



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JOSÉ GOMES TAVEIRA NETO

**A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DO CÁLCULO
DIFERENCIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

PALMAS - TO
2016

JOSÉ GOMES TAVEIRA NETO

**A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DO CÁLCULO
DIFERENCIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a.HELLENA CRISTINA FERNANDES APOLINÁRIO.

PALMAS - TO
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

N469i Neto, José Gomes Taveira.

A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DO CÁLCULO DIFERENCIAL NA
EDUCAÇÃO BÁSICA. / José Gomes Taveira Neto. – Palmas, TO, 2016.
48 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins
– Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado)
Profissional em Matemática, 2016.

Orientadora : Hellen Christina Fernandes Apolinário

1. Cálculo Diferencial. 2. Limite. 3. Derivada. 4. Educação Básica. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).


JOSÉ GOMES TAVEIRA NETO

A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DO CÁLCULO DIFERENCIAL NA
EDUCAÇÃO BÁSICA

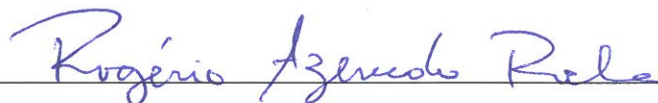
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática. Orientadora: Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário.

Aprovada em 19 / 08 / 2016

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (Orientadora-UFT)



Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)



Prof. Dr. Cláudio de Castro Monteiro (IFTO)

*A minha mãe Maria Gomes da Silva.
A minha esposa Luciene G. R. Taveira
Aos meus filhos, Luiz, Antonio e Arthur.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, a quem credito tudo que sou e que faço a ele toda honra e toda glória.

A minha mãe, que me deu além da vida, o entendimento que a educação muda e pode mudar não só a nossa realidade mas o nosso caráter e nossa forma de encarar a vida.

A minha esposa, que fielmente me incentivou e me auxiliou em todos os momentos dessa árdua caminhada e sempre acreditou em mim, mesmo nos momentos que até eu mesmo não mais acreditava.

A igreja Metodista de Palmas pelas orações, em especial ao meu guia espiritual Pastor Everson Medeiros Dias.

A minha orientadora Dra.Hellena Christina Fernandes Apolinário, que tornou possível a execução desse trabalho através da sua rica contribuição tanto acadêmica como humana sempre me incentivando e flexibilizando seus horários.

A todos os meus amigos de turma em especial o Prof. Rawlinson Silva, companheiro fiel de estudos a quem devo boa parte do conhecimento que adquiri durante esse programa de mestrado.

O sucesso é ir de fracasso em fracasso sem perder o entusiasmo.
(Winston Churchill)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo expor a importância da introdução ao estudo do cálculo diferencial, através de situações problemas vivenciadas na prática docente, desde o ensino fundamental até o ensino médio. Inicialmente expomos como surgiu historicamente o cálculo diferencial, logo em seguida apresentamos noções básicas de cálculo direcionadas para estudantes do ensino médio, abordando tanto o aspecto geométrico como o algébrico. Algumas atividades foram trabalhadas em sala de aula por alunos tanto de ensino médio quanto de ensino fundamental em que a noção tanto de limite como de derivada já se faz presente em conteúdos abordados nesses ciclos ressaltando a importância desse estudo na educação básica. Por fim, é ressaltada aplicações de cálculo diferencial, por meio de exercícios propostos, em algumas disciplinas do ensino básico, entre elas a química, física e biologia e até mesmo no exame nacional do ensino médio ENEM.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial, Limite, Derivada.

ABSTRACT

This work aims to expose the importance of the introduction to the study of differential calculus through problem situations experienced in teaching practice, from elementary school through high school . Initially we set out as historically appeared differential calculus, then immediately present basics of calculation directed to high school students, addressing both the geometric aspect as the algebraic. Some activities were worked in the classroom for students in high school and elementary school in the sense both limit as derived already present on content covered in these cycles emphasizing the importance of this study in basic education. Finally, it is emphasized differential calculus applications through the exercises, in some disciplines of basic education, including chemistry, physics and biology and even in the national high school exam ENEM.

Keywords: Differential Calculus , Limit , Derivative.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Quadrado Inscrito	16
Figura 2 – Octógono Inscrito	16
Figura 3 – Hexadecágono Inscrito	16
Figura 4 – Paradóxo de Zenão	17
Figura 5 – Área abaixo de uma curva I	18
Figura 6 – Área abaixo de uma curva II	18
Figura 7 – Método da tangente de Newton	19
Figura 8 – Limite de uma função	20
Figura 9 – Limite Lateral	22
Figura 10 – Limite Inexistente I	22
Figura 11 – Limite Inexistente II	23
Figura 12 – Derivada de uma função	23
Figura 13 – Atividade em sala de aula 1	28
Figura 14 – Atividade em sala de aula 2	29
Figura 15 – Atividade em sala de aula 3	30
Figura 16 – Gráfico item b	32
Figura 17 – Gráfico item c	33
Figura 18 – Gráfico atividade 2	34
Figura 19 – Taça gerada pela rotação de uma parábola	35
Figura 20 – Tabela ENEM	36
Figura 21 – Função Quadrática	36

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de x tendendo a 2 pela direita e pela esquerda	20
Tabela 2 – Função Quadrática	21

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
UFT	Universidade Federal do Tocantins
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacional do Ensino Médio
U.A	Unidade de Área
PG	Progressão Geométrica

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
Σ	Somatório
$f'(x)$	Derivada da função de uma variável $f(x)$ com relação à variável x
$A\Delta$	Área do triângulo
Δy	Variação no eixo y
Δx	Variação no eixo x

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	UMA BREVE HISTÓRIA DO SURGIMENTO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E NOÇÕES BÁSICAS DE CÁLCULO DIFE- RENCIAL	16
2.1	O cálculo de Leibniz e Newton	17
2.2	O método de Leibniz	18
2.3	O método de Newton	19
2.4	Noções básicas de cálculo	20
2.5	Existência do limite de uma função	21
2.6	Casos em que não existe o limite de uma função	22
2.7	Noções e derivadas	23
3	O ESTUDO DO CÁLCULO NA EDUCAÇÃO BÁSICA	25
3.1	Desafios e barreiras	25
3.2	Noções de cálculo no ensino fundamental	26
3.2.1	Como justificar igualdades do tipo $1/3 = 0,3333..$ ou $1 = 0,9999..$?	26
3.2.2	Uma forma diferente de calcular áreas de figuras planas	27
3.2.3	O estudo do cálculo no ensino médio: A derivada como taxa de variação	31
3.2.4	Cálculo diferencial e ENEM, é possível?	34
4	APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL EM OUTRAS DISCIPLINAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA	38
4.1	Aplicações do cálculo nas ciências biológicas	38
4.2	Aplicações do cálculo nas ciências Físicas	39
4.3	Aplicações do cálculo nas ciências Químicas	40
5	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS	43
	APÊNDICES	44
	APÊNDICE A – TEOREMAS E DEMONSTRAÇÕES	45

1 INTRODUÇÃO

O cálculo diferencial é uma das ferramentas mais completas e dinâmica que existe no estudo da matemática e possui aplicações em diversas áreas. O ensino da matemática na educação básica deve servir como alicerce em todos âmbitos de tal forma que assegure um entendimento dessa disciplina tanto na sua forma abstrata como na sua essência que nada mais é que usá-la como ferramenta na resolução de problemas. Baseado nessa premícia e na minha prática docente, que vai desde o ensino básico ao ensino superior, sempre questionei porque o "desprezo"ao cálculo diferencial no ensino básico, e qual o reflexo disso no ensino superior.

Nesse sentido Junior (2014) coloca que:

Não propomos inserir Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio em sua completude e sim ambientar os estudantes a interagirem de modo dinâmico com ideias que tem o intuito de desenvolver aptidões para uma melhor compreensão dos conceitos abordados no estudo dos limites, derivadas e integral. Propomos um estudo livre de formalizações e muito mais prático, algo que fuja das técnicas e priorize a reflexão dos conceitos por parte dos alunos, familiarizando-os com novas simbologias e que desperte a curiosidade nas inúmeras aplicações dessa disciplina (JUNIOR, 2014, p. 02).

Brito (2013), apresenta o cálculo diferencial como ferramenta interdisciplinar para o ensino médio que dever ser usado principalmente na resolução de exercícios de competências interdisciplinares.

Pascoal (2014) entende que:

Como o Cálculo Diferencial e Integral já fez parte do currículo escolar, caso fosse inserido no projeto pedagógico das escolas, novamente, e trabalhado efetivamente em sala de aula, poderia tornar a prática pedagógica do ensino da matemática mais proveitosa(PASCOAL, 2014, p. 14).

O nosso objetivo é ressaltar a importância da introdução dos conceitos básicos de cálculo diferencial desde o ensino fundamental até o ensino médio de uma forma contextualizada e aproveitando os próprios conteúdos do ensino básico para aprofundar os conhecimentos dos alunos através dos conhecimentos iniciais de cálculo diferencial.

No capítulo 1 apresentamos um breve resgate histórico do cálculo que traz um pouco de como foi o seu surgimento e quais os principais nomes que contribuíram tanto para sua origem, quanto para seu desenvolvimento.

No capítulo 2 ressalto situações vivenciadas em sala de aula que nos remetem ao uso do cálculo como uma ferramenta a mais na resolução de problemas que vão desde o

ensino fundamental ao ensino médio e que está presente até mesmo no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O capítulo 3 é destinado a propostas de trabalhos interdisciplinares do cálculo em outras disciplinas do currículo básico regular, como a física, química e biologia.

E por fim, nas considerações finais expomos os pontos positivos e negativos da inserção do cálculo no ensino básico, ressaltando os benefícios bem como as limitações da inserção desse conteúdo nesse ciclo da educação.

2 UMA BREVE HISTÓRIA DO SURTI- MENTO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E NOÇÕES BÁSICAS DE CÁLCULO DI- FERENCIAL

Não é de hoje que a ideia do infinito sempre atrai e fascina os matemáticos, na Grécia antiga surgiram os primeiros conceitos filosóficos, que mais tarde serviriam de base para estudos preciosos na área das ciências exatas, em especial, a matemática. Como sempre ocorre nessa ciência, problemas práticos começaram a instigar estudiosos a, além de formulá-los, também produzir uma resposta capaz de convencer todos que se deparavam com tais questionamentos.

Atribui-se a Arquimedes a primazia, mesmo que inconsciente, do uso de um dos conceitos mais importantes do cálculo diferencial, o conceito de limite, motivado por um problema da quadratura do círculo, que segundo Roque e Carvalho (2012) “fazer a quadratura de uma área limitada por uma curva plana significa construir um quadrado cuja área seja igual à da figura”.

A idéia de Arquimedes era aproximar a área do círculo a área de polígonos inscritos, a começar pelo quadrado (fig. 1), e na medida que duplica-se os lados desse polígono transformando-o em um octógono (fig.2), em um hexadecágono (fig.3) e assim sucessivamente, a área do polígono duplicado se aproxima cada vez mais da área do círculo, portanto, quanto mais se aumenta o número de lados do polígono, mais perto da área do círculo ficará, o que hoje entendemos, que a área de um círculo é o limite das áreas dos polígonos regulares a ele inscritos, quando o número de lados n , tende a infinito.

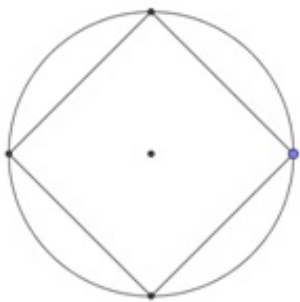


Figura 1 – Quadrado Inscrito

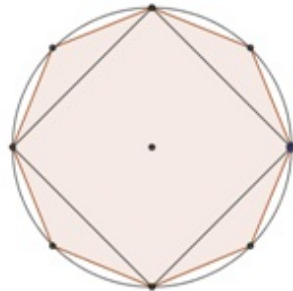


Figura 2 – Octógono Inscrito

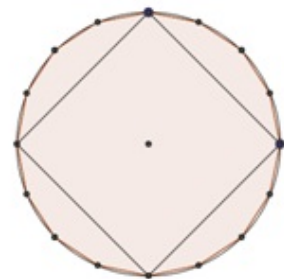


Figura 3 – Hexadecágono Inscrito

Problemas que se opunha ao senso comum, os chamados paradoxos, também de-

ram uma grande contribuição para o surgimento do estudo dos limites, dentre muitos, o paradoxo de Zenão de Eléia no Século IV a.C, ilustra de uma forma muito simples que somas infinitas podem convergir para valores finitos, algo inaceitável para época. Nesse paradoxo, Zenão tenta mostrar como seria impossível um corredor que parte do ponto A chegar no ponto B percorrendo sempre a metade do caminho restante (fig.4). Hoje sabemos, de uma forma muito clara, que Zenão se deparou com o limite da soma dos infinitos termos de uma PG de razão igual a $1/2$.

Segundo Eléia (1976) “O que se move deve sempre alcançar o ponto médio antes do ponto final”

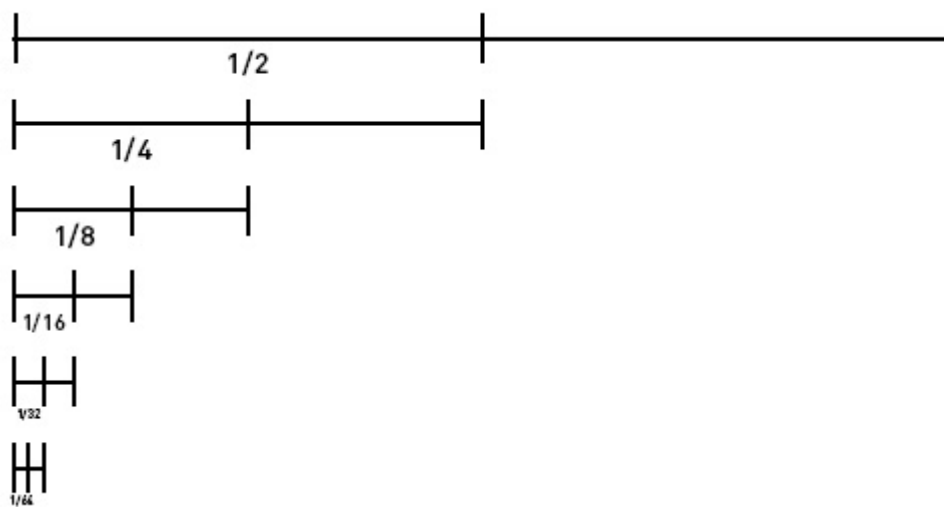


Figura 4 – Paradoxo de Zenão

Quase dois mil anos depois o problema da quadratura seria, mais uma vez, uma porta de entrada para o surgimento do cálculo diferencial através de Pierre de Fermat e René Descartes que estavam interessados em obter a quadratura de curvas, que diferentemente das obtidas por Arquimedes, eram curvas que vai ao infinito o que é o caso por exemplo da parábola.

Assim como Arquimedes, Fermat aproximou a área sob uma curva como sendo a soma de uma infinidades de polígonos, dessa vez retângulos cujas bases formavam uma progressão geométrica decrescente (Fig.5) e que pouco tempo depois associados a problemas de encontrar tangentes a curvas e áreas sob curvas, viriam influenciar fortemente os estudos de Newton e Leibniz denominados os inventores do cálculo diferencial.

2.1 O cálculo de Leibniz e Newton

O alemão Gottfried Leibniz por volta de 1675 baseado em estudos anteriores de Cavalieri, propôs um método para quadratura de curvas com notações matemáticas cri-

adas por ele e usadas até hoje, como é o caso da palavra função, designando a “função” que uma reta desempenha em uma curva, como por exemplo, a de ser tangente a curva.

2.2 O método de Leibniz

Leibniz mostrou que o problema da quadratura de curvas poderia ser solucionado através de somas infinitesimais de áreas retangulares. Tomando-se uma curva qualquer (figura 5), a área abaixo da curva (quadratura da curva) pode ser calculada, de forma aproximada, somando-se as áreas de retângulos com bases congruentes.

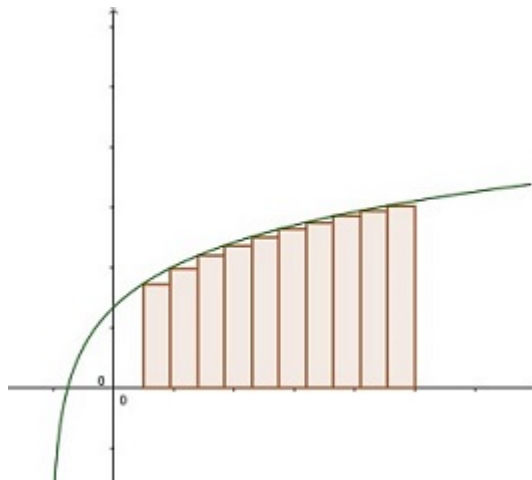


Figura 5 – Área abaixo de uma curva I

Dessa forma, Leibniz notou que quanto maior a quantidade de retângulos (figura 6), melhor seria a aproximação da quadratura da curva. Leibniz também foi um dos primeiros a observar que encontrar retas tangentes a curvas seria a operação inversa de determinar sua quadratura, o que hoje entendemos como os processos de derivação e integração respectivamente.

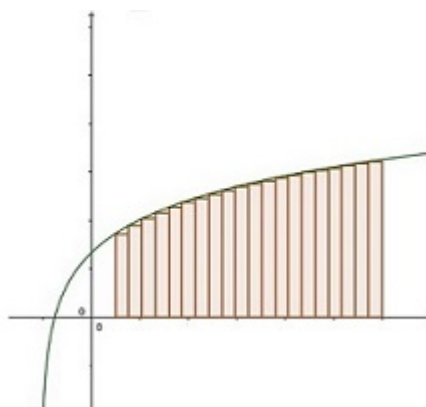


Figura 6 – Área abaixo de uma curva II

2.3 O método de Newton

Diferentemente de Leibniz, o cálculo desenvolvido por Newton tinha como base a física. Newton enxergava uma curva como sendo um movimento contínuo de um ponto no tempo, método chamado por ele de fluxões e fluentes. Nesse sentido Roque e Carvalho (2012) destaca que:

A taxa de variação de uma quantidade com o tempo era chamada de fluxão. Se v, x, y e z são quantidades fluentes, seus fluxões eram designados respectivamente por $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$, e \dot{z} . O problema fundamental do cálculo seria então: dada a relação entre quantidades fluentes, encontrar a relação entre seus fluxões, e vice e versa (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 288).

A partir do movimento de uma partícula de um ponto P para um ponto P' , Newton considerou os fluentes como sendo os aumentos das abscissas e ordenadas gerados pelo deslocamento da partícula e os fluxões e como sendo os comprimentos dos segmentos PD e $P'D$, respectivamente (figura 7).

$$\frac{PB}{AB} = \frac{P'D}{PD} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$$

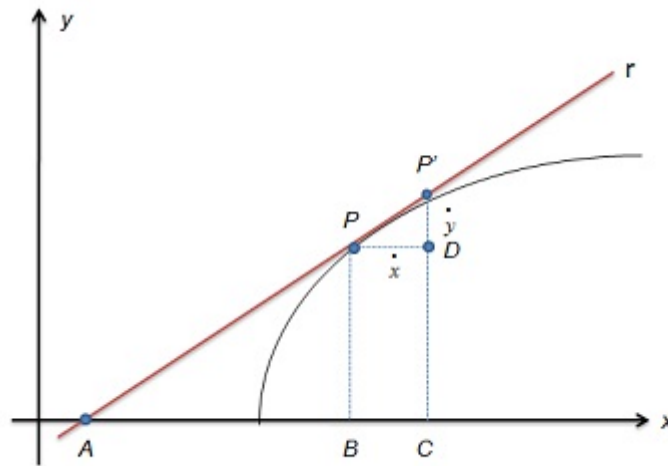


Figura 7 – Método da tangente de Newton

Sendo o deslocamento da partícula P para P' muito pequeno, os triângulos ABP e PDP' são semelhantes e a razão de semelhança desses triângulos, para um P cada vez mais próximo de P' , se aproximava cada vez mais do coeficiente angular de uma reta r tangente a curva, ou seja:

Partindo desse princípio, Newton era capaz de obter, através do coeficiente angular, a equação de uma reta tangente a uma curva em um ponto P qualquer da mesma, principal problema enfrentado pelos matemáticos da época. A formalização de Leibniz, junto com a aplicabilidade de Newton na física foram os fatores preponderantes para ao longo da história do cálculo serem a eles atribuídos o título de criadores do cálculo diferencial.

2.4 Noções básicas de cálculo

Segundo Lima (2004)

Diz-se que um número real L é limite de $f(x)$ quando x tende para a e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, quando para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter um $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ ” (LIMA, 2004, p. 13).

Para entendermos melhor a definição dada acima considere o gráfico da função $f(x) = 2x - 4$ (figura 8), vamos analisar o que acontece com a imagem dessa função quando x se aproxima de um valor arbitrário, por exemplo $x = 2$.

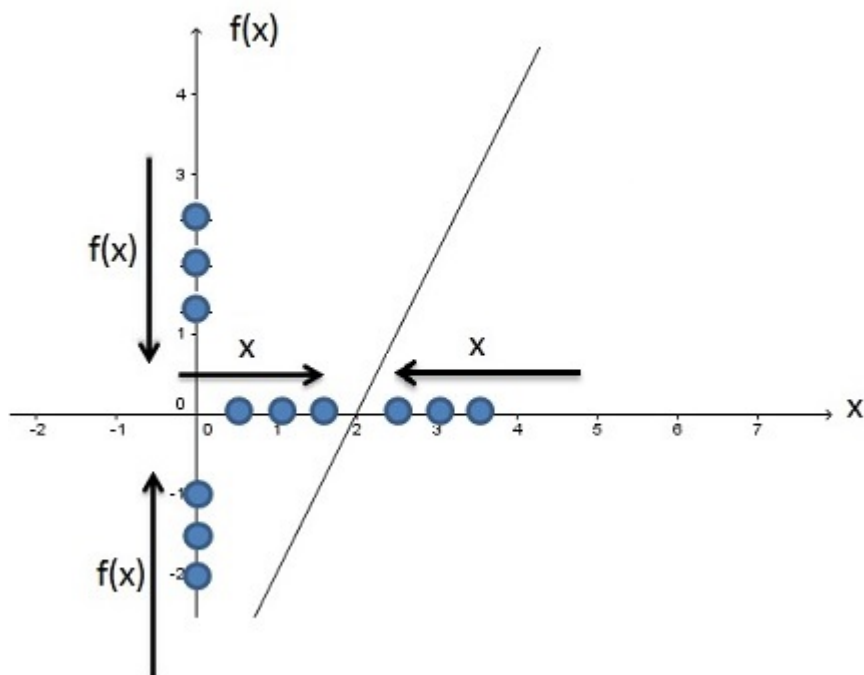


Figura 8 – Limite de uma função

Tabela 1 – Valores de x tendendo a 2 pela direita e pela esquerda

(a)		(b)	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,91	- 0,18	2,09	0,18
1,93	- 0,14	2,07	0,14
1,95	- 0,1	2,05	0,1
1,97	- 0,06	2,03	0,06
1,99	- 0,02	2,01	0,02

Notemos que quanto mais os valores de x se aproximam de 2 (x tende a dois) pela esquerda ou pela direita, mais próximos de zero se aproximam os valores de $f(x)$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$.

2.5 Existência do limite de uma função

Dizemos que o limite de uma função $f(x)$ quando x tende a certo valor a existe e é igual a determinado número L se:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

em que: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ são os limites laterais a esquerda e a direita da função $f(x)$.

Exemplo: Observe o comportamento da função $f(x) = x^2 - 7x + 10$ quando os valores de x se aproximam pela esquerda do 5 (Tabela 2 (a)) e quando os valores de x se aproximam pela direita do 5 (Tabela 2 (b)).

Tabela 2 – Função Quadrática

(a)		(b)	
x	f(x)	x	f(x)
5,30	0,99	4,80	0,56
5,20	0,64	4,90	0,29
5,10	0,31	4,95	0,14
5,05	0,15	4,98	0,06
5,02	0,06	4,99	0,03

Podemos observar que a medida que se aproxima de $x = 5$ a partir da esquerda e da direita, $f(x)$ sempre tende a 0, então os dois limites laterais existem e são iguais, o que nos permite concluir que:

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0.$$

Graficamente temos:

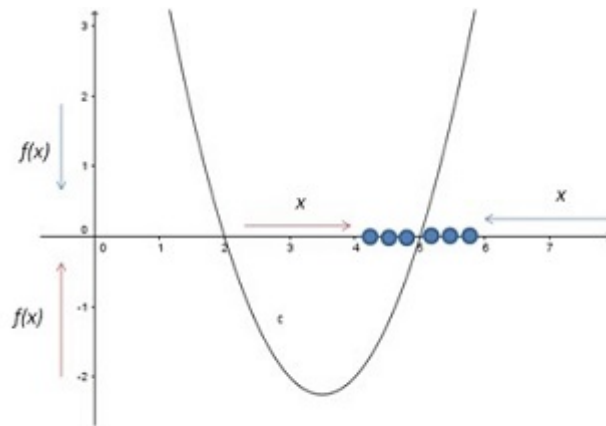


Figura 9 – Limite Lateral

2.6 Casos em que não existe o limite de uma função

Em geral, as funções que crescem ou decrescem indefinidamente não possuem limites, assim como funções que possuem limites laterais diferentes, também não possuem um limite. Vejamos alguns exemplos de funções que não possuem limites em $x = 0$

Exemplo 1: $f(x) = \cos(1/x)$, note que o gráfico oscila sem tender para um limite.

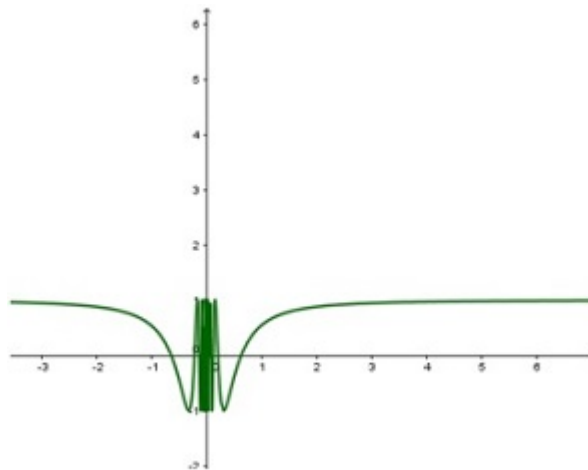


Figura 10 – Limite Inexistente I

Exemplo 2: $f(x) = (1/x^2)$, note que o gráfico cresce e decresce indefinidamente.

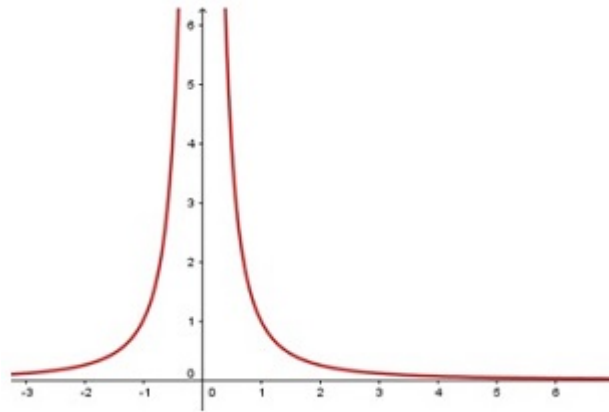


Figura 11 – Limite Inexistente II

2.7 Noções e derivadas

O conceito de derivada está relacionado a taxa de variação de uma função, segundo Lima (2004), A derivada de uma função f no ponto a é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se esse limite existir, neste caso dizemos que f é derivável no ponto a .

Representação gráfica:

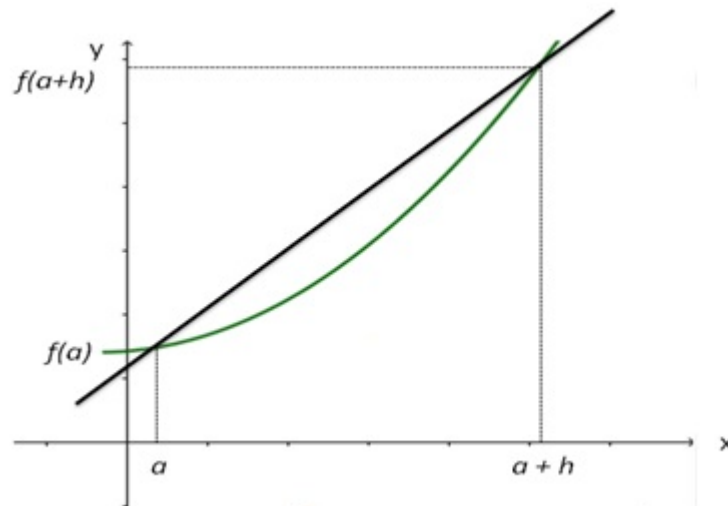


Figura 12 – Derivada de uma função

Ainda sobre o conceito de derivada Kelley (2013), destaca que:

Uma função é diferenciável em um determinado valor de x se você puder obter a derivada da função nesse valor de x . Ou seja, $f(x)$ é diferenciável em $x = c$ se existe $f'(c)$. Diz-se que uma função cuja derivada não existe em um valor específico de x é não-diferenciável nessa localização (KELLEY, 2013, p. 13).

Regras operacionais: (Demonstrações: Ver Apêndice A)

a) Regra da potência: A derivada do termo ax^n (em relação a x), onde a e n são números reais, é $(an)x^{n-1}$.

b) Regra do produto: Se uma função derivável $h(x)$ é dada pelo produto de outras duas funções também deriváveis $f(x)$ e $g(x)$, com $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, então a derivada $h'(x)$ será da forma:

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

c) Regra do quociente: Se uma função derivável $h(x)$ é dada pelo quociente de outras duas funções também deriváveis $f(x)$ e $g(x)$, isto é $h(x) = f(x)/g(x)$, então a derivada $h'(x)$ será da forma:

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

d) Regra da cadeia: A derivada de uma função composta $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis é dada por

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

3 O ESTUDO DO CÁLCULO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

3.1 Desafios e barreiras

Ao longo da história do ensino da matemática no Brasil noções de cálculo diferencial se fez presente em alguns períodos como disciplina obrigatória do currículo da educação básica, mas com o movimento da matemática moderna nas décadas de 70 e 80 esses conceitos foram excluídos do programa da educação básica entendendo-se que trata-se de conteúdos direcionados apenas para alunos de ensino superior. Segundo Avila (1991)

O Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual (AVILA, 1991, p. 02).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, PCNEM (2002) o ensino da matemática na educação básica, prevê que:

Cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento (PCNEM, 2002, p. 41).

Com a grande gama de conteúdos previstos para o ensino da matemática no ensino básico os professores se deparam com um calendário que não contempla na totalidade esses conteúdos, ou que obriga-o a expor de forma desarticulada e com pouco significado prático os referidos temas. Os poucos livros didáticos de matemática da educação básica que trazem noções de cálculo diferencial, preferem deixar esses tópicos como algo facultativo, que só deve ser lecionado se o calendário for flexível, outro fator que pondera contra a inserção desse conteúdo em algum momento desse ciclo. Nesse sentido Avila (1991) destaca

É gratificante constatar que alguns autores já estão incluindo a derivada em seus livros para o ensino médio, de maneira sensata, breve e equilibrada: mas, infelizmente, ainda na terceira série, já no final do curso, quando pouco se pode aproveitar desse estudo (AVILA, 1991, p. 37).

Considerando o que foi exposto, alguns questionamentos são necessários. Como e em que ciclo podemos introduzir algumas noções de cálculo, no ensino básico? Quais os ganhos que esses conceitos podem trazer a curto, médio ou longo prazo aos alunos? No advento do ENEM, o cálculo pode ser visto como uma ferramenta a mais para os alunos

que prestam o exame ? As disciplinas afins também podem ser favorecidas com o estudo das noções de cálculo na educação básica?

Esses questionamentos foram, ao longo da minha prática docente, tornado-se cada vez mais frequentes e algumas motivações vindas de situações de sala de aula são expostas a seguir como forma de justificar tais questionamentos e claro reafirmar a importância do estudo do cálculo diferencial na educação básica.

3.2 Noções de cálculo no ensino fundamental

A matemática do ensino fundamental constitui a base do estudo de toda matemática da educação básica, é nesse ciclo que aprende-se o cálculo algébrico e os principais elementos de geometria. As noções de cálculo nesse ciclo deve ser consequência de situações vivenciadas na prática docente, que leve ao próprio aluno romper com algumas ideias vindas dos ciclos iniciais, na expectativa de serem, de alguma forma, melhor contextualizadas nos ciclos vindouros.

Inúmeras situações, tanto na álgebra quanto na geometria, remetem a conceitos intimamente relacionados ao cálculo, por exemplo o conceito de limites e até mesmo de derivadas na sua forma mais comum, como taxa de variação. Dentro dessas experiências, vivenciadas na prática de sala de aula, listo algumas delas que podem servir como ferramenta para a introdução do estudo do cálculo no ensino fundamental.

3.2.1 Como justificar igualdades do tipo $1/3 = 0,3333..$ ou $1 = 0,9999... ?$

Essa situação é muito corriqueira e estimulante no ensino fundamental, geralmente ela aparece aos alunos do sétimo ano, e representa a primeira barreira a ser derrubada para entendimento do conceito de quantidades infinitesimais e é claro de um leve entendimento de limites. Na primeira delas temos um fração ordinária irredutível igual a uma fração decimal, já na segunda situação temos um número inteiro igual a uma fração decimal. As expressões que aparecem no segundo membro dessas igualdades são rotuladas de “Dizimas Periódicas”, que devem ser interpretadas de forma correta para que as igualdades façam sentido. Vejamos como isso é possível:

Uma fração decimal é uma fração ordinária cujo denominador é uma potência de 10, por exemplo, $5/10, 13/100, 35/1000$. As frações ordinárias podem ser escritas na forma de fração decimal, isso pode ser feito de uma forma simples, basta apenas encontrar frações equivalentes com denominadores sendo potências de 10, como podemos observar nos exemplos abaixo:

$$\text{a) } \frac{7}{4} = \frac{175}{100}$$

$$\text{b) } \frac{9}{2} = \frac{45}{10}$$

$$c) \frac{45}{200} = \frac{235}{1000}$$

O problema se encontra em, como encontrar um fração decimal que represente alguns tipos de frações ordinárias do tipo $1/3$, $7/9$, $3/11$, ou seja, as dízimas periódicas.

Vejam os casos da fração $1/3$:

Podemos escrever 1 como sendo 1,0 ou 1,00 ou 1,000... quantos zeros quisermos e logo em seguida efetuar a divisão por 3. Observe:

$$a) 1,0 = 3,0,3 + 0,1$$

$$b) 1,00 = 3,0,33 + 0,01$$

$$c) 1,000 = 3,0,333 + 0,001$$

Note que a fração ordinária $1/3$ pode ser escrita da forma $3/10$ (fração decimal) com um erro de 0,1, da mesma forma também pode ser escrita na forma $33/100$ com um erro de 0,01 e assim sucessivamente de tal forma que a fração $1/3$ pode ser escrita da forma de fração decimal, $3/10$, $33/100$, $333/1000$, com período 3 repetido n vezes, sendo o erro cometido uma fração cujo numerador é 1 e o denominador é $1 \cdot 10^n$.

Nesse momento da análise o conceito de limite surge de forma sutil e jamais deve ser desprezado pois o aluno deve ser induzido a concluir que quanto maior o valor de n , menor será o erro cometido ou seja melhor será a aproximação para a fração ordinária em questão, portanto o erro pode ser tão pequeno quanto se queira.

É importante afirmar ao aluno que as frações decimais da forma:

$$3/10 \quad 33/100 \quad 333/1000 \dots \text{etc}$$

representam valores aproximados para a fração ordinária $1/3$ por isso as reticências no final do símbolo 0,333... para indicar que temos uma sequência infinita de frações decimais que representam a fração $1/3$. De forma análoga obtemos a outra igualdade citada, $1 = 0,9999\dots$, entende-se que a sequência infinita de frações decimais:

$$0,90,990,9990,9999\dots \text{etc}$$

são valores aproximados para o número 1.

3.2.2 Uma forma diferente de calcular áreas de figuras planas

Um conceito que surge nos ciclos básicos do ensino fundamental é de cálculo de áreas de figuras planas e que representa uma ótima oportunidade para introduzir algumas noções básicas de cálculo. Mas assim como vários conceitos matemáticos desse ciclo, o cálculo de áreas é inserido na maioria das vezes através de fórmulas prontas que fazem o aluno pensar mecanicamente e de forma única.

A ideia de calcular a área de figuras planas é uma das mais utilizadas no cálculo por meio do processo de integração, que por sua vez também nos remete ao processo de somas infinitesimais. Ao introduzir essa técnica do cálculo de áreas de figuras planas no ensino fundamental, a mesma pode ser estendida para o cálculo da área sob o gráfico de funções já no ensino médio. Observe as seguintes situações proposta em uma sala de ensino fundamental para alunos do oitavo ano:

Atividade 1: Aproximando a área de um triângulo através de áreas de retângulos. Calcule a área do triângulo da figura abaixo:

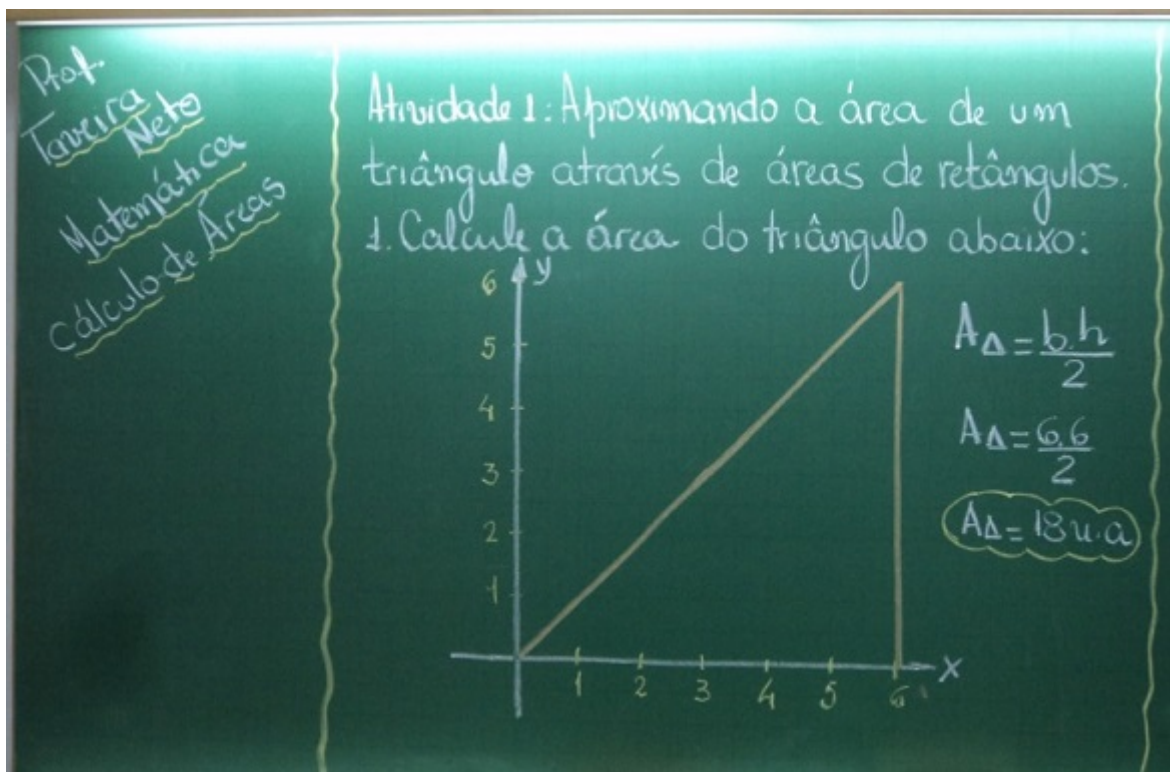


Figura 13 – Atividade em sala de aula 1

Nesses tipos de exercícios o aluno é orientado a usar a fórmula do cálculo da área do triângulo, procedimento feito de uma forma simples:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 u.a$$

Nesse momento foi feita a seguinte pergunta aos alunos: como encontrar esse valor, ou algo bem próximo a ele, sem usar a fórmula da área? Esse questionamento vem seguido de uma sugestão bem peculiar para o momento: “Vamos aproximar a área desse triângulo a áreas de retângulos”.

Em um primeiro momento temos uma aproximação da área por meio de 6 subdivisões da base do triângulo em retângulos de bases congruentes medindo 1u.c, sendo a

primeira subdivisão o segmento de reta com extremos nos pontos (0,0) e (1,0), portanto uma aproximação da área seria feita da forma:

$$\text{Área1} = 1x0 = 0.u.a$$

$$\text{Área2} = 1x1 = 1.u.a$$

$$\text{Área3} = 1x2 = 2.u.a$$

$$\text{Área4} = 1x3 = 3.u.a$$

$$\text{Área5} = 1x4 = 4.u.a$$

$$\text{Área6} = 1x5 = 5.u.a$$

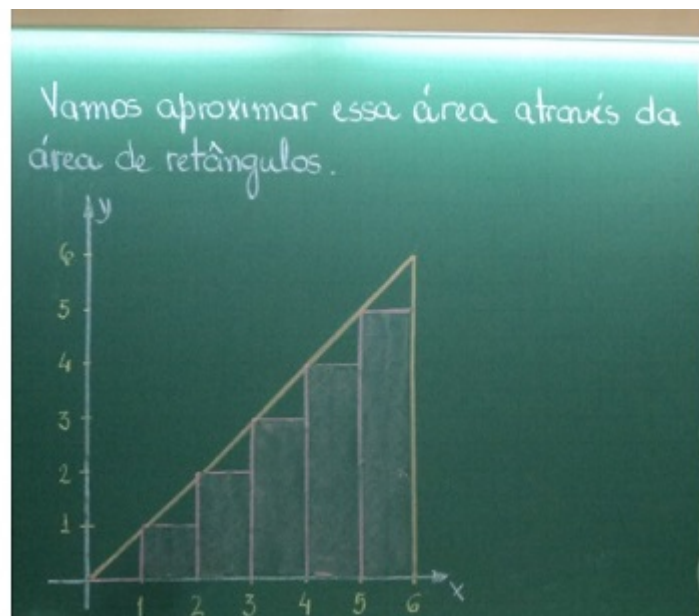


Figura 14 – Atividade em sala de aula 2

O aluno percebe de uma forma clara que uma aproximação para a área do triângulo (A_{Δ}) seria a soma de todas as áreas:

$$(A_{\Delta}) = \sum_{i=1}^6 A_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15u.a$$

Em um terceiro momento a seguinte pergunta é feita: Como aproximar cada vez mais da área do triângulo? A resposta é esperada e imediata: Inserindo-se mais retângulos “dentro” do triângulo.

Repetindo-se o mesmo procedimento como o dobro de subdivisões para a base do triângulo, nesse caso cada subdivisão compreende segmentos de retas congruentes medindo

0,5 u.c, obtendo assim uma medida mais refinada, ou seja, mais próxima do valor real:

$$(A\Delta) = \sum_{i=1}^{12} A_i = 0 + 0,25 + 0,5 + 0,75 + 1,0 + \dots + 2,5 + 2,75 = 16,5u.a$$

O valor encontrado aproximou-se mais do valor real da área do triângulo. Nesse momento leva-se ao aluno concluir que quanto maior for a quantidade de retângulos, mais próximo da área do triângulo chegamos, ou seja, sendo n a quantidade de retângulos inseridos no interior do triângulo, na medida que n cresce (n tendendo ao infinito) a área se aproxima cada vez mais do valor real da área do triângulo, mais uma vez surge o conceito intuitivo de limites, dessa vez aplicado a geometia plana.



Figura 15 – Atividade em sala de aula 3

Essa situação exemplificada pode ser estendida para alunos do ensino médio que já conseguem visualizar que o valor da base do retângulo é dada por $6/n$ em que n é o número de subdivisões que servem de base para os retângulos. A altura dos retângulos formam uma PA crescente de razão $r = 6/n$, de tal forma que:

$$h_1 = 1.0$$

$$h_2 = 1. \frac{6}{n}$$

$$h_3 = 2. \frac{6}{n}$$

$$h_4 = 3. \frac{6}{n}$$

$$h_5 = 4 \cdot \frac{6}{n}$$

$$h_6 = 5 \cdot \frac{6}{n} \dots h_n = \frac{(n-1)6}{n}.$$

A conclusão é imediata, pois a área do retângulo é encontrada pelo produto da sua base pela sua altura, portanto temos:

$$\text{Área} = \frac{6}{n}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + \dots + h_n).$$

$(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + \dots + h_n)$ representa a soma dos termos de uma P.A, logo:

$$\text{Área} = \frac{6}{n} \frac{(h_1 + h_n)n}{2} = \frac{6}{n} \frac{(0 + (n-1)(6/n))n}{2} = 3\left(6 - \frac{6}{n}\right) = 18 - \frac{6}{n}$$

Essa expressão permite calcular a área do triângulo em função da quantidade de subdivisões que se deseja construir, de tal forma que, como foi observado anteriormente, quanto maior o número de retângulos maior a aproximação do valor real da área procurada, logo fazendo n suficientemente grande, ou seja, n tendendo a infinito temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(18 - \frac{6}{n}\right) = 18 \text{u.a}$$

Essa prática docente, com os alunos do ensino fundamental, retratam um ganho a médio prazo pois esses conceitos básicos podem e devem ser explorados de forma mais aprofundada no ensino médio, onde o aluno já tem maturidade o suficiente para lidar com questões que requer o uso de limites de somas infinitesimais.

3.2.3 O estudo do cálculo no ensino médio: A derivada como taxa de variação

Nesse estágio da vida acadêmica o aluno tem outros anseios em relação a matemática, o fazer sentido ou seja a aplicabilidade viabiliza o melhor entender da disciplina, já que a parte introdutória do cálculo algébrico(abstração) foi feita no ensino fundamental, o que torna esse ciclo um ambiente propício para introdução do cálculo diferencial mais especificamente as aplicações dos conceitos de limites e derivadas, na forma de resolução de problemas.

Um dos conceitos mais preciosos do cálculo diferencial é a derivada como taxa de variação que pode ser explorada de forma contextualizada no ensino médio, através de conteúdos que se complementam e dão sentido a esse conceito tão usado e pouco explorado nessa fase. Mais uma vez a problemática de sala de aula nos remeteu a, além de perceber essa oportunidade, aplicar em uma sala de aula de alunos da primeira série do ensino médio alguns problemas que introduzem de forma sutil e eficaz o conceito de derivada como taxa de variação, listo abaixo os problemas, bem como suas resoluções e comentários.

Atividade 1:

Considere a função $f(x) = x^2 - 2x$

- Determine a taxa média de variação de $f(x)$ em função de x , para $x \in [4, 5]$.
- Construa o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x$ e determine os pontos A e B desse gráfico, que tem abscissas 4 e 5, respectivamente.
- No gráfico do item anterior, desenhe e reta que passa por A e B.
- Que relação existe entre a taxa média de variação obtida no item a e o coeficiente angular da reta desenhada no item c ?

Resolução:

- Nesse item os alunos devem aplicar o conceito de taxa de variação média já estudado no estudo de funções.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \frac{15 - 8}{1} = 7$$

- Através do software Geogebra obtemos os gráficos pedidos nos itens b) e c)

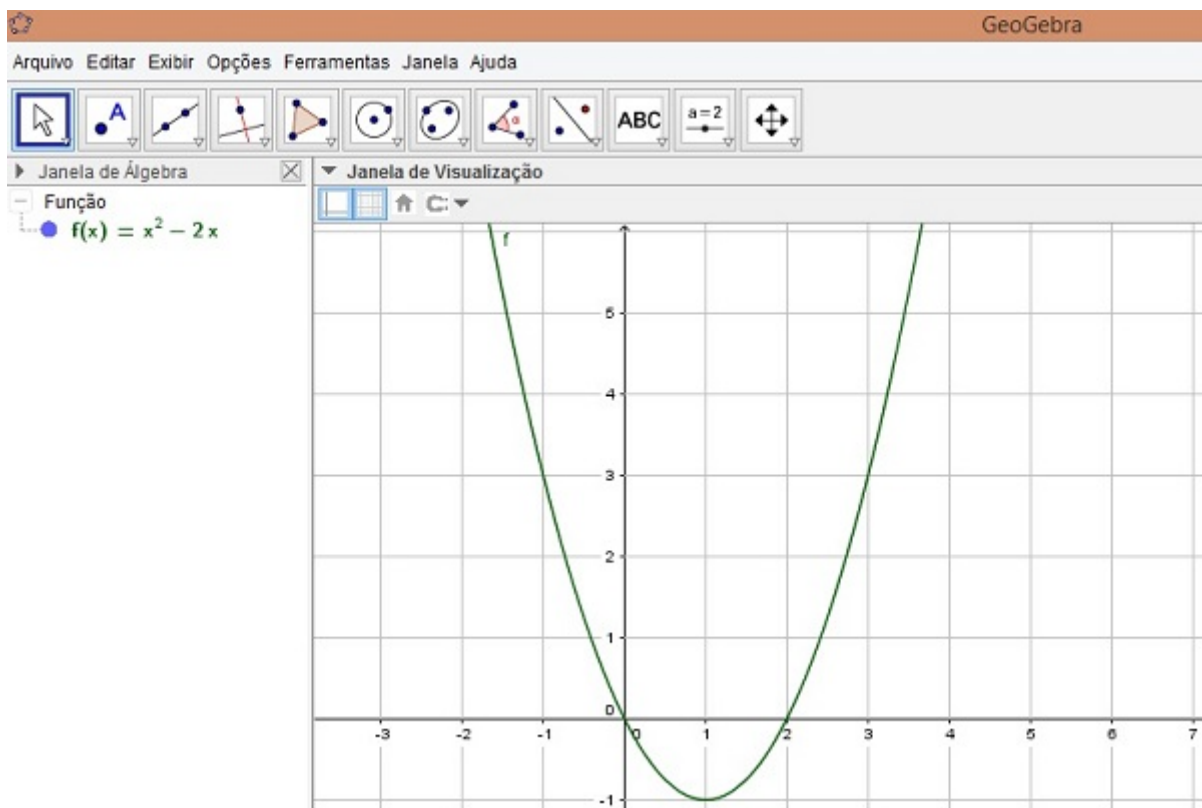


Figura 16 – Gráfico item b

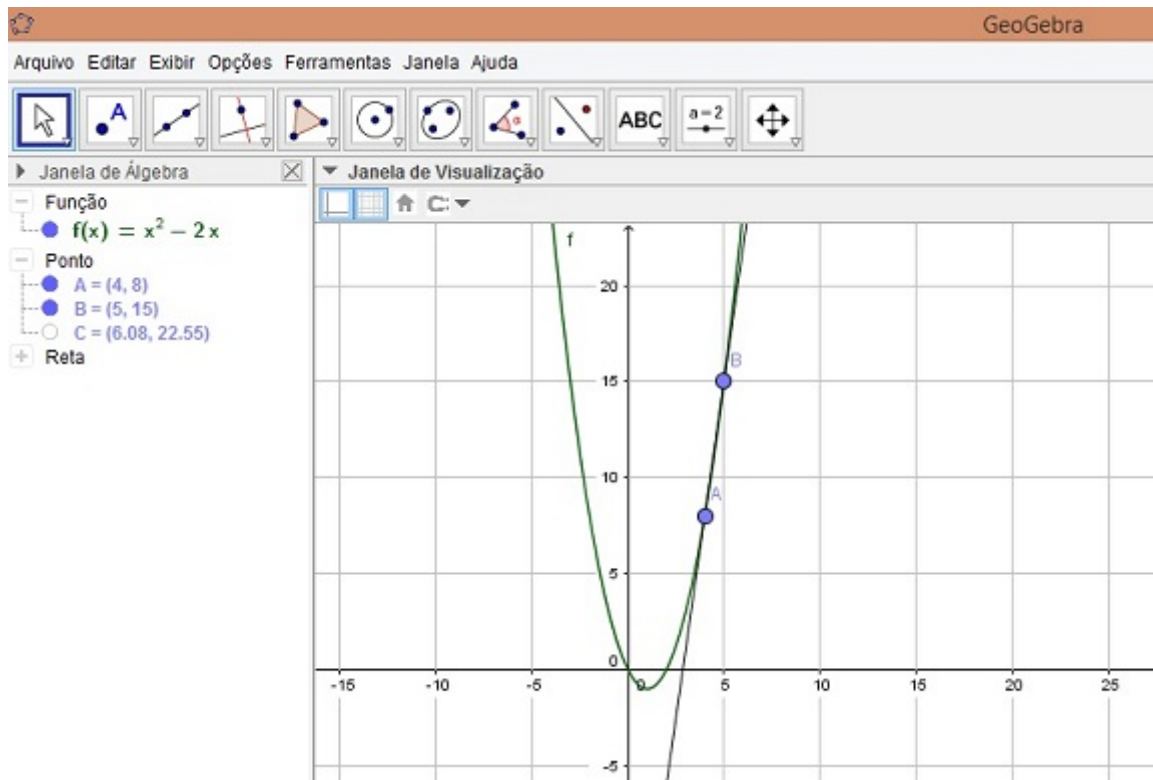


Figura 17 – Gráfico item c

c) Nesse item a sala comprovou que o coeficiente angular da reta e a taxa média de variação representam a mesma coisa.

Atividade 2: Considere a função afim $f(x) = 6x + 2$

a) Faça o gráfico da função

b) Determine a taxa média de variação de $f(x)$ em função de x , para $x \in [2, 8]$.

c) Determine a taxa média de variação de $f(x)$ em função de x , para $x \in [50, 150]$.

d) Que relação existe entre a taxa média de variação obtida nos itens a,b e c e o coeficiente angular da reta desenhada no item a ?

Resolução:

a)

b) A taxa de variação será dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(8)}{8 - 2} = \frac{50 - 14}{6} = 6$$

c) De forma análoga temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(50) - f(150)}{150 - 50} = \frac{902 - 302}{100} = 6$$

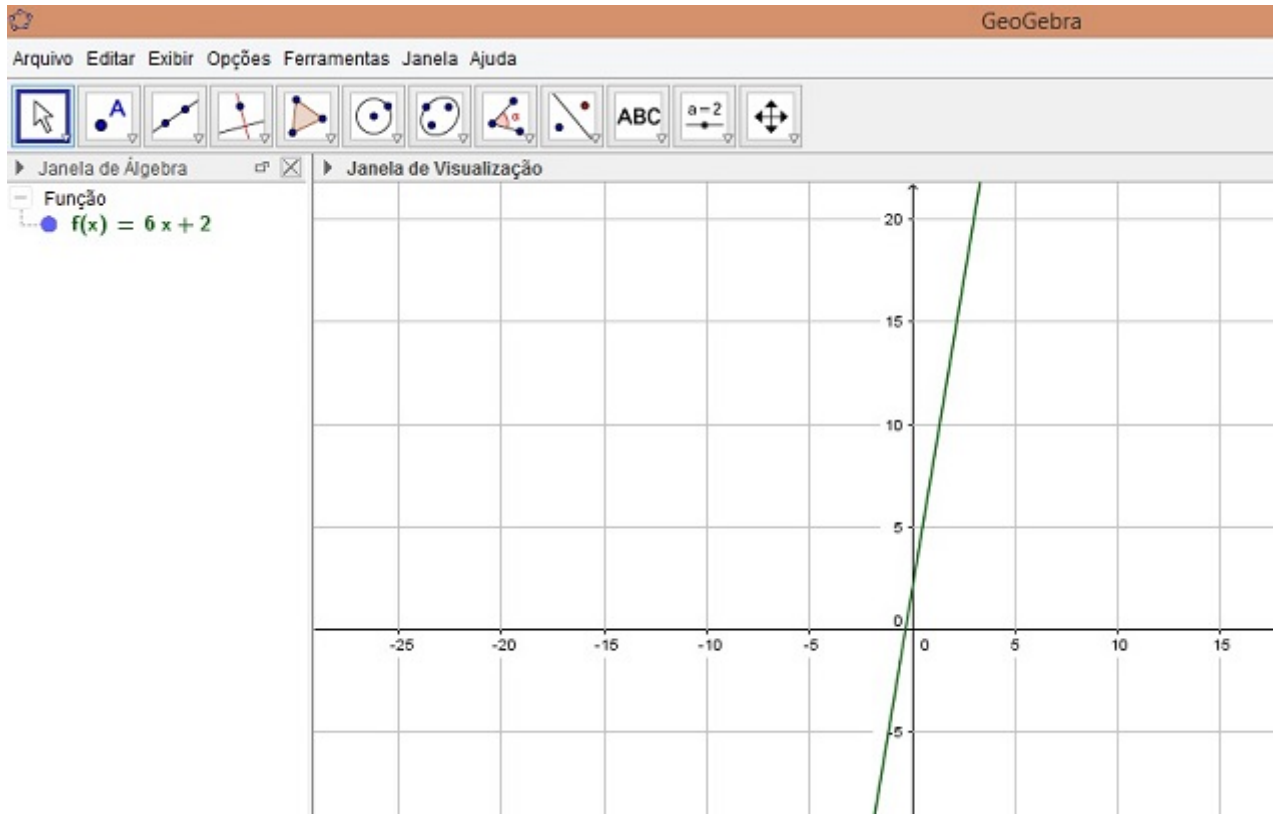


Figura 18 – Gráfico atividade 2

d) São todos iguais

3.2.4 Cálculo diferencial e ENEM, é possível?

Alguns tópicos cobrados no ENEM estão intimamente relacionados com o cálculo diferencial, o que nos leva a mais uma vez a destacar a importância desse estudo no ensino básico. Segue alguns exercícios que foram cobrados no ENEM, e sugestões de resolução, por meio de cálculo diferencial e por meio de conteúdos lecionados no ensino médio.

EXEMPLO 1: A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z , conforme mostra a figura. A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V , na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x . Nessas condições, calcule a altura do líquido contido na taça, em centímetros.

RESOLUÇÃO:

Se o ponto V está localizado sobre o eixo x $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 6x + C$, tem duas raízes reais iguais portanto seu discriminante $\Delta = 0$, logo:

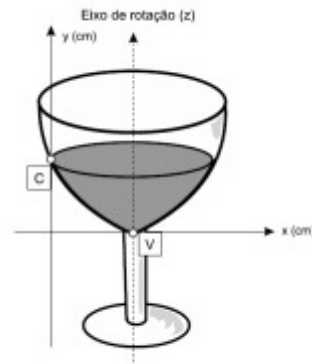


Figura 19 – Taça gerada pela rotação de uma parábola

$$\Delta = (-6)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)C = 0 \implies C = 6$$

Derivando a função $f(x)$, temos: $f'(x) = 3x - 6$, observe que o ponto onde essa derivada é nula corresponde a abscissa do vértice da parábola e que a ordenada do vértice é nula, portanto $3x - 6 = 0$, logo $x = 2$. Note que $f(2) = 0$ então: $\left(\frac{3}{2}\right)2^2 - 6 \cdot 2 + C = 0$, portanto $C = 6$.

EXEMPLO 2: Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta. Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, de acordo com a tabela dada, qual será a classificação da temperatura no interior da estufa?

RESOLUÇÃO:

Com o auxílio do software Geogebra vamos traçar o gráfico dessa função:

A função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, por comparação, tem valor de $a = -1$ que é menor que zero e por isso a função tem um ponto de máximo. Para determinar qual é esse ponto de máximo, podemos calcular por meio de fórmulas o vértice da parábola:

$$X_v = \frac{-b}{2a}; Y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Figura 20 – Tabela ENEM

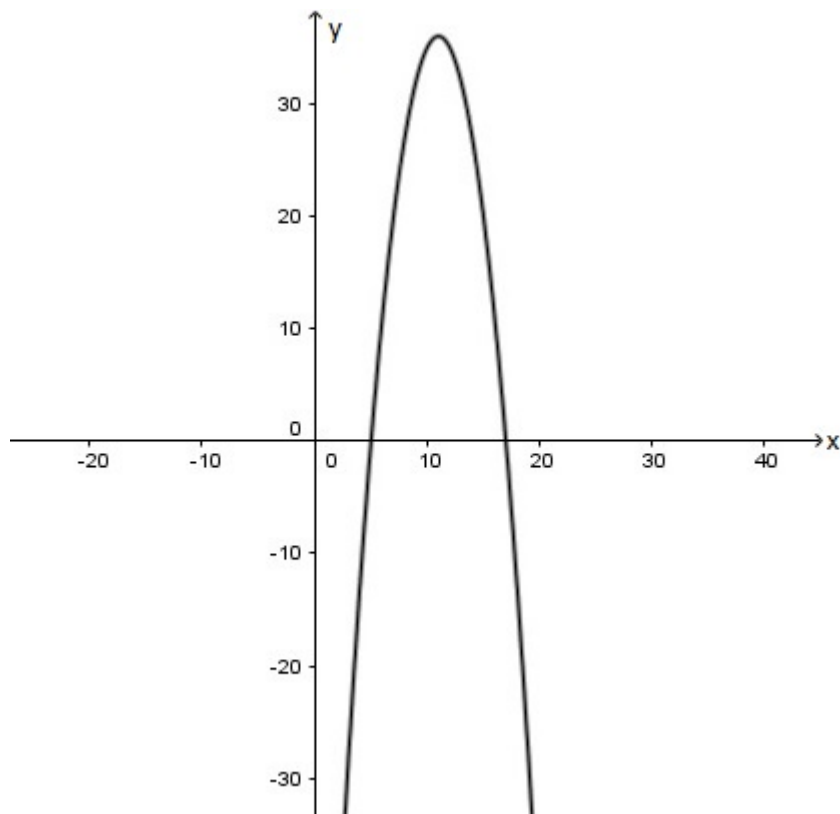


Figura 21 – Função Quadrática

Na função da questão, y é a temperatura e x é a hora. Como queremos saber a temperatura máxima, só precisamos calcular Y_v :

$$Y_v = \frac{-22^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-85)}{4(-1)} = 36$$

Logo, a temperatura máxima é 36 e a resposta da questão é Temperatura Alta, de acordo com a tabela dada, já que a temperatura está entre 30 e 43.

Vamos agora resolver o mesmo exercício usando derivadas: Esse é um problema de ponto crítico máximo (Ver apêndice A).

Fazendo a derivada primeira da função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, igual a 0, temos:

$$T'(h) = -2h + 22 = 0$$

$$h = 11$$

Vamos agora, fazer a derivada segunda da função e observar o valor obtido:

Se $T''(h) > 0$, o ponto crítico é um ponto de mínimo

Se $T''(h) < 0$, o ponto crítico é um ponto de máximo

$$T''(h) = -2.$$

Como -2 é menor do que 0; logo o ponto crítico é um ponto de máximo. Sabendo que $h = 11$ é o valor que resulta no maior valor de T (ponto máximo), substituo $h = 11$ na função para obter T, temos:

$$T(h) = -11 + 22.11 - 85 = -121 + 242 - 85 = 36C$$

Sendo assim, a temperatura máxima está entre 30 e 43C, portanto, de acordo com a tabela: Alta!

4 APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL EM OUTRAS DISCIPLINAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Nesse capítulo mostraremos algumas aplicações do cálculo em outras disciplinas da educação básica, através da resolução de exercícios, destacando ainda mais a importância do contato com essa ferramenta também muito usada na física, química, biologia dentre outras áreas na qual o seu domínio facilita a resolução de situações-problemas nas mais diversas áreas.

4.1 Aplicações do cálculo nas ciências biológicas

ATIVIDADE 01: Uma cultura de bactérias começa com 800 bactérias, e o crescimento de sua população é modelada pela função: $P(t) = 800 \cdot e^{0,05t}$ Em que P é o número de bactérias e t é o tempo em minutos. Com base nessas informações determine:

- A fórmula para a taxa de variação da população de bactérias em função de t.
- Arredondando para o número inteiro mais próximo, qual é a taxa de variação da população de bactérias quando $t = 12$ minutos?

Solução:

a) Precisamos derivar a população exemplificada para encontrar sua taxa de variação. Portanto, pela regra da cadeia:

$$P'(t) = 800 \cdot e^{0,05t} \cdot (0,05) = 40 \cdot e^{0,05t}$$

b) Quando $t = 12$ minutos temos:

$$P'(12) = 40 \cdot e^{0,05(12)} = 73 \frac{\text{bactérias}}{\text{minutos}}$$

ATIVIDADE 02: Os pinípedes são uma sub-ordem dos mamíferos aquáticos, tais como focas e morsas, cujos pés evoluem para nadadeiras. A relação comprimento/peso durante o crescimento fetal é dada por $P(t) = 6 \cdot 10^{-5} \cdot [C(t)]^{2,74}$ onde C é o comprimento (em, cm) e P é o peso (em Kg).

- estabeleça uma fórmula para a taxa de aumento do peso em relação ao tempo.

b) se o peso de uma foca é de 0,5Kg e varia à razão de 0,4Kg/mês, qual a taxa de variação de seu comprimento ?

Solução:

a) $P(t) = 6 \cdot 10^{-5} \cdot [C(t)]^{2,74}$, pela regra da cadeia temos:

$$P'(t) = (2,74)6 \cdot 10^{-5} \cdot [C(t)]^{1,74} \cdot C'(t)$$

b) A taxa de variação do comprimento é dada por $C'(t)$, pelo item (a) temos:

$$C'(t) = \frac{P'(t)}{(2,74)6 \cdot 10^{-5} \cdot [C(t)]^{1,74}}$$

Do enunciado temos que $P'(t) = 0,4$ quando $P(t) = 0,5$ e que esta última informação permite determinar $C(t)$ pois

$$[C(t)]^{1,74} = \frac{P(t)}{6 \cdot 10^{-5}}$$

portanto:

$$[C(t)]^{1,74} = \frac{0,5}{6 \cdot 10^{-5}} = 8333,33 \Rightarrow C = 26,97$$

Logo, o comprimento varia à taxa de:

$$C'(t) = \frac{0,5}{(2,74)6 \cdot 10^{-5} \cdot [26,97]^{1,74}} = 7,876 \text{ cm/mês}$$

4.2 Aplicações do cálculo nas ciências Físicas

ATIVIDADE 01: Um móvel desloca-se sobre um segmento de reta obedecendo à equação horária $s = \text{sen}(t)$ (Unidades do SI). Determine:

- Sua velocidade instantânea $t = \pi / 4$ segundos
- Sua aceleração no instante $t = \pi / 6$ segundos.

Solução:

Derivando-se a função $s(t) = \text{sen}(t)$, obtém-se:

$$s'(t) = v(t) = \text{cost} \Rightarrow v\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow v\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s}$$

Derivando a velocidade em função do tempo tem-se:

$$v'(t) = a(t) = -\text{sent} \Rightarrow a\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow a\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \text{ m/s}^2$$

Concluimos então que sua velocidade e sua aceleração são, respectivamente:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}.$$

ATIVIDADE 02: A posição de um corpo é dada pela expressão $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 8$. Determine a aceleração e a velocidade do corpo nos instantes $t = 0, t = 3$ e $t = 5$?

Solução:

Derivando-se a função $s(t)$, obtém-se:

$$s'(t) = v(t) = 6t^2 - 3t$$

Derivando-se agora $v(t)$, temos:

$$v'(t) = a(t) = 12t - 3$$

Temos que: $v(0) = 0$, $v(3) = 36$, $v(5) = 120$, $a(0) = 6$, $a(3) = 30$ e $a(5) = 54$.

4.3 Aplicações do cálculo nas ciências Químicas

ATIVIDADE 01: O Prêmio Nobel de Química de 1999 foi outorgado ao químico egípcio-estadunidense, Ahmed H. Zewail, por seus estudos dos estados de transição de reações químicas por meio da espectroscopia em femtosegundos. Dessa maneira, a Academia Real Sueca de Ciências considera o investigador, pioneiro de reações químicas na escala de tempo em que elas efetivamente ocorrem. Supondo que na reação genérica, $2A + 3BC$, a concentração do reagente A relaciona-se com o tempo de acordo com a seguinte equação: $[A] = 3t^2 - 24t$, determine a velocidade (em mol/L.s) de formação de C no instante $t=5s$.

Solução:

Derivando-se $[A]$ temos:

$$d'[A] = 6t - 24$$

Logo a concentração de $[A]$ em $t = 5s$ será;

$$[A] = 6(5) - 24 \Rightarrow [A] = 6$$

Como a de C é metade, temos $C = 3 \text{ mol/L} \cdot s$

ATIVIDADE 02: Suponha que uma proteína de massa m se decomponha em aminoácidos segundo a fórmula $m(t) = \frac{25}{t+3}$, onde t representa o tempo medido em horas.

Determine a taxa média de variação da massa no intervalo de tempo $[0, \frac{1}{4}]$. Qual a taxa de variação instantânea para $t = 1h$?

Solução:

A taxa média de variação da massa no intervalo de tempo $[0, \frac{1}{4}]$ é:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{M(\frac{1}{4}) - M(0)}{\frac{1}{4} - 0} = -0,64 \text{ massa/hora}$$

5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho falamos um pouco sobre o surgimento do cálculo diferencial e abordamos algumas noções básicas de cálculo. Também tentamos ressaltar a importância do estudo de noções de cálculo na educação básica, através de situações problemas vivenciadas em sala de aula na minha prática docente.

Algumas limitações também foram destacadas na inserção desse conteúdo na educação básica que é o caso da existência de poucos livros didáticos que abordam noções de cálculo diferencial direcionado ao ensino básico, bem como um calendário pouco flexível que obriga os docentes a tratar essas noções com pouca relevância.

Foi elaborado uma situação prática com alunos do 9º ano do ensino fundamental e da 1ª série do ensino médio em que os conceitos de somas infinitesimais eram abordados de uma forma simples e sutil sendo ressaltado a importância do estudo de limites.

Foram sugeridos alguns exercícios que envolvem cálculo diferencial em outras disciplinas, como a física a biologia e a química o que motiva ainda mais a prática desse estudo para alunos da educação básica.

Também constatamos que essas noções podem proporcionar aos alunos um melhor entendimento de determinados conteúdos que remetem a esses conhecimentos básicos de cálculo, tanto no ensino fundamental quanto no médio proporcionando assim um melhor entendimento das disciplinas afins que usam essa ferramenta, como é o caso da física, química e biologia.

A importância desse estudo na educação básica também foi enfatizada através de exercícios que constam no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que podem ser solucionados com noções de cálculo diferencial, o que vem a ressaltar o ganho que os alunos que tem contato com esses conteúdos podem ter quando se submetem ao exame.

Concluimos, através dessas experiências em sala de aula, que a inclusão de noções do Cálculo Diferencial na educação básica é de grande importância pois proporciona um significado mais aprofundado de conceitos vistos tanto na matemática quanto em disciplinas afins, trazendo assim um ganho tanto a curto como a longo prazo para alunos que têm contato com esses conceitos.

REFERÊNCIAS

- AVILA, G. O ensino de cálculo no 2 grau. **Revista do Professor de Matemática**, Sociedade Brasileira de Matemática, n. 18, p. 2, 1991.
- BRITO, J. C. S. **O Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta interdisciplinar no Ensino Médio**: 2013. 02 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT) — Universidade Federal do Piauí, Teresina-PI, 2013.
- ELÉIA, Z. de. **OS PRÉ-SOCRÁTICOS**. 2. ed. São Paulo: Editora Abril, 1976.
- JUNIOR, O. d. S. **Cálculo no Ensino Médio:Números Reais**: 2014. 02 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, 2014.
- KELLEY, W. M. **O Guia Completo para Quem Não É C.D.F. – Cálculo**. 2. ed. Rio de Janeiro: Alta Books, 2013.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução Ciro de Carvalho Patarra. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 2.
- LIMA, E. L. **Análise Real**. 8. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.
- PASCOAL, J. U. M. **Um Breve Estudo Sobre a utilização do Cálculo Diferencial e Integral na Educação Básica de Jaguaruana-CE**: 2014.14 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró-RN, 2014.
- PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Ministério da Educação e Cultura, Brasília, DF, 2002. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em: 10 ago. 2013.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TEOREMAS E DEMONSTRAÇÕES

Nesta secção todas as demonstrações podem ser encontradas em Leithold (1994).

Regras Operacionais de Derivação

Teorema 1: *Se c for uma constante e se $f(x) = c$ para todo x , então $f'(x) = 0$.*

Prova:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

A derivada de uma constante é zero.

Teorema 2: *Se n for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Prova:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Aplicando o teorema binomial a $(x + \Delta x)^n$ teremos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta(x^2) + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n] - x^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta(x^2) + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

Dividindo o numerador e o denominador por Δx , obtemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}$$

Todos os termos, exceto o primeiro, têm Δx como fator assim sendo todos os termos, exceto o primeiro, tendem a zero quando Δx tende a zero. Assim:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Teorema 3: *Se f for uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = c.f(x)$ então, se $f'(x)$ existir, $g'(x) = c.f'(x)$*

Prova:

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \left[\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$g'(x) = c \cdot \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$g'(x) = c.f'(x)$$

A derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função, se essa derivada existir.

Teorema 4: *Se f e g forem funções e h a função definida por $h(x) = f(x)g(x)$ então se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$, $h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$*

Prova:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

Se $f(x + \Delta x).g(x)$ for somado e subtraído ao numerador, então:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x).g(x) + f(x + \Delta x).g(x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] &= g'(x) \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] &= f'(x) \end{aligned}$$

Dando assim:

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Teorema 5: Se f e g forem funções e se h for a função definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ onde $g(x) \neq 0$, então se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, $h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Prova:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot (g(x + \Delta x))}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

Se somarmos e subtrairmos $f(x) \cdot g(x)$ ao denominador, então:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] - \left[f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

Sendo:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g(x)$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) = g(x)$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) = f(x)$$

Temos que:

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

A derivada do quociente de duas funções é a fração tendo como denominador o quadrado do denominador original e como numerador o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, se essas derivadas existirem.