicaremos o Teorema de Pitágoras nesse triângulo retângulo.



$$Temos\ \ que:$$

$$m = \frac{a+b}{2} - b \quad \Rightarrow \quad m = \frac{a-b}{2} \quad e \quad r = \frac{a+b}{2}$$

$$E\ \ por\ \ Pitágoras: \ \ l^2 = r^2 + m^2$$

$$dai, \ \ l^2 = (\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{a-b}{2})^2$$

$$l^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$Portanto: \quad \boxed{Q_{ab} = l}$$

Figura 1.9: Representação da Média Quadrática

A Média Quadrática (Q_{ab}) é a hipotenusa l do triângulo retângulo cujos catetos são r e m.

1.3.5 Conclusão

A partir das construções realizadas chegamos aos seguinte resultados paras as médias:

- r é a Média Aritmética (A);
- h é a Média Geométrica (G);
- c é a Média Harmônica (H);
- l é a Média Quadrática (Q).

Podemos verificar esses resultados na figura 1.10.

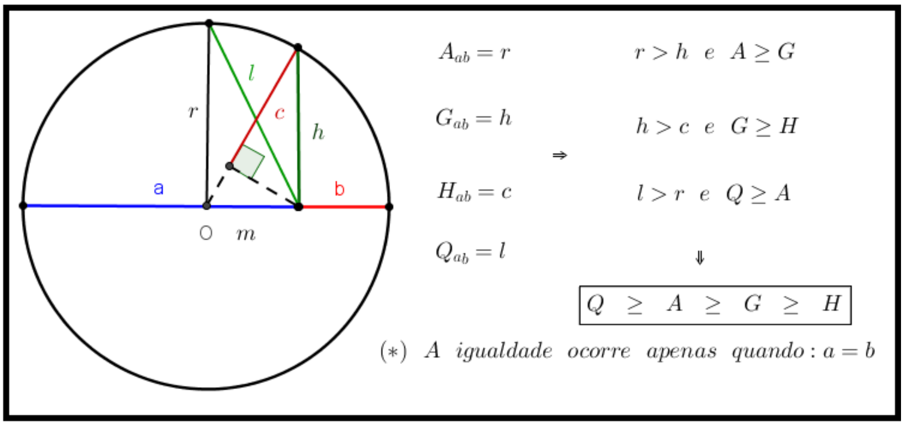


Figura 1.10: Representação das Médias Q, A, G, H

Observe ainda as desigualdades

- $r > h$, ou seja, $(A) > (G)$, valendo a igualdade, $(A) \geq (G)$, apenas quando $a = b$;
- $h > c$, ou seja, $(G) > (H)$, valendo a igualdade, $(G) \geq (H)$, apenas quando $a = b$;
- $l > r$, ou seja, $(Q) > (A)$, valendo a igualdade, $(Q) \geq (A)$, apenas quando $a = b$;

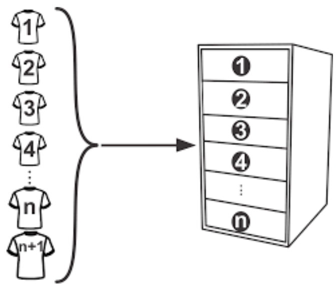
Portanto,

- $l > r > h > c$, ou seja, $(Q) > (A) > (G) > (H)$, valendo a igualdade, $(Q) \geq (A) \geq (G) \geq (H)$, apenas quando $a = b$.

Capítulo 2

Princípio das Gavetas

Pelo **Principio das Gavetas de Dirichlet**, **se $n+1$ objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta deverá conter, pelo menos, dois objetos**. Essa ideia tão óbvia é, na realidade, uma poderosa ferramenta na demonstração de muitos resultados bastante difíceis. O que, muitas vezes, torna o problema difícil é a construção de um conjunto ou conjuntos aos quais se possa aplicar esse princípio.



O Princípio das Gavetas de Dirichlet foi utilizado publicamente, pela primeira vez, pelo matemático alemão Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), em 1834 com o nome de Schubfachprinzip ("princípio das gavetas"). Em sua homenagem, portanto, ficou conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Podendo ser aplicado em muitas situações formais, é muito útil para resolver problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos mas, podem ser resolvidos sem recorrer a fórmulas ou a técnicas complicadas. A sua aplicação exige identificar, na situação dada, quem faz o papel dos objetos e quem faz o papel das gavetas. O princípio de Dirichlet admite generalizações e suas demonstrações e aplicações podem ser apresentadas de maneira simples, acessível e cativante aos estudantes. Vamos visualizar aplicações que evidenciam esta abordagem como um método importante de contagem matemática, que ultrapassa este senso comum de objetos e gavetas. O Princípio das Gavetas parece bastante inocente, mas tem muitas aplicações interessantes, especialmente em argumentos de *existência* em que não se determina o objeto procurado explicitamente.

2.1 Princípio das Gavetas de Dirichlet

Teorema 2.1 (O Princípio das Gavetas de Dirichlet) *Seja k um número inteiro positivo. Se $k+1$ ou mais objetos são colocados dentro de k gavetas, então há uma gaveta que terá dois ou mais objetos.*

Demonstração: Seja x_j o número de objetos colocados na gaveta $j = 1, 2, ..., k$. Então a média do número de objetos por gaveta é dado por

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k} \geq \frac{k+1}{k} > 1.$$

Pelo Teorema 2.1, existe algum número x_j maior ou igual a $\overline{x}$, isto é, existe alguma gaveta j que possui mais do que 1 objeto. ■

Exemplo 2.1 *Quantos alunos deve haver em uma sala para podermos afirmar que pelo menos dois estudantes tenham a mesma nota em uma determinada prova, se a nota é graduada em um número inteiro de 0 a 10?*

Solução: De 0 a 10 existem 11 números possíveis(gavetas). O princípio de Dirichlet mostra que entre 12 estudantes(objetos) há pelo menos dois com a mesma nota. ◇

Exemplo 2.2 *Quantas pessoas precisam estar no mesmo ônibus para garantir que pelo menos duas delas tenham o sobrenome iniciado pela mesma letra?*

Solução: Como no alfabeto existe 26 letras (gavetas). Se tiverem 27 pessoas(objetos), então serão 27 sobrenomes que devem ser distribuídos nas 26 gavetas, garantindo assim, pelo princípio que pelo menos uma das letras terá dois sobrenomes. ◇

2.2 A Generalização do Princípio

O princípio das gavetas afirma que deverá haver pelo menos dois objetos na mesma gaveta quando existirem mais objetos que gavetas. Desta forma, o princípio de Dirichlet, pode ser generalizado pelo teorema a seguir, onde utilizaremos a seguinte notação: $\lfloor x \rfloor$ o único inteiro tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, ou seja, é a parte inteira de x.

Teorema 2.2 (A Generalização do Princípio de Dirichlet) *Se colocarmos n objetos em k gavetas, então ao menos uma das gavetas conterá, no mínimo, $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1$ objetos. Adaptado se baseando em [5].*

Demonstração: Seja x_j o número de objetos colocados na gaveta $j = 1, 2, ..., k$. Então, o número médio $\overline{x}$, de objetos por gaveta é

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k} = \frac{n}{k}.$$

Assim, pelo Lema 1.1, existe algum elemento $x_{j_0} \geq \overline{x}$, ou seja, maior ou igual a $\frac{n}{k}$.

- Se $\frac{n}{k}$ não é natural, então, como x_{j_0} é natural, ele deve ser maior ou igual a $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$. Em particular , $x_{j_0} \geq \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1$

- Se $\frac{n}{k}$ é natural, então, $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor = \frac{n}{k} - 1$, isto é: $\frac{n}{k} = \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1$ e o resultado segue.

■

Exemplo 2.3 *Entre 500 pessoas pelo menos quantas nasceram no mesmo mês?*

Solução: Utilizando o Teorema 2.2 temos

$$\lfloor \frac{500-1}{12} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{499}{12} \rfloor + 1 = 42.$$

Assim, podemos afirmar que pelo menos 42 pessoas nasceram no mesmo mês. ◇

Exemplo 2.4 *Mostre que em qualquer grupo de 20 pessoas, pelo menos 3 nasceram no mesmo dia da semana. Visto em [5]*

Solução: De fato, se tomarmos $n = 20$ e $k = 7$(dias da semana). Logo, como

$$\lfloor \frac{20-1}{7} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{19}{7} \rfloor + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Portanto, pelo menos 3 terão nascido no mesmo dia da semana. ◇

Exemplo 2.5 *Quantas pessoas tem o mesmo signo, em um grupo de 40 pessoas? Modificado de [7]*

Solução: Note que, colocando cada pessoa (objeto) na gaveta do seu signo, temos n = 40 e K = 12(signos), segue que

$$\lfloor \frac{40-1}{12} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{39}{12} \rfloor + 1 = 3 + 1 = 4$$

Logo, pelo menos 4 pessoas tem mesmo signo. ◇

Exemplo 2.6 *João convidou 49 amigos para sua festa de aniversário. Podemos afirmar que em sua festa existiam pelo menos:*

a) 5 pessoas que fazem aniversario no mesmo mês ?

Solução: Verdadeira.
O ano tem 12 meses e podemos considerar cada mês como uma gaveta. Assim, com $n = 12$, pelo princípio da gavetas, temos: $\lfloor \frac{49-1}{12} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{48}{12} \rfloor + 1 = 4 + 1 = 5$ ◇

b) 8 pessoas que nasceram no mesmo ano?

Solução: Falsa.
O numero 49 não é suficientemente grande para podermos assegurar a afirmação, diante do número de anos que os convidados podem ter nascido. ◇

c) 6 pessoas que nasceram no mesmo dia da semana?

Solução: Verdadeira.
A semana tem 7 dias (domingo, segunda, terça, ..., sábado), assim, a afirmação é verdadeira pois $\lfloor \frac{49-1}{7} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{48}{7} \rfloor + 1 = 6 + 1 = 7$ ◇

d) 2 pessoas que nasceram no mês de janeiro?

Solução: Falsa.
Pelo item (a) podemos garantir que pelo menos um mês em que pelo menos 5 pessoas nasceram, mas o princípio das gavetas, não assegura qual é o mês. ◇

O Teorema 2.2 pode também ser enunciado da seguinte forma.

Teorema 2.3 (Princípio das Gavetas generalizado - bis) *Se n gavetas são ocupadas por pelo menos $nk + 1$ objetos, então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos $k + 1$ objetos.*

Exemplo 2.7 . *Em [8]: Numa festa de aniversário com 37 crianças, podemos dizer que pelo menos 4 delas nasceram no mesmo mês?*

Solução: De fato, como são 12 meses, $12 \times 3 + 1 = 37$ o resultado segue do Teorema 2.3, com $n = 12$ e $k = 3$. Logo temos que pelo menos $3 + 1 = 4$ crianças nasceram no mesmo mês. ◇

Exemplo 2.8 . *Um carteiro deseja entregar cartas em um prédio com 20 apartamentos. Quantas cartas ele terá que entregar para garantirmos que pelo menos um apartamento receberá mais de 3 cartas?*

Solução: Se consideremos os apartamentos como gavetas, e as cartas como os objetos, pela generalização do princípio das gavetas , $20 \times 3 + 1 = 61$. Logo com 61 cartas garantimos que um apartamento receberá 4 cartas. $\diamond$

Exemplo 2.9 . *Se uma urna contém 4 bolas vermelhas, 7 bolas verdes, 9 bolas azuis e 6 bolas amarelas. Qual o menor número de bolas que devemos retirar (sem olhar) para ter certeza de ter tirado pelo menos 3 de uma mesma cor?*

Solução: Consideramos como gavetas as 4 cores diferentes e, portanto, tomando $k = 2$ e $n = 4$, temos $4 \times 2 + 1 = 9$. Portanto, se retirarmos 9 bolas da urna, pelo menos três delas tem a mesma cor. $\diamond$

2.3 Exercícios Resolvidos

Os Exercícios a seguir, por serem simples e de fácil assimilação podem servir para introduzir e apresentar o Princípio das Gavetas. Pois muitos problemas atraentes da matemática podem ser resolvidos sem recorrer a fórmulas ou a técnicas complicadas. Iremos apresentar sugestões de soluções, para os exercícios propostos, utilizando o Princípio das Gavetas.

Exercício 2.3.1 *Mostrar que, numa festa de aniversário com mais de 12 crianças, existem pelo menos duas nascidas no mesmo mês e que também existem pelo menos duas nascidas no mesmo dia da semana.*

Solução: Como temos mais crianças (objetos) do que mêses (gavetas), pelo menos um "mês", deverá conter pelo menos duas "crianças". Na segunda parte, sendo o número de crianças maior do que 7, necessariamente duas ou mais terão nascido no mesmo dia da semana. $\diamond$

Exercício 2.3.2 *Sabendo que existem n pessoas em uma sala, qual o número mínimo de pessoas para garantir que 2 nasceram no mesmo mês? Exercício modificado de [6].*

Solução: Pelo princípio das gavetas: $(12 \times 1) + 1 = 13$ pessoas. Pois são 12 meses no ano (gavetas) e com 13 pessoas(objetos) pelo menos duas fazem aniversario no mesmo mês. $\diamond$

- **E, se a pergunta fosse:** Qual o número mínimo de pessoas para garantir que 3 nasceram no mesmo mês?

Solução: Pelo princípio das gavetas: $(12 \times 2) + 1 = 25$ pessoas. Se pegássemos 24 pessoas, poderíamos ter 2 nascidas em cada mês do ano. Adicionando mais uma pessoa, teremos a certeza de que ela nasceu no mesmo mês que, pelo menos (na pior hipótese), outras 2 pessoas presentes na sala e assim, teríamos garantido 3 pessoas com o mesmo mês de nascimento. $\diamond$

- **E, se a pergunta fosse:** Qual o número mínimo de pessoas para garantir que 4 nasceram no mesmo mês?

Solução: Pelo princípio das gavetas: $(12 \times 3) + 1 = 37$ pessoas. Análogamente, com 36 pessoas, poderíamos ter 3 nascidas em cada mês do ano. Adicionando mais uma pessoa, teremos a certeza de que ela nasceu no mesmo mês que, pelo menos (na pior hipótese), outras 3 pessoas presentes na sala e assim, teríamos garantido 4 pessoas com o mesmo mês de nascimento. $\diamond$

Exercício 2.3.3 *Quantas jogadas de dado teremos que fazer para ter certeza que um mesmo número será sorteado 2 vezes?*

Solução: Na pior hipótese, podemos obter 6 números diferentes. Na jogada seguinte, com certeza o resultado será igual a algum anterior. Então, com 7 jogadas, garantiremos 2 resultados iguais. Pelo princípio : $(6 \times 1) + 1 = 7$ jogadas. $\diamond$

Exercício 2.3.4 *Em uma gaveta estão guardadas várias meias masculinas, todas misturadas, nas seguintes quantidades e cores: 8 meias brancas, 12 meias pretas, 6 meias beges, 4 meias vermelhas e 2 meias azuis. Ocorreu uma pane de energia elétrica e uma pessoa precisa retirar a quantidade mínima de meias dessa gaveta, na escuridão, para que possa garantir que duas delas, pelo menos, sejam da mesma cor. O número de meias que a pessoa deve retirar é:*

Solução: São 5 cores, logo basta tirarmos 6 meias. $(1 \times 5 + 1 = 6)$ $\diamond$

Exercício 2.3.5 *Em uma urna, há 20 esferas: 5 azuis, 6 brancas, 7 amarelas e outras 2 cujas cores podem ser azul ou amarelo. Não é possível saber a cor das esferas sem que elas sejam retiradas. Também não é possível distingui-las a não ser pela cor. Serão retiradas simultaneamente N esferas dessa urna.*

- Qual o menor valor de $\mathcal{N}$ para que se possa garantir que, entre as esferas retiradas, haverá 2 da mesma cor?

Solução: Retirando 3 esferas, como são 3 cores teremos uma de cada cor, a próxima será de uma das cores já retiradas assim 4 esferas são suficientes.$(1 \times 3 + 1 = 4)$ $\diamond$

- Qual o menor valor de $\mathcal{N}$ para que se possa garantir que, entre as esferas retiradas, haverá 2 com cores diferentes?

Solução: Na pior das hipóteses retirando as 7 esferas amarelas, ainda restam 2 que também podem ser amarelas, a próxima esfera retirada terá uma cor diferente. Logo são necessárias 10 esferas. $(1 \times 9 + 1 = 10)$ $\diamond$

Exercício 2.3.6 *Um torneio de futebol passará a ser disputado anualmente por seis equipes. O troféu será de posse transitória, isto é, o campeão de um ano fica com o troféu até a próxima edição do torneio, quando o passa para o novo campeão. Uma equipe só ficará definitivamente com o troféu quando vencer quatro edições consecutivas do torneio ou sete edições no total, o que acontecer primeiro. Quando isso ocorrer, um novo troféu será confeccionado. Os números mínimo e máximo de edições que deverão ocorrer até que uma equipe fique com a posse definitiva do troféu valem, respectivamente,*

Solução: O número mínimo é dado quando uma das equipes vence as 4 primeiras edições consecutivamente. O número máximo é dado quando cada equipe vencer 6 edições não consecutivas e alguma das equipes vencer mais uma edição totalizando 37 edições. $(6 \times 6 + 1 = 37)$ $\diamond$

Exercício 2.3.7 *Mostrar que todo subconjunto de* $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$*, contendo* $n + 1$ *elementos, possui um par de elementos primos entre si. Exercício modificado de [7], podendo ser encontrado em [8].*

Solução: É fácil observar que os únicos subconjuntos de $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ contendo n elementos, não-consecutivos, são $\{1, 3, 5, ..., 2n - 1\}$ e $\{2, 4, 6, ..., 2n\}$. Portanto ao tomarmos um subconjunto com $n + 1$ elementos teremos, necessariamente, dois elementos consecutivos que, sendo primos entre si, irão garantir nosso resultado. $\diamond$

Exercício 2.3.8 *Mostrar que qualquer subconjunto* S *de* $\{1, 2, 3, ..., 12\}$ *contendo sete elementos possui dois subconjuntos cuja soma dos elementos é a mesma.*

Solução: Um subconjunto com 7 elementos terá soma no máximo igual a $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 63$. Disto concluímos que os possíveis valores para a soma dos elementos de um subconjunto de um conjunto contendo 7 dos elementos de $\{1, 2, 3, ..., 12\}$ vão de 1 a 63, ou seja, temos 63 valores possíveis. Mas um conjunto com 7 elementos possui $2^7 - 1$ subconjuntos não-vazios. Logo, como $2^7 - 1 > 63$, pelo menos dois deles terão a mesma soma para os seus elementos. $\diamond$

Exercício 2.3.9 *Quantos pontos são necessários para ter-se um segmento formado por eles com comprimento menor ou igual* $\sqrt{3}$*. Sendo esses pontos interiores ou nas faces de um paralelepípedo de arestas iguais a 2 cm , 3 cm e 4 cm.*

Solução: Como o volume desse paralelepípedo, é $V = 2.3.4 = 24$ cm^3, se dividirmos esse paralelepípedo em 24 cubos da aresta 1, cujo volume será 1 cm^3, eles terão diagonal igual a $\sqrt{3}$ e pelo princípo das gavetas com 25 pontos , teremos dois internos a um mesmo cubo, satisfazendo o problema. $\diamond$

Exercício 2.3.10 *Suponhamos que os números de 1 até 15 sejam distribuídos de modo aleatório em torno de um círculo. Mostrar que a soma dos elementos de pelo menos um conjunto de 5 elementos consecutivos, tem que ser maior do que ou igual a 40. Adaptado de [5], onde encontramos mais a respeito.*

Solução: Observe que, se somarmos todos os possíveis conjuntos de 5 elementos consecutivos (são 15), cada um dos números de 1 a 15 terá sido somado 5 vezes e que, portanto, a soma total será $5.(1 + 2 + 3 + ... + 15) = 5.(15 + 1).15/2 = 600$. Como são 15 conjuntos distintos de 5 elementos consecutivos, se cada um tiver soma inferior a 40, o total será no máximo $15 \times 39 = 585$. Logo, pelo menos um deve ter soma maior do que ou igual a 40. $\diamond$

Exercício 2.3.11 *Num grupo de n pessoas ($n \geq 2$) existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de conhecidos. (OBS.: Neste exemplo assumimos que a relação de conhecimento é simétrica, isto é, se a conhece b, então b conhece a.) Adaptado de [6].*

Solução: Vamos particionar estas n pessoas em subconjuntos $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$, onde A_i é o subconjunto que contém as pessoas que conhecem i pessoas no grupo de n. Logo, se uma pessoa não conhece nenhuma outra das $n - 1$ pessoas ela estará no grupo A_0, se tem somente um conhecido estará em A_1 e assim por diante, até A_{n-1}, caso ela conheça todas as outras $n - 1$ pessoas. Mas se o subconjunto A_0 possui alguém, A_{n-1} não possui ninguém e vice-versa. Isto porque se alguém não conhece ninguém é porque ninguém conhece todos e se alguém conhece todos não há ninguém que seja desconhecido de todos. Logo, as n pessoas estão particionadas em $n - 1$ subconjuntos e, portanto, algum subconjunto contém pelo menos duas pessoas, o que conclui a demonstração. $\diamond$

Exercício 2.3.12 *Prove que, dados 11 números inteiros quaisquer, a diferença entre dois deles será um múltiplo de 10. Retirado de [3]*

Solução: É fácil verificar que diferença entre dois números inteiros será um múltiplo de 10 quando eles tiverem o mesmo resto na divisão por 10. Sabemos que existem dez restos possíveis nesta divisão (gavetas) e que temos disponíveis onze números inteiros (objetos). Logo, pelo Princípio das Gavetas, dois destes números terão restos iguais na divisão por 10, ou seja, a diferença entre eles será um múltiplo de 10. $\diamond$

Exercício 2.3.13 *Do conjunto* $A = \{1, 2, 3, ..., 99, 100\}$*, escolhemos ao acaso 51 números. Demonstrar que entre os números escolhidos sempre existem dois que são consecutivos. De [4] onde podem ser vistos mais exemplos.*

Solução: Distribuindo os 50 números em gavetas assim construídas:

$$\{1, 2\} \quad \{3, 4\} \quad \{5, 6\} \quad \ldots \quad \{99, 100\}$$

Como há 50 gavetas das quais retiramos 51 números, pelo princípio das gavetas sempre existirá uma geveta da qual escolhemos dois números e estes, graças a construção, serão consecutivos. $\diamond$

2.4 Exercícios Aplicados

Apresentamos exercícios que relacionam o Princípio das Gavetas com outros conteúdos do ensino básico. Baseados em [3], [5], [7] e [8], tais exercícios utilizam os conhecimentos prévios dos alunos em Aritmética, Combinatória, Geometria Plana, Geometria Espacia, Geometria Analítica e Funções, associados a utilização do Princípio das Gavetas. Assim, mostramos que o princípio pode ser útil na resolução de problemas nos mais diversos campos da matemática.

2.4.1 Aplicado a Aritmética

Exercício 2.4.1 *Mostre que todo inteiro positivo* n *tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos* 0 *e* 1*. Encontrado em [5].*

Solução: Considere os $n+1$ primeiros números da sequência $1, 11, 111, ...$ Dividaos por n e considere os restos dessas divisões. Esses restos só podem ser iguais $0, 1, 2, 3, ..., n-1$. Pensando nos números como objetos e nos restos como gavetas, temos mais objetos do que gavetas. O Princípio das Gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, há dois números na sequência que dão o mesmo resto quando divididos por n, digamos 11...1 (p algarismos) e 11...1 (q algarismos), $p < q$. A diferença desses números é um múltiplo de n e se escreve 11...10...0, com p algarismos 0 e $q - p$ algarismos 1. $\diamond$

2.4.2 Aplicado a Análise Combinatória

Exercício 2.4.2 *Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos 3 deles preencheram o cartão resposta com exatamente as mesmas respostas para todas as questões? Encontrado em [3].*

Solução: Cada uma das 10 questões do concurso pode ser respondida de 5 maneiras diferentes. Desta forma, pelo Princípio Multiplicativo, há 5^{10} maneiras de preenchermos o cartão resposta, ou seja de gabaritos. Facilmente podemos concluir que se o concurso tiver até 2×5^{10} candidatos, ainda não poderemos garantir que mais de dois candidatos (objetos) terão gabaritos (gavetas) iguais. Já se tivermos $2 \times 5^{10} + 1 = 19.531.251$ candidatos, teremos o número de gavetas maior que o dobro do número de objetos, o que garante, pelo Princípio das Gavetas, que pelo menos três candidatos preencheram o cartão resposta com exatamente as mesmas respostas para todas as questões. $\diamond$

2.4.3 Aplicado a Geometria Plana

Exercício 2.4.3 *Escolhem-se* 5 *pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado* 2. *Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a* $\sqrt{2}$. *Encontrado em [3], [7] e [8].*

Solução: Vamos dividir o quadrado de lado 2 em outros quatro de lado1 traçando dois segmentos com extremidades nos pontos médios dos lados opostos do quadrado original. Desta forma subdividimos o quadrado original em 4 quadrados menores de modo que a distância máxima entre dois pontos em cada uma destes novos quadrados é, pelo teorema de Pitágoras, $\sqrt{2}$ (medida da diagonal do quadrado de lado 1). Como temos 4 quadrados de lado 1 (gavetas) e iremos escolher 5 pontos (objetos), pelo Princípio das Gavetas, dois dos pontos escolhidos estarão num mesmo quadrado de lado 1, determinando um segmento menor ou igual a $\sqrt{2}$. $\diamond$

2.4.4 Aplicado a Geometria Espacial

Exercício 2.4.4 *Escolhem-se* 9 *pontos ao acaso interiores ou nas faces de um cubo de aresta* 2. *Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a* $\sqrt{3}$. *Encontrado em [3]e [8].*

Solução: Iremos dividir o cubo em 8 cubos menores de aresta 1, seccionando-o por meio de três planos, onde cada um deles passa pelo centro do cubo e é paralelo a duas faces opostas. Desta forma subdividimos o cubo original em 8 cubos menores de modo que a distância máxima entre dois pontos em cada uma destes novos cubos é, por Pitágoras, $\sqrt{3}$ (diagonais de um cubo de aresta 1). Como temos 8 cubos de aresta 1 (gavetas) e iremos escolher 9 pontos (objetos), pelo Princípio das Gavetas, dois pontos escolhidos estarão num mesmo cubo e, portanto, determinam um segmento menor ou igual a $\sqrt{3}$. $\diamond$

2.4.5 Aplicado a Geometria Analítica

Exercício 2.4.5 *Sejam* 5 *pontos distintos do plano com coordenadas inteiras. Mostre que pelo menos um par de pontos tem ponto médio com coordenadas inteiras. Encontrado em [3].*

Solução: Dados dois pontos do plano $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ é dado por $M = (\frac{x_a+y_a}{2}, \frac{x_b+y_b}{2})$. Além disso, sabemos que a média entre dois números inteiros será um número inteiro se eles tiverem a mesma paridade, ou seja, ou dois são pares ou são ímpares. Quando analisamos um ponto do plano com coordenadas inteiras, encontramos um dos seguintes tipos de coordenadas : (PAR, PAR), (PAR,ÍMPAR), (ÍMPAR, PAR), (ÍMPAR, ÍMPAR). Portanto temos 4 gavetas, e 5 pontos do plano que serão os objetos e, pelo Príncipio das Gavetas, pelo menos dois deles terão coordenadas do mesmo tipo e, consequentemente, o ponto médio do segmento que tem estes pontos como extremidade também terão coordenadas inteiras. ◇

2.4.6 Aplicado a Funções

Exercício 2.4.6 *Sejam A e B dois conjuntos finitos tais que o número de elementos de A é maior que o número de elementos de B. Prove que não existe função injetiva de A em B. Encontrado em [3].*

Solução: Seja f uma função de A em B. Para construirmos esta função devemos escolher para cada elemento de A um único elemento em B para ser sua imagem. Como o número de elementos de A (objetos) é maior que o número de elementos de B (gavetas), pelo princípio das gavetas, teremos pelo menos dois elementos de A com imagens iguais em B, ou seja, f não pode ser injetiva. ◇

Capítulo 3

Teoremas

3.1 Teorema de Dirichlet

Descendente de família francesa, Dirichlet nasceu em 1805 na Alemanha, estudou na Universidade de Paris e ocupou cargos na Universidade de Breslau e na Universidade de Berlim. Em 1855, ele foi escolhido para ser sucessor de Gauss na Universidade de Göttingen. Gustav Lejeune Dirichlet morreu em 1859 deixando importantes contribuições em diversas áreas da matemática com destaque para o estudo da Teoria dos Números. Acredita-se que na demonstração desse teorema, Dirichlet utilizou pela primeira vez em 1834 o Princípio das Gavetas de forma relevante. Iremos enunciar o Teorema de Dirichlet a seguir tomando como referência [3] e sugerindo ao leitor [9] para aprofundar-se.

Figura 3.1: Dirichlet

Teorema 3.1 (Teorema de Dirichlet)

Dado um número irracional α, é possível encontrar infinitos números racionais $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ de tal forma que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$, ou seja, existem infinitas aproximações racionais para um número irracional com erro menor que o inverso do quadrado do denominador.

Ao longo da prova algumas notações nos serão muito úteis.

- $\lfloor x \rfloor$ o único inteiro tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, ou seja, é a parte inteira de x;
- $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$, ou seja, é a parte fracionária de x.

Demonstração: Seja $N \in \mathbb{N}$ um número *grande* e seja α um número irracional. Considere os $N+1$ números : $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{N\alpha\}, \in [0,1)$. Agora, particione $[0,1)$ em N *intervalinhos* : $[0,1) = \bigcup_{k=1}^{N} \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right)$. Novamente, pelo Princípio da

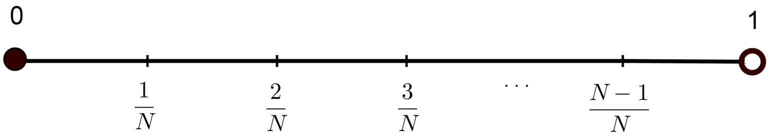


Figura 3.2: Partição de 0 a 1

Gavetas , podemos afirmar que haverá um *intervalinho* (gaveta) com pelo menos dois números (objetos). Desta forma, concluímos que existem dois números $\{i\alpha\}$ e $\{j\alpha\}$, com , $0 \le i < j \le N$, tais que

$|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| < \dfrac{1}{N}$ e $|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| = |(j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor) - (i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor)| = |(j\alpha - i\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor)| = |(j-i)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)| < \dfrac{1}{N}$.

Considerando $q := j - i$ e $p := \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$, temos $j - i$ e $\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$ inteiros e garantimos que $0 < q \le N$, ou seja, $\dfrac{1}{q} \ge \dfrac{1}{N}$. Desta forma mostramos que

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{N} \le \frac{1}{q}.$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade por q, temos

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Nq} \le \frac{1}{q^2},$$

o que prova a existência de uma aproximação racional $\dfrac{p}{q}$ de α com erro menor que $\dfrac{1}{q^2}$.

Provaremos agora que existem infinitas aproximações racionais da forma descrita anteriormente. Suponha, por contradição que exista apenas uma quantidade finita de aproximações racionais de α, digamos $\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}, \ldots, \dfrac{p_k}{q_k}$, e seja $\delta := \min\{|\alpha - \dfrac{p_j}{q_j}|, 1 \le j \le k\} > 0$. Como podemos escolher N tão grande quanto quisermos, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \delta$. Pela construção no início da prova existe uma aproximação racional de α, $\dfrac{p}{q}$, tal que $|\alpha - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{1}{N}$. Logo, $|\alpha - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{1}{N} < \delta \le |\alpha - \dfrac{p_j}{q_j}|$ e $\dfrac{p}{q} \ne \dfrac{p_j}{q_j}$ para todo $j \le k$, o que garante a existência de uma solução diferente das k soluções $\dfrac{p_j}{q_j}$

iniciais, o que é uma contradição. Portanto, há infinitas aproximações racionais $\frac{p}{q}$ de α com erros menores que $\frac{1}{q^2}$. ∎

- Vejamos um bom exemplo de aplicação do Teorema de Dirichlet, em conhecidas aproximações racionais do π.

1. Para $\pi \approx \frac{22}{7}$ temos $\frac{p}{q} = \frac{22}{7}$, ou seja

   $|\pi - \frac{p}{q}| = |3,141592654\ldots - 3,142857143\ldots| = 0,001264489\ldots < 0,020408163\ldots = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{q^2}$

2. Para $\pi \approx \frac{355}{113}$ temos $\frac{p}{q} = \frac{355}{113}$, ou seja

   $|\pi - \frac{p}{q}| = |3,141592654\ldots - 3,14159292\ldots| = 0,000000266\ldots < 0,000078314\ldots = \frac{1}{113^2} = \frac{1}{q^2}$

3.2 Teorema de Ramsey

Em 1927, Frank Plumpton Ramsey (1903 - 1930), lógico inglês, provou no seu trabalho de teoria dos conjuntos o que se chama hoje de Teorema de Ramsey, um teorema que abriu novas portas para o estudo de combinatória, pois procurava encontrar regularidades. Ramsey buscava responder se era possível obter, de um conjunto desordenado, alguma ordem, e a quantidade dessa ordem. Atualmente, devido a vastas pesquisas sobre o assunto, a área conhecida como Teoria de Ramsey é bem estabelecida na matemática.

Figura 3.3: Ramsey

O Teorema de Ramsey é outra aplicação clássica do Princípio das Gavetas de Dirichlet. Antes de enunciá-lo e demostrá-lo, iremos apresentar a seguir uma caso particular do teorema, tomando como referência [3] e sugerindo ao leitor [10] para aprofundar-se.

- Mostre que, numa reunião com 6 pessoas, necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente (lembre que, se A conhece B, então B conhece A).

Vamos representar na figura 3.4 as 6 pessoas por 6 pontos (A, B, C, D, E e F) não colineares quando tomados 3 a 3, formando assim um hexágono.

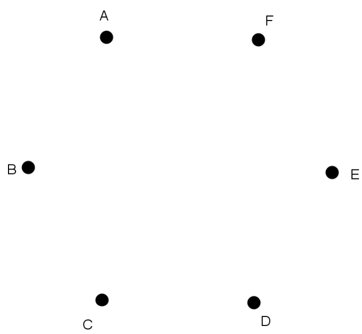


Figura 3.4: Vértices do Hexágono

Se duas das pessoas se conhecem, então serão ligadas por um segmento contínuo e se duas das pessoas não se conhecem, então serão ligadas por um segmento tracejado.

Por exemplo, na figura 3.5 temos que A e D se conhecem, formando o segmento contínuo $\overline{AD}$ e que A e C não se conhecem, formam o segmento tracejado $\overline{AC}$.

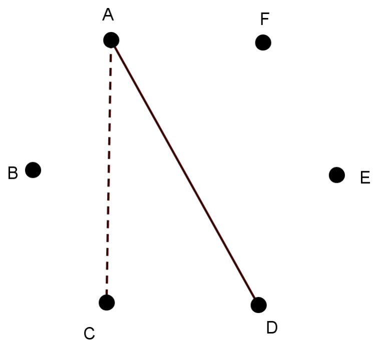


Figura 3.5: Segmento $\overline{AD}$ contínuo e Segmento $\overline{AC}$ tracejado

Desta forma, todos os possíveis segmentos que unem quaisquer dois pontos podem ser construídos. Estes segmentos traçados são os lados e as diagonais do hexágono formado.

Fixemos o ponto A , a partir dele partem 5 segmentos,($\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}$) como mostra a figura 3.6. Considerando os pontos como objetos e os segmentos contínuos ou segmentos tracejados como gavetas, temos 5 objetos e 2 gavetas e, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, haverá pelo menos 3 segmentos contínuos ou pelo menos 3 segmentos tracejados, ou seja, a pessoa A conhece ou não conhece pelo menos 3 pessoas.

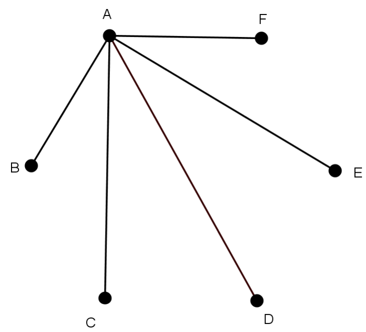


Figura 3.6: Segmentos contínuos $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}$

Vamos adimitir que, partindo de A, há 3 segmentos contínuos e 2 segmentos tracejados. Observados na figura 3.7, são contínuos os segmentos $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AF}$ e são tracejados os segmentos $\overline{AC}, \overline{AE}$.

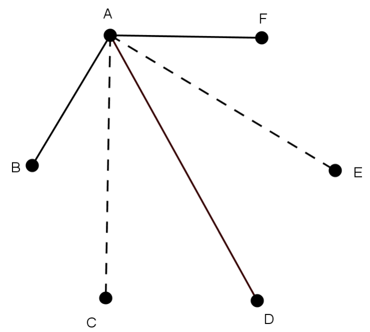


Figura 3.7: Segmentos $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AF}$ contínuos e Segmentos $\overline{AC}, \overline{AE}$ tracejados

Se algum dos segmentos $\overline{BD}$, $\overline{BF}$ ou $\overline{DF}$ for contínuo, o problema está resolvido, como visto na figura 3.8 . Pois, este segmento juntamente com os que ligam seus extremos ao ponto A formam um triângulo contínuo e, portanto, 3 pessoas se conhecem mutuamente.

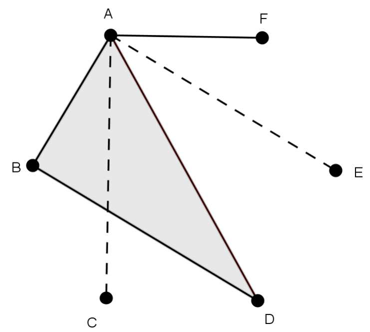


Figura 3.8: Segmento contínuo $\overline{BD}$ formando o triângulo ABD

Agora, se nenhum dos segmentos citados é contínuo, então eles formam um triângulo tracejado, como visto na figura 3.9. E portanto há 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.

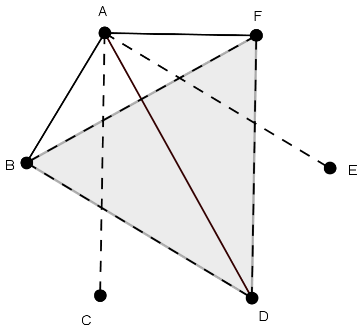


Figura 3.9: $\overline{BD}, \overline{DF}, \overline{FB}$ formando o triângulo BDF

O caso que partem três segmentos tracejados de A é análogo ao caso anterior. Desta forma, concluímos a demonstração.

Teorema 3.2 (Teorema de Ramsey)

Para todo $m, n \geq 1$ existe $R \geq 1$ tal que em uma reunião com R pessoas, existem m que se conhecem ou n que não se conhecem. Chamamos o menor número R com esta propriedade de $R(m, n)$.

Demonstração: Por definição, temos $R(n, 1) = R(1, n) = 1$. Sabemos também que $R(m, 2) = m$ para todo $m \geq 2$, pois em qualquer conjunto de m pessoas, ou todas as pessoas se conhecem ou pelo menos 2 não se conhecem. Além disso, $R(m, n) = R(n, m)$, pois conhecer ou não conhecer é simétrico segundo o enunciado. Observe que conhecemos todos os valores de $R(m, n)$ em que $m + n \leq 4$. $R(1, 1) = R(2, 1) = R(1, 2) = R(3, 1) = R(1, 3) = 1$ e $R(2, 2) = 2$
Provemos agora, por indução, que $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$ para todo $m + n > 4$ e $m, n \geq 2$.
Por hipótese de indução, existem os números $R(m-1, n)$ e $R(m, n-1)$ pois $(m-1) + n = m + (n-1) < m + n$. Seja $R := R(m-1, n) + R(m, n-1)$. Considere uma festa com R pessoas, cada pessoa sendo representada por um ponto. Se duas pessoas se conhecem, então elas serão ligadas por um segmento contínuo, caso contrário, serão ligadas por um segmento tracejado. Fixemos uma pessoa P . Pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, de P saem pelo menos $R(m-1, n)$ segmentos contínuos ou pelo menos $R(m, n-1)$ segmentos tracejados. De fato, pois saem $R-1 = R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1$ segmentos de P, e $R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1 > (R(m-1, n) - 1) + (R(m, n-1) - 1)$.

Suponhamos que saem pelo menos $R(m-1,n)$ segmentos contínuos de P. Então, há pelo menos $R(m-1,n)$ pessoas. Portanto, existem pelo menos $m-1$ pessoas que se conhecem ou n que não se conhecem. Como P conhece todos eles, caso haja $m-1$ que se conhecem, junte a pessoa P , e temos pelo menos m pessoas que se conhecem. Caso contrário, haverá n pessoas que não se conhecem.
O caso em que saem pelo menos $R(m-1,n)$ segmentos tracejados de P é análogo ao caso anterior. Desta forma, concluímos a demonstração do teorema. ■

Capítulo 4

Experiência em sala de aula

O fato do Princípio das Gavetas de Dirichlet ser tão óbvio, ao mesmo tempo, uma excelente ferramenta na resolução de problemas, e não fazer parte do conteúdo do Ensino Médio, dispertou o interesse de utilizá-lo de alguma forma em sala de aula. Para isso, foram aplicados dois testes com alunos de uma turma de 3° ano do ensino médio de uma Escola Pública no Estado de Pernambuco. O primeiro teste (TESTE I), de múltipla escolha, para que os alunos ficassem livres para usar o raciocínio sem se preocupar com fórmulas ou regras matemáticas. Após esse teste foi apresentado aos alunos, de forma expositiva, o Princípio das Gavetas. E em seguida, a resolução das questões do primeiro teste, o que já despertou nos alunos o interesse pelo método por ser prático e de fácil aplicação. Em seguida aplicou-se o segundo teste (TESTE II), de questões abertas , para que os alunos aplicassem o princípio das gavetas em sua resolução. A seguir apresentaremos as questões e, seu respectivo gabarito, de ambos os teste, e uma tabela com o percentual de acertos dos alunos. Em seguida um gráfico com esses percentuais de acertos. Apresentaremos ainda o percentual médio de acertos nos dois testes e o comparativo entre cada um deles. E notável a aceitação dos alunos e a aplicação do princípio na resolução das questões como mostram os resultados obtidos na maioria das questões, mesmo com algumas delas não tendo a maioria do percentual de acertos, ficou evidente a possibilidade de abordar o conteúdo no Ensino Médio, como mais uma ferramenta para auxiliar os alunos na resolução de problemas.

4.1 TESTE I

Questões Propostas:

1) Certa noite, Carlos Eduardo resolveu ir ao cinema, mas descobriu que não tinha meias limpas pra calçar. Foi então ao quarto do pai, que estava na escuridão. Ele sabia que lá existiam 10 pares de meias brancas e 10 pares de meias pretas, todos misturados. Quantas meias ele teve de retirar da gaveta para estar certo que possuía um par da mesma cor ?

a) 2
b) 3
c) 10
d) 11
e) 21

GABARITO : letra b

GABARITO	a	**b**	c	d	e
FREQUÊNCIA (%)	18 %	**55 %**	23 %	4 %	0 %

2) Um grupo é formado por N pessoas. O valor mínimo de N para que se tenha certeza de que duas delas fazem aniversário no mesmo dia da semana é:

a) 7
b) 8
c) 10
d) 12
e) 14

GABARITO : letra b

GABARITO	a	**b**	c	d	e
FREQUÊNCIA (%)	28 %	**50 %**	4 %	0 %	18 %

3) Em uma caixa há 12 bolas do mesmo tamanho: 3 brancas, 4 vermelhas e 5 pretas. Uma pessoa, no escuro, deve tirar n bolas e ter a certeza de que, entre elas, existem três da mesma cor. O menor valor de n para que se tenha essa certeza é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

GABARITO : letra c

GABARITO	a	b	**c**	d	e
FREQUÊNCIA (%)	0 %	32 %	**36 %**	4 %	28 %

4) O menor número de pessoas que se deve ter em um grupo, para se garantir que pelo menos duas delas aniversariam no mesmo mês é:

a) 8
b) 7
c) 13
d) 32
e) 366

GABARITO : letra c

GABARITO	a	b	**c**	d	e
FREQUÊNCIA (%)	14 %	18 %	**18 %**	46 %	4 %

5) Uma sacola contém 200 bolas de cores variadas. Destas, 20 são brancas, 30 são vermelhas, 50 são azuis, 40 são verdes e 60 são pretas. O menor número de bolas que devemos retirar dessa caixa, sem olhar as suas cores, para termos a certeza de que retiramos, pelo menos, 5 bolas de mesma cor, é:

a) 15
b) 20
c) 21
d) 25
e) 31

GABARITO : letra c

GABARITO	a	b	**c**	d	e
FREQUÊNCIA (%)	18 %	18 %	**14 %**	41 %	9 %

6) Em uma urna há 5 bolas pretas, 4 bolas brancas e 3 bolas verdes. Deseja-se retirar, aleatoriamente, certa quantidade de bolas dessa urna. O número mínimo de bolas que devem ser retiradas para que se tenha certeza de que entre elas haverá 2 de mesma cor é:

a) 8
b) 7
c) 5
d) 4
e) 3

GABARITO : letra d

GABARITO	a	b	c	**d**	e
FREQUÊNCIA (%)	14 %	4 %	18 %	**32 %**	32 %

7) Uma urna contém 4 bolas brancas, 3 bolas pretas e 2 bolas azuis. $\mathcal{N}$ bolas serão retiradas simultaneamente dessa urna. Qual o menor valor de $\mathcal{N}$ para que se possa garantir que, entre as retiradas, haja bolas de cores diferentes?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

GABARITO : letra c

GABARITO	a	b	**c**	d	e
FREQUÊNCIA (%)	32 %	18 %	**36 %**	14 %	0 %

- O gráfico 4.1, a seguir mostra o percentual de acertos nas questões do TESTE I.
  Vale ressaltar que nas questões 1, 2, 3, 6 e 7 a alternativa correta foi a que apresentou maior percentual de acerto entre as alternativas, o que não ocorreu nas questões 4 e 5.

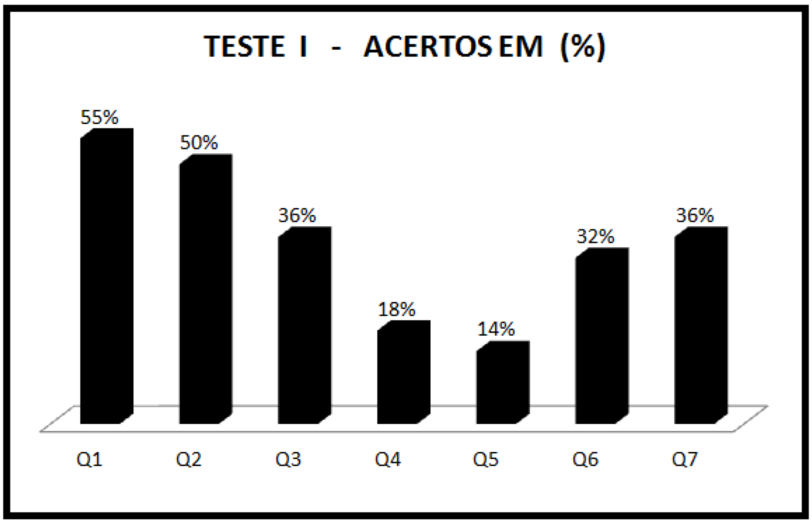


Figura 4.1: Gráfico de acertos do TESTE I

4.2 TESTE II

Questões Propostas:

1.) Marcos está se arrumando para ir ao teatro com sua nova namorada, quando todas as luzes de seu apartamento apagam. Apressado, ele corre até uma de suas gavetas onde guarda 24 meias de cores diferentes, a saber: 5 pretas, 9 brancas, 7 azuis e 3 amarelas. Para que Marcos não saia com sua namorada vestindo meias de cores diferentes, o número mínimo de meias que Marcos deverá tirar da gaveta para ter a certeza de obter um par de mesma cor é igual a:

GABARITO : 5 meias

RESPOSTAS APRESENTADAS	10	3	6	**5**
FREQUÊNCIA (%)	6 %	12 %	12 %	**70 %**

2.) A quantidade mínima de alunos que deve existir numa turma para que se possa garantir que três deles, pelo menos, tenham nascido no mesmo dia da semana, é:

GABARITO : 15 alunos

RESPOSTAS APRESENTADAS	8	21	9	10	**15**
FREQUÊNCIA (%)	6 %	6 %	12 %	23 %	**53 %**

3.) Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que se possa garantir que neste grupo haja pelo menos 5 pessoas nascidas no mesmo mês?

GABARITO : 49 pessoas

RESPOSTAS APRESENTADAS	17 , 22 e 61	26, 35 e 44	**49**
FREQUÊNCIA (%)	6 % cada	12 % cada	**46 %**

4.) A República Federativa do Brasil é formada por 27 unidades (26 estados e 1 Distrito Federal). Qual o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo de brasileiros natos para que se possa garantir que nele há pelo menos 4 pessoas nascidas na mesma unidade?

GABARITO : 82 pessoas

RESPOSTAS APRESENTADAS	32	31 e 108	**82**
FREQUÊNCIA (%)	6 %	12 % cada	**70 %**

5.) Uma caixa contém 100 bolas, das quais 30 são vermelhas, 30 são azuis, 30 são verdes e das 10 restantes algumas são pretas e outras são brancas. Qual o número mínimo de bolas que devem ser retiradas da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de que entre elas existam pelo menos 10 bolas da mesma cor?

GABARITO : 38 bolas

RESPOSTAS APRESENTADAS	6, 35, 46 e 70	20, 28 e 40	**38**	30
FREQUÊNCIA (%)	6 % cada	12 % cada	**18 %**	23 %

6.) Em uma gaveta, há 6 lenços brancos, 8 azuis e 9 vermelhos. Lenços serão retirados, ao acaso, de dentro dessa gaveta. Quantos lenços, no mínimo, devem ser retirados para que se possa garantir que, dentre os lenços retirados haja um de cada cor?

GABARITO : 18 lenços

RESPOSTAS APRESENTADAS	4, 5, 6, 9 e 17	7	**18**	3
FREQUÊNCIA (%)	6 % cada	15 %	**21 %**	28 %

7.) Uma urna contém 4 bolas brancas, 3 bolas pretas e 2 bolas azuis. N bolas serão retiradas simultaneamente dessa urna. Qual o menor valor de N para que se possa garantir que, entre as bolas retiradas, haja 2 de uma mesma cor?

GABARITO : 4 bolas

RESPOSTAS APRESENTADAS	3, 7 e 9	6	**4**
FREQUÊNCIA (%)	6 % cada	17 %	**65 %**

- O gráfico 4.2, a seguir mostra o percentual de acertos nas questões do TESTE II.
  Vale ressaltar que nas questões 1, 2, 3, 4 e 7 a resposta correta apresentou maior percentual de acerto entre as diversas respostas apresentadas, o que não ocorreu nas questões 5 e 6.

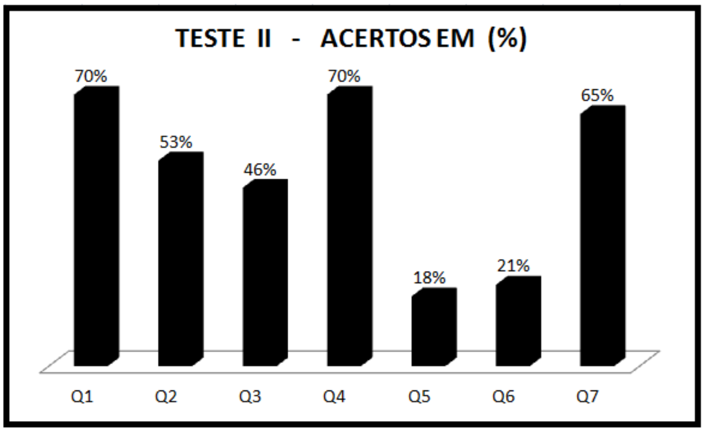


Figura 4.2: Gráfico de acertos do TESTE II

4.3 Resultados

Foi observado que 5 das 7 questões aplicadas $(71,4\%)$, em ambos os testes, tiveram acertos com maior percentual, em relação aos erros. O que representa um bom indicativo de desempenho, pois o teste 1 foi de questões de múltipla escolha e o teste 2 foi de questões abertas, tornando-o mais difícil.

O percentual médio de acertos nas 7 questões do teste 1 foi de $34,4\%$ e no teste 2 de 49%, como podemos observar no gráfico 4.3. O fato desse percentual ser menor que 50% do total, pode parecer pouco favorável, mais tendo em vista o nível de dificuldade das questões do teste 2 em relação as quetões do teste 1, podemos considerar bastante positivo esses percentuais pois fica perceptível a evolução no percentual de acertos.

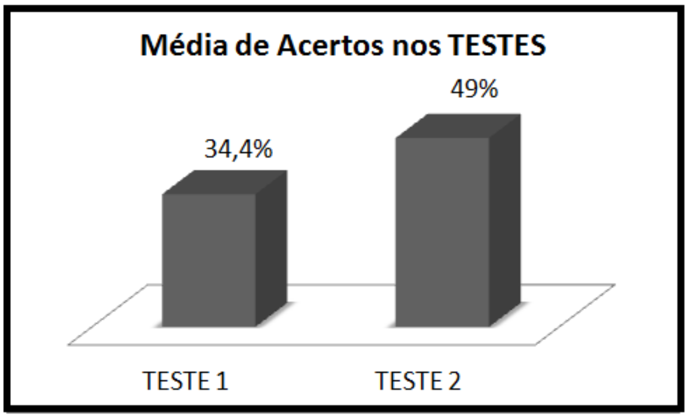


Figura 4.3: Gráfico da Média de Acertos

Vale ainda ressaltar que o teste 2, devido ao tipo das questões abertas, foi preciso a resolução para atingir uma resposta. Portanto apresentou uma amplitude maior de possíveis respostas, diferentemente do teste 1 que por possuir alternativas poderia ser respondido aleatoriamente. Ainda assim o percentual médio de acertos do teste 2 foi superior ao do teste 1, como pode ser visto no gráfico anterior.

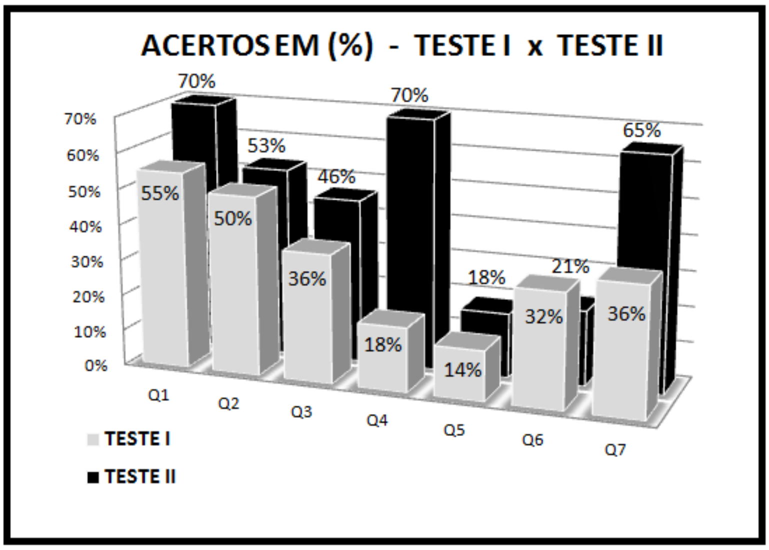


Figura 4.4: Gráfico Comparativo de acertos

Outra observação importante é que, em 6 questões, o percentual de acertos do teste 2 foi maior que o percentual de acertos da teste 1, como pode-se observar no comparativo do gráfico 4.4, lembrando que o tipo das questões eram bem semelhantes nos dois testes.

Portanto, os resultados reforçam que a aplicação do princípio na resolução de problemas é de grande utilidade, pois propicia aos alunos uma ferramenta matemática simples.

Referências Bibliográficas

[1] FONTE, ANDRÉ COSTA DA. *Médias, desigualdades e problemas de otimização.* Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática. UFRPE, 2013

[2] MORGADO, A.C. & CARVALHO, P.C.P. *Matemática Discreta*, Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] AMORIM, LUIGI AMATO BRAGANÇA. *O ensino do princípio da casa de pombos no ensino básico*, 2013.

[4] MARTINEZ, F.B. & MOREIRA, C.G. & SALDANHA, N. & TENGAN, E. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, et al. 2ª ed. – Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[5] MUNIZ NETO, ANTÔNIO CAMINHA *Tópicos de Matemática Elementar: combinatória*, 1ª ed. –Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[6] LIMA, E. L. & CARVALHO, P. C. P. & WAGNER, E. & MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*, Vol. 2., SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[7] MORGADO, A.C. & CARVALHO, J.B.P. & CARVALHO, P.C.P. & FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*, 9ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] PITOMBEIRA, JOÃO BOSCO. *Princípio da casa dos pombos.* Revista do Professor de Matemática, número 8. São Paulo: SBM, 1986.

[9] CARVALHO, PAULO CEZAR PINTO. *Princípio das Gavetas* Revista Eureka! nº 5, 27-33.

[10] MOREIRA, CARLOS GUSTAVO. *O Teorema de Ramsey* Revista Eureka! nº 6, 23-29.