Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exata e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Princípio da Indução Matemática no Ensino Médio

Luciano Xavier Gomes da Nóbrega

Natal, abril de 2013

Luciano Xavier Gomes da Nóbrega

Princípio da Indução Matemática no Ensino Médio

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requesitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof^{o}. Dr^{o}. Fagner Lemos de Santana

Natal, abril de 2013

Luciano Xavier Gomes da Nóbrega

Princípio da Indução Matemática no Ensino Médio

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requesitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em: / /

Banca Examinadora:

Prof^o. Dr^o. Fagner Lemos de Santana
Departamento de Matemática - UFRN
Orientador

Prof^a. Dr^a. Fabiana Tristão de Santana
Departamento de Matemática - UFRN
Examinador Interno

Prof^o. Dr^o. Daniel Cordeiro de Morais Filho
Departamento de Matemática e Estatística - UFCG
Examinador Externo

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial

Centro de Ciências Exatas e da Terra - CCET.

Nóbrega, Luciano Xavier Gomes da.

Princípio da Indução Matemática no Ensino Médio / Luciano Xavier Gomes da Nóbrega. - Natal, 2013.

61 f. il.:

Orientador: Prof°. Dr. Fagner Lemos de Santana.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Matemática - Ensino - Dissertação. 2. Princípio da Indução Matemática - Dissertação. 3. Ensino com Indução - Dissertação. . 4. Demonstração por Indução - Dissertação. I. Santana, Fagner Lemos. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 51:37.026

Dedicatória

Eu trabalhava como cobrador de ônibus, de cinco da manhã às dezenove da noite (com uma hora de intervalo para almoçar). Estava afastado dos estudos à cerca de sete anos. Certa noite, meu Pai me chamou para uma conversa de homem para homem. Esta conversa durou cerca de três horas e seu conteúdo se resumia no seguinte:

Meu Pai queria me fazer prometer que eu voltaria a estudar, ele dizia que minha missão nessa vida estaria ligada aos estudos.

Pensei em fazer ao meu Pai uma surpresa que consistiria em me matricular em um cursinho sem que ele soubesse e se, ao final do ano, eu passasse no vestibular, então revelaria para ele. Eu me arrependo de, por um capricho, não ter revelado para ele que eu já havia me convencido a voltar a estudar, pois...

...

Três dias depois, ele faleceu.

Em memória ao meu Pai, Francisco das Chagas Gomes.

Pai, onde estiver, esta dissertação é dedicada ao Senhor. OBRIGADO POR TUDO!

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS.

Em memória, agradeço com todo amor ao meu Pai.

Agradeço muito a minha maravilhosa Mãe. Não há palavras que expressem o amor que sinto por ela.

Aos idealizadores deste revolucionário programa - PROFMAT. Desejo que o PROFMAT possa um dia realizar completamente a sua missão. Certamente, hoje sou um melhor professor graças a esse mestrado

A todos os meus professores da UFRN, em especial, ao meu professor Orientador Fagner Lemos de Santana que sempre se mostrou acessível e disposto a tirar minhas dúvidas. De fato, em todo o processo que culminou nesta dissertação, sua participação foi decisiva. Um agradecimento especial aos professores que compuseram a banca examinadora: Dr^a Fabiana Tristão de Santana e Dr^o. Daniel Cordeiro de Morais Filho. Suas contribuições enriqueceram o conteúdo desta dissertação.

Meus colegas mestrandos da UFRN que tanto contribuíram para o meu aprendizado e amadurecimento, em especial, ao Agamenon Tavares, ao Nilson Nicácio e ao Carlos "Meu Orientador" Eduardo. Meus colegas mestrandos de outros polos, em especial, da UFERSA, ao Emanuel Gomes e Felipe "Tchio Lipe" Arrais , da UFPB, ao Thiago Valentin, Sandro Godeiro e Aldrin Rufino e, da UFAL, ao Elizângelo Lopes (não o conheço pessoalmente, mas foi o mestrando mais atuante na Plataforma Moodle e suas postagens foram fundamentais para meu aprendizado). Ainda ao meu colega de profissão, professor Severo. Aos professores Carlos Gomes e Antônio Roberto, cada um destes merece o título de "Professor dos professores".

Finalmente, estendo os agradecimentos a minha esposa, Luciana Maria de Lima Silva da Nóbrega, e minha filha, Lisa Patrícia Silva da Nóbrega, que tiveram paciência e compreensão por todas as horas em que abdiquei do conforto de suas companhias para dedicar-me aos estudos requeridos por este mestrado.

(Laís, minha filha, você ainda nem nasceu mais sinta-se contemplada... Te amo!)

"Você tem uma grande missão nessa vida e ela está ligada a sua volta aos estudos."

Em memória ao meu Pai, Francisco das Chagas Gomes

Resumo

Desenvolvemos esta dissertação objetivando seu uso no processo de ensino e aprendizagem do princípio da indução matemática e direcionamos nossos esforços para que os alunos do primeiro ano do ensino médio possam assimilar o conteúdo tendo o conhecimento visto na educação básica como pré-requisito. Com isso, buscamos despertar no aluno o interesse em demonstrações, mostrando o quanto elas são necessárias.

Palavras-chave: Princípio da Indução Matemática; Ensino; Demonstrações.

Abstract

We developed this dissertation aiming its in the process of teaching and learning of the Principle of Mathematical Induction and we set our efforts so that the students of the first year of the high school can assimilate the content having the knowledge seen in the basic education as foreknowledge. With this, we seek to awake in the student the interest on proofs, showing how much it's needed in examples that involve contents that he is already seen.

Keywords: Principle of Mathematical Induction; Education; Statements.

Sumário

Introdução

Ao chegar ao ensino médio, o adolescente já tem uma considerável bagagem de conhecimento matemático e entendemos que é o momento ideal para formalizarmos esse conhecimento dando uma abordagem axiomática dedutiva[1], instigando-o a terem um maior censo crítico.

Pensamos ser conveniente que ao mesmo tempo em que ensinamos Matemática, temos que ensinar nossos alunos a serem cidadãos críticos. Para ilustrar o que propomos, imagine a experiência de perguntar aos alunos do 1º ano do ensino médio, no primeiro dia de aula, se algum deles sabe por que ao resolvermos uma equação do 2º grau as suas soluções são dadas pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Provavelmente alguns alunos saberão por terem tido um bom professor de Matemática no 9º ano do ensino fundamental. Entretanto, a maioria deve não fazer a mínima ideia da origem desta fórmula. Cabe aos professores motivá-los a questionarem o motivo pelo qual as coisas são do jeito que são e a Matemática possibilita um rico exercício dessas habilidades. A Indução Matemática é uma importante ferramenta que possibilita a demonstração de proposições feitas sobre os números naturais e que pode ser estendida para subconjuntos dos números inteiros.

Durante pesquisa, constatamos que no livro didático do autor Dante [8], há um capítulo sobre o Princípio da Indução Matemática no qual é feito uma rápida abordagem do assunto destacando uma parte mais mecânica da Indução Matemática, esta, muitas vezes também se sobressai ao observarmos as aulas de Indução Matemática no ensino superior.

Propomos aqui em nosso trabalho que seja feita uma abordagem que motive a formulação de conjecturas e a utilização da Indução Matemática para comprovar a

[1] O método axiomático dedutivo consiste em partir de verdades inquestionáveis (axiomas) e utilizando argumentações lógicas, deduzir novas verdades.

veracidade das mesmas, logo, pensamos que o ensino de Indução seja feito de modo que o aluno perceba que ele utiliza um número de argumentos finitos para tirar conclusões sobre infinitos objetos.

Ao pensar em ensinar Indução Matemática no ensino básico, somos levados a buscar uma motivação e sem dúvidas esta se dará em obtermos uma ferramenta que nos possibilite fazer demonstrações matemáticas de sentenças abertas sobre números naturais.

Segundo Krerley e Adán [4], autores do livro Iniciação à Matemática: "Uma grande vantagem do princípio da Indução Matemática é poder provar que uma quantidade infinita de afirmações são verdadeiras, simplesmente verificando que uma quantidade finita destas afirmações são verdadeiras." Trata-se de um primeiro contato mais rigoroso com a noção do infinito.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é apresentar uma alternativa didática para ensinar o Princípio da Indução Matemática aos alunos do 1º ano do ensino médio.

Para tanto, mostramos, no capítulo 1, como é perigoso generalizar resultados a partir de finitas observações, remetendo a necessidade da criação de uma ferramenta Matemática que possibilite estas generalizações, assim o Princípio de Indução Matemática é apresentado em analogia com a derrubada de uma fileira de dominós e gradativamente é feito um aprofundamento no capítulo 3. Considerando sempre o rigor intrínseco à Matemática, procurou-se manter uma cronologia dos tópicos fundamentais que possibilite ao leitor sentir-se desafiado em cada instante, dessa forma, partimos dos fundamentos mais básicos, como por exemplo, adição, para gradativamente abordar conhecimentos mais complexos, tais como geometria e somatório. Espera-se, como resultado, que possamos conceber questionamentos expressivos, bem como, suas possíveis respostas no que consta saber o porquê das proposições serem do jeito que são.

Em seguida, formalizamos, no capítulo 2, o Princípio da Indução Matemática e buscamos mostrar uma releitura que possibilite ao aluno do ensino médio uma melhor interpretação e apropriação deste princípio para aplicá-lo na demonstração de proposições e teoremas. Encontramos, no capítulo 5, vários exemplos dessas aplicações, dos mais variados, como a demonstração de identidades, desigualdades, problemas de divisibilidade e proposições geométricas. Inclusive, destacamos, no capítulo 2, cuidados que devemos ter ao utilizarmos a demonstração por indução. À propósito, procuramos justificar, a contento, o porquê do nome "indução".

Apresentamos, no capítulo 4, como motivação, a aplicação do Princípio da Indução Matemática para demonstrar proposições sobre objetos concretos e aprofundamos o estudo da indução, apresentando, demonstrando e aplicando a Generalização do Princípio da Indução Matemática.

Finalizamos nosso trabalho, no capítulo 6, com a utilização do Princípio da Indução Matemática para, através da definição por recorrência, promover a demonstração das Propriedades das Potências, dos Termos Gerais das Progressões Aritméticas e Geométricas e das Propriedades dos Somatórios.

Capítulo 1

O Princípio da Indução Matemática

1.1 Introdução

Este trabalho foi concebido considerando que os alunos do 1º ano do ensino médio, nosso público alvo, já possuem certa familiaridade com os conceitos básicos da Matemática, tais como aqueles relacionados as quatro operações básicas. Particularmente, no que se refere à adição, propomos o seguinte exercício.

Exemplo 1.1.1.

Resolva as seguintes adições e descreva os padrões observa:

1 + 3 =

1 + 3 + 5 =

1 + 3 + 5 + 7 =

1 + 3 + 5 + 7 + 9 =

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 =

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 =

Esta atividade consiste em pedir que os alunos resolvam estas adições e busquem observam padrões. Esperamos que eles observem tratar-se da soma dos n primeiros números ímpares e que estas sempre resultam em números quadrados, mais precisamente, em n^2.

Sendo assim, o professor pode questionar, de maneira construtiva, ou seja, direcionando-os, intigando-os, se:

"– Podemos afirmar que a soma dos n primeiros números ímpares resulta em n^2?".

Muito provavelmente, à esta pergunta, nesta etapa, esperamos uma resposta afirmativa da maioria dos alunos, senão de todos, pois, eles tendem, naturalmente, a generalizar resultados, tendo em vista que no ensino fundamental, normalmente, a Matemática é ensinada dessa forma, por generalizações. Apesar de sabermos que certos padrões encontrados em finitos termos de uma sequência não garantem a generalização para todos os termos desta, sugerimos que essa resposta não seja imediatamente corrigida, pois, é necessário inicialmente que os alunos ganhem confiança em suas respostas para, gradativamente, mostrarmos que o raciocínio matemático carece de uma melhor maturação.

Afim de evidenciar esta necessidade, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.2. *Considere o polinômio* $p(n) = n^2 - n + 41$*. Calculando seus valores numéricos quando* $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 25, 39, 40\}$*, obtemos:*

P(1) = 41	P(2) = 43	P(3) = 47	P(4) = 53
P(5) = 61	P(6) = 71	P(7) = 83	P(9) = 113
P(10) = 131	P(25) = 641	P(39) = 1523	P(40) = 1601

Demandando um considerável tempo, podemos observar que os valores numéricos deste polinômio obtidos para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \leq 40$, sempre resultam em números primos, assim, podemos erroneamente conjecturar que este polinômio sempre fornece números primos. Entretanto, observe que $P(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, logo $P(41)$ é múltiplo de 41 e, portanto, não é primo.

Este é um bom exemplo para mostrar como é perigoso generalizar resultados sobre infinitos termos, baseando sua conclusão em tão somente verificar algumas finitas observações.

Novamente, indagando aos nossos alunos se podemos ou não afirmar que a soma dos n primeiros números ímpares resulta em n^2, esperamos que agora, eles se conveçam que esta afirmação, por mais que ela seja verdadeira, não pode ser comprovada através de finitas observações. Embora saibamos que a soma dos n primeiros números ímpares resulte em n^2, devemos reforçar que o fato de verificarmos sua veracidade para alguns valores não nos permite concluir sua veracidade para todos os números naturais.

Objetivamos aqui, exemplificar para os alunos de forma concisa, a necessidade de uma ferramenta matemática que permita, fidedignamente, tirar conclusões sobre o infinito a partir de argumentações finitas.

A Analogia Entre o Princípio da Indução Matemática e os Dominós

Chegamos a um ponto muito importante dentro do que propomos neste trabalho, trata-se de uma analogia que permite uma assimilação eficaz do significado do Princípio da Indução Matemática. Vejamos:

Imagine uma fila com infinitos dominós dispostos de tal maneira que ao derrubarmos um dominó, este derruba o seguinte.

Dessa forma, considere as seguintes perguntas:

i) O que ocorre se derrubarmos o 1º dominó?

ii) E se o 7º for derrubado?

Esperamos no item (*i*), que os alunos aceitem com razoável facilidade que todos os dominós realmente irão cair.

Já no item (*ii*), esperasse que os alunos considerem que todos os dominós depois do sétimo (e o sétimo inclusive) sejam derrubados.

1.2 Enunciando o Princípio da Indução Matemática

Um Pouco de História

Segundo José Morgado em [12], a Indução Matemática foi enunciada explicitamente pela primeira vez em 1575 por Francesco Maurolycus e usada por ele para provar, por exemplo, que para todo $n \in \mathbb{N}$ é verdadeira a identidade:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \tag{1.1}$$

O método de demonstração por indução tornou-se popular ao ser utilizado por Blaise Pascal na sua obra Traité du Triangle Aritmétique (Tratado do Triângulo Aritmético), em 1665. Entretanto, foi com a escola algébrica inglesa, em 1838, num artigo de Augustus De Morgan intitulado “Induction (Mathematics)” que o método recebeu pela primeira vez o título de Indução Matemática. A demonstração por indução matemática considera o Princípio da Indução Matemática, este, está intrínseco no quarto axioma de Peano. Deve-se a Giussepe Peano (1858 – 1932) as quatro afirmações sobre os números naturais conhecidas como Axiomas de Peano. Um fato curioso é que o próprio Peano declarou em um de seus trabalhos (Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita) que esses axiomas são devidos a Dedekind.

Os Axiomas de Peano

Os Axiomas de Peano caracterizam o conjunto dos números naturais.

“Entender o Princípio da Indução é praticamente

o mesmo que entender os números naturais.”

(Elon Lages)

Os alunos do 1º ano do ensino médio, acham que entendem os números naturais, então, dessa forma, estão preparados para entender o Princípio da Indução Matemática.

Vejamos os Axiomas de Peano enunciados segundo o professor Elon Lages Lima em [13]:

i) Existe uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n.

ii) A função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é injetiva.

iii) Existe um único elemento chamado 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) Se um subconjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in \mathbb{N}$ e $s(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}$
(isto é, $n \in \mathbb{X} \Rightarrow s(n) \in \mathbb{X}$), então $\mathbb{X} = \mathbb{N}$.

Abaixo, apresentatmos uma espécie de "tradução para a linguagem corrente", escrita por Elon no mesmo artigo [13]. Entendemos que essa forma é a mais apropriada para ser trabalhada com os alunos aos quais dedicamos este trabalho.

I) Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.

II) Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. (Ou ainda: números que têm o mesmo sucessor são iguais.)

III) Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um".

IV) Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, contém todos os números naturais.

O quarto axioma é conhecido como Axioma de Indução.

É fundamental que os alunos sejam motivados a interpretarem a sutileza dos Axiomas de Peano, particularmente, o Axioma de Indução. Para tanto, sugerimos que os discentes sejam submetidos ao seguinte exercício.

"-Escrevam com suas próprias palavras uma livre adaptação dos quatro axiomas de Peano para a analogia dos dominós."

Este exercício pretende promover a criatividade dos alunos, fazendo uma interdisciplinaridade com a Língua Portuguesa. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), é de suma importância que todos os professores do ensino médio promovam em suas aulas uma noção de leitura e interpretação.

Esperamos, como resposta ao exercício sugerido, que os alunos escrevam algo parecido com o seguinte:

i) Todo dominó deve ter um único dominó o qual ele derrubará.

ii) Dominós diferentes derrubarão dominós diferentes. (Ou ainda: dominós que derrubam o mesmo dominó, são iguais.)

iii) Existe um único dominó que não pode ser derrubado por nenhum outro. Este é o primeiro dominó da fila.

iv) Se soubermos que ao ser derrubado, um dominó derruba o dominó seguinte e que o primeiro dominó foi derrubado, então podemos ter certeza que todos os dominós serão derrubados.

Claro que não esperamos que os alunos escrevam exatamente o que colocamos como expectativa de resposta para a adaptação dos quatro axiomas para a analogia dos dominós, entretanto, esperamos que escrevam algo parecido com o que aqui foi exposto. Entendemos ser bastante enriquecedor que após a conclusão deste exercício, seja demandado um tempo considerável para a socialização das diferentes adaptações feitas pelos alunos.

O Princípio da Indução Matemática

Vejamos o Princípio da Indução Matemática enunciado em [13] dentro de um ponto de vista estritamente matemático:

"Um subconjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{N}$ chama-se **indutivo** quando $s(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}$, ou seja, quando $n \in \mathbb{X} \Rightarrow s(n) \in \mathbb{X}$, ou ainda, quando o sucessor de qualquer elemento de $\mathbb{X}$ também pertence a $\mathbb{X}$."

Ou ainda, sob uma perspectiva da lógica, onde uma propriedade P define o conjunto $\mathbb{X}$, ou seja, o conjunto $\mathbb{X}$ é formado pelos elementos que gozam da propriedade P, o Princípio da Indução Matemática é dado em [13] como:

"Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 goza de P e se, além disso, o fato de o número natural n gozar de P implica que seu sucessor $s(n)$ também goza, então todos os números naturais gozam da propriedade P.

A seguir, enunciamos o Princípio da Indução Matemática, de modo que buscamos tornar ainda mais claro seu entendimento para nosso público alvo. Voltemos à analogia do dominó, mas dessa vez, considere ao invés de dominós, diretamente, uma sequência de afirmações sobre os números naturais, assim:

Axioma 1.2.1. *[O Princípio da Indução Matemática]*

Seja $P(n)$ uma afirmação sobre os números naturais tais que:

i) $P(1)$ é verdadeira;

ii) Se $P(n)$ for verdadeira, para algum n, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Dessa forma $P(n)$ é verdadeira para todo n natural.

A verificação de que $P(1)$ é verdadeira, é chamada de passo base. A verificação de que a veracidade de $P(n)$ implica na de $P(n+1)$, é chamada de passo indutivo. Feitos estes dois passos, utilizando o passo indutivo e a veracidade de $P(1)$, podemos concluir que $P(2)$ é verdadeira. Usando o passo indutivo e o fato de $P(2)$ ser verdadeira, podemos concluir que $P(3)$ é verdadeira, e assim por diante.

A fim de demandar um maior entendimento do Princípio da Indução Matemática com nosso público alvo, pensamos no seguinte exercício direcionado aos discentes.

"- Observem o seguinte diagrama. Em seguida, escreva com suas próprias palavras o Princípio da Indução Matemática relacionado diretamente com este diagrama."

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \ 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n \longrightarrow n+1 \longrightarrow \ldots$$

A importância de tratarmos questões como esta, dar-se-á por motivos já explicados quando citamos os PCN's. Devemos motivar nossos alunos a aprenderem Matemática juntamente com a leitura e interpretação. Aqui, temos o seguinte como expectativa de resposta:

Se o número 1 é o primeiro número do diagrama e, além disso, cada número está ligado ao seu sucessor, então o diagrama representa a ligação entre todos os números naturais.

A seguir, vamos apresentar uma demonstração para a identidade (1.1), a qual foi proposta no início do capítulo.

Proposição 1.2.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros números ímpares, resulta em n^2.*

Demonstração

Primeiramente, devemos verificar o passo base, ou seja, a validade para $P(1)$.

$*P(1) : 1 = 1^2$

Sabemos que basta isso para cumprirmos o passo base, no entanto, entendemos que para nossos alunos do ensino médio é recomendado que, por enquanto, estendamos esse primeiro passo para mais algumas verificações. Vejamos:

$P(2) : 1 + 3 = 4 = 2^2$

$P(3) : 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$P(4) : 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$P(5) : 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

Até para os mais céticos, acreditamos que estas cinco primeiras verificações são suficientes para se apropriarem que o passo base foi, de fato, dado. Contudo, é imprescindível que o professor deixe claro para seus alunos que o passo base é a verificação de $P(1)$.

Agora, vejamos o passo indutivo. Considere a sentença:

"Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum n", ou seja, "suponha que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ seja verdadeira para algum número natural".

Agora devemos mostrar[1] que partindo desta suposição, podemos concluir a veracidade de $P(n+1)$, ou seja, que a igualdade $1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$ também é verdadeira.

De fato[2],

$$\begin{aligned} P(n+1) : \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)}_{H.I.\ =\ n^2} + (2n+1) &\overset{H.I.}{=} n^2 + (2n+1) \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Portanto, podemos afirmar que $P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para todo n natural.

Observação 1.2.1. *Queremos registrar que uma considerável atenção deve ser dada em sala de aula, a fim de tentar corrigir um erro comum dos iniciantes nas demonstrações por indução. Trata-se da verificação do passo base, quando alguns alunos acham erroneamente que:*

$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2 \overset{n=1}{\Rightarrow} 1+3+5+\ldots+[2(1)n-1] = 1+3+5+\ldots+1 \neq 1^2$

1.3 Provando Identidades

Em [11], páginas 8 e 9, conta-se que, certa vez, um pequeno prodígio de 9 anos de idade conhecido por Gauss (1777-1855), surpreendeu o seu professor ao resolver rapidamente o exercício de somar todos os números naturais de 1 até 100. Na ocasião, Gauss percebeu que a soma dos termos equidistantes dos extremos resultava sempre

[1]Queremos deixar claro que é sempre aconselhável redigir o que se quer demonstrar, pois, dessa forma, facilita a compreensão dos artifícios utilizados em busca da conclusão da demonstração. Faremos isso ao longo do texto

[2]Considere de agora em diante em todo o texto: H.I. como sendo a abreviatura de Hipótese de Indução.

em 101, ou seja, $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51$. Para concluir sua resposta, bastou efetuar o produto entre 50 e 101, obtendo como resposta 5050.

Vejamos como determinar uma sentença fechada, uma fórmula, para a obtenção da soma dos n primeiros números naturais.

Seja S_n a soma dos n primeiros números naturais, ou seja:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$

Utilizando a propriedade comutativa da adição, podemos reescrever S_n da seguinte maneira:

$$S_n = n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Somando as duas formas de escrever S_n termo a termo e usando o fato de que a soma dos termos equidistantes dos extremos resulta sempre em $n + 1$, temos:

$$2S_n = (n+1)n \Rightarrow S_n = \frac{(n+1)n}{2}$$

O fato é que poderíamos conjecturar e, em seguida, demonstrar, utilizando o Princípio da Indução Matemática, a veracidade desta última identidade. Vejamos:

Proposição 1.3.1. *A soma dos n primeiros números naturais, resulta em* $\frac{(1+n)n}{2}$.

Demonstração

Passo base:

$P(1) : 1 = \frac{(1+1)1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:

Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum n, ou seja, que $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$ para algum número natural. Agora, devemos mostrar que a validade de $P(n)$ para algum n, implica a validade de $P(n+1)$, ou seja, que se $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$ for verdade para algum n, então implica que $S_{n+1} = \frac{[1+(n+1)](n+1)}{2}$ também é verdade.

De fato,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1) \\ &= \underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{H.I.\ =\ \frac{(1+n)n}{2}} + (n+1) \\ &\overset{H.I.}{=} \frac{(1+n)n}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(1+n)n}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{[1+(n+1)](n+1)}{2} \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a soma dos n primeiros números naturais, resulta em $\frac{(1+n)n}{2}$.

Vejamos a demonstração de outra interessante identidade:

Queremos mostrar que a soma dos n primeiros números quadrados, resulta em $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ou seja, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Os alunos do ensino médio já estudaram os **Produtos Notáveis** , particularmente, em relação ao cubo da soma de dois termos, sabemos que:

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \tag{1.2}$$

Observe o que acontece quando na identidade 1.2, fazemos $x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$:

$x = 0 \Rightarrow (0+1)^3 = 0^3 + 3 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1 = 1^3$

$x = 1 \Rightarrow (1+1)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 8 = 2^3$

$x = 2 \Rightarrow (2+1)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 27 = 3^3$

$x = 3 \Rightarrow (3+1)^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1 = 64 = 4^3$

$x = 4 \Rightarrow (4+1)^3 = 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1 = 125 = 5^3$

$x = n \Rightarrow (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$

Somando termo a termo:

$(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + [3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)] + [3(1 + 2 + \ldots + n)] + (1 + 1 + \ldots + 1) =$
$= 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3$

Observe que nos dois membros aparecem a soma dos n primeiros números cúbicos, logo, podemos reescrever a expressão da seguinte forma:

$$3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + (1 + 1 + \ldots + 1) = (n + 1)^3$$

Agora, na primeira parcela, temos a soma dos n primeiros números quadrados, vamos denotá-la por S_n. Na segunda parcela, temos a soma dos n primeiros números naturais que já sabemos que resulta em $\frac{(n+1)n}{2}$ e, finalmente, a terceira parcela é a soma de $(n + 1)$ parcelas iguais a 1, logo, resultando em $(n + 1)$. Assim:

$$3S_n + 3\frac{(n + 1)n}{2} + (n + 1) = (n + 1)^3$$

Multiplicando por 2 em ambos os membros:

$$6S_n + 3(n + 1)n + 2(n + 1) = 2(n + 1)^3$$

A fim de isolar S_n, temos:

$$6S_n = -3n(n + 1) - 2(n + 1) + 2(n + 1)^3$$

Colocando (n + 1) em evidência:

$$6S_n = (n + 1)[-3n - 2 + 2(n + 1)^2]$$

$$6S_n = (n + 1)[-3n - 2 + 2(n^2 + 2n + 1)]$$

$$6S_n = (n + 1)(-3n - 2 + 2n^2 + 4n + 2)$$

$$6S_n = (n + 1)(2n^2 + n)$$

$$6S_n = (n + 1)n(2n + 1)$$

Portanto:

$$S_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Mais uma vez, como na Proposição 1.3.1, ao invés de demonstrar está ultima identidade, poderíamos conjecturá-la e, em seguida, demonstrá-la, utilizando o Princípio da Indução Matemática. Vejamos:

Proposição 1.3.2. *A soma dos n primeiros números quadrados, resulta em* $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Demonstração

Passo base:
$P(1) : 1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:
Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum n, ou seja, que
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para algum número natural.

Vamos mostrar agora que a validade de $P(n)$ para algum n, implica na validade de $P(n+1)$, ou seja, que se $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ for verdade para algum n, então $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$ também é verdade.

De fato,

$$\begin{aligned}
\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}_{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2 &\overset{H.I.}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a soma dos n primeiros números quadrados, resulta em $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Vejamos a demonstração de mais uma identidade:

Proposição 1.3.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:* $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Demonstração

Passo base:
$P(1) : \frac{1}{(1)[(1)+1]} = \frac{1}{2} = \frac{(1)}{(1)+1}$.
Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Queremos mostrar que $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}}_{H.I. = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &\overset{H.I.}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Como podemos ver, as proposições mostradas até agora são todas de identidades, suas resoluções seguem certo padrão. Ressaltamos que nosso público alvo tende normalmente a buscar procurar padrões que os permitam ficarem confortáveis e confiantes para assim obterem motivação para aprofundar ainda mais os estudos, sendo assim, sugerimos que seja demandado um considerável tempo com a realização de mais exercícios como estes para que os discentes possam amadurecer os conhecimentos vistos até aqui. Ressaltamos que o professor não deve deixar de ter cuidado com as diferentes velocidades de aprendizagem que encontramos na sala de aula.

1.4 Por que o Nome Indução?

Certamente, um dos pontos que devemos esclarecer ao nosso público alvo é o motivo pelo qual o Princípio da Indução Matemática tem esse nome “indução”, pois esta palavra deriva do verbo induzir, o que nos remete a pensar no processo de ensino e aprendizagem que costumeiramente os alunos são apresentados no ensino fundamental, quando, normalmente, o professor mostra a validade de uma certa proposição para os primeiros números naturais e, em seguida, após evidenciar um certo padrão, induz a generalização do resultado para todos os números naturais.

Na verdade, a Indução Matemática é um processo dedutivo, logo poderia ser chamada de "Dedução Matemática", não sendo, por entendermos que a Matemática é essencialmente estruturada pelo processo dedutivo, isto, obviamente, encobriria o brilho da importância do Princípio da Indução Matemática.

O nome "indução" deve-se ao processo empírico que antecede o início de uma demonstração por Indução. Se pretendemos demonstrar a veracidade de uma identidade como as que foram sugeridas na Seção 1.3, é natural que nos questionemos em algum momento como foram obtidas aquelas expressões resultantes que aparecem no segundo membro das igualdades. Pois bem, aquelas expressões podem ser obtidas através de um processo empírico de indução. Este processo consiste em buscar observar padrões em inúmeras repetições e trata-se de um procedimento muito usual nas Ciências Naturais (Química, Física, Biologia, etc.).

A seguir, reproduzimos a experiência da descoberta da expressão que fornece a soma dos n primeiros números pares. Para isso, inicialmente, observe as seguintes operações:

$s(1) = 2 = 1 \times 2$

$s(2) = 2 + 4 = 6 = 2 \times 3$

$s(3) = 2 + 4 + 6 = 12 = 3 \times 4$

$s(4) = 2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \times 5$

$s(5) = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 = 5 \times 6$

$s(6) = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42 = 6 \times 7$

$s(7) = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56 = 7 \times 8$

Os resultados observados sugerem que $s(n) = n(n+1)$. Entretanto, já sabemos, do Exemplo 1.1.2 da página 5, que a verificação de identidades para alguns naturais não assegura que tais identidades são verdadeiras para todo natural.

Contudo, essas observações podem nos levar a formular a identidade para depois demonstrá-la por indução.

Proposição 1.4.1. *A soma dos n primeiros números pares resulta em $n(n+1)$.*

Demonstração

Como o passo base já foi mostrado, vamos direto para o passo indutivo.

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros números pares resulta em $n(n+1)$, ou seja, $2+4+\ldots+2n = n(n+1)$.

Queremos mostrar que $2+4+\ldots+2n+2(n+1) = (n+1)(n+2)$. De fato,

$$\begin{aligned} \underbrace{2+4+\ldots+2n}_{H.I.\ =\ n(n+1)} + 2(n+1) &\overset{H.I.}{=} n(n+1)+2(n+1) \\ &= (n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Portanto, pelo Principio da Indução Matemática, a soma dos n primeiros números pares resulta em $n(n+1)$.

Vejamos outro exemplo no qual, primeiramente, conjecturamos um resultado e, em seguida, aplicamos o Princípio da Indução Matemática para comprová-lo.

Considere o conjunto $A = \{x\}$, então os subconjuntos de A são:

A e ϕ.

Se o conjunto tem 1 elemento, então ele possui 2^1 subconjuntos.

Considere o conjunto $B = \{x, y\}$, então os subconjuntos de B são:

$\{x\}, \{y\}, A$ e ϕ.

Se o conjunto tem 2 elementos, então ele possui 2^2 subconjuntos.

Considere o conjunto $C = \{x, y, z\}$, então os subconjuntos de C são:

$\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, B$ e ϕ.

Se o conjunto tem 3 elementos, então ele possui 2^3 subconjuntos.

Considere o conjunto $D = \{x, y, z, w\}$, então os subconjuntos de D são:

$\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{w\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{x, w\}, \{y, z\}, \{y, w\}, \{z, w\}$,

$\{x, y, z\}, \{x, y, w\}, \{y, z, w\}, \{x, z, w\}, C$ e ϕ.

Se o conjunto tem 4 elementos, então ele possui 2^4 subconjuntos.

Podemos então conjecturar que 2^n é o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos. Vamos a prova desta conjectura.

Proposição 1.4.2. *O número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é igual a 2^n.*

Demonstração

O passo base já foi verificado, então vamos ao passo indutivo.

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é igual a 2^n. Vamos mostrar que se o conjunto tiver $n+1$ elementos, então seu número de subconjuntos será de 2^{n+1}.

De fato, considere os conjuntos X e Y, sendo X com $n+1$ elementos e Y um conjunto com n elementos, sendo que seus elementos são quase todos os elementos de X, excetuando um único elemento, digamos a_1, ou seja, $Y = X - \{a_1\}$, tais que:

$$X = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}\}$$

$$e$$

$$Y = \{a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}\}$$

Observe que o conjunto Y possui n elementos, logo, por hipótese de indução, o conjunto Y possui 2^n subconjuntos. E mais, cada um destes subconjuntos, também é subconjunto do conjunto X, já que $Y \subset X$, reforçando que esta contagem fornece parte dos subconjuntos do conjunto X.

Agora, observe que dado um subconjunto A de X, temos $a_1 \in A$ ou $a_1 \notin A$. Se $a_1 \notin A$, então A é subconjunto de Y. Já sabemos que existem 2^n subconjuntos como este. Se $a_1 \in A$, então $A = B \cup \{a_1\}$, onde $B \subset Y$, assim o número de conjuntos como este é igual a 2^n. Dessa forma, o número de subconjuntos de X é $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é igual a 2^n.

Vejamos mais um exemplo que consideramos interessante para consjecturarmos e depois demonstrá-lo com o Princípio da Indução matemática. Trata-se da soma dos n primeiros números cúbicos. Observe a seguinte tabela:

Soma dos Números Cúbicos		Quadrado da Soma dos Naturais	
1^3	1	1^2	1
$1^3 + 2^3$	9	$(1+2)^2$	9
$1^3 + 2^3 + 3^3$	36	$(1+2+3)^2$	36
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$	100	$(1+2+3+4)^2$	100
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$	225	$(1+2+3+4+5)^2$	225
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$	441	$(1+2+3+4+5+6)^2$	441
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$	784	$(1+2+3+4+5+6+7)^2$	784

Podemos então conjecutar que a soma dos n primeiros números cúbicos resulta no quadrado da soma dos n primeiros números naturais. Sendo que sabemos da proposição 1.3.1 que a soma dos n primeiros números naturais resulta em $\frac{(n+1)n}{2}$, logo, nossa conjectura pode ser assim reformulada na forma da seguinte proposição:

Proposição 1.4.3. *A soma dos n primeiros números cúbicos resulta em* $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$*, ou seja,* $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Demonstração

Passo base:
$P(1) : 1^3 = \left\{\frac{(1)[(1)+1]}{2}\right\}^2 = \left[\frac{1.(2)}{2}\right]^2 = 1.$

Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:
Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que
$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ para algum número natural.
Vamos mostrar agora que a validade de nossa suposição para algum n, implica que $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \left\{\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}\right\}^2$ também é verdade.

De fato,

$$
\begin{aligned}
\underbrace{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}_{H.I.\ =\ \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}+(n+1)^3 &\overset{H.I.}{=} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a soma dos n primeiros números cúbicos resulta em $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, ou seja, $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Capítulo 2

Cuidados na Utilização do Princípio da Indução Matemática

A seguir, serão exibidas situações que mostram que nenhum dos passos de uma demonstração por indução pode ser descartado.

2.1 Descartando o Passo Base

Suponha que a soma dos n primeiros números naturais resulte em $\frac{(2n+1)^2}{8}$, ou seja, $1+2+3+...+n = \frac{(2n+1)^2}{8}$. Vamos mostrar que supondo esta última identidade válida para algum $n \in \mathbb{N}$, então também será verdade que $1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{[2(n+1)+1]^2}{8}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\underbrace{1+2+3+...+n}_{H.I.\ =\ \frac{(2n+1)^2}{8}}+(n+1) &\overset{H.I.}{=} \frac{(2n+1)^2}{8}+(n+1) \\
&= \frac{4n^2+4n+1}{8}+\frac{8(n+1)}{8} \\
&= \frac{4n^2+12n+9}{8} \\
&= \frac{(2n+3)^2}{8} \\
&= \frac{[2(n+1)+1]^2}{8}
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Mas, algo de errado aconteceu, pois sabemos da Proposição 1.3.1 na página 11 que a soma dos n primeiros números naturais, resulta em $\frac{(1+n)n}{2}$ e não podemos ter a mesma soma resultando agora em $\frac{(2n+1)^2}{8}$, já que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(1+n)n}{2} \neq \frac{(2n+1)^2}{8}. \tag{2.1}$$

Assim, exemplificamos para os alunos que o passo base é crucial para que o Princípio da Indução Matemática seja utilizado como ferramenta de demonstração.

Vamos aproveitar para demonstrar a Desigualdade 2.1.

Demonstração

Suponha, por absurdo que $\frac{(1+n)n}{2} = \frac{(2n+1)^2}{8}$.

Segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{(1+n)n}{2} &= \frac{(2n+1)^2}{8} \\
\frac{8(1+n)n}{2} &= \frac{8(2n+1)^2}{8} \\
4(1+n)n &= (2n+1)^2 \\
4n + 4n^2 &= 4n^2 + 4n + 1 \\
0 &= 1
\end{aligned}$$

Como chegamos a um absurdo, isso implica que nossa suposição inicial é falsa.

Portanto, $\frac{(1+n)n}{2} \neq \frac{(2n+1)^2}{8}$

2.2 O Enigma do Cavalo de Alexandre

Vejamos um exemplo em que o Princípio da Indução Matemática é usado de maneira sutilmente errada. Segundo Abramo Hefez em [11], página 16, trata-se de um problema proposto pelo matemático húngaro George Pólya (1887 - 1985), este problema é conhecido como "O Enigma do Cavalo de Alexandre".

Proposição 2.2.1 (FALSA)**.** *Todos os cavalos são da mesma cor.*

Demonstração

Vamos mostrar que qualquer conjunto de cavalos contém apenas cavalos da mesma cor.

Passo base:

Em um conjunto unitário, com apenas um cavalo, obviamente, "todos" tem a mesma cor.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, em um conjunto com n cavalos, todos tenham a mesma cor. Queremos mostrar que em um conjunto com $n+1$ cavalos, todos continuam tendo a mesma cor. Para isso, considere um conjunto com $n+1$ cavalos, digamos:

$$X = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}\}$$

Então, podemos decompôr o conjunto X como:

$$X = X_1 \cup X_2 = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n\} \cup \{a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}\}$$

Onde:

$$X_1 = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n\}$$

$$e$$

$$X_2 = \{a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}\}$$

Sendo assim, por hipótese de indução, todos os cavalos do conjunto X_1 tem a mesma cor e o mesmo podemos falar do conjunto X_2.

Entretanto, o cavalo a_2, por exemplo, pertence aos dois conjuntos, X_1 e X_2.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, todos os cavalos do conjunto X tem a mesma cor do cavalo a_2.

Obviamente, esperamos que os alunos do 1º ano do ensino médio questionem veementemente: "– Como pode esta demonstração estar correta?"

Novamente, antes que o Princípio da Indução Matemática perca qualquer credibilidade por este resultado espantoso, devemos lembrar que alertamos que iríamos utilizá-lo de maneira incorreta.

O passo indutivo consiste em mostrar que se o resultado é válido para um número natural **qualquer** n, então também é válido para $n+1$.

Foi mostrado que a veracidade do resultado para n implica na veracidade para $n+1$ apenas nos casos em que $n \geq 2$, mas não provamos (e nem podemos provar) que o resultado sendo válido para $n = 1$ implica na veracidade de seu sucessor. Isso mostra que a demonstração está errada.

Capítulo 3

Aprofundando o Estudo Sobre o Princípio da Indução Matemática

3.1 Generalização do Princípio da Indução Matemática

Até aqui, utilizamos o Princípio da Indução Matemática executando o passo base para $n = 1$, entretanto, retomando a analogia com os dominós, se ao invés de derrubarmos o primeiro dominó, derrubássemos, por exemplo, o sétimo dominó, então teríamos que todos os dominós a partir do sétimo cairiam. Essa analogia é formalizada no teorema abaixo.

Teorema 3.1.1 (Generalização do Princípio da Indução Matemática)**.**
Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{N}$ *tal que:*
i) $a \in \mathbb{X}$*;*
ii) Se $n \in \mathbb{X}$*, para algum* $n \geq a$*, então* $n + 1 \in \mathbb{X}$*.*
Nestas condições, $\mathbb{X} = \{n \in \mathbb{N}; n \geq a\}$.

A fim de tornar mais claro o entendimento deste teorema, queremos destacar que o Princípio da Indução Matemática é um caso particular de sua generalização, pois na Generalização do Princípio da Indução Matemática, o passo base é dado para um $n = a$ e o passo indutivo consiste em mostrar que se $P(n)$ é verdadeira para algum $n \geq a$, então $P(n + 1)$ também é verdadeira. Dessa forma, teremos demonstrado a veracidade de $P(n)$ para todo $n \geq a$.

Demonstração. do Teorema 3.1.1

Considere o conjunto

$$\mathbb{Y} = \{n \in \mathbb{N}; n + a - 1 \in \mathbb{X}\}$$

Queremos mostrar que $\mathbb{X} = \{n \in \mathbb{N}; n \geq a\}$, o que é equivalente a mostrar que $\mathbb{Y} = \mathbb{N}$. Se $n = 1$, então $(1) + a - 1 = a$, logo, o passo base está verificado, ou seja, $a \in \mathbb{X}$, equivalentemente, $1 \in \mathbb{Y}$.

Passo indutivo:

Suponha que $n \in \mathbb{Y}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $n + 1 \in \mathbb{Y}$.

De fato, $n \in \mathbb{Y}$ implica que $n + a - 1 \in \mathbb{X}$, então por (ii), $n + a \in \mathbb{X}$, ou seja, $n + 1 \in \mathbb{Y}$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, $\mathbb{Y} = \mathbb{N}$. $\square$

Em seguida veremos duas aplicações simples da Generalização do Princípio da Indução Matemática.

Proposição 3.1.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$, temos que $2n + 1 < 2^n$.*

Demonstração

Note que a Proposição 3.1.1 é falsa para $n = 1$ e $n = 2$.

Passo base:

Para $n = 3$, temos $2(3) + 1 = 7 < 8 = 2^{(3)}$.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$, tenhamos $2n + 1 < 2^n$. Queremos mostrar que $2(n + 1) + 1 < 2^{n+1}$.

Com efeito,

$2(n + 1) + 1 = 2n + 2 + 1 = (2n + 1) + 2 \overset{H.I.}{<} (2^n) + 2$

Como $2 < 2^n$ para todo $n \geq 3$, temos:

$2(n + 1) + 1 < 2^n + 2 \Rightarrow 2(n + 1) + 1 < 2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$, temos que $2n + 1 < 2^n$.

Proposição 3.1.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 5$, temos que $n^2 < 2^n$.*

Demonstração

Apesar da Proposição 3.1.2 ser verdadeira para $n = 1$, obviamente, ela é falsa para $n = 2, 3, 4$.

Passo base:

Para $n = 5$, temos $(5)^2 = 25 < 32 = 2^{(5)}$.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 5$, tenhamos $n^2 < 2^n$. Queremos mostrar que $(n+1)^2 < 2^{n+1}$.

De fato,

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{H.I.}{<} 2^n + 2n + 1$.

Como, pela Proposição 3.1.1, sabemos que $2n + 1 < 2^n$ para todo $n \geq 3$ e aqui, em particular, $5 \geq 3$, segue que:

$(n+1)^2 < 2^n + 2n + 1 \overset{*}{\Rightarrow} (n+1)^2 < 2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 5$, temos que $n^2 < 2^n$.

Observação 3.1.1. *Na última linha da demonstração da Proposição 3.1.2, a implicação marcada com $*$ é consequência da Proposição 3.1.1. Note que a Proposição 3.1.1 diz que $2n + 1 < 2^n$ apenas para $n \geq 3$ e na Proposição 3.1.2 temos que $n \geq 5$.*

Capítulo 4

Problemas do Mundo Material

4.1 A Torre de Hanói

A Torre de Hanói é um quebra-cabeça formado por três pinos que representam torres e por n discos de tamanhos distintos. O jogo consiste em transportar todos os discos de uma torre para outra, movendo um disco de cada vez sem, em momento algum, colocar um disco maior sobre um disco menor.

Existem várias lendas a respeito da origem da Torre de Hanói, uma delas remete a um Deus que havia criado, juntamente com a origem do planeta Terra, três torres equilibradas sobre uma plataforma com 64 discos de ouro de diâmetros distintos fincados em uma das torres. O Deus ordenou que os discos fossem movidos de uma torre para outra seguindo duas regras:

i) Apenas um disco poderia ser movido por vez;

ii) Nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor.

Segundo esta lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma torre para a outra, o mundo acabaria.

Supondo que os sarcedotes responsáveis por cumprir a ordem divina levassem 1 segundo para transportar cada disco de uma torre para a outra e que eles soubessem movimentar os discos de modo que concluíssem sua missão após $2^{64} - 1$ movimentos (número mínimo de movimentos para resolver a Torre de Hanói, como será mostrado adiante), então eles demorariam exatamente 18.446.744.073.709.551.615 segundos, ou seja, aproximadamente 584.942.417.355 anos. Como estima-se que o planeta Terra tenha cerca de $4,5$ bilhões de anos[1], então ainda resta ao nosso planeta, cerca de 580 bilhões de anos.

[1]fonte: http://www.igc.usp.br/index.php?id=304, acessado em 15 de dezembro de 2012

Figura 4.1: Torre de Hanói

Ao conhecer "A Torre de Hanói", surgem, naturalmente, duas perguntas:

i) Existe solução do quebra-cabeça para cada $n \in \mathbb{N}$?

ii) Qual o número mínimo de movimentos para solucionar o quebra-cabeça com n discos?

Vejamos as proposições e respectivas demonstrações que respondem estas perguntas:

Proposição 4.1.1. *A Torre de Hanói com n discos tem solução para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração

Vamos provar nossa tese utilizando o Princípio da Indução Matemática.

Passo base:

Para $n = 1$, certamente o quebra-cabeça tem solução, pois, basta transportar o único disco de uma torre para outra.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, a torre com n discos possa ser solucionada. Vamos mostrar que a torre também pode ser solucionada com $n + 1$ discos.

De fato, digamos que os $n + 1$ discos estejam, inicialmente, dispostos na torre X. Por hipótese de indução, sabemos mover os n discos menores para a torre Y. Com um único movimento, podemos agora mover o maior dos discos da torre X para a torre Z. Utilizando novamente a hipótese de indução, podemos mover os n discos que estavam na torre Y para a torre Z.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, o quebra-cabeça tem solução para todo $n \in \mathbb{N}$.

A segunda questão é, digamos, capciosa, pois não basta obter uma fórmula que estabeleça um número de movimentos para solucionar a torre, devemos ainda garantir que ela forneça a quantidade mínima de movimentos. Sendo assim, considere Q_n o número mínimo de movimentos que resolve a torre com n discos.

Proposição 4.1.2. *O número mínimo de movimentos que resolve a Torre de Hanói com n discos (Q_n) satisfaz $Q_n = 2Q_{n-1} + 1$.*

Demonstração

Passo Base:

Para $n = 1$, temos:

$Q_1 = 2Q_{1-1} + 1 = 2Q_0 + 1 = 1$ e 1 é certamente o número mínimo de movimentos que resolve a torre com um disco.

Passo indutivo:

Considere a Torre de Hanói com n discos.

Para movimentar o maior dos discos, necessariamente, todos os outros $n - 1$ discos menores devem ser removidos de cima dele, sendo necessário, no mínimo, Q_{n-1} movimentos.

Agora, com um único movimento, podemos mover o maior dos discos. Finalmente, com mais Q_{n-1} movimentos, no mínimo, podemos mover os $n - 1$ discos menores de volta para cima do disco maior.

Portanto, precisamos de, no mínimo, $Q_{n-1} + 1 + Q_{n-1} = 2Q_{n-1} + 1$ para resolver a torre com n discos.

Já temos uma resposta aceitável para nossa pergunta sobre o número mínimo de movimentos para solucionar a torre, pois, a igualdade $Q_n = 2Q_{n-1} + 1$ é uma relação de recorrência, uma vez que para calcular Q_n usamos o valor anterior Q_{n-1}, ou seja, para determinar Q_2 usamos Q_1, Q_3 é determinado por Q_2 e assim, sucessivamente.

Contudo, vamos obter uma identidade que forneça diretamente o valor de Q_n. Observe a tabela abaixo, ela mostra como conjecturar que a quantidade mínima de movimentos necessários para resolver a torre com n discos é de $2^n - 1$ movimentos. Sugerimos que, em sala de aula, formem grupos (de até seis alunos) e deixe-os manipularem a torre de Hanói, buscando preencher a tabela abaixo a fim de conjecturar a expressão $2^n - 1$.

Quantidade de discos	Quantidade mínima de movimentos	2^n	$2^n - 1$
1	1	2	1
2	3	4	3
3	7	8	7
4	15	16	15
5	31	32	31
6	63	64	63
7	127	128	127

Vamos agora utilizar, novamente, o Princípio da Indução Matemática para demonstrar que:

Proposição 4.1.3. *O número mínimo de movimentos que resolve a Torre de Hanói com n discos é de $2^n - 1$ movimentos.*

Demonstração

Passo base:

Para $n = 1$, temos:

$2^1 - 1 = 1$

e, de fato, precisamos somente de um movimento para resolver a torre com um disco.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, a torre com n discos é solucionada com, no mínimo, $2^n - 1$ movimentos. Vamos mostrar que se a torre tiver com $n + 1$ discos, então precisaremos de, no mínimo, $2^{n+1} - 1$ movimentos.

De fato, tomemos agora a torre com $n + 1$ discos. Precisamos mover os n discos menores para uma outra torre, o que pela hipótese de indução é feito com, no mínimo, $2^n - 1$ movimentos. Precisamos, agora, mover o maior, o que é feito, obviamente, com um único movimento. Utilizando novamente a hipótese de indução, com, no mínimo, mais $2^n - 1$ movimentos movemos os outros n discos menores para cima do disco maior, resolvendo assim a torre com $n + 1$ discos. Dessa forma, o número mínimo de movimentos é:

$2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2.2^n - 1 = 2^{n+1} - 1.$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a torre com n discos é resolvida com, no mínimo, $2^n - 1$ movimentos.

4.2 A Moeda Falsa

Objetivando despertar um maior interesse dos alunos a respeito do Princípio da Indução Matemática, sugerimos a seguinte atividade na qual pedimos aos alunos que considerem uma balança de dois pratos e, inicialmente, oito moedas aparentemente idênticas, sendo uma delas com peso diferente, "a moeda falsa". Desafie-os a descobrirem a moeda falsa com, no máximo, três pesagens.

Imaginamos que, por tentativa e erro, os alunos não demoraram em superar este desafio.

Em seguida, sugerimos que o professor aumente gradativamente a quantidade de moedas, sempre com quantidades que possam ser expressas por uma potência de base 2, ou seja, 2^n, e mantendo uma única moeda falsa, repetindo o desafio de que eles tentem encontrar a moeda falsa com, no máximo, n pesagens.

Assim, é possível conjecturar que:

Proposição 4.2.1. *Em uma coleção com 2^n moedas aparentemente iguais, sendo somente uma delas falsa, com peso menor do que as demais e dispondo-se de uma balança de dois pratos, sem nenhum peso. É possível achar a moeda falsa com n pesagens.*

Demonstração

Passo base:

Para $n = 1$, temos somente duas moedas e, evidentemente, ao colocarmos uma moeda em cada prato da balança, aquele prato que elevar-se certamente guardará a moeda mais leve, a moeda falsa. Logo, com uma única pesagem, determinamos a moeda falsa.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, dadas 2^n moedas aparentemente iguais, podemos achar a moeda falsa com n pesagens. Queremos mostrar que dadas 2^{n+1} moedas, com somente uma moeda falsa, podemos encontra-lá com $n+1$ pesagens.

De fato, separando as 2^{n+1} moedas nos dois pratos em duas porções iguais, cada prato terá 2^n moedas, sendo que a moeda falsa estará no prato que elevar-se. Considerando esta porção onde sabemos que está a moeda falsa, pela hipótese de indução, é possível encontrar a moeda falsa com n pesagens. Assim, o número total de pesagens, para 2^{n+1} moedas, é $n+1$. O que encerra a demonstração por indução.

Capítulo 5

Aplicando a Técnica de Demonstração por Indução

Nessa altura, os alunos devem estar com uma razoável noção do Princípio da Indução Matemática. A fim de propiciar novo aprofundamento, sugerimos algumas demonstrações que envolvam divisibilidade, desigualdades e problemas geométricos.

5.1 Problemas de Divisibilidade

Os mais antigos problemas da Matemática estão relacionados ao conjunto dos números naturais, uma vez que este é o primeiro conjunto numérico que conhecemos. No famoso livro "Os Elementos"[1], Euclides já afirmava que a divisibilidade é um conceito importante para o estudo dos números naturais. Dizemos que a divide b (ou que b é múltiplo de a), com $a, b \in \mathbb{N}$, se existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = ac$. A notação usada é $a|b$.

Vejamos algumas aplicações do Princípio da Indução Matemática para demonstrar proposições sobre divisibilidade:

Proposição 5.1.1. *A soma dos cubos de três números naturais consecutivos é divisível por 9.*

Demonstração

Vamos mostrar que $9|\left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right], \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

[1]Tratado matemático que consiste de 13 livros escrito pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C..

Passo base:
Para $n = 1$, temos $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$
e 36 é divisível por 9.

Passo indutivo:
Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k_1$, com $k_1 \in \mathbb{Z}$, ou seja, estamos supondo que para algum número natural, sabemos que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é divisível por 9.

Queremos provar que $(n+1)^3 + [(n+1)+1]^3 + [(n+2)+1]^3 = 9k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + [(n+1)+1]^3 + [(n+2)+1]^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 \\ &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\ &= \underbrace{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}_{H.I. = 9k_1} + 9(n^2 + 3n + 3) \\ &\overset{H.I.}{=} 9k_1 + 9k_2 = 9k \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é divisível por 9.

Proposição 5.1.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ é múltiplo de 7.*

Demonstração
Passo base:
Para $n = 1$, temos: $3^{2.(1)+1} + 2^{(1)+2} = 3^3 + 2^3 = 35$ e 35 é divisível por 7.

Passo indutivo:
Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k_1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Queremos mostrar que $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ também é múltiplo de 7.

De fato,

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} &= 3^{2n+2+1} + 2^{n+1+2} \\
&= 3^{2n+1+2} + 2^{n+2+1} \\
&= 3^{2n+1}.3^2 + 2^{n+2}.2^1 \\
&= 3^{2n+1}.9 + 2^{n+2}.2 \\
&= 9.3^{2n+1} + 2.2^{n+2} \\
&= 7.3^{2n+1} + 2.3^{2n+1} + 2.2^{n+2} \\
&= 7.3^{2n+1} + 2.(\underbrace{3^{2n+1} + 2^{n+2}}_{H.I.\ =\ 7k_1}) \\
&\overset{H.I.}{=} 7.3^{2n+1} + 2.(7k_1) = 7k \\
&= 7(3^{2n+1} + 2k_1) = 7k
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ é múltiplo de 7.

5.2 Problemas de Desigualdade

Na Matemática existem muitos problemas envolvendo desigualdades. Elas são demonstradas utilizando as mais diversas técnicas, entre elas: demonstração direta; demonstração por redução ao absurdo; demonstração por indução; demonstração por contradição.

A seguir, vejamos alguns exemplos em que provamos desigualdades utilizando o Princípio da Indução Matemática.

Proposição 5.2.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}} < 2$, na qual, o primeiro membro desta desigualdade contém n radicais.*

Demonstração

Passo base:

Para $n = 1$, temos no primeiro membro da desigualdade um único radical. Logo, o passo base é trivial, pois $\sqrt{2} < 2$.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}} < 2$, sabendo que no primeiro membro desta desigualdade temos n radicais. Queremos mostrar agora que com $n+1$ radicais a desigualdade ainda é verdadeira.

De fato, partindo da hipótese de indução e adicionando 2 aos dois membros, temos:
$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}} < 2 \Rightarrow 2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}} < 2+2 = 4$

Agora, extraindo a raiz quadrada nos dois membros, o primeiro membro passa a ter $n+1$ radicais e o segundo membro resulta em 2.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos
$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}} < 2$, na qual, o primeiro membro desta desigualdade contém n radicais.

Vejamos mais dois outros exemplos envolvendo a aplicação do Princípio da Indução Matemática para demonstrar uma desigualdade:

Proposição 5.2.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$, temos que $2^n < n!$.*

Demonstração

Passo base:

Para n = 4, temos que $16 = 2^4 < 4! = 24$, isto é, $16 < 24$.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 4$, tenhamos $2^n < n!$. Queremos mostrar que $2^{n+1} < (n+1)!$.

De fato,

$2^{n+1} = 2^n.2 = 2.2^n$

Como, por hipótese de indução, $2^n < n!$, temos que $2^{n+1} < 2n!$

Agora, como $2 < n+1$, para todo $n \geq 4$, temos que $2^{n+1} < (n+1)n! = (n+1)!$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$, temos que $2^n < n!$.

Proposição 5.2.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $2^n > n$.*

Demonstração

Passo base:

Para n = 1, temos:

$2^1 = 2 > 1$.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $2^n > n$.

Queremos mostrar que $2^{n+1} > n+1$.

De fato,

$2^{n+1} = 2^n.2 = 2.2^n$

Como, por hipótese de indução, $2^n > n$, temos:

$2^{n+1} = 2.2^n \Rightarrow 2^{n+1} > 2.n = n + n.$

Agora, como $n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$2^{n+1} > n + n \Rightarrow 2^{n+1} > n + 1$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $2^n > n$.

5.3 Problemas de Geometria

A Geometria é outro ramo da Matemática no qual o Princípio da Indução Matemática pode ser usado na demonstração de proposições. Um dos pontos centrais desta seção consiste em utilizar a demonstração por indução para provar conjecturas levantadas à cerca da observação de padrões existentes no estudo da Geometria.

Vejamos a demonstração de algumas proposições geométricas:

Proposição 5.3.1. *A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados ($n \geq 3$) é igual a $(n-2)\pi$ radianos.*

Demonstração

Passo base:

Para $n = 3$, o polígono em questão é um triângulo e sabemos da Geometria Plana que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo resulta em π radianos. Logo, $[(3) - 2]\pi = \pi$ radianos. Sendo assim, o passo base está verificado. No entanto, com o objetivo de facilitar o entendimento do que faremos no passo indutivo, vejamos o que acontece para $n = 4$. Em um quadrilátero convexo, se tomarmos uma de suas diagonais, ficam destacados dois triângulos, de modo que a soma dos ângulos internos do quadrilátero convexo é igual a soma dos ângulos internos desses dois triângulos, ou seja, $[(4) - 2]\pi = 2\pi$ radianos.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo resulte em $(n-2)\pi$ radianos.

Vamos mostrar que em um polígono convexo com $(n+1)$ lados a soma dos seus ângulos internos resulta em $[(n+1) - 2]\pi$ radianos , ou seja, $(n-1)\pi$ radianos.

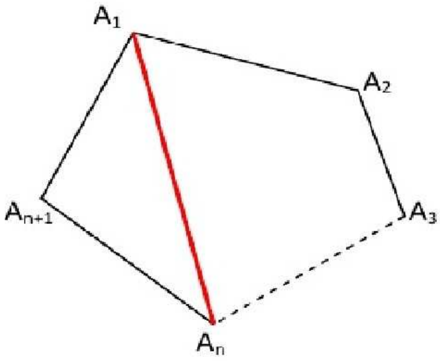

Figura 5.1: Polígono com n lados

Considere o polígono convexo de $(n+1)$ lados $A_1A_2A_3...A_nA_{n+1}$ e tomando a diagonal A_1A_n vamos decompô-lo em dois polígonos, o polígono convexo com n lados $A_1A_2A_3...A_n$ e o triângulo $A_1A_nA_{n+1}$ (figura 5.1). Note que ao dividirmos o polígono de $n+1$ lados em dois: um triângulo e um polígono de n lados, só podemos garantir que os ângulos internos do triângulo são, também, ângulos internos do polígono de $n+1$ lados pelo fato deste ser convexo. Logo, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com $(n+1)$ lados é dada pela soma dos ângulos internos dos dois polígonos decompostos, ou seja, por hipótese de indução, a soma dos ângulos internos do polígono convexo com n lados resulta em $(n-2)\pi$ radianos e, pelo passo base, a soma dos ângulos internos do triângulo resulta em π radianos

Sendo assim, $(n-2)\pi + \pi = (n-1)\pi = [(n+1)-2)\pi$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados $(n \geq 3)$ é igual a $(n-2)\pi$ radianos.

Proposição 5.3.2. *O número de diagonais de um polígono convexo de n lados, com* $n \geq 3$*, é igual a* $\frac{n(n-3)}{2}$.

Demonstração

Passo base:

Para $n = 3$, o polígono considerado é o triângulo e sabemos que o triângulo não tem nenhuma diagonal. Agora, verificando a proposição: $\frac{(3)[(3)-3)]}{2} = 0$, ou seja, nenhuma diagonal como esperávamos.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$, o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é igual a $\frac{n(n-3)}{2}$.

Vamos mostrar que em um polígono convexo com $(n+1)$ lados, o número de diagonais é igual a $\frac{(n+1)[(n+1)-3)]}{2}$, ou seja, $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$.

Como fizemos na Proposição 5.3.1, considere o polígono convexo de $(n+1)$ lados $A_1A_2A_3...A_nA_{n+1}$ e tomando a diagonal A_1A_n vamos decompô-lo em dois polígonos, o polígono convexo com n lados $A_1A_2A_3...A_n$ e o triângulo $A_1A_nA_{n+1}$ (figura 5.1). Logo, o número de diagonais do polígono convexo de $(n+1)$ lados é dado pelo número de diagonais do polígono convexo de n lados, que por hipótese de indução é $\frac{n(n-3)}{2}$, mais o número de diagonais que partem do vértice A_{n+1} e tem como extremidades os vértices $A_2, A_3, ..., A_{n-1}$, num total de $n-2$ diagonais e, por fim, mais a diagonal A_1A_n, que até agora não havia sido contada por ser lado comum dos polígonos decompostos.

Sendo assim, $\frac{n(n-3)}{2} + (n-2) + 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, o número de diagonais de um polígono convexo de n lados, com $n \geq 3$, é igual a $\frac{n(n-3)}{2}$.

Capítulo 6

Abordando Conceitos do Ensino com o Princípio da Indução Matemática

Ao sugerirmos introduzir o conteúdo referente ao Princípio da Indução Matemática no ensino médio, levamos em conta podermos utilizar as definições por recorrência, estas, propiciariam demonstrações mais rigorosas das proposições relativas aos números naturais, antes só conjecturadas.

6.1 Potências

Na maioria dos livros didáticos, como em [7] por exemplo, a definição de potência é dada da seguinte maneira:

"Dados um número real positivo a e um número natural n diferente de zero, chama-se potências de base a e expoente n o número a^n que é igual ao produto de n fatores iguais a a." Ou seja,

$$a^n = \underbrace{a.a.a. \ \ldots \ .a}_{n \ fatores}$$

Em seguida, as propriedades das potências são enunciadas, verificadas em alguns exemplos e generalizadas.

Não discutiremos aqui o mérito desta definição, mas iremos propor outra maneira de definirmos potências. Esta pode ser estendida para definir outros entes na Matemática, trata-se de uma definição por recorrência.

6.1.1 Definição de Potência com Expoente Natural

Seja a um número real e n um número natural. Definimos a potência de base a e expoente n, por:

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n.a \end{cases}$$

Com este tipo de definição, podemos demonstrar as propriedades das potências usando o Princípio da Indução Matemática.

Proposição 6.1.1 (Propriedades das Potências)**.** *Sejam a e b reais, m e n naturais, então:*

$P_1)$ $a^m.a^n = a^{m+n}$
$P_2)$ $(a^m)^n = a^{m.n}$
$P_3)$ $(a.b)^n = a^n.b^n$

Demonstração de P_1

Quermos mostrar que $a^m.a^n = a^{m+n}$, para isso, vamos manter m fixo e fazer a demonstração por indução sobre n.

Passo base:
Para $n = 1$, temos:
$a^m.a^1 \stackrel{def}{=} a^m.a \stackrel{def}{=} a^{m+1}$
Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:
Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $a^m.a^n = a^{m+n}$. Queremos mostrar que $a^m.a^{n+1} = a^{m+n+1}$.
De fato,
$a^m.a^{n+1} \stackrel{def}{=} a^m.(a^n.a) = (a^m.a^n).a \stackrel{H.I.}{=} a^{m+n}.a \stackrel{def}{=} a^{m+n+1}$
O que, por indução, encerra a demonstração de P_1.

Quermos mostrar que $(a^m)^n = a^{m.n}$, mais uma vez, para isso, vamos manter m fixo e fazer a demonstração por indução sobre n.

Passo base:
Para $n = 1$, temos:
$(a^m)^1 = a^m = a^{m.1}$

Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $(a^m)^n = a^{m.n}$. Queremos mostrar que $(a^m)^{n+1} = a^{m.(n+1)}$.

De fato,

$(a^m)^{n+1} \overset{def}{=} (a^m)^n \cdot (a^m)^1 \overset{H.I.}{=} a^{m.n}.a^m \overset{P_1}{=} a^{m.n+m} = a^{m.(n+1)}$

O que, por indução, encerra a demonstração de P_2.

Quermos mostrar que $(a.b)^n = a^n.b^n$.

Passo base:

Para $n = 1$, temos:

$(a.b)^1 = a.b = a^1.b^1$

Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $(a.b)^n = a^n.b^n$. Queremos mostrar que $(a.b)^{n+1} = a^{n+1}.b^{n+1}$.

De fato,

$(a.b)^{n+1} \overset{def}{=} (a.b)^n.(a.b)^1 \overset{H.I.}{=} (a^n.b^n).(a.b) = (a^n.a).(b^n.b) \overset{def}{=} a^{n+1}.b^{n+1}$

O que, por indução, encerra a demonstração de P_3.

6.2 Progressões

6.2.1 Progressão Aritmética

Uma Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência de números onde cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao termo anterior uma constante r, chamada razão da P.A.

Matematicamente:

$$\begin{cases} a_1 \text{ é o primeiro termo da P.A.} \\ a_n = a_{n-1} + r, \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$$

Normalmente, nos livros didáticos, após a definição das Progressões é deduzida uma fórmula para o termo geral utilizando o chamado “método da galinha”, o título deste método é creditado a Bertrand Russel, como podemos ver na página 8 em [11].

Este método consiste em, nada mais, nada menos, verificar um padrão observando o que acontece com os primeiros termos e generalizando para o termo geral. Aqui, particurlamente, esse método é eficaz e realmente fornece a fórmula correta do termo geral, no entanto, após ensinar o Princípio da Indução Matemática para os alunos do 1º ano do ensino médio logo no início deste ciclo, temos uma ferramenta importante que possibilita demonstrarmos a veracidade da fórmula do termo geral de uma progressão aritmética.

Vejamos:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$

$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3r) + r = a_1 + 4r$

Seguindo este padrão, conjecturamos que o termo geral é dado por $a_n = a_1+(n-1)r$.

Vamos utilizar o Princípio da Indução Matemática para demonstrar a veracidade desta conjectura.

Proposição 6.2.1. *O termo geral de uma Progressão Aritmética de razão r é dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$.*

Demonstração.

Passo Base:

Para $n = 1$, temos:

$a_{(1)} = a_1 + [(1) - 1]r = a_1 + 0.r = a_1$

Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, o termo geral de uma progressão aritmética seja dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$. Queremos mostrar que $a_{n+1} = a_1 + [(n + 1) - 1]r$, ou seja, $a_{n+1} = a_1 + nr$.

De fato,

$a_{n+1} \overset{def}{=} a_n + r \overset{H.I.}{=} a_1 + (n - 1)r + r = a_1 + nr - r + r = a_1 + nr$ □

6.2.2 Progressão Geométrica

Uma Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência de números onde cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando ao termo anterior uma constante q denominada por razão da P.G.

Matematicamente:

$$\begin{cases} a_1 \text{ é o primeiro termo da P.G.} \\ a_n = a_{n-1}.q, \text{ se } n \geq 2 \end{cases}$$

Analogamente ao que acontece com a Progressão Aritmética, nos livros didáticos, é deduzida uma fórmula para o termo geral como em seguida.

Vejamos:

$a_2 = a_1.q$

$a_3 = a_2.q = (a_1.q).q = a_1.q^2$

$a_4 = a_3.q = (a_1.q^2).q = a_1.q^3$

$a_5 = a_4.q = (a_1.q^3).q = a_1.q^4$

Seguindo este padrão, podemos conjecturar que o termo geral de uma P.G. é dado por $a_n = a_1.q^{n-1}$.

Vamos utilizar o Princípio da Indução Matemática para demonstrar a veracidade desta conjectura.

Proposição 6.2.2. *O termo geral de uma Progressão Geométrica de razão q é dado por $a_n = a_1.q^{n-1}$.*

Demonstração.

Passo Base:

Para $n = 1$, temos:

$a_{(1)} = a_1.q^{(1)-1} = a_1.q^0 = a_1$

Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, o termo geral de uma progressão geométrica seja dado por $a_n = a_1.q^{n-1}$. Queremos mostrar que $a_{n+1} = a_1.q^{n+1}-1$, ou seja, $a_{n+1} = a_1.q^n$.

De fato,

$a_{n+1} \stackrel{def}{=} a_n.q \stackrel{H.I.}{=} a_1.q^{n-1}.q = a_1.q^{n-1+1} = a_1.q^n$ $\square$

6.3 Somatório

O somatório é uma notação matemática que nos permite representar somas de vários termos. É representado com a letra grega sigma maiúsculo ($\sum$) e definido por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Proposição 6.3.1 (Propriedades dos Somatórios)**.** *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $m < n$ e $a_i, b_i, c \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.*

$S_1)$ $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

$S_2)$ $\sum\limits_{i=1}^{n} c.a_i = c. \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

$S_3)$ $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

$S_4)$ $\sum\limits_{i=1}^{n} c = nc$

Demonstração.

$S_1)$

Passo base:

Para $n = 1$, temos:

$\sum\limits_{i=1}^{1} (a_i + b_i) = a_1 + b_1 = \sum\limits_{i=1}^{1} a_i + \sum\limits_{i=1}^{1} b_i$

Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$. Queremos mostrar que $\sum\limits_{i=1}^{n+1} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n+1} b_i$.

De fato,

$$\sum_{i=1}^{n+1} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) + (a_{n+1} + b_{n+1}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\right) + (a_{n+1} + b_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + a_{n+1} + b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} b_i + b_{n+1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i + b_{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i + \sum_{i=1}^{n+1} b_i$$

S_2)

Passo base:

Para $n = 1$, temos:
$\sum_{i=1}^{1} c.a_i = c.a_1 = c. \sum_{i=1}^{1} a_i$
Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $\sum_{i=1}^{n} c.a_i = c. \sum_{i=1}^{n} a_i$. Queremos mostrar que $\sum_{i=1}^{n+1} c.a_i = c. \sum_{i=1}^{n+1} a_i$.

De fato,

$$\sum_{i=1}^{n+1} c.a_i = \sum_{i=1}^{n} c.a_i + c.a_{n+1} = c. \sum_{i=1}^{n} a_i + c.a_{n+1} = c. \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right) = c. \sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

S_3)

Passo base:
$\sum_{i=1}^{1} (a_{i+1} - a_i) = a_2 - a_1 = a_{(1)+1} - a_1$
Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$. Queremos mostrar que $\sum_{i=1}^{n+1} (a_{i+1} - a_i) = a_{(n+1)+1} - a_1$, ou seja, $\sum_{i=1}^{n+1} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+2} - a_1$.

De fato,

$$\sum_{i=1}^{n+1} (a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) + a_{(n+1)+1} - a_{n+1}$$

$$= (a_{n+1} - a_1) + a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+2} - a_1$$

S_4)

Passo base:

Para $n = 1$, temos:
$\sum_{i=1}^{1} c = c = (1).c$
Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:

Suponha que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $\sum_{i=1}^{n} c = n.c$. Queremos mostrar que $\sum_{i=1}^{n+1} c = (n+1).c$.

De fato,

$\sum_{i=1}^{n+1} c = \sum_{i=1}^{n} c + c = n.c + c = c.(n+1)$ $\square$

Vejamos um exemplo onde o conhecimento destas propriedades dos somatórios pode ser útil:

Exemplo 6.3.1. *Determine uma fórmula fechada para a seguinte soma*

$$S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \ldots + n.(n+1)$$

.

Utilizando somatório, temos:

$$\begin{aligned}
S_n &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \ldots + n.(n+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i.(i+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \\
&= \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} + \frac{n.(n+1)}{2} \\
&= \frac{n.(n+1).(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

Capítulo 7

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi o de sugerir um roteiro que propicie um aprofundamento gradativo do processo de ensino e aprendizagem do Princípio da Indução Matemática. Também mostramos uma forma de utilizar o Princípio da Indução Matemática para reformular a maneira como são ensinados os tópicos potenciação e progressões, além da possibilidade de trabalharmos o símbolo de somatório neste nível. Entendemos que a busca pela melhoria do método de ensino e aprendizagem não se exaure, tendo em vista que a busca pelo aprimoramento deste mecanismo deve ser contínua. Contudo, esperamos ter contribuído de alguma forma na maturação das ideias inerentes ao ensino deste tópico, bem como, que tenhamos permitido aos interessados uma breve experiência que possibilite nortear suas inserções mais aprofundadas sobre o tema.

Ao ensinarmos Indução Matemática, serão apresentadas, aos alunos, diversas demonstrações que lhes permitirão responderem questões do tipo:

"Por quê isso é verdade?"

Dessa forma, esperamos propiciar o início de uma postura em que o professor se dispõe a demonstrar e os alunos se motivam a perguntar. Essa postura, com certeza, fará com que as aulas de Matemática se tornem mais prazerosas, desafiadoras, dinâmicas e interativas.

Destacamos que o aperfeiçoamento didático aqui proposto dar-se-á, primeiramente, pelo fato de que não é costume na maioria das escolas brasileiras o ensino de Indução Matemática. Na verdade, são poucas as escolas que incluem o ensino deste assunto em seus currículos. Na maioria das vezes em que vemos Indução sendo ensinada no ensino médio, percebemos, infelizmente, tratar-se de um esforço individual do professor de Matemática.

Queremos deixar claro que esse trabalho foi pensado para possibilitar o ensino e a aprendizagem do Princípio da Indução Matemática para os alunos do 1º ano do ensino médio. Defendemos que o ensino de Matemática seja feito de modo a despertar o senso crítico. A partir do 1º ano do ensino médio não podemos conceber o ensino de Matemática sem que promovamos a necessidade de demonstrarmos a veracidade dos mais diversos teoremas e proposições. Acreditamos que o quanto antes os alunos forem instigados a questionarem a veracidade de "fórmulas" impostas como verdadeiras, mais benéfico e positivo será o processo de ensino e aprendizagem. No entanto, entendemos que, inicialmente, no ensino fundamental II (6º ao 9º ano), a Matemática possa continuar a ser ensinada através de conjecturas, assumindo muitas proposições como verdades a partir de algumas observações, pois a maioria dos alunos ainda não tem o amadurecimento abstrato para compreender as demonstrações. Contudo, ao chegar no 1º ano do ensino médio, mesmo que alguns alunos ainda não tenham atingido o nível de abstração esperado, devemos iniciar a ação de instigá-los a perguntarem por que as coisas são como são e, dessa forma, reformular de maneira concisa o modo como a Matemática pode e deve ser ensinada.

Queremos registrar que, durante a confecção deste trabalho, tivemos a experiência de aplicá-lo, parcialmente, em uma turma de Educação de Jovens e Adultos (E.J.A.). Esta turma é composta, em sua maioria, por alunos que estavam afastados da sala de aula por muito tempo, para se ter uma ideia, tenho um aluno nessa sala que tem a idade de ser meu avô, por isso mesmo, esses alunos apresentam grande dificuldade em aprender novos conceitos. Contudo, tendo bastante cuidado em questionar a todo instante se estavam compreendendo os consceitos básicos inerentes aos processos de ensino e aprendizagem do Princípio da Indução Matemática e sua aplicação nas demonstrações, percebemos que os alunos se mostraram confiantes e pareciam ter assimilado bem os conceitos estudados. Não tivemos, infelizmente, tempo hábil para registrar a avaliação. De qualquer forma, essa etapa pode ser uma proposta para a sequência deste trabalho em acordo com o segundo modelo de confeção da dissertação do PROFMAT.

Por fim, esperamos ter propiciado aos interessados, os fundamentos mais básicos do Princípio da Indução Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L.; Carvalho, P.C.P.; Wagner, E.; Morgado, A.C. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 3*, 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[3] MORAIS FILHO, D. C. *Convite à Matemática*, 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] OLIVEIRA, K. I. M.; Fernádez, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM., 2010.

[5] FOMIN, D.; Genkin, S.; Itemberg, I. *Círculos Matemáticos: a experiência russa*, 2ª ed. Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[6] IEZZI, G.; Dolce, O.; Murakami, C. *Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 2*, 9ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

[7] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações, vol. 1*, 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

[8] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações, vol. 3*, 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

[9] FOSSA, J. A. *Técnicas de Demonstração em Matemática*, 1ª ed. Natal: Clima, 1990.

[10] LIMA, E. L. *Anália Real: funções de uma variável, vol.1*, 8ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[11] HEFEZ, A. *Indução Matemática*, 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[12] Morgado, J. *Indução e Indução Matemática*, in: Artigo da SPM, nº 17. Porto: SPM, 1990. Disponível em http://nautilus.fis.uc.pt/bspm/art-get.php?oid=376502. Acesso em julho de 2012.

[13] Lima, E. L. *O Princípio da Indução*, in: Artigo da Revista Euraka, nº 03. Rio de Janeiro: SBM, 1998. Disponível em http://www.obm.org.br/opencms/revista_eureka/lista.html. Acesso em julho de 2012.