UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JOEL ARAÚJO MACHADO

CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIÕES FORMADAS ABAIXO DE FUNÇÕES CONSTANTE, AFIM E QUADRÁTICA POR MEIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO.

PALMAS - TO
2016

JOEL ARAÚJO MACHADO

CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIÕES FORMADAS ABAIXO DE FUNÇÕES CONSTANTE, AFIM E QUADRÁTICA POR MEIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz.

PALMAS - TO
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

M149c Machado, Joel Araújo.
CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIÕES FORMADAS ABAIXO DE FUNÇÕES CONSTANTE, AFIM E QUADRÁTICA POR MEIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO.. / Joel Araújo Machado. – Palmas, TO, 2016.
63 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz

1. Construções Geométricas. 2. Áreas. 3. Funções. 4. Geometria plana. I. Título

CDD 510

JOEL ARAÚJO MACHADO

CÁLCULO DE ÁREAS DE FUNÇÕES CONSTANTE, AFIM E QUADRÁTICA POR MEIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO..

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática. Orientador: Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz.

Aprovada em 19 / 08 / 2016

BANCA EXAMINADORA

Andrés Barraza

Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz (Orientador-UFT)

Hellena Apolinário

Profa. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

Prof. Dr. Claudio de Castro Monteiro (IFTO)

A Jeová Deus.
A Minha amada esposa Joyce Machado.
A Minha querida Mãe.
E aos meus Irmãos.

AGRADECIMENTOS

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação deste importante programa de mestrado.

À Universidade Federal do Tocantins (UFT) pela estrutura de acolhimento e principalmente pelo corpo docente que disponibilizou e que fez a diferença para hoje chegarmos aqui, Cito: Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz, Prof. Ms. Gilmar Pires Novaes, Prof. Dr. Hellena Christina Fernandes Apolinário, Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha, Prof. Dr. Heiga Midori Iwamoto, E os Monitores das disciplinas Prof. Ms. Magno Márcio de Azevedo, Prof. Ms. Thiago e o Prof. Ms. Igor.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, dando o surporte para que tivessemos condições de chegar até aqui.

Ao meu orientador Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz por não ser um excelente orientador e professor, mas por ser um exemplo como profissional e um amigo.

Aos familiares e amigos que sempre me apoiaram.

A matemática é a rainha das ciências.
(Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

Tentando motivar professores e alunos e resgatar o interesse dos mesmos pela geometria e construções geométricas, usamos um método de soluções de problemas geométricos com régua e compasso. Assim, esse trabalho apresenta uma forma alternativa para soluções de problemas relacionados ao cálculo de áreas de regiões abaixo de gráficos das funções constantes, afins e quadráticas, no qual o aluno poderá construir de forma crítica, autônoma e flexível suas soluções. Dessa forma, espera-se que esse método contribua para um estudo mais prazeroso, além de propiciar o desenvolvimento de uma linguagem matemática mais técnica, na qual possa analisar e solucionar problemas de construções geométricas.

Palavras-chave: Construções geométricas. Áreas. Funções.

ABSTRACT

Trying to motivate teachers and students and rescue their interest in geometry and geometric constructions, we use a method of geometric problem solving with ruler and compass. Thus, this work presents an alternative way to solve problems related to the calculation of areas of regions below graphics of constant functions, first degree and quadratic, in which the student can build in a critical, autonomous and flexible their solutions. In this way, it is expected that this method will contribute to a more enjoyable study, besides propitiating the development of a more technical mathematical language, in which it can analyze and solve problems of geometric constructions.

Keywords: Geometric constructions. Areas. Functions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
NBR	Norma Brasileira
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SI	Sistema Internacional
UFT	Universidade Federal do Tocantins

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Baseado em minha experiência de cinco anos na docência ministrando matemática, o conteúdo de geometria e os relatos de colegas docentes e de discentes, percebi o desinteresse dos discentes pelas aulas e dos docentes pelo conteúdo. Quando se trata dos discentes, alguns fatores são: falta de pespectivas, de motivação e de pré-requisitos não adquiridos anteriormente, quando se trata do docente podemos citar: O desuso do conteúdo, a irrelevância dada ao conteúdo e a falta de capacitação para os docentes nesse conteúdo.

No entanto, podemos observar que os alunos tem grande interesse pela geometria, principalmente pelas figuras e pelas várias formas de se resolver o mesmo problema, basta usarmos as ferramentas adequadas, na minha vivência como docente e nas escolas que trabalhei ser o docente que ministrou esse conteúdo posso relatar isso.

As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas (WAGNER, 2009).

Os problemas de construção são motivadores, às vezes intrigantes e frequentemente conduzem à descoberta de novas propriedades. São educativos no sentido que em cada um é necessário uma análise da situação, onde se faz um planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também da compatibilidade de dados (WAGNER; CARNEIRO, 2007).

A construção geométrica cria estrátegias que possibilita ao aluno a superar o ensino tradicional, fazendo com que ele não fique dependente de soluções por meio de fórmulas e regras enrijecidas nas quais são apresentadas em alguns livros didáticos. Também, ela proporciona ao aluno estrátegias que o permitem criar, planejar, construir e solucionar de um modo versátil cada problema.

Por isso, o trabalho apresentado visa mostrar as construções geométricas por meio de régua e compasso como uma ferramenta que ajudará tanto os docentes, como os discentes, na solução de problemas relacionados ao cálculo de áreas de regiões formadas por gráficos de funções, mais específicamente relacionada com o cálculo de áreas de regiões abaixo do gráfico de funções até 2º grau. Assim, o estudante terá a possibilidade de cálcular essas áreas usando criatividade, sem se desviar do ensino-aprendizagem da geometria, podendo assim, dinamizar o planejamento e a estrátegia facilitando as resoluções dos problemas citados.

Logo, este trabalho busca aumentar o interesse do professor e do aluno pelo conteúdo citado, deixando assim nossos estudos mais prazerosos com a utilização de uma métodologia que não estava sendo usada de modo adequado, principalmente para os alunos, que é a construção geométrica com régua e compasso, a expectativa é fazer com que o aluno tenha um senso crítico e lógico e que a cada problema solucionado esse aluno possa adquirir novos conhecimentos.

Acredita-se ainda que podemos ter uma evolução para que tando o discente quanto o docente, possam desempenhar seu papel no que se refere ao aprendizado do conteúdo de geometria de forma flexível e autônoma, podendo tomar decisões e usar a linguagem matemática para resolver problemas empiricos e do cotidiano, mostrando a importância da geometria e das construções geométricas para o ensino-aprendizagem de matemática.

O trabalho foi dividido em 4 capítulos conforme detalhamos a seguir.

No capítulo 2 apresentamos o referêncial teórico, bem como a revisão bibliográfica acerca de definições, termos e símbologia referente a geometria, construções geométricas e funcões até o 2º grau. Também, serão abordados alguns problemas bem como suas soluções desses conteúdos matemáticos citados acima.

No capítulo 3 abordaremos as soluções de problemas de cálculo de áreas das regiões abaixo do gráfico das funções até 2º grau, de um modo estrátegico, lógico e construtivo usando a régua e compasso e conceitos básico de geometria. Para a visualização dos resultados esperados foi usado o software wxMaxima, o qual é livre e pode ser baixado em http://andrejv.github.io/wxmaxima/download.html.

No quarto capítulo apresentaremos a conclusão, observando as contribuições do trabalho para instigar a curiosidade e o interesse do aluno utilizando um método que venha auxiliá-lo no aprendizado matemático, além de chamar a atenção de nós professores para um conteúdo importante e que pode abordar vários temas de uma forma mais atrativa.

Finalmente serão apresentadas as referências bibliográficas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, teoremas e proposições da geometria Plana Euclidiana usamos como base (NETO; CAMINHA, 2013) necessárias ao desenvolvimento deste trabalho.Também faremos algumas construções géométricas com régua e compasso tendo como base (WAGNER; CARNEIRO, 2007), concluindo após com as definições de funções constantes, afins e quadráticas (LIMA, 2013).

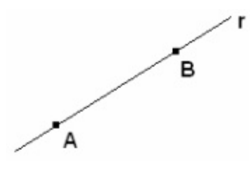
2.1 Alguns resultados importantes da Geometria Plana Euclidiana

A *Geometria Elementar* é o domínio por excelência no qual o método axiomático pode ser aplicado em situações que, embora simples, dão resultados altamente não-triviais. Tais métodos devem, portanto, fazer parte da formação básica de um cidadão.(BARBOSA, 2004).

Iniciaremos enunciando os postulados de Euclides. Os cinco postulados de Euclides também são abordados por (BARBOSA, 2004).
Postulado 1. Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos.
Postulado 2. Pode-se continuar uma reta infinitamente.
Postulado 3. Pode-se descrever uma circunferêcia com qualquer centro e com qualquer raio.
Postulado 4. Todos os ângulos retos são iguais.
Postulado 5. Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja a soma é menor que dois retos, então as duas retas se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja a soma é menor do que dois retos.

Definição 1. *Por quaisquer dois pontos passa uma única reta.*

Figura 1 – Reta r passando pelos pontos A e B

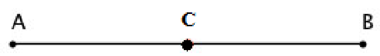


Definição 2. *Dados dois pontos distintos A e B sobre uma reta r, o segmento de reta é a porção da reta r situada de A a B. Usaremos $\overline{AB}$ para representar o comprimento do*

segmento de reta AB.

Definição 3. *Chamamos de ponto médio de um segmento AB um ponto C, pertencente a esse segmento, tal que ocorra $\overline{AC} = \overline{BC}$.*

Figura 2 – C é ponto médio do segmento AB.

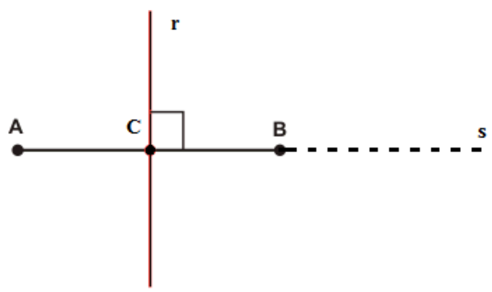


Definição 4. *Um ângulo que mede 90º é chamado de Ângulo reto.*

Definição 5. *Dadas duas retas r e s, dizemos que r e perpendicular a s, que s é perpendicular a r, ou que r e s são perpendiculares quando r e s tiverem um ponto em comum e formarem ângulos de 90º nesse ponto, escreveremos r⊥s para denotar que duas retas são perpendiculares.*

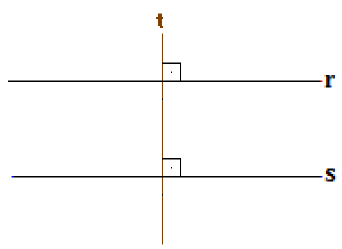
Teorema 1. *Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a essa reta.*

Figura 3 – reta r⊥s passando pelo ponto C.



Corolário 1. *Se duas retas distintas r e s são perpendiculares a uma terceira reta t, então as retas r e s são paralelas. Usaremos $r//s$ como notação para deniminarmos que as retas r e s são paralelas.(LIMA et al., 2006)*

Figura 4 – a reta r e s são perpendiculares a reta t, então, $r//s$.

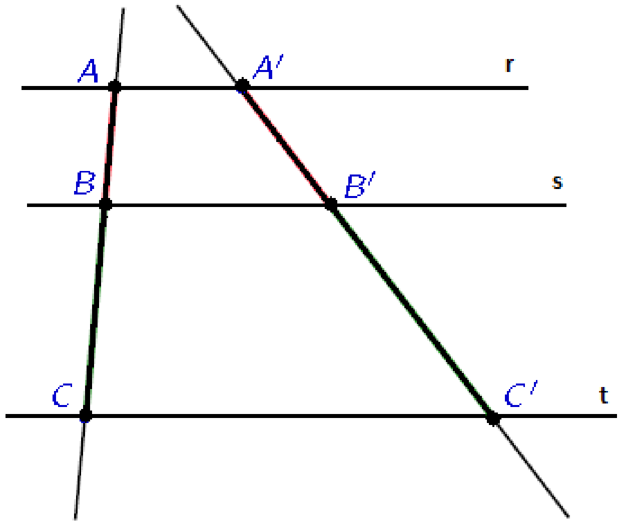


Teorema 2. *Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela a essa reta.*

Proposição 1. *Se a reta s é paralela a r e t, então r e t são paralelas ou coincidentes.*

Teorema 3 (Thales). *Sejam r,s e t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então*

Figura 5 – Feixe de retas paralelas cortadas por retas transversais.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \text{ (NETO, 2012)}$$

2.1.1 Áreas de Polígonos

Para que um conceito qualquer de área para polígonos tenha utilidade, consideraremos que as seguintes propriedades sejam válidas, para uma leitura mais profunda recomendamos (NETO; CAMINHA, 2013):

- Polígonos congruentes tem áreas iguais;
- Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros Polígonos convexos, então a área do Polígono maior é a soma das áreas dos Polígonos menores;
- Se um Polígono maior contêm um outro menor, então a área do Polígono maior é maior que a área do Polígono menor;
- A área de um quadrado de lado 1u é igual a $1u^2$.

2.2 Construções Geométricas

Nesta seção abordaremoss algumas construções com régua e compasso com base em (WAGNER; CARNEIRO, 2007).

2.2.1 Perpendicular passando por um ponto do segmento $\overline{AB}$.

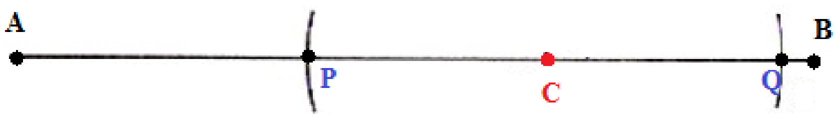
Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ e um ponto C pertencente a esse segmento, podemos construir uma reta r perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando por C.

Figura 6 – Segmento de reta AB com um ponto C pertencente a $\overline{AB}$.

Para isso seguiremos alguns passos:

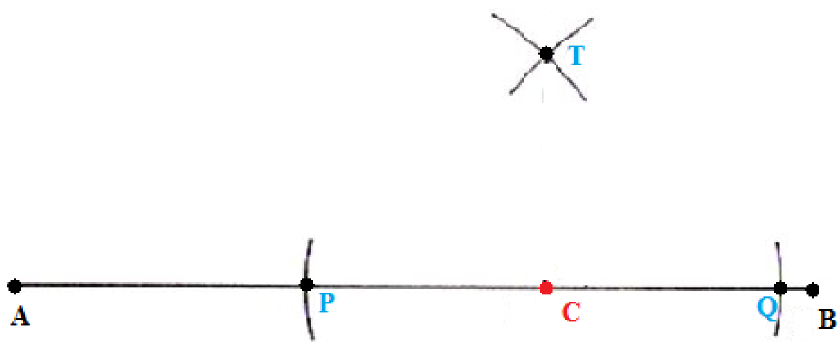
1 passo: Com qualquer abertura do compasso faremos uma circunferência no segmento $\overline{AB}$ com o centro em C, essa circunferência cortará o segmento em dois ponto P e Q.

Figura 7 – Segmento de reta AB com um ponto C pertencente a AB, com uma circuferência de centro c.



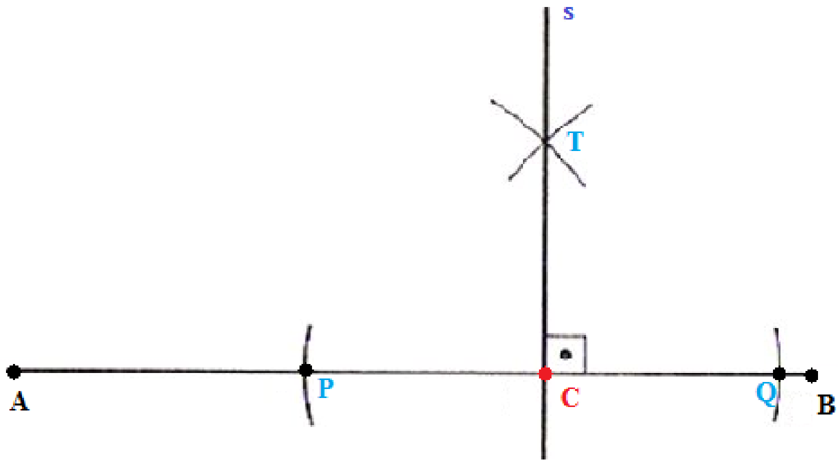
2 Passo: Com uma abertura no compasso maior que o segmento $\overline{PC}$, faremos uma semi circunferência de centro P, com a mesma abertura faremos outra semi circunferência de centro Q, de tal forma que as duas circunferências se encontrem em um ponto que chamaremos de T.

Figura 8 – As semi circunferências de centro P e Q com um raio maior que $\overline{PC}$.



3 Passo: A reta s que passa pelos pontos C e T, é a reta penpendicular ao segmento de reta $\overline{AB}$ passando pelo ponto C.

Figura 9 – A reta s perpendicular ao segmento $\overline{AB}$.



De fato temos que os triângulos $PCT \equiv QCT$ por LLL e, daí, $T\hat{C}P = T\hat{C}Q$. Mas, como $T\hat{C}P + T\hat{C}Q = 180°$, segue que $T\hat{C}P = T\hat{C}Q = 90°$.

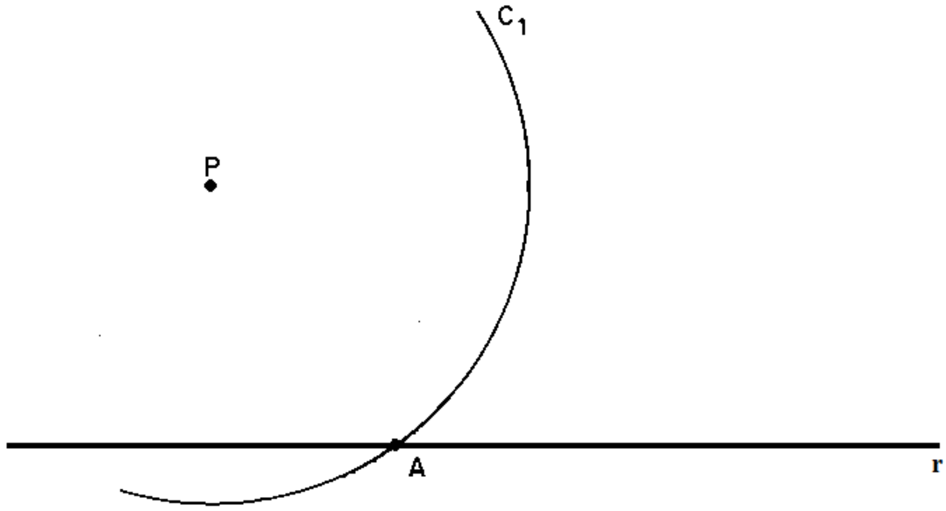
2.2.2 Reta paralela a uma reta r passando por um ponto P fora da reta.

Figura 10 – A reta r e um Ponto P fora da reta.

Para resolvermos esse problema seguiremos os seguintes passos:

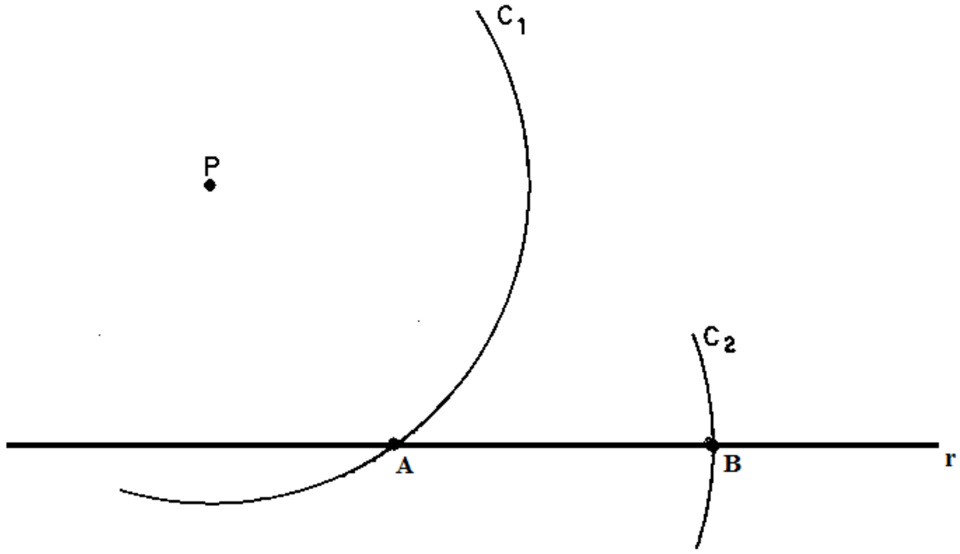
1 Passo: Com uma abertura no compasso faça um circunferência $C1$ com centro em P de tal forma que a reta r seja secante a circunferência formada, com isso temos que um dos pontos de intersecção é A.

Figura 11 – Circunferência $C1$ de centro P inteceptando a reta r no ponto A.



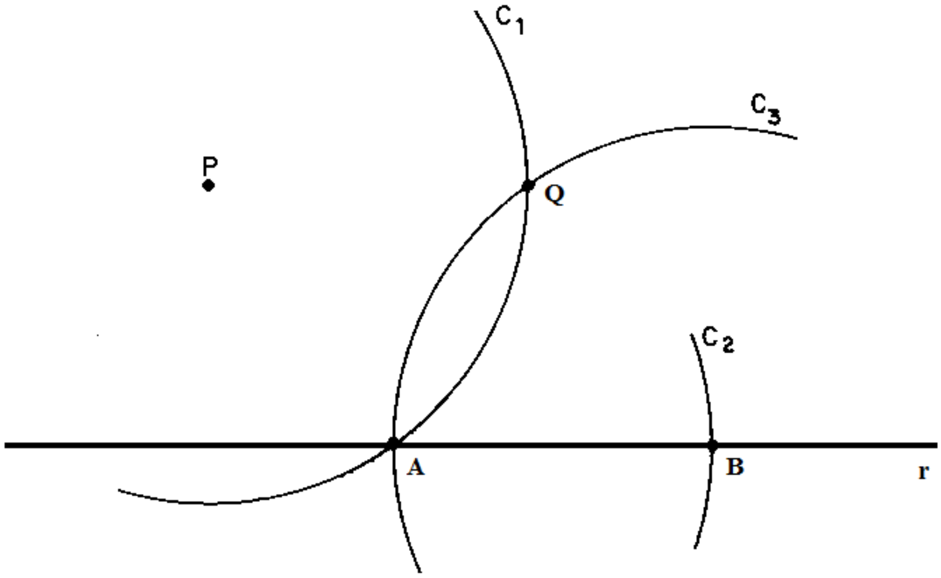
2 Passo: Com a mesma abertura no compasso, faça uma circunferência $C2$ com centro em A interceptando a reta r em B.

Figura 12 – Circunferência $C2$ de centro A inteceptando a reta r no ponto B.



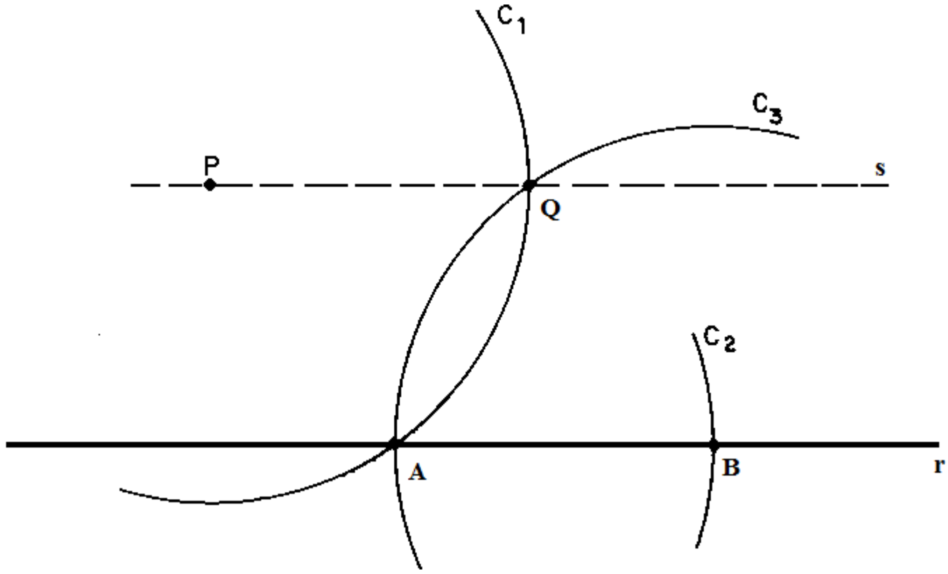
3 Passo: Com a mesma abertura faremos uma outra circunferência $C3$ ecom centro em B, interceptando a circunferência $C1$ no ponto Q.

Figura 13 – Circunferência $C3$ de centro B inteceptando a circunferência $C1$ no ponto Q.



4 Passo: Construir a reta s que passa pelos pontos P e Q, que é paralela a reta r.

Figura 14 – Reta s passando por P e Q, paralela a reta r.



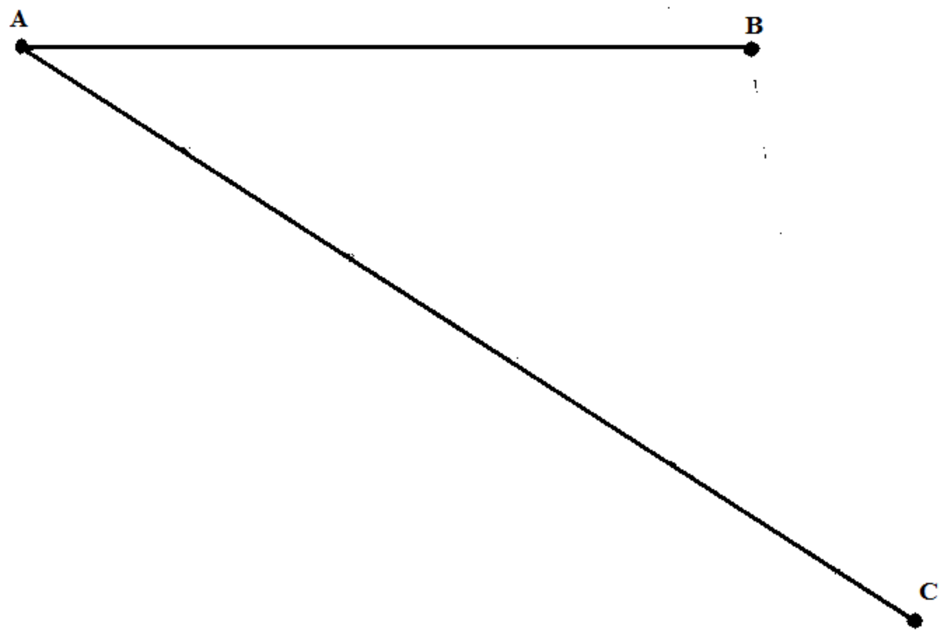
2.2.3 Divisão de um segmento de reta $\overline{AB}$ em parte iguais

Figura 15 – Segmento de reta $\overline{AB}$.

Para resolvermos esse problemas seguiremos os seguintes passos.

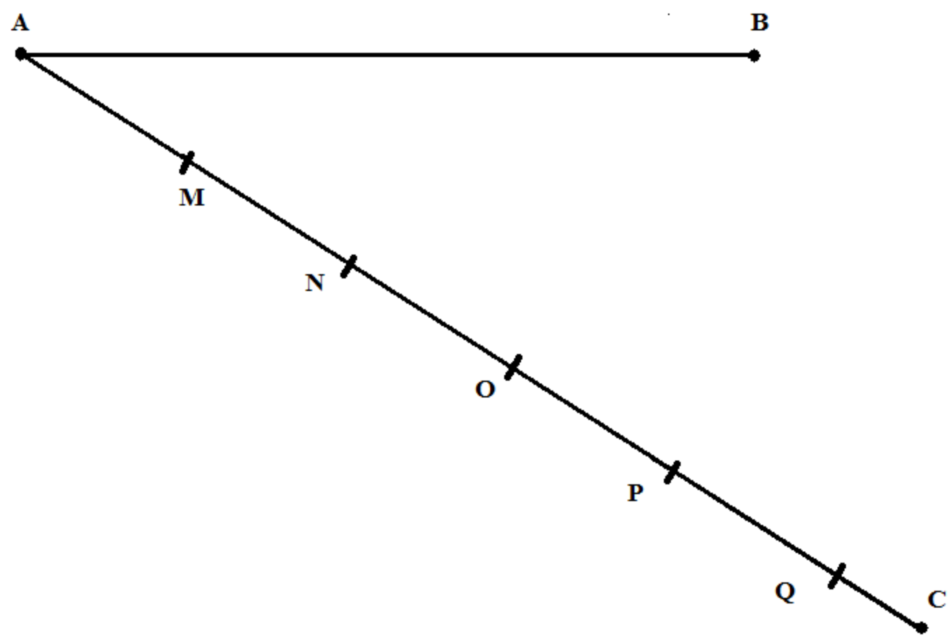
1 Passo: Construimos um segmento de reta $\overline{AC}$ suporte com origem no ponto A suficientemente grande, como mostra a figura seguinte.

Figura 16 – Segmento de reta AB, com segmento de reta suporte $\overline{AC}$.



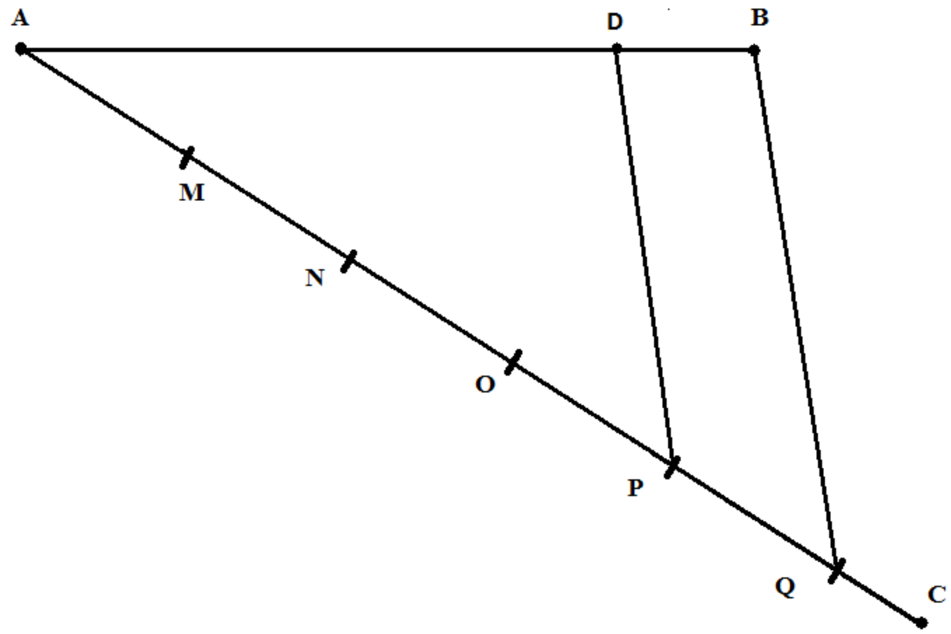
2 Passo: Dividimos o segmento $\overline{AC}$ em partes iguais, para isto com qualquer abertura do compasso, com a ponta do compasso em A, fazemos um risco sobre o segmento e chamamos a intersecção de M, com a mesma abertura fazemos o mesmo procedimento agora com a ponta do compasso em M chamando essa nova interseção de N e assim sucesivamente como mostra a figura abaixo.

Figura 17 – Segmento de reta $A\overline{AC}$ dividido em cinco partes iguais.



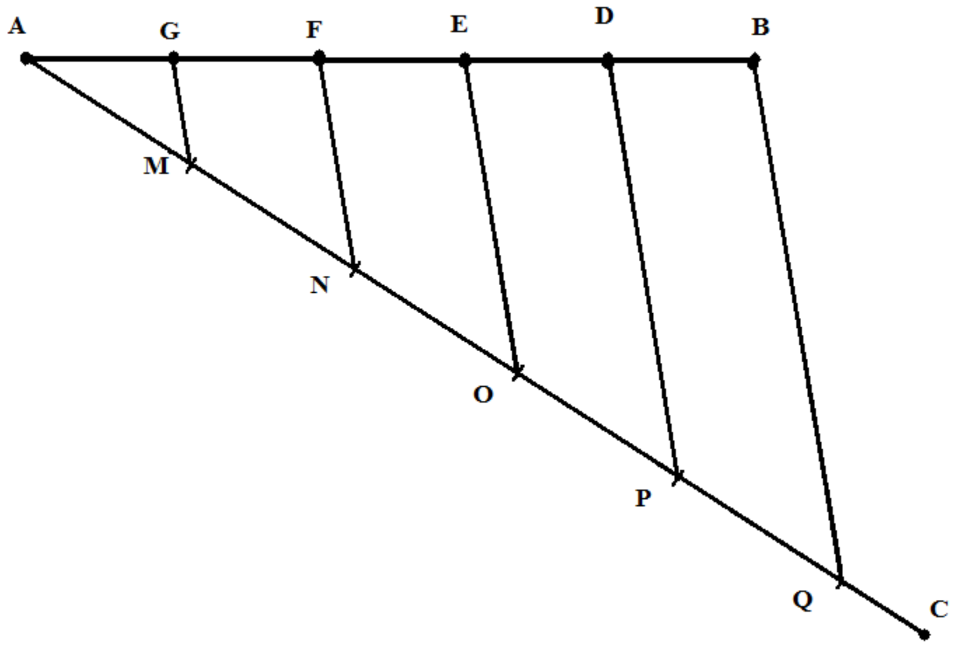
3 passo: Traçamos o segmento de reta BQ, a partir disto construimos uma paralela a esse segmento passando por P como nas construções gemétcricas básicas dadas anteriormente.

Figura 18 – Segmento de reta QB e a paralela a esse segmento, passando por P que forma o segmento PD.



4 Passo: Traçamos as demais paralelas como mostra a figura abaixo.

Figura 19 – Segmento de reta $\overline{AB}$ dividido em cinco partes iguais.



Pelo teorema de Tales, podemos afirmar que:

$\frac{\overline{AM}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GF}}$
Como $\overline{AM} = \overline{MN}$

Então, $\overline{AG} = \overline{GF}$

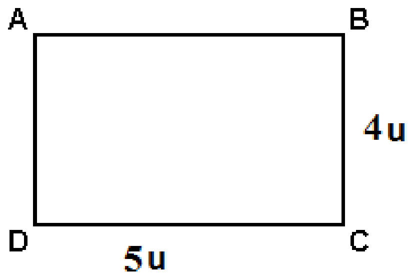
Assim temos finalmente:

$\overline{AG} = \overline{GF} = \overline{FE} = \overline{ED} = \overline{DB}$

2.2.4 Área de um retângulo usando Régua e Compasso

Consideremos agora um retângulo $ABCD$, de lados $5u$ e $4u$, como mostra a figura abaixo.

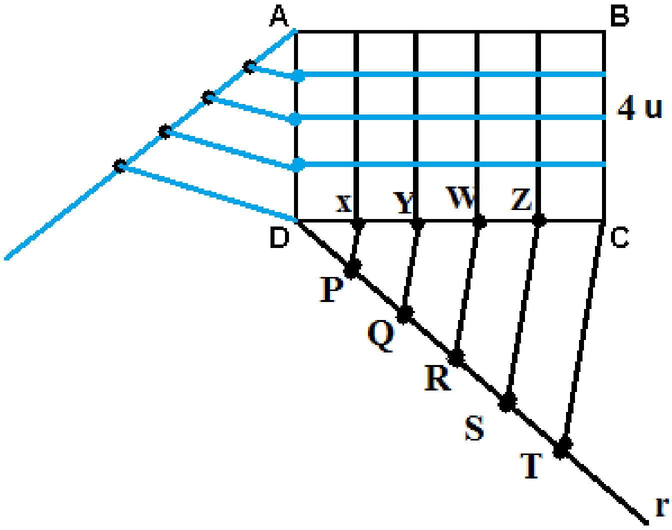
Figura 20 – Retângulo de base $5u$ e altura $4u$.



Para calcular a área seguiremos os seguintes passos.

1 Passo: Dividimos a base CD em cinco partes iguais como na seção anterior. Por cada ponto no segmento CD traçamos uma paralela ao segmento BC. De maneira análoga fazemos a divisão no segmento AD devendo ficar como na figura a seguir.

Figura 21 – Divisão do retângulo.



Logo, pela construção temos que os segmentos verticais são paralelos analogamente os horizontais. Os retângulos internos são quadrados de lado $1u$ e pelo postulado 4 da da secão 2.1.1 tem área igual a $1u^2$. Portanto, a área do retângulo, pelo postulado 2 da mesma secão, é a soma das áreas dos quadrados que a compõem e como os quadrados são congruentes igual ao produto de 5 e 4.

Logo essa região possui área:

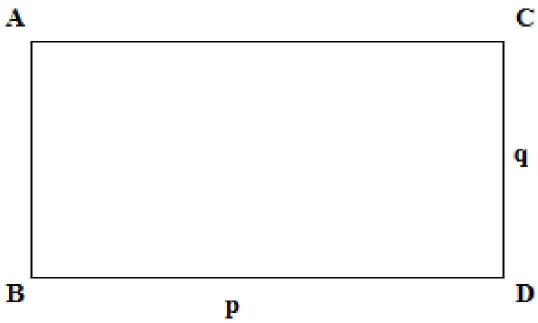
$A = 20u^2$

Assim,

$A = 5u.4u$

De um modo geral consideremos um retângulo de lados p e q, onde p e $q \in \mathbb{Q}$. Podemos calcular a área da forma a seguir:

Figura 22 – Retângulo de dimensões p e q.



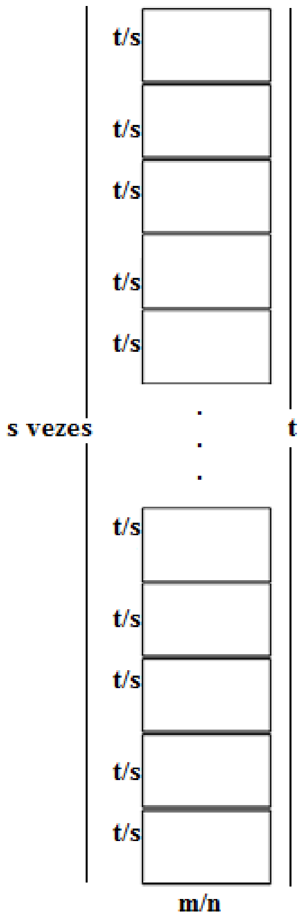
Note que se $p, q \in \mathbb{Q}$, então existem m, n, t e $s \in \mathbb{Z}$ com n e $s \neq 0$ Tal que: $p = \dfrac{m}{n}$ e

$q = \dfrac{t}{s}$.

Nesse caso, para calcular-mos as áreas seguimos os seguintes passos:

1º passo: Multiplicando a altura q por s, temos: $q.s$, lembrando que $q = \dfrac{t}{s}$, por isso, $\dfrac{t}{s}.s{=}t$.

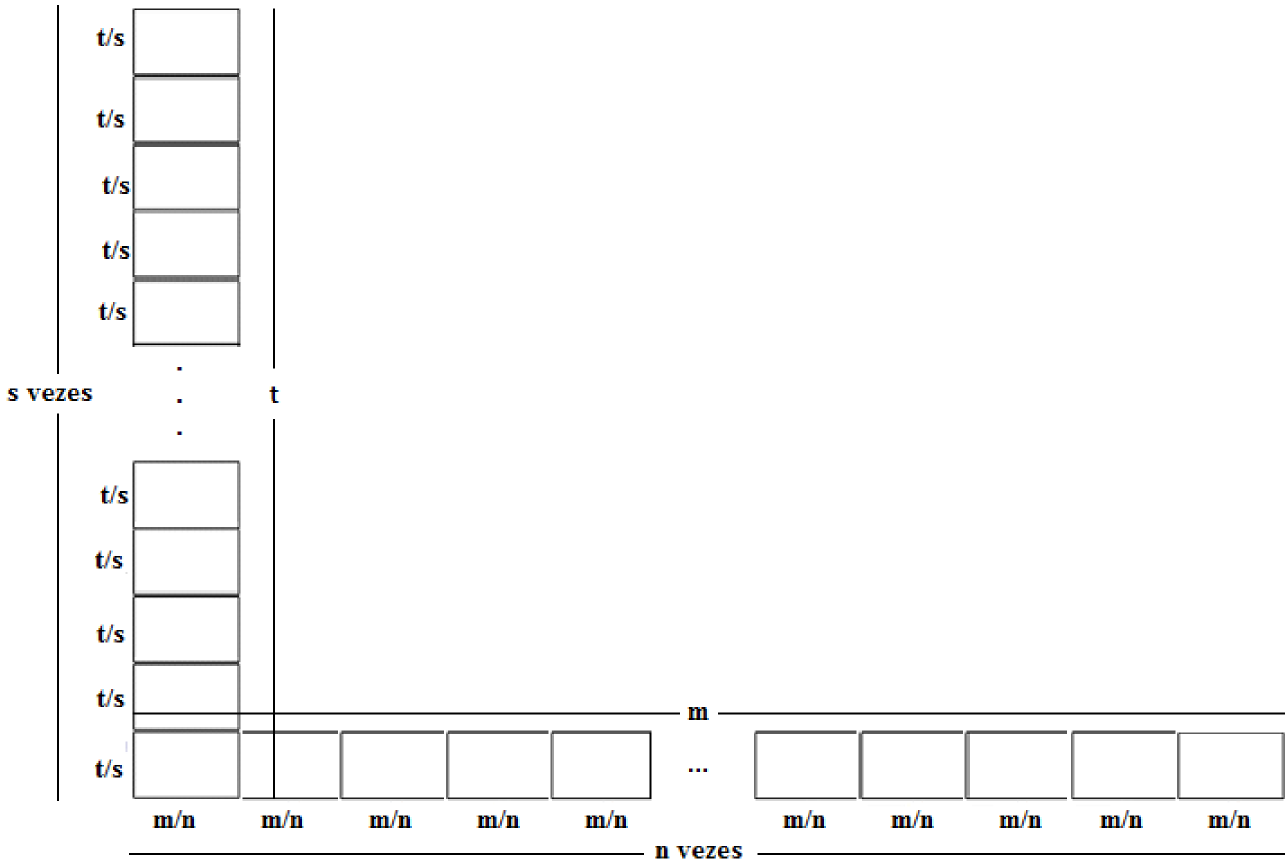
Figura 23 – Altura p do retângulo multiplicada n vezes.



Quando multiplicamos essa fração, que representa o número racional, pelo valor do seu denominador o resultado é o numerador da fração que é um número inteiro.

2º Passo: Vamos usar a mesma metodologia para a base do retângulo. Multiplicaremos a base p por n, então teremos: $p.n$, note que $p = \dfrac{m}{n}$, por isso, $\dfrac{m}{n}.n{=}m$.

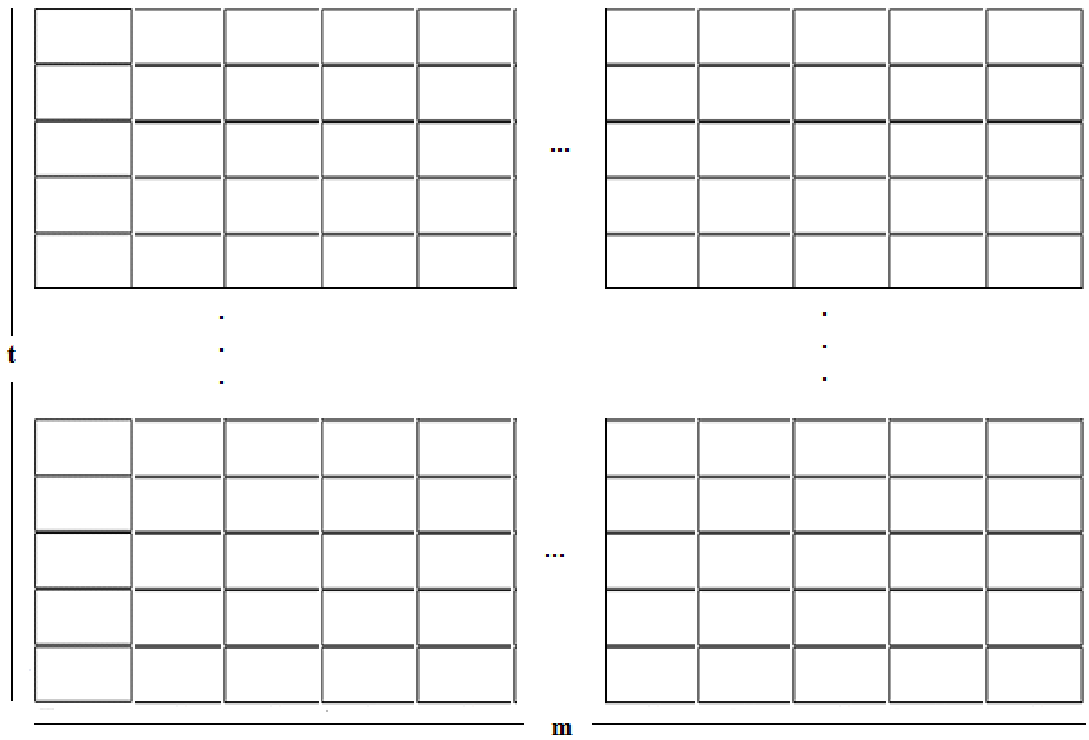
Figura 24 – Altura q do retângulo multiplicada s vezes.



Como no caso anterior, teremos um número m inteiro.

3 Passo: Preencheremos de retângulos iguais ao original, formando um retângulo de altura t e base m.

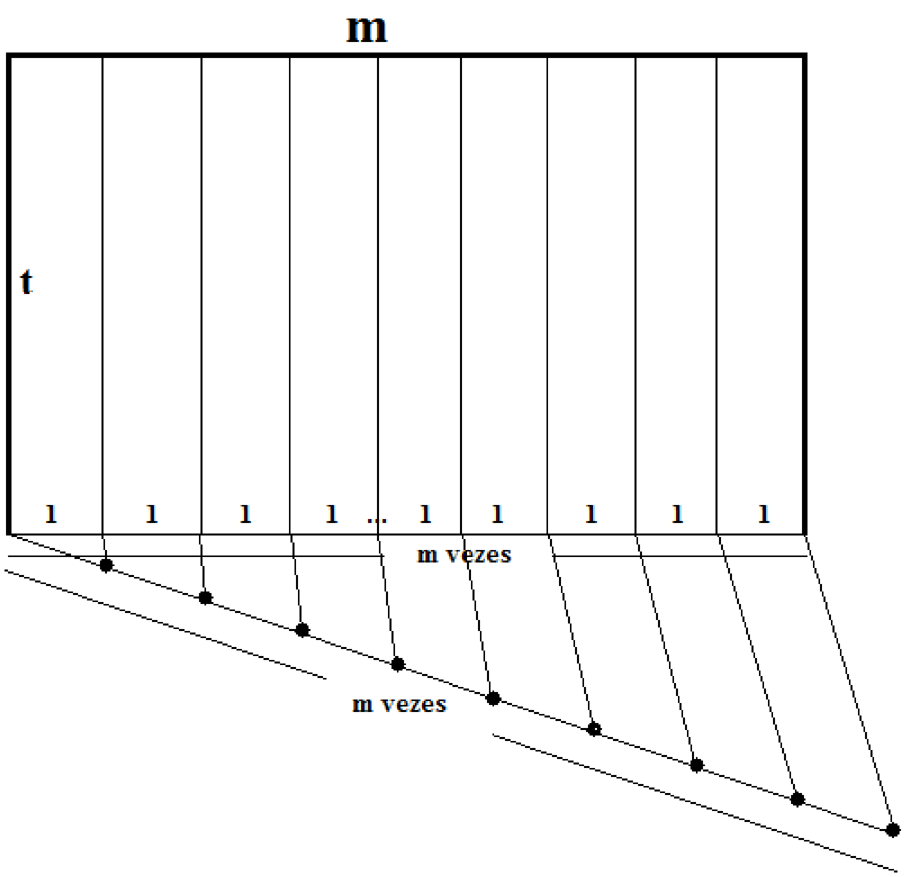
Figura 25 – Retângulo de altura t e base m.



Note que Agora podemos calcular a área desse retângulo com régua e compasso, para isso dividiremos esse retângulo em vários quadrados de lado $1u$, que pelo postulado 4 das áreas, tem área de $1u^2$.

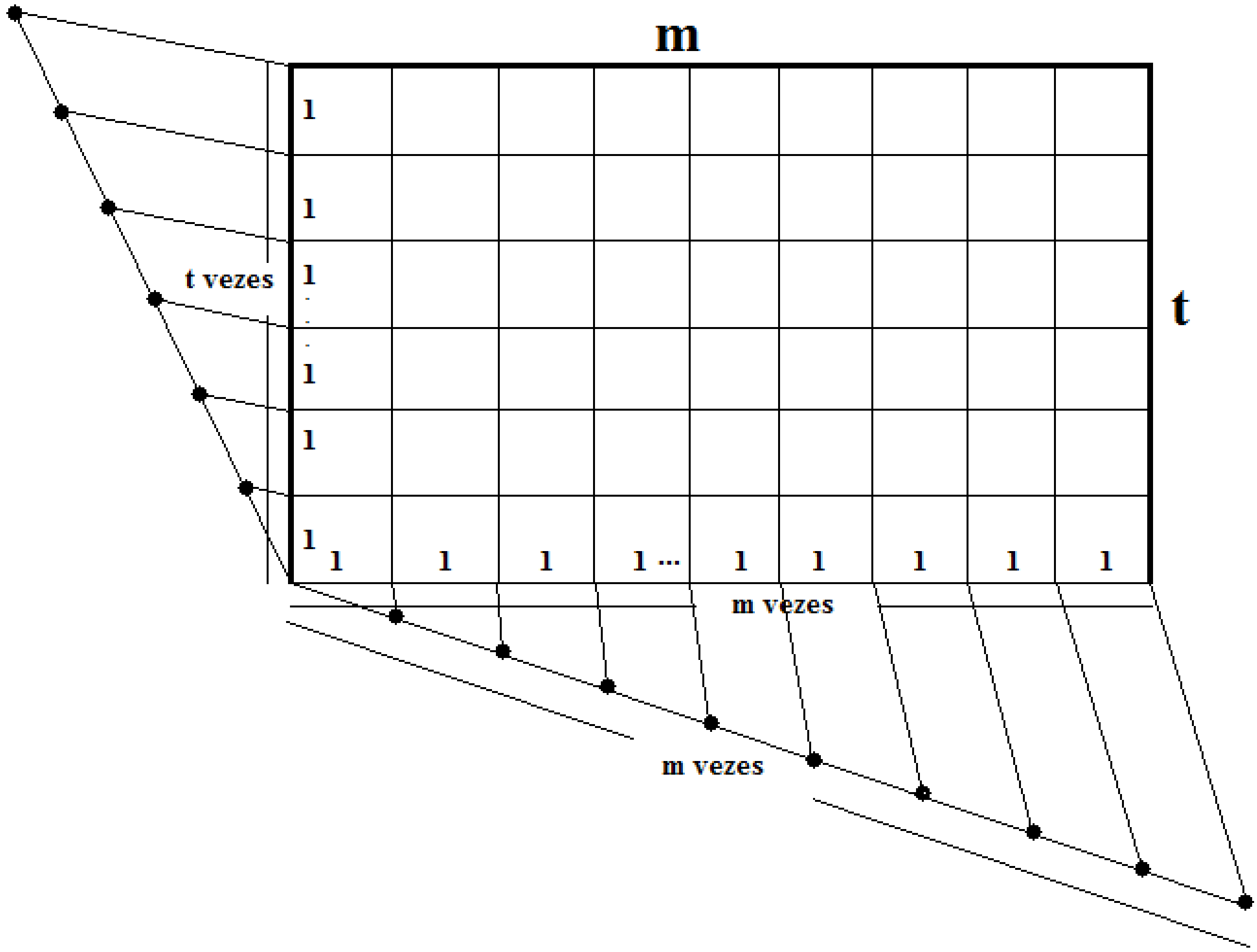
4º Passo: Vamos dividir a base m em m partes.

Figura 26 – Base dividida em m partes.



5º Passo: Dividiremos a altura t em t partes.

Figura 27 – Altura dividida em t partes.



No caso desse retângulo de base m e altura t e pelo postulado das áreas 2, a área é soma de quadrados formados e podemos calcular a quantidade de quadrados quando multiplicamos a quantidade de quadrados da altura t com a quantidade de quadrados da base m.

Área $= m.t$

Como multiplicamos $\frac{t}{s}$ por s o que resultou em t e $\frac{m}{n}$ por n o que resultou em m. Devemos dividir t por s e m por n. Portanto, a área vai ficar:

Área$=\frac{m}{n}.\frac{t}{s}$

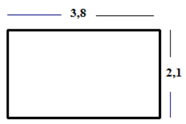
Note também, que $\frac{m}{n} = p$ e $\frac{t}{s} = q$, por isso:

Área$=p.q$ (LIMA, 2009)

Veremos como podemos aplicar:

Exemplo 1 (Área do Retângulo de base $3,8u$ e altura $2,1u$)**.** *Para Calcular a Área desses retângulos seguiremos o método acima.*

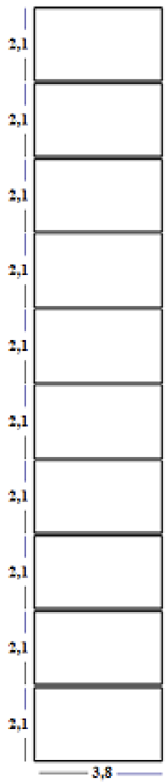
Figura 28 – Retângulo com dimensões Racionais.



Seguiremos os seguintes passos:

1 passo: Como a base e a altura tem medidas com uma casa decimal, faremos uma coluna com nove retângulos idênticos e colocaremos em cima do retângulo.

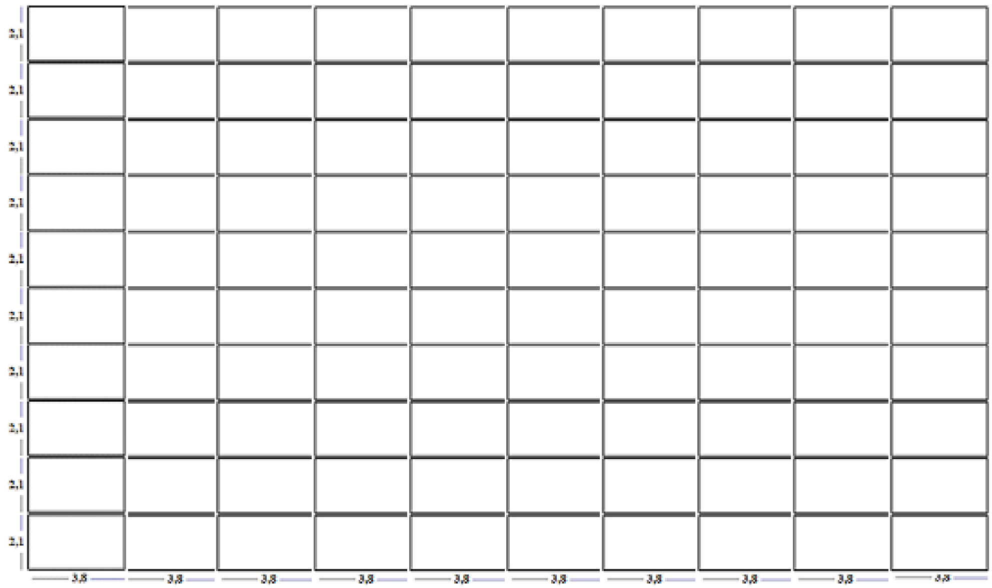
Figura 29 – coluna de 9 Retângulo idênticos colocados em cima do Retangulo de base $3,8u$ e altura $2,1u$.



Com isso construímos uma altura com uma medida inteira.

2 Passo: Construiremos agora nove colunas idêndicas a primeira, que serão colocadas ao lado da coluna já construída.

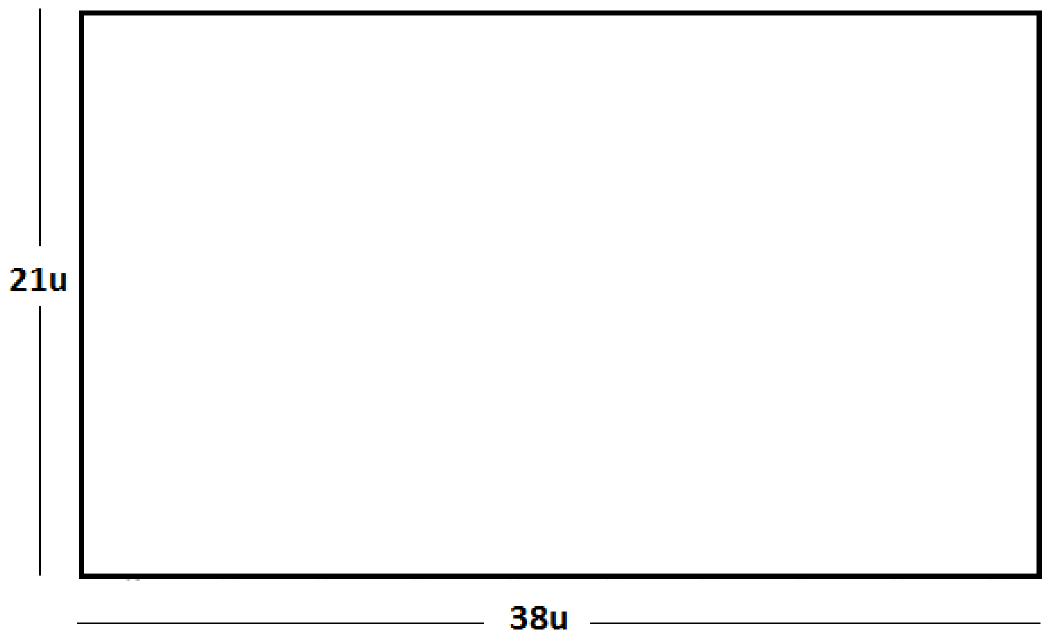
Figura 30 – coluna de 9 Retângulo idênticos colocados do da coluna de Retangulos de base $3,8u$ e altura $2,1u$.



Com isso construímos uma altura e uma base com uma medidas inteiras.

Logo, temos um novo Retângulo com $38u$ *de base e* $21u$ *de altura.*

Figura 31 – Retângulo construído de base $38u$ de base e $21u$ de altura.



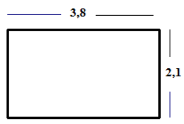
E para calcularmos a Área desse Retângulo dividiremos ele em quadrados de lado

1u e Área igual a $1u^2$. Com isso sua Área vai ser:

$$Área = 38u.21u = 798u^2$$

Como para calcular esta Área aumantamos tanto a base como a altura em 10 Retângulo idênticos, para calcularmos a Área do Retângulo de base 3,8u e altura 2,1u dividiremos a base por 10 e a altura por 10, ou ainda podemos dividir a Área por 100. Portanto, temos:

Figura 32 – Área do Retângulo com altura e base Racionais.



$$Área = \frac{798u^2}{100} = 7,98u^2$$

Observação: De modo análogo, podemos calcular a Área para Retângulos com dimensões com medidas Centesimais e Milesimais.

2.3 Funções constantes, afim e quadrática

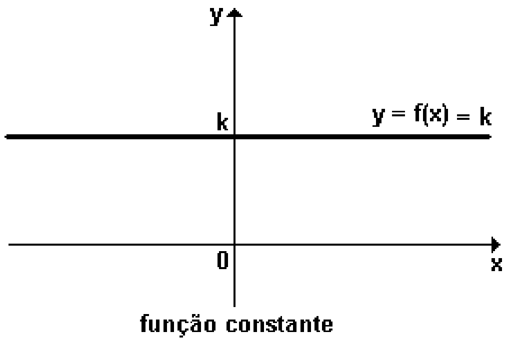
Nesta seção veremos as definições das funções constantes, afins e quadráticas e seus respectivos gráficos (LIMA, 2013).

2.3.1 Funções constante

As funções de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções que tem um $f(x) = y$, e um x, dados por uma lei da função, onde cada uma tem uma lei característica, e y depende de x, ou x depende de y. A função constante é uma função de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde a lei dessa função é dada por $f(x) = K$, com K pertencente aos números reais(R).(LIMA, 2013)

O gráfico da função constante é dado por:

Figura 33 – Gráfico da função constante.

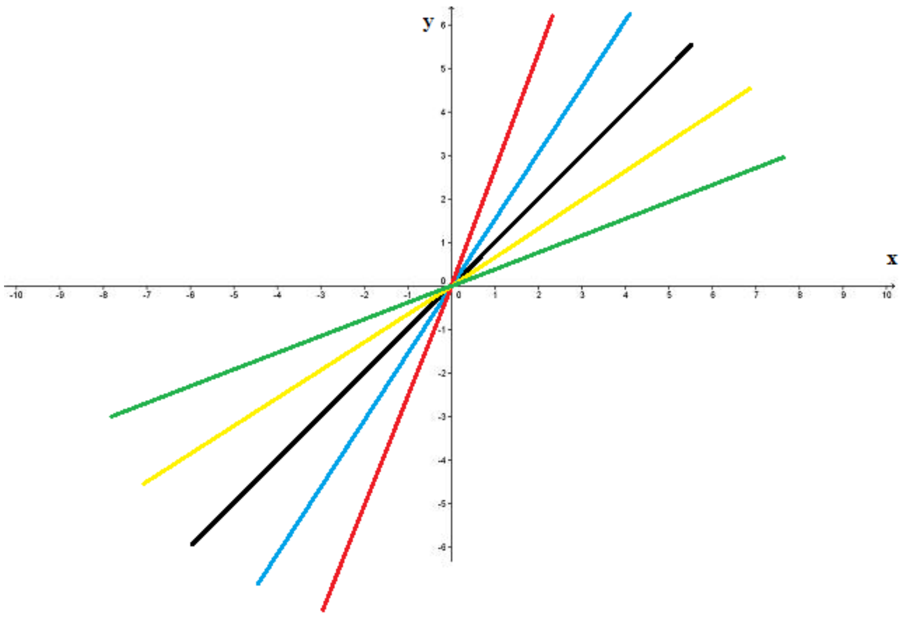


Note que para qualquer valor de x o valor y é igual a k.

2.3.2 Função Afim

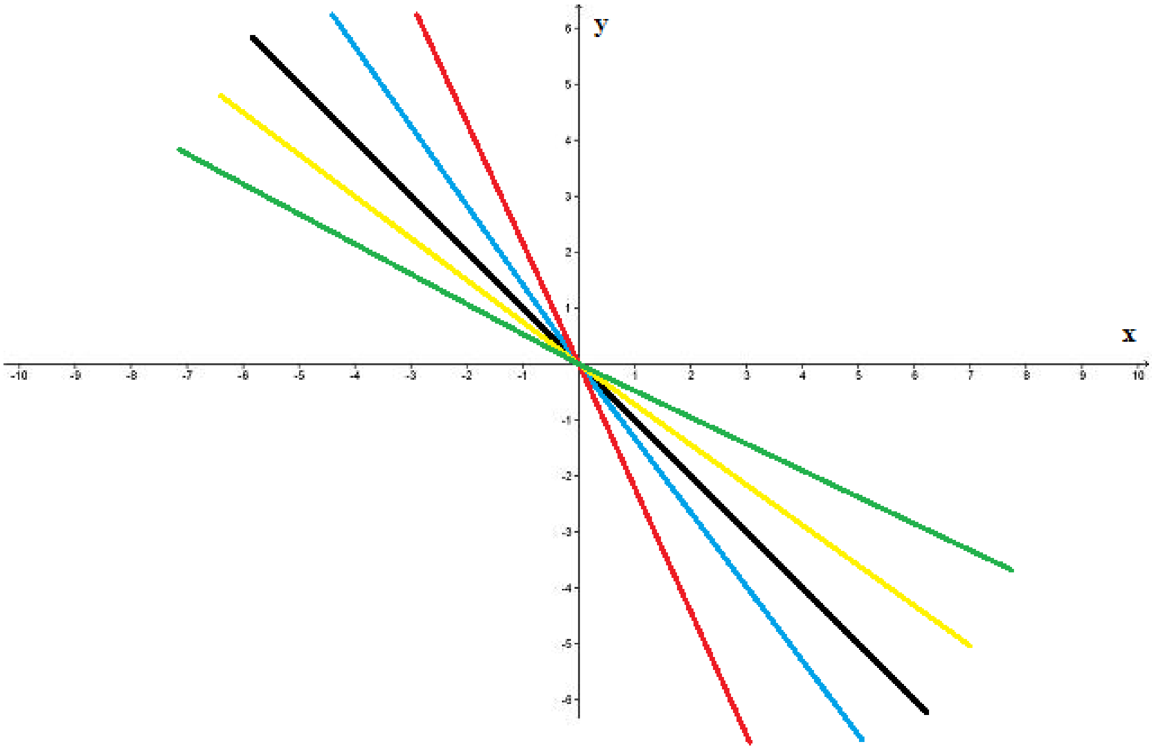
Chama-se de função afim, qualquer função de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x)=ax+b$, com a e $b \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$, nessa função a é chamado de coeficiente de x e b é o termo independente.
Um caso particular da função afim é quando b=0, pois temos o uma função afim de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x)=ax$,com $a \neq 0$, essa função é chamada de função Linear.(LIMA *et al.*, 2006)
O gráfico da função linear é dado por $(a > 0)$:

Figura 34 – Gráfico da função linear com $f(x)=ax$.



O gráfico da função liner quando $a < 0$.

Figura 35 – Gráfico da função linear com $f(x)=-ax$.

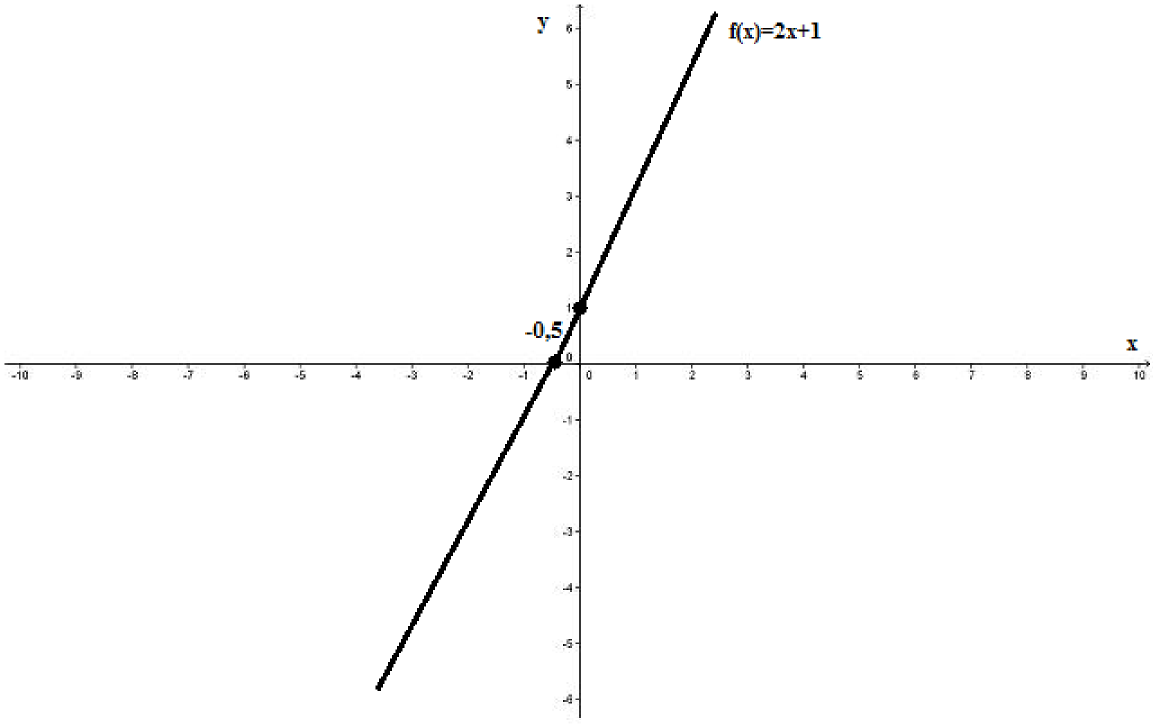


Note que o gráfico da função linear passa pela origem do plano cartesiano.

Quando a função afim de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada pela lei $f(x)=ax+b$, com $b \neq 0$, o gráfico da função pode transladar tanto pelo eixo das abcissas, como transladar pelo eixo das ordenadas.

Exemplo 2 (Construir o gráfico da função $f(x)=2x+1$)**.** *Para fazer um gráfico, basta resolver a equação quando* $x=0$ *e quando* $y=0$*, com isso teremos os pares ordenados* $(0;1)$ *e* $(0,5;0)$*, respectivamente.*

Figura 36 – Gráfico da função afim.



Temos que observar que o gráfico não passa pela origem.

2.3.3 Função Quadrática

Chama-se de função Quadrática qualquer função f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x)$=ax^2+bx+c, em que a, b e c são números reais e a é diferente de zero.

O gráfico da função quadrática é uma curva chamada de parábola, que quando $a > 0$ temos uma função crescente, e quando o $a < 0$ a função é decrescente.

Também a quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido pelo valor do discriminante Δ.

Quando $\Delta > 0$, há duas raízes reais e distintas.

Quando $\Delta = 0$, há duas raízes reais e iguais.

Quando $\Delta < 0$, não há raízes reais.

Figura 37 – Gráfico da função quadrática Δ positivo.

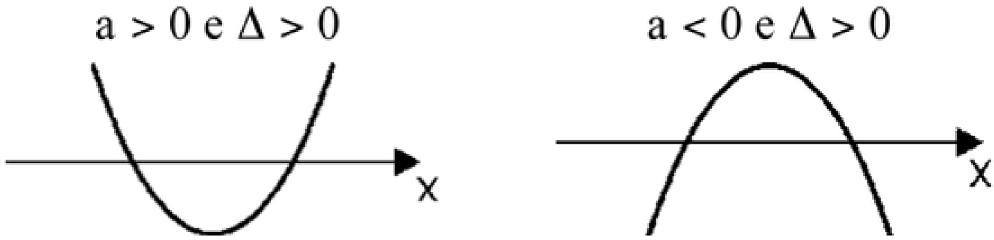


Figura 38 – Gráfico da função quadrática Δ=0.

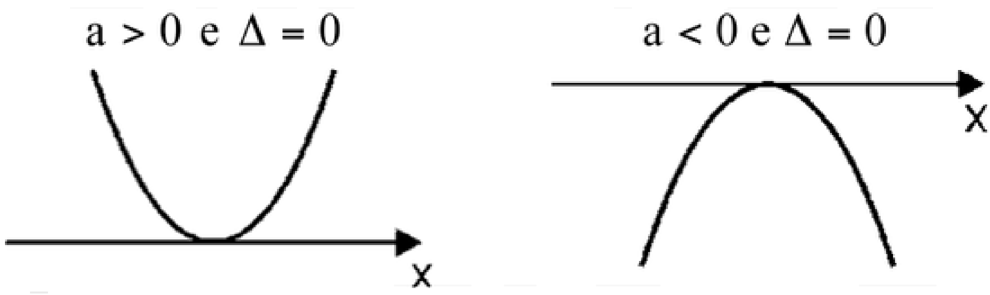
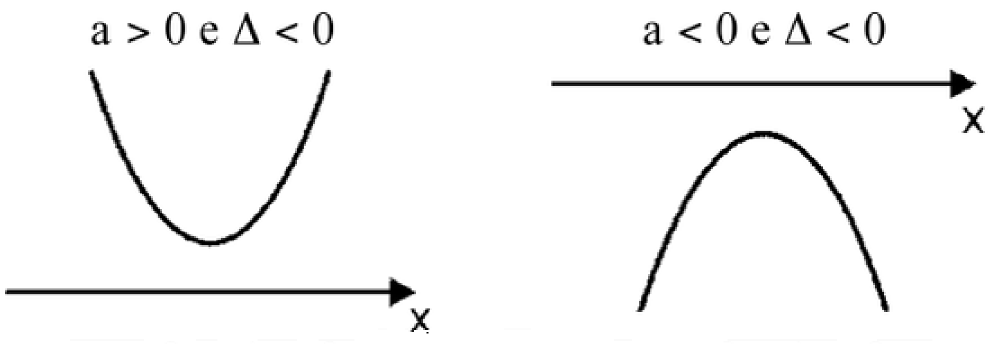


Figura 39 – Gráfico da função quadrática Δ negativo.



3 ÁREA DE REGIÕES

Neste capítulo calculamos áreas de regiões limitadas pelo gráfico de funções f que podem ser constantes, afins e quatráticas, onde $f(x)>0$, mais especificamente áreas de regiões abaixo da curva definida pela função f a partir de um ponto p até um ponto q no eixo das abcissas, onde p e q serão considerados números racionais. O método utilizado para calcular essas áreas é as construções geométricas por meio de régua e compasso.

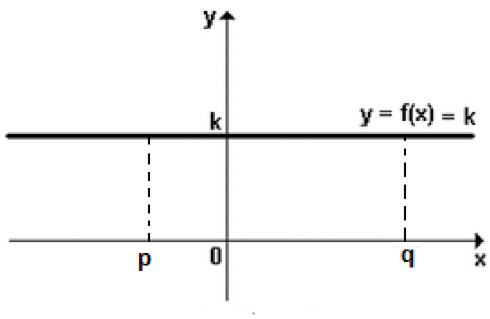
3.1 Área da região limitada pelo gráfico de uma função constante

Como vimos a função constante é dada por uma lei $f(x)=K$. Também tem como gráfico uma reta paralela ao eixo das abscissas. Então, calcularemos as áreas baixo das funções para $f(x)>0$, nesse caso o $K>0$.

Vejamos, então como calcular a área da função $f(x)=K$.

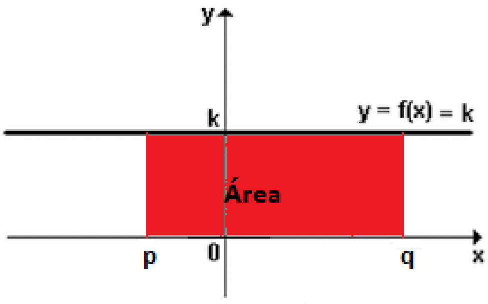
Dado o gráfico da função e os limites de variação do eixo das abcissas, calcularemos a área do seguinte modo:

Figura 40 – Gráfico da função constante $f(x) = k$.



Podemos observar que qualquer valores pare p e q pertencente ao eixo das abcissas, para construir as retas verticais, formaremos a área que queremos calcular, onde p, q e $k \in \mathbb{Q}$.

Figura 41 – Região abaixo da função constante $f(x) = k$ e das retas verticais passando por p e q.



A região que formamos é retangular, como no capítulo anterior vimos como calcula áreas de regiões retangulares, então a área da região formada pelo gráfico da função e das duas retas verticais é:

$\acute{A}rea = (q-p).k$

3.2 Área da região limitada pelo gráfico de uma função Afim

A função afim é caracterizada pela lei de formação $f(x)$=$a.x+b$, nessa secção analisaremos os gráficos e vamos calcular áreas abaixo dessas funções.

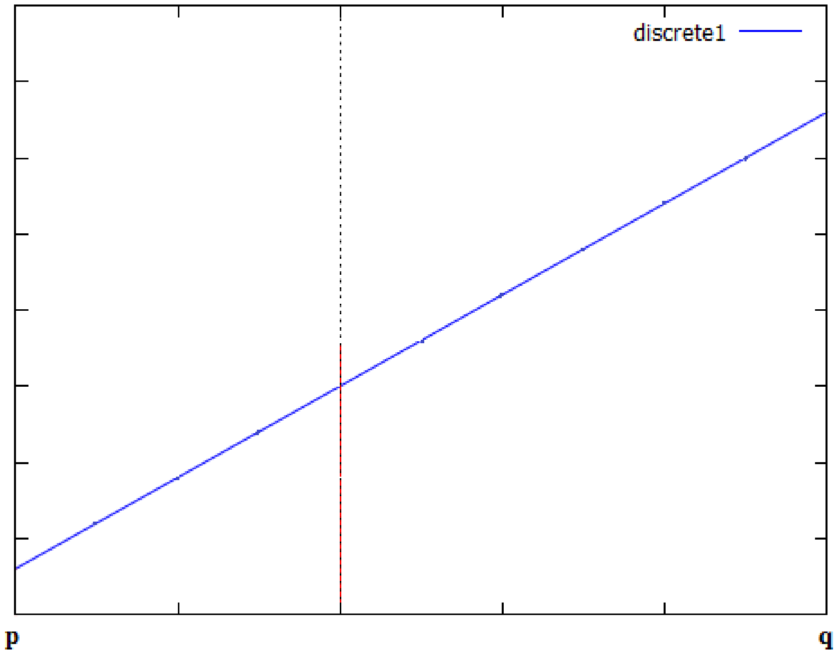
3.2.1 Área de uma função Afim da forma $f(x) = ax+b$

De um modo geral, também podemos calcular a área de uma função afim completa, ou seja, na forma $f(x) = ax+b$, onde a e $b \in \mathbb{Q}$.

Para Calcularmos tal área precisamos dos pontos no eixo das abscissas que limitaram a área a ser calculada, chamaremos esses pontos de q e p, onde q e $p \in \mathbb{Q}$.

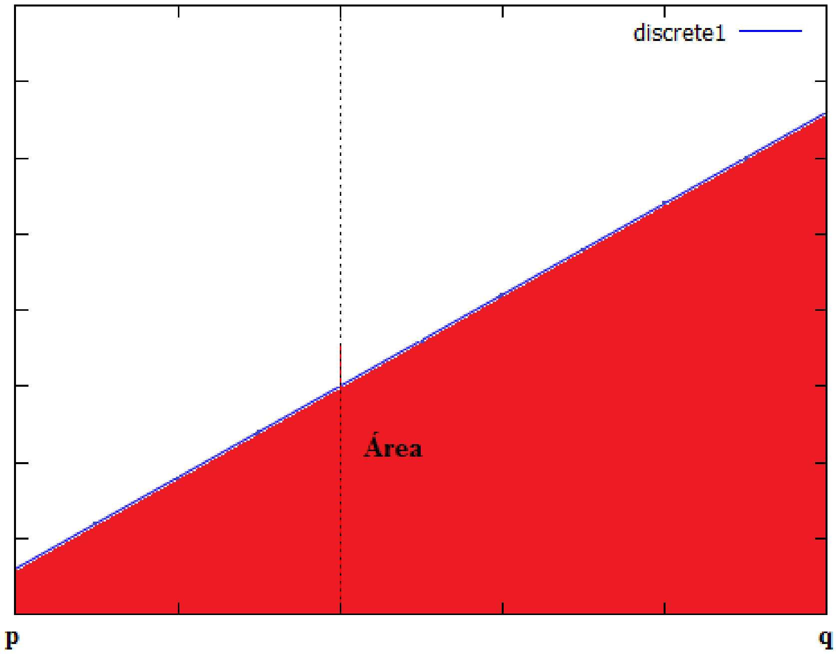
Então, teremos:

Figura 42 – Gráfico da função $f(x) = ax + b$.



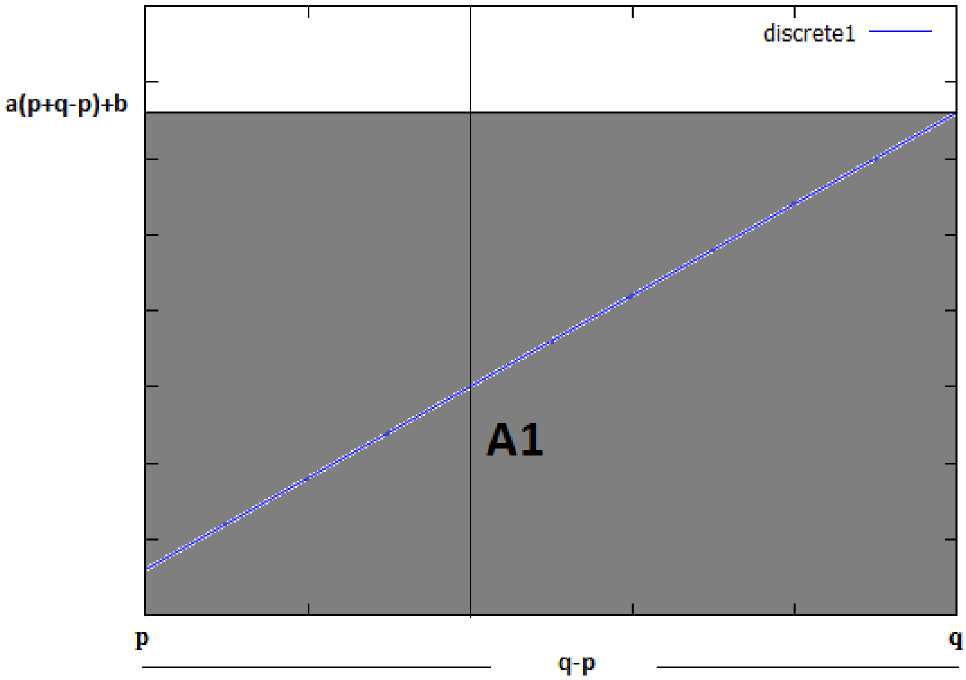
Note que, temos que calcular a área delimitada por p e q.

Figura 43 – Área delimitada pelo gráfico e pelo eixo das abscissas nos pontos p e q.



Começaremos a calcular essa área supondo que essa área fosse a área de um retângulo. Então, teremos:

Figura 44 – Área da região entra o gráfico da função e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas com um retângulo.

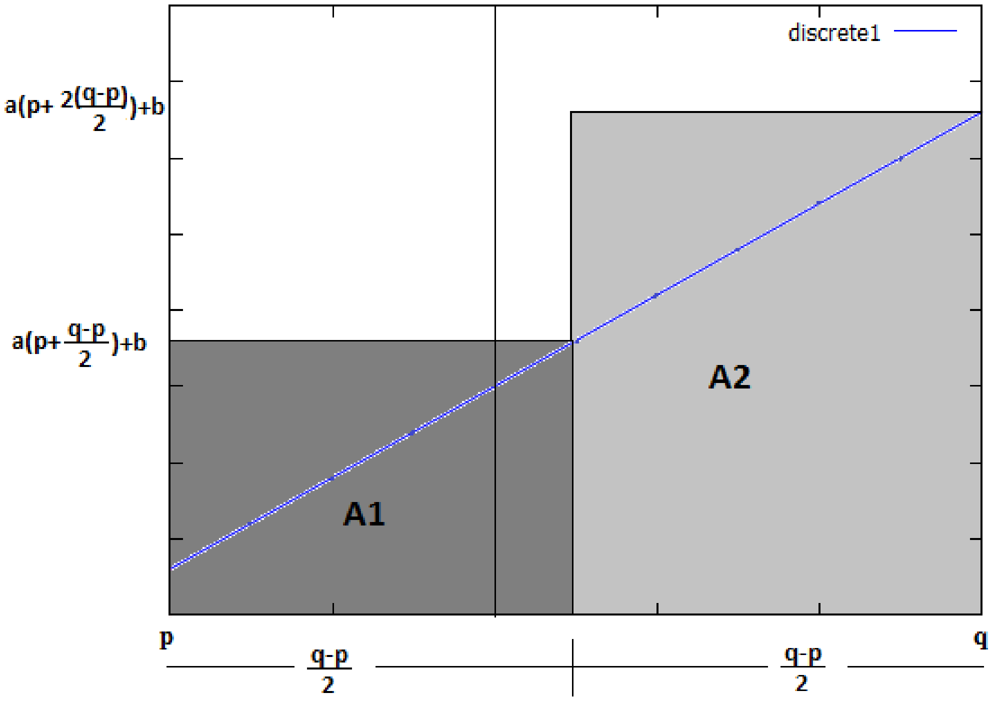


Como temos um retângulo e já sabemos calcular a área de um retângulo por régua e compasso, logo a área vai ser:

$$A1 = (q-p).[a.(p+q-p)+b]$$

Vamos calcular dividindo essa área em dois retângulos, com isso teremos:

Figura 45 – Área da região entra o gráfico da função e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas com dois retângulos.



$$A1 = (\frac{q-p}{2}).[a.(p+\frac{q-p}{2})+b]$$

$$A1 = (\frac{q-p}{2}).[a.(p+2\frac{(q-p)}{2})+b]$$

Área total$=A1+A2$

Área total$=(\frac{q-p}{2}).[a.(p+\frac{q-p}{2})+b]+(\frac{q-p}{2}).[a.(p+2\frac{(q-p)}{2})+b]$

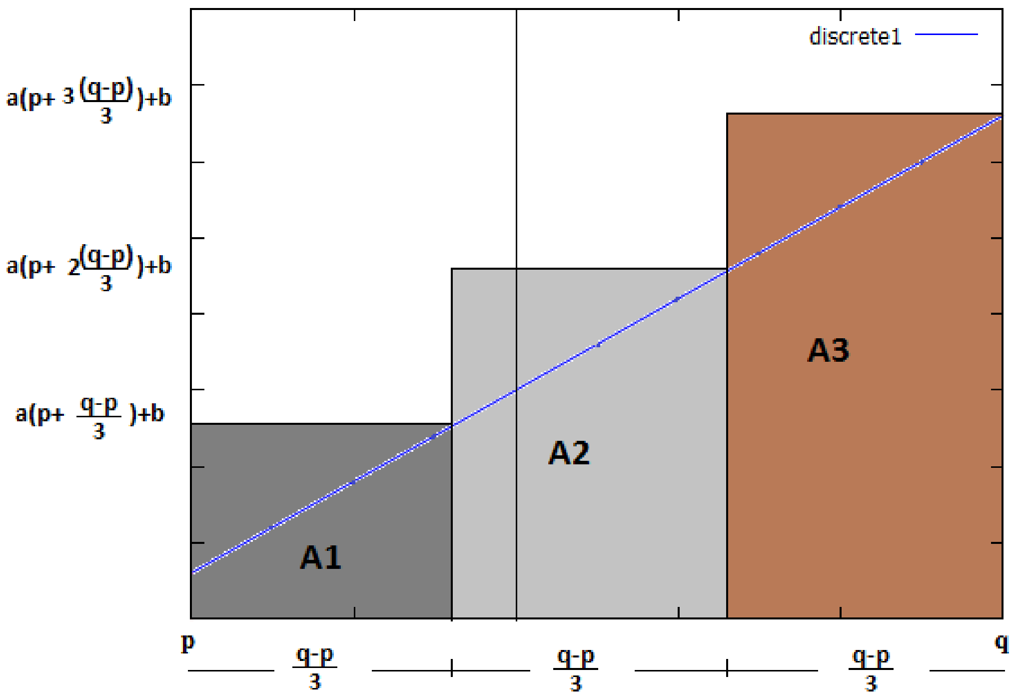
Área total$=(\frac{q-p}{2}).[a.(p+\frac{q-p}{2})+b+a.(p+2\frac{(q-p)}{2})+b]$

Área total$=(\frac{q-p}{2}).[a.(p+\frac{q-p}{2}+p+2\frac{(q-p)}{2})+2b]$

Área total$=(\frac{q-p}{2}).[a.(2p+\frac{q-p}{2}.(1+2))+2b]$

Agora, vamos dividir a área em três retângulos, então vamos ter:

Figura 46 – Área da região entra o gráfico da função e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas com três retângulos.



$$A1 = (\frac{q-p}{3}).[a.(p+\frac{q-p}{3})+b]$$

$$A2 = (\frac{q-p}{3}).[a.(p+2\frac{(q-p)}{3})+b]$$

$$A3 = (\frac{q-p}{3}).[a.(p+3\frac{(q-p)}{3})+b]$$

Área total$=A1+A2+A3$

Área total$=(\frac{q-p}{3}).[a.(p+\frac{q-p}{3})+b]+(\frac{q-p}{3}).[a.(p+2\frac{(q-p)}{3})+b]+(\frac{q-p}{3}).[a.(p+3\frac{(q-p)}{3})+b]$

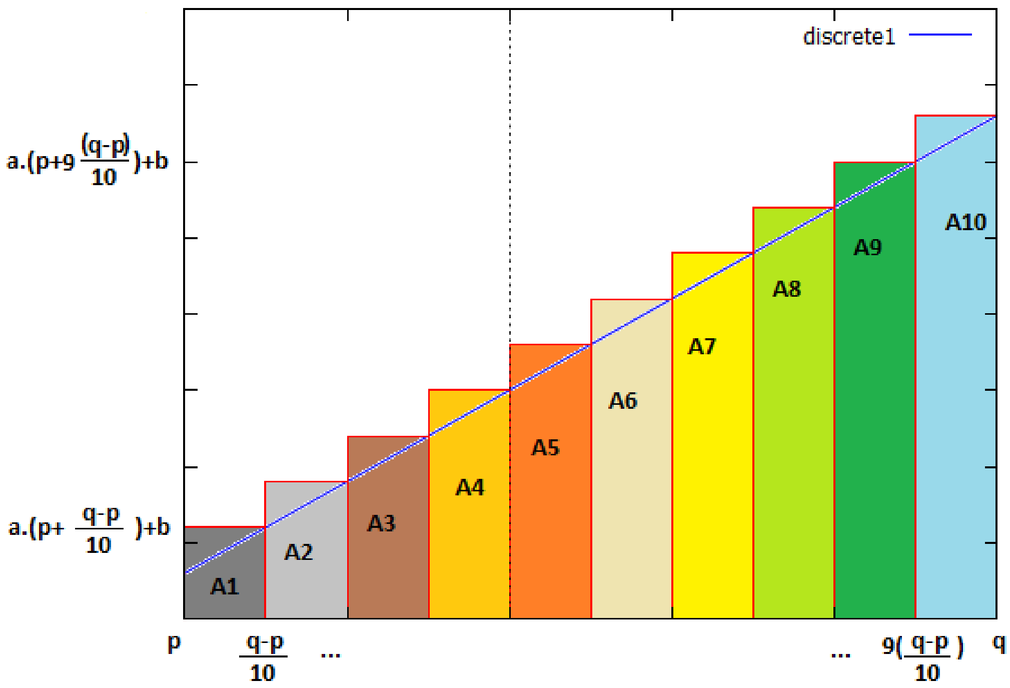
Área total$=(\frac{q-p}{3}).[a.(p+\frac{q-p}{3})+b+a.(p+2\frac{(q-p)}{3})+b+a.(p+3\frac{(q-p)}{3})+b]$

Área total$=(\frac{q-p}{3}).[a.(p+\frac{q-p}{3}+p+2\frac{(q-p)}{3}+p+3\frac{(q-p)}{3})+3b]$

Área total$=(\frac{q-p}{3}).[a.(3p+(\frac{q-p}{3}).(1+2+3))+3b]$

Podemos notar que a uma relação, da quantidade de retângulos com a forma de calcular a área da função que forma uma sequência. Se dividíssemos em 10 retângulo, teremos a seguinte relação:

Figura 47 – Área da região entra o gráfico da função e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas com dez retângulos.

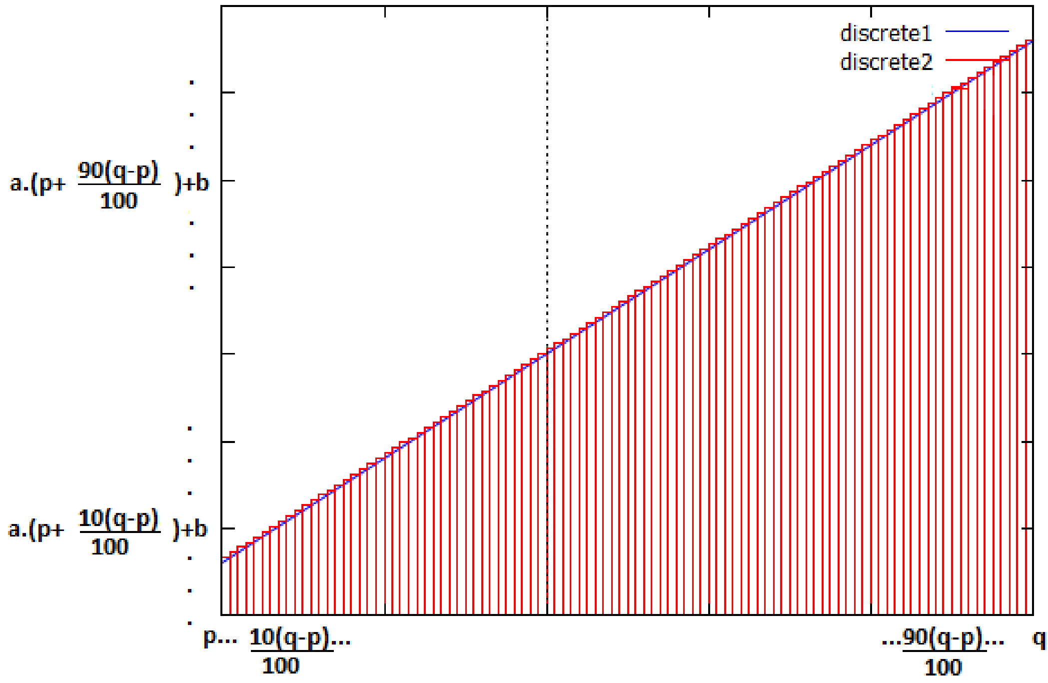


Área total$=A1+A2+A3+A4+A5+A6+A7+A8+A9+A10$

Área total$=(\frac{q-p}{10}).[a.(10p+(\frac{q-p}{10}).(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10))+10b]$

Se dividíssemos em 100 retângulos, teríamos:

Figura 48 – Área da região entra o gráfico da função e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas com cem retângulos.

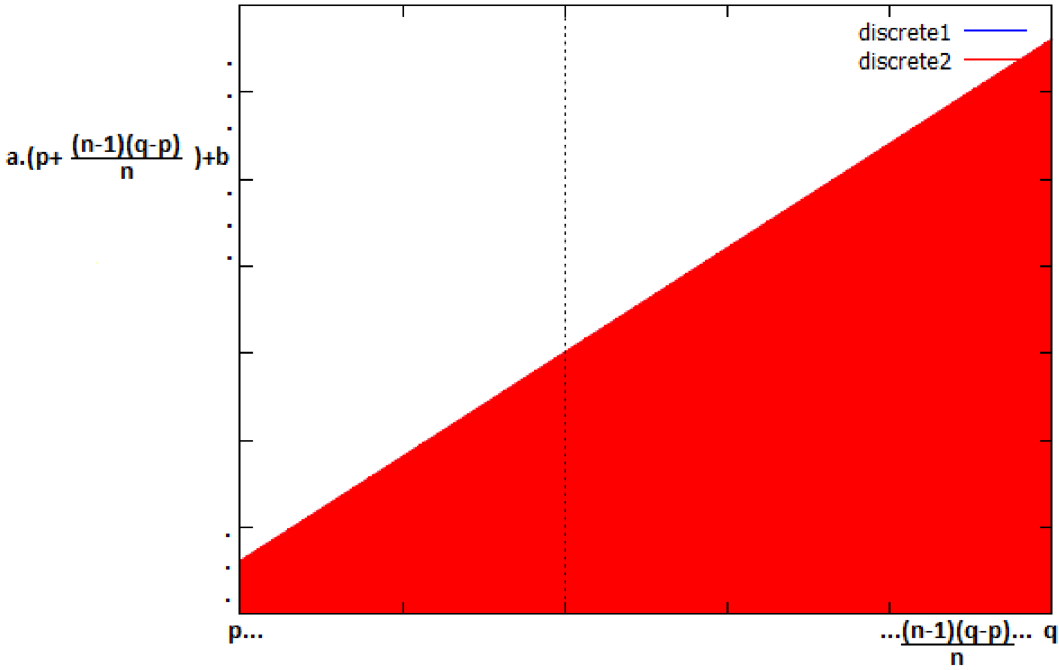


Área total$=A1+A2+A3+A4+A5+...+A96+A97+A98+A99+A100$

Área total$=(\dfrac{q-p}{100}).[a.(100p+(\dfrac{q-p}{100}).(1+2+3+4+5+...+96+97+98+99+100))+100b]$

Se dividíssemos em um número muito grande de retângulos n, teríamos a área da função, como mostra a figura e os cálculos abaixo:

Figura 49 – Área da região entra o gráfico da função e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas com n retângulos.



Área total$=A1+A2+A3+A4+A5+...+A96+A97+A98+...A(n-1)+An$

Área total$=(\frac{q-p}{n}).[a.(np+(\frac{q-p}{n}).(1+2+3+4+5+...+96+97+98+...+(n-1)+n))+nb]$

Área total$=(\frac{q-p}{n}).[a.(np+(\frac{q-p}{n}).(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}))+nb]$

Área total$=(q-p).[a.(p+(\frac{q-p}{n^2}).(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}))+b]$

Área total$=(q-p).[a.(p+(q-p).(\frac{n^2}{2n^2}+\frac{n}{2n^2}))+b]$

Área total$=(q-p).[a.(p+(q-p).(\frac{1}{2}+0))+b]$

Área total$=(q-p).[a.(p+\frac{q-p}{2})+b]$

Área total$=(q-p).[a.(\frac{q+p}{2})+b]$

Área total=$[a.(\frac{q^2-p^2}{2})+b(q-p)]$

Área total=$\frac{a}{2}.(q^2-p^2)+b(q-p)$

Então, chegamos na forma geral de se calcular a área de uma função afim qualquer, onde p, q, a e $b \in \mathbb{Q}$.

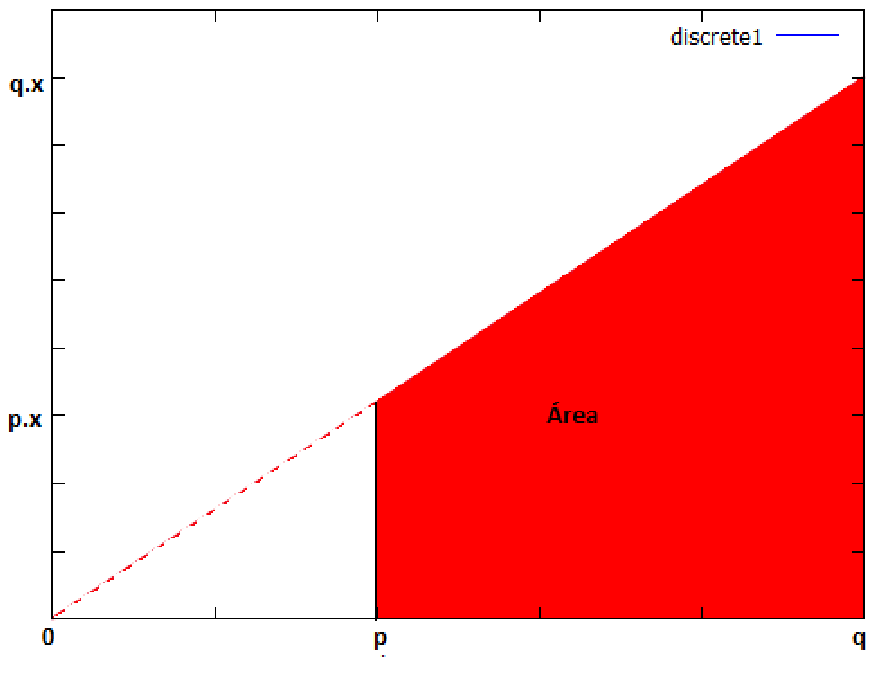
Veremos algumas aplicações:

Exemplo 3. *Calcular a área da região abaixo da função $f(x) = a.x$, e pelas retas verticais e perpendiculares que passam por p e q no eixo das abscissas, e a, p e $q \in \mathbb{Q}$.*

Para calcular essa área podemos fazer duas análises:

Como nessa função $b = 0$, o seu gráfico passa pela as origem do plano cartesiano, quando escolhemos p e $q \in x$, precisamos substituir na fórmula geral para área dessa região.

Figura 50 – Área da região entra o gráfico da função e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas.



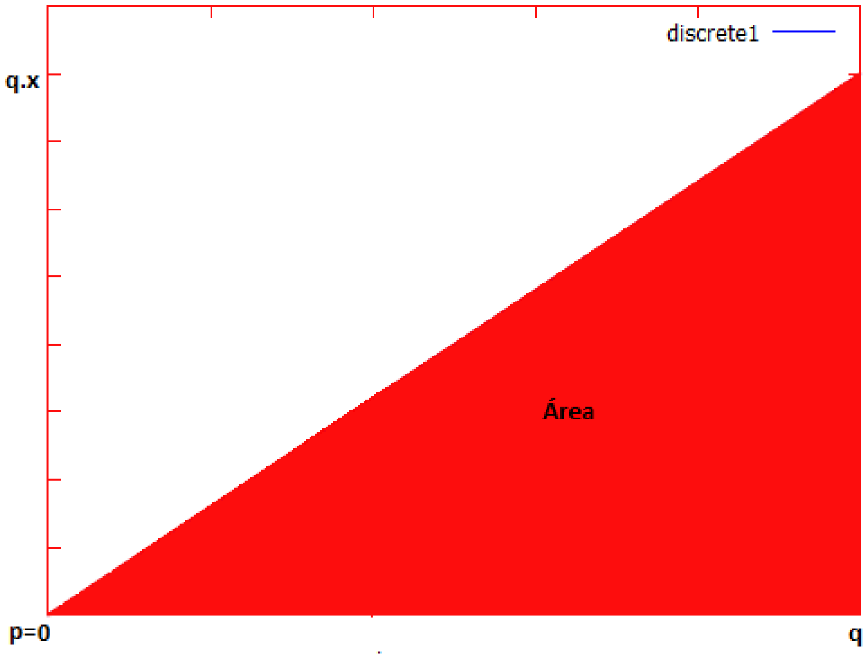
Área total=$\frac{a}{2}.(q^2-p^2)+b(q-p)$

Área total=$\frac{a}{2}.(q^2-p^2)+0(q-p)$

$$\acute{A}rea\ total{=}\frac{a}{2}.(q^2-p^2)$$

Se caso o valor de $p=0$*, então teremos:*

Figura 51 – Área da região entra o gráfico da função e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas.



$$\acute{A}rea\ total{=}\frac{a}{2}.(q^2-p^2)$$

$$\acute{A}rea\ total{=}\frac{a}{2}.(q^2-0)$$

$$\acute{A}rea\ total{=}\frac{a.q^2}{2}$$

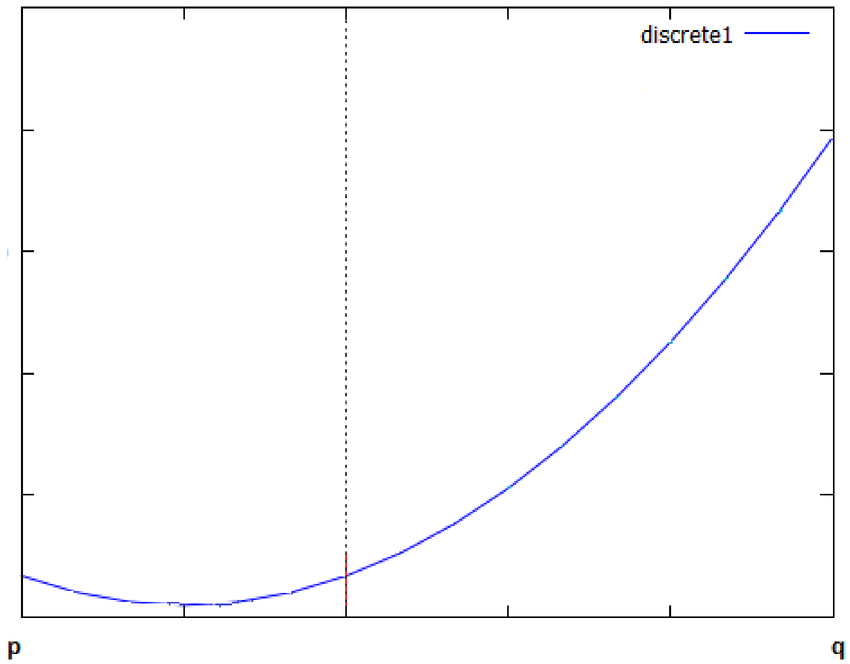
3.3 Área da região limitada pelo gráfico de uma função Quadrática

Nessa seção vamos calcular a área de uma região abaixo da curva dada por uma função de segundo grau, com régua e compasso, usando o mesmo método usado nos problemas anteriores.

3.3.1 Área da região entre o gráfico da função, da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas.

Para calcularmos a área de uma função dessa forma, veremos primeiro um gráfico desse tipo de função, observe a figura abaixo:

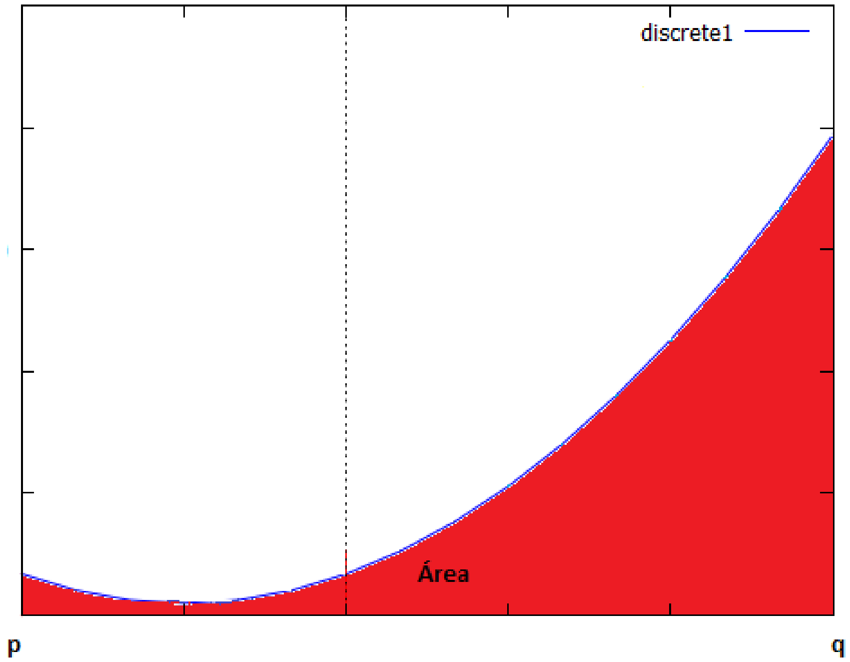
Figura 52 – Gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Note que na figura acima, temos uma parte do gráfico da função quadrática completa, que estar delimitada no eixo das abscissas pelos números p e q, onde p e$q \in \mathbb{Q}$.

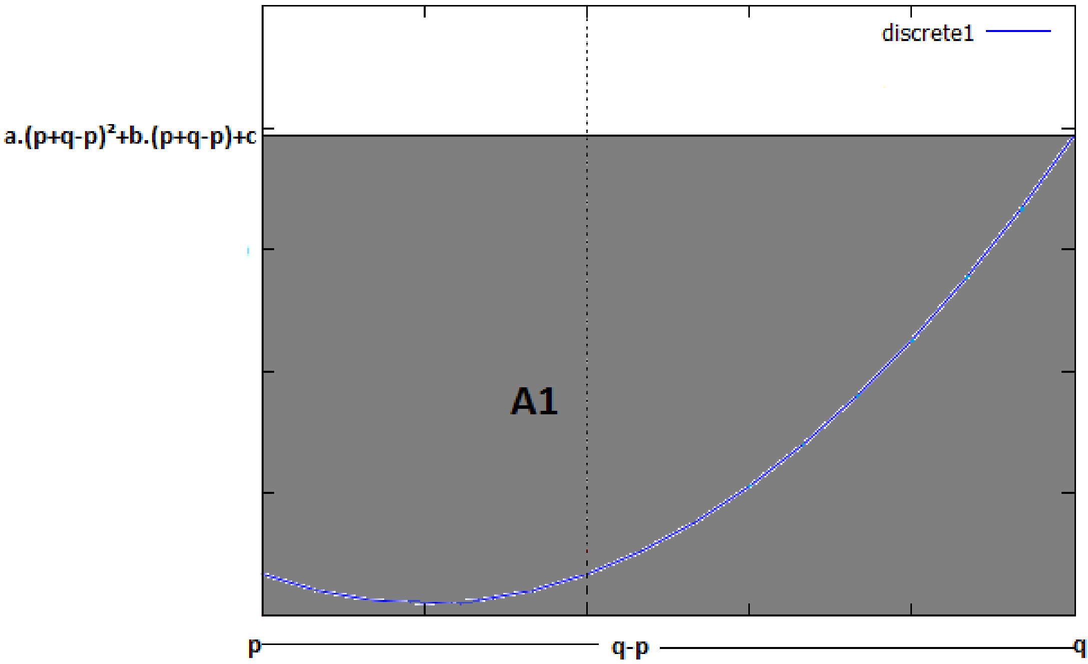
Queremos calcular a área que estar pintada, como mostra a figura a seguir:

Figura 53 – Área da região entre o gráfico da função, da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas.



Para calcular essa área vamos supor que ela se aproxima da área de um retângulo, então teríamos:

Figura 54 – Área da região entre o gráfico da função, da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas admitindo que seja a de um retângulo.



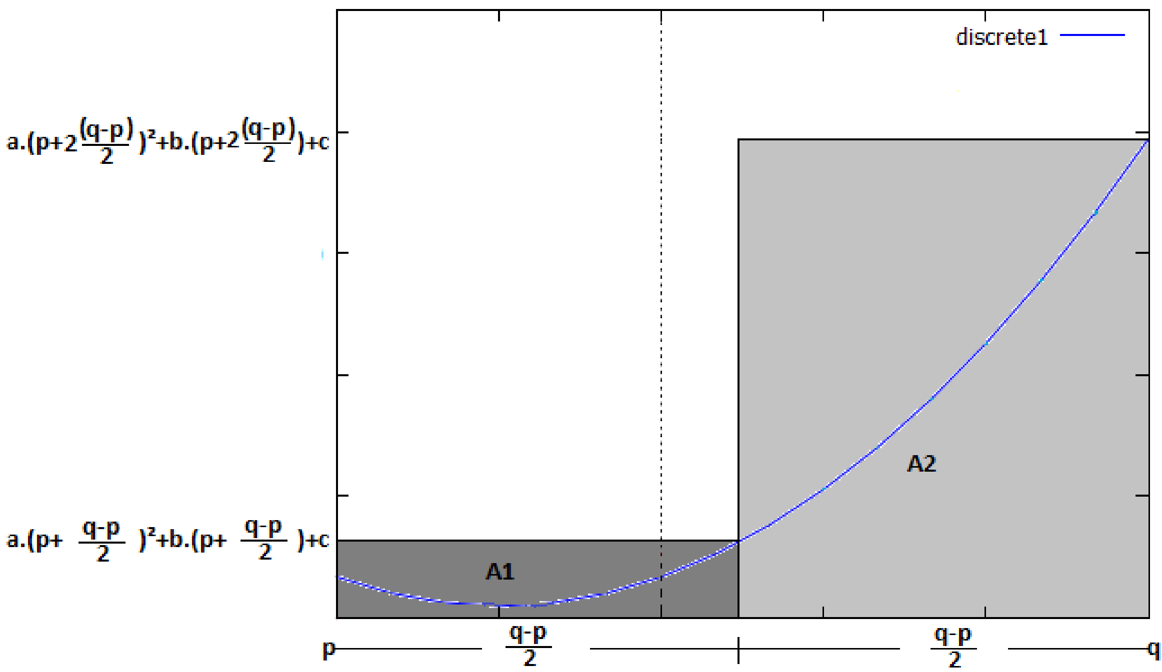
Área total=$A1$

Área total$=(q-p).(a.(p+q-p)^2+b.(p+q-p)+c)$

Área total$=(q-p).[a.(p^2+2p.(q-p)+(q-p)^2)+b.(p+(q-p))+c]$

No entanto, podemos notar que sobrou muita área da que verdadeiramente queríamos, porém, podemos dividir essa área em dois retângulos, logo vamos ter:

Figura 55 – Área da região entre o gráfico da função, da forma $f(x)=ax^2+bx+c$, e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas dividido em dois retângulos.



$$A1=(\frac{q-p}{2}).(a.(p+\frac{q-p}{2})^2+b.(p+\frac{q-p}{2})+c)$$

$$A2=(\frac{q-p}{2}).(a.(p+2\frac{(q-p)}{2})^2+b.(p+2\frac{(q-p)}{2})+c)$$

Área total$=A1+A2$

Área total$=(\frac{q-p}{2}).(a.(p+\frac{q-p}{2})^2+b.(p+\frac{q-p}{2})+c)+(\frac{q-p}{2}).(a.(p+2\frac{(q-p)}{2})^2+b.(p+2\frac{(q-p)}{2})+c)$

Área total$=(\frac{q-p}{2}).[a.(p+\frac{q-p}{2})^2+b.(p+\frac{q-p}{2})+c+a.(p+2\frac{(q-p)}{2})^2+b.(p+2\frac{(q-p)}{2})+c]$

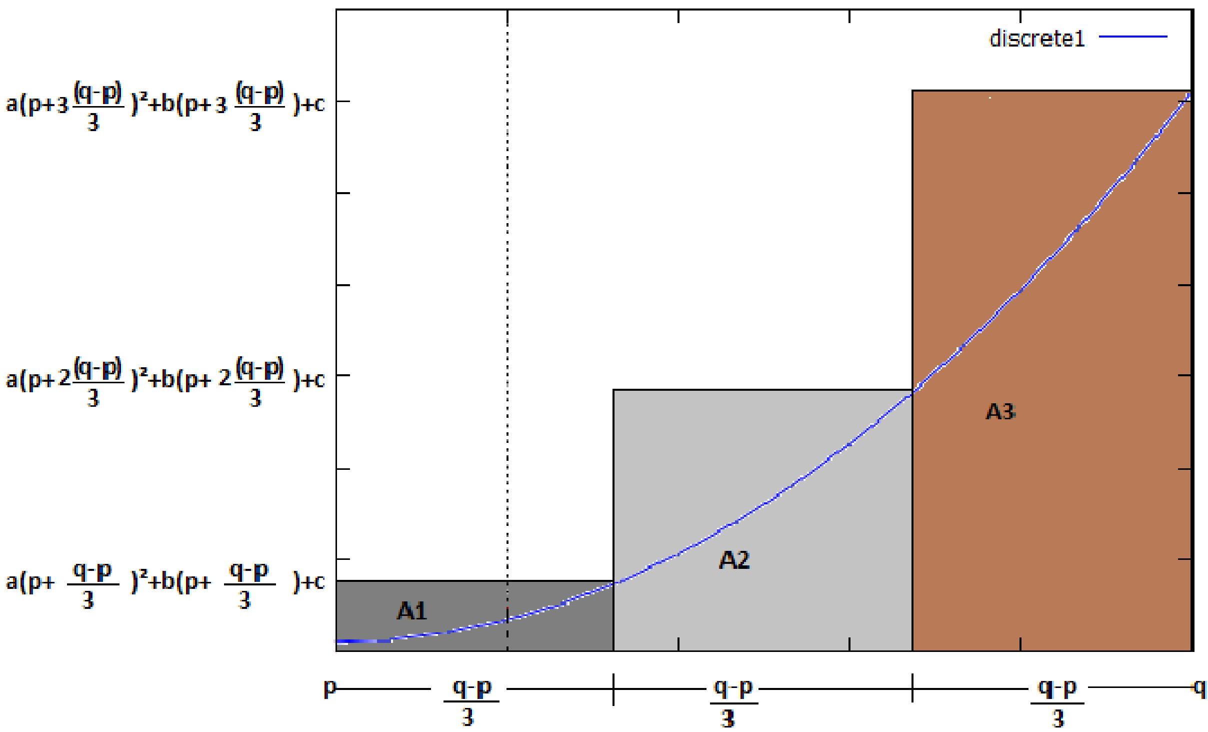
Área total$=(\frac{q-p}{2}).[a.((p+\frac{q-p}{2})^2+(p+2\frac{(q-p)}{2})^2)+b.((p+\frac{q-p}{2}+p+2\frac{(q-p)}{2})+2c]$

Área total$=(\frac{q-p}{2}).[a.(p^2+2.p.(\frac{q-p}{2})+(\frac{q-p}{a})^2+p^2+2.p.2(\frac{q-p}{2})+2^2.(\frac{q-p}{2})^2)+b.(2p+\frac{q-p}{2}(1+2))+2c]$

Área total$=(\frac{q-p}{2}).[a.(2p^2+2.p.(\frac{q-p}{2}).(1+2)+(\frac{q-p}{a})^2(1^2+2^2))+b.(2p+\frac{q-p}{2}(1+2))+2c]$

Podemos notar que sobrou menos área, então vamos dividir em três retângulos, então vamos ter:

Figura 56 – Área da região entre o gráfico da função, da forma $f(x)=ax^2+bx+c$, e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas dividido em três retângulos.



$$A1=(\frac{q-p}{3}).(a.(p+\frac{q-p}{3})^2+b.(p+\frac{q-p}{3})+c)$$

$A2=(\frac{q-p}{3}).(a.(p+2\frac{(q-p)}{3})^2+b.(p+2\frac{(q-p)}{3})+c)$

$A3=(\frac{q-p}{3}).(a.(p+3\frac{(q-p)}{3})^2)+b.(p+3\frac{(q-p)}{3})+c)$

Área total$=A1+A2+A3$

Área total$=(\frac{q-p}{3}).(a.(p+\frac{q-p}{3})^2+b.(p+\frac{q-p}{3})+c)+(\frac{q-p}{3}).(a.(p+2\frac{(q-p)}{3})^2+$ $b.(p+2\frac{(q-p)}{3})+c)+(\frac{q-p}{3}).(a.(p+3\frac{(q-p)}{3})^2+b.(p+3\frac{(q-p)}{3})+c)$

Área total$=(\frac{q-p}{3}).[a.(p+\frac{q-p}{3})^2+b.(p+\frac{q-p}{3})+c+a.(p+2\frac{(q-p)}{3})^2+b.(p+2\frac{(q-p)}{3})+$ $c+a.(p+3\frac{(q-p)}{3})^2+b.(p+3\frac{(q-p)}{3})+c]$

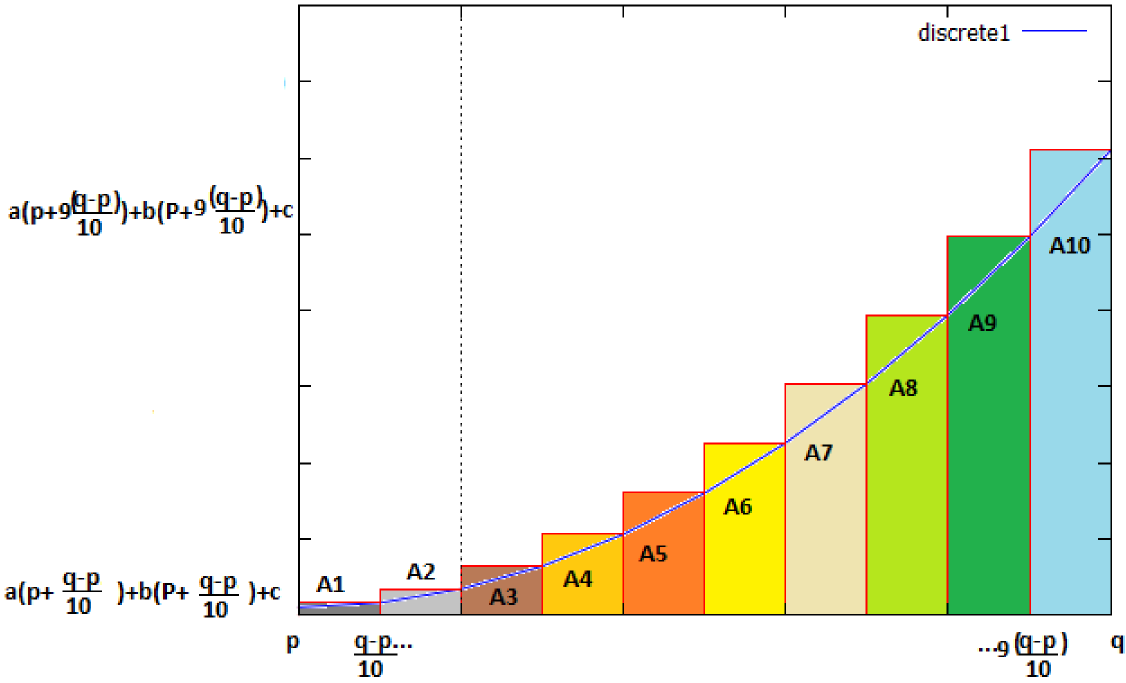
Área total$=(\frac{q-p}{3}).[a.((p+\frac{q-p}{3})^2+(p+2\frac{(q-p)}{3})^2+(p+3\frac{(q-p)}{3})^2)+b.((p+\frac{q-p}{3})+$ $(p+2\frac{(q-p)}{3})+(p+3\frac{(q-p)}{3}))+3c]$

Área total$=(\frac{q-p}{3}).[a.(p^2+2.p.\frac{(q-p)}{3}+(\frac{q-p}{3})^2+p^2+2.p.2.\frac{(q-p)}{3}+2^2.(\frac{q-p}{3})^2+$ $p^2+2.p.3.\frac{(q-p)}{3}+3^2.(\frac{q-p}{3})^2)+b.(3p+\frac{q-p}{3}.(1+2+3))+3c]$

Área total$=(\frac{q-p}{3}).[a.(3p^2+2p.\frac{(q-p)}{3}.(1+2+3)+(\frac{q-p}{3})^2.(1^2+2^2+3^2))+b.(3p+$ $\frac{q-p}{3}.(1+2+3))+3c]$

Note que podemos ter um padrão, ou seja, uma relação entre o número de retângulos e a forma que se calcula a área total.
Se dividíssemos em 10 retângulos, a área total ficará de acordo com o padrão desse modo:

Figura 57 – Área da região entre o gráfico da função, da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas dividido em dez retângulos.

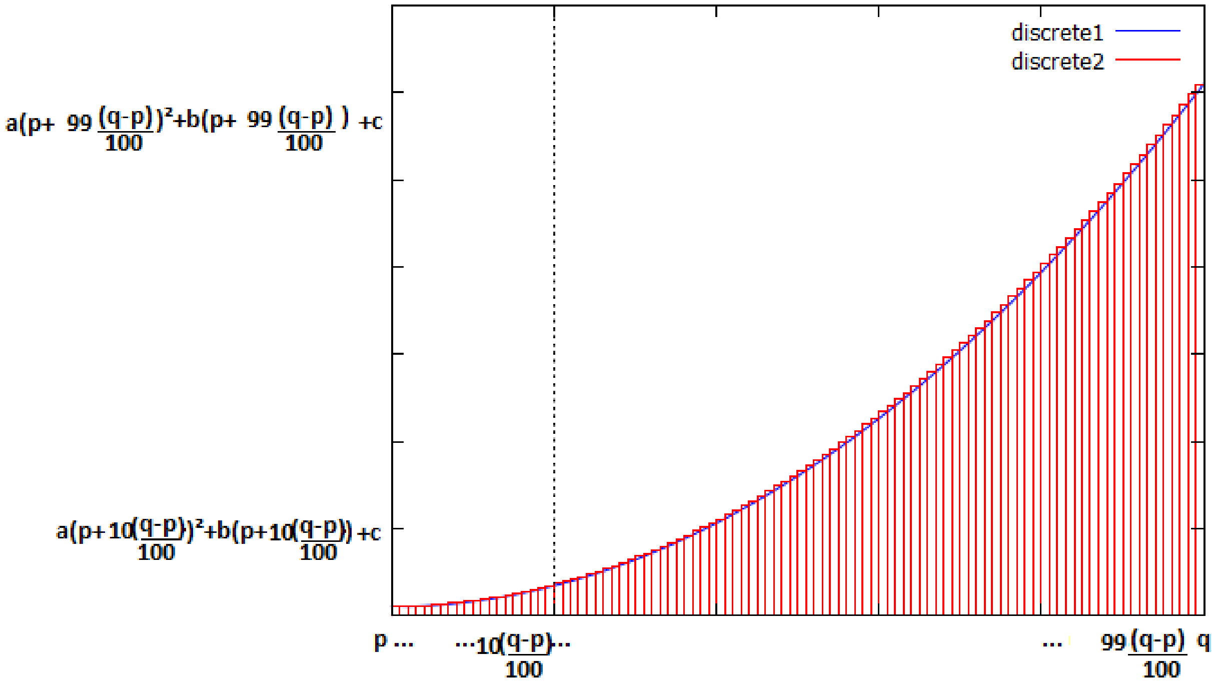


Área total$= A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + A6 + A7 + A8 + A9 + A10$

Área total$=(\dfrac{q-p}{10}).[a.(10p^2 + 2p.\dfrac{(q-p)}{10}.(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) + (\dfrac{q-p}{10})^2.(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2)) + b.(10p + \dfrac{q-p}{10}.(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)) + 10c]$

Se dividíssemos em 100 retângulos, a área total ficará de acordo com o padrão desse modo:

Figura 58 – Área da região entre o gráfico da função, da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas dividido em cem retângulos.

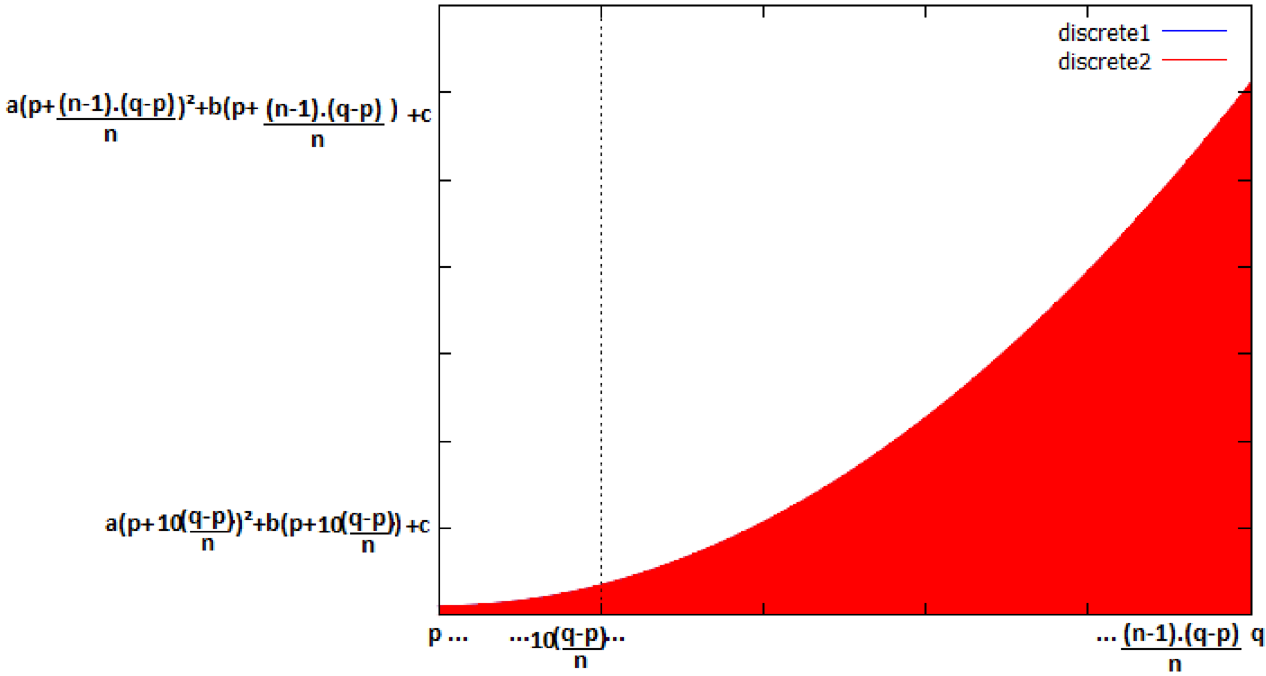


$$\text{Área total} = A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + ... + A96 + A97 + A98 + A99 + A100$$

$$\text{Área total} = (\frac{q-p}{100}).[a.(100p^2 + 2p.\frac{(q-p)}{100}.(1+2+3+4+5+...+96+97+98+99+100) + (\frac{q-p}{100})^2.(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+...+96^2+97^2+98^2+99^2+100^2)) + b.(100p + \frac{q-p}{100}.(1+2+3+4+5+...+96+97+98+99+100)) + 100c]$$

Então, com um número de retângulos n de retângulos muito grande, vamos ter a área do gráfico. Que ficaria assim:

Figura 59 – Área da região entre o gráfico da função, da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas dividido em n retângulos.



Área total$=A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + ... + A96 + A97 + A98 + ... + A(n-1) + An$

Área total$=(\frac{q-p}{n}).[a.(np^2 + 2p.\frac{(q-p)}{n}.(1+2+3+4+5+...+96+97+98+...+(n-1)+n) + (\frac{q-p}{n})^2.(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+...+96^2+97^2+98^2+...+(n-1)^2+n^2)) + b.(np + \frac{q-p}{n}.(1+2+3+4+5+...+96+97+98+...+(n-1)+n)) + nc]$

Área total$=(\frac{q-p}{n}).[a.(np^2 + 2p.\frac{(q-p)}{n}.(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}) + (\frac{q-p}{n})^2.(\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}) + b.(np + \frac{q-p}{n}.(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}) + nc]$

Área total$=(q-p).[a.(p^2 + 2p.\frac{(q-p)}{n^2}.(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}) + (\frac{q-p}{n})^2.(\frac{2n^3+3n^2+n}{6n}) + b.(p + \frac{q-p}{n^2}.(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}) + c]$

Área total$=(q-p).[a.(p^2 + 2p.(q-p).(\frac{n^2}{2n^2}+\frac{n}{2n^2}) + (q-p)^2.(\frac{2n^3}{6n^3}+\frac{3n^2}{6n^3}+\frac{n}{6n^3}) + b.(p + (q-p).(\frac{n^2}{2n^2}+\frac{n}{2n^2}) + c]$

Como n é um número muito grande, no limite os termos, $\frac{n}{2n^2} = 0$, $\frac{3n^2}{6n^3} = 0$ e $\frac{n}{6n^3} = 0$.

Área total$=(q-p).[a.(p^2+2p.(q-p).(\frac{1}{2}+0)+(q-p)^2.(\frac{2}{6}+0+0)+b.(p+(q-p).(\frac{1}{2}+0)+c]$

Área total$=(q-p).[a.(p^2+2p.(\frac{q-p}{2})+\frac{(q-p)^2}{3})+b.(p+(\frac{q-p}{2})+c]$

Área total$=(q-p).[a.(p^2+p.(q-p)+\frac{(q-p)^2}{3})+b.(p+(\frac{q-p}{2})+c]$

Área total$=(q-p).[a.(p^2+pq-p^2+\frac{q^2-2qp+p^2}{3})+b.(p+(\frac{q-p}{2})+c]$

Área total$=(q-p).[a.(pq+\frac{q^2-2qp+p^2}{3})+b.(p+(\frac{q-p}{2})+c]$

Área total$=(q-p).[a.(\frac{3qp+q^2-2qp+p^2}{3})+b.(p+(\frac{q-p}{2})+c]$

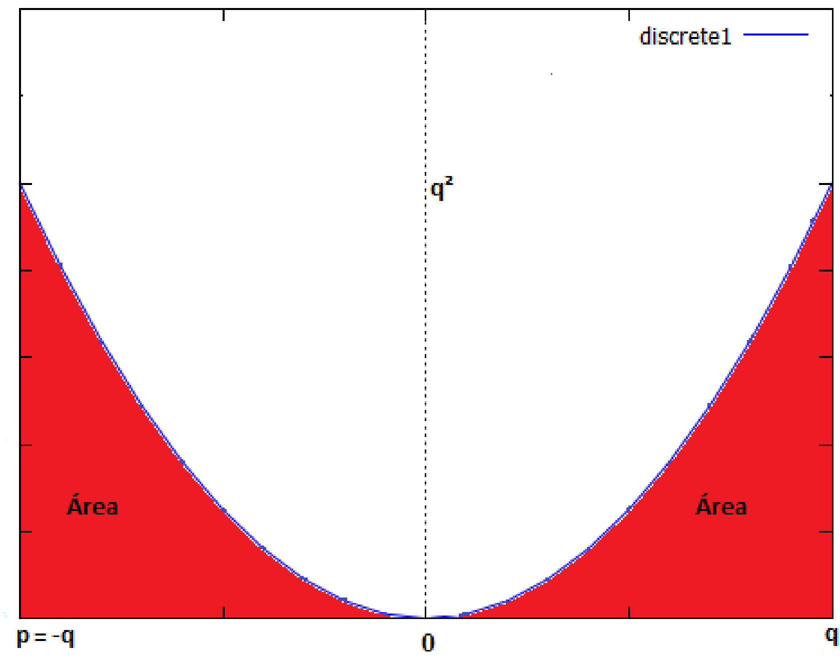
Área total$=(q-p).[a.(\frac{q^2+qp+p^2}{3})+b.(p+(\frac{q-p}{2})+c]$

Área total$=\frac{a}{3}.(q^3-p^3)+\frac{b}{2}.(q^2-p^2)+c.(q-p)$

Essa é a fórmula de qualquer área abaixo do gráfico da função $f(x)=ax^2+bx+c$, limitada pelas retas verticais e perpendiculares ao eixo das abscissas passando por p e $q \in x$, onde a,b,c,p e $q \in \mathbb{Q}$.

Vamos ver como podemos aplicar a fórmula da área da região abaixo do gráfico de uma função quadrática.

Figura 60 – Área da região entre o gráfico da função, da forma $f(x) = x^2$, e as retas verticais e perpendiculares ao eixo das abscissas.



Exemplo 4 (Área da região entre o gráfico da função, da forma $f(x) = x^2$, e a retas horizontais e perpendiculares ao eixo das abscissas.)**.**

Usando a fórmula: temos que, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $p = -q$, então, teremos:

Área total$=\frac{a}{3}.(q^3 - p^3) + \frac{b}{2}.(q^2 - p^2) + c.(q - p)$

Área total$=\frac{1}{3}.(q^3 - (-q)^3) + \frac{0}{2}.(q^2 - (-q)^2) + 0.(q - (-q))$

Área total$=\frac{1}{3}.(q^3 + q^3)$

Área total$=\frac{2.q^3}{3}$

4 CONCLUSÃO

Espera-se que este trabalho possa contribuir, despertar e instigar a curiosidade dos alunos em relação ao conteúdo de geometria e de construções geométricas utilizando régua e compaso de tal forma que eles percebam a importância desse conteúdo para o currículo escolar básico.

Ao aplicar os métodos abordados, o aluno será desafiado a resolver variados problemas com criatividade, desenvolvendo basicamente o pensamento crítico, para confrontar o conteúdo matemático com sua realidade.

Podemos destacar neste trabalho, o resgate desse método simplificado de solução de problemas geométricos com régua e compasso, pois acreditamos que os docentes e discentes envolvidos com essa metodologia compartilharão os conhecimentos adquiridos propiciando uma aula mais dinâmica e interativa.

Esse método de cálculos de áreas de regiões limitadas pelas funções usadas no trabalho tem resultados que podem ser cáculados usando a integral de Riemann abordado no Cálculo Diferencial e Integral dado no ensino superior.(GUIDORIZZI, 2000)

Podemos ainda, calcular com esse método de construções geométricas com régua e compasso, áreas de um triângulo qualquer, com soma e ou subtração de áreas das regiões formadas abaixo de mais de duas funções afins.

Dessa forma, observa-se uma grande variedade de problemas que podem ser resolvidos com esse método de construções geométricas.

Diante disso, o professor poderá usar os métodos que mostramos nesse trabalho para tornar a sua aula cada vez mais interessante, procurando sempre novos desafios nessa área da geometria e ter plena consciência que precisa educar para tornar um cidadão crítico.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 7. ed. Rio de janeiro: SBM, 2004.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, vol. 1**. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2009.

_____. **Números e funções reais**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**. [S.l.]: Volume, 2006.

NETO, A. C. M. Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana. **Coleção do Professor de Matemática**, v. 2, 2012.

NETO, A. C. M.; CAMINHA, A. **Geometria (Coleção PROFMAT)**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Editora da SBM, 2013.

WAGNER, E. Uma introdução às construções geométricas. **Rio de Janeiro**, 2009.

WAGNER, E.; CARNEIRO, J. P. Q. **Construções geométricas**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.