UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM/UFRJ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
MICHAEL DE LIMA BALZANA DE MELO PINTO

O ESTUDO DO LOGARITMO EM UMA VISÃO INTERDISCIPLINAR

RIO DE JANEIRO
2016

CIP - Catalogação na Publicação

d645d

de Lima Balzana de Melo Pinto, Michael
Dissertação para conclusão de Mestrado / Michael de Lima Balzana de Melo Pinto. -- Rio de Janeiro, 2016.
100 f.

Orientadora: Marisa Beatriz Bezerra Leal.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

1. Logaritmo. I. Beatriz Bezerra Leal, Marisa, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Michael de Lima Balzana de Melo Pinto

O ESTUDO DO LOGARITMO EM UMA VISÃO INTERDISCIPLINAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT, do Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção de Mestre, no Mestrado Profissional em Matemática.

Orientadora: Profª Drª Marisa Leal

RIO DE JANEIRO
2016

Michael de Lima Balzana de Melo Pinto

O ESTUDO DO LOGARITMO EM UMA VISÃO INTERDISCIPLINAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT, do Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção de Mestre, no Mestrado Profissional em Matemática.

Aprovada por

Marisa Beatriz Bezerra Leal, D.Sc.
Instituto de Matemática – UFRJ

Maria Aguieiras Alvarez de Freitas, D.Sc.
Instituto de Matemática - UFRJ

Helvecio Rubens Crippa, D.Sc.
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

RESUMO

PINTO, Michael de Lima Balzana de Melo. O estudo do logaritmo em uma visão interdisciplinar. Rio de Janeiro, 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

A proposta desse trabalho é ampliar o conhecimento do corpo docente no ensino dos logaritmos na Educação Básica, pois entendemos que as dificuldades encontradas pelo corpo discente, na teoria e principalmente nos exercícios de aplicação, podem ser amenizadas com uma abordagem histórica e contextual. Acreditamos que o ensino do logaritmo se tornaria mais eficiente se o professor priorizasse em seu plano de aula a contextualização e a interdisciplinaridade.

O conteúdo que apresentamos foi baseado em ampla pesquisa em livros didáticos adotados no Ensino Médio (adotados pelo PNLD), livros de importantes autores que não são adotados no ensino médio, sites que abordam o tema, dissertações e monografias.

Ressaltamos a importância do tema por ser capaz de transformar multiplicações em somas e, com isso, a aplicação em temas cotidianos é grande. São inúmeras as aplicações em outras áreas do conhecimento e, neste trabalho, colocamos alguns exemplos para servirem de inspiração para uma busca cada vez maior por contextualizações e interdisciplinaridades e, com isso, estas aplicações podem ser incluídas no ambiente da sala de aula, constituindo-se uma interessante alternativa para potencializar o processo de Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

PINTO, Michael de Lima Balzana de Melo. O estudo do logaritmo em uma visão interdisciplinar. Rio de Janeiro, 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

The purpose of this work is to strengthen the faculty in the teaching of logarithms in basic education, because we believe that the difficulties encountered by the student body, in theory and especially in application exercises, can be alleviated with a historical and contextual approach. We believe that the teaching of the logarithm would become more efficient if the teacher prioritize in your lesson plan contextualization and interdisciplinarity.

The content presented was based on extensive research in textbooks adopted in high school (adopted by PNLD), important authors who are not adopted in high school books, websites that address, dissertations and monographs.

We stress the importance of the issue to be able to transform multiplications in sums and, therefore, the application in everyday topics is great. There are numerous applications in other fields of knowledge and, in this work, we put some examples to serve as inspiration for a search increasingly for contextualization and interdisciplinarity and, therefore, these applications can be included in the classroom environment, constituting an interesting alternative to enhance the process of Teaching and Learning.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Oxalá por tantas vezes me dar força para continuar e, quando as portas se fecharam, Ele sempre abriu uma ou mais janelas.

À minha mãe, Elizabeth de Lima Balzana, pois não foi apenas quem me colocou nesse mundo, mas quem, dentro de todas as adversidades da vida, soube com maestria me mostrar que nunca está tão ruim que não possa melhorar e que isso depende apenas de força de vontade.

À minha avó, Nadir de Lima Balzana, e meu avô, Wilson Lopes Balzana, que, com toda sabedoria de um casal que viveu junto por mais de meio século e criou 12 filhos, souberam me dar os valores necessários para que me tornasse o que sou hoje.

À minha coordenadora e amiga Paula Sant'Anna, que vibrou junto comigo quando consegui passar na prova, que compreendia meus apertos com os estudos e que, com sua forma ímpar de conversar, me mostrou os erros e acertos para que eu conseguisse chegar até aqui sendo um profissional reconhecido e respeitado.

Ao amigo Sandro Age que tornava minha semana sempre mais intelectual com nossos desafios e demonstrações, com exercícios difíceis, debates construtivos. Obrigado por torcer sempre por mim.

À minha esposa Raquel Molina, uma pessoa iluminada que tenho certeza que veio ao mundo para fazer o bem por onde passar, uma pessoa que está ao meu lado para qualquer situação. Obrigado por acreditar em minha capacidade, por me aconselhar sempre no caminho da evolução, e obrigado pelo filho lindo, fruto do nosso amor, que só você poderia me dar.

Ao meu filho Benicio Molina Balzana, que se tornou o motivo de minha existência e é por ele, principalmente, que hoje me dedico cada vez mais a ser uma pessoa melhor.

À minha orientadora Marisa Leal, que com toda sua energia positiva, toda paciência, não desistiu de mim e me ajudou muitas vezes mais do que poderia. Me espelho em sua sabedoria e tomo isso como um incentivo para seguir buscando cada vez mais novos conhecimentos.

Aos meus professores do PROFMAT e meus companheiros de sala, sete sobreviventes dessa jornada.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Quando me encontrava na posição de aluno, em meu ensino médio, a maioria dos meus colegas de classe encontrava grande dificuldade quando encontravam um logaritmo em alguma questão. Quando passei para o outro lado, sendo responsável por ensinar o tema, surpreso ficava ao chegar na sala dos professores e encontrar mestres que sentiam uma dificuldade em fazer com que o aluno entendesse sem simplesmente decorar. Percebi que a dificuldade dos alunos tinha fundamento: os professores não ajustavam o tema de forma que os alunos percebessem a utilidade, a aplicabilidade e a interdisciplinaridade do logaritmo.

Pesquisando sobre a criação, a motivação e os métodos utilizados na criação do logaritmo, percebi que tinha adquirido uma ferramenta importante a ser utilizada no processo ensino-aprendizagem e comecei a aplica-lo em sala de aula. O resultado foi uma maior atenção e interesse dos alunos. Apliquei em sala alguns conceitos que foram utilizados na criação, contextualizamos e interdisciplinamos o tema e os alunos perceberam, e entenderam, a importância do tema não só na Matemática. O reflexo desse trabalho foram notas melhores e, principalmente, alunos carregando esse conhecimento para as séries seguintes, o que prova que não foi apenas estudado para decorar e tirar uma boa nota.

Esse trabalho foi organizado em 4 capítulos. No capítulo 1, dissertamos sobre a história da criação do logaritmo e suas motivações; os autores, cada um em sua época, com suas contribuições para a história da Matemática. No capítulo 2, falamos de um logaritmo especial e uma dúvida comum sobre sua nomenclatura, logaritmo Neperiano ou Natural. No capítulo 3, contextualizamos o logaritmo e colocamos exemplos de aplicação em outras áreas do conhecimento e, no capítulo 4, fizemos uma análise de alguns livros didáticos quanto à aplicação e metodologia do ensino do logaritmo. Finalizamos com algumas reflexões discutidas nas Considerações Finais.

1 SOBRE A INVENÇÃO DO LOGARITMO

Na história da invenção do logaritmo, destacam-se John Napier(1550 – 1617) e Jobst Bürgi(1522 – 1632) por serem os primeiros a terem estudado e desenvolvido teorias a respeito dos logaritmos.

Bürgi, famoso relojoeiro de sua época além de grande inventor de instrumentos astronômicos, começou seus estudos primeiro, em 1588, e fez a primeira publicação de seus resultados em 1620. Seus estudos e o desenvolvimento da sua teoria foram realizados independente dos estudos de Napier, que começaria apenas em 1594, porém, sua primeira publicação ocorreu em 1614, dando, inicialmente, a Napier os créditos por essa grande descoberta.

1.1 SOBRE JOHN NAPIER

Alguns nomes surgiram na história como peças importantes no desenvolvimento da teoria de logaritmos. Alguns adequavam suas ideias às teorias já criadas, outros desenvolviam novas técnicas de uso visando facilitar os cálculos.

Filho de Archibald Napier, que era um homem importante no final do século XVI na Escócia, sua família adquiriu a propriedade Merchiston, tornando seu pai o primeiro Napier de Merchiston. A família também possuía bens em outras áreas do país. Archibald casou com Janet Bothwell, a irmã do bispo de Orkney, em 1549, quando ele tinha apenas 15 anos de idade. Seu filho John Napier nasceu no ano seguinte.

Em nossa pesquisa, ficou claro que a ortografia de seu nome não era sempre a mesma, seu sobrenome aparece em uma grande variedade de grafias diferentes., como por exemplo Napeir, Nepair, Nepeir, Neper, Napare, Naper, Naipper. John Napier mais comumente foi escrito como Jhone Neper. A escrita atual, isto é, John Napier passou a ser utilizada após sua morte.

Napier tinha uma vida confortável e se destacava entre os jovens de sua classe social por preferir as atividades intelectuais ao invés das sociais. Com isso, acabou por se revelar um brilhante estudioso.

Pouco se sabe sobre os primeiros anos de John Napier. Um dos poucos fragmentos de informação que conseguimos encontrar foi que até os doze anos, Napier teve aulas particulares em seu castelo, aos treze ingressou na Universidade de St. Andrews destacando-se como um dos melhores alunos, quando então seu pai recebeu a carta de seu tio, o Bispo de Orkney, recomendando seu envio à França, onde teria acesso a mestres que então revolucionavam a matemática e a filosofia na época.

Para Napier, estudar matemática era apenas um hobby e, em seus trabalhos, descreve que muitas vezes achou difícil encontrar tempo para a realização de cálculos dentro de seus estudos em teologia. No mundo matemático, começou a ser conhecido por algumas contribuições como um mnemônico[1] para algumas fórmulas utilizadas na resolução de triângulos esféricos conhecidas como “analogias de Napier”. Para efetuar multiplicações e divisões sem ter que decorar a tabuada, Napier criou os “ossos de Napier”. Desenvolveu também expressões exponenciais para funções trigonométricas, e introduziu a notação decimal para frações.

Alguns de seus estudos referentes a cálculos matemáticos foram elogiados por intelectuais da época e, enquanto Napier refletia sobre o assunto, Dr. John Craig, médico de James VI da Escócia, falou-lhe no uso da prostaférese[2] na Dinamarca. Presumivelmente Craig fez parte de um grupo que em 1590 viajara para Dinamarca com James VI a motivos particulares. O grupo acabou desembarcando não longe do observatório (*Uranienborg, em Oresund, que fica entre a Dinamarca e a Suécia e foi construído entre* 1576 *e* 1580 *pelo astrônomo por ordem de Frederico* II*, da Prússia*) do astrônomo Tycho Brahe, onde se encontraram e conversaram, dentre outros assuntos, superficialmente sobre o maravilhoso artifício da prostaférese, muito usado

[1] Mnemônico é um conjunto de técnicas utilizadas para auxiliar o processo de memorização. Consiste na elaboração de suportes como os esquemas, gráficos, símbolos, palavras ou frases relacionadas com o assunto que se pretende memorizar.

[2] Identidades trigonométricas que transformam produtos em somas ou diferenças

em cálculos no observatório, o que motivou John Napier a redobrar seus esforços em busca de sua grande descoberta: o logaritmo.

Quatro anos depois, em 1594, publicou sua descoberta tornando-se conhecido internacionalmente, passando a ser considerado um grande matemático e, principalmente, um eficaz colaborador na resolução de complicados problemas que surgiam na Astronomia. Esta descoberta revelou-se uma das mais importantes teorias matemáticas criadas pelo homem, economizando o tempo utilizado no cálculo de contas trabalhosas. O logaritmo não só simplificava de maneira considerável a aritmética, como também incrementava os princípios fundamentais da análise matemática. A partir dessa descoberta, sentiu-se a necessidade de se criar uma nova estrutura filosófica para comportar e interpretar tal instrumento de cálculo.

Napier aplicaria, inicialmente, suas ideias à trigonometria, com as fórmulas de prostaférese, pois o objetivo principal era facilitar os longos e penosos cálculos que navegadores e astrônomos enfrentavam diuturnamente.

O procedimento adotado por Napier para descrever esse trabalho em termos práticos foi desenvolvido posteriormente por uma ideia comparativa entre duas relações matemáticas chamadas de progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG).

No quadro 1, segue exemplo da relação existente entre uma sequência em PA (primeira linha) e outra em PG (terceira linha), onde tomamos o número 2 como base:

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α^L (α=2)	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
N = α^L	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Quadro 1 – sequências em PA e PG utilizadas na demonstração da relação entre as operações de adição e multiplicação

A primeira linha é uma PA com $a_1 = 1$ e razão $r = 1$.

A terceira linha é uma PG com $a_1 = 2$ e razão $q = 2$.

A seguir, a relação entre as linhas e as operações matemáticas soma e produto, subtração e divisão:

$$3 + 6 = 9$$

$$2^3 \,.\, 2^6 = 2^9$$

Observe que:

$$512 = 2^9 = 2^{(3+6)} = 2^3 \,.\, 2^6$$

Ou seja, em linguagem atual, dizemos que a primeira linha (PA) é o logaritmo da terceira linha (PG) na base da potência (2).

Se ***b*** representa a base de uma potência, esse deve ser diferente de 1, pois, caso contrário, não poderão ser representados números diferentes na PG, já que a potência seria constante e igual a 1. Assim, generalizando, para x, y e b positivos, temos que

$$\log_b x + \log_b y = \log_b(x.y)$$

No exemplo,

$$3 + 6 = 9 = \log_2 512 = \log_2(8.64) = \log_2 8 + \log_2 64$$

Ou seja, o logaritmo na base b do produto de dois números $x\ e\ y$ é a soma dos logaritmos de $x\ e\ y$, na mesma base b.

Analogamente,

$$\log_b x - \log_b y = \log_b \left(\frac{x}{y}\right)$$

No exemplo,

$$\log_2 8 = \log_2 \left(\frac{256}{32}\right) = \log_2 256 - \log_2 32 = 8 - 5 = 3$$

Ou seja, a diferença entre os logaritmos, em uma base b, de dois números é o logaritmo, na mesma base b, da razão entre esses números. Daí o nome *logaritmo* escolhido por Napier, que deriva das palavras *logos* e *arithmos*, que significavam, respectivamente, “razão” e “número” (razão entre números).

Napier pensara em sequências de potências sucessivas de um mesmo número e era óbvio que as somas e diferenças dos expoentes correspondiam a produtos e quocientes das mesmas potências, mas uma sequência de potências inteiras de uma base inteira, por exemplo, base dois, não poderia ser tomada para cálculo por deixar lacunas cada vez maiores entre elementos consecutivos.

Usando as informações do quadro 1, como faríamos para determinar o logaritmo de 600 na base 2? Fica evidente que, nessa base, existe a dificuldade de se determinar o logaritmo de um número qualquer. Foi pensando nisso que Napier buscou uma razão que se aproximasse de 1, pois nesse caso, haveria uma redução do espaço entre números consecutivos da segunda linha, o que tornaria o quadro mais útil na busca por algum produto.

Napier escolheu trabalhar com potências de um número α bem próximo do número 1, no caso, as potências de

$$\alpha = 1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}999\,9999,$$

pois potências sucessivas de α resultam em números próximos e ainda, quando relacionadas a seus expoentes, obedecem à relação entre soma e produto e entre subtração e divisão, vista anteriormente.

O Quadro 2, na página 18, foi compilado por multiplicações sucessivas, equivalentes a potências de $0{,}9999999$ e, apenas para evitar o excesso de casas decimais, Napier multiplicou os resultados por 10^7. Na primeira linha, expoentes L e, na segunda, as potências sucessivas de α e na terceira, os números

$$N = 10^7.\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L.$$

O expoente L foi por ele chamado, inicialmente, de *números artificiais*, e posteriormente de *logaritmo de* N. Na notação moderna, se $N = 10^7 \, (1 - 10^{-7})^L$, então o expoente L é o logaritmo de N. A definição de logaritmos feita por Napier difere em vários aspectos da definição moderna (introduzida em 1728, por Leonhard Euler): se $N = b^L$, onde b é um número positivo fixo, diferente de 1, então L é o logaritmo (de base b) de N. Assim, pelo sistema de Napier, $L = 0$ corresponde a $N = 10^7$ (ou seja, $log\, Nap\, 10^7 = 0$), enquanto no sistema moderno $L = 0$ corresponde a $N = 1$ (isto é, $log_b 1 = 0$).

Observando o cálculo dos números N fica óbvio que determiná-los envolveria cálculos trabalhosos e o seguinte artifício foi usado por ele para facilitar esses cálculos:

Se

$$\alpha = 0{,}9999999 = 1 - \frac{1}{10^7}$$

Então

$$\alpha^2 = \alpha \,.\, \alpha = \alpha \,.\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = \alpha - \frac{\alpha}{10^7}$$

$$\alpha^3 = \alpha^2 \,.\, \alpha = \alpha^2 \,.\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{10^7}$$

E assim por diante.

E se

$$\alpha = 0{,}9999999 \text{ então } \frac{\alpha}{10^7} = 0{,}00000009999999$$

E assim

$$\alpha^2 = \alpha - \frac{\alpha}{10^7} = \ 0{,}99999990000000$$

$$0{,}99999990000000$$

$$\underline{-0{,}00000009999999}$$

$$0{,}99999980000001$$

Analogamente,

$$\alpha^3 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{10^7} = \ 0{,}99999980000001$$

$$0{,}99999980000001$$

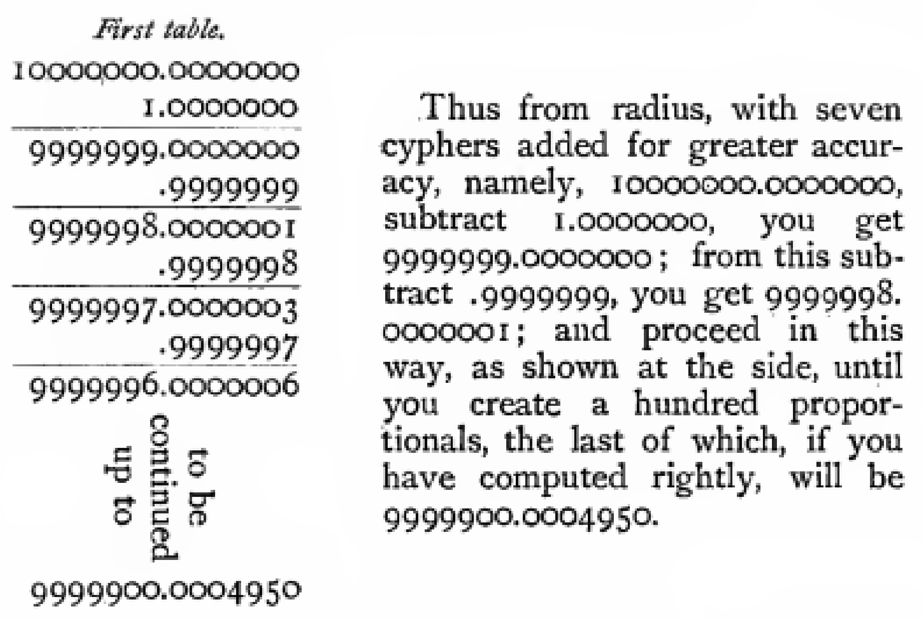
$$\underline{-0{,}00000009999998000000 1}$$

$$0{,}9999997000000299999 9 \cong 0{,}99999970000003(arredondado)$$

Esses números, ao final, seriam multiplicados por 10^7, como mencionado anteriormente, para que fosse determinado o número N.,

Do original, segue, na figura 01, uma reprodução da primeira tabela de logaritmos, do livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio,* feita por Napier.

Figura 01 – primeira tabela de logaritmos criada por Napier. The Construction Of The Wonderful Canon Of Logarithms, Tradução do livro Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio do Latim para o inglês por Willian Rae Macdonald, 1889, página 13



First table.

10000000.0000000
1.0000000
9999999.0000000
.9999999
9999998.0000001
.9999998
9999997.0000003
.9999997
9999996.0000006
to be continued up to
9999900.0004950

Thus from radius, with seven cyphers added for greater accuracy, namely, 10000000.0000000, subtract 1.0000000, you get 9999999.0000000; from this subtract .9999999, you get 9999998.0000001; and proceed in this way, as shown at the side, until you create a hundred proportionals, the last of which, if you have computed rightly, will be 9999900.0004950.

Assim, a partir de um raio, com sete cifras adicionado para maior precisão, ou seja, 1 0000000 0000000, subtrair 10000000, você consegue 9999999 0000000; a partir deste subtrair 9999999, você consegue 99999980000001; se proceder desta forma, como mostrado ao lado, até que você crie uma centena de proporcionais, a última das quais, se você tiver calculado com razão, será 9999900 0004950.

Tradução feita pelo autor.

Napier calculou as potências de α^2 até α^{50}, fazendo subtrações sucessivas e criou a primeira tabela de logaritmos que se tem notícia na história, relacionando cada número com sua potência, o que interessava aos cientistas, pois facilitava cálculos trabalhosos. Dos exemplos acima, conseguimos ter os três primeiros resultados do Quadro 2:

L	1	2	3
α^L	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1$	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3$
	0,9999999	0,99999980000001	0,99999970000003
$N = 10^7.\alpha^L$	9999999,0000000	9999998,0000001	9999997,0000003

Quadro 2 – Exemplo com as três primeiras linhas da primeira tabela de logaritmos de Napier

É evidente, como $1-10^{-7}$ é menor que 1, que o valor de N decresce à medida que o número L (logaritmo) cresce.

Com o artifício de multiplicar por 10^7 para eliminar as casas decimais, o logaritmo de Napier perdeu a propriedade que relacionava as operações de adição e multiplicação. Por isso que os logaritmos iniciais de Napier são diferentes dos atuais. Vejamos:

$$Se\ L_1 = Log\ N_1\ e\ L_2 = Log\ N_2$$

então

$$N_1 = 10^7(1-10^{-7})^{L_1}\ e\ N_2 = 10^7(1-10^{-7})^{L_2}$$

logo,

$$N_1.N_2 = 10^7.[10^7(1-10^{-7})^{L_1+L_2}]$$

$$\frac{N_1.N_2}{10^7} = [10^7(1-10^{-7})^{L_1+L_2}],$$

ou seja, a soma dos logaritmos(L_1+L_2) não será o produto $N_1.N_2$, mas sim $\frac{N_1.N_2}{10^7}$.

Napier trabalhou por anos antes de publicar seus resultados no livro "*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*" (Uma Descrição da Maravilha dos Logaritmos), em 1614. No prefácio do livro, Napier explica seu pensamento por trás de sua grande descoberta (citamos a tradução do Inglês de 1616 do original em latim de 1614):

> *"Vendo que não há nada que é tão problemático para prática matemática, nem que possa mais molestar e prejudicar as pessoas que fazem contas, do que as multiplicações, divisões, extrações quadrados e cúbicos de grandes números, que além da despesa tediosa de tempo são, na maior parte, sujeitas a muitos erros escorregadios, comecei a considerar, portanto, em minha mente a arte, o acerto e pronto, eu poderia remover esses obstáculos. Por ter pensado sobre muitas coisas a este propósito, que descobri em comprimento algumas regras breves excelentes para serem tratadas (talvez) a seguir. Mas entre todos, ninguém mais proveitoso do que este procedimento que, juntamente com as rejeições a multiplicações difíceis e tediosas, divisões, e extrações de raízes, por acaso, também rejeitarei até mesmo os próprios números que estão a ser multiplicados, divididos e resolvidos em raízes de trabalho, e colocarei outros números em seu lugar que realizam tanto quanto eles podem fazer, apenas pela adição e subtração, divisão por dois ou divisão por três."*
>
> *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio – prefacio – Tradução por Edward Wright*[3]

Essa publicação do sistema de logaritmos teve sucesso imediato, e entre seus admiradores mais entusiasmados estava *Henry Briggs*, que em 1615 o visitou em sua casa na Escócia. Nesse encontro, surgiu o debate sobre o uso de potências de base 10, para evitar frações, e que o logaritmo de 1 nessa nova base fosse igual a 0, já que Napier havia considerado que o logaritmo de 10^7 era 0. Com isso, as propriedades que relacionavam as operações de adição e multiplicação ou subtração e divisão novamente fariam sentido.

Dessa forma, se um número n for escrito como $n = 10^P$, então P é o logaritmo decimal de n.

Napier já não tinha mais energia para trabalhar nas novas ideias, pois se encontrava bastante debilitado por conta da idade. Seu falecimento ocorreu em quatro de abril de 1617, aos 67 anos, vítima de um ataque cardíaco. Seu filho Robert se encarregou de publicar em 1619 seu segundo trabalho sobre logaritmos *"Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio"* (A Construção dos Maravilhosos Logaritmos Canônicos) no qual mostrava o método utilizado para a construção de suas tabelas logarítmicas.

---

[3] *Edward Wright* traduziu do Latim para o Inglês e *Raquel Molina* traduziu do Inglês para o Português.

1.2 SOBRE HENRY BRIGGS

O matemático inglês Henry Briggs ($1561 - 1630$) foi o principal responsável pela divulgação e rápida aceitação dos logaritmos pelos cientistas da época. Formado na Universidade de Cambridge foi o primeiro professor de geometria em Oxford, publicou trabalhos sobre navegação, astronomia e matemática. Partindo dos estudos iniciais de Napier, Briggs começou também a trabalhar no cálculo de logaritmos. Depois do encontro com Napier na Escócia e do ajuste dos resultados anteriores de Napier para base 10, ainda em 1617, publicou seu primeiro trabalho sobre logaritmos, *"Logarithmorum Chilias Prima"* (Logaritmos do Primeiro Milhar), homenageando o amigo recém-falecido, no qual apresentou uma tabela de logaritmos na base 10 para os números naturais de $1\ a\ 1.000$, com quatorze casas decimais. Em 1624, publicou o tratado *"Arithmetica Logarithmica"* (Aritmética Logarítmica), incluindo outra tabela de logaritmos para os números naturais de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, calculados novamente até a décima quarta casa decimal, que foi utilizada até o século XIX. Nessa mesma obra, surgem as palavras "característica" e "mantissa", necessárias para o uso das tábuas (tabelas) de logaritmos.

As tabuas de logaritmos rapidamente se difundiram pela Europa, sendo introduzidas na Itália em 1624, pelo sacerdote jesuíta e matemático italiano Francesco Cavalieri ($1598\ - 1647$), na França em 1626, por Edmund Wingate ($1596\ -\ 1656$) e na Alemanha, entre 1625 e 1629, pelo próprio Kepler. Em 1628, o livreiro e editor holandês Adriaan Vlacq ($1600 - 1667$), publicou em Gouda, Holanda, a tabela completa de Briggs contendo os logaritmos dos números naturais de 1 a 100.000, com dez casas decimais, e se tornou padrão por mais de três séculos. Mais tarde, em 1633, as tabelas foram republicadas em Londres sob o título de "Trigonometria Britannica" pelo matemático inglês Henry Gellibrand ($1597 - 1636$), atendendo postumamente a um pedido de Briggs, que falecera em 1630.

1.3 COMO UTILIZAR UMA TABUA DE LOGARITMOS DECIMAIS

Para consultar uma tabua de logaritmos decimais, devem ser conhecidos os conceitos de *Característica* e *Mantissa*, apresentados na obra de Briggs publicada em 1624.

Quando um número não for potência de 10 (assim seu logaritmo seria a própria potência), seu logaritmo será composto por uma parte inteira e uma parte decimal. A parte decimal é denominada *Mantissa* e a *Característica* é dada pelo inteiro determinado pelo número de algarismos da parte inteira do número dado, diminuído de 1 unidade, assim, o logaritmo é composto por *Característica* + *Mantissa*.

Por exemplo, do $log\ 27\ =\ 1{,}43136$, como 27 possui dois algarismos, podemos dizer que sua *Característica* é o número $2 - 1 = 1$ e a *Mantissa* é 43136.

Se o número N for decimal com a parte inteira nula ($N\ <\ 1$), sua característica é negativa, representada por uma barra vertical sobre o número, e é determinada pela quantidade de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo, incluindo o zero à esquerda da vírgula.

Por exemplo, do $log\ 0{,}006534\ =\ \overline{3}{,}81518$ podemos dizer que sua *Característica* é $\overline{3}$ ou $-\ 3$, pois o número $0{,}006534$ possui três zeros precedendo o número 6, que é o primeiro algarismo significativo, e sua *Mantissa* é 81518.

Vamos, agora, resolver alguns exemplos de cálculos de logaritmos decimais utilizando as tábuas de logaritmos de Briggs, tendo como base um [4]livro que utiliza a aproximação com sete casas decimais.

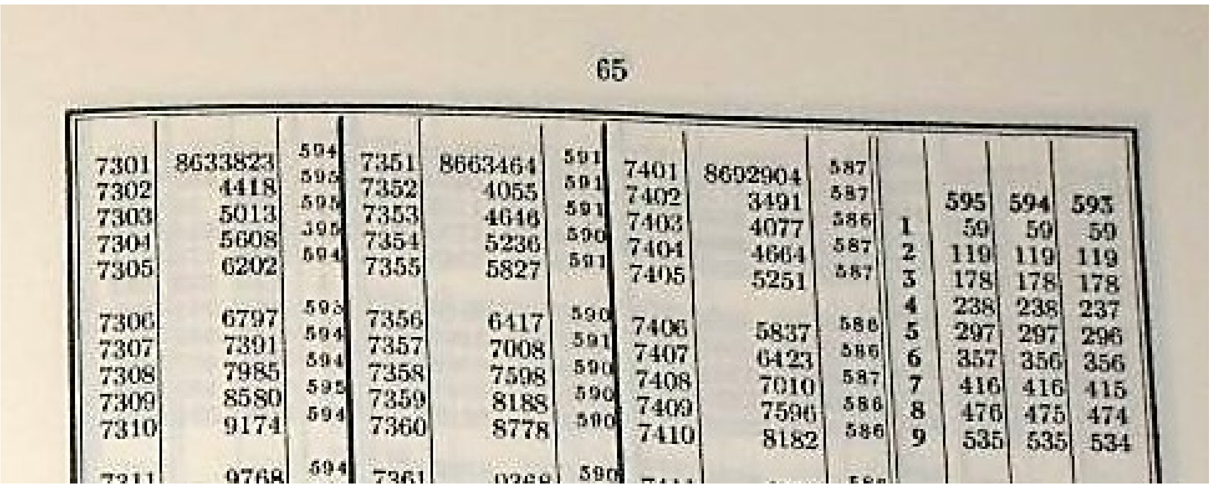
Ex. 1: Vamos determinar o logaritmo do número 7301.

Como $N\ \in Z$, sua *Característica* é a quantidade de algarismos menos 1, neste caso: $4 - 1\ =\ 3$. Agora, devemos procurar em uma tábua de logaritmos decimais,

[4] MARISTAS, Irmãos. Tábuas de Logaritmos. FTD, 1973.

o número na coluna nomeada de N e encontrar a mantissa correspondente na coluna nomeada log.

Figura 2 –pg 65 do livro *Tabuas de Logaritmos, irmãos Maristas*



65

7301	8633823	594	7351	8663464	591	7401	8692904	587				
7302	4418	593	7352	4055	591	7402	3491	587		595	594	593
7303	5013	595	7353	4646	591	7403	4077	586	1	59	59	59
7304	5608	595	7354	5236	590	7404	4664	587	2	119	119	119
7305	6202	594	7355	5827	591	7405	5251	587	3	178	178	178
									4	238	238	237
7306	6797	593	7356	6417	590	7406	5837	586	5	297	297	296
7307	7391	594	7357	7008	591	7407	6423	586	6	357	356	356
7308	7985	594	7358	7598	590	7408	7010	587	7	416	416	415
7309	8580	595	7359	8188	590	7409	7596	586	8	476	475	474
7310	9174	594	7360	8778	590	7410	8182	586	9	535	535	534
7311	9768	594	7361	[illegible]	590	[illegible]	[illegible]	[illegible]				

Neste caso, a mantissa correspondente ao número 7301 é 8633823.

Então temos que:

$$\log 7301 = 3{,}8633823,$$

onde 3 (número à esquerda da vírgula) é a *Característica* e 8633823 (número à direita da vírgula) é a *Mantissa*.

Ex. 2: Determinar $log\ 7402$

A *Característica*, neste caso é a mesma do exemplo anterior, 3. Procurando na tábua de logaritmos, na coluna N o número 7402, encontramos a *Mantissa* correspondente na coluna log, que é 3491, mas esse número corresponde aos quatro últimos algarismos da *Mantissa*, já que os primeiros algarismos são iguais ao do número anterior na tabela, 7401, e, por isso, foi omitido. Ou seja, a *Mantissa* de 7402 é 8693491.

Portanto:

$$\log 7402 = 3{,}8693491,$$

onde 3 (número à esquerda da vírgula) é a *Característica* e 8693491 (número à direita da vírgula) é a *Mantissa*.

Ex. 3: Determinar $log\ 0{,}007402$

Como N é um número decimal menor que 1, sua *Característica* é dada pela quantidade de zeros, que neste caso são três e representamos por: $\bar{3}$.

Agora, procuramos na tábua de logaritmos, na coluna N, pelo número 7402 e encontramos a *Mantissa* correspondente na coluna log, que é 8693491.

Temos então que:

$$\log 0{,}007402 = \bar{3}, 8693491$$

onde $\bar{3}$ (número à esquerda da vírgula) é a *Característica* e 8693491 (número à direita da vírgula) é a *Mantissa*.

Importante: Se fizermos a conta através de uma calculadora, veremos que:

$$\log 0{,}007402 = -2{,}1306509,$$

que é um valor diferente do que encontramos, simplesmente por expressar o valor do logaritmo de uma forma diferente. Para transformar o valor encontrado em um número real para trabalharmos em cálculos, devemos fazer uma operação simples: basta somamos a *Característica* (negativa) com a *Mantissa*, como já mencionamos anteriormente, desta forma:

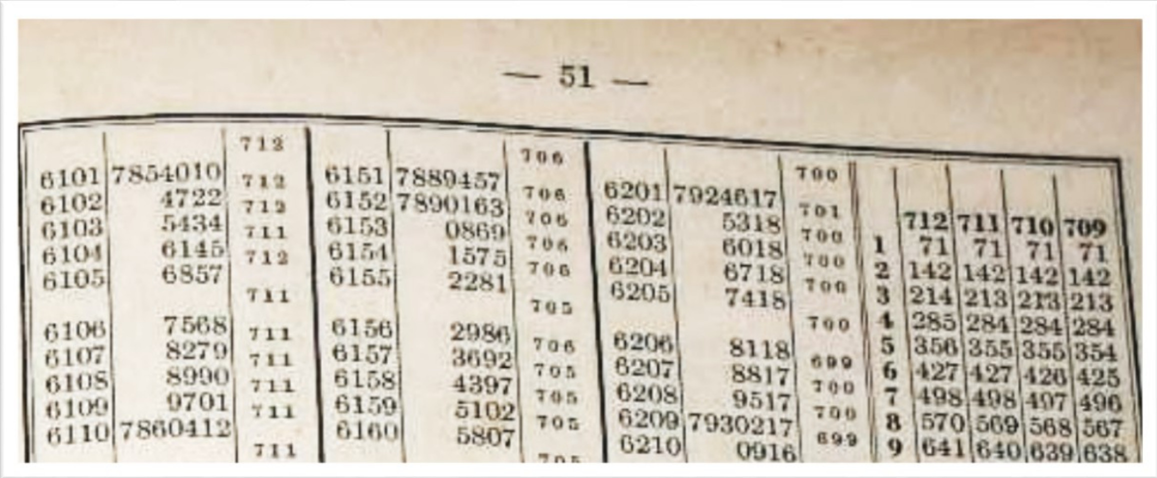
$$0{,}8693491 + (-3) = \ -2{,}1306509$$

que é exatamente o valor para $log\ 0{,}007402$ encontrado na calculadora.

Ex. 4: Determinar $log\ 0{,}00006109$

Neste caso, a *Característica* é igual a $\bar{5}$. Procuramos na tábua de logaritmos, na coluna *N* pelo número 6109.

Figura 2 – pg 51 do livro *Tabuas de Logaritmos, irmãos Maristas*


— 51 —

		712			706			700
6101	7854010	712	6151	7889457	706	6201	7924617	701
6102	4722	712	6152	7890163	706	6202	5318	700
6103	5434	711	6153	0869	706	6203	6018	700
6104	6145	712	6154	1575	706	6204	6718	700
6105	6857	711	6155	2281	705	6205	7418	700
6106	7568	711	6156	2986	706	6206	8118	699
6107	8279	711	6157	3692	705	6207	8817	700
6108	8990	711	6158	4397	705	6208	9517	700
6109	9701	711	6159	5102	705	6209	7930217	699
6110	7860412	711	6160	5807	705	6210	0916	

	712	711	710	709
1	71	71	71	71
2	142	142	142	142
3	214	213	213	213
4	285	284	284	284
5	356	355	355	354
6	427	427	426	425
7	498	498	497	496
8	570	569	568	567
9	641	640	639	638

Encontramos a *Mantissa* correspondente na coluna log, igual a 7859701. Temos então que:

$$\log 0{,}00006109 = \bar{5}, 7859701,$$

e efetuando a soma da *Característica* com a *Mantissa*:

$$0{,}7859701 + (-5) = -4{,}2140299,$$

que representa o valor encontrado em qualquer calculadora.

Essas tábuas publicadas a partir dos estudos de Napier e Briggs serviram de referencial por mais de três séculos, quando começaram a surgir as primeiras calculadoras científicas, que faziam o papel das tábuas de logaritmo em um tempo consideravelmente menor.

1.4 CRIAÇÃO DE UMA TÁBUA DE LOGARITMOS DECIMAIS

Para detalhes, ver ANEXO A, que detalha a construção de uma tabela de logaritmos feita por Napier e que, após sua morte, foi publicada por seu filho na obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio"*, em 1619.

Nesta seção, vamos mostrar como Briggs determinou o valor de $log2$ através de um processo de aproximações sucessivas.

Seja $log2 = x$, então teremos $10^x = 2$. Inicialmente o número 2 foi situado entre duas potências de 10 com expoentes inteiros e sucessivos. Teremos:

$$1 < 2 < 10$$

$$10^0 < 10^x < 10^1$$

$$0 < x < 1$$

$$0 < log2 < 1$$

Com isso, já temos a primeira aproximação para $log2$. Agora, fazendo a média geométrica entre 10^0 e 10^1, teremos:

$$\sqrt{10^0.10^1} = \sqrt{10} = 10^{0,5} \cong 3{,}1622776$$

Temos então uma nova aproximação para log2:

$$0 < log2 < 0{,}5$$

Vale ressaltar que a ideia de usar a média geométrica e não a aritmética foi para continuar tendo potências de base 10.

Repetindo as operações de média geométrica tomando sempre os números cada vez mais próximos, teremos:

$$\sqrt{10^{0}.10^{0,5}} = 10^{0,25} \cong 1,7782793$$
$$0,25 < log2 < 0,5$$

$$\sqrt{10^{0,25}.10^{0,5}} = 10^{0,375} \cong 2,371374$$
$$0,25 < log2 < 0,375$$

$$\sqrt{10^{0,25}.10^{0,375}} = 10^{0,3125} \cong 2,053525$$
$$0,25 < log2 < 0,3125$$

$$\sqrt{10^{0,25}.10^{0,3125}} = 10^{0,28125} \cong 1,910953$$
$$0,28125 < log2 < 0,3125$$

$$\sqrt{10^{0,28125}.10^{0,3125}} = 10^{0,296875} \cong 1,980957$$
$$0,296875 < log2 < 0,3125$$

$$\sqrt{10^{0,296875}.10^{0,3125}} = 10^{0,304688} \cong 2,016915$$
$$0,296875 < log2 < 0,304688$$

$$\sqrt{10^{0,296875}.10^{0,304688}} = 10^{0,300781} \cong 1,998855$$
$$0,300781 < log2 < 0,304688$$

$$\sqrt{10^{0,300781}.10^{0,304688}} = 10^{0,302734} \cong 2,007864$$
$$0,300781 < log2 < 0,302734$$

$$\sqrt{10^{0,300781}.10^{0,302734}} = 10^{0,301758} \cong 2,003355$$
$$0,300781 < log2 < 0,301758$$
$$\sqrt{10^{0,300781}.10^{0,301758}} = 10^{0,30127} \cong 2,001103$$
$$0,300781 < log2 < 0,30127$$

$$\sqrt{10^{0,300781}.10^{0,30127}} = 10^{0,301025} \cong 1,99979$$
$$0,301025 < log2 < 0,30127$$

$$\sqrt{10^{0,301025}.\,10^{0,30127}} = 10^{0,301147} \cong 2{,}000541$$
$$0{,}301025 < log2 < 0{,}301147$$

$$\sqrt{10^{0,301025}.\,10^{0,301147}} = 10^{0,301086} \cong 2{,}00026$$
$$0{,}301025 < log2 < 0{,}301086$$

$$\sqrt{10^{0,301025}.\,10^{0,301086}} = 10^{0,301056} \cong 2{,}000119$$
$$0{,}301025 < log2 < 0{,}301056$$

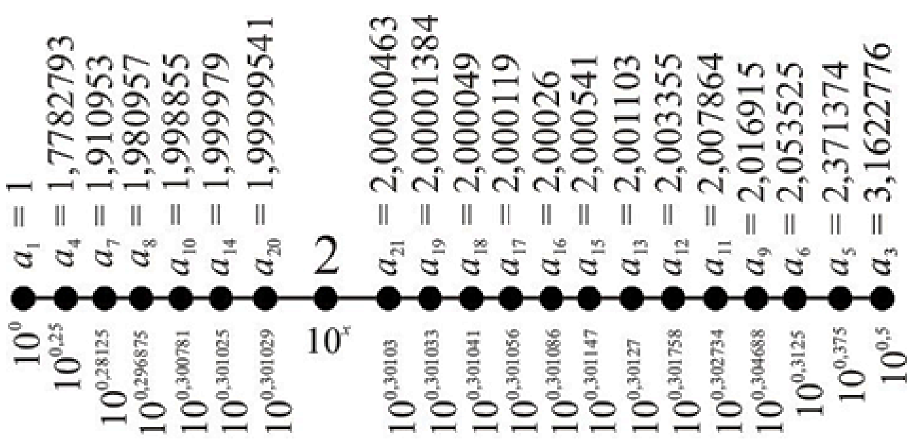
$$\sqrt{10^{0,301025}.\,10^{0,301041}} = 10^{0,301033} \cong 2{,}00001384$$
$$0{,}301025 < log2 < 0{,}301033$$

$$\sqrt{10^{0,301025}.\,10^{0,301033}} = 10^{0,301029} \cong 1{,}99999541$$
$$0{,}301029 < log2 < 0{,}301033$$

$$\sqrt{10^{0,301029}.\,10^{0,301033}} = 10^{0,30103} \cong 2{,}00000463$$
$$0{,}301029 < log2 < 0{,}30103$$

Podemos perceber como as potências de 10 se aproximam do número 2.

Figura 4 – Representação da aproximação ao número 2



Com uma aproximação de 5 casas decimais, podemos concluir que

$$log2 = 0{,}30103.$$

Lembrando que a tabela que Briggs construiu, inicialmente, apresentava os logaritmos dos números inteiros de 1 a 1.000, com precisão até a $14^{\underline{a}}$ casa decimal, ou seja, ele não parava na $5^{\underline{a}}$ casa decimal. Porém a grande maioria desses logaritmos foi obtida recorrendo-se a outros anteriores calculados. Vejam alguns exemplos:

Tendo $log3 = 0{,}47712$ sido calculado pelo mesmo processo que vimos anteriormente para o $log2 = 0{,}30103$, podemos determinar:

a) log4

$$4 = 2^2 = (10^{0,30103})^2$$

Então,

$$4 = 10^{0,60206}$$

Ou seja,

$$log4 = 0{,}60206$$

b) log5

$$5 = \frac{10}{2} = \frac{10}{10^{0,30103}} = 10^{1-0,30103}$$

Então,

$$5 = 10^{0,69897}$$

Ou seja,

$$log5 = 0{,}69897$$

c) log6

$$6 = 2\,.\,3 = 10^{0,30103}.\,10^{0,47712}$$

Então,

$$6 = 10^{0,77815}$$

Ou seja,

$$log6 = 0,77815$$

d) log0,5

$$0,5 = \frac{1}{2} = \frac{10^{0}}{10^{0,30103}} = 10^{-0,30103}$$

Então,

$$0,5 = 10^{-0,30103}$$

Ou seja,

$$log0,5 = -0,30103$$

e) log1,2

$$1,2 = \frac{6}{5} = \frac{10^{0,77815}}{10^{0,69897}} = 10^{0,77815-0,69897}$$

Então,

$$1,2 = 10^{0,07918}$$

Ou seja,

$$log1,2 = 0,07918$$

2 LOGARITMOS NATURAIS OU NEPERIANOS

Esta seção teve por base os conteúdos contidos nos livros ***e: A história de um Número***[5] e ***Logaritmos***[6] sobre logaritmos naturais. Aproveitamos as ideias iniciais sobre o logaritmo de Napier e a nomeação de logaritmo natural, ou neperiano, sugerida como homenagem ao inventor dos logaritmos, para explicar algumas dúvidas comuns.

2.1 O LOGARITMO NATURAL

Poucas são as curvas que exercem tanto fascínio nos cientistas, artistas e naturalistas quanto a espiral logarítmica. Nomeada de *"spira mirabilis"* por Jakob Bernoulli, a espiral possui propriedades matemáticas notáveis que a tornam única entre as curvas planas. Sua forma muitas vezes graciosa já foi muito utilizada como modelo decorativo desde a antiguidade e é a curva que ocorre com mais frequência na natureza e sempre com uma precisão espantosa, como é o caso da concha do náutilo.

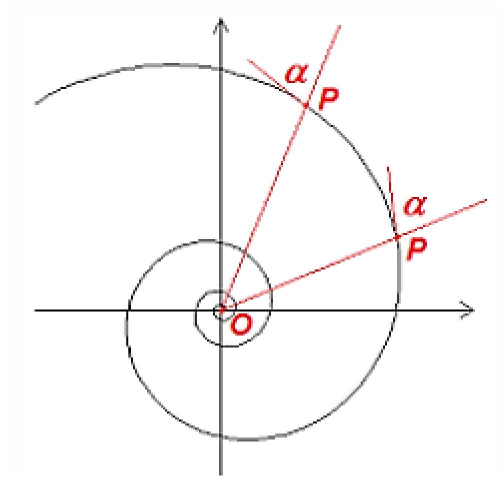
Figura 5 – concha do náutilo

Sua fórmula (em coordenadas polares) é dada por: $r(\theta) = R.e^{\theta,\text{cotg}\alpha}$,onde r é a distância à origem *O* de um ponto da curva em função de θ, R é o raio associado a

[5] Maor, Eli. **e: A história de um Número**. Rio de Janeiro: Record, 2008
[6] LIMA, Elon Lages. **Logaritmos.** Rio de Janeiro: SBM, 2013

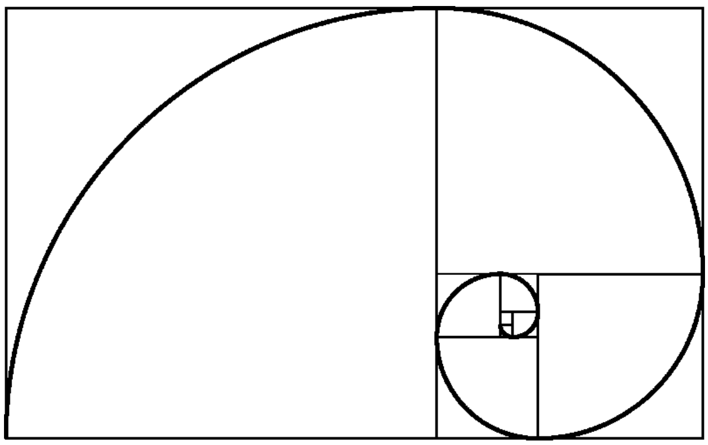
$\theta = 0°$, θ é o ângulo e e é o número de Euler. Equivalentemente, a expressão pode ser dada na forma $log_e\left(\frac{r}{R}\right) = \theta . cot\ \alpha$, que é a origem do nome de espiral logarítmica.

Figura 6 - A espiral logarítmica é uma curva tal que a amplitude do ângulo formado pela tangente em qualquer dos seus pontos *P* com a reta *OP* é constante.



Dois casos especiais: se a amplitude α for 90º, a espiral é uma circunferência; a espiral de ouro também é um caso específico da espiral logarítmica no qual $e^{b.\theta} = \varphi$,quando θ é um ângulo reto, onde φ é a razão áurea e b um número real.

Figura 7 – A espiral logarítmica na qual $e^{b.\theta} = \varphi$ onde φ é a razão áurea



Esse padrão de crescimento é tão comum que era chamado de “lei da natureza” e daí a origem do nome logaritmo natural (ln), assim, podemos escrever na forma

$$ln\left(\frac{r}{R}\right) = \theta . cot\ \alpha.$$

2.1.1 O LOGARITMO NATURAL COMO UMA FAIXA DE HIPÉRBOLE

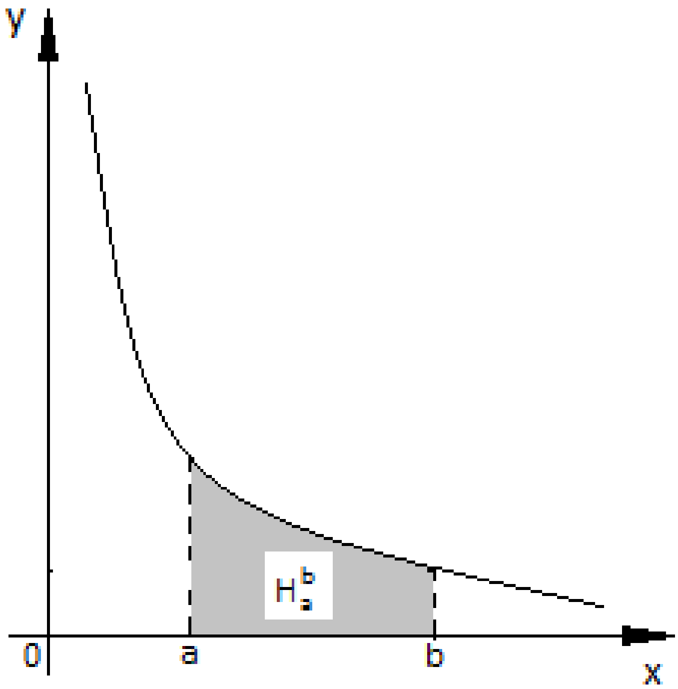
Formalmente, seja $H = \{(x, 1/x);\ x > 0\}$ o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$. Notemos que H é o gráfico da função $h: IR^+ \rightarrow IR, h(x) = 1/x$.

Dados $a, b \in IR^+$, a região plana H_a^b formada pelo conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq 1/x$, é conhecida como uma faixa de hipérbole.

Observemos que H_a^b representa o conjunto do plano limitado pelas retas verticais

$x = a, x = b$, pelo eixo das abscissas e por H.

Figura 8 – Representação gráfica da faixa H_a^b

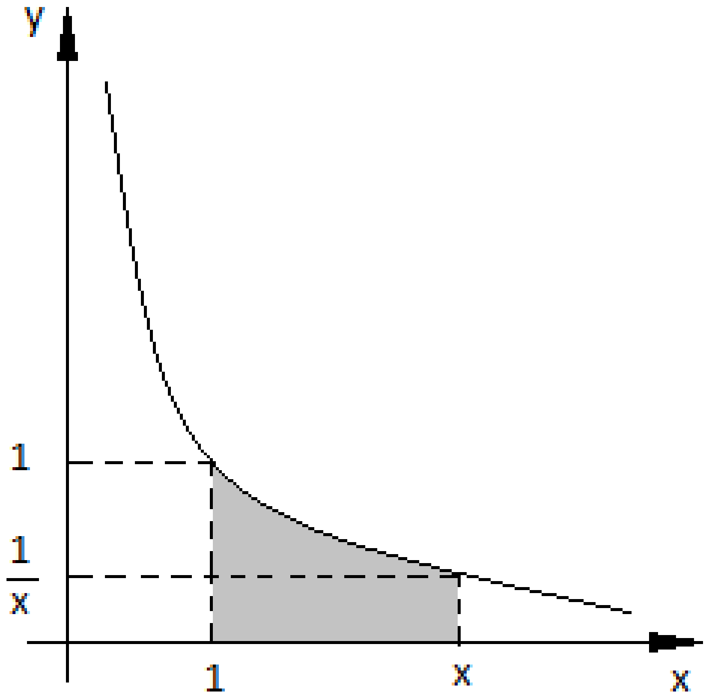


Seja x um número real positivo. Define-se o logaritmo de x na base e como logaritmo natural de x, denotado por lnx e representado como a área da faixa de hipérbole H_1^x. Assim, por definição, quando $x > 0$, temos:

$$lnx = Área(H_1^x)$$

A área em questão pode ser representada pela figura:

Figura 9 – Área correspondente à faixa $H_1^x = lnx$



Podemos perceber que, quando $x = 1$, a faixa H_1^1 traduz-se em um segmento de reta, portanto, possui área nula. Assim:

$$ln1 = 0;$$
$$ln\,x > 0 \;\; se \;\; x > 1;$$
$$lnx < 0 \;\; se \; 0 < x < 1.$$

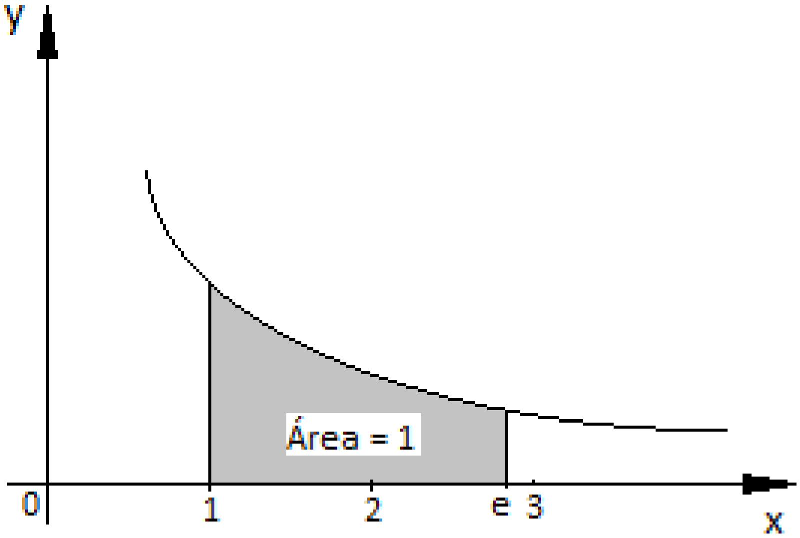
Em particular, quando $x = e$, teremos a faixa H_1^e:

$$\log_e e = \; lne = 1,$$

ou seja, a área da faixa é igual a 1.

A área em questão pode ser representada pela figura:

Figura 10 – Representação gráfica da faixa $H_1^e = lne$



A área da região é igual a lnx, e não está definida quando $x < 0$. Esse logaritmo é chamado logaritmo natural ou logaritmo neperiano, mas não como logaritmo de Napier, pois este está definido com valores diferentes, como vimos no Capítulo 1, e sim como uma homenagem ao criador John Napier.

Para calcular, por exemplo, um valor aproximado para $ln2$, subdividiremos a faixa de intervalo $[1,2]$ em dez partes iguais (quanto mais divisões, mais preciso o valor), por meio dos pontos de abscissa:

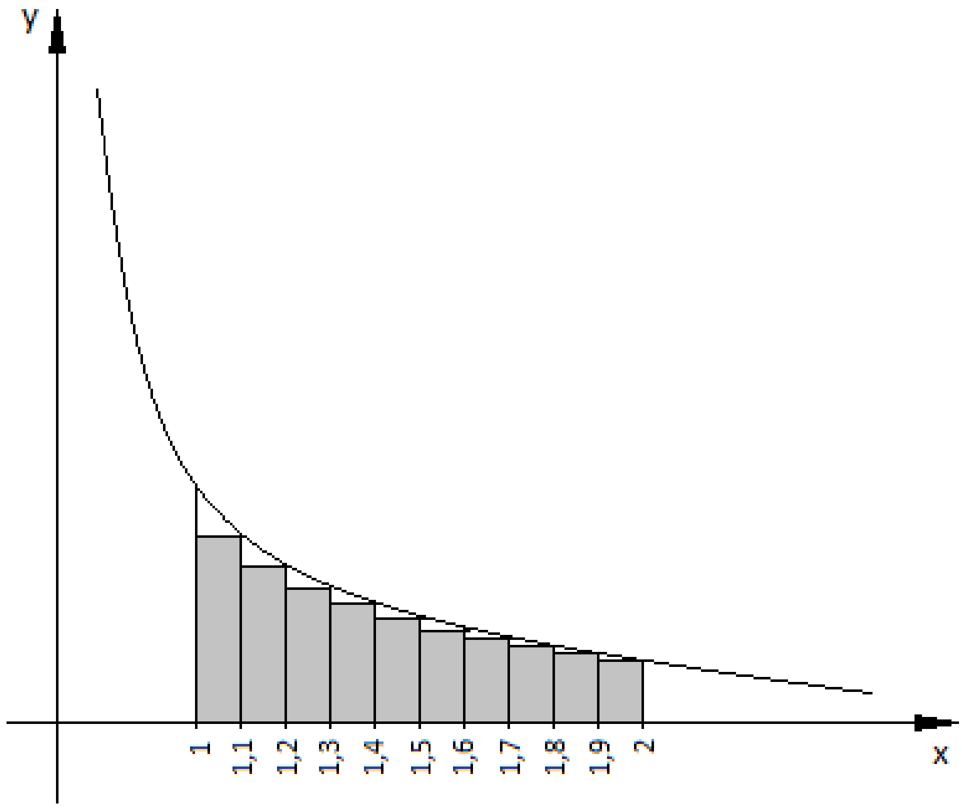
$$1 \quad 1{,}1 \quad 1{,}2 \quad 1{,}3 \quad 1{,}4 \quad 1{,}5 \quad 1{,}6 \quad 1{,}7 \quad 1{,}8 \quad 1{,}9 \quad 2$$

Os valores de $1/x$ quando x assume os 11 valores acima, aproximados com três casas decimais, são:

$$1 \quad 0{,}909 \quad 0{,}833 \quad 0{,}769 \quad 0{,}714 \quad 0{,}666 \quad 0{,}625 \quad 0{,}588 \quad 0{,}555 \quad 0{,}526 \quad 0{,}500$$

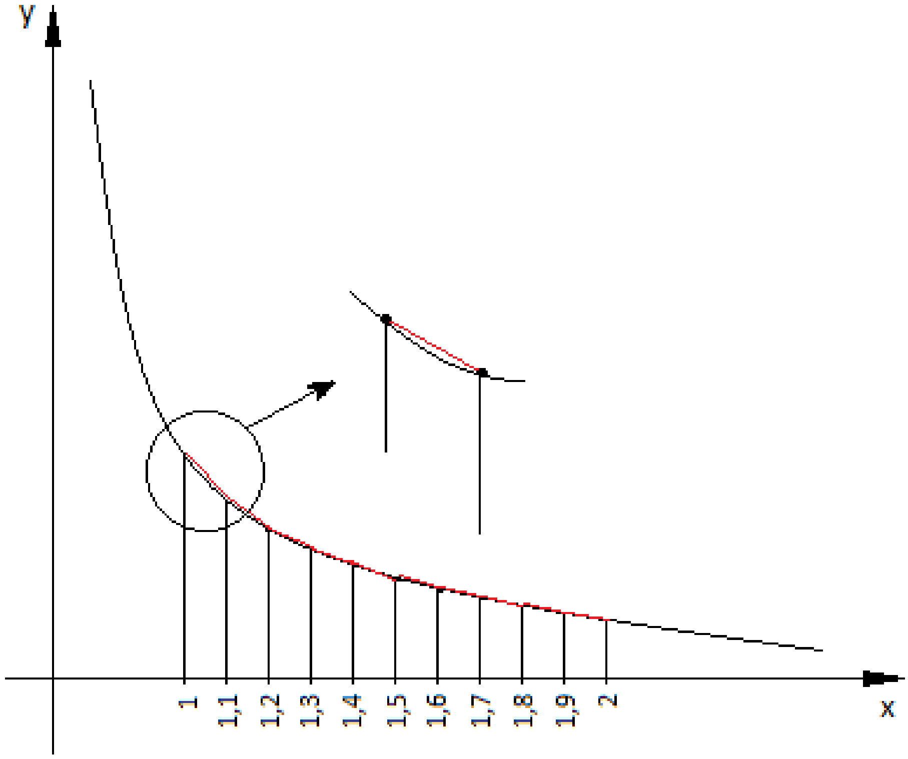
Uma aproximação inferior para $ln2$ será fornecida pela área do polígono retangular inscrito na faixa H_1^2, formado por dez retângulos cujas bases medem $0{,}1$ e suas alturas são os dez últimos valores de $1/x$ na lista acima. A área desse polígono retangular será, portanto, igual a $0{,}6685$. Obtemos assim $0{,}6685$ como um valor aproximado, à esquerda de $ln2$.

Figura 11 – Polígono retangular inscrito na faixa H_1^2, formado por dez retângulos



Para ter uma aproximação à direita de $ln2$, consideramos os trapézios circunscritos à faixa H_1^2 determinados na mesma subdivisão.

Figura 12 - Trapézios circunscritos à faixa H_1^2 determinados na mesma subdivisão



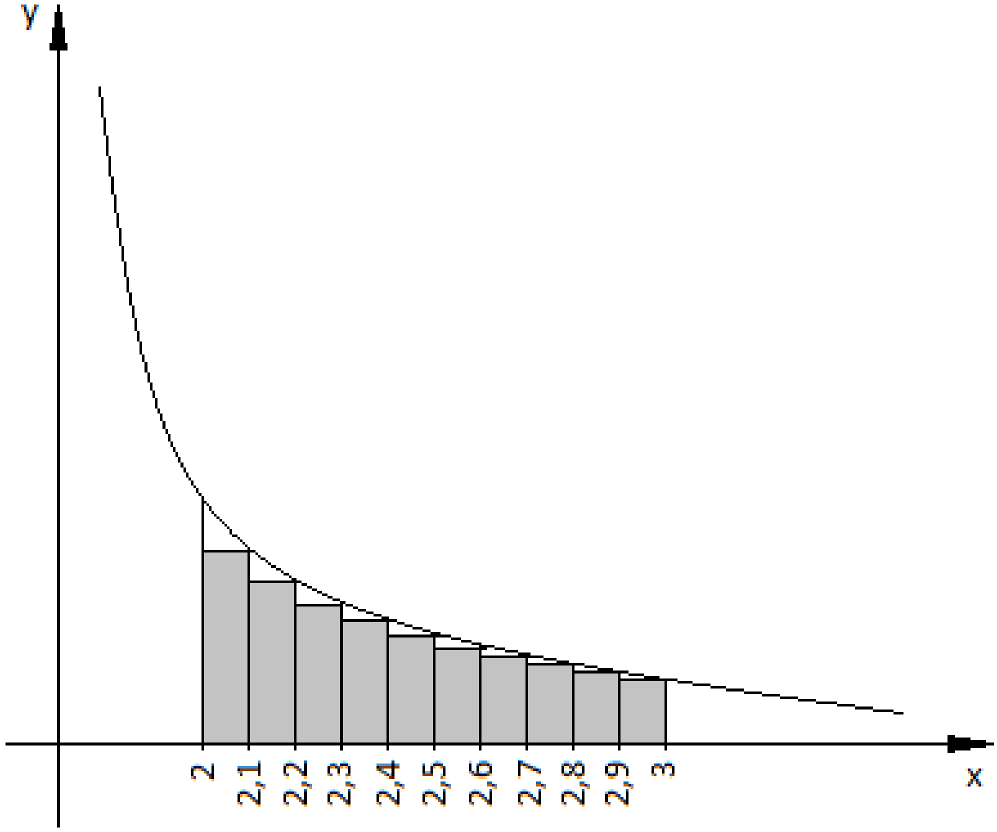
A soma das áreas dos dez trapézios será igual a $0{,}6935$, ou seja, $ln2$ é um número compreendido entre $0{,}6685$ e $0{,}6935$:

$$0{,}6685 < ln2 < 0{,}6935$$

Como podemos perceber, as aproximações por trapézios (vide figura) são melhores e mais próximas de um valor de $ln2$, pois as lacunas deixadas entre o polígono e a curva são cada vez menores à medida que criamos mais subdivisões na faixa da hipérbole. É considerado como a melhor aproximação, com quatro casas decimais, para $ln2$ o valor $0{,}6931$.

Realizando as mesmas operações e aproximações, podemos chegar a uma conclusão sobre $ln3$:

Figura 13 – Polígono retangular inscrito na faixa H_2^3, formado por dez retângulos



Para calcular um valor aproximado para $ln3$, subdividiremos a faixa de intervalo $[2,3]$ em dez partes iguais, por meio dos pontos de abscissa:

$2 \quad 2{,}1 \quad 2{,}2 \quad 2{,}3 \quad 2{,}4 \quad 2{,}5 \quad 2{,}6 \quad 2{,}7 \quad 2{,}8 \quad 2{,}9 \quad 3$

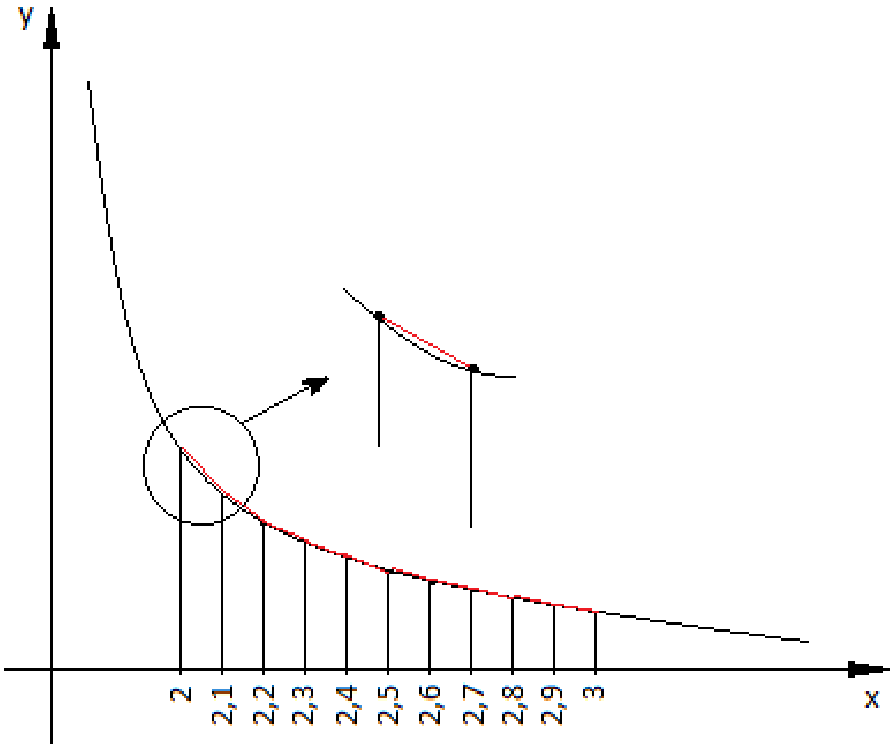
Os valores de $1/x$ quando x assume os 11 valores acima, aproximados com três casas decimais, são:

$0{,}5 \quad 0{,}476 \quad 0{,}454 \quad 0{,}434 \quad 0{,}416 \quad 0{,}4 \quad 0{,}384 \quad 0{,}37 \quad 0{,}357 \quad 0{,}344 \quad 0{,}333$

Uma aproximação inferior para $ln3$ será fornecida pela área do polígono retangular inscrito na faixa H_2^3, formado por dez retângulos cujas bases medem $0{,}1$ e suas alturas são os dez últimos valores de $1/x$ na lista acima, somado ao valor anterior calculado de $ln2$, que é representado pela faixa H_1^2 . A área desse polígono retangular será igual a $0{,}3968$ e, somando ao valor do polígono retangular correspondente a $ln2$, $0{,}6685$, obtemos $1{,}0653$ como uma aproximação à esquerda de $ln3$.

Para ter uma aproximação à direita de $ln3$, consideramos os trapézios circunscritos à faixa H_2^3 determinados na mesma subdivisão para posteriormente somarmos ao valor das áreas dos trapézios obtidos na faixa H_1^2 correspondente ao valor de $ln2$. Como foi ressaltado antes, esse método fornece uma melhor aproximação para $ln3$.

Figura 14 – Trapézios circunscritos à faixa H_2^3 determinados na mesma subdivisão



A soma das áreas dos dez trapézios será igual a $0{,}4052$. Então, adicionando à soma das áreas dos trapézios da faixa H_1^2, $0{,}6935$, teremos $1{,}0987$ como uma aproximação à direita de $ln3$. Podemos concluir que $ln3$ é um número compreendido entre $1{,}0653$ e $1{,}0987$:

$$1{,}0653 < ln3 < 1{,}0987$$

Como ressaltamos no cálculo de $ln2$, quanto mais subdivisões forem feitas na faixa da hipérbole, melhor aproximado será o valor de $ln3$. É considerado a melhor aproximação, com quatro casas decimais, para $ln3$ o valor $1{,}0986$.

2.2 O NÚMERO e

Do cálculo infinitesimal, sabemos que $\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ([7]). Nesta seção, usaremos o gráfico da curva $y = \frac{1}{x}$ para mostrar que o número e, definido como base do logaritmo natural, coincide com os limites:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{, que quando } x = \frac{1}{n}\text{, temos}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Consequentemente, se α ∈ IR, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}, \forall \alpha \in IR$$

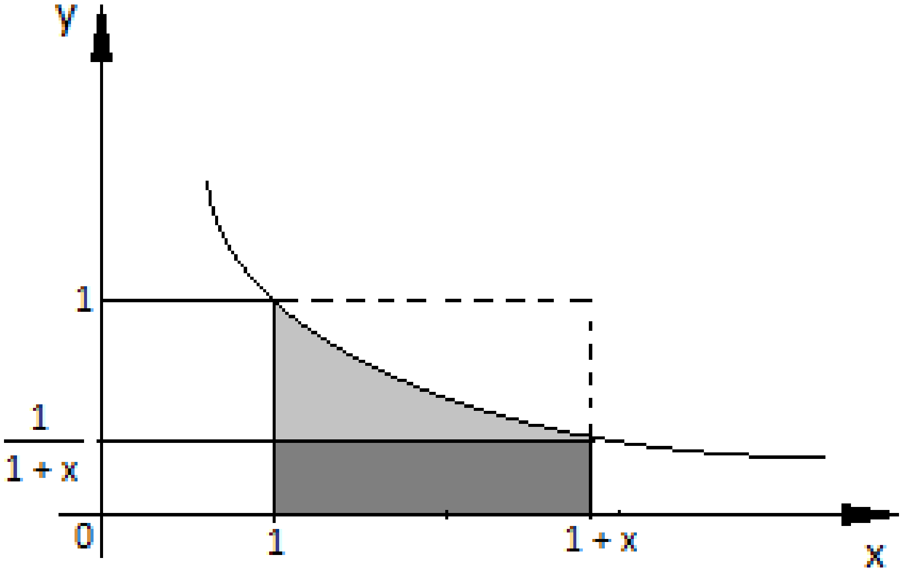
O limite mais usual para representação do número e é o limite da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando $n \to +\infty$, o que é o mesmo dizer que e seria o número real cujos valores aproximados por falta são os números racionais da forma $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in IN$. Quanto maior for o n, melhores serão as aproximações.

Considere o gráfico da curva $y = \frac{1}{x}$, utilizando a faixa H_1^{1+x}.

---

[7] Cf. Stewart, JAMES. Ed Cengage Learning: 5ª Ed. pg 203 - CÁLCULO.

Figura 15 – Gráfico da faixa H_1^{1+x}



Observemos um retângulo de base x e altura $\frac{1}{1+x}$, contido na faixa H_1^{1+x}. Essa faixa está contida em um outro retângulo com mesma base do anterior, mas de altura igual a 1. Fazendo uma comparação dessas áreas, temos:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Dividindo ambos os termos por x, teremos

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Utilizando agora a substituição $x = 1/n$, segue que

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1,$$

e consequentemente

$$e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,$$

para todo n natural. Quando n é suficientemente grande, $\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1, logo, $e^{\frac{n}{n+1}}$ se aproxima de e. Então, pelas desigualdades anteriores, podemos concluir que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Por tratarmos da importância do ensino do logaritmo nas salas de aula do ensino básico, escolhemos essa demonstração por ela ser geométrica e de fácil compreensão. Ressaltamos que uma das melhores formas do aluno não encarar o tema como um mero texto matemático, é a forma visual, pois o aluno consegue de maneira mais intuitiva interpretar o assunto logaritmo.

2.3 LOGARITMO DE NAPIER, LOGARITMO NATURAL E LOGARITMO NEPERIANO

Pela definição de Napier, $N = 10^7.\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, onde N é um número e L o seu logaritmo[8], podemos escrever:

$$N = 10^7.\left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^{\frac{L}{10^7}}$$

Podemos perceber mais uma vez que, à medida que aumentamos o valor na potência de 10, o número $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ se aproxima de $\frac{1}{e}$.

De fato:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{-x}\right)\right]^x,$$

considerando $n = -x \rightarrow -n = x$, temos que

[8] Ver definição anterior na página 6

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Segundo Lima (2012, p.58) “O logaritmo que estamos definindo é, por alguns autores, chamado logaritmo neperiano[...]”, mas alguns autores chamam o logaritmo natural de “logaritmo neperiano” em homenagem a Napier e não podemos confundir o logaritmo utilizado inicialmente por Napier com o “logaritmo neperiano”, ou natural.

3 OS PARÂMETROS CURRICULARES DO ENSINO MÉDIO

A reformulação do ensino médio no Brasil, estabelecida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1996, regulamentada em 1999 pelas Diretrizes do Conselho Nacional de Educação e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais procurou melhorar a abordagem do ensino e atualizar a educação brasileira, mas a expansão exponencial da educação no Brasil demanda novas transformações de qualidade para se adequarem ao público atual, bem diferente daquele quando foram criados os PCNEM.

O papel principal dessa nova Lei, e que orienta a transformação, é estabelecer o ensino médio como a etapa conclusiva da educação básica de toda a população estudantil, o que é um grande desafio para a comunidade educacional, pois deverão pôr em prática propostas que superem as limitações do antigo ensino médio, organizado em função de duas principais tradições formativas, a pré-universitária e a profissionalizante.

Segundo as bases legais do MEC, a consolidação do Estado democrático, as novas tecnologias e as mudanças na produção de bens, serviços e conhecimentos exigem que a escola possibilite aos alunos integrarem-se ao mundo contemporâneo nas dimensões fundamentais da cidadania e do trabalho.

Devido às atuais e nítidas mudanças no cenário da educação no Brasil, são necessárias algumas alterações na forma de ensino para que se possa abranger às diversas demandas e promover um melhor desenvolvimento dos alunos. Dessa forma, o MEC, em 2006, complementando os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM, 1999), criou os PCN+, que tornam obvio que o novo ensino médio deixa, portanto, de ser apenas preparatório para o ensino superior ou estritamente profissionalizante, para assumir a responsabilidade de completar a educação básica. A intenção é preparar para a vida, qualificar para a cidadania e capacitar para o aprendizado permanente, seja no eventual prosseguimento dos estudos ou no mundo do trabalho.

Com os PCN+, há a pretensão de se chegar a um patamar razoável em todas as regiões do país através de orientações voltadas aos educadores, abranger todas as salas de aula para que haja um impulso rumo a uma ampla democratização social e cultural, de forma que o conhecimento seja, também, amplo e democrático.

Como diz Eufrásio (1998, p.89), “À educação cabe fornecer, de algum modo, os mapas de um mundo complexo e constantemente agitado e, ao mesmo tempo, a bússola que permite navegar através dele”, que apesar de ser um trabalho com quase vinte anos de publicação, se integra à atual realidade da educação no Brasil. A tendência geral do ensino tradicional traçada até a criação dos PCN+ consistia em separar as disciplinas, atribuindo ao aluno a busca pela interdisciplinaridade e conexões entre as matérias. De forma geral, a proposta dos PCN+ é que, por diversas mudanças no método de ensino, essa busca seja facilitada pelo corpo docente, uma vez que a união das disciplinas é essencial para o aprendizado pois o aluno consegue ver possíveis aplicações futuras, além da formação de um indivíduo mais crítico. Outro ponto importante nessas mudanças é no modo com que a escola e o aluno promovem relações, que deixam de ser unilaterais - e, dessa maneira, passam a ser mais interessantes para o aluno - e promovem uma busca conjunta de ambos os lados para a compreensão dos temas.

As alterações propostas, especialmente para a área de Ciências Exatas, consistem em interligar as matérias do mesmo eixo (com uso de nomenclaturas semelhantes e evidenciando a real necessidade para o campo de trabalho) e de naturezas distintas (utilizando contextualizações sociais e comunicação) para tornar mais claras as investigações e compreensões, a fim de que o aluno perceba a universalidade do tema e saiba distinguir as especificidades do seu uso. Portanto, é de interesse coletivo que o maior número de tópicos seja articulado de forma coerente com as demais habilidades, desmistificando a hierarquia vigente. Tendo como pressuposto alterações no ensino médio, é importante ressaltar, ainda, que, como continuação de um ensino de base, a nova forma de ensinar despertará um novo aluno, que desenvolverá a necessidade de abranger grande número de habilidades coerentes entre si para, inclusive, posterior desenvolvimento de projetos que coordenem as diferentes disciplinas e resultem na formação de um indivíduo capaz.

3.1 A IMPORTÂNCIA DA INTERDISCIPLINARIDADE NA APRENDIZAGEM

> A interdisciplinaridade não dilui as disciplinas, ao contrário, mantém sua individualidade. Mas integra as disciplinas a partir da compreensão das múltiplas causas ou fatores que intervêm sobre a realidade e trabalha todas as linguagens necessárias para a constituição de conhecimentos, comunicação e negociação de significados e registro sistemático dos resultados. (BRASIL, 1999, p. 89)

Da maneira que estão estruturadas, as disciplinas servem para isolar os objetos do seu meio, sendo assim ineficientes e insuficientes para os que queremos que sejam os cidadãos do futuro. O ideal na educação é romper com essas fragmentações para mostrar as correlações entre os saberes, a complexidade da vida e dos problemas pelos quais passamos hoje. Enfatiza Morin (2000, p. 43), “a inteligência parcelada, compartimentada, mecanicista, disjuntiva e reducionista rompe o complexo do mundo em fragmentos disjuntos, fraciona os problemas, separa o que está unido, torna unidimensional o multidimensional”.

A sociedade brasileira tem tido uma consciência crescente sobre a importância da educação, o que resulta em um número crescente de estudantes e isso faz com que o povo não precise mais se adequar à escola, mas a escola deve se adequar ao povo. Mas a transmissão de conhecimentos desprovidos de contexto é uma barreira a ser vencida a matemática deve ter valor formativo e ajudar a estruturar um pensamento e raciocínio dedutivos. “Em caráter instrumental, a matemática deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas de conhecimento, na atividade profissional, a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas. ” (BRASIL, 2000, p.42).

Ao longo da História da Matemática, percebemos que a matemática esteve presente no processo evolutivo das civilizações, tendo papel fundamental no desenvolvimento humano. Portanto, a Matemática está ligada a fenômenos naturais e sociais, não devendo ser separados das outras disciplinas. “Acredito que um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a matemática das outras atividades humanas” (D`Ambrosio, apud Gapari e Pacheco, 2014).

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da matemática, como a sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL,2000, p.43).

O estímulo à iniciativa na busca de informações para ter confiança, fundamentar suas ideias e argumentações são essenciais para que o tema seja aprendido. O educador tem papel principal dessa ação, apresentando o tema e fomentando no aluno essa busca intelectual por variações nas aplicações desse novo conceito que lhe é apresentado inicialmente de forma teórica. Segundo D`Ambrosio (1999), a História da Matemática deve ser usada no ensino como ferramenta de motivação, pois através dela, deve-se estimular a curiosidade dos alunos em relação às aplicações do tema, seja na matemática ou em outras áreas de conhecimento.

Não é de uma hora para outra que os professores estarão aptos a desempenhar esse papel, são necessárias posturas integradoras em sala de aula e inovação nas estruturas de formação de professores, que há muito se tornaram obsoletas, entre elas os sistemas de educação formal.

A legitimidade do uso de logaritmos, vincula-se a questões tecnológicas e em outras ciências, uma vez que expressa grandezas cujo valor é exponencial e aplicável aos mais diversos campos de habilidades, como o frequente uso em escalas geográficas. O logaritmo é uma "operação que dá origem a funções matemáticas, mas que também é linguagem de representação em todas as ciências" (BRASIL, 2006, p.26). Como conseguinte, por relacionar diversas matérias, tal habilidade, se ministrada de acordo com as orientações previstas no conjunto de orientações educacionais complementares aos PCN+, promoveria o objetivo descrito anteriormente, isto é, congregaria diversas habilidades, tornando, por sua vez, o ensino dinâmico e ampliando o conhecimento do aluno.

O logaritmo é um exemplo que, por minha experiência em sala de aula, pode ser facilmente contextualizado e interdisciplinarizado. Obviamente que tenho contato com outras disciplinas, professores de outras áreas do conhecimento e isso é essencial para que haja uma familiarização com assuntos fora da matemática, mas isso traz uma segurança que é passada ao aluno e então percebemos que a dificuldade antes encontrada por eles ao estudar esse tema estava diretamente relacionada com a maneira com que a teoria lhes era apresentada.

Não há a necessidade de um profundo detalhamento ou excesso de nomenclaturas e símbolos, se não forem realmente importantes para o aprendizado e assimilação do conteúdo. Se, por exemplo, “o único caso de funções inversas que os alunos verão no ensino médio forem as funções exponencial e logaritmo, não há necessidade de todo o estudo sobre funções injetoras, sobrejetoras e inversíveis” (BRASIL, 2006, pg.120), além disso, se o foco atual está mais na interpretação dos gráficos, o aluno não precisa saber o que é mantissa, característica, etc.

Como dizem os PCN+, será mais fácil se mostrar ao aluno as aplicações desse tema em outras áreas. De acordo com Rocha Filho, Basso e Borges (2006, p.328-329), uma visão diferenciada de mundo é permitida pela interdisciplinaridade, pois “[...] uma diversificação dos enfoques em torno do mesmo assunto permite ampliar sua compreensão, descartando algumas ideias preconcebidas e abrindo espaço a ideais divergentes e criativas. ” As seções a seguir são exemplos de integrações do tema – logaritmo – com outras áreas do conhecimento, aplicações reais que auxiliam o aluno na compreensão e visualização de sua aplicabilidade em cada área, mesmo que não seja seu objeto de estudo no ensino superior.

3.1.1 O USO DO LOGARITMO NA GEOGRAFIA

- O encontro de placas tectônicas geram os terremotos e esses têm sua intensidade medida em uma escala logarítmica chamada Escala Richter[9]:

A magnitude de um terremoto é medida pelo logaritmo das amplitudes (medida por aparelhos denominados sismógrafos) das ondas produzidas pela liberação de energia do terremoto de acordo com a relação:

$$M = logA - logA_0$$

[9] A escala Richter mede a energia sísmica liberada em um terremoto aumenta de forma logarítmica, de maneira que cada ponto de aumento significa um aumento 10 vezes maior na amplitude das ondas sismográficas.

onde M é a magnitude, A é a amplitude máxima da onda sísmica, A_0 é uma amplitude de referência no local.

Não existe apenas uma relação logarítmica que seja relacionada à escala Richter. O exemplo abaixo, uma questão da prova do vestibular 2012 da UPE utiliza uma relação logarítmica diferente:

Exemplo:

Terremotos são eventos naturais que não têm relação com eventos climáticos extremos, mas podem ter consequências ambientais devastadoras, especialmente quando seu epicentro ocorre no mar, provocando tsunamis. Uma das expressões para se calcular a violência de um terremoto na escala Richter é

$$M = \frac{2}{3} \,.\, log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

onde M *é a magnitude do terremoto,* E *é a energia liberada (em joules) e* $E_0 = 10^{4,5}$ *joules é a energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência. Qual foi a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão de* 11 *de março de* 2011*, que atingiu magnitude* 9 *na escala Richter?*

RESOLUÇÃO:

$$9 = \frac{2}{3} \,.\, log\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right)$$

$$\frac{27}{2} = logE - log10^{4,5}$$

$$13,5 + 4,5 = logE$$

$$logE = 18 \Leftrightarrow E = 10^{18}$$

A ordem de grandeza da energia liberada é 10^{18}

- Podemos falar sobre crescimento populacional, que é uma relação exponencial e o logaritmo se faz necessário para facilitar os cálculos:

$$i = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1,$$

onde i é a taxa de crescimento populacional, P e P_0 são as populações final e inicial em relação a um determinado tempo t. O exemplo abaixo foi retirado de uma lista de exercícios do site http://www.projetofundao.ufrj.br:

Exemplo:

Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de, aproximadamente, 3% *ao ano. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?*

RESOLUÇÃO:

Pelo enunciado, podemos modelar da seguinte maneira:

$$P(t) = P_0 \,.\, (1{,}03)^t$$

onde $P(t)$ *é a população após* t *anos e* P_0 *a população no início da análise (*$t = 0$*).*

Se queremos calcular o tempo para que a população dobre, então:

$$2.\,P_0 = P_0 \,.\, (1{,}03)^t$$

$$2 = (1{,}03)^t$$

$$log2 = t.\log(1{,}03)$$

$$t = \frac{log2}{\log(1{,}03)} \cong \frac{0{,}3010}{0{,}0128} \cong 24\ anos$$

3.1.2 O USO DO LOGARITMO NA QUÍMICA

- O logaritmo é utilizado comumente no cálculo do pH de soluções. O termo pH significa potencial (ou potência) hidrogeniônico, portanto, refere-se à concentração de $[H^+]$ (ou H_3O^+) em uma solução e é calculado pela relação:

$$pH = -\log[H^+]\,;$$

Exemplo:

O pH de uma solução é 6. Se reduzirmos o valor do pH da mesma solução para 2, a concentração de íons hidrogênio será:

a) 10.000 vezes maior do que a inicial;
b) 1.000 vezes maior do que a inicial;
c) 1.000 vezes menor do que a inicial;
d) 4 vezes menor do que a inicial;
e) 3 vezes maior do que a inicial.

RESOLUÇÃO:

Na situação inicial, temos:

$$6 = -log[H^+] \;\Leftrightarrow [H^+] = 10^{-6}\,mol/litro$$

Na situação seguinte, temos:

$$2 = -log[H^+] \;\Leftrightarrow [H^+] = 10^{-2}\,mol/litro$$

Comparando as duas concentrações, temos:

$$\frac{concentração\ final}{concentração\ inicial} = \frac{10^{-2}}{10^{-6}} = 10^4$$

Resposta correta está na letra a).

- Pode ser usado no cálculo do tempo de desintegração de substâncias radioativas. A lei fundamental do decaimento radioativo afirma que a taxa de transformação de núcleos radioativos é proporcional ao número de átomos dos núcleos, sendo traduzida na relação:

$$N = N_0 . e^{-\lambda . t}.$$

onde N representa o número de núcloes não decaídos, N_0 o número de núcloes existentes inicialmente, t o tempo e λ a taxa% de desintegração.

Exemplo:

(UFPE-2006) A equação que gera a desintegração radioativa de uma substância é dada por

$$M = M_0 . e^{-\lambda . t}$$

onde M é a massa da substância, M_0 é a massa da substância no início da contagem do tempo, λ é uma constante chamada constante de desintegração da substância estudada (taxa anual de desintegração) e t o tempo em anos. Uma determinada substância se desintegra a uma taxa de 2% ao ano. A massa da substância estará reduzida à metade em: (*Dado:* $ln2 = 0{,}69$)

a) 31 anos

b) 42,5 anos

c) 28,5 anos

d) 34,5 anos

RESOLUÇÃO:

$$\frac{M_0}{2} = M_0 . e^{-0{,}02 . t}$$

$$2^{-1} = e^{-0{,}02 . t}$$

$$ln2 = 0{,}02.t$$

$$t = \frac{0{,}69}{0{,}02} = 34{,}5\ anos$$

Resposta correta letra d).

3.1.3 O USO DO LOGARITMO NA MEDICINA

- O estudo na área da surdez, pois, segundo o senso de 2000 do IBGE, são mais de 7 milhões de brasileiros que possuem essa particularidade, total ou parcial.

A intensidade sonora I é definida como sendo a razão entre a potência sonora e a área da superfície considerada, isto é,

$$I = \frac{P}{A}.$$

"*O ouvido humano pode ouvir ruídos um trilhão de vezes menores do que o mais intenso a que resiste, no limite da dor. Para conseguir abranger esse imenso intervalo criou-se, a partir da potência sonora, a escala logarítmica de decibéis*" (BRASIL, 2006). Com essa unidade, a intensidade sonora nos permite avaliar se um som é forte ou fraco para o ouvido humano. Para efeito de cálculo, é utilizada a fórmula:

$$N = 10.\log\frac{I}{I_0}$$

onde N é o nível sonoro do ambiente, I a intensidade do som considerado e I_0 é a menor intensidade sonora audível ou limiar de audibilidade humana e possui intensidade 10^{-12} W/m².

A fórmula anterior pode vir apresentada, em alguns exemplos, algebricamente modificada, mas sem modificar seu significado, como apresentamos abaixo:

Exemplo:

(UFCE-2001) Suponha que o nível sonoro b *e a intensidade* I *de um som estejam relacionados pela equação logarítmica* $b = 120 + 10\, log\, I,$ *em que* b *é medido em decibéis e* $I,$ *em watts por metro quadrado. Sejam* I_1 *a intensidade correspondente ao nível sonoro de* 80 *decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas e* I_2 *a intensidade correspondente ao nível sonoro de* 60 *decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. A razão* $\frac{I_1}{I_2}$

é igual a:

a) 1/10

b) 1

c) 10

d) 100

e) 1 000

RESOLUÇÃO:

$$80 = 120 + 10.\, logI_1$$

$$logI_1 = -4 \;\Leftrightarrow I_1 = \; 10^{-4}$$

$$60 = 120 + 10.\, logI_2$$

$$logI_2 = -6 \;\Leftrightarrow I_2 = \; 10^{-6}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 100$$

Resposta correta letra d)

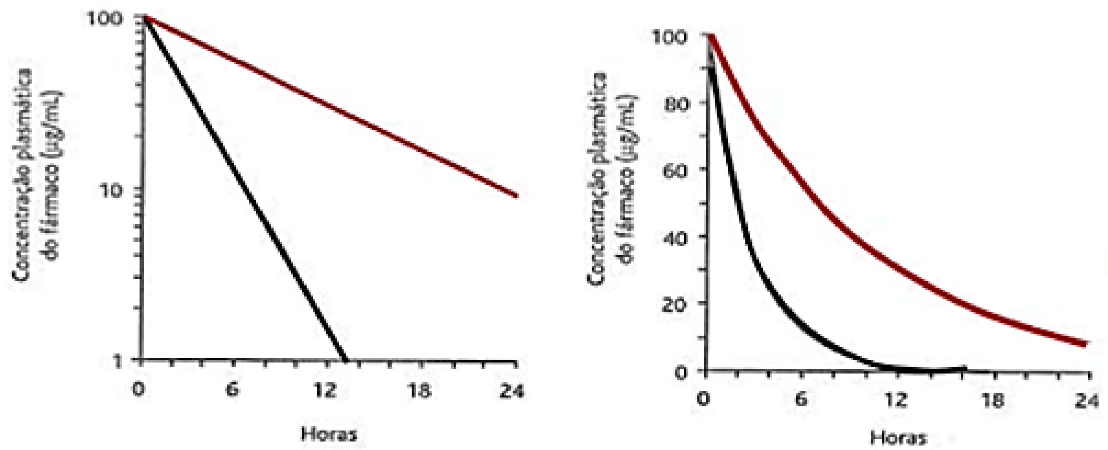
- Na medicina, todas as técnicas disponíveis atualmente para determinar a carga viral reproduzem resultados em número de cópias do RNA por ml de plasma. Entretanto, sabe-se que podem ocorrer variações desses valores, de número de cópias/ml, que não são significativas. Para se determinar se uma variação é significativa ou não, o primeiro passo é converter o valor absoluto de número de cópias/ml para logaritmo de base 10 (log_{10}). Feita a conversão, um valor de logaritmo pode ser comparado com outro valor de logaritmo de um exame anterior do mesmo indivíduo. Alguns exemplos de interpretação clínica da variação dos resultados de exames de carga viral estão resumidas no quadro abaixo:

Valor Basal da Carga Viral (N º cópias/ml)	Valor Final da Carga Viral (N.º cópias/ml)	Variação entre os resultados (N.º de Vezes)	Variação entre os Resultados (Log_{10})	Interpretação Clínica
140.000	**20.000**	7	0,85	**Significante**
30.000	**75.000**	2,5	0,40	**Não Significante**
900.000	**500.000**	1,8	0,25	**Não Significante**
10.000	**50.000**	5	0,70	**Significante**
20.000	**10.000**	2	0,30	**Não Significante**
500	**5.000**	10	1,0	**Significante**

Quadro 3 – variação entre exames de carga viral e sua interpretação clínica. Disponível em http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/16contagem_celulasTCDA.pdf

- Segundo Queiroz (2011), na medicina veterinária, a representação gráfica da concentração plasmática do fármaco pelo tempo se dá de duas formas, onde a mais empregada é a escala semi-logarítmica, na qual apenas os dados da ordenada são dispostos em escala de logaritmos. A seguir, um exemplo prático com dois gráficos da concentração plasmática de um determinado fármaco em função do tempo:

Figura 16 – Representação gráfica semi-logarítmica (esquerda) e cartesiana (direita) da concentração plasmática dos fármacos A (vermelho) e B (preto), em função do tempo



Disponível em http://portais.ufg.br/up/67/o/semi2011_Liria_Queiroz_1c.pdf

Esse método, o semi-logarítmico, facilita prever as concentrações em diferentes tempos uma vez que o decaimento da concentração se dá de forma linear.

3.1.4 O USO DO LOGARITMO NA BIOLOGIA

- Pode ser utilizado para relacionar o número de bacilos existentes em uma determinada cultura em função do tempo, assim como na geografia pôde ser utilizado para cálculo de crescimento populacional. Como podemos verificar no exemplo:

Exemplo:

(UEMA-) Um antibiótico de última geração está sendo testado no laboratório e, de posse dos dados colhidos, os cientistas concluíram que, quando aplicado numa colônia de bactérias, esta evolui em conformidade com a equação

$$y(t) = K_0 . e^{\frac{-ln2\,.t}{10}},$$

onde K_0 *é o número de bactérias no instante* $t = 0$ *e* $y(t)$ *é o número de bactérias no instante* t *. Além disso,* t *é dado em horas e* ln *indica logaritmo natural. O tempo necessário para que a colônias e reduza à metade é:*

a) 24 horas.

b) 10 horas.

c) 5 hora.

d) 1 hora.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{K_0}{2} = K_0 . e^{\frac{-ln2\,.t}{10}}$$

$$2^{-1} = e^{\frac{-ln2\,.t}{10}}$$

$$-ln2 = \frac{-ln2\,.t}{10}$$

$$t = 10$$

Resposta correta letra b).

3.1.5 O USO DO LOGARITMO NA FÍSICA

- São utilizados na lei de *Weber-Fechner*[10] que descreve a relação existente entre a magnitude física de um estímulo e a intensidade do estímulo que é percebida. Ela afirma que as sensações S são proporcionais ao logaritmo decimal das excitações E que as produzem:

$$S = k . log\, E$$

Por exemplo, um homem que sai de um ambiente iluminado para outro só percebe uma variação da luminosidade se esta for superior a 2%; para soluções salinas, só distingue variações da salinidade se esta foi superior a 25%.; o brilho de uma estrela é uma sensação, ou seja, é uma resposta a um estímulo que é a energia luminosa recebida pelo olho; a escala Richter é também um exemplo de uso dessa lei, já que mede a sensação dos abalos sísmicos.

3.1.6 O USO DO LOGARITMO NA PALEONTOLOGIA

- É utilizado no método da cronologia por carbono, onde utilizam-se as funções logarítmicas e exponenciais para encontrar a idade aproximada de fósseis e artefatos.

O método para estabelecer a data de objetos e outros materiais tais como rochas e fósseis está no fenômeno da radioatividade. como mencionamos anteriormente[11], a radioatividade de uma substância depende de sua meia-vida e para calculá-la, temos a relação:

$$N(t) = N_0 . e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

---

[10] Esta lei aplica-se aos 5 sentidos, mas as suas implicações são melhor entendidas quando se refere aos estímulos provocados pela luz e pelo som. É o caso do Decibel (dB) definido como 10 vezes o logaritmo decimal da intensidade sonora.

[11] Cf. 3.1.2 QUÍMICA

Um caso famoso que serve de exemplo para essa aplicação dos logaritmos é a investigação, em 1945, sobre as falsificações de arte de Van Meegeren, holandês, pintor simples que enriqueceu vendendo falsificações de quadros do século XVII.

Figura 17 – A falsificação mais famosa de Van Meegeren:

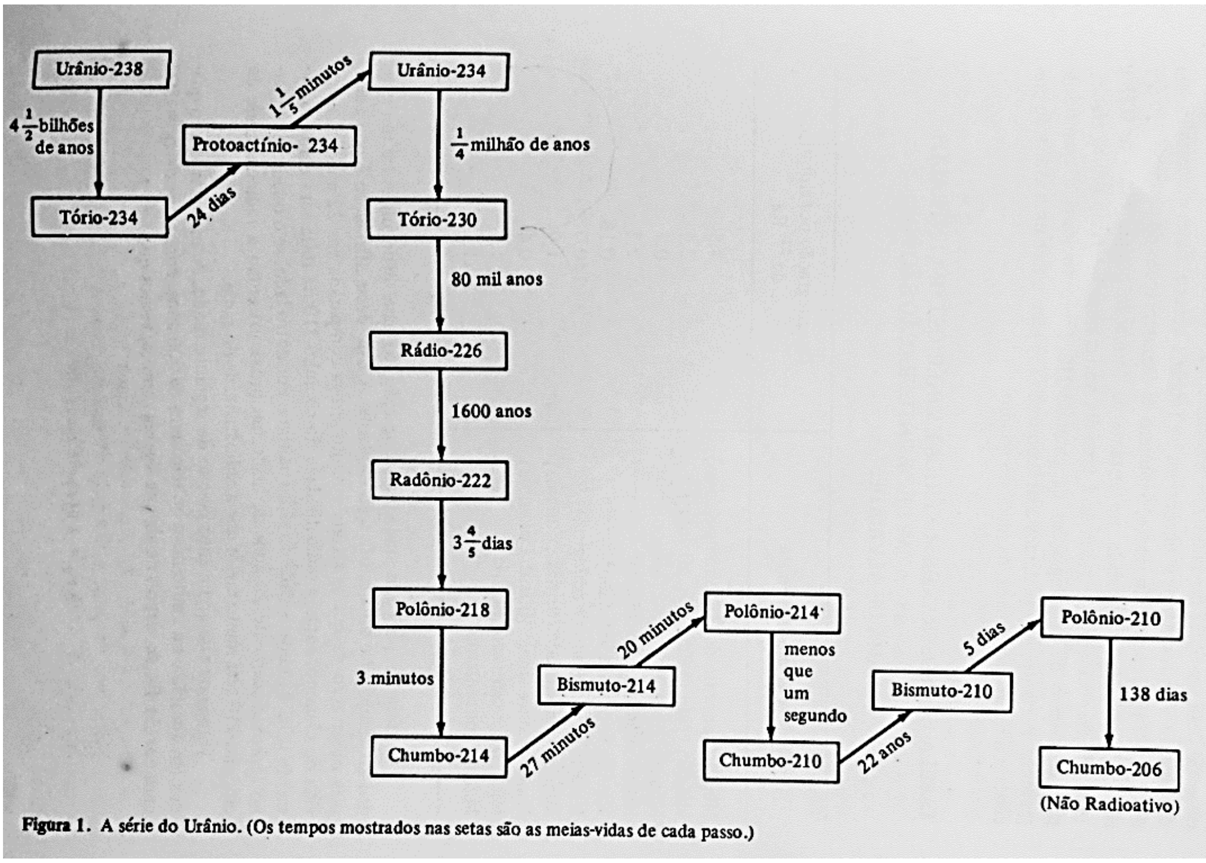
“Cristo e os Discípulos em Emaús”

Disponível em http://mol-tagge.blogspot.com.br/2009/08/falsificadores-arte-1-van-meegeren.html

Depois da II Guerra Mundial, Meegeren foi preso acusado de colaborar com os nazistas. Sabendo que sua sentença seria a morte, se revelou um falsificador e descreveu todos os quadros que havia vendido como originais. Na época, em julho de 1945, os que haviam gasto uma fortuna com os quadros não acreditaram na declaração do pintor e contrataram os melhores e mais ilustres químicos, físicos e historiadores de arte para formarem uma comissão a fim de descobrir se as obras de arte eram ou não falsas, mas mesmo assim não conseguiram provar.

Apenas em 1967, cientistas da Universidade Carnegie Mellon conseguiram provar que os quadros eram mesmo falsos. A grande dificuldade foi saber o valor de N_0, mas os cientistas partiram de um princípio elementar da química e descobriram a falsificação: quase todas as rochas da crosta terrestre contêm uma pequena quantidade de urânio, que é um elemento que se decompõe em outro elemento radioativo, e este se decompõe em outro e assim por diante, como podemos ver na figura abaixo:

Figura 18 – série do urânio com as respectivas taxas de desintegração



BRAUN, Martin - BRAUN, Martin. – Equações Diferenciais e Suas Aplicações. Pág. 29

3.1.7 O USO DO LOGARITMO NA ECONOMIA

- É utilizado para relacionar o tempo de uma aplicação financeira a juros compostos e o montante gerado ao longo desse período. Talvez, pelo cenário econômico atual, seja um dos temas que mais interesse para uma aplicação de conteúdo:

Exemplo:

Uma pessoa aplicou a importância de R$ 5000,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 2,4%, no regime de juros compostos. Considerando não haver nenhum outro depósito ou débito, calcule quanto tempo após a aplicação será necessário para que o montante seja igual a R$ 20000,00.

Dado: $log2 \cong 0{,}301$

RESOLUÇÃO:

Pelo enunciado, podemos modelar a situação pela relação:

$$M(t) = 5000\,.\,(1{,}024)^t$$

onde M *representa o montante em função do tempo decorrido* t*, em meses.*

Substituindo o montante desejado, temos:

$$20000 = 5000\,.\,(1{,}024)^t$$

$$\frac{20000}{5000} = (1{,}024)^t$$

$$(1{,}024)^t = 4$$

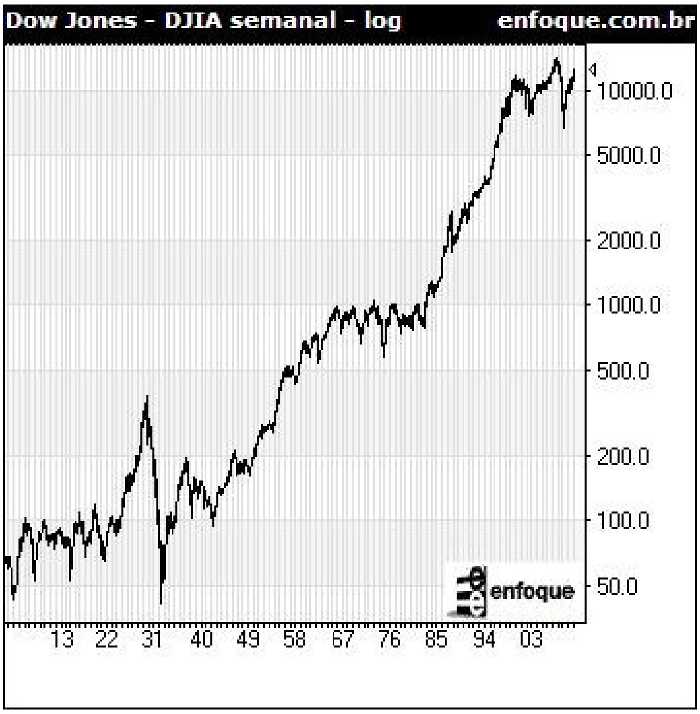
$$t(log2^{10} - log10^3) = log2^2$$

$$t = \frac{2(0{,}301)}{3{,}01 - 3} = \frac{0{,}602}{0{,}01} \cong 60\ meses\ ou\ 5\ anos.$$

- Em gráficos de índices financeiros são utilizadas escalas logarítmicas nos eixos verticais pois mostram a variação percentual, o que é muito mais útil ao investidor.

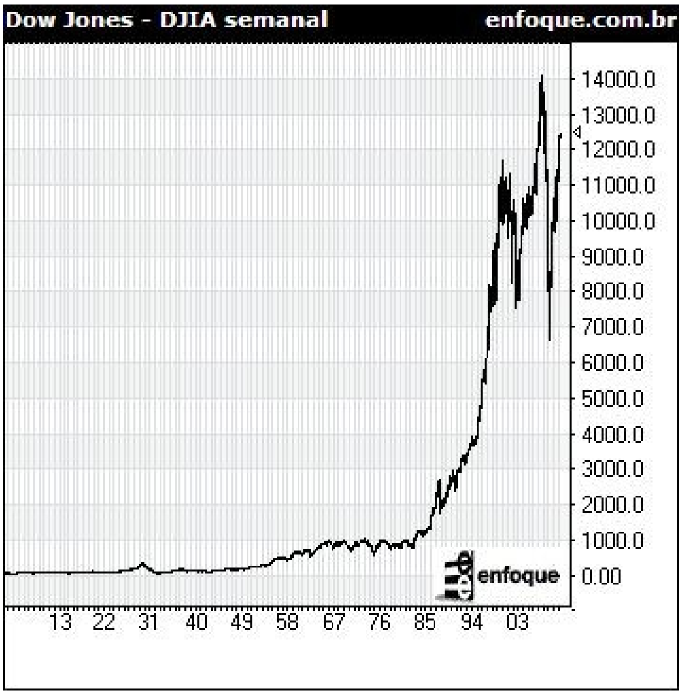
As escalas logarítmicas são utilizadas sobretudo num espaço de tempo mais alargado, pois são nesses espaços de tempo que as mudanças percentuais são mais evidentes. Os gráficos em escala logarítmica são muito mais harmônicos, ou seja, neles as tendências e formações de análise técnica ficam muito mais claras. A seguir, dois gráficos para comparação:

Figura 19 – gráfico em escala logarítmica



(disponível em www.comstop.com.br)

Figura 20 – gráfico em escala aritmética



(disponível em www.comstop.com.br)

Ambos mostram o Índice Dow Jones, desde 1900, com a diferença de que um utiliza a escala logarítmica e outro, a aritmética. No gráfico de escala logarítmica, podemos identificar uma tendência de alta de longuíssimo prazo formada por movimentos relativamente padronizados ao longo do tempo, e fica bastante explícita a proporção da queda de 1929. A maior diferença entre os gráficos é que os de escala aritmética levam em conta a variação nominal dos preços, enquanto os gráficos em escala logarítmica consideram sua variação percentual. Podemos verificar essa situação nos gráficos a seguir:

Figura 21 – gráfico em escala aritmética

(disponível em www.comstop.com.br)

Neste gráfico, quando os preços estavam em 2 reais e subiram para 4, eles tiveram uma alta de 100%, mas quando subiram de 20 para 22 reais eles tiveram uma alta de apenas 10%. No entanto, usou-se o mesmo valor para 1 centímetro, destacado no gráfico, para se mostrar essas duas variações no gráfico, que são completamente diferentes em termos percentuais.

Figura 22 – gráfico em escala logarítmica

(disponível em www.comstop.com.br)

Para se corrigir esse problema utiliza-se a escala logarítmica em que para mesmas distâncias correspondem mesmas variações percentuais. Assim, se observarmos o gráfico de AmBev em escala logarítmica acima, veremos que a distância de 4 para 8, que corresponde a uma alta de 100%, será a mesma distância de uma alta de 16 para 32 assim como de qualquer outra alta de 100% dos preços.

3.2 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Baseados na experiência de países desenvolvidos e com bom desempenho na área da educação básica que adotam um currículo padrão como, por exemplo, Estados Unidos, Austrália, Cingapura, Canadá, o Ministério da Educação propôs uma unanimidade no curriculum escolar quanto aos itens a serem estudados pelos alunos de ensino fundamental e médio do país, independente do Estado ou Região.

Especialistas convidados pelo Ministério da Educação fizeram a primeira proposta de um currículo escolar mínimo comum para as 190 mil escolas brasileiras nos ensinos Fundamental e Médio. (cf. http://basenacionalcomum.mec.gov.br).

Diferentemente dos PCN+, que sugere uma metodologia para enriquecer as práticas pedagógicas, o documento, denominado Base Nacional Comum (BNC) indica os conteúdos mínimos que serão obrigatórios nos currículos das escolas brasileiras. A proposta inicial do Ministério da Educação (MEC) está aberta para consulta e críticas públicas no portal do MEC, a prazo determinado, no site www.basenacionalcomum.mec.gov.br.

Se de um lado um currículo padrão é importante para reduzir as desigualdades regionais e sociais, de outro, não é com essa unificação que o país irá sanar todos os seus problemas de déficit na educação.

O Brasil ainda tem mais de 13 milhões de analfabetos acima de 15 anos e os chamados analfabetos funcionais ultrapassam um quarto da população do país, o que faz com que ocupe a 8ª posição em um ranking de países com maior número de analfabetos adultos (IBGE, 2013). Estatísticas da Unesco mostram que o Brasil não cumpre todas as metas estabelecidas na área da educação há 15 anos. A única boa notícia é que foi alcançada a educação primária universal e, atualmente, não há disparidade entre o número de meninos e meninas nas escolas.

A escolha dos conteúdos mínimos a serem trabalhados geraram críticas. No ensino da Matemática, o assunto logaritmo foi deixado de fora da BNC, mas o assunto “função exponencial” está contido. Como então explicar a ausência do tema logaritmo? Como explicar a um aluno o desenvolvimento da equação exponencial

$2^x = 3$? Essa é apenas uma das dúvidas que esse documento proposto pelo MEC nos gerou.

Um dos argumentos do MEC para que um tópico qualquer faça parte da BNC é que possa estabelecer conexões entre os eixos da matemática e entre essa e outras áreas do saber, mas já descrevemos em tópicos anteriores uma diversidade de exemplos de relação do logaritmo com outras áreas do saber e, por isso, defendemos a não-exclusão do tema do currículo mínimo proposto pela BNC.

4 EXEMPLO DA ABORDAGEM DO CONTEÚDO LOGARITMOS EM LIVROS TEXTOS

O ensino médio nos últimos anos vem sofrendo alterações e se passou a falar muito das matrizes de competências que, segundo o MEC, medem a capacidade do estudante de dominar a norma culta da Língua Portuguesa, compreender fenômenos naturais, enfrentar situações-problema, construir argumentações consistentes e elaborar propostas que atentem para as questões sociais. A cada competência corresponde um conjunto de habilidades, que seria a demonstração prática dessas competências. Dessa forma, os livros tiveram que se adequar à essas mudanças se quisessem ser aprovados pelo MEC para serem adotados nas escolas.

Segundo o Guia de Livros Didáticos[12]:

> Aqui se avalia o modo como são atribuídos significados aos conteúdos matemáticos por meio de ligações com práticas sociais atuais e com outros campos do saber. O recurso à História da Matemática é outra forma de contextualização considerada. Analisa-se, também, em que medida a obra propõe temas e atividades que ajudem a promover posturas e valores importantes para o exercício da cidadania.
> (BRASIL, 2012, pg 11)

Neste capítulo escolhemos três livros que são utilizados em algumas escolas do Rio de Janeiro e iremos analisar o tipo de abordagem que dão ao tema Logaritmo: Livro 1[13], Livro 2[14] e livro 3[15]. Essa escolha não foi aleatória, sendo o Livro 1 escolhido por ser de um período entre 1990 e 2000, o Livro 2 entre 2000 e 2010, o Livro 3, o mais atual, de 2015 sendo uma edição atualizada do mesmo autor do livro 2. Dessa forma, a escolha nos ajuda a analisar a evolução gradual da abordagem ao longo dos anos, já que a importância da contextualização e interdisciplinaridade foi aumentando gradualmente até os dias de hoje.

---

[12] Guia desenvolvido pelo MEC que expões obras que passaram por criteriosas etapas de avaliação e seus comentários.
[13] GIOVANNI, José Ruy. Matemática fundamental. São Paulo: FTD, 1994
[14] IEZZI, Gelson. Matemática: ciência e aplicações. São Paulo: Atual, 2004
[15] IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015

4.1 SOBRE O LIVRO 1

Esse, o mais antigo dos três livros que analisamos para esse trabalho, inseriu o tema logaritmos dentro do capítulo intitulado “Função Logarítmica”, o que nos fez pensar que já começaria a análise do tema dentro do contexto de função. Mas o capítulo começa com um exemplo:

> “Consideremos os seguintes problemas:
> 1°) A que expoente x se deve elevar o número 3 para se obter 81?
> Pelo enunciado, temos:
> $3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \therefore x = 4$
> Esse valor 4 encontrado para o expoente x denomina-se logaritmo do número 81 na base 3 e se representa por $\log_3 81 = 4$” (GIOVANNI, 1994, p.120)

Em seguida, massifica o conteúdo com seis exemplos seguidos, sendo modificados apenas os números envolvidos.

Figura 23a – Introdução ao tema Logaritmos

GIOVANNI, José Ruy. Matemática fundamental. São Paulo: FTD, 1994, p. 120

1. Introdução

Consideremos os seguintes problemas:

1º) A que expoente x se deve elevar o número 3 para se obter 81?

Pelo enunciado, temos:

$3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \therefore x = 4$

Esse valor 4 encontrado para o expoente x denomina-se **logaritmo** do número 81 na base 3 e se representa por: $\mathbf{\log_3 81 = 4}$.

Então:

$\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

2º) A que expoente x se deve elevar o número 2 para se obter $\frac{1}{32}$?

Pelo enunciado, temos:

$$2^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-5} \therefore x = -5$$

Esse valor -5 encontrado para o expoente x denomina-se logaritmo do número $\frac{1}{32}$ na base 2 e se representa por $\log_2 \frac{1}{32} = -5$.

Figura 23b – Introdução ao tema Logaritmos

GIOVANNI, José Ruy. Matemática fundamental. São Paulo: FTD, 1994, p. 120

3º) A que expoente x se deve elevar o número 4 para se obter -16?

Pelo enunciado, temos:

$4^x = -16$

Como não existe um número real x que verifique essa equação, dizemos que não existe $\log_4 (-16)$.

4º) A que expoente x se deve elevar o número 5 para se obter 0?

Pelo enunciado, temos:

$5^x = 0$

Como não há um número real x que verifique essa equação, dizemos que não existe $\log_5 0$.

Figura 24 – Restrições na utilização do Logaritmo

GIOVANNI, José Ruy. Matemática fundamental. São Paulo: FTD, 1994, p. 121

5º) A que expoente x se deve elevar o número 0 para se obter 2?

Pelo enunciado, temos:

$0^x = 2$

Como não há um número real x que verifique essa equação, dizemos que não existe $\log_0 = 2$.

6º) A que expoente x se deve elevar o número 1 para se obter 3?

Pelo enunciado, temos:

$1^x = 3$

Como não há um número real que verifique essa equação, dizemos que não existe $\log_1 3$.

Pelos problemas dados, notamos que:

- determinar o logaritmo de um número b numa base a significa determinar o expoente x tal que $a^x = b$.
- os números b e a devem ser positivos (>0).
- $a \neq 1$.

Somente após esses exemplos é que insere definição formal “O logaritmo de um número real e positivo b, na base a, positiva e diferente de 1, é o número ao qual se deve elevar a para se obter b.” GIOVANNI, 1994, p.121)

Figura 25 – página 121 do livro 1

GIOVANNI, José Ruy. Matemática fundamental. São Paulo: FTD, 1994, p. 121

2. Definição

O logaritmo de um número real e positivo b, na base a, positiva e diferente de 1, é o número x ao qual se deve elevar a para se obter b.

$$\underbrace{\log_a b = x}_{\text{forma logarítmica}} \Leftrightarrow \underbrace{a^x = b}_{\text{forma exponencial}} \qquad \text{com } b > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Na forma logarítmica	Na forma exponencial
$\log_a b = x \begin{cases} a = \text{base do logaritmo} \\ b = \text{logaritmando} \\ x = \text{logaritmo} \end{cases}$	$a^x = b \begin{cases} a = \text{base da potência} \\ b = \text{potência} \\ x = \text{expoente} \end{cases}$

As consequências da definição são abordadas de forma bem direta e sem demonstrações. Assim como na definição, foi colocado um exemplo básico seguido de vários outros onde eram trocados apenas os números.

Figura 26 – Consequências da definição

GIOVANNI, José Ruy. Matemática fundamental. São Paulo: FTD, 1994, p. 124

4. Conseqüências da definição

1ª) Observe os exemplos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \log_2 1 = x \Leftrightarrow 1 = 2^x \Rightarrow 2^0 = 2^x \therefore x = 0 \\ \text{b) } \log_5 1 = x \Leftrightarrow 1 = 5^x \Rightarrow 5^0 = 5^x \therefore x = 0 \\ \text{c) } \log_a 1 = x \Leftrightarrow 1 = a^x \Rightarrow a^0 = a^x \therefore x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\log_a 1 = 0}$$

O logaritmo de 1 em qualquer base é sempre igual a zero.

2ª) Observe os exemplos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \log_2 2 = x \Leftrightarrow 2^1 = 2^x \therefore x = 1 \\ \text{b) } \log_3 3 = x \Leftrightarrow 3^1 = 3^x \therefore x = 1 \\ \text{c) } \log_a a = x \Leftrightarrow a^1 = a^x \therefore x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\log_a a = 1}$$

Quando a base e o logaritmo são iguais, o logaritmo é sempre igual a 1.

Figura 27 – consequências da definição

GIOVANNI, José Ruy. Matemática fundamental. São Paulo: FTD, 1994, p. 125

3ª) Observe os exemplos:

a) $\log_2 2^3 = x \Leftrightarrow 2^3 = 2^x \therefore x = 3$

b) $\log_5 5^2 = x \Leftrightarrow 5^2 = 5^x \therefore x = 2$

c) $\log_a a^m = x \Leftrightarrow a^m = a^x \therefore x = m$

$\Rightarrow \boxed{\log_a a^m = m}$

Quando o logaritmando for uma potência da base, o logaritmo é o expoente do logaritmando.

4ª) Observe os exemplos:

a) $2^{\log_2 4} = x \Rightarrow 2^y = x \Rightarrow 2^2 = x \therefore x = 4$

Cálculo auxiliar:

$\log_2 4 = y \Rightarrow 4 = 2^y \Rightarrow 2^2 = 2^y \therefore y = 2$

b) $3^{\log_3 9} = x \Rightarrow 3^y = x \Rightarrow 3^2 = x \therefore x = 9$

Cálculo auxiliar:

$\log_3 9 = y \Rightarrow 9 = 3^y \Rightarrow 3^2 = 3^y \therefore y = 2$

c) $a^{\log_a b} = x \Rightarrow a^y = x \Rightarrow x = b$

Cálculo auxiliar:

$\log_a b = y \Rightarrow b = a^y$

$\Rightarrow \boxed{a^{\log_a b} = b}$

A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

5ª) Observe os exemplos:

a) $\log_2 x = \log_2 4 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \therefore x = 4$

b) $\log_3 x = \log_3 27 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \therefore x = 27$

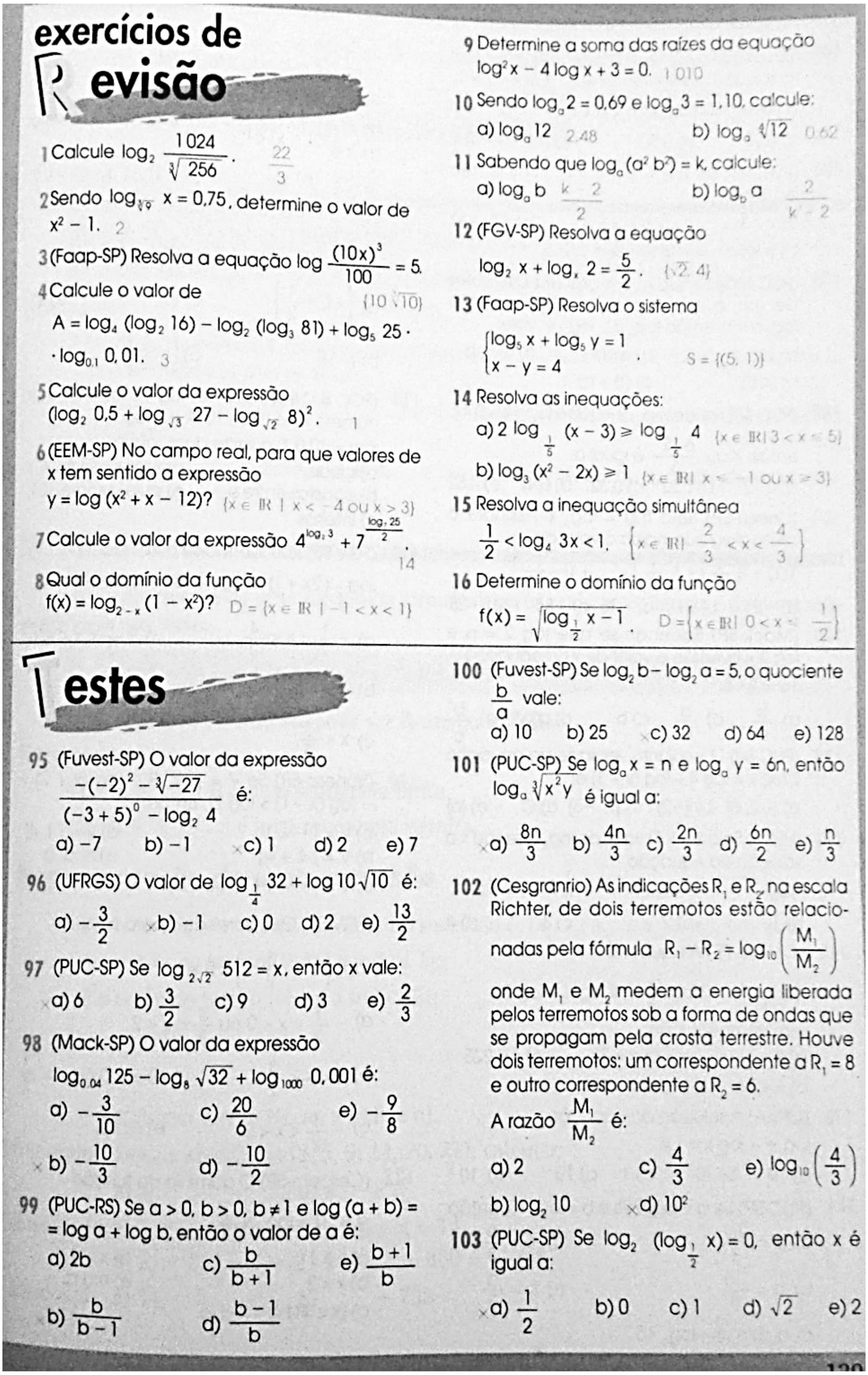
$\Rightarrow \boxed{\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c}$

A igualdade de dois logaritmos em uma mesma base se verifica quando os logaritmandos forem iguais.

A partir daí o livro já entra em função logarítmica e, apenas no final dessa parte, aborda a parte gráfica dos logaritmos, não tendo nenhum exercício que aborde o assunto.

Figura 28 – página 139 do livro 1

GIOVANNI, José Ruy. Matemática fundamental. São Paulo: FTD, 1994, p. 139



exercícios de Revisão

1 Calcule $\log_2 \dfrac{1024}{\sqrt[3]{256}}$. $\frac{22}{3}$

2 Sendo $\log_{\sqrt[3]{9}} x = 0{,}75$, determine o valor de $x^2 - 1$. 2

3 (Faap-SP) Resolva a equação $\log \dfrac{(10x)^3}{100} = 5$.

4 Calcule o valor de $\{10\sqrt[3]{10}\}$

$A = \log_4(\log_2 16) - \log_2(\log_3 81) + \log_5 25 \cdot \log_{0,1} 0{,}01$. 3

5 Calcule o valor da expressão $(\log_2 0{,}5 + \log_{\sqrt{3}} 27 - \log_{\sqrt{2}} 8)^2$. 1

6 (EEM-SP) No campo real, para que valores de x tem sentido a expressão $y = \log(x^2 + x - 12)$? $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 3\}$

7 Calcule o valor da expressão $4^{\log_2 3} + 7^{\frac{\log_7 25}{2}}$. 14

8 Qual o domínio da função $f(x) = \log_{2-x}(1 - x^2)$? $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

9 Determine a soma das raízes da equação $\log^2 x - 4\log x + 3 = 0$. 1 010

10 Sendo $\log_a 2 = 0{,}69$ e $\log_a 3 = 1{,}10$, calcule:

a) $\log_a 12$ 2,48 b) $\log_a \sqrt[4]{12}$ 0,62

11 Sabendo que $\log_a(a^2 b^2) = k$, calcule:

a) $\log_a b$ $\frac{k-2}{2}$ b) $\log_b a$ $\frac{2}{k-2}$

12 (FGV-SP) Resolva a equação $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$. $\{\sqrt{2}, 4\}$

13 (Faap-SP) Resolva o sistema

$\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$. $S = \{(5, 1)\}$

14 Resolva as inequações:

a) $2\log_{\frac{1}{5}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{5}} 4$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$

b) $\log_3(x^2 - 2x) \geq 1$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3\}$

15 Resolva a inequação simultânea $\frac{1}{2} < \log_4 3x < 1$. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}\right\}$

16 Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x - 1}$. $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$

Testes

95 (Fuvest-SP) O valor da expressão $\dfrac{-(-2)^2 - \sqrt[3]{-27}}{(-3+5)^0 - \log_2 4}$ é:

a) −7 b) −1 c) 1 d) 2 e) 7

96 (UFRGS) O valor de $\log_{\frac{1}{4}} 32 + \log 10\sqrt{10}$ é:

a) $-\frac{3}{2}$ b) −1 c) 0 d) 2 e) $\frac{13}{2}$

97 (PUC-SP) Se $\log_{2\sqrt{2}} 512 = x$, então x vale:

a) 6 b) $\frac{3}{2}$ c) 9 d) 3 e) $\frac{2}{3}$

98 (Mack-SP) O valor da expressão $\log_{0,04} 125 - \log_8 \sqrt{32} + \log_{1000} 0{,}001$ é:

a) $-\frac{3}{10}$ b) $-\frac{10}{3}$ c) $\frac{20}{6}$ d) $-\frac{10}{2}$ e) $-\frac{9}{8}$

99 (PUC-RS) Se $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ e $\log(a+b) = \log a + \log b$, então o valor de a é:

a) 2b b) $\frac{b}{b-1}$ c) $\frac{b}{b+1}$ d) $\frac{b-1}{b}$ e) $\frac{b+1}{b}$

100 (Fuvest-SP) Se $\log_2 b - \log_2 a = 5$, o quociente $\frac{b}{a}$ vale:

a) 10 b) 25 c) 32 d) 64 e) 128

101 (PUC-SP) Se $\log_a x = n$ e $\log_a y = 6n$, então $\log_a \sqrt[3]{x^2 y}$ é igual a:

a) $\frac{8n}{3}$ b) $\frac{4n}{3}$ c) $\frac{2n}{3}$ d) $\frac{6n}{2}$ e) $\frac{n}{3}$

102 (Cesgranrio) As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = \log_{10}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$ onde M_1 e M_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 6$.

A razão $\frac{M_1}{M_2}$ é:

a) 2 b) $\log_2 10$ c) $\frac{4}{3}$ d) 10^2 e) $\log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)$

103 (PUC-SP) Se $\log_2(\log_{\frac{1}{2}} x) = 0$, então x é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) $\sqrt{2}$ e) 2

Essa ausência de gráficos ou tabelas, como podemos conferir, é um erro considerado grave, já que a tendência do ensino da matemática tem sido, em grande parte, relacionar os conceitos teóricos com seu desenvolvimento gráfico. E essa não é uma opinião sem embasamento, já que no Guia de Livros do PNLD 2012 consta que "as pessoas são constantemente expostas a informações que, para serem entendidas e levadas em conta de modo crítico, exigem a leitura e interpretação de gráficos e tabela" (BRASIL, 2012, p.15)

Em nossa análise percebemos que não foi apresentado nenhum resumo ou mesmo uma breve nota com uma observação sobre a história do logaritmo, nem ao menos o motivo que levou à sua criação. Os exercícios são do tipo mecânicos e não existe a preocupação com a contextualização. Não contém exercício de interpretação de tabela ou gráfico, com isso, o aluno é levado a decorar e fazer exercícios pouco variados repetidamente até que o conteúdo seja assimilado. Como é uma publicação com data anterior às modificações no nosso sistema educacional, o livro foi considerado suficiente e de boa qualidade para ser adotado pelas escolas do país.

4.2 SOBRE O LIVRO 2

Esse livro introduz o tema logaritmo fazendo uma referência ao capítulo anterior, equações exponenciais. Apresenta um exemplo onde há um contexto muito utilizado para as equações exponenciais e até bem simples, onde o aluno encontrará um caminho aparentemente fácil até o momento em que as propriedades de exponencial não são mais suficientes para o próximo passo aritmético e, nesse momento, o livro consegue introduzir o conceito de logaritmo, mostrando que esse é o conhecimento que faltava para resolver o problema em questão.

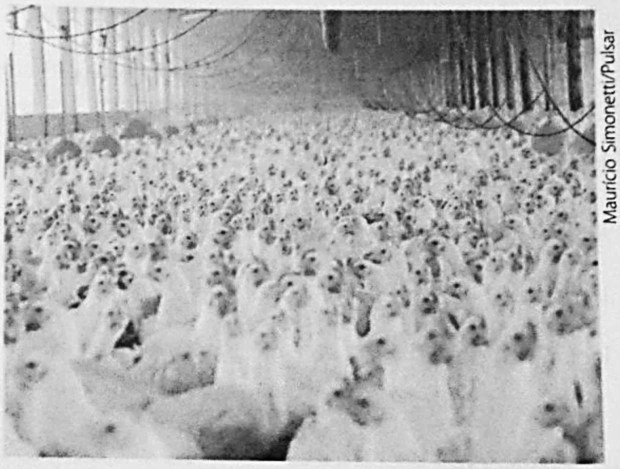
Figura 29 – exemplo de introdução a teoria dos logaritmos

IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. ATUAL, 2004, São Paulo. p. 197

1 Introdução

Uma granja especializada na criação de frangos planejou operar de modo que o número de aves dobre a cada ano.

Após quantos anos o número de frangos passará a ser 5 vezes o número inicial?



Maurício Simonetti/Pulsar

Chamando de *n* o número inicial, teremos:

- após 1 ano de operação: $2n$ frangos;
- após 2 anos de operação: $2 \cdot 2n$ frangos;
- após 3 anos de operação: $2 \cdot 4n$ frangos;

e assim por diante.

O número de frangos vai evoluir da seguinte maneira:

$$n,\quad 2n,\quad 2^2n,\quad 2^3n,\quad \ldots,\quad 2^xn,$$

sendo x o número de anos de operação.

Para responder à pergunta feita devemos resolver a equação $2^x \cdot n = 5n$, ou seja, $2^x = 5$, que é uma equação exponencial.

No estudo de equações e inequações exponenciais, feito no capítulo anterior, só tratamos de casos em que podíamos reduzir as potências à mesma base.

Entretanto, se tivermos de resolver uma equação como $2^x = 5$, não conseguiremos reduzir todas as potências à mesma base. Nesse caso, como $4 < 5 < 8$, então $4 < 2^x < 8$, ou seja, $2^2 < 2^x < 2^3$, e apenas poderemos garantir que $2 < x < 3$. Com os estudos feitos até aqui, não sabemos qual é o valor de x nem como determiná-lo. Para enfrentar esse e outros problemas, vamos estudar agora os logaritmos.

Em seguida, as consequências da definição, bem como as propriedades operatórias são expostas algebricamente, ainda com recursos de exponenciais, o que facilita o aprendizado do aluno e os exemplos a seguir são simples e de pura aplicação aritmética.

Figura 30 – propriedade do logaritmo de um produto

IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. ATUAL, 2004, São Paulo. p. 202

Vamos agora estudar três propriedades operatórias envolvendo logaritmos:

1ª *Logaritmo do produto*

"Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos dos números."

Em símbolos: Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \cdot c) = z$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a (b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Figura 31 – propriedade do logaritmo de um quociente

IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. ATUAL, 2004, São Paulo. p. 203

2ª *Logaritmo do quociente*

"Em qualquer base, o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor."

Em símbolos: Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \frac{b}{c} = z$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a \frac{b}{c} = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

Os exercícios de aplicação, seguidos após a teoria, são simples e de pura aplicação da teoria, bem caracterizados como exercícios de memorização.

Figura 32 – alguns dos exercícios de fixação
IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. ATUAL, 2004, São Paulo. p. 206

16 Desenvolva, aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos (suponha *a*, *b* e *c* reais positivos):

a) $\log_5\left(\frac{5a}{bc}\right)$ b) $\log\left(\frac{b^2}{10a}\right)$ c) $\log_3\left(\frac{ab^2}{c}\right)$ d) $\log_2\left(\frac{8a}{b^3c^2}\right)$

17 Supondo *a*, *b* e *c* reais positivos, desenvolva:

a) $\log_2\left(\frac{b^2\sqrt{a}}{c}\right)$

c) $\log_3\left(\frac{ab^3}{c\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)$

b) $\log\sqrt{\frac{ab^3}{c^2}}$

d) $\log\frac{\sqrt[4]{a^2b}}{\sqrt[3]{10c}}$

18 Supondo *x*, *y* e *b* reais positivos, com $b \neq 1$, e sabendo que $\log_b x = 2$ e $\log_b y = 3$, qual é o valor de:

a) $\log_b(x^2y^3)$ b) $\log_b\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{by}\right)$ c) $\log_b\left(b^2\cdot\sqrt{xy}\right)$

19 Sejam *a*, *b* e *c* reais positivos. Forneça, em cada caso, a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é:

a) $\log_2 a + \log_2 b - \log_2 c$
b) $2\log a - \log b - 3\log c$
c) $2 - \log a + 3\log b - 2\log c$

20 Sejam *a*, *b* e *c* reais positivos. Forneça, em cada caso, a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é:

a) $\frac{1}{3}\log a - \frac{1}{2}\log c - \frac{3}{2}\log b$

b) $2 + \frac{1}{3}\log_2 a + \frac{1}{6}\log_2 b - \log_2 c$

21 Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule em função de *a* e *b* os seguintes logaritmos decimais:

a) $\log 6$ c) $\log 20$ e) $\log 0{,}5$ g) $\log 15$

b) $\log 4$ d) $\log\sqrt{2}$ f) $\log 5$ h) $\log 0{,}2$

Como pudemos verificar, em nenhum exercício de logaritmo, mesmo depois de passada toda a parte teórica, é explorado um contexto, um gráfico ou tabela. Todos foram de pura aplicação teórica.

Esse livro possui uma característica de, ao final de cada capítulo, apresentar ao aluno alguns exercícios de vestibulares envolvendo o tema em questão. Pois nessa seção, pelo menos, esperávamos encontrar exercícios com as abordagens que não haviam sido exploradas anteriormente.

Figura 33 – exercícios de vestibulares

IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. ATUAL, 2004, São Paulo. p. 210

1 (Vunesp-SP) Considere os seguintes números reais:

$$a = \frac{1}{2},\ b = \log_{\sqrt{2}} 2,\ c = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Então:

a) $c < a < b$
b) $a < b < c$
c) $c < b < a$
d) $a < c < b$
e) $b < a < c$

2 (Unama-PA) Se $3^x = \frac{1}{729}$ e $\log_y \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}$, então $x + y$ é igual a:

a) -6 b) 8 c) -8 d) 6 e) -4

3 (UE-PI) Se $\sqrt{9^{p+1}} = 3^{\sqrt{2}}$ e $\log_2 (q-1) = \frac{1}{2}$, então $p^2 + p \cdot q + q^2$ é igual a:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

4 (UE-CE) Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 + 6x + 4 = 0$, então $\log_4 (5x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2)$ é igual a:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) 3 d) 5

5 (F. Visconde de Cairu-BA) Sabendo-se que $\log 2 = 0{,}301$, pode-se afirmar que $\log 80$ é igual a:

a) 1,302
b) 1,603
c) 1,903
d) 2,102
e) 2,203

6 (UF-CE) A opção em que figuram as soluções da equação

$$3^{x^2-8} + \log_{10}\left[\log_{10}\left(\sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{10}}}\right)\right] = 0 \text{ é}$$

a) -3 e 2
b) -3 e 3
c) -2 e 3
d) -2 e 2
e) 2 e 3

7 (Unip-SP) Se os números reais positivos x e y forem tais que

$$\begin{cases} \log_{10} 2^x + \log_{10} 3^y = 1 \\ \log_{10} 8^x + \log_{10} 9^y = 2, \end{cases}$$

então:

a) $x = 1$
b) $y = 0$
c) $y = \log_3 10$
d) $x = \log_{10} 3$
e) $xy = 1$

8 (PUC-RS) Se $f(x) = \log x$, então $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$ é igual a:

a) 10
b) $f(x^2)$
c) $-f(x)$
d) 1
e) 0

9 (U. F. Juiz de Fora-MG) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_{10} (x^2 - 6x + 10)$. Então o valor de $f(6) - f(-2)$ é:

a) 26
b) $\log_{10} 26$
c) 1
d) $\log_{10} \frac{5}{13}$
e) $1 + \log_{10} 26$

Figura 34 – exercícios de vestibulares

IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. ATUAL, 2004, São Paulo. p. 211

10 (Mackenzie-SP) Se $4^x = 3$ e $4^y = 9$, então $(0,125)^{-4x+2y}$ vale:

a) 4 c) $\log_4 9$ e) 2

b) $\log_4 3$ d) 1

11 (UPE-PE) Seja $f(x) = e^{\frac{1}{\log_2 e}} \cdot (x^2 + 5)$. Um quociente das soluções da equação $f(x) = 12x$ pode ser:

a) $\frac{5}{6}$ c) 6 e) $\frac{6}{5}$

b) 5 d) $\frac{1}{3}$

12 (Mackenzie-SP) Se $\log_k 6 = m$ e $\log_k 3 = p$, $0 < k \neq 1$, então o logaritmo de $\frac{k}{2}$ na base k é igual a:

a) $p - m + 1$

b) $m - p + 1$

c) $p - m + 6$

d) $6m - 3p$

e) $m - p - 3$

13 (U. F. Viçosa-MG) Se $\log(a + b) = \log a + \log b$, então $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ c) 1 e) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{3}$ d) 2

14 (Vunesp-SP) Em que base o logaritmo de um número natural n, $n > 1$, coincide com o próprio número n?

a) n^n c) n^2 e) $n^{\frac{1}{n}}$

b) $\frac{1}{n}$ d) n

15 (F. Porto-Alegrense-RS) Se $\log 8 = k$, então $\log 5$ vale:

a) k^3 c) $\frac{2k}{3}$ e) $1 - \frac{k}{3}$

b) $5k - 1$ d) $1 + \frac{k}{3}$

16 (PUC-RS) Se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, então $\log 375$ é:

a) $y + 3x$ d) $y - 3x + 3$

b) $y + 5x$ e) $3(y + x)$

c) $y - x + 3$

17 (UF-MT) Sendo $\log_4 25 = \frac{x}{3}$, podemos afirmar que $\log_2 5$ é igual a:

a) $\frac{x}{3}$ c) $\frac{x^2}{9}$ e) $\sqrt[3]{\frac{x^2}{9}}$

b) $\frac{2x}{3}$ d) $\sqrt[3]{\frac{x}{3}}$

18 (U. Metodista-SP) Sabendo-se que $m = 2^{5+\log_2 3} + 3^{\log_2 7 \cdot \log_3 2}$, então m é igual a:

a) 103 c) 105 e) 107

b) 104 d) 106

Após esses exercícios, esperávamos que o capítulo acabasse, mas ao virar a última página, nos deparamos com uma seção do capítulo nomeada de “Matemática no Tempo” onde consta um resumo de toda a história da invenção do logaritmo. A época, a motivação, o processo, o autor. Era um resumo que, se estivesse no início do capítulo, provavelmente daria um ânimo, despertaria uma curiosidade e alimentaria uma vontade de ir em frente para conferir as aplicações do logaritmo. Como estava ao final do capítulo, podemos prever que os alunos, depois de passarem por uma série de conceitos novos e sem contextualização, passaram pelo importante resumo sem lhe dar o devido valor.

Figura 35 – Resumo da invenção dos logaritmos

IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. ATUAL, 2004, São Paulo. p. 212

A invenção dos logaritmos

O desenvolvimento científico verificado no Renascimento, especialmente na Astronomia e na navegação, exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos. A introdução, perto do final do século XVI, do uso das frações decimais em substituição às sexagesimais e às comuns, amenizou um pouco as dificuldades computacionais dos cientistas. Mas estas somente seriam superadas a contento com a invenção dos logaritmos, no início do século XVII.

A idéia dos inventores dos logaritmos era transformar operações mais difíceis de efetuar em outras mais fáceis, por meio de tabelas que permitissem voltar aos cálculos iniciais. Por exemplo, transformar multiplicações em adições e divisões em subtrações, idéia essa já explorada embrionariamente antes. De fato, numa obra de 1484, o médico e matemático francês Nicolas Chuquet (1445?-1500?) incluiu uma tabela em que a primeira coluna era a progressão geométrica de razão 2:

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 262\,144, 524\,288, 1\,048\,576 \; (2^n, n = 1, 2, 3, \ldots, 20)$$

e a segunda, a progressão aritmética, de razão 1:

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 18, 19, 20$$

e observou explicitamente que a adição na segunda coluna corresponde à multiplicação na primeira. Por exemplo, para efetuar 8×16 basta somar seus correspondentes, $3 + 4 = 7$, e depois localizar o sétimo elemento da primeira coluna, que é 128 (aqui omitido). Posteriormente essa idéia seria estendida pelo matemático alemão M. Stifel (1486-1567) para expoentes negativos e fracionários. A tabela construída por Chuquet

Figura 36 – Resumo da invenção dos logaritmos

IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. ATUAL, 2004, São Paulo. p. 213

é, no fundo, uma tábua de logaritmos bastante rudimentar, uma vez que os números da segunda coluna são, como se diz modernamente, os logaritmos, na base 2, dos números correspondentes da primeira coluna.

Entretanto, devido às limitações da matemática da época, a primeira tábua de logaritmos suficientemente extensa só seria publicada em 1614, por obra do barão escocês John Napier (1550-1617), também conhecido por Neper, seu nome latinizado. Neper não era um matemático profissional. Não se sabe sequer se ele alcançou algum grau universitário. Não obstante, foi um ativo participante das profundas transformações pelas quais passou o mundo em sua época, tanto no campo da religião como no da ciência. Suas posições em relação à religião, como por exemplo a obsessão em querer provar que o Papa era o anticristo, no mínimo nos parecem estranhas, meio milênio depois. Apesar disso, Neper cultivou as ciências, especialmente a Astronomia e a Matemática, com uma seriedade ainda exemplar para os padrões atuais. Haja vista sua tábua de logaritmos, fruto de um trabalho de vinte anos. Vale registrar, a propósito, que a notação algébrica moderna, particularmente a exponencial para potências, só seria introduzida algumas décadas após a publicação da obra de Neper. Ou seja, Neper conseguiu realizar seu estudo sem essa importante auxiliar, o que aumenta mais ainda seus méritos.

O livro em que Neper introduziu os logaritmos recebeu dele o nome latino de *Mirifice logarithmorum canonis descriptio* ("Uma descrição da maravilhosa lei dos logaritmos"). A palavra *logaritmo*

Hulton/Archive

Neper.

Figura 37 – Resumo da invenção dos logaritmos

IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. ATUAL, 2004 São Paulo. p. 214

foi inventada pelo autor e deriva do grego, de *logos* ("razão", no sentido de razão de uma P.A. ou P.G.) e *arithmos* ("números"). Como a obra foi planejada tendo em vista seu uso na Astronomia, por meio da trigonometria, a tábua dá os logaritmos dos senos dos ângulos de 30° a 90° com intervalos de um minuto. Há também uma introdução em que Neper ensina como usar sua tábua.

Generalizando a idéia de seus predecessores, Neper começa construindo a P.G.

$$10^7\,(1 - 10^{-7})^n,$$

associada naturalmente à P.A. n = 0, 1, 2, 3, ..., 100. A escolha da razão $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$ objetiva fazer com que os termos da P.G. estejam muito próximos uns dos outros, e a inclusão do fator 10^7 visa evitar decimais. Nessas condições, Neper chama o expoente *n* de *logaritmo* de $10^7\,(1 - 10^{-7})^n$. Essa definição é mais complicada do que a dada hoje habitualmente, mas se presta aos objetivos em vista. Por exemplo, pode-se mostrar que ela transforma um produto numa adição seguida de uma subtração.

A obra de Neper despertou um entusiasmo muito grande na comunidade científica da época. Henry Briggs (1561-1631), então professor do Gresham College de Londres e posteriormente professor de uma cadeira de Astronomia na Universidade de Oxford, escreveu a propósito: "Jamais um livro me agradou tanto ou me deixou tão entusiasmado".

Podemos perceber que esse resumo aborda até a relação entre uma PG e uma PA, dando ao aluno uma breve ideia da motivação de Napier e dos artifícios por ele usados.

O resumo poderia parar no ponto onde Napier cria a ideia do logaritmo, mas foi mais completo quando continuou e apresentou a parte da história que envolve a evolução dos logaritmos após a morte de seu inventor. Fica claro ao aluno que, para chegar aos logaritmos que utilizamos com frequência hoje, foi necessário a continuação de seu desenvolvimento por outro importante matemático, Briggs, que apresentou ao mundo os logaritmos decimais com suas tábuas de logaritmos.

Figura 38 – Resumo da invenção dos logaritmos

IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. ATUAL, 2004, São Paulo. p. 215

Em 1615, Briggs visitou Neper em sua residência, na Escócia, ocasião em que eles discutiram possíveis aprimoramentos no método dos logaritmos. Uma sugestão apresentada por Briggs foi o uso da base 10, com o que Neper concordou, alegando que já havia pensado nisso. Mas Neper morreria pouco depois, em 1617, sem ter posto em prática, ainda, essa idéia. Em 1624, porém, como fruto de um trabalho de sete anos, Briggs publicou a obra *Arithmetica logarithmica*, com uma tábua de logaritmos decimais, com 14 casas decimais, dos números de 1 a 20 000 e de 90 000 a 100 000. Os logaritmos entre 20 000 e 90 000 seriam calculados, com 10 casas decimais, pelo livreiro e editor holandês Adrien Vlacq (1600-1666) e seriam inseridos na segunda edição da *Arithmetica logarithmica*, saída em 1628.

Como vimos, os logaritmos foram inventados única e exclusivamente como instrumento para facilitar cálculos. Mas é evidente que, com o advento dos computadores e das calculadoras científicas, a finalidade inicial perdeu toda a sua importância. No trabalho de Neper, porém, estava o embrião de um conceito que, com o tempo, iria mostrar o grande valor intrínseco dos logaritmos: o de *função logarítmica*. De fato, com o desenvolvimento da Matemática e das ciências, verificou-se que muitos fenômenos físicos, biológicos e econômicos podem ser representados, de algum modo, por essa função. Sendo, portanto, um instrumento de interpretação da natureza e das relações humanas, a função logarítmica jamais perderá sua importância. ■

Em nossa análise, foi possível perceber que o livro apresenta as teorias de forma inteligente, com exemplos fáceis e uma linha progressiva de raciocínio que leva o aluno a concluir a necessidade do uso do logaritmo. Em mais uma publicação, não encontramos exercícios com ênfase em temas universais, tabelas e/ou gráficos de consulta e mesmo assim o livro foi aprovado e aplicado nas escolas de ensino médio no país. Obviamente que ainda não havia a preocupação com a contextualização e interdisciplinaridade como eixos norteadores para uma melhor compreensão da matemática.

4.3 SOBRE O LIVRO 3

Como esse livro é uma publicação do mesmo autor, esperávamos encontrar uma linha de raciocínio parecida, mas, pelo menos na introdução, percebemos a falta de criatividade:

Figura 39 – introdução aos logaritmos

IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015, p. 137

Introdução

Uma granja especializada na criação de frangos planejou sua expansão de modo que o número de aves dobre a cada ano.

Após quantos anos o número de frangos passará a ser 5 vezes o número atual?

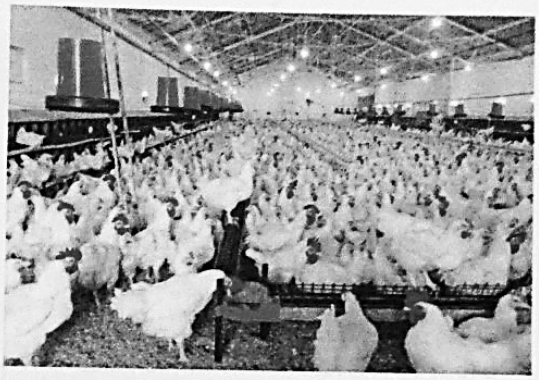
Chamando de **n** o número atual teremos:

- após 1 ano: 2n frangos;
- após 2 anos: $2 \cdot 2n$ frangos;
- após 3 anos: $2 \cdot 4n$ frangos;

e assim por diante.

O número de frangos vai evoluir da seguinte maneira:

$$n,\ 2n,\ 2^2n,\ 2^3n,\ \ldots,\ 2^xn,$$



Galinhas em uma granja.

sendo **x** o número de anos de operação, contados a partir de hoje.

Para responder à pergunta feita devemos resolver a equação $2^x \cdot n = 5n$, ou seja, $2^x = 5$, que é uma equação exponencial.

No estudo de equações exponenciais, feito no capítulo anterior, só tratamos de casos em que podíamos reduzir as potências à mesma base.

Entretanto, se tivermos de resolver uma equação como $2^x = 5$, não conseguiremos reduzir todas as potências à mesma base. Nesse caso, como $4 < 5 < 8$, então $4 < 2^x < 8$, ou seja, $2^2 < 2^x < 2^3$, e apenas poderemos garantir que $2 < x < 3$. Com os estudos feitos até aqui, não sabemos qual é o valor de **x** nem como determiná-lo. Para resolver esse e outros problemas, vamos estudar agora os logaritmos.

O mesmo exemplo, com as mesmas palavras e a mesma figura foi utilizado neste livro, mesmo após um intervalo de onze anos do último livro avaliado[16].

As consequências da definição e as propriedades dos logaritmos possuem a mesma base de definição, de fácil compreensão, mudando apenas os exemplos numéricos.

[16] LIVRO 2

Figura 40 – propriedades operatórias

IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015, p. 140

Propriedades operatórias

Vamos agora estudar três propriedades operatórias envolvendo logaritmos.

Logaritmo do produto

O logaritmo do produto de dois números **b** e **c**, reais e positivos, em uma base qualquer **a** $(0 < a \neq 1)$, é igual à soma dos logaritmos desses números na base **a**.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \cdot c) = z$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a (b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c \end{array}\right\} a^z = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Isto é, $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Acompanhe alguns exemplos:

- $\log_3 (27 \cdot 9) = \log_3 243 = 5$

  Aplicando a propriedade do logaritmo de um produto, temos: $\log_3 27 + \log_3 9 = 3 + 2 = 5$.

- $\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$
- $\log_4 30 = \log_4 (2 \cdot 15) = \log_4 2 + \log_4 15 = \log_4 2 + \log_4 (5 \cdot 3) = \log_4 2 + \log_4 5 + \log_4 3$

Logaritmo do quociente

O logaritmo do quociente de dois números **b** e **c**, reais e positivos, em uma base qualquer **a** $(0 < a \neq 1)$, é igual à diferença entre os logaritmos desses números na base **a**.

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{array}\right\} a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

Isto é, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Observe alguns exemplos:

- $\log_2 \left(\frac{32}{4}\right) = \log_2 8 = 3$

  Aplicando a propriedade do logaritmo do quociente, temos: $\log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$.

- $\log_3 \left(\frac{7}{2}\right) = \log_3 7 - \log_3 2$
- $\log \left(\frac{3}{100}\right) = \log 3 - \log 100 = \log 3 - 2$

Logaritmo da potência

O logaritmo de uma potência de base **b**, real e positiva, é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Sendo a base do logaritmo um número **a**, tal que $0 < a \neq 1$, e o expoente $r \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^r = y$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^r = y \Rightarrow a^y = b^r \end{array}\right\} a^y = (a^x)^r = a^{rx} \Rightarrow y = rx$$

Isto é, $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$.

Observe esses exemplos:

- $\log_2 8^2 = \log_2 64 = 6$

  Aplicando a propriedade do logaritmo da potência, temos: $\log_2 8^2 = 2 \cdot \log_2 8 = 2 \cdot 3 = 6$.

- $\log_5 27 = \log_5 3^3 = 3 \cdot \log_5 3$
- $\log \sqrt{2} = \log 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 2$

Como os livros atuais, para serem aprovados pelo PNLD, precisam ter uma ênfase na contextualização, interdisciplinaridade e base nas competências e habilidades do ENEM, analisamos a próxima seção e encontramos os exercícios iniciais, que eram apenas de aplicação da teoria e memorização das propriedades. Os últimos exercícios já estavam atualizados para as novas exigências do sistema educacional atual: contextualizados e interdisciplinarizados.

Figura 41 – seção de exercícios

IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015, p. 141

11 Sejam **x** e **y** positivos e $0 < b \neq 1$. Sabendo que $\log_b x = -2$ e $\log_b y = 3$, calcule o valor dos seguintes logaritmos:

a) $\log_b (x \cdot y)$
b) $\log_b \left(\frac{x}{y}\right)$
c) $\log_b (x^3 \cdot y^2)$
d) $\log_b \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)$
e) $\log_b \left(\frac{x \cdot \sqrt{y}}{b}\right)$
f) $\log_b \sqrt{\sqrt{x} \cdot y^3}$

12 Desenvolva, aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos (suponha **a**, **b** e **c** reais positivos):

a) $\log_5 \left(\frac{5a}{bc}\right)$
b) $\log \left(\frac{b^2}{10a}\right)$
c) $\log_3 \left(\frac{ab^2}{c}\right)$
d) $\log_2 \left(\frac{8a}{b^3c^2}\right)$

13 Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule, em função de **a** e **b**:

a) $\log 6$
b) $\log 1{,}5$
c) $\log 5$
d) $\log 30$
e) $\log \frac{1}{4}$
f) $\log 72$
g) $\log 0{,}3$
h) $\log \sqrt[3]{1{,}8}$
i) $\log 0{,}024$
j) $\log 0{,}75$
k) $\log 0{,}666...$
l) $\log (4^{15} \cdot 9^{12})$

14 Sejam **a**, **b** e **c** reais positivos. Em cada caso, obtenha a expressão cujo desenvolvimento logarítmico, na respectiva base, é dado por:

a) $\log a + \log b + \log c$
b) $3 \log_2 a + 2 \log_2 c - \log_2 b$
c) $\log_3 a - \log_3 b - 2$
d) $\frac{1}{2} \cdot \log a - \log b$

15 Qual é o valor de:

a) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$?
b) $\log_{\frac{1}{3}} 18 - \log_{\frac{1}{3}} 6$?
c) $\log_3 72 - \log_3 12 - \log_3 2$?
d) $\frac{1}{3} \cdot \log_{15} 8 + 2 \cdot \log_{15} 2 + \log_{15} 5 - \log_{15} 9000$?

16 Considerando os valores $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$, calcule:

a) $\log 72$
b) $\log \frac{1}{18}$
c) $\log \sqrt{24}$
d) $\log \sqrt[3]{144}$
e) $\log 0{,}06$
f) $\log 48$
g) $\log 125$
h) $\log 2000$
i) $\log 0{,}0003$
j) $\log \sqrt{1{,}5}$

17 Considerando $\log_2 5 \simeq 2{,}32$, obtenha os valores de:

a) $\log_2 10$
b) $\log_2 500$
c) $\log_2 1600$
d) $\log_2 \sqrt[3]{0{,}2}$
e) $\log_2 \left(\frac{64}{125}\right)$

18 Supondo que $\log 8 = p$ e $\log 9 = q$, obtenha, em função de **p** e **q**:

a) $\log 6$
b) $\log 0{,}72$
c) $\log \sqrt[3]{162}$
d) $\log 6{,}75$

19 Sabendo que $\log_5 (\sqrt{7} - \sqrt{2}) = a$, calcule, em função de **a**, o valor de $\log_5 (\sqrt{7} + \sqrt{2})$.

20 O pH (potencial hidrogeniônico) é uma escala usada na Química para medir o grau de acidez ou basicidade de uma solução aquosa. Os valores do pH variam de 0 a 14, sendo que:

$0 \leq pH < 7 \Rightarrow$ solução é ácida
$pH = 7 \Rightarrow$ solução é neutra
$7 < pH \leq 14 \Rightarrow$ solução é básica

O valor do pH é obtido pela fórmula: $pH = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ é a concentração de íons hidrogênio, em mol/L.

Como o livro ainda não havia abordado a parte de função logarítmica, entendemos que são poucas as opções para contextualização, então continuamos a nossa análise em busca de melhorias e novidades na abordagem do tema logaritmo.

Figura 42 – seção de exercícios

IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015, p. 142

a) Considere três soluções aquosas **A**, **B** e **C** cujas concentrações hidrogeniônicas $[H^+]$ são, respectivamente, 10^{-3} mols/L; $4 \cdot 10^{-9}$ mols/L e $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ mols/L. Para cada uma, determine o pH, classificando-a em ácida, básica ou neutra. Use $\log 2 \simeq 0{,}30$.

b) Três soluções aquosas **D**, **E** e **F** apresentam pH, respectivamente, iguais a 4,7; 8,3 e 6,85. Usando os valores $\log 2 \simeq 0{,}30$; $\log 3 \simeq 0{,}48$; $\log 5 \simeq 0{,}7$ e $\log 7 \simeq 0{,}85$, determine a concentração $[H^+]$ de cada uma.

21 Considere duas soluções aquosas ácidas $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$, com pH respectivamente iguais a 1 e 2.

a) Qual solução é mais ácida?

b) Compare as concentrações de hidrogênio ($[H^+]$) das duas soluções.

c) Considere agora uma solução aquosa ácida $\mathbf{S_3}$ com pH = 3. Compare as concentrações de hidrogênio ($[H^+]$) de $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_3}$.

22 Classifique as afirmações seguintes em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**):

a) $\log 26 = \log 20 + \log 6$

b) $\log 5 + \log 8 + \log 2{,}5 = 2$

c) $\log_2 4^{18} = 36$

d) $\log_3 \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} > 0{,}25$

e) $\log_5 35 - \log_5 7 = 1$

f) $\log_3 (\sqrt{2} + 1) + \log_3 (\sqrt{2} - 1) = 0$

23 Considerando 1,6 como valor aproximado para $\log 39$, assinale **V** ou **F** nas afirmações:

a) $\log 390 = 16$

b) $\log 3{,}9 = 0{,}6$

c) $\log 3\,900\,000 = 6{,}6$

d) $\log \sqrt{39} = 0{,}8$

e) $\log 0{,}039 = -0{,}4$

24 Considerando **x** e **y** reais positivos, é possível que tenhamos $\log (x + y) = \log x + \log y$?
Em caso afirmativo, dê exemplos numéricos em que isso ocorre.

25 (FGV-SP) Os diretores de uma empresa de consultoria estimam que, com **x** funcionários, o lucro mensal que pode ser obtido é dado pela função:

$$P(x) = 20 + \ln\left(\frac{x^2}{25}\right) - 0{,}1x \text{ mil reais.}$$

Atualmente a empresa trabalha com 20 funcionários.
Use as aproximações: $\ln 2 \simeq 0{,}7$; $\ln 3 \simeq 1{,}1$ para responder às questões seguintes:

a) Qual é o valor do lucro mensal da empresa?

b) Se a empresa tiver necessidade de contratar mais 10 funcionários, o lucro mensal vai aumentar ou diminuir? Quanto?

Na seção de função logarítmica é apresentada ao aluno uma comparação entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica e alguns exercícios fixando a parte de análise de tabelas e análise gráfica, alguns contextualizados, outros não.

Figura 43 – seção de exercícios

IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015, p. 147

38 A lei seguinte representa uma estimativa sobre o número de funcionários de uma empresa, em função do tempo de vida:

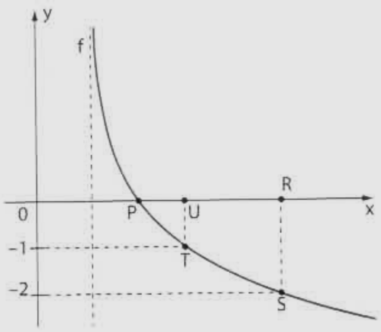
$$n(t) = 400 + 50 \cdot \log_4 (t + 2)$$

em que n(t) é o número de funcionários no t-ésimo ano de existência da empresa (t = 0, 1, 2, ...).

a) Quantos funcionários a empresa possuía na sua fundação?

b) Calcule a taxa média de variação dessa função no intervalo do 2º ao 6º ano de existência da empresa.

39 O gráfico seguinte representa a função **f**, definida por $f(x) = \log_{0,5} (x + k)$ sendo **k** uma constante real.



a) Obtenha o valor de **k** e o domínio de **f**, sabendo que a abscissa de **U** é 4.

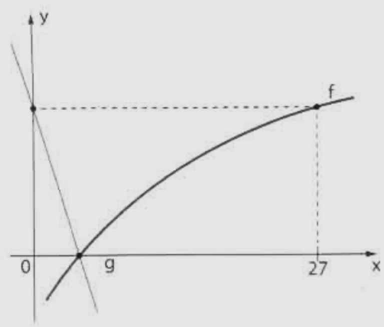
b) Determine a abscissa de **P**.

c) Determine a área do trapézio RSTU.

d) Obtenha o valor de f(1 002), admitindo que $\log 2 \simeq 0{,}3$.

40 Qual é o domínio da função **f**, definida por $f(x) = \log_3 (0{,}2^x - 1)$?

41 Os gráficos de duas funções **f** e **g** são mostrados a seguir. Sabendo que $f(x) = \log_9 x$, determine:

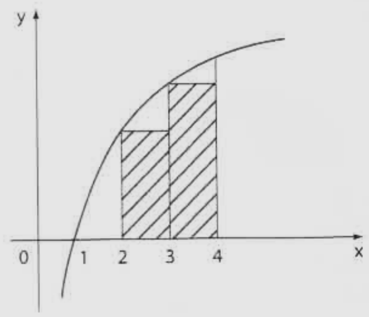


a) a lei da função **g**;

b) os valores de **x** para os quais f(x) > g(x);

c) o valor de f(3) − g(3).

42 O gráfico abaixo representa a função $y = \log_2 x$.



Qual é o valor da área hachurada?
Considere $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$.

43 Classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada afirmação a seguir:

a) $\log_3 4 < \log_3 5$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 4 < \log_{\frac{1}{3}} 5$

c) $\log 0{,}35 < \log 0{,}2$

d) $\log_2 \pi^2 > \log_2 9$

e) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} < \log_{\frac{1}{2}} 2$

f) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$

44 Entre os números seguintes, determine aqueles que são positivos:

a) $\log_{\frac{1}{4}} 3$

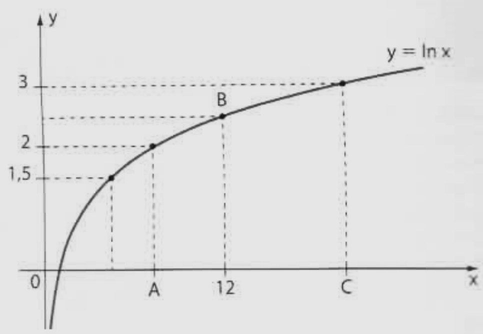
b) $\log_5 2$

c) $\log 0{,}2$

d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$

e) $\log_{\frac{2}{3}} 7$

45 O gráfico da função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $y = \ln x$ é dado a seguir:



Determine a área do triângulo ABC, usando a tabela seguinte, que contém valores aproximados.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4,0
e^x	1,6	2,7	4,5	7,5	12	20	33	55

O livro, ao final do capítulo, reservou um espaço que provavelmente interessaria ao aluno. Um resumo de um fato real recente, o terremoto que atingiu o Japão em 2011, sendo relacionado com o logaritmo.

Figura 44 – Terremoto ocorrido no Japão, em 2011.

IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015, p. 148

Os terremotos e os logaritmos

No dia 11 de março de 2011, um forte terremoto de 8,9 graus na escala Richter sacudiu o Japão. Esse terremoto está entre os 10 piores da história da humanidade.

O terremoto desencadeou o fenômeno dos *tsunamis* – ondas gigantes que podem chegar até 10 metros de altura e que podem atingir velocidades próximas a de um jato comercial. O alerta de *tsunamis* foi enviado a vinte países, inclusive aos Estados Unidos (estado do Havaí).

O terremoto devastador deixou um cenário de guerra: aproximadamente 25 mil vítimas (entre mortes confirmadas e desaparecidos); 18 mil casas destruídas e milhares de prédios danificados. Além disso, houve uma explosão em um reator da usina nuclear de Fukushima, causando grande apreensão na comunidade internacional. A economia do Japão e, consequentemente, a economia mundial sofreram abalos significativos.

A escala Richter foi desenvolvida em 1935 por Charles Richter e Beno Gutenberg, no California Institute of Technology. Trata-se de uma escala logarítmica, sem limites. No entanto, a própria natureza impõe um limite superior a essa escala, já que ela está condicionada ao próprio limite de resistência das rochas na crosta terrestre.

A magnitude (graus) de Richter é uma medida quantitativa do "tamanho" de um terremoto. Ela está relacionada com a amplitude das ondas registradas e também com a energia liberada.

Ambas as imagens retratam a região de Kesenruma, no Japão. A fotografia de cima é de 12 de março de 2011, logo após o *tsunami*, e mostra a devastação causada pelo terremoto; a fotografia ao lado foi tirada um ano e meio depois, em setembro de 2012.

Além do texto, apresenta também duas fotos do local, antes e depois do terremoto. Em nossa opinião, essas fotos ajudam a prender a atenção do aluno e o ajudam a entender com menos dificuldade a aplicação feita pelo livro.

Figura 45 – aplicação dos logaritmos nos terremotos

IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015, p. 149

A escala Richter e seus efeitos

De 0 a 1,9	De 2 a 2,9	De 3 a 3,9	De 4 a 4,9	De 5 a 5,9	De 6 a 6,9	De 7 a 7,9	De 8 a 8,9	9 ou mais
Tremor detectado apenas por um sismógrafo.	Oscilações de objetos suspensos.	Vibração parecida com a da passagem de um caminhão.	Vidros quebrados, quedas de pequenos objetos.	Móveis são deslocados, fendas nas paredes.	Danos nas construções, destruição das casas mais frágeis.	Danos maiores, fissuras no subsolo, canos se rompem.	Pontes destruídas, maioria das construções desaba.	Destruição quase total das construções, tremor de terra visível a olho nu.

Fonte: *O Globo*, 15 jun. 2005.

Amplitude

A amplitude é uma forma de medir a movimentação do solo e está diretamente associada ao tamanho das ondas registradas nos sismógrafos.

A fórmula utilizada é:

$$M = \log A - \log A_0$$

em que **A** é a amplitude máxima medida no sismógrafo a 100 km do epicentro do terremoto, e $\mathbf{A_0}$, uma amplitude de referência ($\log \mathbf{A_0}$ é constante).

Desse modo, se quisermos comparar as magnitudes ($\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$) de dois terremotos em função da amplitude das ondas geradas, podemos fazer:

$$M_1 - M_2 = (\log A_1 - \log A_0) - (\log A_2 - \log A_0)$$

$$M_1 - M_2 = \log A_1 - \log A_2$$

$$M_1 - M_2 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$$

Em particular, se $M_1 - M_2 = 1$ (terremotos que diferem de 1 grau na escala Richter), temos:

$$1 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^1 = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = 10 \cdot A_2$$

Desse modo, cada ponto de magnitude equivale a 10 vezes a amplitude do ponto anterior.

Energia

A energia liberada em um abalo sísmico é um fiel indicador do poder destrutivo de um terremoto. A relação entre a magnitude **M** (graus) de Richter e a energia liberada **E** é dada por:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) \quad \bullet$$

sendo $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh (quilowatt-hora) um valor padrão (constante).

Vamos comparar as energias $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{E_2}$ liberadas em dois terremotos $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$ que diferem de 1 grau na escala Richter, a saber, de magnitudes $\mathbf{M_1}$ e $M_2 = M_1 + 1$.

De •, podemos escrever:

$$\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) = \frac{3M}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{\frac{3M}{2}} \Rightarrow E = E_0 \cdot 10^{\frac{3M}{2}}$$

Assim, para o terremoto $\mathbf{T_1}$, temos $E_1 = E_0 \cdot 10^{\frac{3M_1}{2}}$; para o terremoto $\mathbf{T_2}$, temos: $E_2 = E_0 \cdot 10^{\frac{3M_2}{2}} = E_0 \cdot 10^{\frac{3 \cdot (M_1 + 1)}{2}} = \underbrace{E_0 \cdot 10^{\frac{3M_1}{2}}}_{E_1} \cdot 10^{\frac{3}{2}} = E_1 \cdot 10^{\frac{3}{2}}$, isto é, $E_2 = E_1 \cdot 10^{\frac{3}{2}}$.

Como $10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} = \sqrt{1000} \simeq 31{,}62$, concluímos que a energia liberada no terremoto $\mathbf{T_2}$ é aproximadamente 32 vezes a energia liberada no terremoto $\mathbf{T_1}$.

Assim, cada ponto na escala Richter equivale a aproximadamente 32 vezes a energia do ponto anterior.

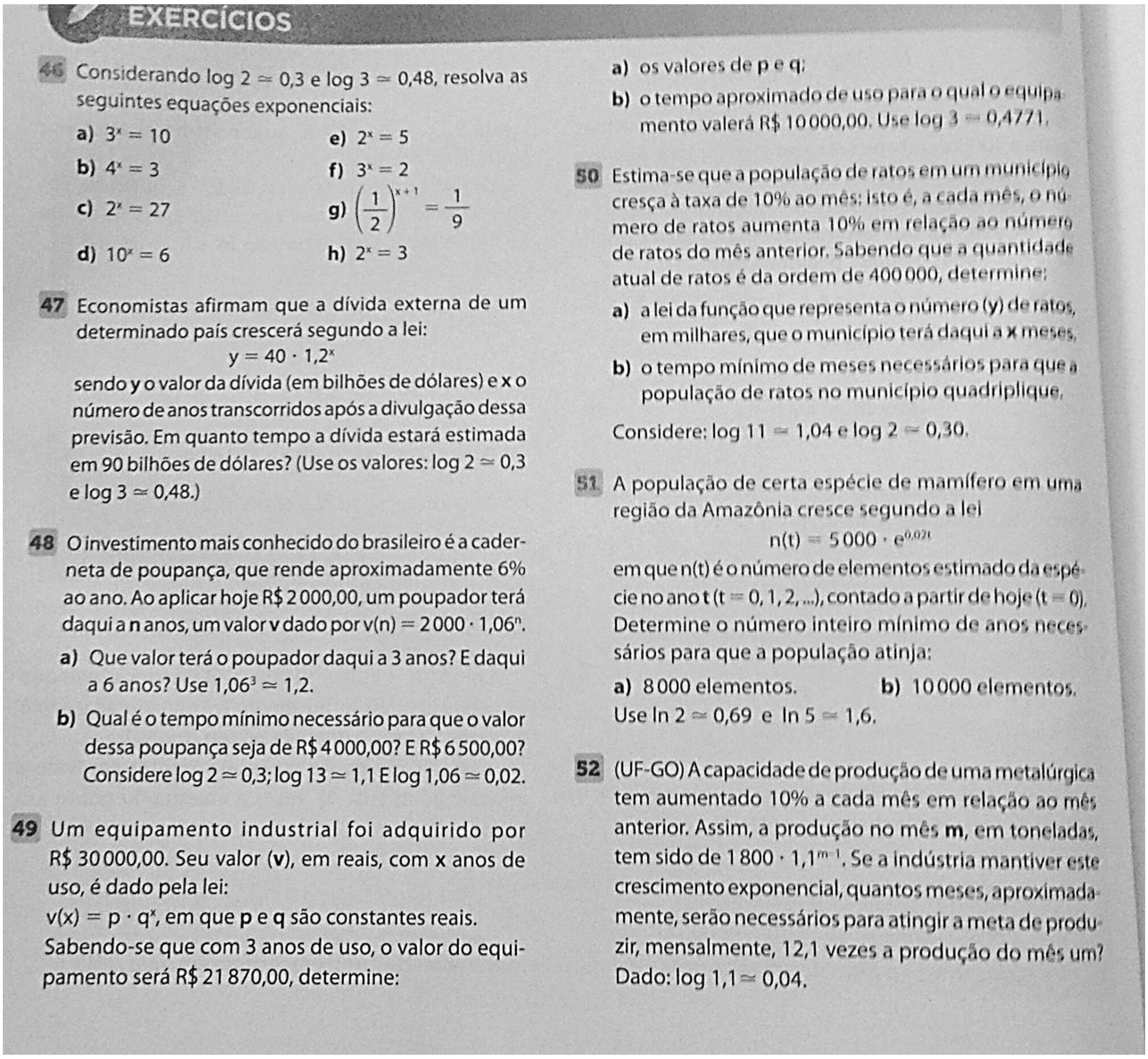
Referências bibliográficas:

- Revista *Galileu*. São Paulo: Globo, out. 2002.
- *Como medir a força de um terremoto*. Disponível em: <www.obsis.unb.br>. Acesso em: mar. 2015.

A preocupação com a contextualização continua, já que o livro reserva uma seção exclusiva para os exercícios contextualizados.

Figura 46 – exercícios contextualizados

IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015, p. 150



EXERCÍCIOS

46 Considerando $\log 2 \simeq 0,3$ e $\log 3 \simeq 0,48$, resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $3^x = 10$
b) $4^x = 3$
c) $2^x = 27$
d) $10^x = 6$
e) $2^x = 5$
f) $3^x = 2$
g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{9}$
h) $2^x = 3$

47 Economistas afirmam que a dívida externa de um determinado país crescerá segundo a lei:

$$y = 40 \cdot 1,2^x$$

sendo **y** o valor da dívida (em bilhões de dólares) e **x** o número de anos transcorridos após a divulgação dessa previsão. Em quanto tempo a dívida estará estimada em 90 bilhões de dólares? (Use os valores: $\log 2 \simeq 0,3$ e $\log 3 \simeq 0,48$.)

48 O investimento mais conhecido do brasileiro é a caderneta de poupança, que rende aproximadamente 6% ao ano. Ao aplicar hoje R$ 2 000,00, um poupador terá daqui a **n** anos, um valor **v** dado por $v(n) = 2000 \cdot 1,06^n$.

a) Que valor terá o poupador daqui a 3 anos? E daqui a 6 anos? Use $1,06^3 \simeq 1,2$.
b) Qual é o tempo mínimo necessário para que o valor dessa poupança seja de R$ 4 000,00? E R$ 6 500,00? Considere $\log 2 \simeq 0,3$; $\log 13 \simeq 1,1$ E $\log 1,06 \simeq 0,02$.

49 Um equipamento industrial foi adquirido por R$ 30 000,00. Seu valor (**v**), em reais, com **x** anos de uso, é dado pela lei:

$v(x) = p \cdot q^x$, em que **p** e **q** são constantes reais.

Sabendo-se que com 3 anos de uso, o valor do equipamento será R$ 21 870,00, determine:

a) os valores de **p** e **q**;
b) o tempo aproximado de uso para o qual o equipamento valerá R$ 10 000,00. Use $\log 3 \simeq 0,4771$.

50 Estima-se que a população de ratos em um município cresça à taxa de 10% ao mês; isto é, a cada mês, o número de ratos aumenta 10% em relação ao número de ratos do mês anterior. Sabendo que a quantidade atual de ratos é da ordem de 400 000, determine:

a) a lei da função que representa o número (**y**) de ratos, em milhares, que o município terá daqui a **x** meses.
b) o tempo mínimo de meses necessários para que a população de ratos no município quadriplique.

Considere: $\log 11 \simeq 1,04$ e $\log 2 \simeq 0,30$.

51 A população de certa espécie de mamífero em uma região da Amazônia cresce segundo a lei

$$n(t) = 5\,000 \cdot e^{0,02t}$$

em que n(t) é o número de elementos estimado da espécie no ano **t** (t = 0, 1, 2, ...), contado a partir de hoje (t = 0). Determine o número inteiro mínimo de anos necessários para que a população atinja:

a) 8 000 elementos.
b) 10 000 elementos.

Use $\ln 2 \simeq 0,69$ e $\ln 5 \simeq 1,6$.

52 (UF-GO) A capacidade de produção de uma metalúrgica tem aumentado 10% a cada mês em relação ao mês anterior. Assim, a produção no mês **m**, em toneladas, tem sido de $1\,800 \cdot 1,1^{m-1}$. Se a indústria mantiver este crescimento exponencial, quantos meses, aproximadamente, serão necessários para atingir a meta de produzir, mensalmente, 12,1 vezes a produção do mês um? Dado: $\log 1,1 \simeq 0,04$.

Para fechar o capítulo, o autor disponibiliza uma seção com exercícios contextualizados[17], com gráficos, tabelas e outra seção[18] com 28 exercícios aplicados em vestibulares anteriores de várias regiões do país, todos de acordo com as habilidades e competências do ENEM.

[17] "Exercícios Complementares"
[18] Testes

Figura 47 – exercícios complementares

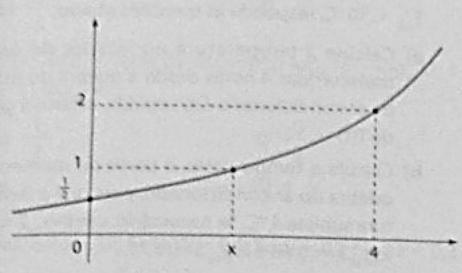
IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015, p. 155

4 (UF-PR) O gráfico abaixo corresponde a uma função exponencial da forma $f(x) = 2^{ax+b}$, sendo **a** e **b** constantes e $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule os valores **a** e **b** da expressão de f(x) que correspondem a esse gráfico.

b) Calcule o valor de **x** para o qual se tem $f(x) = 1$.

c) Dado $k > 0$ qualquer, mostre que o ponto $x = \log_2 (4k^2)$ satisfaz a equação $f(x) = k$.

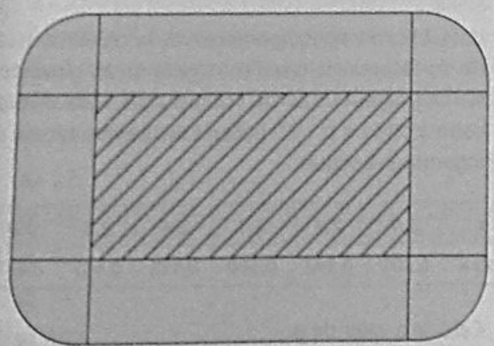


5 Sob certas condições de temperatura, os biólogos acreditam que o número de baratas de certa região dobre, no verão, a cada 20 dias. Estima-se que a população atual de baratas nessa região seja da ordem de 5 000. Considerando o mês com 30 dias e supondo que tais condições sejam mantidas, determine:

a) a população de baratas na região, daqui a 1 mês e daqui a 2 meses.

b) o tempo mínimo necessário (em dias) para que a população de baratas na região quintuplique. (Use: $\sqrt{2} \simeq 1,4$ e $\log 5 \simeq 0,68$.)

6 (Unicamp-SP) A superfície de um reservatório de água para abastecimento público tem 320 000 m² de área, formato retangular e um dos seus lados mede o dobro do outro. Essa superfície é representada pela região hachurada na ilustração abaixo. De acordo com o Código Florestal, é necessário manter ao redor do reservatório uma faixa de terra livre, denominada Área de Proteção Permanente (APP), como ilustra a figura abaixo. Essa faixa deve ter largura constante e igual a 100 m, medidos a partir da borda do reservatório.



a) Calcule a área da faixa de terra denominada APP nesse caso.

b) Suponha que a água do reservatório deminui de acordo com a expressão $V(t) = V_0 \cdot 2^{-t}$, em que V_0 é o volume inicial e **t** é o tempo decorrido em meses. Qual é o tempo necessário para que o volume se reduza a 10% do volume inicial? Utilize, se necessário, $\log_{10} 2 \simeq 0,30$.

7 Pressionando, sucessivamente, em uma calculadora científica, a tecla LOG (logaritmo decimal), a começar pelo número 20 bilhões, após quantas vezes de acionamento da tecla aparecerá mensagem de erro? Explique.

8 (UF-GO) Uma unidade de medida muito utilizada, proposta originalmente por Alexander Graham Bell (1847-1922), para comparar as intensidades de duas ocorrências de um mesmo fenômeno é o decibel (dB). Em um sistema de áudio, por exemplo, um sinal de entrada, com potência P_1, resulta em um sinal de saída, com potência P_2. Quando $P_2 > P_1$, como em um amplificador de áudio, diz-se que o sistema apresenta um ganho, em decibéis, de:

$$G = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Quando $P_2 < P_1$, a expressão acima resulta em um ganho negativo, e diz-se que houve uma atenuação do sinal.

Desse modo,

a) para um amplificador que fornece uma potência P_2 de saída igual a 80 vezes a potência P_1 de entrada, qual é o ganho em dB?

b) em uma linha de transmissão, na qual há uma atenuação de 20 dB, qual a razão entre as potências de saída e de entrada, nesta ordem?

Dado: $\log 2 \simeq 0,30$

9 (FGV-SP) Para receber um montante de **M** reais daqui a **x** anos, o capital inicial **C** reais que a pessoa deve aplicar hoje é dado pela equação:

$$C = M \cdot e^{-0,1x}$$

a) Se ela aplicar hoje R$ 3 600,00, quanto receberá de juro no período de 1 ano?

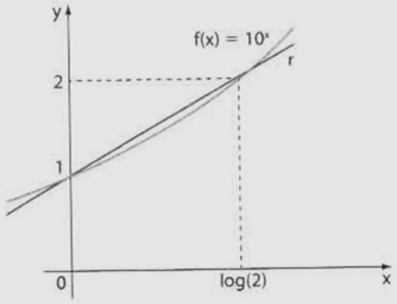
b) Se ela aplicar hoje R$ 3 600,00, daqui a quanto tempo, aproximadamente, obterá um montante que será o dobro desse valor?

Se necessário, use as aproximações: $e^{0,1} \simeq 1,1$; $\ln 2 \simeq 0,7$

Figura 48 – exercícios complementares

IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015, p. 156

10 (UF-PR) Considere o gráfico da função $f(x) = 10^x$, com **x** real, e da reta **r**, apresentados na figura a seguir:



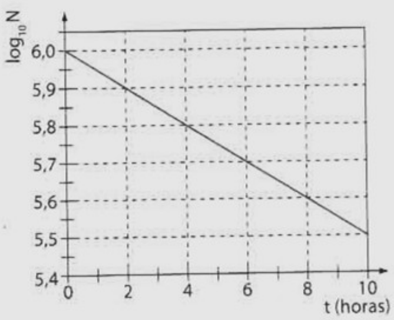
a) Utilizando a aproximação $\log(2) = 0,3$, determine a equação da reta **r**.

b) Como a reta **r** está próxima da curva, para valores de **x** entre 0 e log (2), utilize a equação de **r** para obter uma estimativa dos valores de $10^{0,06}$ e de log (1,7).

11 (Fuvest-SP) Determine o conjunto de todos os números reais **x** para os quais vale a desigualdade

$|\log_{16}(1 - x^2) - \log_4(1 + x)| < \frac{1}{2}$.

12 (Fuvest-SP) O número **N** de átomos de um isótopo radioativo existente em uma amostra diminui com o tempo **t**, de acordo com a expressão $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$, sendo N_0 o número de átomos deste isótopo em $t = 0$ e λ a constante de decaimento. Abaixo, está apresentado o gráfico do $\log_{10} N$ em função de **t**, obtido em um estudo experimental do radiofármaco Tecnécio 99 metaestável (^{99m}Tc), muito utilizado em diagnósticos do coração.



A partir do gráfico, determine:

a) o valor de $\log_{10} N_0$.

b) o número N_0 de átomos radioativos de ^{99m}Tc.

c) a meia-vida $\left(T_{\frac{1}{2}}\right)$ do ^{99m}Tc.

Note e adote: A meia-vida $\left(T_{\frac{1}{2}}\right)$ de um isótopo radioativo é o intervalo de tempo em que o número de átomos desse isótopo existente em uma amostra cai para a metade; $\log_{10} 2 \simeq 0,3$; $\log_{10} 5 \simeq 0,7$.

13 (Unicamp-SP) O sistema de ar-condicionado de um ônibus quebrou durante uma viagem. A função que descreve a temperatura (em graus Celsius) no interior do ônibus em função de *t*, o tempo transcorrido, em horas, desde a quebra do ar-condicionado, é $T(t) = (T_0 - T_{ext}) \cdot 10^{\frac{-t}{4}} + T_{ext}$, onde T_0 é a temperatura interna do ônibus enquanto a refrigeração funcionava, e T_{ext} é a temperatura externa (que supomos constante durante toda a viagem). Sabendo que $T_0 = 21$ °C e $T_{ext} = 30$ °C, responda às questões abaixo.

a) Calcule a temperatura no interior do ônibus transcorridas 4 horas desde a quebra do sistema de ar-condicionado. Em seguida, esboce o gráfico de T(t).

b) Calcule o tempo gasto, a partir do momento da quebra do ar-condicionado, para que a temperatura subisse 4 °C. Se necessário, use $\log_{10} 2 \simeq 0,30$, $\log_{10} 3 \simeq 0,48$ e $\log_{10} 5 \simeq 0,70$.

14 (UE-RJ) A International Electrotechnical Commission – IEC padronizou as unidades e os símbolos a serem usados em Telecomunicações e Eletrônica. Os prefixos kibi, mebi e gibi, entre outros, empregados para especificar múltiplos binários, são formados a partir de prefixos já existentes no Sistema Internacional de Unidades – SI, acrescidos de bi, primeira sílaba da palavra binário. A tabela abaixo indica a correspondência entre algumas unidades do SI e da IEC.

SI		
nome	**símbolo**	**magnitude**
quilo	k	10^3
mega	M	10^6
giga	G	10^9

IEC		
nome	**símbolo**	**magnitude**
kibi	ki	2^{10}
mebi	Mi	2^{20}
gibi	Gi	2^{30}

Um fabricante de equipamentos de informática, usuário do SI, anuncia um disco rígido de 30 gigabytes. Na linguagem usual de computação, essa medida corresponde a $p \cdot 2^{30}$ bytes. Considere a tabela de logaritmos a seguir.

x	**2,0**	**2,2**	**2,4**	**2,6**	**2,8**	**3,0**
log x	0,301	0,342	0,380	0,415	0,447	0,477

Calcule o valor de **p**.

Figura 49 – testes

IEZZI, Gelson. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015, p. 157

TESTES

1 (U.F. Juiz de Fora-MG) O logaritmo de um número na base 64 é $\frac{1}{3}$. O logaritmo desse número na base $\frac{1}{2}$ é:

a) 2
b) $\frac{2}{3}$
c) $-\frac{2}{3}$
d) -2

2 (PUC-MG) O valor da expressão $\log_4 16 - \log_4 32 + 3 \cdot \log_4 2$ é:

a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\frac{3}{2}$
d) 4

3 (Mackenzie-SP) Se $\log x = 0{,}1$, $\log y = 0{,}2$ e $\log z = 0{,}3$, o valor de $\log \frac{x^2 \cdot y^{-1}}{\sqrt{z}}$ é:

a) 0,15
b) −0,15
c) 0,25
d) −0,25
e) 0,6

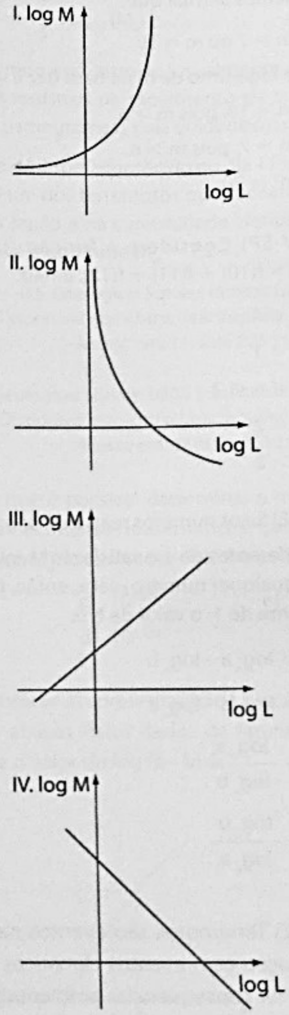
4 (UF-AM) Se $\log x = 3 + \log 3 - \log 2 - 2 \log 5$, então **x** é igual a:

a) 18
b) 25
c) 30
d) 40
e) 60

5 (Enem-MEC) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é de 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após **t** anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, onde **A** é a massa inicial e **k** é uma constante negativa.
Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.
Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27
b) 36
c) 50
d) 54
e) 100

6 (UE-RJ) Um pesquisador, interessado em estudar uma determinada espécie de cobras, verificou que, numa amostra de trezentas cobras, suas massas **M**, em gramas, eram proporcionais ao cubo de seus comprimentos **L**, em metros, ou seja, $M = a \cdot L^3$, em que **a** é uma constante positiva. Observe os gráficos a seguir:



Aquele que melhor representa log M em função de log L é o indicado pelo número:

a) I
b) II
c) III
d) IV

O que pudemos concluir dessa análise, é que o livro, mesmo usando alguns exemplos antigos, procurou se adaptar às novas exigências dos PCN+, incluindo seções exclusivas de exercícios contextualizados, de gráficos e tabelas, além da preocupação com uma comparação de um evento real (terremoto do Japão) com o tema logaritmo.

Sentimos falta de um resumo histórico, que estava presente na edição anterior analisada, o que, na nossa opinião, tornaria a obra completa no que achamos mais importante: uma melhor e mais fácil compreensão pelo aluno de um tema tão importante quanto o logaritmo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebemos, por meio de muita pesquisa e vivência em sala de aula, que o tema desse trabalho é pouco trabalhado e, quando é trabalhado, em sua maior parte é feito de forma literal, formal e repetitiva. O Ensino de alguns tópicos da matemática no Ensino Médio, em particular o Logaritmo, definitivamente não vem obtendo êxito, devido à imensa dificuldade enfrentada pelos estudantes neste tópico e a quantidade cada vez menor de autores que estudam o caso. A falha na ausência do desenvolvimento histórico nos livros didáticos pode passar aos alunos e falsa de que a Matemática é uma disciplina imutável e que nada pode ser descoberto ou discutido e nem mesmo contextualizada. Alguns autores resumem o estudo dos Logaritmos a mera leitura e aplicação de propriedades e algebrismos.

Este trabalho sugere realizar a caracterização dos Logaritmos a partir do estudo histórico e sua evolução cronológica, buscando um enfoque menos algébrico e centrando em comparações que incentivem a busca por padrões e regularidades no estudo das variações das grandezas estudadas. O ideal é que o aluno tenha aprendido sobre Progressão Aritmética e Geométrica antes do Logaritmo, pois a ideia principal do logarítmo é transformar produto em soma e a comparação inicial para chegar à caracterização inicial do logaritmo depende da Progressão Aritmética (PA) e da Progressão Geométrica (PG).

Acreditamos que o aluno se tornaria peça chave desse enredo se houvesse contextualização, interdisciplinaridade. Mostramos nesse trabalho várias opções, sugestões de aplicações em outras áreas do conhecimento e isso faz com que os alunos fiquem curiosos, e essa curiosidade alimenta a vontade de aprender.

Por minha experiência em sala de aula, por mostrar sempre ao aluno a utilidade do logaritmo na matemática e em outras áreas, considero que seria um equívoco retirar o tema do currículo básico do ensino médio no Brasil. A proposta da Base Nacional Comum de retirar o tema do currículo básico caiu como uma bomba nos nossos ombros. Há de se pensar melhor sobre o que é útil ou não, sobre o que possui aplicação prática e o que não possui. Certamente o logaritmo possui inúmeras aplicações e não deve, na nossa opinião, ser retirado do Currículo comum nacional.

Sendo assim, espero que este trabalho seja útil para muitos professores da educação básica e também para autores de livros didáticos.

6 ANEXO A – PÁGINAS DO LIVRO *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*

First table.

10000000.0000000
1.0000000
9999999.0000000
.9999999
9999998.0000001
.9999998
9999997.0000003
.9999997
9999996.0000006
to be continued up to
9999900.0004950

Thus from radius, with seven cyphers added for greater accuracy, namely, 10000000.0000000, subtract 1.0000000, you get 9999999.0000000; from this subtract .9999999, you get 9999998.0000001; and proceed in this way, as shown at the side, until you create a hundred proportionals, the last of which, if you have computed rightly, will be 9999900.0004950.

17. *The Second table proceeds from radius with six cyphers added, through fifty other numbers decreasing proportionally in the proportion which is easiest, and as near as possible to that subsisting between the first and last numbers of the First table.*

Thus the first and last numbers of the First table are 10000000.0000000 and 9999900.0004950, in which proportion it is difficult to form fifty proportional numbers. A near and at the same time an easy proportion is 100000 to 99999, which may be continued with sufficient exactness by adding six cyphers to radius and continually subtracting from each number its own 100000th part in the manner shown at the side; and this table contains

Second table.

10000000.000000
100.000000
9999900.000000
99.999000
9999800.001000
99.998000
9999700.003000
99.997000
9999600.006000

&c., up to

9995001.222927

contains, besides radius which is the first, fifty other proportional numbers, the last of which, if you have not erred, you will find to be 9995001.222927.

[This should be 9995001.224804—see note.]

18. *The Third table consists of sixty-nine columns, and in each column are placed twenty-one numbers, proceeding in the proportion which is easiest, and as near as possible to that subsisting between the first and last numbers of the Second table.*

Whence its first column is very easily obtained from radius with five cyphers added, by subtracting its 2000th part, and so from the other numbers as they arise.

First column of Third table.

10000000.00000
5000.00000
9995000.00000
4997.50000
9990002.50000
4995.00125
9985007.49875
4992.50374
9980014.99501
&c., up to
9900473.57808

In forming this progression, as the proportion between 10000000.000000, the first of the Second table, and 9995001.222927, the last of the same, is troublesome; therefore compute the twenty-one numbers in the easy proportion of 10000 to 9995, which is sufficiently near to it; the last of these, if you have not erred, will be 9900473.57808.

From these numbers, when computed, the last figure of each may be rejected without sensible error, so that others may hereafter be more easily computed from them.

19. *The first numbers of all the columns must proceed from radius*

radius with four cyphers added, in the proportion easiest and nearest to that subsisting between the first and the last numbers of the first column.

As the first and the last numbers of the first column are 10000000.0000 and 9900473.5780, the easiest proportion very near to this is 100 to 99. Accordingly sixty-eight numbers are to be continued from radius in the ratio of 100 to 99 by subtracting from each one of them its hundredth part.

20. *In the same proportion a progression is to be made from the second number of the first column through the second numbers in all the columns, and from the third through the third, and from the fourth through the fourth, and from the others respectively through the others.*

Thus from any number in one column, by subtracting its hundredth part, the number of the same rank in the following column is made, and the numbers should be placed in order as follows :—

PROPORTIONALS OF THE THIRD TABLE.

First Column.	*Second Column.*
10000000.0000	9900000.0000
9995000.0000	9895050.0000
9990002.5000	9890102.4750
9985007.4987	9885157.4237
9980014.9950	9880214.8451
&c., continuously to	&c., descending to
9900473.5780	9801468.8423

Third Column.	*Thence 4th, 5th, &c., up to*	*69th Column.*
9801000.0000	&c., up to	5048858.8900
9796099.5000	&c., up to	5046334.4605
9791201.4503	&c., up to	5043811.2932
9786305.8495	&c., up to	5041289.3879
9781412.6967	&c., up to	5038768.7435
&c., descending to		finally to
9703454.1539	finally to	4998609.4034

7 REFERENCIAS:

BOYER, C. B. História da Matemática. Ed. Blucher, 3ª Edição. 1974.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2006. Disponível em: www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 10/Out/2015.

BRASIL, Guia de Livros Didáticos PNLD 2012 – Matemática – Ensino Médio Disponível em: http://www.fnde.gov.br/arquivos/category/125-guias?download=5512:pnld-2012-matematica. Acesso em: 10/Out/2015.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC; 2015.

BRAUN, M. Equações Diferenciais e Suas Aplicações. Ed. Campus: Rio de Janeiro. 1999.

COUTO, S. D. Logaritmos: Conceitos e Aplicações. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre, 2013. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1079/2011_00859_SIDNEY_DIASCOUTO.pdf?sequence=1. Acesso em: 4/Mar/2016.

D’AMBROSIO, U. História da Matemática e Educação. Cadernos CEDES, Campinas, n.40. 2012.

DANTE, L. R. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo: Ática, 2001.

DANTE, L. R. Matemática. São Paulo: Ática, 2012.

DELORS, J.; EUFRAZIO, J. C. Educação: um tesouro a descobrir. Ed. Cortez: São Paulo-SP. 1998.

GIOVANNI, J. R. Matemática Fundamental. São Paulo. FTD, 1994.

HIRANO, L. Q. L. FARMACOCINÉTICA: Conceitos básicos aplicados à medicina veterinária (Revisão de literatura). Seminário apresentado junto à Disciplina de Seminários Aplicados do Programa de PósGraduação em Ciência Animal da Escola de Veterinária e Zootecnia da Universidade Federal de Goiás. Nível: Doutorado. 2011.

IEZZI, G. Matemática Volume Único. São Paulo: Atual, 2015.

KROPF, M. A. L. Aplicações dos Logaritmos na área de saúde. Dissertação apresentada como requisito parcial para à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, junto ao Programa PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática / Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014. Disponível em: http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2014/marcelo_kropf.pdf. Acesso em: 22/Fev/2016.

LEZZI, G.; Dolce, O.; Murakami, C. Fundamentos da Matemática Elementar – Volume 2 – Logarítimos. 10ª Ed. 2013.

LIMA, E. L. Logaritmos. 6ª Edição, SBM – Coleção do Professor de Matemática. 2016.

MAOR, E. E: a História de um Número. Ed. Record. 2003.

MARISTAS, I. Tábuas de Logaritmos. FTD, 1973.

MORIN, E. Os Sete Saberes necessários à Educação do Futuro. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

NETO, E. V. Logaritmos. UNESP. Disponível em: http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/Ernesto19agosto-Logaritmo.pdf. Acesso em: 23/Fev/2016.

RIBEIRO, M. E. A matemática na música. Trabalho de Curso apresentado à Coordenação Adjunta de TC, como parte dos requisitos para obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Goiás. 2011. Disponível em: http://www.unucet.ueg.br/biblioteca/arquivos/monografias/MARCOS_ELIAS_RIBEIRO.pdf. Acesso em: 19/Fev/2016.

ROCHA FILHO, J. B.; BASSO, N. R. de S.; BORGES, R. M. R. Repensando uma proposta interdisciplinar sobre Ciência e Realidade. Revista Electrônica de Enseñanza de las Ciências, v.5, n. 2, 2006.

SILVA, J. P. Logarítimos e Aplicações. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, 2013. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/386/2011_00254_JOSIEL_PEREIRA_DA_SILVA.pdf?sequence=1. Acesso em: 15/Dez/2015.

SOARES, E. C. Uma Investigação Histórica sobre os Logarítimos com Sugestões Didáticas para a Sala de Aula. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte para obtenção do título de Mestre em Ensinom de Ciências Naturais e Matemática, 2011. Disponível em: repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/16070/1/EvanildoCS_DISSERT.pdf. Acesso em: 15/Dez/2015.