

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

MARCOS ROBERTO DALPIAZ

**UM ESTUDO SOBRE FRACTAIS: ORIGEM E PROPOSTA DIDÁTICA PARA
APLICAÇÃO EM AULA**

CURITIBA

2016

MARCOS ROBERTO DALPIAZ

**UM ESTUDO SOBRE FRACTAIS: ORIGEM E PROPOSTA DIDÁTICA PARA
APLICAÇÃO EM AULA**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional da Universidade Tec-
nológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-
UTCT como requisito parcial para obtenção do grau
de Mestre.

Orientador: Márcio Rostirolla Adames

CURITIBA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

D149e Dalpiaz, Marcos Roberto
2016 Um estudo sobre fractais : origem e proposta didática para aplicação em aula / Marcos Roberto Dalpiaz.-- 2016.
72 f. : il. ; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês
Disponível também via World Wide Web
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2016
Bibliografia: p. 71-72

1. Fractais. 2. Fractais – Processamento de dados. 3. Matemática – Estudo e ensino (Ensino médio). 4. Matemática – Estudo e ensino. 5. Jogos em educação matemática. 6. Matemática – Dissertações. I. Adames, Márcio Rostirolla. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 -- 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

Título da Dissertação No. 032

“Um estudo sobre fractais: origem e roteiro para aplicação em aula.”

por

Marcos Roberto Dalpiaz

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 21 de outubro de 2016. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Márcio Rostirolla Adames, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Luiz Antônio Ribeiro de Santana, Dr.
(UFPR)

Profa. Angelita Minetto Araújo, Dra.
(UTFPR/Curitiba)

Prof. André Fabiano Steklain Lisboa, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

AGRADECIMENTOS

A minha família: esposa Risiane, filhos Otávio e Leonardo, Pais Cosmo e Maria Elenir, Irmãos Marcelo e Maurício e aos demais membros por todo apoio e compreensão nas horas de minha dedicação aos estudos.

Ao Prof. Márcio Rostirolla Adames pelo valoroso tempo de orientação, no qual pudemos encontrar o verdadeiro conhecimento.

Aos membros da banca examinadora pelos comentários, sugestões e contribuições, que ajudaram a melhorar a qualidade e a redação final do manuscrito.

À CAPES pelo apoio financeiro, através de bolsa de estudos, à minha pesquisa.

A todos que de alguma forma contribuíram com o meu progresso como aluno e como Ser.

RESUMO

DALPIAZ, Marcos Roberto. UM ESTUDO SOBRE FRACTAIS: ORIGEM E PROPOSTA DIDÁTICA PARA APLICAÇÃO EM AULA. 71 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016

Este trabalho traz uma breve apresentação histórica do surgimento dos Fractais, bem como do criador do termo Fractal, Benoit Mandelbrot. Aqui são apresentados alguns Fractais clássicos e destacam-se suas principais propriedades Matemáticas. Sugere-se um software livre, e de acesso online, para a criação dessas figuras. Posteriormente, aplica-se uma proposta didática baseada em um material paradidático que propõe a investigação de Fractais nos anos finais do ensino fundamental ou no ensino médio, relatando-se os resultados dessa aplicação.

Palavras-chave: Fractal. Matemática. Proposta Didática.

ABSTRACT

DALPIAZ, Marcos Roberto. A STUDY OF FRACTALS: ORIGIN AND DIDACTICAL PROPOSAL FOR CLASSROOM APPLICATION. 71 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016

This dissertation presents a brief historical overview of the origins of Fractals, as well as of the creator of the Fractal term, Benoit Mandelbrot. Some classical Fractals are presented and its main mathematical properties are highlighted. It suggests a free software, with on-line access, to the creation of these figures. Later, the didactic proposal is applied based on a paradidactic material, which proposes investigation of Fractals in the last years of primary school or in the secondary school and the results of this application are reported.

Keywords: Fractal. Mathematics. Didactical Proposal.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Imagem de uma Planta com Propriedades Fractais	16
Figura 2 – Euclides de Alexandria	20
Figura 3 – Quinto Postulado de Euclides	21
Figura 4 – Mandelbrot	23
Figura 5 – Ilustração de como medir o comprimento da costa, utilizando-se um compasso de abertura ajustável.	27
Figura 6 – algumas etapas na construção do Conjunto de Cantor	29
Figura 7 – Algumas etapas na construção da Curva de Koch	34
Figura 8 – Construção da Curva de Koch	35
Figura 9 – A primeira iteração em dois segmentos	37
Figura 10 – Floco de neve de Koch	39
Figura 11 – Iterações da Curva do Dragão	39
Figura 12 – A Curva do Dragão	40
Figura 13 – Poligonais a partir de uma tira de papel	40
Figura 14 – A k -ésima poligonal na $(k + 1)$ -ésima iteração	43
Figura 15 – Cópias consecutivas	45
Figura 16 – O conjunto de Mandelbrot	46
Figura 17 – Homotetia	48
Figura 18 – Segmento AB dividido	48
Figura 19 – Quadrado dividido	48
Figura 20 – cubo dividido	49
Figura 21 – Tela	55
Figura 22 – Função Draw	55
Figura 23 – Rastro	56
Figura 24 – Cantor Simplificado	57
Figura 25 – Cantor de forma Recursiva	57
Figura 26 – Curva do Dragão	59

SUMÁRIO

	Introdução	15
1	AS ORIGENS DA GEOMETRIA, MANDELBROT E FRACTAIS . . .	19
2	FRACTAIS	27
2.1	A questão do tamanho da costa de um litoral	27
2.2	O Conjunto de Cantor	29
2.3	A Curva de Koch	33
2.4	A Curva do Dragão	39
2.5	O conjunto de Mandelbrot	46
2.6	Dimensão de homotetia ou de autossimilaridade	47
2.6.1	Dimensões dos principais Fractais estudados	51
3	O USO DO SOFTWARE PROCESSING	53
3.1	O que é o Processing?	53
3.2	Processing como espaço de trabalho	53
3.3	Como utilizar o OpenProcessing?	53
3.4	Funções	54
3.5	Definindo Funções	54
3.6	Usando Funções	54
3.7	Funções Especiais do Processing	54
3.8	Exemplos de Algoritmos	56
3.8.1	Conjunto de Cantor	56
3.8.1.1	Algoritmo de Cantor de Forma Recursiva	57
3.8.1.2	Explicação do Algoritmo de Cantor	57
3.8.2	Curva do Dragão	59
3.8.2.1	Algoritmo da Curva do Dragão	59
3.8.2.2	Explicação do Algoritmo da Curva do Dragão	59
4	PROPOSTA DIDÁTICA, TEMA: INVESTIGANDO FRACTAIS NO EN- SINO BÁSICO	61
4.1	Introdução	61
4.2	Resumo	61
4.3	Uma Proposta Interdisciplinar	61
4.4	Tempo previsto/sugerido	61
4.5	Objetivos	62
4.6	Recursos	62

4.7	Desenvolvimento da Aula	62
4.7.1	Surgimento do Conceito de Fractais	62
4.7.2	Introdução aos Fractais	62
4.7.3	Atividades com Fractais	63
4.7.3.1	A Curva de Koch	63
4.7.3.2	A Curva do Dragão	64
4.7.4	Dimensão Fractal	64
4.8	Avaliação	65
4.9	Bibliografia	65
4.10	Relato da Aplicação em sala de aula	65
5	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	71

INTRODUÇÃO

O presente trabalho vem mostrar um assunto ainda pouco utilizado nas aulas de Matemática: os Fractais.

A palavra Fractal vem do latim *Fractus* que significa quebrado ou fraturado e podemos entendê-los, intuitivamente como formas ou figuras geométricas completamente fraturadas, mudando de direção a cada instante (como a Curva de Koch na subseção 2.3) ou cheias de buracos (como o Conjunto de Cantor na subseção 2.2). A Geometria dessas formas intrincadas contrasta com os objetos simples da Geometria euclidiana com seus segmentos de reta, círculos, planos e curvas definidas como o local geométrico dos pontos com uma determinada propriedade.

Descrições simples são, para muitos propósitos, melhores do que descrições complexas. Contudo, acontece que as formas escolhidas pela natureza não são aquelas da Geometria euclidiana:

Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, cascas de árvores não são lisas, nem o raio viaja em linha reta. (MANDELBROT, 1982, p.53)

Ainda que formas de grande complexidade e beleza sejam produzidas com Fractais, eles são usualmente criados pela repetição de processos simples, sejam processos de remoção de partes de uma figura inicial, substituição de partes por outras distintas ou iterações repetidas de determinadas funções. Devido ao fato desses processos serem aplicados repetidamente, a utilização de ferramentas computacionais não só é natural, como é uma necessidade no estudo dos Fractais para que eles possam ser gerados (desenhados). Seguindo essa linha, vemos as noções intuitivas de Fractal dadas por STEWART:

Os Fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores. (STEWART, 1996, p.12)

e MANDELBROT:

Fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo recursivo, apresentando auto-semelhança¹ e complexidade infinito.(MANDELBROT, 1982, p.53)

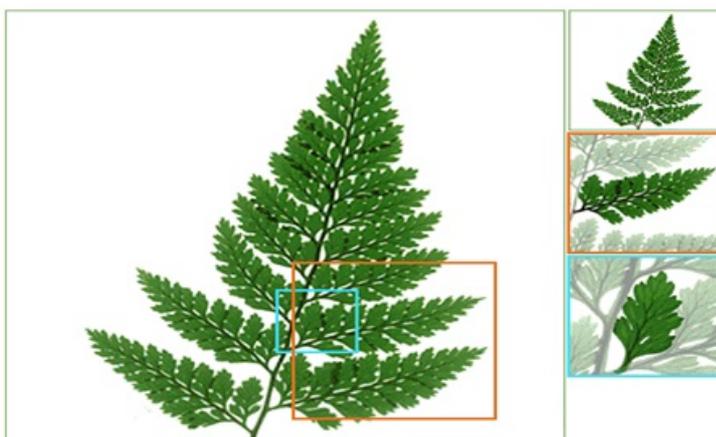
Devido a esses padrões que se repetem, a essa “estrutura fina”², é comum que não existam segmentos de reta ou círculos em um Fractal, como também é difícil de definir uma reta tangente

¹ Veja no capítulo 2 a explicação

² Veja no capítulo 1 a explicação

de modo consistente ou ter uma definição clara do ângulo que uma dessas figuras geométricas fazem uma com a outra. Isso faz com que a Geometria Fractal não possa ser compreendida com as ferramentas da Geometria Euclidiana. Contudo, vê-se a necessidade de estudar esses objetos para descrever a estruturas das árvores, as formas das nuvens e a turbulência que as turbinas de um avião geram ao voar. Será que existe uma ordem no meio desse mundo aparentemente irregular e caótico? A resposta é sim e para compreendê-la, vamos recorrer às propriedades geométricas desses Fractais, ou a Geometria Fractal. Vivenciamos que a pessoa que se deparar pela primeira vez com essa Geometria, encanta-se pela beleza, tanto no aspecto estético-visual como na sua Matemática.

Figura 1 – Imagem de uma Planta com Propriedades Fractais



Fonte: (WANGENHEIM, Acesso em: 11 ago. 2016)

A Geometria Fractal pode ser encontrada na natureza, em árvores, samambaias, flocos de neve, nuvens, montanhas, etc. Nestes objetos podemos observar padrões intrincados e repetições desses padrões, como na samambaia da figura 1, em que pode ser observada uma réplica em miniatura do todo em cada parte. Nem sempre a repetição é idêntica, porém é semelhante na estrutura.

Alguma razão para a Geometria não descrever o formato das nuvens, das montanhas, das árvores ou a sinuosidade dos rios? Nuvens não são esferas, montanhas não são troncos de cones, árvores não são hexágonos e muito menos os rios desenham espirais. (MANDELBROT, 1982, p.53)

É importante levar esses conceitos para a sala de aula, olhar a natureza e encontrar nela a Matemática, discutir novos padrões que surgem, fazendo uso dos conteúdos já conhecidos mostrando como podem ser aplicados e proporcionando novas descobertas. Os Fractais podem ser um encaminhamento da Matemática para uma situação de exploração e desenvolvimento da criatividade.

Constam nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que os conteúdos desenvolvidos façam sentido ao educando e que tenham correspondência no seu cotidiano. Para tanto, é necessária a elaboração de uma metodologia que seja capaz de:

Priorizar a construção de estratégias de verificação e comprovação de hipóteses na construção do conhecimento, a construção de argumentação capaz de controlar os resultados desse processo, o desenvolvimento do espírito crítico capaz de favorecer a criatividade, a compreensão dos limites e alcances lógicos das explicações propostas. (MEC/SEF, 1998, p.28)

Entre 1857 e 1913, cientistas como Weierstrass, Cantor e Koch encontraram funções, conjuntos e curvas completamente quebradas e nas quais as técnicas usuais da Matemática deixavam de funcionar. Esses objetos foram considerados como “monstros ou demônios”, patologias encontradas na busca por contra-exemplos e que se supunha não terem grande valor científico. Tais objetos desprezados num primeiro momento acabaram por adquirir um estatuto de dignidade Matemática, o que constitui hoje uma área importante de investigação Matemática: a Geometria Fractal. Um dos primeiros a estudar essas estruturas como objetos de interesse foi Benoit B. Mandelbrot, que cunhou o termo Fractal e descobriu um dos Fractais mais famosos, conhecido como “Conjunto de Mandelbrot”, que exploramos no capítulo 1.

Os meteorologistas podem utilizar o cálculo Fractal para verificar as turbulências da atmosfera, como nuvens, montanhas e a própria turbulência. Também são encontradas aplicações na engenharia, nas comunicações telefônicas, na química, na indústria metalúrgica, na arte, na Matemática e no estudo de doenças crônicas e em diversos campos da medicina.

Os Fractais podem ser encontrados em todo o universo natural e em toda a ciência, desde o aspecto das nuvens, montanhas, árvores e relâmpagos, até à distribuição das galáxias, assim como na arte e na Matemática. (OLIVEIRA, 1994, p.92)

Estudos revelaram que um coração saudável pode bater a um ritmo Fractal e que um batimento cardíaco quase periódico é um sintoma de insuficiência cardíaca. Para (OLIVEIRA, 1994, p.92), essa nova área das ciências Matemáticas vem tendo uma enorme aplicação. Para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies irregulares. Para os médicos, dá uma nova visão da anatomia interna do corpo. Enfim, não faltam exemplos. Um dos mais belos é o uso dos Fractais na arte. Para (OLIVEIRA, 1994, p.92), a Geometria Fractal é uma nova linguagem. Ela ajuda a descrever a forma de um rio, a fronteira de um país, os órgãos do corpo humano, a distribuição de galáxias no universo e outros objetos, tão precisamente como um arquiteto descreve uma casa.

Este trabalho aborda os Fractais, suas origens, algumas propriedades, um pouco de sua história e diversidade, cita alguns exemplos de aplicações, fala um pouco sobre a Geometria e a importância do trabalho em sala de aula. O estudo sobre Fractal é considerado recente, uma vez que não se passaram muitos anos desde seu início e já existindo uma enorme diversidade de Fractais, gerados por processos distintos.

Na escola o ensino dos Fractais no Ensino Médio, propicia ao estudante o contato com conteúdos usualmente pouco explorados como padrões geométricos, processos iterados e o conceito de infinito. Além disso, conceitos usualmente estudados também são explorados com o

estudo de Fractais como: semelhança, homotetia, escalas e dimensão. Além de disso, o assunto pode servir como uma entrada no mundo da programação e como ferramenta para auxiliar no estudo de fenômenos naturais. Dessa forma, os alunos reveem alguns conteúdos matemáticos já estudados, permitindo fazer conexões entre a Geometria Tradicional e a Geometria Fractal.

No mais, apresentar noções de Fractais associados a um sistema dinâmico contribui para a formação de alunos com a consciência da importância do conhecimento matemático, o que os liberta de uma Matemática procedimental, muitas vezes enraizada nos currículos da educação básica, além de abrir possibilidades para a contextualização e interdisciplinaridade. Segundo (BARBOSA, 2002, p.159), as justificativas para inserir Geometria Fractal em sala de aula se dão por:

- Conexões com várias ciências;
- Deficiência da Geometria Euclidiana para os estudos de formas da natureza, desde que sejam em geral, apenas para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas etc.; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma Geometria mais rica, cujos modelos com Fractais possibilitam desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes;
- Difusão e acesso aos computadores e às tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização;
- Existência do belo nos Fractais e possibilidades do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo da arte aplicada à construção de Fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade;
- Sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo, trataremos um pouco da biografia de Benoit Mandelbrot que é de fundamental importância para compreender o surgimento da Geometria Fractal.

No capítulo 2, serão expostas algumas propriedades Fractais, bem como o cálculo de sua dimensão, sendo abordada características Fractais: o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch e a Curva do Dragão.

No capítulo 3, apresentaremos uma opção de software online para a implementação de diversos Fractais, mediante a criação de um algoritmo capaz de gerar diferentes modelos.

Já no capítulo 4, trataremos um plano de aula (Proposta Paradidática) com o tema: Investigando Fractais no Ensino Básico, este sendo abordado juntamente com o anexo I, que é um livreto produzido para estas aulas, com propriedades, construções lúdicas e aplicações de cotidiano, como exemplo de uma Matemática aplicada que pode ser utilizada em aula.

1 AS ORIGENS DA GEOMETRIA, MANDELBROT E FRACTAIS

Para entender a origem do estudo dos Fractais, é preciso voltar às origens relativas à Geometria. Contudo, as origens de qualquer ciência estão repletas de incertezas de datas precisas, devido à própria história da humanidade e do longo período de inexistência dos registros escritos. O historiador grego Heródoto, do século V a.C., considerado o pai da história, juntamente com o filósofo Aristóteles, propuseram a origem da Geometria na civilização egípcia. Para um, havia a necessidade prática de medições, para outro, a existência de uma classe sacerdotal com tempo disponível para dedicar-se a questões relacionadas a formas e tamanhos. De qualquer modo, as primeiras considerações que o homem fez a respeito da Geometria são muito antigas.

Boyer (1981), no seu livro sobre História da Matemática, menciona que:

O fato dos geômetras egípcios serem as vezes chamados de “estiradores de corda” (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias, pois as cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras. (BOYER, 1981, p.29-31)

Inúmeras circunstância da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levavam a um certo montante de descobertas geométricas subconscientes.

A noção de distância foi, provavelmente, um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos. A necessidade de demarcar terras levou a noção de figuras geométricas simples. Outros conceitos geométricos, como noções de vertical , paralela e perpendicular, teriam surgido nas construções de muros e moradias. O historiador Heródoto, do século V a.C, defendeu esta tese:

Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividia a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de tributo anual. Mas qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir até Sesóstris e notificar o ocorrido. Ele então mandava homens seus observarem e medirem quanto a terra se torna menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restam, proporcionalmente ao tributo total. Dessa maneira, parece-me que a Geometria teve origem, sendo mais tarde levada até a Hélade. (EVES, Heródoto, século V a.C apud. EVES 1997, p.3-10)

Este relato localiza, na agrimensura prática do antigo Egito, os primórdios da Geometria. Embora não se tenha certeza de sua origem, parece seguro assumir que a Geometria surgiu das necessidades práticas, surgidas há vários séculos antes da nossa era, no oriente antigo, como uma ciência que se desenvolveu para atividades ligadas à agricultura, à engenharia ou à religião.

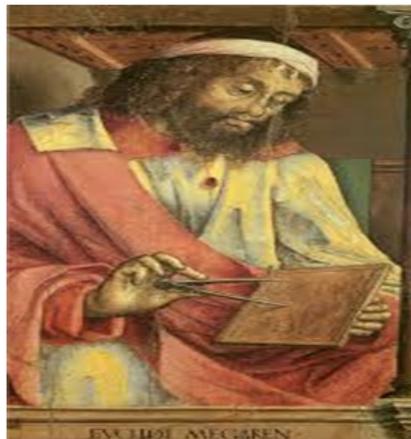
Boyer (1981) cita exemplos do aparecimento da Geometria na pré-história, ao citar o homem do período neolítico, devido as simetrias e congruências presentes em artefatos como

vasos, potes, tecidos e cestas. No Egito, é importante citar os papiros que trazem a descrição de grande quantidade de problemas, propondo construções, cálculos de áreas e volumes, todos com natureza prática e muitas vezes relacionados às pirâmides. Também são encontrados, em menor número, desafios e enigmas. Os relatos da origem da Geometria, na Grécia, são fragmentados, como coloca Boyer:

Os relatos sobre as origens da Matemática grega se concentram na chamadas escolas jônica e pitagórica e nos representantes principais de cada uma - Tales e Pitágoras - embora as reconstruções de seu pensamento se baseiem em narrações fragmentárias e tradições elaboradas nos séculos posteriores.(BOYER, 1981, p.29-31)

É notável a importância desses dois matemáticos gregos do século VI a.C.: as proporções, a história do cálculo da altura da pirâmide, o teorema de Pitágoras e trabalhos com números irracionais. Mencionamos ainda dos geômetras antigos: a escola de Platão e seus diálogos, Eudoxo e as proporções, o Método da Exaustão, as secções cônicas de Menaecmus e Euclides de Alexandria com seus Elementos, cujos conteúdos ainda dominam o ensino de Geometria no ensino básico.

Figura 2 – Euclides de Alexandria



Fonte: (WIKIPEDIA, 2016, Acesso em: 11 ago. 2016)

Não se sabe muito sobre a vida de Euclides. Estima-se que ele viveu no período de 360 - 295 a. C. Por vezes, ele é chamado Euclides de Alexandria, devido ao fato de ter sido um dos grandes filósofos a estudar e ensinar na grande biblioteca de Alexandria. Poucos de seus trabalhos sobreviveram até hoje e são eles: Os Elementos, Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos e Óptica; sendo sua principal obra Os Elementos.

Ainda sobre os Elementos,

trata-se de um texto introduzido cobrindo toda a Matemática elementar - isto é aritmética (no sentido de "teoria dos números"), Geometria Sintética (de pontos, retas, círculos e esferas), e álgebra (não no sentido simbólico moderno, mas

um equivalente em roupagem geométrica) [...]; se limitam austeramente ao seu campo - a exposição em ordem lógica dos assuntos básicos de Matemática elementar.(BOYER, 1981, p.29-31)

“Os Elementos” de Euclides são a mais antiga e importante obra Matemática grega da história, pois está presente na atualidade de forma ativa e, por isso, é considerado o texto mais influente de todos os tempos. “Os Elementos” está dividido em treze obras (livros) ou capítulos, sendo os seis primeiros sobre Geometria Plana Elementar.

No primeiro deles, há vinte e três definições conhecidas pela ineficiência, já que as primeiras noções de Geometria, chamadas primitivas, são as de ponto, reta e plano, conhecidas intuitivamente, ou seja, são aceitas sem definições exatas, como por exemplo: “ponto é aquilo de que nada é parte” ou “linha é comprimento sem largura” . A questão é como propor uma definição em termos de coisas precedentes mais conhecidas de forma clara, o que certamente não foi atingido. A Geometria Euclidiana é considerada a primeira obra Matemática a construir uma teoria baseada em axiomas e postulados utilizando a lógica usual sem contradições evidentes. Como mencionada por (AVILA, 2001, p.1-9) “Historicamente, os Elementos de Euclides são a primeira corporificação desse método axiomático”.

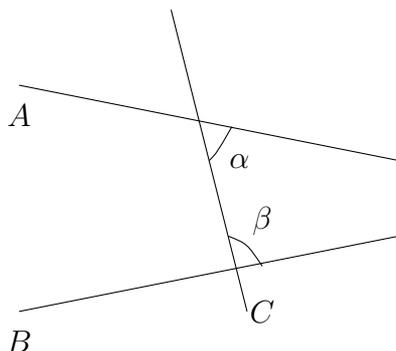
Conforme (COURANT RICHARD; ROBBINS, 2002, p.262), o método axiomático, listado abaixo, clássico de Euclides pode ser utilizado indiscriminadamente, pois se apoia somente em fundamentos geométricos, sendo os teoremas deduzidos por raciocínio lógico e sustentado em axiomas ou postulados.

Os axiomas (ou noções comuns) de Euclides são:

1. Coisas iguais são iguais entre si.
2. Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais.
3. Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

E os postulados:

1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade.
2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.
3. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado, essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um mesmo ponto desse mesmo lado. (Figura 3)



A Geometria Euclidiana é desenvolvida em porções finitas, ou seja, os principais elementos são o ponto e a reta, os quais são definidos a partir dos axiomas de Geometria. De acordo com (COURANT RICHARD; ROBBINS, 2002, p.262), dentro de qualquer conjunto de axiomas devem entrar quaisquer conceitos indefinidos, tais como “ponto” e “reta” em Geometria. Seu “significado”, ou relação com objetos do mundo físico, é Matematicamente dispensável”.

Durante 2000 anos, incluindo os dias de hoje, a Geometria Euclidiana, a Geometria Esférica, a Geometria Diferencial e as Geometrias não Euclidianas são conhecidas e mais antigas que a Fractal. Porém, elas têm se demonstrado insuficientes ao explicar fatos e fenômenos.

Um problema secundário que atraiu a atenção de alguns matemáticos durante muito tempo é se o quinto postulado seria um teorema, ou seja, pode ser demonstrado a partir dos outros 4 postulados, ou então, pode ser omitido da teoria sem prejudicar sua consistência, o que a torna verdadeira, logicamente falando.

Então, nos próximos 22 séculos, desde Euclides, em vários momentos da história da Matemática, ocorreram frustradas tentativas de se provar o quinto postulado, o notável postulado da paralela única.

Somente no século XIX, que alguns matemáticos conseguiram chegar à conclusão de que não tinha como prová-lo e, a partir da sua negação, surgiram o que chamamos de Geometria não euclidiana. Estes matemáticos descobriram que a negação deste postulado junto aos demais gera outras Geometrias tão consistentes como a que foi proposta por Euclides.

Os conceitos matemáticos sobre Geometria, Euclidianos e não Euclidianos, estão garantidos nos PCN-Matemática, que apresentam:

... fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evolua de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. ... Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única Geometria de real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (MEC/SEF, 1998, p.42)

A Geometria Euclidiana descreve as formas de figuras ideais, tais como retângulos e círculos, mas não é adequada para descrever com precisão as formas construídas pela natureza,

como por exemplo uma folha de samambaia. Já a Geometria Fractal foi proposta para descrever a Geometria de estruturas com fragmentações, com dobras e outros aspectos.

Um dos percussores do estudo de Fractais foi Benoit Mandelbrot, matemático francês que nasceu em Varsóvia, capital da Polônia, em 20 de novembro de 1924. Sua família era judia da Lituânia, seu pai foi vendedor e sua mãe dentista.

Figura 4 – Mandelbrot



Fonte: (YALE, 2016, Acesso em: 08 set. 2016)

Em 1936, Benoit e seus familiares foram morar na França, refugiando-se no sul devido à 2ª guerra mundial. Este pesquisador vem de família de tradição acadêmica, o que o levou a se interessar por Matemática, influenciado por seu tio Szolem Mandelbrot (1899, 1983), professor de Matemática no “Còllege de France”.

Benoit Mandelbrot estudou no “Lycze Rolin”, Paris. Em 1944, frequentou a École Polytechnique, onde trabalhou com Pierre Lévy (1886 - 1971) e obteve o grau de PhD na Universidade de Paris. Depois, foi pra os Estados Unidos para estudar em Princeton, retornando à França em 1955, onde se casou com Alette Kagan. Nessa época, começou a trabalhar no Centro Nationale de la Recherche Scientifique, como professor de Matemática. Em 1957, retornou a École Polytechnique, onde sua carreira ficou marcada entre França e EUA. Em 1958, na cidade de Nova Iorque, foi convidado para trabalhar na IBM. O trabalho de Mandelbrot na IBM o levou a estudar o “ruído” em sinais elétricos que eventualmente causava erros. Mesmo sem conseguir entender a natureza desses erros, Mandelbrot descobriu que os padrões de interferência se repetiam em escalas menores, formando padrões relacionados a uma estrutura considerada anteriormente como patológica: o Conjunto de Cantor (que é um objeto de destaque no capítulo 3).

Na IBM deparou-se com questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em redes entre os computadores. Mandelbrot soube dos engenheiros que algum ruído não poderia ser eliminado e interferia nos sinais; a aleatoriedade e a irregularidade dos ruídos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Resolveu o problema empregando um trabalho antigo de

Georg Cantor chamado poeira de cantor, pensando nos erros de transmissão como um desses conjuntos de cantor.

Neste problema, não havia um determinado padrão, os ruídos aconteciam aleatoriamente, contudo conseguiu fazer uma descrição dos erros que se aproximavam de uma dispersão infinita. Mandelbrot elaborou também uma relação geométrica entre as sequências de erros e os espaços de transmissão perfeita e, em determinadas escalas, chegou a propor períodos sem erros, mas os com erros permaneciam constantes. Conforme (BARBOSA, 2002, p.159).

Descobrimo que padrões geométricos elaborados poderiam surgir da repetição de processos geométricos simples, o matemático fez uma ligação entre um problema que a primeira vista nada tem em comum com os ruídos telefônicos, as cheias ocorrentes no Rio Nilo, que já vem, há milênios, sendo uma preocupação para os egípcios. O rio sobe muito em determinados anos e baixa em outros. Ele se inspirou nesses dados e propôs dois efeitos com base nos estudos desses fenômenos: o efeito Noé e o efeito José. Denominou-se efeito Noé a descontinuidade: quando uma quantidade se altera, modificando de uma maneira muito rápida, como um dilúvio. Mandelbrot denominou "efeito José" a persistência desses dados, ou seja, pela análise de dados históricos observou que as cheias e as secas do rio persistem.

O problema em estudar objetos matemáticos tão diferentes, como Fractais, é que faltam ferramentas. Os conceitos usuais de ângulos, tangentes e círculos não auxiliam a compreender melhor os Fractais. Uma ideia que auxilia no estudo de Fractais é a de dimensão, que tenta responder quanto que um Fractal de fato preenche um espaço. Existem alguns conceitos distintos de dimensão Fractal e um dos mais intuitivos é o tema de dimensão Fractal através da Homotetia e Auto-similaridade da seção 2.6.

Mandelbrot precisava de um nome para suas formas, dimensões e sua Geometria. Foi então, que seu filho chegou em casa trazendo um dicionário de Latim, no qual Mandelbrot encontrou uma palavra que lhe chamou atenção: *fractus*, do verbo frangere, que significa quebrar, fraturar, como consta na obra "O padrão da (des)ordem da natureza" (NAIME R.; SPILKI, 2002). Criou-se, então, o famoso termo Fractal, que significa na nossa imaginação uma maneira de ver o infinito. A dimensão Fractal não é necessariamente um número inteiro, ou seja, podemos repetir um mesmo processo infinitas vezes. Os Fractais apresentam uma forma geométrica complexa, definida por propriedades como auto similaridade, irregularidade (forma rugosa ou fragmentada) e uma dimensão não inteira, como mostraremos no item 6 do capítulo 2.

O conceito de Fractal também permite que as pessoas se aproximem das formas existenciais na natureza, como, por exemplo, a imagem dos litorais, da projeção das montanhas e das rochas, do contorno de lagos e do traçado de rios, entre outras.

Mandelbrot teve a genialidade e, devido sua posição na IBM, a tecnologia necessária para a realização de cálculos e construções de gráficos. Sendo assim, o primeiro a poder visualizar a imagem de um Fractal com alta complexidade de detalhes.

Mandelbrot, na introdução do seu livro *A Geometria Fractal da Natureza*, relata:

Respondendo a este desafio, eu pesquisei uma nova Geometria e implantei-a num número diversos de situações. Ela descreve muito do que é irregular e fragmentado a nossa volta [...], através da identificação de uma família de formas que eu chamei Fractais. [...] Muitos conjuntos Fractais são curvas ou superfícies, outros não são mais que "poeiras" desconexas e outros ainda são formas tão estranhas que não há bons termos para eles em qualquer ciência ou arte. (MANDELBROT, 1982, p.53)

Um Fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida em que a escala, sob a qual o mesmo é analisado, é alterada mantendo-se a sua estrutura idêntica à original. Isto não é o que ocorre, por exemplo, com uma circunferência que parece reduzir a sua curvatura à medida em que ampliamos uma das suas partes.

Conforme mencionado anteriormente, a dimensão de um Fractal diferente do que ocorre na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um valor inteiro. Nela, um ponto possui dimensão zero, uma linha possui dimensão um, uma superfície possui dimensão dois e um volume possui dimensão três. No caso da dimensão Fractal, ela é uma quantidade fracionária ou até irracional, que representa o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém.

A Geometria não Euclidiana surgiu devido à frágil aplicabilidade em relação a questões envolvendo principalmente a natureza. Mandelbrot lembra que nuvens não podem ser simples esferas, montanhas não podem ser representadas por simples cones e assim por diante. Existe por trás disso tudo uma Geometria cheia de reentrâncias e depressões, uma Geometria de fragmentações que se espelha num universo que é irregular e não redondo.

A dimensão Fractal está relacionada ao grau de irregularidade de um sistema, o qual é encontrado na natureza, como em troncos de árvores e nas montanhas. Quanto mais próximo nos encontrarmos desses sistemas, maiores serão as irregularidades observadas.

Desta maneira, os Fractais apresentam formas geométricas mais complexas, permitindo, assim, aproximação das formas presentes na natureza, como, por exemplo, a imagem dos litorais marinhos, das projeções das montanhas e das rochas, do contorno de lagos e do traçado dos rios e riachos, entre outras. (MANDELBROT, 1998, p.53) propôs não descrever apenas os objetos da natureza, “mas também descrevê-los de uma forma suficientemente perfeita para permitir imitar imagens do real por meio de fórmulas. Tais imitações eram escritas a partir de modelos estatísticos”.

Os Fractais são objetos ordenados dentro de um sistema caótico, originam formas admiráveis e incrivelmente belas ao descreverem determinados fenômenos da natureza. Segundo BARBOSA (2002):

As estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas dessa Geometria, fornecem uma certa ordem ao Caos, razão de ser, às vezes, considerada como a sua linguagem, que busca padrões de um sistema por vezes aparentemente aleatório. (BARBOSA, 2002, p.159)

Portanto, foi a partir desse conhecimento que os objetos da natureza puderam ser medidos com os Fractais, formando modelos que levam em conta os detalhes de modo que os seus detalhes se aproximassem da realidade. Assim, os Fractais envolvem olhar mais de perto e enxergar mais detalhes, tendo tudo a ver com saliências que escondem outras saliências e curvas que escondem mais curvas.

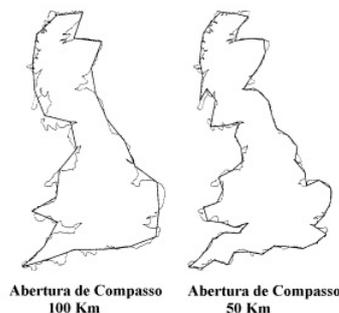
2 FRACTAIS

2.1 A QUESTÃO DO TAMANHO DA COSTA DE UM LITORAL

Para Mandelbrot, as “imperfeições” nas formas da natureza ignoradas pelas figuras clássicas da Geometria Euclidiana são mais do que apenas reentrâncias e/ou emaranhados, são as chaves para a essência destas coisas

Uma questão aparentemente simples, mas surpreendentemente complexa, levantada por Mandelbrot, foi: qual o comprimento de uma linha costeira? Será infinitamente longo num sentido, porém finito em outro sentido, dependendo do que se entende por medir o "tamanho" da curva. Para medir uma linha costeira, pode ser utilizado o seguinte método: toma-se uma abertura fixa do compasso, de comprimento l , e, a partir de um um ponto inicial, marca-se um dos pontos de interseção da linha costeira com a circunferência centrada neste ponto e de raio l , obtendo um segundo ponto. Repete-se este processo em cada novo ponto até obtermos uma poligonal que aproxima a linha costeira. Quanto maior a abertura escolhida no compasso, mais são ignoradas as irregularidades e reentrâncias do litoral, de modo que o comprimento da poligonal tende a crescer quando se diminui a abertura do compasso; conforme ilustra imagem a seguir:

Figura 5 – Ilustração de como medir o comprimento da costa, utilizando-se um compasso de abertura ajustável.



Fonte: (WANGENHEIM, Acesso em: 11 ago. 2016)

Mandelbrot descobriu que o comprimento dessas poligonais tende ao infinito quando se faz a abertura do compasso tender a zero. Mais do que isto, ele afirma que qualquer pequena porção do litoral é estatisticamente semelhante ao todo, ou seja, as pequenas porções do litoral não são cópias exatas do todo, mas as irregularidades apresentam o mesmo tipo de padrão estatístico. Assim, as baías, as enseadas, os golfos e as penínsulas formam padrões na linha costeira semelhantes aos padrões formados em um pequeno trecho do litoral pelas pedras e irregularidades do terreno. Como comenta MORRS (2010) sobre o tipo de curva que melhor representa a costa de um litoral:

Os Fractais estão por toda parte. Seu estudo é muito importante para melhor compreender as funções Matemáticas que apresentam um perfil serrilhado, como o da costa de um país. São funções representadas por gráficos com perfil Fractal. (MORRS, 2010, Acesso em: 09 mai. 2010)

Noções como comprimento, área ou volume ajudam muito pouco na compreensão dos Fractais, pois assim como no exemplo de um litoral, estes conceitos frequentemente têm valor zero ou infinito para Fractais. Para obter uma noção mais útil do tamanho de um Fractal, são introduzidos os conceitos de dimensão Fractal, um dos quais estudaremos em maior detalhe na seção 6 deste mesmo capítulo.

Uma definição precisa de Fractal e que seja abrangente o suficiente para englobar todos os objetos matemáticos entendidos como Fractais não existe. Por isso, utilizaremos uma abordagem não tão precisa, baseada em (FALCONER, 1990), listando algumas das características que um Fractal X usualmente possui:

1. X tem uma estrutura fina, isto é, detalhes em escalas arbitrariamente pequenas. Quanto mais ampliada a figura, mais detalhes aparecerão. Em figuras geométricas comuns, isto não ocorre. Por exemplo, em uma circunferência, quanto menor for uma seção da circunferência, mais ela é parecida com um segmento de reta.
2. X é muito irregular para ser descrito em linguagem geométrica tradicional, isto é, o conjunto X não pode ser descrito como uniões finitas de objetos geométricos simples como segmentos, planos, retas, círculos, esferas, paraboloides.
3. X tem alguma forma de auto-similaridade. A autossimilaridade, ou autoafinidade, que basicamente é a obtenção de figuras semelhantes à figura original (idênticas ou estatisticamente semelhantes) ao ampliarmos pequenas porções da figura.

Para um Fractal cujas partes sejam uma cópia exata (reduzida) de seu todo, a autossimilaridade é dita estrita. Por outro lado, diz-se que um Fractal tem autossimilaridade estatística quando adapta-se o tamanho das variações aleatórias de pequenas partes, obtém-se a mesma distribuição estatística que o todo¹(FALCONER, 1990);

4. A “dimensão Fractal”, na maioria dos casos, não é inteira. Essa dimensão Fractal é a medida do grau de irregularidade e de fragmentação, sendo que esta pode ser uma fração simples ou um número irracional;
5. Na maioria dos casos de interesse, X está definido de maneira simples, talvez recursivamente. Muitos Fractais são definidos através de infinitas iterações de algum procedimento geométrico simples ou pela aplicação repetida de alguma função elementar.

¹ Para mais sobre Fractais aleatórios, sugerimos o capítulo 15 de (FALCONER, 1990).

2.2 O CONJUNTO DE CANTOR

O matemático Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, nascido em 1845 em São Petesburgo, Rússia, dedicou grande parte de seus estudos à Teoria dos Conjuntos. Cantor é considerado um dos maiores matemáticos de seu tempo. Em 1883, ele apresentou o chamado "Conjunto de Cantor". O conjunto foi considerado uma aberração Matemática na época de sua descoberta, contudo hoje tem aplicações importantes, como no estudo da Geometria de Atratores Caóticos ².

O Conjunto de Cantor é obtido a partir de um segmento de reta, partindo do seguinte processo: inicia-se com o intervalo fechado $[0, 1]$. Divide-se esse segmento em três partes e descarta-se o pedaço do meio, ficando apenas com os dois pedaços extremos. Os dois pedaços restantes são, então, divididos em três partes e são descartadas cada uma das partes centrais, ficando com quatro segmentos. Os quatro segmentos restantes sofrem o mesmo processo dando origem a oito segmentos, cada vez menores. Este processo repete-se infinitamente, sempre dividindo cada segmento restante em três e descartando o terço médio de cada divisão. O resultado final é um conjunto de pontos mais conhecido como "Poeira de Cantor" ou Conjunto de Cantor.

Figura 6 – algumas etapas na construção do Conjunto de Cantor



Formalmente podemos defini-lo:

Definição 2.1. *O Conjunto de Cantor, que denotamos por \mathcal{C} , é o conjunto obtido a partir de um segmento de reta, iterando-se infinitas vezes o seguinte processo:*

1. *divide-se cada um dos segmentos de reta formado na iteração anterior em três segmentos de igual comprimento;*
2. *apaga-se os segmentos abertos centrais obtidos no item 1.*

De maneira mais precisa³, podemos dizer que um ponto $x \in \mathbb{R}^2$ está no Conjunto de Cantor se, e somente se, existir uma sequência (x_n) que converja para x , onde x_n está na poligonal obtida pela n -ésima iteração do processo acima para cada $n \in \mathbb{N}$.

Estudamos agora, então, algumas das propriedades do Conjunto de Cantor, cujos elementos serão obtidos a partir do intervalo $[0, 1]$ como segmento inicial.

² Conforme consta em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_do_caos>, acesso 17/05/2016.

³ Seguindo a ideia do artigo original de Koch, que define a curva que leva seu nome, veja (EDGAR, 2003).

Proposição 2.2. *O Conjunto de Cantor é formado exatamente pelos números do intervalo $[0, 1]$ que podem ser representados em base 3 sem utilizar o algarismo 1.*

Demonstração. Vamos mostrar que após n iterações retiramos todos os números que precisam do algarismo 1 até a n -ésima casa decimal, de modo que a indução sobre n garante que no limite não temos nenhum número que precisa do algarismo 1 em nenhuma casa decimal para ser representado em base três. Seguimos por indução:

- Partimos do segmento $[0, 1]$. Primeiramente notamos que o número 1 pode ser escrito, em base 3, como $1 = 0, \bar{2} = 0, 222 \dots$. Na primeira iteração, dividimos o segmento $[0, 1]$ nos intervalos⁴, de igual comprimento, com extremos: 0 e 0,1; 0,1 e 0,2; 0,2 e 1. Então, retiramos o intervalo central, que é formado exatamente pelos números que têm 1 como primeiro dígito depois da vírgula; exceto pelo número 0,1 que, contudo, pode ser representado como $0, 0\bar{2} = 0, 02222 \dots$
- Supondo que no conjunto resultante da n -ésima iteração temos exatamente os números que não precisam do algarismo 1 até a n -ésima casa decimal em sua representação em base 3; então na $(n + 1)$ -ésima iteração retiramos todos os números que têm e precisam do algarismo 1 na $(n + 1)$ -ésima casa decimal de sua representação em base três. O que completa a demonstração.

□

Exemplo 2.3. *Como exemplo ilustrativo da substituição do algarismo 1 por infinitos algarismos 2 na demonstração expressa anteriormente, consideramos o número $\frac{25}{27} = (0, 221)_3$. Mas, se observarmos que $(0, 221)_3 = (0, 22022222\dots)_3$, poderemos sempre substituir o algarismo final 1 pela sequência 0, 22222.... Com esta convenção (também usada em outras bases, como por exemplo, na base decimal), podemos afirmar, sem exceções, que os elementos do Conjunto de Cantor são os números do intervalo $I = [0, 1]$ cuja representação na base 3 só contém os algarismos 0 e 2.*

Mostraremos que $0,22222\dots=1$ em base 3:

Se

$$x = 0, 22222\dots \tag{2.1}$$

Multiplicando por 10 em base 3, podemos dizer que:

$$3x = 2, 22222\dots \tag{2.2}$$

E subtraindo a igualdade (2.1) da igualdade (2.2), temos:

$$3x = 2, 22222\dots$$

⁴ Escritos em base três.

$$-x = -0,22222\dots$$

Resultando em:

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Observação 2.4. O Conjunto de Cantor pode ser representado, então, como o conjunto de todas as sequências dos algarismos 0 e 2 escritos em base 3.

Nos termos da Proposição 2.2 podemos descrever a auto similaridade como:

Proposição 2.5. Seja C_0 um subconjunto do Conjunto de Cantor \mathcal{C} formado exatamente pelos elementos deste conjunto que estão contidos em um intervalo $[a, b]$, onde a é escrito em base três, utilizando somente os algarismos 0 e 2 com um número finito⁵ de casas depois da vírgula, $a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ e $b = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n 222 \dots$. Então, a transformação afim $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ definida por

$$f(x) = (10_3)^n(x - a)$$

é uma bijeção.

Demonstração. A função $f(x)$ é uma bijeção, pois:

- É injetiva: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow (10_3)^n(x - a) = (10_3)^n(y - a) \Leftrightarrow x - a = y - a \Leftrightarrow x = y$
- É sobrejetiva: Seja $y \in \mathcal{C}$, então $\frac{y}{(10_3)^n} \in (0; 0,00\dots02222\dots) \Rightarrow \frac{y}{(10_3)^n} + a \in (a; a + 0,00\dots02222\dots) = (0, a_1 a_2 \dots a_n; 0, a_1 a_2 \dots a_n 222 \dots) = (a; b)$ e para $x = \frac{y}{(10_3)^n} + a$ temos

$$f(x) = \dots = y$$

Logo, a função é bijetora. □

Lema 2.6. A cada iteração o comprimento do conjunto resultante diminui em $\frac{1}{3}$.

Demonstração. De fato, o Conjunto de Cantor é dividido na n -ésima iteração por 2^n segmentos. O comprimento de cada um desses segmentos da n -ésima etapa da construção de Cantor é $\frac{1}{3^n}$. Tomemos então um segmento qualquer $K \subset \mathcal{C}$ de comprimento $\frac{1}{3^n}$. Basta, agora, pegarmos a $(n + 1)$ -ésima iteração desse conjunto e veremos que o segmento K terá comprimento $2 \frac{1}{3^{n+1}}$, retirando assim na $(n + 1)$ -ésima iteração $\frac{1}{3^{n+1}}$.

Portanto, a cada nova iteração, o Conjunto de Cantor diminui:

$$\frac{1}{3^{n+1}} 3^n = \frac{3^n}{3^n \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

□

⁵ Note que os zeros a direita podem ocorrer um número finito de vezes e fazem diferença na escolha do par a, b .

Proposição 2.7. *O Conjunto de Cantor não é vazio.*

Demonstração. Pela proposição 2.2, segue que todo número do intervalo $I = [0, 1]$ cuja expansão ternária contém somente os dígitos 0 ou 2 pertencem ao Conjunto de Cantor. Consequentemente garantimos, por exemplo, $\frac{1}{4} = (0, 0202020202\dots)_3 \in \mathcal{C}$. Logo, $\mathcal{C} \neq \emptyset$. \square

Lema 2.8. *Nenhum segmento de reta está contido no Conjunto de Cantor.*

Demonstração. Conforme (KARAS, 2005), ao tentarmos encaixar em \mathcal{C} , algum intervalo de comprimento $c > 0$, por menor que seja c , não conseguiremos, pois o comprimento dos intervalos no Conjunto de Cantor tende a zero. O comprimento de um intervalo na n -ésima etapa da construção de Cantor é $\frac{1}{3^n}$. Tomemos então um intervalo qualquer $W \subset [0, 1]$ de comprimento $c > 0$ e tentamos encaixá-lo em \mathcal{C} . Para tanto, basta tomarmos n tal que $(\frac{1}{3^n}) < c$ e assim o conjunto W não estará após a n -ésima iteração da construção do Conjunto de Cantor. \square

Exemplo 2.9. *Podemos observar que, se somarmos o tanto que se tira em cada etapa, ou seja, o comprimento do que jogamos fora, temos:*

$$\frac{1}{3} + 2\frac{1}{9} + 4\frac{1}{27} + 8\frac{1}{81} + 16\frac{1}{243} + \dots$$

Que pode ser escrito como:

$$\sum_{i=1}^n \frac{2^{i-1}}{3^i}$$

Essa soma infinita de uma progressão geométrica de razão menor do que 1 e cujo valor pode ser diretamente calculado é igual a 1. Se quisermos, porém, podemos aproximar, passo a passo, esse resultado, calculando cada vez mais termos desta soma e obtendo valores cada vez mais perto de 1. Veja os valores da soma para 1,2,3,10,20,50 e 100 termos respectivamente:

0,33333333333333333333333333333333

0,55555555555555555555555555555556

0,703703703703703703703703703704

0,982658470084167386407898524954

0,999699271340178282505744180080

0,99999998431671454516041377666

0,99999999999999999999999999999999

Finalmente, depois da construção completa do Conjunto de Cantor, obtemos que o comprimento da soma do tudo que se retira (o verdadeiro tamanho retirado) é o tudo que existia no início, ou seja, igual a 1.

Uma das propriedades mais famosas do conjunto é que ele não é enumerável.

Proposição 2.10. *O Conjunto de Cantor não é enumerável.*

Demonstração. Sejam a_1, a_2, a_3, \dots uma sequência de números do Conjunto de Cantor e a_{ij} seus respectivos algarismos depois da vírgula em base três:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \dots \\ a_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots \\ a_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Deste modo $a_{ij} \in \{0, 2\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por outro lado vemos que o número $y = 0, y_1y_2y_3 \dots$ definido por

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_{ii} = 2, \\ 2, & \text{se } a_{ii} = 0, \end{cases}$$

está no Conjunto de Cantor, pois é representado somente com os algarismos 0 e 2 em base três. Contudo, y não está na sequência a_1, a_2, a_3, \dots porque $y \neq a_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ devido ao fato de $y_i \neq a_{ii}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Assim, nenhuma sequência de números no Conjunto de Cantor poderá conter todos os números do conjunto, atribuindo-lhe a característica de não enumerável. \square

2.3 A CURVA DE KOCH

Niels Fabian Helge Von Koch nasceu em 25 de janeiro de 1870 em Estocolmo, Suécia, e foi um dos primeiros a descrever uma curva Fractal. A chamada "Curva de Koch" foi descrita em 1904 e foi um dos primeiros exemplos de uma curva contínua sem tangentes.

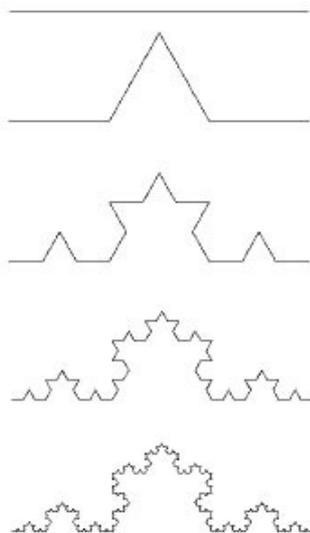
Para a construção da Curva de Koch, inicia-se com um segmento de tamanho qualquer que novamente é dividido em três partes iguais. É preciso agora substituir o terço médio desse segmento por dois segmentos de mesmo tamanho que o terço médio, formando um triângulo equilátero sem a base. Repetindo esse processo, na próxima etapa, com os quatro segmentos, obtem-se dezesseis segmentos, cada vez menores. A Curva de Koch é a curva obtida após infinitas iterações desse processo. Observamos as primeiras iterações na figura 7.

Formalmente, podemos defini-la:

Definição 2.11. *A Curva de Koch é o conjunto obtido, a partir de um segmento de reta, ao fixar um dos lados do segmento de reta, e iterar infinitas vezes o seguinte processo:*

1. *divide-se cada um dos segmentos de reta formados na iteração anterior em três segmentos de igual comprimento;*

Figura 7 – Algumas etapas na construção da Curva de Koch



2. *desenha-se triângulos equiláteros, de modo que todos estejam do mesmo lado da poligonal induzido pela escolha inicial, com bases formadas pelos segmentos centrais do primeiro passo;*
3. *apagam-se os segmentos centrais obtidos no passo 1.*

De maneira mais precisa⁶, podemos dizer que um ponto $x \in \mathbb{R}^2$ está na Curva de Koch se, e somente se, existir uma sequência (x_n) que converja para x , onde x_n está na poligonal obtida pela n -ésima iteração do processo acima para cada $n \in \mathbb{N}$.

Seguimos descrevendo várias propriedades da Curva de Koch. Em particular, veremos abaixo que a curva possui as principais características de um Fractal, como:

1. Auto semelhança: em qualquer trecho da Curva de Koch, não importando quão pequeno ele é, encontramos cópias reduzidas do conjunto todo. Vê-se essa propriedade preliminarmente no fato que a poligonal obtida numa iteração contém quatro cópias reduzidas da poligonal obtida na iteração anterior.
2. Estrutura fina: não importa o quanto ampliamos a Curva de Koch, a quantidade de detalhes que vemos continua sendo grande.
3. Fácil construção: como vimos na figura 7, o processo de obtenção da curva é simples com apenas três passos que, contudo, são repetidos infinitas vezes.
4. Difícil descrição Matemática: apesar da facilidade da construção, não existe uma função analítica que descreva a Curva de Koch.

⁶ Seguindo a ideia do artigo original de Koch, que define a curva que leva seu nome, veja (EDGAR, 2003).

5. A dimensão Fractal não é inteira.

Estudaremos agora, então, algumas das propriedades do Curva de Koch.

Lema 2.12. *Após a n -ésima iteração a poligonal é formada por 4^n segmentos.*

Demonstração. Mostraremos pelo método da indução.

- A curva inicial é formada por apenas $1 = 4^0$ segmentos.
- Como hipótese de indução, assumimos que a k -ésima poligonal é formada 4^k segmentos consecutivos não colineares. O processo, que gera essas poligonais, troca cada segmento por uma poligonal com 4 segmentos, onde segmentos consecutivos não são colineares.

Pela definição da construção da Curva de Koch, ao aplicarmos o processo em dois segmentos consecutivos da k -ésima iteração, apenas o terço médio de cada segmento é modificado, de forma que os terços final e inicial permanecem inalterados e o ângulo entre o terço final de um segmento e o terço inicial do próximo permanecem inalterados, assim eles também não são segmentos consecutivos colineares e a $(k + 1)$ -ésima poligonal tem 4^{k+1} segmentos.

□

Lema 2.13. *A cada iteração o comprimento do conjunto resultante aumenta em $1/3$.*

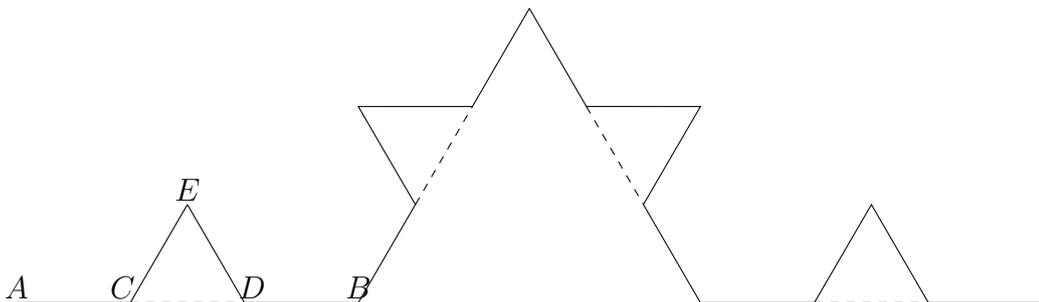
Demonstração. A curva obtida após n iterações sobre o segmento inicial é uma poligonal com 4^n segmentos. O algoritmo é aplicado a cada um dos segmentos.

Seja AB um desses segmentos, de comprimento l_{AB} . Na próxima iteração ele é dividido em três partes, cada uma de comprimento $l_{AB}/3$ e o segmento central CD é removido e, em seu lugar, são colocados os segmentos CE e DE de comprimento $l_{AB}/3$. Desse modo, a poligonal resultante $ACEDB$ tem comprimento:

$$m(AC) + m(CE) + m(ED) + m(DB) = \frac{4}{3}l_{AB}.$$

Como cada segmento da poligonal sofre o mesmo processo a cada iteração e, assim, tem o seu comprimento aumentado em $1/3$, temos o comprimento do todo aumentado em $1/3$.

Figura 8 – Construção da Curva de Koch



□

Proposição 2.14. *O comprimento da Curva de Koch tende ao infinito.*

Demonstração. Seja l o comprimento do segmento inicial. Considerando que o comprimento para um dado nível é $\frac{4}{3}$ do nível anterior, demonstra-se, por indução, que o comprimento da curva no nível n é $\left(\frac{4}{3}\right)^n l$, ou seja, de um nível para outro, o comprimento é multiplicado pelo fator $\frac{4}{3}$.

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty,$$

tem-se, assim, um comprimento que pode ser tão grande quanto desejarmos ao aumentarmos o número de iterações do processo. □

Para representarmos os elementos da Curva de Koch, escolhemos o intervalo $[0, 1]$ como segmento inicial.

Proposição 2.15. *A cada iteração obtemos 4 cópias da poligonal da iteração anterior, com cada uma das cópias reduzidas por uma homotetia de razão um terço no plano.*

Demonstração. Mostraremos pelo método da indução.

- Pela definição 3.11, temos um segmento de reta e este é dividido em 3 partes iguais, sendo suprimido o terço médio e no lugar acrescentado mais dois segmentos de reta. Assim, a primeira iteração gera 4 cópias do segmento inicial.
- Assumimos, como hipótese de indução, que a poligonal da k -ésima iteração é formada por 4 cópias da poligonal da $(k - 1)$ -ésima iteração.

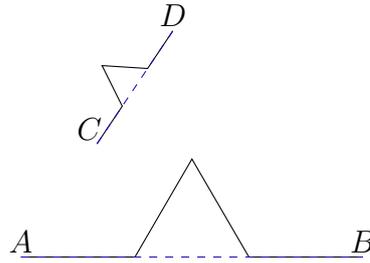
Note que aplicar uma iteração na poligonal da k -ésima iteração é o mesmo que aplicar uma iteração em cada uma das 4 cópias da poligonal da $(k - 1)$ -ésima iteração. Isto ocorre da forma citada, pois o processo que define estas poligonais é aplicado a cada segmento, sem depender do todo. Desta forma, a poligonal da $(k + 1)$ -ésima iteração é formada por 4 cópias da poligonal da k -ésima iteração.

□

Definição 2.16. *Um movimento rígido é qualquer transformação afim gerada pela composição finita de rotações, translações e reflexões.*

Vamos mostrar que a única coisa alterada entre curvas de Koch geradas por segmentos distintos é o tamanho. Para isso, precisaremos de um lema auxiliar:

Figura 9 – A primeira iteração em dois segmentos



Observação 2.17. Sejam AB e CD segmentos de comprimento a e b respectivamente. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a composição de um movimento rígido com uma homotetia em algum ponto do plano, de modo que f é uma bijeção do segmento AB sobre o segmento CD , com A sobre C e de forma que o lado fixado para gerar a curva seja o mesmo. Se P_{AB}^1 e P_{CD}^1 são as poligonais obtidas por uma iteração do processo que gera a Curva de Koch, então a função

$$f|_{P_{AB}^1} : P_{AB}^1 \rightarrow P_{CD}^1,$$

é uma bijeção.

Isso segue do fato que movimentos rígidos e homotetias preservam ângulos e retas.

Proposição 2.18. Sejam AB e CD segmentos de comprimento a e b respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o movimento rígido que leva o segmento AB sobre o segmento CD , com A sobre C e de forma que o lado fixado para gerar a curva seja o mesmo. Além disso seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a homotetia de razão $\frac{b}{a}$ e centro em C . Se K_{AB} e K_{CD} são as Curvas de Koch produzidas a partir dos segmentos AB e CD respectivamente, então a função $f := H \circ T : K_{AB} \rightarrow K_{CD}$, é uma bijeção.

Demonstração. Vamos mostrar por indução que f é uma bijeção entre as k -ésimas poligonais obtidas a partir de cada segmento.

- A transformação afim T leva o segmento AB no segmento $A'B'$, de forma que $A' = C$ e B' está na semirreta \overrightarrow{CD} . Como movimentos rígidos preservam distâncias, o comprimento de $A'B'$ é a . Então a homotetia H leva o segmento $A'B'$ no segmento $A''B''$ de forma que $A'' = A' = C$ e o comprimento de $A''B''$ é

$$a \frac{b}{a} = b.$$

Assim, CD e $A''B''$ são segmentos de mesma origem, sobre a mesma semirreta e de mesmos comprimento. Portanto, CD e $A''B''$ são idênticos.

- Assumimos, como hipótese de indução, que a função f é uma bijeção entre as poligonais P_{AB}^k e P_{CD}^k , onde P_{AB}^k e P_{CD}^k são as k -ésimas poligonais obtidas a partir dos segmentos AB e CD respectivamente.

Em particular, cada um dos 4^k segmentos da k -ésima iteração sobre AB é levado, através de uma bijeção, sobre um dos 4^k segmentos da k -ésima iteração de CD . Contudo, aplicar a $(k + 1)$ -ésima iteração no segmento AB é o mesmo que aplicar uma iteração em cada um dos 4^k segmentos da k -ésima iteração. A observação 2.17 garante que a mesma função f é uma bijeção entre as poligonais obtidas por uma iteração nos respectivos segmentos.

Vamos mostrar que f também é uma bijeção entre as curvas de Koch K_{AB} e K_{CD} .

Em primeiro lugar, f associa a cada ponto de K_{AB} um ponto de K_{CD} . De fato: um ponto P está em K_{AB} se, e somente se, existir uma sequência P_k de pontos tais que P_k está na k -ésima poligonal gerada a partir de AB e $\lim P_k = P$. Como f é uma bijeção, essa sequência define uma sequência de pontos $f(P_k)$, onde $f(P_k)$ está na k -ésima poligonal gerada a partir de CD . Todavia, f é a composição de um movimento rígido com uma homotetia e, em particular, é contínua. Assim, $f(P_k)$ converge para $f(P)$ e, pela definição da Curva de Koch, este limite está em K_{CD} . Analogamente, qualquer ponto de K_{CD} é levado por f^{-1} em um ponto de K_{AB} .

Em segundo lugar, f associa pontos distintos de K_{AB} a pontos distintos de K_{CD} . Como f é a composição de um movimento rígido (que preserva a distância) com uma homotetia de razão $\frac{b}{a}$, temos que

$$d(P, Q) > 0 \Rightarrow d(f(P), f(Q)) = \frac{b}{a}d(P, Q) > 0.$$

Deste modo $P \neq Q \Rightarrow f(P) \neq f(Q)$. □

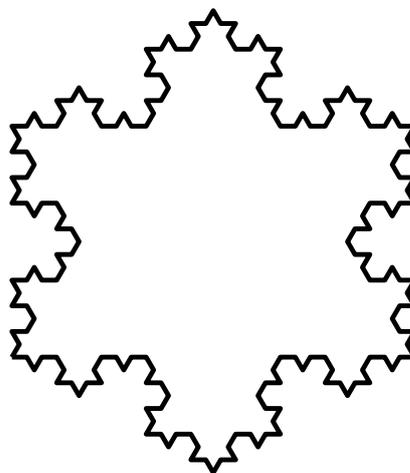
Podemos compreender esta última proposição como a presença de uma estrutura fina na Curva de Koch, pois qualquer seção da curva apresenta tantos detalhes quanto a curva como um todo.

Observação 2.19. Foge do escopo deste trabalho mostrar que a Curva de Koch é uma curva contínua que não apresenta reta tangente em nenhum ponto⁷.

Esta curva deu origem a outro Fractal chamado "flocos de neve" ou "ilha de Von Koch". Sua construção é semelhante, mas se inicia com um triângulo equilátero ao invés de um segmento de reta conforme a figura 10. Nas palavras de Mandelbrot, o "flocos de neve é um modelo grosseiro, mas vigoroso de uma linha costeira".

⁷ Vide o artigo original de Koch em (EDGAR, 2003)

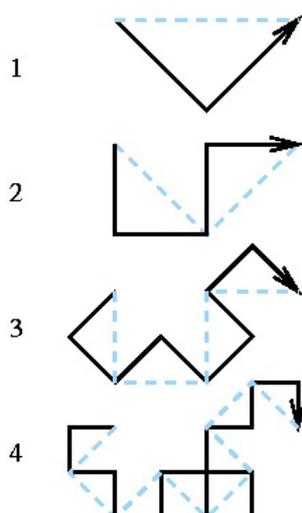
Figura 10 – Floco de neve de Koch



2.4 A CURVA DO DRAGÃO

A Curva de Dragão, também conhecido como Curva de (ou do) Dragão Harter-Heighway ou Dragão “Jurassic Park”, foi criada pelos cientistas da NASA John Heighway, Bruce Banks e William Harter, e é citada em uma edição da revista Scientific American por Martin Gardner na década de 60, onde era aplicada em jogos matemáticos.

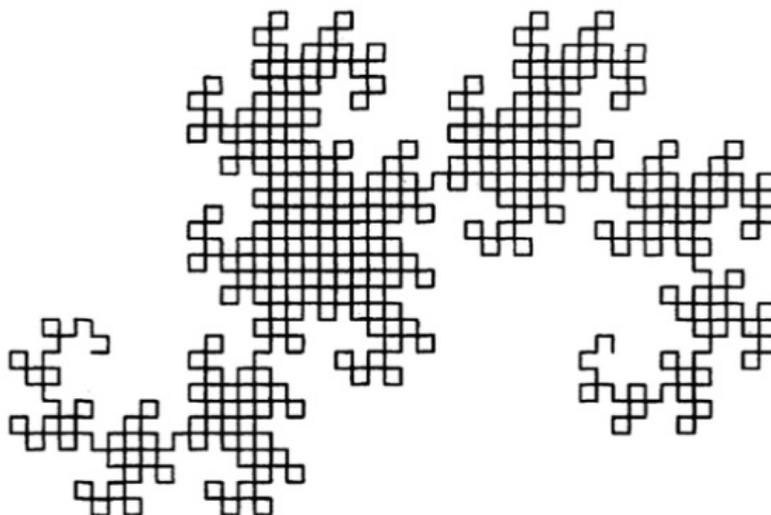
Figura 11 – Iterações da Curva do Dragão



A medida em que a poligonal é iterada mais e mais vezes, uma curva conhecida como *Curva do Dragão* é construída.

Antes de introduzirmos uma definição Matemática da Curva do Dragão, vejamos como ela surge naturalmente do processo de dobrar uma tira de papel sucessivamente.

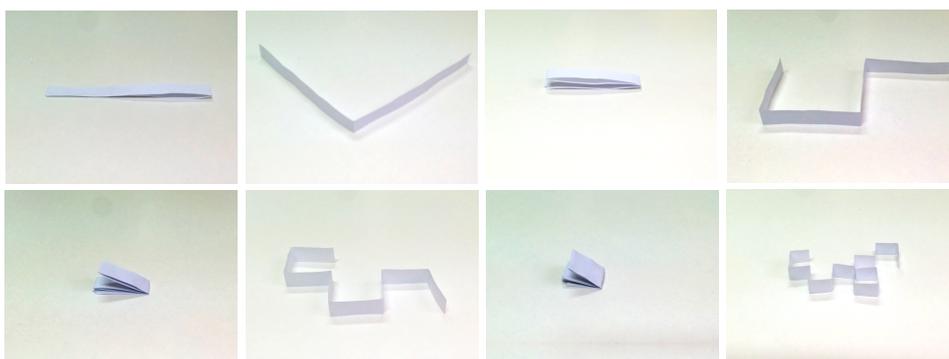
Figura 12 – A Curva do Dragão



Definição 2.20 (Informal). *A k -ésima poligonal da Curva do Dragão pode ser obtida através de dobraduras sucessivas de uma tira de papel do seguinte modo:*

1. *Seguramos uma ponta da tira de papel em cada mão e dobramos a tira ao meio k -vezes, sucessivamente, sempre levando a parte do lado direito sobre a parte do lado esquerdo.*
2. *Abre-se a tira de papel, mantendo ângulos retos em cada uma das dobras formadas.*

Figura 13 – Poligonais a partir de uma tira de papel



Fonte:(ADAMES M. R.; DALPIAZ, 2016)

Observação 2.21. Uma das primeiras coisas que notamos é que as poligonais parecem encolher, o que não é possível por que qualquer delas têm o mesmo comprimento que a tira de papel original.

Para compreendermos como definir matematicamente a Curva do Dragão, precisamos entender algumas das propriedades da sequência de poligonais obtidas pelo processo acima. Os próximos lemas trazem essas propriedades e as demonstrações delas.

Lema 2.22. *O número de segmentos da poligonal da k -ésima iteração é 2^k e o número de vértices é $2^k + 1$.*

Demonstração. Mostraremos pelo método da indução.

- O segmento inicial é formado por apenas $1 = 2^0$ segmento e seus vértices por $2 = 2^0 + 1$.
- Como hipótese de indução, assumimos que a k -ésima poligonal é formada por 2^k segmentos e $2^k + 1$ vértices. Para ter a quantidade de segmentos da $(k + 1)$ -ésima iteração, dobramos a tira de papel $(k + 1)$ vezes. Isso é mesmo que dobrá-la k vezes e, em seguida, dobrá-la mais uma vez. Deste modo, cada segmento na k -ésima iteração será substituído por dois segmentos. Como temos 2^k segmentos na k -ésima iteração, teremos

$$2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

segmentos na iteração $k + 1$. Como a tira de papel é aberta de forma que os ângulos entre segmentos consecutivos são sempre retos, temos que dois segmentos consecutivos não podem ser colineares. Assim, o número de segmentos da $(k + 1)$ -ésima poligonal é 2^{k+1} . Além disso, o número de vértices de uma poligonal com 2^{k+1} segmentos é $2^{k+1} + 1$.

□

Lema 2.23. *O comprimento de cada segmento cai pela metade a cada iteração. Dessa forma, o comprimento dos segmentos na k -ésima iteração é $l(1/2)^k$, onde l é o comprimento do segmento inicial.*

Demonstração. Mostraremos pelo método da indução.

- A curva inicial é formada por apenas um segmento, que tem comprimento $l = l \left(\frac{1}{2}\right)^0$.
- Como hipótese de indução, assumimos que um segmento da k -ésima poligonal possui tamanho $l \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Para formar a poligonal da iteração $k + 1$, dobramos a tira de papel ao meio $k + 1$ vezes. Isso é o mesmo que dobrá-la k vezes e, em seguida, dobrá-la mais uma vez. Assim, cada um dos segmentos presentes na k -ésima iteração é dobrado ao meio e, dessa forma, os segmentos resultantes têm a metade do comprimento dos segmentos originais, que é:

$$l \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

□

Proposição 2.24. *Sejam P_{k+1} a poligonal obtida pela $(k + 1)$ -ésima iteração e $V^1, V^2, V^3, V^4, \dots, V^{2^{k+1}-1}, V^{2^{k+1}}, V^{2^{k+1}+1}$ seus $2^{k+1} + 1$ vértices. Então a poligonal O_{k+1} formada pelos vértices de índices ímpares, $V^1, V^3, \dots, V^{2^{k+1}-1}, V^{2^{k+1}+1}$ é uma cópia da poligonal P_k , obtida*

na k -ésima iteração, encolhida por uma homotetia de razão $1/\sqrt{2}$. Além disso, os vértices pares estão alternadamente em lados opostos de O_{k+1} .

Demonstração. Ilustramos a proposição na figura 14. A poligonal O_{k+1} , formada pelos índices ímpares de P_{k+1} , tem $2^k + 1$ vértices e 2^k segmentos, assim como P_k .

Além disso, todos os segmentos de O_{k+1} são hipotenusas de triângulos retângulos, cujos catetos são segmentos de P_{k+1} . Como todos os segmentos de P_{k+1} têm comprimento $l(1/2)^{k+1}$, o Teorema de Pitágoras garante que o comprimento dos segmentos de O_{k+1} têm comprimento:

$$\sqrt{2} \left[l \frac{1}{2^{k+1}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[l \frac{1}{2^k} \right],$$

e, portanto, é $1/\sqrt{2}$ vezes o comprimento de cada segmento da k -ésima poligonal.

Os ângulos (orientados) entre segmentos consecutivos de O_{k+1} são retos e têm o mesmo sinal que os respectivos ângulos de P_k . De fato, dobrar a tira de papel $k + 1$ vezes é o mesmo que dobrá-la k vezes e, então, dobrá-la mais uma vez. Desse modo, adicionamos um vértice entre cada um dos vértices de P_k . Os vértices assim adicionados são justamente os vértices de índice par, pois o primeiro vértice é marcado pelo início da tira, e, portanto, é comum a ambas.

Por outro lado, ao dobrarmos a tira de papel k -vezes, obtemos uma pilha com 2^k segmentos. Entretanto, dois segmentos consecutivos na pilha estão sempre em orientação contrária, isto é, se um começa na esquerda e termina na direita, o próximo começa na direita e termina na esquerda. Nesse sentido, ao dobrar a pilha de segmentos mais uma vez, para obter P_{k+1} , dobramos cada um destes segmentos para o mesmo lado e a orientação contrária dos segmentos consecutivos faz com que os novos ângulos retos tenham orientação contrária. Assim, dois triângulos consecutivos $\triangle V_{2n-1}V_{2n}V_{2n+1}$ e $\triangle V_{2n+1}V_{2n+2}V_{2n+3}$ estão em lados opostos de O_{k+1} , de modo que o ângulo entre dois vértices consecutivos de O_{k+1} , deve satisfazer:

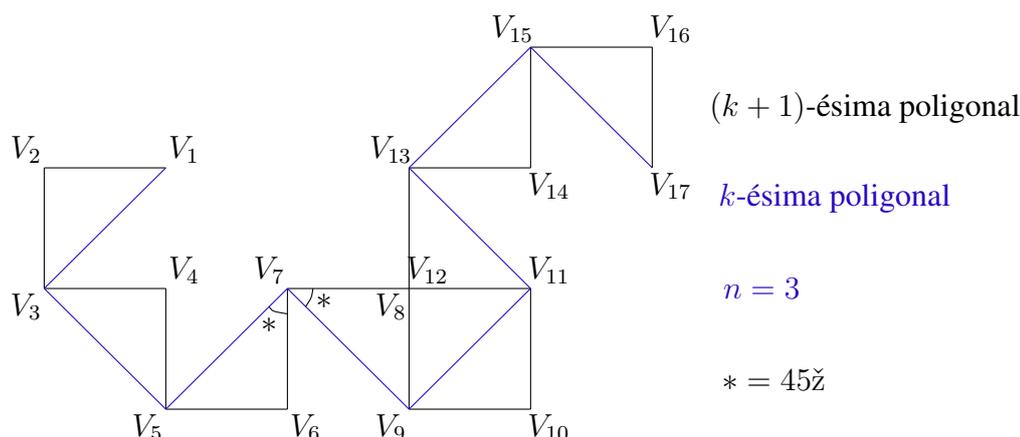
$$\begin{aligned} \sphericalangle V_{2n-1}V_{2n+1}V_{2n+3} &= \sphericalangle V_{2n-1}V_{2n+1}V_{2n} + \sphericalangle V_{2n}V_{2n+1}V_{2n+2} + \sphericalangle V_{2n+2}V_{2n+1}V_{2n+3} \\ &= \sphericalangle V_{2k}V_{2k+1}V_{2k+2}, \end{aligned}$$

pois $\sphericalangle V_{2n-1}V_{2n+1}V_{2n} = \pm 45^\circ$ e $\sphericalangle V_{2n+2}V_{2n+1}V_{2n+3} = \mp 45^\circ$. Contudo o ângulo $\sphericalangle V_{2n}V_{2n+1}V_{2n+2}$, no vértice V_{2n+1} de índice ímpar, já havia sido formado na k -ésima dobra da tira e é o ângulo $\sphericalangle V_nV_{n+1}V_{n+2}$ de P_k . Por outro lado, V_{2n+1} é o $(n + 1)$ -ésimo vértice de O_{k+1} .

Por conseguinte, P_k e O_{k+1} são, ambas, poligonais com 2^k segmentos e com os respectivos ângulos orientados idênticos e, assim, são semelhantes. A razão de semelhança é a mesma que a razão entre os segmentos: $1/\sqrt{2}$. \square

Podemos utilizar o teorema acima para dar uma definição Matemática distinta da Curva do Dragão:

Definição 2.25. *A Curva do Dragão pode ser construída a partir de um segmento de reta, após infinitas aplicações sucessivas do seguinte processo:*

Figura 14 – A k -ésima poligonal na $(k + 1)$ -ésima iteração

1. Tomando cada segmento da poligonal como base, desenham-se triângulos retângulos isósceles sobre estes segmentos, de modo que as alturas dos triângulos estejam sucessivamente à direita e à esquerda,⁸ começando pela direita.
2. Apagam-se os segmentos que formam as bases dos triângulos retângulos no primeiro passo.

De maneira mais precisa⁹, podemos dizer que um ponto $x \in \mathbb{R}^2$ está na Curva do Dragão se, e somente se, existir uma sequência (x_n) que convirja para x , onde x_n está na poligonal obtida pela n -ésima iteração do processo acima para cada $n \in \mathbb{N}$.

Esta curva possui as principais características associadas aos Fractais, como:

1. Autossemelhança: é possível encontrar em cada nível da Curva do Dragão duas cópias da figura no nível anterior, em tamanho reduzido de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, sendo que, para cada uma dessas duas partes, ocorre o mesmo. Desse modo, vemos que a autossemelhança é encontrada em cada parte da figura, não importando qual está sendo observada.
2. Estrutura fina: não importa o quanto ampliamos a Curva do Dragão, a quantidade de detalhes que vemos continua sendo grande.
3. Fácil construção: como vimos na figura 9, o processo de obtenção da curva é simples, feito apenas com dobraduras repetidas indefinidamente.
4. Difícil descrição Matemática: apesar da facilidade da construção, não existe uma função analítica simples que descreva a Curva do Dragão.

Estudamos agora, então, algumas das propriedades da Curva do Dragão, utilizando a definição Matemática da curva.

⁸ Percorrendo a poligonal, do ponto inicial do segmento inicial ao ponto final do segmento inicial, que estão presentes em todas as iterações.

⁹ Seguindo a ideia do artigo original de Koch, que define a curva que leva seu nome, veja (EDGAR, 2003).

Proposição 2.26. *O comprimento da Curva do Dragão tende ao infinito.*

Demonstração. Para cada segmento da poligonal de comprimento l , faremos um triângulo retângulo isósceles e seus catetos ficarão com razão $\frac{l}{\sqrt{2}}$. Assim, somando o comprimento desses dois catetos e retirando o segmento l , temos:

$$\frac{l}{\sqrt{2}} + \frac{l}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} = l \cdot \sqrt{2}$$

Dado que em cada iteração a poligonal é aumentada por um fator de razão $\sqrt{2}$. Como o comprimento da poligonal aumenta em $\sqrt{2}$ a cada iteração, segue, por indução, que a n -ésima iteração é uma poligonal de comprimento $l \cdot (\sqrt{2})^n$, onde l é o comprimento do segmento inicial, e:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot (\sqrt{2})^n = \infty$$

□

Observação 2.27. Aplicar k iterações do processo que define a Curva do Dragão no segmento AB é o mesmo que aplicar k iterações do processo ao segmento BA e depois rotacioná-lo a um ângulo de 180° .

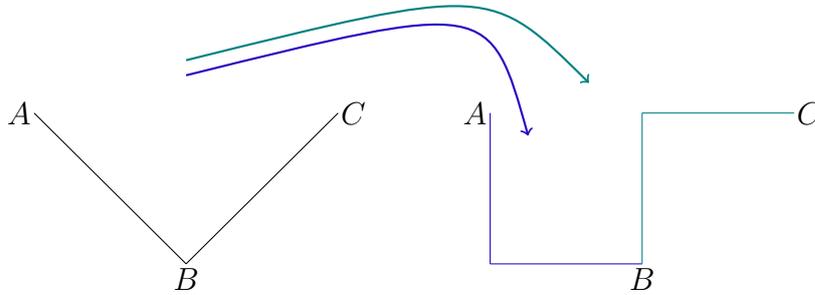
Proposição 2.28. *Sejam AC o segmento inicial e ABC a poligonal de dois segmentos obtida na primeira iteração. Então, para $n \geq 2$, aplicar n iterações no segmento inicial é o mesmo que aplicar $(n - 1)$ iterações nos segmentos ordenados AB e CB . Assim, a n -ésima poligonal é formada por duas cópias, reduzidas por uma homotetia de razão $1/\sqrt{2}$, da $(n - 1)$ -ésima poligonal e unidas por um ângulo de -90° .*

Demonstração. Por indução:

- Vale para " $n=2$ ". De fato, cada um dos dois segmentos que forma a poligonal da primeira iteração tem comprimento $\frac{l}{\sqrt{2}}$, onde l é o comprimento do segmento inicial. Aplicar a segunda iteração significa trocar o segmento AB pelos catetos de um triângulo retângulo isósceles à direita e trocar o segmento BC pelos catetos de um triângulo retângulo isósceles à esquerda. Contudo, a troca do segmento BC é idêntica a trocar o segmento orientado CB pelos catetos de um triângulo retângulo isósceles à direita. Assim, tanto em AB , como em CB , aplicamos uma iteração do processo que gera a Curva do Dragão.
- Seja $n \geq 3$. Suponha que a poligonal obtida na n -ésima iteração sobre AC é formada por $(n - 1)$ -iteraões sobre AB e CB . O número de segmentos da poligonal é 2^n e cada uma das metades terá um número par de segmentos, de modo que o último triângulo na metade gerada por BC será à esquerda; que é o mesmo que começar o processo à direita sobre o segmento CB . Desse modo, aplicar mais uma iteração na n -ésima poligonal é o mesmo que aplicar mais uma iteração sobre a poligonal gerada a partir de AB e mais uma

iteração sobre a poligonal gerada a partir de CB . Contudo, as duas metades são cópias da poligonal obtida na $n - 1$ -ésima iteração. Logo, cada uma das metades será uma cópia da poligonal obtida na n -ésima iteração.

Figura 15 – Cópias consecutivas



OBS: Pela figura 10, podemos observar que cada iteração forma um triângulo retângulo isósceles, cuja hipotenusa tem comprimento l e cujos catetos $\frac{l}{\sqrt{2}}$. \square

Sejam AC o segmento inicial e ABC a poligonal de dois segmentos obtida na primeira iteração. Então, a composição da rotação em torno de A de -45° , que denotamos R_{-45}^A , com a homotetia de centro em A e razão $1/\sqrt{2}$, que denotamos $H_{1/\sqrt{2}}^A$, leva AC sobre AB e preserva o lado direito de AC sobre o lado direito de AB . De maneira análoga, a composição da rotação em torno de A de -135° , que denotamos R_{-135}^A , com a translação que leva A em C , T_C^A e com homotetia de centro em C e razão $1/\sqrt{2}$, que denotamos $H_{1/\sqrt{2}}^C$, leva AC sobre CB e preserva o lado direito de AC sobre o lado direito de CB .

Lema 2.29. *A composição*

$$M_1 := H_{1/\sqrt{2}}^A \circ R_{-45}^A$$

leva a k -ésima iteração sobre AC na k -ésima iteração sobre AB . A composição

$$M_2 := H_{1/\sqrt{2}}^C \circ T_C^A \circ R_{-135}^A$$

leva a k -ésima iteração sobre AC na k -ésima iteração sobre CB .

Demonstração. Segue da proposição 2.28 junto com o fato de homotetias, rotações e translações, preservarem ângulos. \square

Observação 2.30. M_1 e M_2 são bijeções e, portanto, invertíveis.

Proposição 2.31. *A Curva do Dragão é formada por duas cópias de si mesma, reduzidas por uma homotetia de razão $1/\sqrt{2}$.*

Demonstração. Sejam A , B e C como na Proposição 2.28. Cada ponto P na Curva do Dragão gerada a partir de AC é o limite de uma sequência de pontos P_k , onde P_k está na k -ésima poligonal gerada a partir de AC . Assim $M_1(P_k)$ e $M_2(P_k)$ geram sequências de pontos nas k -ésimas

poligonais geradas a partir de AB e CB respectivamente. Deste modo $P' := \lim M_1(P_k)$ e $P'' := \lim M_2(P_k)$ são pontos na Curvas do Dragão geradas a partir de AB e CB respectivamente. Contudo M_1 e M_2 são contínuas e $P' = M_1(P)$, $P'' = M_2(P)$. Assim M_1 e M_2 levam a Curva do Dragão gerada a partir de AC , nas Curvas do Dragão geradas a partir de AB e CB , respectivamente.

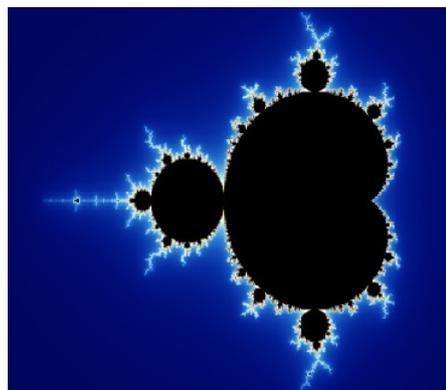
De modo análogo, as inversas M_1^{-1} e M_2^{-1} levam as Curvas do Dragão geradas a partir de AB e CB na Curva do Dragão gerada a partir de AC . \square

Observação 2.32. A Proposição 2.28 pode ser utilizada para gerar muitas iterações das poligonais que geram a Curva do Dragão, se realizarmos adicionalmente, em cada iteração, uma homotetia de razão $\sqrt{2}$. Deste modo as duas cópias da k -ésima iteração na $k + 1$ -ésima iteração preservarão o tamanho da original e precisaremos, a cada nova iteração, apenas copiar duas vezes a poligonal da iteração anterior.

2.5 O CONJUNTO DE MANDELBROT

Citamos, apenas à caráter de ilustração, o Conjunto de Mandelbrot¹⁰, em sua representação gráfica no espaço, pode ser dividido em um conjunto infinito de figuras ligadas uma as outras, sendo a maior delas um cardioide localizado ao centro do plano. Existe uma infinidade de quase-círculos que tangenciam o cardioide e variam de tamanho com raio tendendo a zero. Cada um desses círculos tem seu próprio conjunto infinito de pequenos círculos cujos raios também tendem a zero. Esse processo se repete infinitamente, gerando a figura Fractal 16.

Figura 16 – O conjunto de Mandelbrot



O conjunto de Mandelbrot é um Fractal particularmente interessante que se tornou popular fora da Matemática devido à sua beleza estética e ao fato da sua estrutura complexa resultar de um algoritmo de construção simples.

¹⁰ Foge do escopo desse trabalho, relatar e demonstrar propriedades desse conjunto. Apesar disso citamos o Conjunto de Mandelbrot por ser o conjunto que leva o nome do precursor do conceito de Fractal.

A expressão Matemática necessária para a produção das imagens resume-se a uma fórmula iterativa no plano dos números complexos $z = x + iy$:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

com $c = a + ib$ uma constante complexa e partindo de um certo valor de z_0 inicial. O conjunto de Mandelbrot é o conjunto dos valores de c tais que, para $z_0 = 0$, a sequência de valores definida recursivamente permanece limitada. Para mais sobre esse tipo de construção, sugerimos (KARAS, 2005).

2.6 DIMENSÃO DE HOMOTETIA OU DE AUTOSSIMILARIDADE

Nesta seção, será abordada uma das características dos Fractais: um conceito de dimensão Fractal e as formas para se calcular que e compreender melhor o tema.

Na Geometria Clássica, o conceito de dimensão utilizado é Euclidiano. Porém, com figuras geométricas irregulares, como os Fractais, não é sempre possível relacionar dimensões expressas por números naturais. A dimensão Fractal, que é em sua maioria um número real não inteiro, caracteriza a Geometria de um Fractal. O significado desse valor é dizer o quão densamente uma curva Fractal ocupa o plano, ou quanto um sólido Fractal ocupa o espaço em que ele existe. Há casos em que a dimensão Fractal é expressa por um número inteiro, mas se a dimensão não for inteira, significa tratar-se de um Fractal.

Uma das primeiras definições de Fractal foi dada por Mandelbrot em seu livro "The Fractal Geometry of Nature", de 1982: Um Fractal é um conjunto que tem dimensão Hausdorff maior do que a dimensão topológica. Cujos conceitos envolvidos aqui não serão explorados, por irem muito além dos objetivos deste estudo.

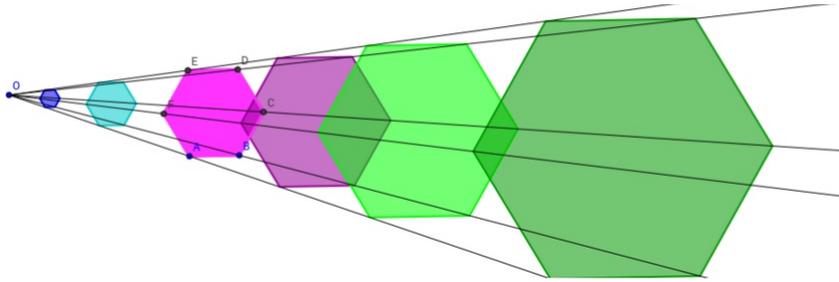
Mandelbrot especificou maneiras de calcular a dimensão fracionada dos objetos através de diversas técnicas, dentre elas a técnica de construção.

Neste trabalho, estudaremos o conceito de dimensão de homotetia ou também chamada de dimensão de autossimilaridade. Fractais gerados por sistemas de funções iterativas, conforme será explanado nas próximas seções, geralmente apresentam uma autossimilaridade. Antes de abordarmos o conceito de dimensão Fractal baseado em mudanças de escala e homotetias, vejamos, como exemplo, a figura 17 conhecida da Geometria plana quando mudanças de escala e homotetias são aplicadas.

Uma maneira de calcular a dimensão de uma figura Fractal é imaginarmos que se temos um segmento de reta, podemos dividi-lo em p partes iguais, semelhantes ao segmento original, porém reduzidas, em uma certa razão de semelhança r . O número n de segmentos obtidos relaciona-se com esta razão da seguinte forma:

$$n = \frac{1}{r}$$

Figura 17 – Homotetia



O segmento AB da figura 18 foi dividido em três partes iguais ($n = 3$), logo a razão de semelhança r é $\frac{1}{3}$.

Figura 18 – Segmento AB dividido



Substituindo $r = \frac{1}{3}$ em $n = \frac{1}{r}$, temos:

$$n = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ partes}$$

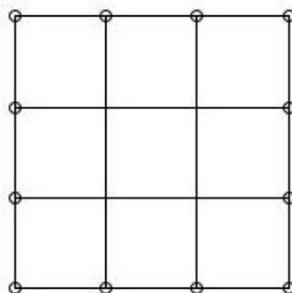
Partindo da mesma ideia, se cada lado de um quadrado for dividido em p partes iguais, obtêm-se p^2 quadrados semelhantes ao original, logo:

$$n = p^2$$

Relacionando r e n do quadrado, tem-se:

$$n = \frac{1}{r^2}$$

Figura 19 – Quadrado dividido



$$\begin{aligned} p &= 3 \\ n &= 9 \\ r &= 1/3 \end{aligned}$$

Substituindo $r = \frac{1}{3}$ em $n = \frac{1}{r^2}$, temos:

$$n = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9 \text{ partes.}$$

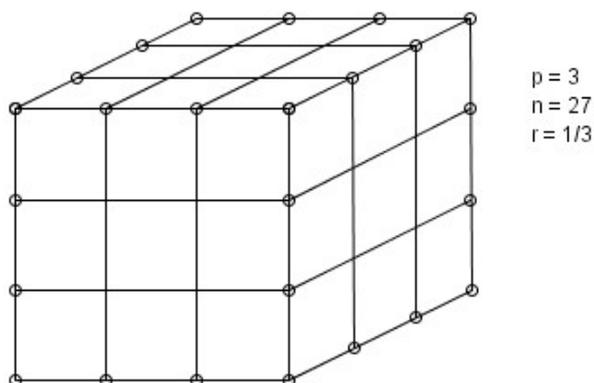
Aumentando a dimensão da Figura 19, temos um cubo (Figura 20) e será feito o mesmo processo em cada face. Percebe-se que:

$$n = p^3$$

Relacionando r e n do cubo, tem-se

$$n = \frac{1}{r^3}$$

Figura 20 – cubo dividido



Substituindo $r = \frac{1}{3}$ em $n = \frac{1}{r}$, temos:

$$n = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = 27 \text{ partes}$$

Assim, concluímos que:

$$n = \frac{1}{r^D} = p^D$$

Em que n é o número de partes divididas da figura ou número de partes que sobrarão da figura em p partes iguais, após uma etapa de iteração do desenho; r é a razão de semelhança; e D é a dimensão espacial. O objetivo é calcular a dimensão D e para tanto a igualdade acima será utilizada.

Como queremos calcular a dimensão D , aplicaremos a função logarítmica (numa base arbitrária) a ambos os membros da igualdade, a fim de obter uma expressão para D :

$$\log n = \log \frac{1}{r^D}$$

A partir da propriedade do quociente de um logaritmo:

$$\log n = \log 1 - \log r^D$$

Sabe-se que $\log 1 = 0$ e pela propriedade do logaritmo de uma potência, tem-se:

$$\log n = -D \cdot \log r$$

Que é o mesmo que:

$$D \cdot \log r = -\log n$$

E finalmente isolando D:

$$D = -\frac{\log n}{\log r} = -\log_r n$$

Podemos, então, dizer que a dimensão de uma figura geométrica clássica pode ser calculada pela divisão de $\log n$, que é o número de partes que a figura terá, por $\log r$, que é a razão de semelhança de homotetia.

Ou, até mesmo pela expressão:

$$D = -\log_r n$$

Essa expressão nos motiva a definir a dimensão para figuras Fractais da mesma forma, porém em sua grande maioria com resultados de dimensões não-inteiros.

Definição 2.33. *Se uma figura contém n cópias de si mesma, reduzidas por uma homotetia de razão r , então dizemos que a dimensão da figura é definida por:*

$$D = -\log_r n$$

Exemplo 2.34. *Como exemplo de figuras com dimensões já conhecidas, podemos citar os exemplos anteriores que tinham razão de homotetia 3:*

- *Dimensão de uma reta: $D = \log_3 3 = 1$*
- *Dimensão de um quadrado: $D = \log_3 9 = 2$*
- *Dimensão de um cubo: $D = \log_3 27 = 3$*

Caso contrário, se uma figura não possuir autossimilaridade estrita, aplicar esse método para o cálculo de dimensão será difícil ou impossível. Para tal situação, existem outros métodos que não serão abordados neste trabalho como o “Método de Contagem de Caixas” que se dá através de processos gráficos ou um método mais complexo e formal chamado “Hausdorff-Besicovitch”.

2.6.1 DIMENSÕES DOS PRINCIPAIS FRACTAIS ESTUDADOS

Exemplo 2.35 (Conjunto de Cantor). *Pela Proposição 3.5, podemos dizer que todos os blocos de pontos restantes no Conjunto de Cantor são pertencentes a algum segmento de reta de alguma iteração anterior.*

Assim, notamos que, no Conjunto de Cantor, a cada nível, ficamos com 2 segmentos dos 3 que foram feitos, sendo eles novamente triseccionados. Logo, $n = 2$. A razão de semelhança desses segmentos com a figura original é $\frac{1}{3}$. Logo, $r = \frac{1}{3}$. Portanto, a dimensão Fractal do Conjunto de Cantor é dada por:

$$D = -\frac{\log n}{\log r} = -\frac{\log 2}{\log \frac{1}{3}} = -\frac{\log 2}{\log 1 - \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63$$

Podemos dizer que ele preenche mais espaço do que um ponto, mas menos espaço do que uma curva de dimensão 1.

Exemplo 2.36 (Curva de Koch). *Pela definição 3.11 que explica a sua criação e descreve também algumas propriedades que essa curva possui dos Fractais, podemos dizer que ela possui 1 segmento de reta que será dividido em 3 segmentos e após uma iteração ela possuirá 4 segmentos de retas. Já a Proposição 3.18 garante a presença de uma estrutura fina, pois qualquer seção da curva apresenta tanto detalhes quanto a curva como um todo.*

Na Curva de Koch, sua dimensão está definida entre 1 e 2, A razão de semelhança desses segmentos com a figura original é $\frac{1}{3}$. Logo, $r = \frac{1}{3}$. Portanto, a dimensão Fractal da Curva de Koch é dada por:

$$D = -\frac{\log n}{\log r} = -\frac{\log 4}{\log \frac{1}{3}} = -\frac{4}{\log 1 - \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$$

A Curva de Koch ocupa mais espaço no plano do que uma Curva que tem dimensão 1, porém menos espaço que um plano que tem dimensão 2.

Exemplo 2.37 (Curva do Dragão). *Pela Proposição 3.31, garante-se que essa curva é formada por duas cópias de si mesma, reduzidas por uma homotetia de razão $\frac{1}{\sqrt{2}}$.*

A razão de semelhança desses segmentos com a figura original é $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Logo, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Portanto, a dimensão Fractal da Curva do Dragão é dada por:

$$D = -\frac{\log n}{\log r} = -\frac{\log 2}{\log \frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{\log 2}{\log 1 - \log \sqrt{2}} = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2}} = 2$$

Como na Curva do Dragão sua dimensão ocupa mais espaço no plano do que uma Curva que tem dimensão 1, porém ocupa todo o espaço que tem dimensão 2.

3 O USO DO SOFTWARE PROCESSING

Este capítulo trata da apresentação de um software livre sobre o qual daremos uma breve explanação, assim como utilizá-lo e exemplos de algumas funções para a iniciação do mesmo.

3.1 O QUE É O PROCESSING?

Inventada por Ben Fry e Casey Reas, Processing é uma linguagem de programação construída a partir de outra linguagem, a Java. Ela foi desenvolvida como uma ferramenta para processamento gráfico em computadores que pudesse ser acessível a pessoas com pouca experiência em programação ou computação. O nome Processing também é utilizado pelo ambiente de desenvolvimento integrado oficial da linguagem, que oferece meios simples para compilar o código fonte dos “desenhos” feitos com a linguagem, projetando-os na tela do computador. O projeto é mantido pela Processing Foundation, fundada em 2012.

3.2 PROCESSING COMO ESPAÇO DE TRABALHO

O funcionamento de Processing é baseado na criação de "esboços", isso é, algoritmos que utilizam funções de desenho para a criação de imagens, que podem ser estáticas ou dinâmicas (interativas ou não). Para tanto, o código fonte precisa ser compilado ("lido" pelo computador). O ambiente de desenvolvimento integrado do Processing é um programa utilizado tanto para edição de códigos em Processing quanto para a compilação e visualização de desenhos. "Esboços" em Processing também podem ser exibidos on-line através do site OpenProcessing (www.openprocessing.org), que oferece um ambiente de desenvolvimento e também funciona como uma comunidade para compartilhamento de “esboços”, e central para aulas que envolvam a linguagem.

3.3 COMO UTILIZAR O OPENPROCESSING?

Ao acessar o site do OpenProcessing, o usuário pode explorar desenhos feitos por outros usuários na aba "browse" ou criar seus próprios esboços clicando em "create a new sketch". A página para a criação de esboços carrega automaticamente com um exemplo, mostrando um desenho dinâmico e interativo, sendo possível visualizar círculos coloridos sendo criados no centro da tela e interagir com o desenho utilizando o mouse. O código que descreve esse esboço pode ser visualizado em uma caixa de texto logo abaixo do desenho. Alterações no algoritmo não surtirão efeito até que o botão “run” seja pressionado, recompilando o código e exibindo o novo desenho.

3.4 FUNÇÕES

O IDE de Processing consegue interpretar a linguagem estruturada com uma gramática formal, possibilitando a escrita de algoritmos com estruturas bem definidas. Um algoritmo é uma rotina contendo variadas instruções, enquanto uma função é uma sub-rotina que participa do algoritmo. As funções descrevem rotinas de uso geral, permitindo que o programador reutilize facilmente instruções que são utilizadas com frequência. Por exemplo, uma operação comum nos algoritmos é achar a raiz-quadrada de um número. Essa operação não é, no entanto, uma ação trivial na programação, já que ela deve ser descrita com uma gramática formal e que possa ser aplicada a uma gama definida de números. Para resolver esse problema, o programador pode definir uma função que receba um número x e aplique o método de Newton para calcular a raiz aproximada desse número.

3.5 DEFININDO FUNÇÕES

Antes que uma função possa ser chamada, é preciso defini-la. Cada linguagem possui uma forma de definir uma função, mas a lógica por trás desse processo é virtualmente sempre a mesma. Cada função precisa de um nome e de uma lista de argumentos que aceitam como entrada. Na linguagem de Processing, também é necessário definir o tipo de valor que será retornado pela função. A função abaixo retorna um valor do tipo inteiro (int) e recebe dois argumentos também do tipo inteiro, x e y . O valor retornado é a soma de x com y . Todo o texto entre as chaves é o “corpo” da função, e é esse texto que determina os passos que caracterizam a rotina da função.

```
int soma (int x, int y){  
  return(x + y)}
```

3.6 USANDO FUNÇÕES

Quando definimos uma função, nenhuma tarefa descrita em seu corpo é executada. A execução da função só acontece quando ela é chamada. Para isso, devemos escrever o nome pelo qual ela foi definida e informar, entre parênteses, os valores dos argumentos que devem ser usados. Para descobrir o valor de $10 + 20$ usando a função `soma()` que definimos, basta usar o comando `soma(10,20)`.

3.7 FUNÇÕES ESPECIAIS DO PROCESSING

Da tela de desenho:

```
void setup(){  
  size(600,600);  
  background(0, 255, 255)}
```

Algumas funções não retornam nenhum valor, apenas realizam as tarefas descritas em seus corpos. Esse é o caso das funções `setup()` e `draw()` do Processing. Essas duas funções são

essenciais para o funcionamento dos desenhos feitos com o Processing. A função `setup()` deve ser definida para a configuração.

Abaixo definimos a função `setup()`, indicando o tamanho da tela como 600x600 pixels com o comando `size()` e mudando a cor de fundo para azul com a função `background()`. A palavra `void` antes do nome da função indica que nenhum valor será retornado.

Figura 21 – Tela



A função `draw()` nos permite fazer os desenhos em si. Ela é definida da mesma forma que a função `setup()`, mas ela possui uma grande diferença: enquanto a `setup` realiza os comandos que estão em seu corpo apenas uma vez (no início da execução do desenho), a `draw()` executa-os várias vezes a cada segundo, até que o desenho seja fechado. Isso permite que os desenhos na tela sejam dinâmicos.

Figura 22 – Função Draw

```
void setup(){
  size(600,600);
  background(0, 128, 255);
}

void draw(){
  noStroke();
  fill(250, 80, 30);
  ellipse(mouseX, mouseY, 20, 20);
}
```

Esse pequeno algoritmo já nos permite desenhar na tela um círculo vermelho nas coordenadas em que o mouse se encontra. Primeiramente, o desenho é configurado com os comandos da função `setup()` e em seguida, o algoritmo do corpo de `draw()` é executado pelo programa e seu resultado é mostrado na tela. Isso é feito várias vezes por segundo, o que dá a impressão que o mouse está deixando um “rastro” de círculos.

Figura 23 – Rastro



3.8 EXEMPLOS DE ALGORITMOS

Abaixo, mostraremos alguns algoritmos criados conforme linguagem Processing já comentada nos itens anteriores e suas respectivas imagens geradas. Para o usuário que desejar repetir qualquer imagem abaixo, basta digitalizar no software o algoritmo que desejar. Lembrando que existem inúmeros códigos abertos no site.

3.8.1 CONJUNTO DE CANTOR

Para a representação do Conjunto de Cantor no Processing, é necessário apenas o conhecimento básico sobre o funcionamento de linhas no programa e sobre funções recursivas. É necessário trabalhar com o dimensionamento e reposicionamento das linhas, mas como, nesse caso, não há muita complexidade envolvida nesse processo, não há a necessidade do uso de funções de transformações; essas alterações podem ser feitas diretamente com a manipulação dos argumentos que representam as coordenadas. Um exemplo simplificado da manipulação necessárias para a criação do Conjunto de Cantor pode ser vista a seguir.

```
void setup(){
  size(600,60);
}
int len = 600;
int dist = 50;
void draw(){
  strokeWeight(3);
  line(0, 10, len, 10);
  line(0, dist, len/3, dist);
  line(len * 2/3, dist, len, dist);
}
```

Retornando:

Primeiramente, são definidas duas variáveis: len (tamanho da linha) e dist (distância entre as linhas). Com isso, a primeira linha é definida partindo do canto superior esquerdo da tela (0, 10) – sendo o número 10 a margem - se estendendo até atingir o tamanho definido na variável len. Após isso, são criadas mais duas linhas. A primeira delas parte do limite esquerdo

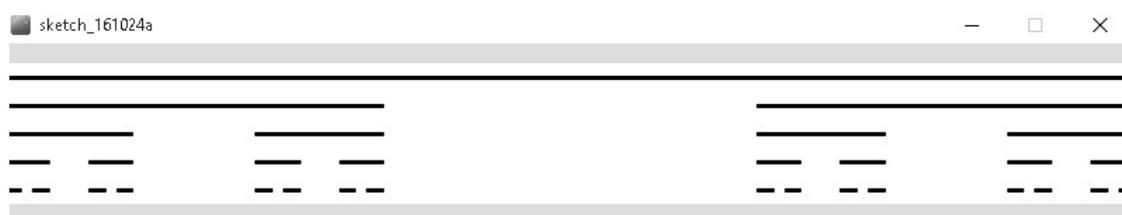
Figura 24 – Cantor Simplificado



da tela, mas o argumento que define a coordenada no eixo Y do primeiro ponto recebe o valor de `dist`, distanciando essa linha da originalmente criada. Além disso, a variável `len` é dividida por 3, diminuindo o tamanho dessa linha para um terço da original. A segunda linha é feita a partir do início do segundo terço da linha original ($len * 2/3$) e se estende até o final (`len`), dando a impressão de que um terço da linha foi apagado (como se vê na imagem). O algoritmo completo do Conjunto de Cantor (descrito na próxima seção) é baseado nessas regras, mas é aplicado de forma recursiva.

3.8.1.1 ALGORITMO DE CANTOR DE FORMA RECURSIVA

Figura 25 – Cantor de forma Recursiva



```
void setup(){
  size(800, 100); //tamanho de tela de 600 por 100 pixels
}
void cantor(float x, float y, float len, int iter) {
  if (iter > 1) {
    strokeWeight(3);
    line(x,y,x+len,y);
    y += 20;
    cantor(x,y,len/3, iter - 1);
    cantor(x+len*2/3,y,len/3, iter - 1);
  }
}
void draw(){
}
int iter = 0;
void mouseClicked(){
  if (iter > 5){
    iter = 1;
  }else{
    iter += 1;
  }
}
background(255);
cantor(1,10,800, iter);
}
```

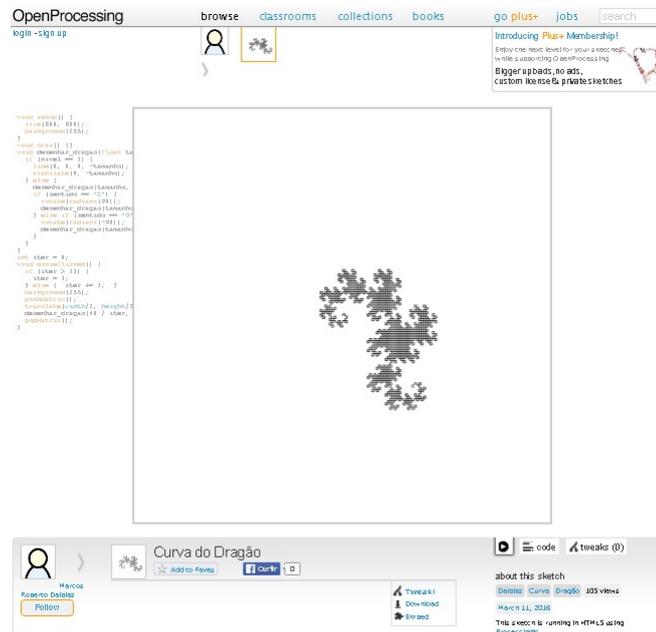
3.8.1.2 EXPLICAÇÃO DO ALGORITMO DE CANTOR

A função descrito anteriormente mostra na tela o Conjunto de Cantor, com o número de iterações dependendo do número de cliques com o mouse. Primeiramente, a função `setup()`

é usada para definir o tamanho da tela. Então é criada a função `cantor()`, que é responsável pelo desenho em si. Essa função recebe quatro argumentos: `x`, `y`, `len` e `iter`; respectivamente, a coordenada inicial no eixo X, a coordenada inicial no eixo Y, o tamanho da linha e o número de contagem de iterações, que parte de um número especificado ao chamar a função até o número 1. Enquanto o número `iter` for maior que 1, a função poderá chamar-se recursivamente. A cada iteração, uma linha é criada usando as coordenadas especificadas e após isso, 20 pixels são adicionados na coordenada do eixo Y (para distanciar as linhas) e a função é chamada mais duas vezes, criando uma linha no primeiro terço da linha original e uma segunda linha no terço final. A função `mouseClicked()` é responsável por acionar comandos ao clique do mouse. A cada clique, é adicionado uma unidade à variável `iter`, até que seu valor atinja um número maior que 5. Quando esse valor máximo é ultrapassado, a variável é reiniciada. Automaticamente, após a mudança do valor de `iter`, a função `cantor()` é chamada, usando o número de iterações especificado na variável.

3.8.2 CURVA DO DRAGÃO

Figura 26 – Curva do Dragão



3.8.2.1 ALGORITMO DA CURVA DO DRAGÃO

```

void setup() {
  size(600, 600);
  background(255);
}
void draw() {}
void desenhar_dragao(float tamanho, int nivel, String sentido) {
  if (nivel == 1) {
    line(0, 0, 0, -tamanho);
    translate(0, -tamanho);
  } else {
    desenhar_dragao(tamanho, nivel-1, "E");
    if (sentido == "E") {
      rotate(radians(90));
      desenhar_dragao(tamanho, nivel-1, "D");
    } else if (sentido == "D") {
      rotate(radians(-90));
      desenhar_dragao(tamanho, nivel-1, "D");
    }
  }
}
int iter = 0;
void mouseClicked() {
  if (iter > 11) {
    iter = 1;
  } else { iter += 1; }
  background(255);
  pushMatrix();
  translate(width/2, height/2);
  desenhar_dragao(40 / iter, iter, "E");
  popMatrix();
}

```

3.8.2.2 EXPLICAÇÃO DO ALGORÍTMO DA CURVA DO DRAGÃO

A função `desenhar_dragao()` é responsável pelo desenho em si do Fractal. Ela recebe três argumentos: tamanho (tamanho das linhas), nível (número de iterações) e sentido (“E” para esquerda e “D” para direita). Cada vez que ela é chamada, é desenhada uma linha na orientação padrão e é desenhada outra linha em seguida. Se a segunda linha vai indo para a direita, a

próxima iteração terá uma segunda linha desenhada para a esquerda, e vice-versa. Isso cria o padrão alternado de linhas necessário para o desenho, como se cada iteração resultasse de dobras sucessivas em uma folha de papel. Para fazer as rotações, é usada a função `rotate()`, que aceita apenas valores em radianos, sendo que a conversão de um valor em graus para o formato aceito pelo Processing pode ser feito chamando a função `radians()`. A função `translate()` é usada para que cada linha comece onde a linha anterior terminou. Como nos outros desenhos, a função `mouseClicked()` serve para controlar o número de iterações do desenho com cliques do mouse. É aqui que a função de desenho é chamada. Nota-se o uso das funções `pushMatrix()` e `popMatrix()`, os quais são usadas para transformar todas as linhas em um único objeto, que é movido para o centro da tela com a função `translate()`.

4 PROPOSTA DIDÁTICA, TEMA: INVESTIGANDO FRACTAIS NO ENSINO BÁSICO

4.1 INTRODUÇÃO

A Proposta Didática que apresentamos aqui visa abordar o estudo da Geometria Fractal no Ensino Básico como guia de uma Proposta Didática nas aulas de Matemática. Para que essa Proposta possa ser melhor compreendida e aplicada, recomendamos a utilização do livreto produzido a partir desse tema.

A Geometria Fractal apresentada por meio de figuras, construções lúdicas e aplicações no cotidiano, torna-se um exemplo de Matemática aplicada que pode ser utilizada durante as aulas e propiciar inúmeros benefícios aos alunos do Ensino Médio na aprendizagem da Matemática.

O livreto traz uma breve apresentação histórica desta Geometria, tratando da sua descoberta, suas características, definição e aplicações. Mostra a importância de abordagens diferenciadas no ensino da Matemática por meio da inclusão de conteúdos como a de Geometria Fractal para estimular os alunos a perceber as aplicações desta ciência no cotidiano.

4.2 RESUMO

Traz um prefácio que explica a motivação de tê-lo produzido para que os professores de Matemática possam realizar, em sala aula, atividades com Fractais e uma explicação de como ele foi organizado didaticamente. Faz-se uma breve apresentação do surgimento do conceito dessas figuras e do criador do termo Fractal, bem como apresenta exemplos de alguns deles, propondo de imediato atividades aos estudantes. Por fim, demonstra-se e solicita-se dos estudantes o cálculo da dimensão de um Fractal.

4.3 UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR

Nessas aulas, o professor pode envolver mais disciplinas do conhecimento, trabalhando até mesmo com outros professores de áreas diferentes e fazendo a mediação de todas. Neste caso as disciplinas envolvidas podem ser:

- Matemática
- Arte
- Ciências

4.4 TEMPO PREVISTO/SUGERIDO

- Aproximadamente de 4 à 6 aulas

4.5 OBJETIVOS

1. Desenvolver e ampliar o conceito de homotetia (ampliação e redução de figuras) através da Proposta Didática que está no anexo I.
2. Apresentar os diferentes padrões e regularidades para desenhos que formam Fractais, apresentando a Célula de Hele Shaw¹.
3. Identificar as aplicações dos Fractais na Matemática e na natureza
4. Construir representações de Fractais com o auxílio das réguas produzidas especialmente para o desenvolvimento dos mesmos.
5. Proporcionar aos estudantes uma oportunidade de investigar as propriedades dos Fractais.

4.6 RECURSOS

- Livreto: Investigando Fractais no Ensino Básico. Uma proposta paradigmática
- Célula de Hele Shaw (kit)
- Réguas para construção dos Fractais (kit)
- Notebook
- Data show

4.7 DESENVOLVIMENTO DA AULA

As atividades que seguem serão desenvolvidas a partir do livreto que está no anexo 1.

4.7.1 SURGIMENTO DO CONCEITO DE FRACTAIS

No capítulo 1 do livreto, o professor encontrará um pequeno resumo sobre a história e/ou surgimento do conceito de Fractais, sobre o qual o professor deverá traçar explicações aos alunos.

4.7.2 INTRODUÇÃO AOS FRACTAIS

O capítulo 2 tem como objetivo apresentar aos alunos o Conjunto de Cantor, conduzindo-os a diversos questionamentos e atividades para uma melhor compreensão do termo Fractal e deste exemplo específico.

Na atividade 1, o professor deve discutir sobre as propriedades do Conjunto de Cantor, fazendo alguns questionamentos, como por exemplo:

¹ Dispositivo que descreve o comportamento de dois fluídos com viscosidades diferentes.

- A cada iteração o comprimento resultante aumenta ou diminui?
- O Conjunto resultante será vazio?
- É possível iterar o processo infinitas vezes na prática?

Na atividade 2, o professor irá mostrar que padrões intrincados e com autossimilaridade, isto é, repetindo os diferentes formatos em diferentes escalas, podem surgir naturalmente da interação de dois fluídos.

Essa explicação se dará com a apresentação da célula de Hele-Shaw, da qual o aluno poderá perceber uma figura irregular com pequenos "braços", que dividem-se em "braços" menores parecidos com os maiores e assim sucessivamente. Conclui-se que esta figura apresenta, deste modo, autossimilaridade em diversas escalas que encontramos nos Fractais.

4.7.3 ATIVIDADES COM FRACTAIS

O capítulo 3, introduz determinadas características que os Fractais devem ter, como:

- Estrutura fina;
- Irregular para ser descrito em linguagem geométrica tradicional;
- Possui alguma forma de auto-similaridade;
- Na maioria, possuem definição simples de formação.

4.7.3.1 A CURVA DE KOCH

Nesta sessão, será feita uma introdução sobre a Curva de Koch, falando de sua história e mostrando como se obtém esta figura manualmente ou através de uma régua específica.

Na atividade 3, será solicitado para que os alunos construam a Curva de Koch com as régua fornecidas juntamente com o livreto. Posteriormente, serão feitos alguns questionamentos para identificar as principais propriedades e as maiores dificuldades em sua construção, como exemplo:

- Quais são as vantagens e desvantagens em usar a curva ampliada para compreender a Curva de Koch original?
- Qual é o comprimento da poligonal obtida na k -ésima iteração?
- O que acontece com o comprimento da curva obtida após infinitas iterações?

4.7.3.2 A CURVA DO DRAGÃO

Nesta sessão, será relatada a história da criação do Curva do Dragão e como obtê-la com dobraduras sucessivas de uma tira de papel.

Na atividade 4, os alunos construirão a Curva do Dragão pelos alunos em uma tira de papel até a quinta iteração e, posteriormente, desenhada em uma folha de papel. O importante, nessa atividade, é que os alunos notem que a cada iteração a Curva parece encolher, contudo o comprimento permanece constante.

Na atividade 5, serão discutidas diversas propriedades da Curva do Dragão, buscando responder perguntas como:

- Quantos segmentos de retas temos em cada iteração?
- O que acontece com o comprimento de cada iteração?
- Qual o padrão de formação das dobras na tira de papel?

Na atividade 6, os alunos serão divididos em grupos de três. Depois, cada grupo, terá que representar as 6 primeiras iterações, seguindo o processo de que cada segmento existente será a hipotenusa de um triângulo isósceles e que a hipotenusa será trocada pelos dois catetos (vide detalhes no livreto).

Na atividade 7, será esclarecido como utilizar as réguas fornecidas e solicitado que os alunos construam a Curva do Dragão até a quinta iteração.

4.7.4 DIMENSÃO FRACTAL

Um assunto tão trivial que normalmente nem se questiona a respeito é a questão de dimensão de uma figura ou objeto. Porém, a de um Fractal pode não ser.

Na próxima atividade a ser desenvolvida, o objetivo é discutir com os estudantes como homotetias modificam objetos geométricos, como segmentos, quadrados ou cubos. Espera-se que os estudantes cheguem a conclusão que o número de cópias do objeto original produzidas, obtidas por uma homotetia de razão k , $k \in \mathbb{N}$, depende da dimensão do objeto e, assim chegar a uma definição de dimensão que pode ser aplicada a Fractais. Assim que aprendido pelos estudantes o método, o professor deverá mostrar agora a dimensão dos Fractais trabalhados anteriormente desenhados e, através do cálculo de um logaritmo, chegar a conclusão esperada, como por exemplo:

- Conjunto de Cantor: $D = \log_3 2 \approx 0,63$
- Curva de Koch: $D = \log_3 4 \approx 1,26$
- Curva do Dragão: $D = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$

4.8 AVALIAÇÃO

Avaliar, segundo os PCNs (MEC/SEF, 1998, p.28), é conhecer ou verificar como foi realizada alguma tarefa ou conseguida a aquisição de conceitos pelos alunos, através de questões que exigem definições de significados. Portanto, avaliar não é medir, mas interpretar o que os alunos aprenderam e o quanto melhoraram com as informações obtidas.

Sugere-se que a avaliação feita pelo professor neste trabalho seja ao longo de todas as 8 atividades que o livreto propõe aos alunos. Ela é necessária, pois, ao longo de todo o desenvolvimento das atividades, o aluno precisará de compreensão e aplicação dos resultados que vão sendo obtidos.

Segundo BRASIL (2008), a avaliação:

Exige a participação de todos os envolvidos no processo, ela se concretiza nos contextos vividos pelos professores e alunos. Com características bastante singulares, é a avaliação que acontece durante o processo, tem natureza formadora. Sua função não é classificar nem atribuir nota, mas identificar os avanços da aprendizagem ou os pontos que constituem barreiras para esses avanços. É contribuir para melhorar, orientar, regular a ação didática. (BRASIL, 2008, p.129)

Por fim, fica a critério do professor decidir qual avaliação ele fará para ter dimensão exata do que cada aluno atingiu com essas atividades sobre Fractais, haja vista que foi um processo contínuo e aberto. Os alunos tiveram a possibilidade de construir os conceitos matemáticos e vivenciar experiências novas de maneiras diferentes, cada qual no seu ritmo de aprendizagem.

4.9 BIBLIOGRAFIA

- Investigando Fractais no ensino básico - Uma proposta paradigmática (anexo I)
- <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=22040>

4.10 RELATO DA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Aula aplicada para alunos de ensino médio em agosto/2016, seguindo orientações metodológicas do Livreto² "Investigando Fractais no ensino básico" e do Kit anexo ao livreto para a construção de alguns Fractais.

As atividades foram desenvolvidas em um tempo aproximado de 4 aulas de 45 minutos, sendo 2 aulas na primeira semana e 2 aulas na segunda semana.

- Iniciamos a aula com a apresentação do tema a ser trabalhado juntamente com uma breve fala sobre o surgimento e o conceito Fractal. Nesse momento, os alunos mostraram-se muito interessados, pois alguns relataram que nem sabiam o que era um Fractal;

² Proposta Didática metodológica, (ADAMES M. R.; DALPIAZ, 2016)

- Na sequência, começamos as atividades propostas pelo livreto, sendo solicitado aos alunos que fizessem a construção do Conjunto de Cantor em seus cadernos. Essa atividade foi a parte principal da aula, pois pela primeira vez eles depararam-se com as iterações e assim com as dificuldades da construção, pois dependendo do comprimento inicial a dificuldade aumentava. Eles questionaram durante a construção de qual seria o melhor tamanho, porém o objetivo era que eles mesmos sentissem quais seriam os melhores valores. Também foram discutidas várias questões para que aprimorassem o conceito da repetição (iterações), juntamente com propriedades pré definidas do Conjunto de Cantor;
- Na atividade 2, célula de Hele-Shaw, foram apresentados os padrões que dois fluídos podem desenhar/apresentar ou estar, dessa forma, na natureza. Aqui os alunos ficaram maravilhados com o desenho formado, pois antes de injetar os fluídos, foi explicado o que iríamos fazer, sem mencionar como poderia ficar o desenho final. Todavia, depois de injetados e formado os padrões Fractais, a impressão passada por eles foi de primeiramente surpresa e depois de admiração. Repetimos duas vezes o processo, primeiramente com 2ml de glicerina e 1ml de corante; e depois com 4ml de glicerina e 1ml de corante. Essa repetição foi feita para fazer um desenho maior com mais padrões Fractais;
- Na atividade 3, Curva de Koch, solicitamos a construção do Fractal com o auxílio de uma régua especial que acompanha o Kit. Explicamos o Fractal, Curva de Koch e suas etapas de iterações. Porém, houve muita dificuldade para os alunos fazerem as ampliações com o auxílio da régua. Observamos que quando eles construíram reduzindo no papel, foi mais fácil a compreensão, mas quando ampliado, não. Acreditamos que a dificuldade foi visualizar que agora, a régua era apenas uma parte do novo Fractal para fazer as ampliações solicitadas;
- Na atividade 4, Curva do Dragão, solicitamos a construção do Fractal na folha de papel. Iniciamos entregando uma tira de papel e pedindo para os alunos fazerem as dobras, conforme definições da curva. Aqui, apareceu a dificuldade na coordenação motora em dobrar e abrir na volta 90 graus cada segmento seguinte. Uma vez feita a atividade da tira de papel, foram solicitados a fazerem, na folha de papel, a construção com régua e lápis. Aqui, apareceu a dificuldade de construir cada iteração com lados de um triângulo retângulo isósceles. Foi preciso explicar que eles deveriam encontrar o ponto médio do segmento anterior e traçar uma linha imaginária perpendicular para facilitar o processo;
- Na atividade 5, Perguntas e discussões sobre a Curva do Dragão foram de suma importância para a compreensão da figura que formará a curva depois de infinitas iterações. Inicialmente os alunos não acreditaram que essa figura poderia se transformar num semblante de um dragão, mas com as propriedades bem entendidas, ficou mais fácil a compreensão de que com várias iterações teremos tal figura;

- Na atividade 6, construções da Curva do Dragão, com o auxílio de uma régua especial, observando sempre o sentido que deveria ser rotacionada a régua. Alguns alunos conseguiram fazer a construção, porém outros tiveram dificuldade em entender que a régua já era a Curva do Dragão na iteração 3.

Conclusão da aplicação do livreto:

Acreditamos que as atividades diversificadas sempre auxiliam os professores no processo de ensino/aprendizagem do todo. Essa Proposta Didática foi muito bem aceita pelos estudantes que foram motivados pelo novo, diferente e belo. O professor que utilizar do material poderá inclusive estender para mais aulas e ele próprio buscar mais figuras Fractais e/ou criá-las para ensinar outros conteúdos que são requisitos básicos, tais como Geometria Plana, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e outros.

Alguns relatos dos alunos:

- “Esta atividade nos proporcionou uma amplitude sobre o assunto do que seriam vitrais, uma básica explicação seria dizer que o Fractal é uma estrutura geométrica ou física, e geralmente são muito similares em diferentes níveis de escala.”
- “Vimos e aprendemos sobre Fractais sendo uma das experiências mais diferente que tivemos na escola com a célula de Hele-Shaw.”
- “Com tudo isso, aprendemos várias coisas, uma delas é que uma samambaia é um Fractal e tivemos a conclusão de que tudo tem Matemática.”

5 CONCLUSÃO

As atividades desenvolvidas com os alunos, seguindo orientações metodológicas do livreto (ADAMES M. R.; DALPIAZ, 2016), despertou e motivou o interesse dos mesmos sobre o tema Fractais, chamando atenção por ser novidade e pela dinâmica que foi aplicada ao conteúdo. Constatamos, ainda, o comprometimento dos alunos envolvidos nas atividades desafiadoras da construção dos Fractais, empolgados pela sua beleza visual e resolvendo os problemas propostos pelo material.

Com a finalidade de auxiliar o professor de Matemática na sua prática pedagógica e favorecendo uma maior participação do aluno no processo de ensino aprendizagem, acreditamos que o conteúdo apresentado, neste trabalho, juntamente com o livreto, seja de grande motivação para aprender e ensinar, possibilitando a mediação das atividades e acreditando que podemos ajudar a formar um cidadão com conhecimento global, crítico e que consiga resolver problemas, buscando soluções satisfatórias.

Vivemos um processo crescente de aprendizagem, principalmente para garantir um ensino de qualidade cada vez mais próximo da perfeição desejada. A partir dos pressupostos aqui colocados, propõem-se que o tema Fractal seja desenvolvido dentro dos conteúdos matemáticos e que os critérios de seleção e escolha do material levem em conta o dia a dia do aluno, a abrangência teórica e prática, as possibilidades de formalização e que ainda seja possível à articulação entre a vivência, a compreensão e a aplicação.

Neste material, sugerimos uma opção de software gratuito para o uso em sala de aula que possa desenhar figuras geométricas e principalmente Fractais. Tal sugestão se faz necessária, pois com o avanço da tecnologia computacional, temos também uma nova fase no processo ensino aprendizagem, provocando mudanças e introduzindo novas exigências na educação. Isso implica novas ideias, novos currículos, atuação e formação de professores. Por isso, a sugestão de empregar um software na construção de Fractais, foi para que o professor possa ter várias ferramentas no processo de ensino-aprendizagem. Porém, em muitos casos, o professor necessita de uma preparação com fundamentação teórica, conhecimento matemático, domínio dos recursos básicos de informática e ter habilidade no uso de software específico que desejar apresentar. Logo, o uso dessa ferramenta pressupõe o software que melhor se adeque ao objetivo que se almeja, ao conteúdo que se quer desenvolver e à metodologia adotada. Nesse sentido, VALENTE (1997) comenta:

Um software só pode ter tido como bom ou ruim dependendo do contexto e do modo como ele será utilizado. Portanto, para ser capaz de qualificar um software é necessário ter muito clara a abordagem educacional a partir da qual ele será utilizado e qual o papel do computador nesse contexto. (VALENTE, 1997, p.89)

Devemos saber que os Fractais não surgiram há pouco tempo, já que existem Fractais há mais de um século como o Conjunto de Cantor. Na época, não se dispunha de tecnologia suficiente para um estudo mais avançado sobre o tema, então, mais tarde, utilizando este mesmo Conjunto Fractal, Benoit Mandelbrot compreendeu os problemas de ruídos nas linhas telefônicas da IBM, empresa em que trabalhava, e a partir disso passou a estudar e difundir esta Geometria.

O intuito deste trabalho era fazer uma análise sobre os Fractais, um estudo que envolvesse seu surgimento, e produzir uma sequência didática. Embora tenha sido breve, a pesquisa foi suficiente para despertar ainda mais o interesse pela beleza dessa Geometria e impulsionar a criação de mais modelos de Fractais.

É importante para o professor reconhecer as dificuldades, as limitações, os recursos e as potencialidades de querer explorar esse tema específico na Educação Matemática, fornecendo a possibilidade de utilizar instrumentos didáticos para o conhecimento de Fractais, explorando alguns conteúdos da disciplina. A realização da pesquisa justifica-se pela necessidade e o desejo de promover situações de aprendizagem que contemplem conteúdos mais recentes no campo da Matemática que ainda, em sua maioria, não aparecem em livros didáticos do Ensino Básico.

Também podemos ressaltar que ao redor dos alunos é cheio de tecnologia, sendo natural que o interesse escolar se alie a necessidade que a escola tenha de acompanhar essa evolução tecnológica.

Por conseguinte do tema ser algo relativamente novo na Matemática, os Fractais e sua Geometria são cada vez mais explorados pelos pesquisadores, devido à variedade de aplicações, observando que a maior parte destas está concentrada na Biologia, Medicina, Arquitetura e Arte, onde os Fractais são de suma importância para o seu entendimento. Concluiu-se também que os Fractais podem agir como incentivador para o estudo de alguns tópicos de Geometria, despertando assim a curiosidade e interesse dos alunos quando apresentados em sala de aula, promovendo a interdisciplinaridade entre Matemática e outras áreas do conhecimento, por estarem ligadas à natureza e à arte.

A Geometria Fractal ainda tem um longo caminho para que esteja entre a prática dos docentes. Inclui-se, neste longo caminho, a ruptura de paradigmas, experiência para se aplicar novas atividades que contemplem os Fractais, e, ainda, as aceitações dos educadores, afinal são anos trabalhando, tomando como referência a Geometria Euclidiana e não é fácil mudar os conceitos na prática do ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS

- ADAMES M. R.; DALPIAZ, M. R. **Investigando Fractais no Ensino Básico**. Curitiba, 2016. Preprint.
- AVILA, G. **Euclides, Geometria e Fundamentos**. Revista do Professor de Matemática., 2001, p.1–9.
- BARBOSA, R. M. **Descobrimos a Geometria Fractal - para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002, p.159. 159–192 p.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: 3 ed, 1981, p.29–31.
- BRASIL, S. G. d. P. d. R. **Manual do educador: orientações gerais do Projovem Urbano**. Disponível em: <http://sme.pontagrossa.pr.gov.br/manual.pdf>. Acesso em 11 set. 2016., 2008, p.129.
- COURANT RICHARD; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda., 2002, p.262.
- EDGAR, G. **Classics on Fractals**. Studies in Nonlinearity., 2003.
- EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. São Paulo, Heródoto, século V a.C apud. EVES 1997, p.3–10.
- FALCONER, K. **Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications**. Chichester, UK, 1990.
- KARAS, E. **Fractais: Propriedades e Construções**. Curitiba, 2005.
- MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: NY: W.H. Freeman and Company, 1982, p.53.
- MANDELBROT, B. **Objectos fractais: forma, acaso e dimensão seguido de, Panorama da linguagem fractal**. Tradução de Carlos Fiolhais e José Luis Malaquias. Lisboa: Gradiva, 1998, p.53. v. 1, n. 1.
- MEC/SEF, B. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Secretaria da Educação Fundamental**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2014., 1998, p.28.
- MEC/SEF, B. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Matemática. Secretaria da Educação Fundamental**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 19 ago. 2015., 1998, p.42.
- MORRS, P. **O Universo e seus fractais: a contribuição de Mandelbrot**. Disponível em: www.ihuonline.unisinos.br/index.php?option=com_contentview=articleid=3628secao=349., 2010, Acesso em: 09 mai. 2010.
- NAIME R.; SPILKI, F. **O Padrão de (Des)ordem da Natureza**. Porto Alegre, 2002.

OLIVEIRA, L. **A Matemática do Delírio**. São Paulo: Ed. Super Interessante. Ed: Abril, 1994, p.92.

STEWART, I. **Os números da Natureza: a realidade irreal da imaginação matemática**. Rio de Janeiro: Ed. Rocco, 1996, p.12.

VALENTE, J. A. **O uso inteligente do computador na educação**. Campinas., 1997, p.89. Revista Pátio. Editora Artes Médica Sul. Ano I, nº 1, mai/jul p.

WANGENHEIM, A. V. **Algumas Técnicas de Análise de Imagens utilizando Fractais**. Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/visao/2000/fractais/>, Acesso em: 11 ago. 2016.

WIKIPEDIA. **Euclides de Alexandria**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides>, 2016, Acesso em: 11 ago. 2016.

YALE, U. **Mandelbrot**. Disponível em: <http://users.math.yale.edu/mandelbrot/>, 2016, Acesso em: 08 set. 2016.