UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO
UFRJ

DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO MÉDIO: POR QUE NÃO?

Dissertação de Mestrado

RONY HENRIQUE BARROS

Instituto de Matemática

Rio de Janeiro - RJ
2016

RONY HENRIQUE BARROS

PROFMAT

DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO MÉDIO: POR QUE NÃO?

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte de exigências do Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Prof^{a}. Dr^{a}. Walcy Santos

Orientadora

RIO DE JANEIRO - RJ

2016

RONY HENRIQUE BARROS

DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO MÉDIO: POR QUE NÃO?

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte de exigências do Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Aprovada em 8 de setembro de 2016

Banca Examinadora:

Walcy Santos

Professora Doutora Walcy Santos – UFRJ

MLeal

Professora Doutora Marisa Beatriz Bezerra Leal – UFRJ

Katia Rosenvald Frensel.

Professora Doutora Katia Rosenvald Frensel – UFF

Prof^a. Dr^a. Walcy Santos

Orientadora

RIO DE JANEIRO - RJ

2016

CIP - Catalogação na Publicação

Barros, Rony Henrique
BB277d Demonstrações no ensino médio: Por que não? / Rony Henrique Barros. -- Rio de Janeiro, 2016.
86 f.

Orientadora: Walcy Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

1. Indução. 2. Demonstração. I. Santos, Walcy, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dedico este trabalho à Deus.
À minha família,
À minha noiva,
Aos meus amigos,
À todos os meus professores.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde, orientação e força para seguir nesta árdua caminhada.

A minha família, pois foi com grande sacrifício que conseguiram me fornecer uma educação básica de qualidade para que eu pudesse seguir com minhas próprias pernas a fim de conquistar o que quisesse profissionalmente.

Aos amigos que fiz durante a graduação e o mestrado, pois tenho um grande carinho e gratidão pelo apoio e crença na minha capacidade de concluir mais esta etapa de minha vida.

Aos meus grandes professores de mestrado e graduação que tive, já que eles foram fundamentais em minha formação. Em especial a minha amiga e orientadora de graduação Katia Frensel pela sua paciência, pois esta vitória seria muito mais difícil sem a sua ajuda; e a minha orientadora de mestrado Walcy Santos pela sua ajuda nesta dissertação e na confiança em meu potencial.

A minha querida noiva Karina que me ajuda diariamente a passar por várias dificuldades da vida profissional e pessoal. Ela é a maior responsável por eu não desistir e continuar perseverando cada vez mais.

A Universidade Federal Fluminense (UFF), pela oportunidade fornecida durante a graduação de conhecer excelentes profissionais de alto gabarito que agregaram valor à minha experiência acadêmica.

A Universidade Federal Rio de Janeiro (UFRJ) - em particular ao Instituto de Matemática - pelo espaço e colaboração cedidos pelos seus docentes e corpo de funcionários que com tanto carinho e dedicação me guiaram durante estes dois anos.

Ao Programa em pós-graduação stricto sensu para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica (PROFMAT), criado para fornecer aos professores como eu a oportunidade de obterem o grau mestre pertinente a sua formação graduação em licenciatura em matemática. Ainda espero que haja um desdobramento num doutorado, e que eu possa fazê-lo, pois acredito em sua potencialidade.

A todos que influenciaram minha jornada, muito obrigado.

SUMÁRIO

RESUMO

A dissertação aborda algumas das possíveis demonstrações matemáticas no Ensino Médio, apresentando e utilizando o Princípio de Indução Finita como ferramenta-técnica a ser adicionada no currículo, e assim possibilita sua agregação de valor como artifício de demonstração de teoremas e proposições que podem ser feitos apenas com sua utilização ou em outros casos, sendo mais uma forma de comprovação. Determinadas proposições são provadas de mais de uma maneira. Além de aumentar a quantidade de técnicas de demonstração, o leitor poderá escolher a prova apresentada que ache melhor ou mais conveniente para reproduzir em seu desenvolvimento teórico ou até mesmo como efeito de diversidade, seja ele, dando aula, no caso do professor, ou desenvolvendo uma pesquisa, sendo aluno ou um leitor interessado.

Palavras-Chave: *Currículo. Demonstração. Indução.*

ABSTRACT

The dissertation discusses some of the possible mathematical proofs in high school, presenting and using the induction principle as Finite-technical tool to be added to the curriculum, and thus enables its added value as a demonstration of fireworks theorems and propositions that can be made only with use or in other cases , more a form of evidence . Certain propositions are proven in more than one way . In addition to increasing the amount of demonstration techniques, the reader can choose the evidence presented to find better or more convenient to play in its theoretical development or even as diversity effect, be it, giving classes in the case of the teacher, or developing research , and student or an interested reader .

Key-words: *Minimum. Demonstration. Induction* .

LISTA DE FIGURAS

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em expor algumas das possíveis demonstrações de assuntos que podem ser abordados no ensino médio regular. Desta forma espera-se que estas demonstrações dêem aos leitores a possibilidade de fazer um estudo sequencial e lógico-dedutivo destes conteúdos, os quais serão explicitados no segundo capítulo.

Em seguida, no terceiro capítulo, será enunciado o Princípio de Indução e como este está presente nos Axiomas de Peano. Além disso, serão abordados alguns exemplos de sua utilização e possíveis interpretações do mesmo, culminando numa equivalência conhecida como Princípio da Boa Ordenação.

O sexto, sétimo, oitavo e décimo capítulos evidenciarão amostras de proposições e lemas que podem ser provados utilizando o Princípio de Indução, reforçando assim a importância de ser inserido no ensino médio, o qual é, inclusive, a principal proposta adotada e sugerida a ser apresentada neste trabalho.

Já no quarto, quinto, nono, décimo primeiro e décimo segundo capítulos serão exemplificadas outras demonstrações que podem ser feitas no ensino médio sem o Princípio de Indução, mas que são de abordagem simples e por isso, também são cabíveis de serem desenvolvidas no ensino médio regular.

1.1. Motivação da Dissertação

A carência de suporte teórico quanto ao desenvolvimento de aulas de matemática para o ensino médio, tanto na rede estadual de ensino do Rio de janeiro e na minha graduação em licenciatura em matemática pela Universidade Federal Fluminense, foram os motivadores para que eu pesquisasse e buscasse métodos para demonstrar, provar ou justificar os temas do ensino médio. Além dessas faltas de apoio as demonstrações, também tive o estudo de caso aplicado numa turma em que era professor de ensino médio da rede estadual do Rio de janeiro.

2. DIVISÃO DE CONTEÚDOS E ORDEM METODOLÓGICA

2.1. Divisão de conteúdos

A dissertação foi divida por ano de escolaridade do ensino médio e conteúdo proposto na seguinte ordem:

- 1º ano
  - Função Polinomial do 1º grau
  - Razões trigonométricas no triângulo retângulo
    - Teorema de Pitágoras
    - Ângulos Notáveis
    - Lei dos Senos
    - Lei dos Cossenos
  - Função Exponencial
    - Potências e Raízes

- 2º ano
  - Função Logarítmica
  - Sequências numéricas e Matemática Financeira
    - Progressão Aritmética (P.A.)
    - Progressão Geométrica (P.G.)
    - Juros Simples
    - Juros Compostos
  - Geometria espacial: Esfera
    - Volume da esfera

- 3º ano
  - Números Complexos
    - Conjugado
    - Potências inteiras de i
    - Forma trigonométrica

- Geometria Analítica (parte 1)
  - Distância entre pontos
  - Ponto Médio
  - Equação geral e reduzida da reta
- Geometria Analítica (parte 2)
  - Análise de retas paralelas e retas perpendiculares
  - Equação da circunferência nas formas reduzida e geral
- Polinômios e Equações Algébricas
  - Teorema do Resto

2.2. Desenvolvimento das atividades

As atividades e demonstrações foram aplicadas no Ciep 198 - Professora Roza Ferreira de Mattos, no município de Duque de Caxias, com uma turma que possuía em média vinte alunos, durante três tempos de cinquenta minutos de aula por semana. O estudo e as demonstrações foi desenvolvido com a mesma turma durante os três anos de escolaridade do ensino médio.

3. PROPOSTA DE INSERÇÃO DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO

O Princípio de Indução Finita é uma das técnicas de demonstração empregadas na matemática, por isso seria interessante que tal ferramenta-técnica fosse acrescentada no currículo do Ensino Médio principalmente no primeiro ano. Ao utilizar as demonstrações, os alunos irão amadurecer o raciocínio matemático, entender melhor porque determinado resultado é verdadeiro e desenvolver a abstração para compreender resultados na sua forma geral, e não apenas particular.

3.1. Dinâmica do Principio de Indução nas aulas

A aplicação do Princípio de Indução foi feito em etapas, sendo elas:

- ☐ Apresentação do Princípio de Indução;
- ☐ Aplicação do Princípio de Indução em exemplos elementares;
- ☐ Atividades feitas em grupos;
- ☐ Uso do Princípio de Indução no desenvolvimento dos conteúdos curriculares, sempre que possível.

3.2. Princípio de Indução Finita

O Princípio de Indução Matemática, ou Princípio de Indução Finita, ou Princípio de Indução é um instrumento importante para demonstrar teoremas em matemática envolvendo o conjunto dos números inteiros e vem sendo utilizado desde a antiguidade, porém de forma implícita. O princípio foi utilizado pela primeira vez de forma explícita em 1575 por Francesco Maurolycus para provar a fórmula da soma dos n primeiros termos ímpares (Iremos fazer esta demonstração no **Exemplo 1 - item a**). Apesar disso o método só se tornou conhecido em 1665 após a publicação do *Traité du triangle arithmétique* de Blaise Pascal.

Axiomas de Peano: São dados um conjunto $\mathbb{N}$, chamado conjunto dos números naturais, e uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ambos indefinidos, que satisfazem aos seguintes axiomas:

I. s é injetora.

II. $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$possui um só elemento, que chamaremos "um" e será representado por 1.

III. Se $X \subset \mathbb{N}$ satisfizer (i) e (ii) abaixo, então X é o próprio $\mathbb{N}$, sendo

(i) $1 \in X$;

(ii) $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$.

Os Axiomas de Peano podem ser ainda interpretados como uma função que correlaciona um número n com o seu sucessor $s(n)$ e ainda podem ser explicados com os seguintes intuitos:

I. de afirmar que cada número natural associa-se a um único sucessor;
II. de que o *um* não é sucessor de nenhum número e que $\mathbb{N} \neq \emptyset$;
III. de causar o efeito dominó que vai construindo todos os números naturais a partir do *um* de forma sequencial, isto é, $2 = s(1), 3 = s(2), \ldots$.

O terceiro axioma de Peano é conhecido como *Princípio de Indução*, assim sendo ele faz, parte da teoria e construção do conjunto dos números naturais. E uma possível elucidação é a seguinte:

Seja P uma propriedade referente aos números naturais; se 1 satisfizer a propriedade P e se, do fato de um número natural n satisfazer P pudermos concluir que $n + 1$ também satisfaz a propriedade P, então todos os números naturais satisfazem essa propriedade.

O Princípio de Indução é equivalente a um outro princípio de grande importância que é o Princípio da Boa Ordenação, mas antes de enunciá-lo iremos fazer uma definição que o precede.

Definição: Um subconjunto não-vazio dos inteiros é limitado inferiormente se existir um número inteiro a que é menor ou igual a todos os números pertencentes a esse conjunto. Ou seja, para $X \subset \mathbb{Z}$ e $X \neq \emptyset$, se $\exists\ a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \leq x\ \forall x \in X$, então X é limitado inferiormente.

O *Princípio da Boa Ordenação* diz que todo subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{Z}$ e limitado inferiormente possui um menor elemento, isto é, $\exists\ a \in X$ tal que $a \leq x\ \forall x \in X$.

Um outra forma do Princípio de Indução que será utilizada para o desenvolvimento desta dissertação é apresentada a seguir, baseando-se no livro *Curso de Álgebra* cujo autor é *A. Hefez*.

Definição: Uma *sentença aberta* são expressões que não podemos atribuir o valor lógico como verdadeira ou falsa.

Teorema do Princípio de Indução: Seja $P(n)$ uma sentença aberta em $\{n \in \mathbb{Z}; n \geq n_0\}$, tal que:

(i) $P(n_o)$é verdadeira.

(ii) $\forall n \geq n_o$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq n_o$.

Demonstração. A demonstração será feita por redução ao absurdo. Para isso, consideremos o conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq n_0 \ e \ P(n) \text{ é } falso\}$, o qual queremos mostrar que é vazio.

Suponhamos, por absurdo, que $A \neq \emptyset$. Como A é limitado inferiormente, pelo Princípio da Boa Ordenação, A possui um menor elemento a. Como $a \in A$ temos que $a \geq n_0$ e $P(a)$ é falso. Por (i), temos que $P(n_0)$ é verdadeira, logo $n_0 \notin A$. Assim, $a \neq n_0$ e, portanto $a > n_0$. Sendo a o menor elemento de A, então $a - 1 \notin A$. Como $a - 1 \geq n_0$ e $P(a-1)$ é verdadeira, por (ii), $P\big((a-1)+1\big) = P(a)$ é verdadeira e, por conseguinte, $a \notin A$, que é uma contradição.

■

A seguir serão apresentados alguns exemplos básicos e clássicos de propriedades sobre os números naturais onde o Princípio de Indução pode ser usado para demonstrá-los.

Exemplo 1. Mostre pelo Princípio de Indução que:

a) Para todo n natural não-nulo, tem-se que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

Demonstração. Seja $P(n)$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Temos que $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = (2.1 - 1) = 1^2$.

Agora supondo $P(n)$ verdadeira, temos que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Somando $(2n+1)$ a ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2,$$

logo $P(n+1)$ é verdadeira. Pelo Princípio de Indução Matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$.

■

b) Para todo n natural, tem-se que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Demonstração. Seja $P(n)$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Temos que $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = 1^2 = \frac{1.2.3}{6}$.

Agora supondo $P(n)$ verdadeira, temos que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Somando $(n+1)^2$ a ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1) + 1)}{6},$$

logo $P(n+1)$ é verdadeira. Pelo Princípio de Indução Matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$.

■

c) Para todo n natural maior ou igual a 4, tem-se que $n! \geq 2^n$.

Demonstração. Seja $P(n)$: $n! \geq 2^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 4$.

Temos que $P(4)$ é verdadeira, pois $4! = 24 \geq 16 = 2^4$.

Agora supondo $P(n)$ verdadeira, $n \geq 4$, temos que

$$n! \geq 2^n.$$

Multiplicando $n + 1$ a ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$n!.(n+1) \geq 2^n(n+1)$$

$$(n+1)! \geq 2^n.(n+1) \geq 2^n.2 = 2^{n+1}, \text{ já que}$$

$$n \geq 4 \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 2 - 1 \Leftrightarrow n + 1 \geq 2.$$

Logo $P(n+1)$ é verdadeira. Pelo Princípio de Indução Matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 4$.

■

d) Para todo n natural maior ou igual a 7, tem-se $n! \geq 3^n$.

Demonstração. Seja $P(n): n! \geq 3^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 7$.

Temos que $P(7)$ é verdadeira, pois $7! = 5040 \geq 2187 = 3^7$.

Agora supondo $P(n)$ verdadeira, $n \geq 7$, temos que

$$n! \geq 3^n.$$

Multiplicando $n + 1$ a ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$n!.(n+1) \geq 3^n(n+1)$$

$$(n+1)! \geq 3^n.(n+1) \geq 3^n.3 = 3^{n+1}, \text{ já que}$$

$$n \geq 7 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 3 - 1 \Leftrightarrow n + 1 \geq 3.$$

Logo $P(n+1)$ é verdadeira. Pelo Princípio de Indução Matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 7$.

■

Exemplo 2. Seja $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função tal que para quaisquer a e b inteiros, tem-se $f(a+b) = f(a) + f(b)$. A partir desta definição, mostre que:

a) $f(0) = 0$.

Demonstração. Seja $f(a+b) = f(a) + f(b)$ para a e b inteiros.

Em particular, como $0 \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

■

b) Para todo n natural, tem-se $f(n) = n.f(1)$.

Demonstração. Seja $P(n): f(n) = n.f(1)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Temos que $P(1)$ é verdadeira, pois $f(1) = 1.f(1)$ (utilizando o item a).

Agora supondo $P(n)$ verdadeira, temos que

$$f(n) = n.f(1)$$

Somando $f(1)$ a ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$f(n) + f(1) = n.f(1) + f(1)$$

$$f(n+1) = (n+1).f(1).$$

Logo $P(n+1)$ é verdadeira. Pelo Princípio de Indução Matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

c) Para todo n inteiro, tem-se $f(-n) = -f(n)$.

$$0 = f(0) = f\big(n + (-n)\big) = f(n) + f(-n) \Leftrightarrow -f(n) = f(-n) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

d) Para todo n inteiro, tem-se $f(n) = n.f(1)$.

Para $n = 0$, temos que $f(0) = 0 = 0.f(1)$.

Seja $n \in \mathbb{Z}_-^*$. Como $-n \in \mathbb{N}$, temos

$$f(-n) = -n.f(1) \text{ pelo (item b)}$$

$$-f(n) = -n.f(1) \text{ pelo (item c)}$$

$$f(n) = n.f(1).$$

Pelo que foi concluído acima e pelo item b, temos $f(n) = n.f(1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, já que $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_-$.

■

3.3. Dinâmica das Atividades de Indução

O uso do Princípio de Indução era feito de maneira metódica e repetitiva, quanto as perguntas que justificavam os seus passos, com o objetivo de deixar claro o que se deseja em cada etapa do seu desenvolvimento. A demonstração era seguida utilizando as questões abaixo.

- ❑ Como mostramos para o primeiro?
- ❑ Como é a sentença para certo n?
- ❑ Como é a sentença para $n + 1$?
- ❑ O que tenho que fazer para ir da sentença n para a sentença $n + 1$?

4. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

Ano de escolaridade: 1º ano

Função Polinomial do 1º grau ou Função Afim.

Iniciaremos definindo o que é gráfico de uma função, para que então possamos fazer uma análise do gráfico de uma função polinomial do 1º grau.

Definição 4.0. O *gráfico de uma função* f é a representação no plano cartesiano do conjunto formado pelos pares ordenados $\left(x, f(x)\right)$, com x pertencente ao domínio de f.

Feito esta definição de gráfico de uma função, podemos fazer uma definição formal do que é o gráfico de uma função afim.

Definição 4.1. A *função afim ou função polinomial do 1º grau* é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é dada por $f(x) = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}^*$ *e* $b \in \mathbb{R}$. Denominamos a de coeficiente angular ou taxa de variação e b de coeficiente linear. O seu gráfico é o subconjunto do plano cartesiano formado pelos pares ordenados $(x, ax + b)$, com $x \in \mathbb{R}$.

De forma natural podemos pensar nas interseções do gráfico com os eixos ordenados. Analisaremos primeiro a interseção do gráfico com o eixo das abscissas.

Definição 4.2. A *raiz ou zero de uma função* é o valor de x para o qual $f(x)$ é zero, ou seja, é a abscissa do ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das abscissas.

Proposição 4.1. O ponto de interseção do gráfico da função afim

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned},$$

$f(x) = ax + b$, para $a \in \mathbb{R}^*$ *e* $b \in \mathbb{R}$, com o eixo das abscissas é o ponto de coordenadas $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Demonstração. $0 = ax + b \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, já que por definição $a \neq 0$.

$\blacksquare$

De maneira análoga, podemos definir a interseção do gráfico de uma função com o eixo das ordenadas.

Definição 4.3. O *ponto de interseção do gráfico de uma função real* f *com o eixo das ordenadas* é dada por $\left(0, f(0)\right)$.

Com esta definição 4.3., podemos determinar o ponto de interseção do gráfico de uma função afim com o eixo das ordenadas.

Proposição 4.2. O *ponto de interseção do gráfico da função afim*

$$\begin{gathered} f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{gathered},$$

$f(x) = ax + b$, para $a \in \mathbb{R}^*$ *e* $b \in \mathbb{R}$, com o *eixo das ordenadas* é $(0, b)$.

Demonstração. $f(0) = a.0 + b \Leftrightarrow f(0) = 0 + b \Leftrightarrow f(0) = b$.

$\blacksquare$

Agora iremos analisar a característica de uma função quanto ao seu crescimento e seu decrescimento.

Definição 4.4. Uma *função* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é crescente* quando para quaisquer x_a e x_b pertencem ao domínio da função, temos que se $x_a > x_b$ então $f(x_a) > f(x_b)$.

Com esta definição de função crescente, determinaremos quando uma função afim é crescente.

Proposição 4.3. Uma *função afim* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, para $a \in \mathbb{R}^*$ *e* $b \in \mathbb{R}$, é *crescente* quando $a > 0$.

Demonstração. Suponhamos que $a > 0$ e tomemos x_a e x_b reais tais que $x_a > x_b \Leftrightarrow x_a - x_b > 0$. Temos que

$$f(x_a) = a.x_a + b \Leftrightarrow b = f(x_a) - a.x_a$$

$$f(x_b) = a.x_b + b \Leftrightarrow b = f(x_b) - a.x_b$$

Portanto, $f(x_a) - a.x_a = f(x_b) - a.x_b \Leftrightarrow f(x_a) - f(x_b) = a.x_a - a.x_b \Leftrightarrow$

$f(x_a) - f(x_b) = a.(x_a - x_b)$. Assim, $f(x_a) - f(x_b) > 0 \big(\Leftrightarrow f(x_a) > f(x_b)\big)$, já que $x_a - x_b > 0$ e $a > 0$.

■

De forma análoga iremos definir função decrescente.

Definição 4.5. Uma *função* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é decrescente* quando para quaisquer x_a e x_b pertencem ao domínio da função, temos que se $x_a > x_b$ então $f(x_a) < f(x_b)$.

Veremos agora quando uma função afim ela é decrescente.

Proposição 4.4. A *função afim* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, para $a \in \mathbb{R}^*$ *e* $b \in \mathbb{R}$, é *decrescente* sempre que $a < 0$.

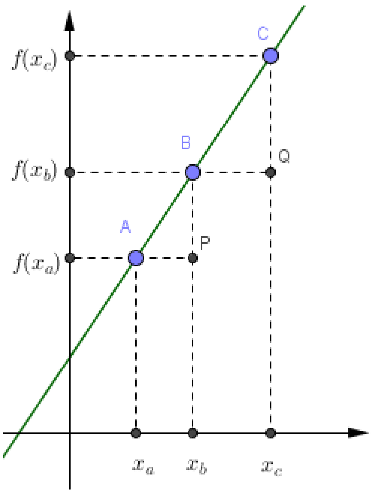
Demonstração. Suponhamos que $a < 0$ e tomemos x_a e x_b reais tais que $x_a > x_b \Leftrightarrow x_a - x_b > 0$. Como $f(x_a) - f(x_b) = a.(x_a - x_b)$, temos que $f(x_a) - f(x_b) < 0 \big(\Leftrightarrow f(x_a) < f(x_b)\big)$, já que $x_a - x_b > 0$ e $a < 0$.

■

Proposição 4.5. O *gráfico da função afim* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, para $a \in \mathbb{R}^*$ *e* $b \in \mathbb{R}$, é uma *reta* não-horizontal e não-vertical.

Demonstração. Sejam três valores distintos x_a, x_b *e* x_c no domínio da função. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_a < x_b < x_c (\Rightarrow |x_a - x_b| > 0$ *e* $|x_c - x_b| > 0)$.

Figura 4.1: Reta Afim não-horizontal e não-vertical



FONTE: Autor 2016

Pela tricotomia de a, $a > 0$, $a < 0$ ou $a = 0$ e pelas proposições 4.3 e 4.4, temos:

$$f(x_a) < f(x_b)\ ou\ f(x_a) > f(x_b) \Rightarrow |f(x_a) - f(x_b)| > 0$$

$$f(x_b) < f(x_c)\ ou\ f(x_b) > f(x_c)\ \Rightarrow |f(x_c) - f(x_b)| > 0.$$

De forma análoga ao que foi feito nas proposições 4.3 e 4.4, temos que

$$f(x_a) - f(x_b) = a.(x_a - x_b) \Rightarrow |a| = \left|\frac{f(x_a)-f(x_b)}{x_a-x_b}\right|.$$

e

$$f(x_c) - f(x_b) = a.(x_c - x_b) \Rightarrow |a| = \left|\frac{f(x_c)-f(x_b)}{x_c-x_b}\right|.$$

Logo, $\frac{|f(x_a)-f(x_b)|}{|x_a-x_b|} = \frac{|f(x_c)-f(x_b)|}{|x_c-x_b|}$ (1) e $A\hat{P}B \equiv B\hat{Q}C = 90°$ (2), onde $P = \big(x_b, f(x_a)\big)$ e $Q = \big(x_c, f(x_b)\big)$.

Daí, pelo caso LAL de semelhança de triângulos, concluímos de (1) e (2) que $APB \sim BQC$. Logo, pela Lei Angular de Tales, temos que $A\hat{B}P + P\hat{B}Q + Q\hat{B}C = A\hat{B}P + 90° + P\hat{A}B = 180°$.

Portanto, $A, B\ e\ C$ são colineares.

■

Proposição 4.6. Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois pontos no plano tais que $x_1 \neq x_2$. Então existe uma única função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, dada por:

$$f(x) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x + \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1},$$

onde $a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ e $b = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$.

Demonstração. Ao substituirmos os pontos na lei de formação de uma função afim $f(x) = ax + b$, obtemos

$$\begin{cases} f(x_1) = a.x_1 + b \\ f(x_2) = a.x_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = a.x_1 + b \\ y_2 = a.x_2 + b \end{cases} \Rightarrow a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1.$$

Como $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 \neq 0$, temos

$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Substituindo o valor de a na 1ª equação do sistema montado, obtemos

$$b = y_1 - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.x_1 \Leftrightarrow b = \frac{y_1x_2-x_1y_1-y_2x_1+y_1x_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow b = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}.$$

■

Proposição 4.7. Toda reta r não-vertical e não-horizontal no plano cartesiano é o gráfico de uma função afim.

Demonstração. Para provar, são dados dois pontos distintos: $P_1 = (x_1, x_2)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ na reta r. Como r é não-vertical , tem-se necessariamente $x_1 \neq x_2$. Logo, pela proposição 4.6, existe uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ afim tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Por outro lado, o gráfico de f, pela proposição 4.5, é uma reta que passa pelos pontos P_1 e P_2. Logo, pelo axioma da Geometria Euclidiana que diz que por dois pontos passa uma única reta, temos que a reta do gráfico de f coincide com r.

■

5. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E QUALQUER.

Ano de escolaridade: 1º ano

Definições e notações 5.0.1

I. Num triângulo retângulo chamamos de hipotenusa a medida ou o próprio lado oposto ao ângulo reto e de catetos os outros dois lados.

II. Seno de um ângulo é a razão do cateto oposto pela hipotenusa.

Seno de um ângulo $x = senx$

III. Cosseno de um ângulo é a razão do cateto adjacente pela hipotenusa.

Cosseno de um ângulo $x = cosx$

IV. Tangente de um ângulo é a razão do cateto oposto pelo cateto adjacente.

Tangente de um ângulo $x = tgx$

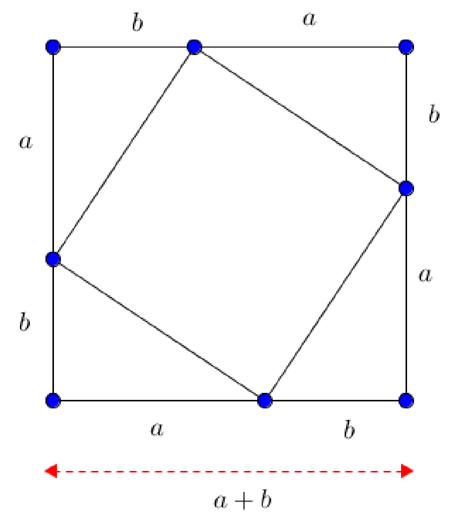
5.0. Teorema de Pitágoras.

Antes de iniciarmos esta parte trigonométrica iremos apresentar e demonstrar o Teorema de Pitágoras, pois este será de suma importância para o desenvolvimento das fórmulas e propriedades das relações trigonométricas. Além disso, demonstraremos a sua recíproca, que pode ser de maneira simples.

Proposição 5.0.1. O *Teorema de Pitágoras* diz que em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Em outras palavras, se c é a hipotenusa e a e b são os catetos, então $c^2 = a^2 + b^2$.

Demonstração. Considere um quadrado de lado $a + b$, como o que esta feito na figura abaixo.

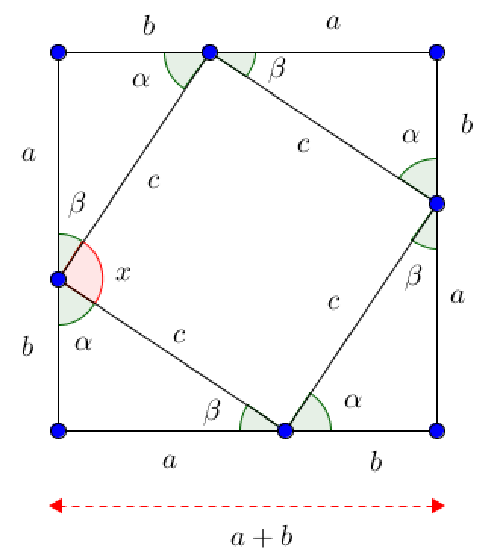
Figura 5.0.1.1: Quadrado de lado $a + b$



FONTE: Autor 2016

Note que os quatro triângulos que compõem o quadrado de lado $a + b$ são congruentes pelo caso LAL. Portanto o terceiro lado destes triângulos são congruentes, ou seja, o quadrilátero que compõe o quadrado de lado $a + b$ é equilátero. Denotaremos este lado como c

Figura 5.0.1.2: Quadrilátero equilátero



FONTE: Autor 2016

Por outro lado, este quadrilátero também é equiângulo, pois se analisarmos um de seus vértices como feito na figura acima, temos que pela Lei angular de Tales que os ângulos agudos destes triângulos somam 90°, ou seja, $\alpha + \beta = 90°$.

Assim, $x + \alpha + \beta = 180° \Rightarrow x = 90°$

Repetindo o mesmo raciocínio com os outros vértices obtemos que todos os seus ângulos são congruentes ao ângulo reto.

Logo o quadrilátero é um quadrado.

Escrevendo a área do quadrado de lado $a + b$ como $(a + b)^2$, e também como soma das áreas de quatro triângulos retângulos congruentes de área $\frac{ab}{2}$ mais a área de um quadrado de lado c, sendo esta c^2, obtemos

$$(a + b)^2 = c^2 + 4.\left(\frac{ab}{2}\right)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

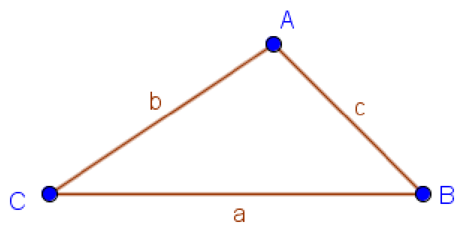
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

■

Proposição 5.0.2. O *Recíproca do Teorema de Pitágoras* diz que se em um triângulo qualquer vale que o quadrado de um de seus lados é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados, então este triângulo é retângulo. Ou seja, se tomarmos os lados como sendo a, b e c, temos que se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo em A.

Demonstração. Consideraremos o triângulo ABC de lados a, b e c opostos aos vértices A, B e C, respectivamente.

Figura 5.0.2.1: Triângulo qualquer

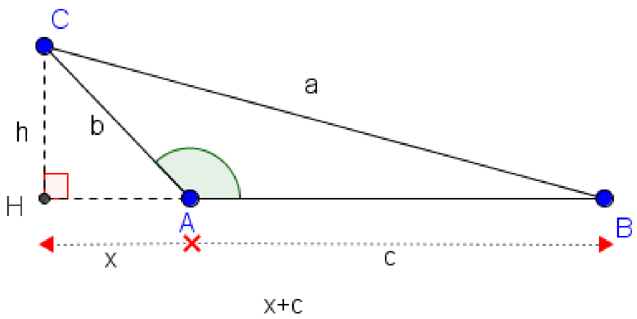


FONTE: Autor 2016

Daí faremos uma tricotomia com este ângulo da seguinte maneira: $\hat{A} > 90°$, $\hat{A} = 90°$ ou $\hat{A} < 90°$.

(1º Caso - $\hat{A} > 90°$) Neste caso teremos um triângulo obtusângulo, e portanto a altura relativa a um dos outros vértices é externa ao triângulo, como destacado na figura abaixo

Figura 5.0.2.2: Triângulo obtusângulo



FONTE: Autor 2016

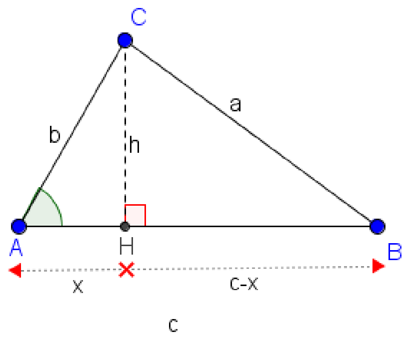
Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + (x+c)^2 \\ b^2 = h^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = (x+c)^2 - x^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cx \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

(2º Caso - Â $= 90°$) Neste caso não há o que demonstrar, já que o triângulo será retângulo.

(3º Caso - Â $< 90°$) Neste caso teremos um triângulo acutângulo, e portanto, a altura relativa a um dos outros vértices é interna ao triângulo, como destacado na figura abaixo.

Figura 5.0.2.3: Triângulo acutângulo



FONTE: Autor 2016

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + (c-x)^2 \\ b^2 = h^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = (c-x)^2 - x^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2.$$

Resumindo estes casos, obtemos

Se Â $> 90°$, então $a^2 > b^2 + c^2$

Se $\hat{A} = 90°$, então $a^2 = b^2 + c^2$

Se $\hat{A} < 90°$, então $a^2 < b^2 + c^2$.

■

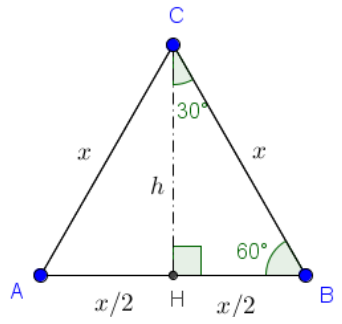
5.1. Ângulos Notáveis.

Utilizando um triângulo equilátero e aplicando as propriedades já conhecidas das suas cevianas, como a de que a mediana, a altura e a bissetriz interna de um mesmo vértice coincidem, podemos provar a proposição a seguir.

Proposição 5.1.1. A partir das propriedades básicas do triângulo equilátero, obtemos que $sen30° = \frac{1}{2} = cos60°,\ cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = sen60°\ e\ tg30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{tg60°}$.

Demonstração. Considere o triângulo equilátero ABC de lado com medida x. Tracemos a altura h relativa ao lado BC, cuja a interseção é o ponto .

Figura 5.1.1: Triângulo equilátero



FONTE: Autor 2016

Daí pelo Teorema de Pitágoras,

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Assim determinando as razões trigonométricas, obtemos:

$$sen30° = cos60° = \frac{x/2}{x} = \frac{1}{2}.$$

$$cos30° = sen60° = \frac{h}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$tg30° = \frac{x/2}{h} = \frac{x/2}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{tg60°}.$$

■

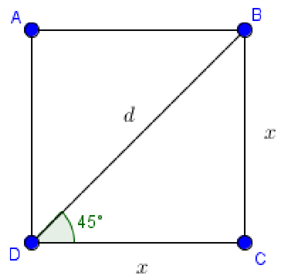
Agora fazendo um raciocínio semelhante ao feito na proposição anterior, com um quadrado e aplicando a propriedade de que a diagonal de um quadrado coincide com a sua bissetriz interna, podemos provar a proposição a seguir.

Proposição 5.1.2. A partir das propriedades básicas do quadrado, obtemos que $sen45° = cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $tg45° = 1$.

Demonstração. Considere um quadrado $ABCD$ de lado com medida x. Tracemos a diagonal BD de medida d.

Como a diagonal do quadrado também é uma bissetriz interna, temos que os ângulos determinados pela diagonal medirão 45°.

Figura 5.1.2: Quadrado



FONTE: Autor 2016

Assim pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow d = x\sqrt{2}\,.$$

Determinando as razões trigonométricas, obtemos:

$$sen45° = cos45° = \frac{x}{d} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{x}{x} = 1.$$

■

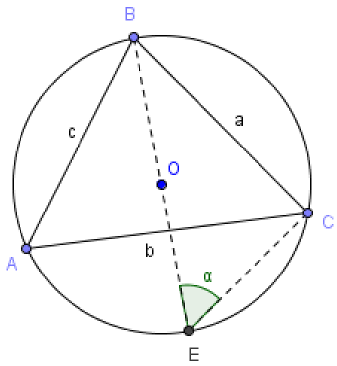
As razões trigonométricas definem propriedades válidas para triângulos retângulos, porém existem duas leis que apresentaremos a seguir que fazem com que o conceito trigonométrico valha para triângulos quaisquer.

A primeira que será apresentada é a Lei dos Senos que determina para um triângulo qualquer uma fórmula que relaciona os lados aos seus respectivos ângulos opostos, através da razão trigonométrica seno.

5.2. Lei dos Senos.

Proposição 5.2.1. A *Lei dos Senos* é dada por $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$, onde consideraremos um triângulo inscrito na circunferência de raio R como na **Figura 5.2.1.(a)** abaixo.

Figura 5.2.1.(a): Lei dos Senos - Circunferência



FONTE: Autor 2016

Demonstrações. A primeira demonstração vale para qualquer triângulo, porém a segunda demonstração será dividida em três casos.

1ª maneira de demonstrar. Como $B\hat{A}C \equiv B\hat{E}C = \alpha = \hat{A}$ e $B\hat{C}E = 90°$, temos $sen\alpha = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow 2R = \frac{a}{sen\alpha} = \frac{a}{sen\,\hat{A}}$.

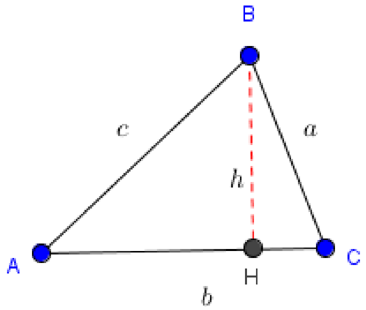
De maneira análoga, obtemos $2R = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$ e $2R = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$.

Portanto, $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} = 2R$.

■

2ª maneira de demonstrar. *(Utilizando as alturas)*

Figura 5.2.1.(b): Lei dos Senos - Alturas - Triângulo Acutângulo



FONTE: Autor 2016

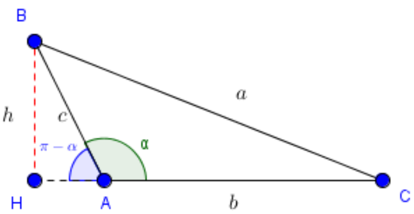
(1º caso - Triângulo Acutângulo) - Considere o triângulo acutângulo como na **Figura 5.2.1.(b)** acima, onde BH é altura relativa ao vértice B.

Assim, $sen\hat{A} = \frac{h}{c}$ e $sen\hat{C} = \frac{h}{a}$. Logo, $h = c.sen\hat{A} = a.sen\hat{C} \Rightarrow \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$.

De maneira análoga, podemos traçar uma outra altura relativa a um dos outros dois vértices e concluirmos:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}.$$

Figura 5.2.1.(c): Lei dos Senos - Alturas - Triângulo Obtusângulo



FONTE: Autor 2016

(2º caso - Triângulo Obtusângulo) - Considere o triângulo obtusângulo como na **Figura 5.2.1.(d)** acima, onde BH é altura relativa ao vértice B.

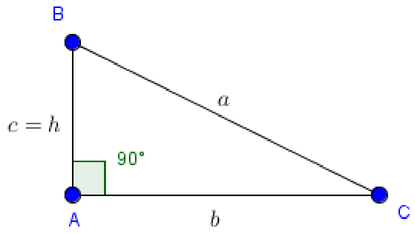
Assim, $sen\hat{A} = sen\alpha = sen(\pi - \alpha) = \frac{h}{c}$ e $sen\hat{C} = \frac{h}{a}$. Logo, $h = c.sen\hat{A} = a.sen\hat{C} \Rightarrow \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$.

De maneira análoga ao feito no caso do triângulo acutângulo, podemos traçar uma outra altura relativa a um dos outros dois vértices e concluirmos:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}.$$

Observação 5.2.1.(d). O caso referente ao triângulo retângulo segue exatamente igual ao feito com o triângulo acutângulo. Vide a **Figura 4.2.1.(d)** abaixo.

Figura 5.2.1.(d): Lei dos Senos - Alturas - Triângulo Retângulo



FONTE: Autor 2016

Observação 5.2.2. Na segunda forma de demonstração feita acima, não há a possibilidade de encontrarmos as igualdades sendo constante e igual ao dobro do raio do círculo circunscrito ao triângulo, como feito na primeira demonstração.

■

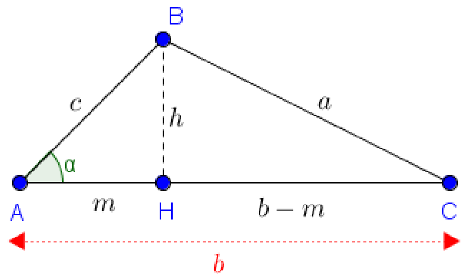
A segunda lei apresentada é a Lei dos Cossenos que determina para um triângulo qualquer uma fórmula que relaciona os três lados do triângulo com o cosseno de um dos ângulos. Esta fórmula é uma extensão do Teorema de Pitágoras para um triângulo qualquer.

5.3. Lei dos Cossenos.

Proposição 5.3.1. A *Lei dos Cossenos* é dada por $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\hat{A}$, onde nas figuras abaixo BH é uma altura relativa ao vértice B.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes, sendo elas os casos do triângulo acutângulo e do triângulo obtusângulo.

Figura 5.3.1.(a): Lei dos Cossenos - Triângulo acutângulo



FONTE: Autor 2016

(1º caso - Triângulo acutângulo) Considerando a **Figura 5.3.1. (a)** acima e utilizando o Teorema de Pitágoras,

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + m^2 \\ a^2 = h^2 + (b-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = c^2 - m^2 \\ h^2 = a^2 - (b-m)^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 - m^2 = a^2 - (b-m)^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = (b-m)^2 + c^2 - m^2$$

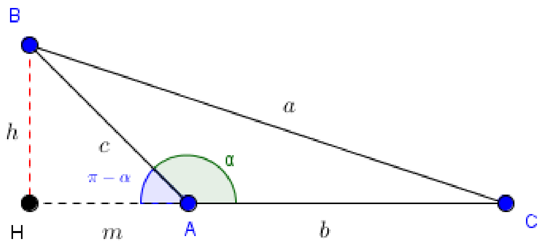
$$a^2 = b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm\,.$$

Como $cos\hat{A} = \frac{m}{c} \Leftrightarrow m = c.cos\hat{A}$, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\hat{A}\,.$$

Figura 5.3.1(b): Lei dos Cossenos - Triângulo obtusângulo



FONTE: Autor 2016

(2º caso - Triângulo obtusângulo) Considerando a **Figura 5.3.1. (b)** acima e utilizando o Teorema de Pitágoras,

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + m^2 \\ a^2 = h^2 + (b+m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = c^2 - m^2 \\ h^2 = a^2 - (b+m)^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 - m^2 = a^2 - (b+m)^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = (b+m)^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 + 2bm + m^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm\,.$$

Como $cos\hat{A} = cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha) = -\frac{m}{c} \Leftrightarrow m = -c.cos\hat{A}$, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\hat{A}.$$

Observação 5.3. O caso relativo ao triângulo retângulo é trivial, pois $cos90° = 0$ e portanto a Lei dos Cossenos é o Teorema de Pitágoras.

■

6. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Ano de escolaridade: 1º ano

6.1. Potências e Raízes:

Estes dois tópicos são importantes para o desenvolvimento da Função exponencial e por este motivo estão neste capítulo. Além disso, todas as propriedades apresentadas nesta seção serão provadas utilizando o Princípio de Indução Finita, ressaltando assim a necessidade da utilização do mesmo no Ensino Médio.

Na rede estadual de ensino do Rio de Janeiro - nos anos que antecedem este assunto - os mesmos são abordados no Ensino Fundamental, sob a seguinte estrutura:

6º ano

- Potência com expoente e base naturais.
- Raiz quadrada de números naturais quadrados perfeitos.

7º ano

- Potência com números inteiros.

8º ano

- Potenciação com números racionais.

9º ano

- Operações com radicais.

Então começaremos definindo o que é uma potência.

Definição 6.1.0. Chamamos de potência a^n, onde a é a base e n é o expoente.

Observação 6.1.0. As definições e propriedades desta seção **6.1. Potências e Raízes** serão tomadas apenas para o caso $a \in \mathbb{R}^*$ *(base)*. Além disso, as **Propriedades 6.1.1., 6.1.2., 6.1.3, e 6.1.4.** serão demonstradas apenas considerando $n \in \mathbb{N}$, porém as mesmas valem para $n \in \mathbb{R}$.

Definição 6.1.1. A potência de expoente natural como recorrência pode ser dada por $\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a.a^n \end{cases}$, com $n \in \mathbb{N}$.

A próxima definição estende o conceito de potência para expoentes inteiros e expoente zero.

Definição 6.1.2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, com $n \in \mathbb{N}$, e $a^0 = 1$, para $a \neq 0$.

Observação 6.1.1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}^*$, pois se $n = -m < 0$, temos que $m > 0$ e $a^{-n} = a^m = \frac{1}{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{a^{-m}} = \frac{1}{a^n}$, pela definição acima.

A propriedade a seguir é considerada a mais importante, pois é a característica que mostra a não linearidade da função exponencial.

Propriedades 6.1.1.

(i) $a^n . a^m = a^{n+m}$, para $n, m \in \mathbb{N}$.

(ii) $a^n . a^{-m} = a^{n-m}$, para $n, m \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$.

Demonstração por indução. (i) Fixaremos n e faremos a indução sobre m.

Para $m = 1$, temos:

$a^n . a^1 = a^n . a = a . a^n = a^{n+1}$, por definição.

Suponhamos que a propriedade valha para certo m, assim:

$$a^n . a^m = a^{n+m} \ .$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (i) por a, temos:

$$(a^n . a^m) . a = (a^{n+m}) . a$$
$$a^n . (a^m . a) = a . a^{n+m}$$
$$a^n . (a . a^m) = a . a^{n+m} \ .$$

Por definição,

$$a^n . a^{m+1} = a^{n+m+1} \ .$$

Portanto a propriedade vale para $m + 1$.

■

(ii) Fixaremos m e faremos a indução sobre n.

Provaremos primeiro, por indução, que $a^1 . a^{-m} = a^{1-m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De fato, se $m = 1$, $a . a^{-1} = \frac{a}{a} = 1 = a^0 = a^{1-1}$, e se $m \geq 2$, $a^1 . a^{-m} = \frac{a}{a^m} = \frac{a}{a . a^{m-1}} = \frac{1}{a^{m-1}} = a^{-(m-1)} = a^{1-m}$, pois neste caso $m - 1 \geq 1$ e, por definição, $a^m = a^1 . a^{m-1}$.

Suponhamos que a propriedade valha para certo n:

$$a^n . a^{-m} = a^{n-m}$$

Logo,

$$a^{n+1} . a^{-m} = a . (a^n . a^{-m}) = a . a^{n-m} = a^{1+n-m},$$

pois, pelo item (i) e pelo provado acima, $a . a^p = a^{1+p}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

■

Observação 6.1.1. Como $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, para $m \in \mathbb{N}$, temos por (ii), da propriedade 6.1.1, que $\frac{a^n}{a^m} = a^n . a^{-m} = a^{n-m}$ para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$.

Propriedade 6.1.2. $a^n . a^m = a^{n+m}$ para quaisquer $n, m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Se $n \geq 1, m \geq 1$, temos, pelo item (i) da propriedade 6.1.1, que $a^n . a^m = a^{n+m}$, e se $n \geq 1$ e $m \leq -1$, ou se $n \leq -1$ e $m \geq 1$, temos, pelo item (ii) da propriedade 6.1.1, que $a^n . a^m = a^{n+m}$.

Suponhamos agora que $m \leq -1$ e $n \leq -1$, isto é, m e n são números inteiros negativos. Logo, pela definição 6.1.2:

$$a^n . a^m = a^{-|n|} . a^{-|m|} = \frac{1}{a^{|n|} . a^{|m|}} = \frac{1}{a^{|n|+|m|}} = a^{-(|n|+|m|)} = a^{-|n|-|m|} = a^{n+m},$$

pois, neste caso, $n = -|n|$ e $m = -|m|$.

Além disso, se $n = 0$, $a^0 . a^m = 1 . a^m = a^m = a^{0+m}$ e analogamente, se $m = 0$, $a^n . a^0 = a^n . 1 = a^n = a^{n+0}$.

■

A propriedade a seguir responda a seguinte pergunta: *O que podemos reduzir ao multiplicarmos duas potências de mesmo expoente, mas de bases diferentes?*

Propriedade 6.1.3. $a^n . b^n = (a . b)^n$, com $a\ e\ b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração por indução. Para $n = 1$, temos:

$$a^1 . b^1 = a . b = (a . b)^1.$$

Suponhamos que a propriedade valha para certo n, assim:

$$a^n . b^n = (a.b)^n.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por $a.b$, temos:

$$a^n . b^n . (a.b) = (a.b)^n . (a.b)$$
$$a^n . a . b^n . b = (a.b)^{n+1}$$
$$a^{n+1} . b^{n+1} = (a.b)^{n+1}.$$

Portanto a propriedade vale para $n+1$.

Usando a definição $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ e o provado acima, podemos provar que $a^n b^n = (a.b)^n$ para todo número inteiro negativo. Além disso, $a^0 . b^0 = 1.1 = 1 = (a.b)^0$.

■

Seguindo a ordem natural das operações matemáticas, depois de analisarmos a multiplicação e a divisão de potências de mesma base, agora iremos responder com a propriedade seguinte o que acontece na potenciação, ou seja, *o que obtemos numa potência de potência?*

Propriedade 6.1.4. $(a^n)^m = a^{n.m}$, para todos $n, m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração por indução. Fixaremos $n \in \mathbb{Z}$ e faremos a indução sobre $m \in \mathbb{N}$.

Para $m = 1$, temos:

$(a^n)^1 = a^n = a^{n.1}$, por definição.

Suponhamos que a propriedade valha para certo m, assim:

$$(a^n)^m = a^{n.m} .$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por a^n, temos:

$$(a^n)^m . a^n = a^{n.m} . a^n$$
$$(a^n)^{m+1} = a^{n.m+n}$$
$$(a^n)^{m+1} = a^{n(m+1)} .$$

Portanto a propriedade vale para $m+1$.

Para $m = 0$, $(a^n)^0 = 1 = a^{n.0}$.

Para $m \leq -1$,

$$(a^n)^m = (a^n)^{-|m|} = \frac{1}{(a^n)^{|m|}} = \frac{1}{a^{n.|m|}}, \text{ pelo provado acima.}$$

Logo, $(a^n)^m = \frac{1}{(a^n)^{|m|}} = a^{-n|m|} = a^{nm}$, pela observação 6.1.1.

■

A última operação é a radiciação, mas para darmos prosseguimento com esta temos que fazer a seguinte definição.

Definição 6.1.3. A raiz é a operação inversa da potenciação.

6.2. Análise do conceito de raiz:

Qual é o número real não-negativo que elevado a certo $n \in \mathbb{N}$ dá um valor $a \geq 0$?

$$x^n = a.$$

Vamos elevar a m ambos os membros da igualdade. Assim teremos:

$$(x^n)^m = a^m$$

$$x^{n.m} = a^m.$$

Como o objetivo é encontrar $x = x^1$, devemos fazer com que $n.m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{n}$.

Portanto, $x = a^{\frac{1}{n}}$.

Desta conclusão e utilizando a definição de raiz, teremos que $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Note que se quisermos considerar a parte negativa como sendo uma solução, só teríamos que acrescentar o módulo em x, ou seja, $|x| = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[n]{a}$, caso n seja par.

Além disso, a solução real da equação ou a existência da raiz depende de n, e esta dependência esta associada ao valor de n ser par ou ímpar.

Caso n seja par, x^n sempre será positivo ou igual a zero, se o mesmo for $x = 0$, pois se $n = 2k, com\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^n = x^{2k} = (x^k)^2$ é sempre positivo ou igual a zero, já que, $x^2 \geq 0$.

Caso n seja ímpar, x^n será positivo ou negativo repetindo o sinal de x, pois se $n = 2k + 1, com\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^n = x^{2k+1} = (x^k)^2 . x$, o sinal depende estritamente de x, já que $x^2 \geq 0$.

Esta diferenciação é feita, pois não existe nenhum número real que satisfaça a condição de ser raiz de um número negativo de índice par.

Para o estudo a seguir consideraremos somente as raízes positivas e o índice das raízes maiores ou iguais a dois, ou seja, $\sqrt[n]{a}\ com\ a \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

A próxima propriedade, de maneira análoga a **Propriedade 6.1.3**, irá responder a seguinte pergunta: *O que podemos reduzir ao multiplicarmos ou dividirmos duas raízes de mesmo índice?*

Propriedade 6.2.1. Para $n \geq 2$, temos:

(i) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

(ii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Demonstração. Sejam x e y números reais tais que $x^n = a$ e $y^n = b$. Então,

$$ab = x^n.y^n = (xy)^n \Rightarrow xy = \sqrt[n]{ab} \Rightarrow \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

e

$$\frac{a}{b} = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

■

Para definirmos a potência de um número $a > 0$ com expoente racional, precisamos provar as duas propriedades abaixo.

Propriedade 6.2.2. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$

Demonstração. Seja $x = a^{\frac{1}{n}}$, ou seja, $x^n = a$.

Então,

$$(x^n)^m = a^m$$

$$x^{n.m} = a^m$$

$$(x^m)^n = a^m$$

$$x^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} .$$

■

Propriedade 6.2.3. $\sqrt[n.p]{a^{m.p}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Demonstração. De fato, seja $x = \sqrt[n]{a^m}$. Então,

$$x^n = a^m$$

$$(x^n)^p = (a^m)^p$$
$$x^{np} = a^{mp}$$
$$x = \sqrt[np]{a^{mp}} \;.$$

■

Pelas propriedades 6.2.2 e 6.2.3, podemos então definir a potência de um número com expoente racional.

Definição 6.2.1. $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Podemos agora generalizar, para expoentes racionais positivos, as propriedades provadas anteriormente para expoentes naturais.

Propriedade 6.2.4.

(i) $a^{\frac{p}{n}}.a^{\frac{q}{m}} = a^{\frac{p}{n}+\frac{q}{m}}$.

(ii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$, ou seja, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$.

(iii) $\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{q}{m}} = a^{\frac{pq}{mn}}$.

Demonstração.

(i) Pela propriedade 6.2.3 e pela definição 6.2.1, temos que $a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{pm}{nm}}$ e $a^{\frac{q}{m}} = a^{\frac{qn}{nm}}$. Sejam $x = \sqrt[nm]{a^{pm}}$ e $y = \sqrt[nm]{a^{qn}}$. Então,

$$x^{n.m} = a^{pm} \text{ e } y^{nm} = a^{qn}$$
$$x^{nm}.y^{nm} = a^{pm}.a^{qn}$$
$$(xy)^{nm} = a^{pm+qn}$$
$$xy = (a^{pm+qn})^{\frac{1}{nm}}$$
$$a^{\frac{p}{n}}.a^{\frac{q}{m}} = a^{\frac{pm+qn}{nm}} = a^{\frac{p}{n}+\frac{q}{m}} \;.$$

(ii) Seja $x = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$. Então,

$$x^m = \sqrt[n]{a}$$
$$(x^m)^n = a$$
$$x^{mn} = a$$

$$x = a^{\frac{1}{mn}} = a^{\frac{1}{m}.\frac{1}{n}}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}.\frac{1}{m}} \ .$$

(iii) De fato,

$$a^{\frac{p}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{p}$$

$$\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^{q} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{p}\right)^{q} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{pq} = (a^{pq})^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{q}{m}} = \left((a^{pq})^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = (a^{pq})^{\frac{1}{mn}}, \text{ por (ii)}$$

$$\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{q}{m}} = a^{\frac{pq}{nm}} \ .$$

■

7. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Ano de escolaridade: 2º ano

Observação. A **propriedade 7.3.** deste capítulo será provada utilizando o Princípio de Indução Finita, ressaltando mais uma vez a necessidade da utilização do mesmo no Ensino Médio.

Começaremos este capítulo com a definição formal de logaritmo. Esta definição se faz necessária após definido a^x com $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R},\ a > 0\ e\ a \neq 1,$ quando responder, por exemplo, a seguinte pergunta: *Qual o valor da incógnita $x \in \mathbb{R}$ na equação $2^x = 3$?*. Com as propriedades apresentadas até este momento e utilizando-se apenas da decomposição em fatores primos esta equação não poderá ser respondida.

Definição 7.1. $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$ com $a > 0, b > 0$ e $b \neq 1$.

A partir desta definição, que é uma equivalência, podemos resolver algumas equações já conhecidas da exponencial, como:

Qual o valor de $x \in \mathbb{R}$, tal que $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$:

(a) $a^x = 1$?

(b) $a^x = a$?.

Assim segue algumas propriedades básicas decorrente desta .

Propriedades Básicas 7.1.

(i) $\log_b 1 = 0$

Demonstração. $b^0 = 1 \overset{def}{\Leftrightarrow} 0 = \log_b 1$.

■

(ii) $\log_b b = 1$

Demonstração. $b^1 = b \overset{def}{\Leftrightarrow} 1 = \log_b b$.

■

(iii) $b^{\log_b a} = a$

Demonstração. $b^u = a \overset{def}{\Leftrightarrow} u = \log_b a \Rightarrow b^{\log_b a} = a$.

■

Os logaritmos historicamente surgem por causa da **propriedade 7.2.** a seguir, pois a partir dela foi permitido com o uso de uma tábua logarítmica calcular somas ao invés de produtos de números com muitos algarismos. Além disso, a mesma também pode ser vista como uma correspondência de uma propriedade da exponencial.

Exemplo: $3^x . 3^y = 3^{x+y}$.

Sejam $m = 3^x$, $n = 3^y$ e $p = 3^{x+y}$. Substituindo, teremos $m.n = p$. Utilizando a definição de logaritmo, obtemos

$$x = \log_3 m\,, y = \log_3 n \;\; e \; x + y = \log_3 p$$

Assim, $\log_3 m + \log_3 n = \log_3 p \Leftrightarrow \log_3 m + \log_3 n = \log_3 (m.n)$.

Utilizando esta ideia, provaremos a propriedade a seguir.

Propriedade 7.2. $\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$

Demonstração. Por definição, temos:

$$x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a$$

$$y = \log_b c \Leftrightarrow b^y = c$$

$$z = \log_b (a.c) \Leftrightarrow b^z = a.c$$

Portanto, $b^z = b^x . b^y \Leftrightarrow b^z = b^{x+y} \Leftrightarrow z = x + y \Leftrightarrow \log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$.

■

Naturalmente podemos nos perguntar se fizermos uma soma sucessiva de uma mesmo logaritmo, o que será que acontece, por isso a propriedade seguinte.

Propriedade 7.3. $\log_b a^n = n. \log_b a$, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demonstração por indução.

Caso $n \in \mathbb{N}$

Para $n = 0$ e $n = 1$, temos:

$\log_b a^0 = \log_b 1 = 0 = 0. \log_b a$, pela **propriedade 7.1.(i)**, $\log_b a^1 = \log_b a = 1. \log_b a$

Suponhamos que valha para n, assim

$$\log_b a^n = n. \log_b a \, .$$

Somando $\log_b a$ a ambos os membros da igualdade, temos

$$\log_b a^n + \log_b a = n.\log_b a + \log_b a$$

$$\log_b (a^n . a) = (n+1).\log_b a, \text{ pela } \textbf{propriedade 7.2}$$

$$\log_b a^{n+1} = (n+1).\log_b a \; .$$

Portanto a propriedade vale para $n + 1$.

■

Observação 7.3. A **propriedade 7.3.**, sendo o logaritmo a função inversa da função exponencial, pode ser estendida para $n \in \mathbb{R}$.

Como sabemos que soma de logaritmos transformam-se em produto do logaritmando e do fato da subtração ser a operação inversa da adição, naturalmente surge a seguinte pergunta: *O que acontece se ao invés de somar, nós subtrairmos dois logaritmos?*. Além de responder esta pergunta na propriedade a seguir, a mesma também pode ser vista como uma correspondência de uma propriedade da exponencial.

Exemplo: $\frac{3^x}{3^y} = 3^{x-y}$.

Sejam $m = 3^x$, $n = 3^y$ e $p = 3^{x-y}$, então substituindo no exemplo, teremos $\frac{m}{n} = p$. Por outro lado, utilizando a definição de logaritmo, obtemos

$$x = \log_3 m\, , y = \log_3 n \;\; e \;\; x - y = \log_3 p \; .$$

Assim, $\log_3 m - \log_3 n = \log_3 p \Leftrightarrow \log_3 m - \log_3 n = \log_3 \left(\frac{m}{n}\right)$.

Utilizando esta ideia, provaremos a propriedade a seguir.

Propriedade 7.4. $\log_c a/b = \log_c a - \log_c b$ para $b \neq 0$.

Demonstração. $\log_c a/b = \log_c a.b^{-1} = \log_c a + \log_c b^{-1} = \log_c a - 1.\log_c b = \log_c a - \log_c b$.

■

A tábua logarítmica é uma tabela de valores de vários logaritmos numa certa base. Então, é importante podermos transformar um logaritmo de uma base para outra, pois assim podemos calcular qualquer logaritmo com uma tabela de uma só base. A propriedade a seguir mostra como fazer isto.

Propriedade 7.5. A *Mudança de Base* é dada por $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

Demonstração. Sejam $x = \log_b a$, $y = \log_c a$ e $z = \log_c b$. Assim pela definição de logaritmo, temos:

$$(1)\ b^x = a,\ (2)\ c^y = a \text{ e } (3)\ c^z = b\ .$$

Elevando a x em ambos os membros da igualdade 3, temos:

$$(c^z)^x = b^x \Rightarrow c^{z.x} = b^x\ .$$

Substituindo na igualdade 1 e em seguida na igualdade 2, temos:

$$c^{z.x} = c^y \Rightarrow x.z = y\ .$$

Portanto, $x = \frac{y}{z}$, ou seja,

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}\ .$$

■

8. SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E MATEMÁTICA FINANCEIRA

Ano de escolaridade: 2º ano

Observação. Todas as propriedades deste capítulo, com exceção do **Lema 8.1.4**, serão provadas utilizando o Princípio de Indução Finita, ressaltando mais uma vez a necessidade da utilização do mesmo no Ensino Médio.

Começaremos fazendo uma definição formal do que é uma sequência numérica, que fará apenas diferenciação perante a situação se for progressão ou juros financeiros. Isto será feito, pois a maneira de contagem muda da seguinte maneira: a progressão conta a posição do termo (posição ordinal), portanto iniciando do um, e a de juros financeiros é associado ao tempo (posição cronológica), portanto iniciando do zero.

Definição 8.0.1. Uma *Sequência Numérica* é uma função da forma $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ (1ª forma) ou $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ (2ª forma).
A escolha de qual definição será tomada da seguinte maneira:

- PA e PG - 1ª definição de sequência.
- Juros Simples e Juros Compostos - 2ª definição de sequência.

8.1. Progressão Aritmética (PA)

A definição de progressão aritmética abaixo é obtida por recorrência, definindo apenas um termo e obtendo sempre o seu sucessor pela adição de um mesmo número, denominado razão, e analogamente um antecessor (caso exista) será obtido subtraindo esta razão.

Definição 8.1.1. A *Progressão Aritmética* é uma sequência numérica cuja diferença de cada termo com seu antecessor é constante. Ou seja,

$$a: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a(n) = a_n,$$

com a constante sendo chamada de razão (r);

$$a_{n+1} - a_n = r \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + r\ .$$

A proposição abaixo nos dá uma fórmula que relaciona um termo com sua posição, dados apenas o primeiro termo e a razão da Progressão Aritmética.

Propriedade 8.1.1. *Primeira Fórmula do Termo Geral* da Progressão Aritmética é dada por $a_n = a_1 + (n-1).r$.

Demonstração por Soma Telescópica.

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r\ .$$

Somando ambos os membros de todas as igualdades, temos

$$a_n = a_1 + (n-1)r\ .$$

Demonstração por indução. Para $n = 1$, temos:

$$a_1 = a_1 + 0.r = a_1 + (1-1).r\ .$$

Suponhamos que valha para n,

$$a_n = a_1 + (n-1).r\ .$$

Somando r a ambos os membros da igualdade, temos:

$$a_n + r = a_1 + (n-1).r + r, \text{ por definição}$$
$$a_{n+1} = a_1 + (n-1+1).r$$
$$a_{n+1} = a_1 + (n+1-1).r\ .$$

Portanto a propriedade vale para $n+1$.

■

Podemos também relacionar dois termos quaisquer da *PA* conhecendo suas posições e a razão. Ou seja, não é necessário saber o primeiro termo sempre, como foi apresentado na proposição anterior.

Propriedade 8.1.2. *Segunda Fórmula do Termo Geral* da Progressão Aritmética é dada por $a_n = a_p + (n-p).r$, com $n \geq p$.

Demonstração por indução. Fixaremos p e faremos a indução sobre n, $n \geq p$

Para $n = p$, temos:

$$a_p = a_p + 0.r = a_p + (p-p)r\ .$$

Suponhamos que valha para $n, n \geq p$,

$$a_n = a_p + (n - p).r$$

Somando r a ambos os membros da igualdade, temos

$$a_n + r = a_p + (n - p).r + r$$

$$a_{n+1} = a_p + ((n + 1) - p).r$$

Portanto a propriedade vale para $n + 1$.

■

A fórmula seguinte dá origem ao nome de Progressão Aritmética, já que ela mostra que a média aritmética de dois termos eqüidistante de um terceiro é o próprio.

Propriedade 8.1.3. *Fórmula do Termo Médio* da Progressão Aritmética é dada por $a_k = \frac{a_{k+p} + a_{k-p}}{2}$.

Demonstração por indução. Fixaremos p e faremos a indução sobre k, $k \geq p + 1$.

Para $k = p + 1$, temos:

$$\frac{a_{p+1+p} + a_{p+1-p}}{2} = \frac{a_{2p+1} + a_1}{2} = \frac{a_1 + (2p + 1 - 1)r + a_1}{2} = \frac{2a_1 + 2pr}{2} =$$

$$= a_1 + pr = a_1 + (p + 1 - 1)r = a_{p+1} .$$

Suponhamos que valha para k,

$$a_k = \frac{a_{k+p} + a_{k-p}}{2} .$$

Somando r a ambos os membros da igualdade, temos

$$a_k + r = \frac{a_{k+p} + a_{k-p}}{2} + r$$

$$a_{k+1} = \frac{a_{k+p} + a_{k-p}}{2} + \frac{2r}{2}$$

$$a_{k+1} = \frac{a_{k+p} + r + a_{k-p} + r}{2}$$

$$a_{k+1} = \frac{a_{(k+1)+p} + a_{(k+1)-p}}{2} .$$

Portanto a propriedade vale para $k + 1$.

■

Enunciaremos e demonstraremos um lema que servirá para a demonstração da soma dos n primeiros termos de uma PA. Este lema diz que a soma do primeiro com o último termo da Progressão Aritmética é igual a soma de outros dois termos quaisquer, desde que a soma das posições destes seja igual a soma das posições do primeiro com o último termo.

Lema 8.1.4. $a_p + a_q = a_1 + a_n$ se $p + q = n + 1$.

Demonstração. Pela 1ª forma do termo geral, temos

$$a_p + a_q = a_1 + (p-1).r + a_1 + (q-1).r = a_1 + a_1 + (p + q - 1 - 1).r =$$
$$= a_1 + (a_1 + (n-1).r) = a_1 + a_n.$$

■

A propriedade seguinte nos fornece uma fórmula já conhecida e regularmente relacionada com a história da punição que o(a) professor(a) escolar deu ao famoso matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 à 1855) de somar de 1 até 100. Inclusive a primeira demonstração feita do **Lema 8.1.4.** é baseada na maneira como ele fez este cálculo. Temos

$$S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$$
$$S = 100 + 99 + \cdots + 2 + 1$$

Daí,

$$2S = 101 + 101 + \cdots + 101 + 101$$
$$2S = 101.100$$
$$S = \frac{101.100}{2}$$
$$S = 5050$$

Propriedade 8.1.5. *Soma dos* n *Primeiros Termos* é dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$.

Demonstração usando o ***Lema 8.1.4.*** Iremos iniciar escrevendo a soma dos n primeiros termos nas ordens crescente e decrescente de seus índices, assim

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Daí,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Utilizando o lema, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$
$$2S_n = (a_1 + a_n).n$$

$$S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}.$$

■

Demonstração usando o princípio de indução. Para $n = 1$, temos:

$$S_1 = a_1 = \frac{2a_1.1}{2} = \frac{(a_1+a_1).1}{2}.$$

Suponhamos que valha para n,

$$S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}.$$

Somando a_{n+1} a ambos os membros da igualdade, temos

$$S_n + a_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n).n + 2a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + a_n.n + a_{n+1} + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + a_n.n + a_1 + n.r + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + a_n.n + n.r + a_1 + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + n.(a_n + r) + a_1 + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.n + n.a_{n+1} + a_1 + a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(a_1+a_{n+1}).(n+1)}{2}.$$

Portanto a propriedade vale para $n + 1$.

■

8.2. Progressão Geométrica

A definição de progressão geométrica é obtida por recorrência, definindo apenas um termo e obtendo o seu sucessor pela multiplicação de um mesmo número, denominado razão, e analogamente um antecessor (caso exista) será obtido dividindo por esta razão.

Definição 8.2.1. A *Progressão Geométrica* é uma sequência numérica cuja divisão de cada termo com seu antecessor é constante. Ou seja,

$$a: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a(n) = a_n\text{'}$$

com a constante sendo chamada razão q;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n . q \, .$$

A proposição seguinte nos fornece uma fórmula que relaciona um termo com sua posição, dados apenas o primeiro termo e a razão da Progressão Geométrica.

Propriedade 8.2.1. *Primeira Fórmula do Termo Geral* da Progressão Geométrica é dada por $a_n = a_1 . q^{n-1}$.

Demonstração por produto telescópico.

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 . q$$
$$a_3 = a_2 . q$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_n = a_{n-1} . q \, .$$

Multiplicando ambos os membros de todas as igualdades, temos

$$a_n = a_1 . q^{n-1} \, .$$

Demonstração por indução. Para $n = 1$, temos:

$$a_1 = a_1 . 1 = a_1 . q^0 = a_1 . q^{1-1} \, .$$

Suponhamos que valha para n,

$$a_n = a_1 . q^{n-1} \, .$$

Multiplicando por q ambos os membros da igualdade, temos

$$a_n . q = a_1 . q^{n-1} . q$$
$$a_{n+1} = a_1 . q^{n-1+1}$$
$$a_{n+1} = a_1 . q^{n+1-1} \, .$$

Portanto a propriedade vale para $n + 1$.

■

Podemos também observar na fórmula da proposição seguinte que dois termos quaisquer da *PG* relacionará suas posições e a razão. Ou seja, não é necessário saber o primeiro termo sempre, como foi apresentado na proposição anterior.

Propriedade 8.2.2. *Segunda Fórmula do Termo Geral* da Progressão Geométrica é dada por $a_n = a_p . q^{n-p}$, com $n \geq p$.

Demonstração por indução. Fixaremos p e faremos a indução sobre n, $n \geq p$.

Para $n = p$, temos

$$a_p = a_p . 1 = a_p . q^0 = a_p . q^{p-p} \ .$$

Suponhamos que valha para n,

$$a_n = a_p . q^{n-p} \ .$$

Multiplicando por q ambos os membros da igualdade, temos

$$a_n . q = a_p . q^{n-p} . q$$

$$a_n . q = a_p . q^{n-p} . q^1$$

$$a_{n+1} = a_p . q^{(n+1)-p} \ .$$

Portanto a propriedade vale para $n + 1$.

■

A fórmula seguinte é o que dá origem ao nome de Progressão Geométrica, pois ela mostra que a média geométrica em módulo de dois termos eqüidistante de um terceiro é o próprio em módulo.

Propriedade 8.2.3. $a_k^2 = a_{k-p} . a_{k+p}$ para $k \geq p + 1$.

Demonstração por indução. Para $k = p + 1$, temos

$$a_{p+1-p} . a_{p+1+p} = a_1 . a_{2p+1} = a_1 . a_1 . q^{2p} = a_1^2 . q^{2p} = (a_1 q^p)^2 = a_{p+1}^2 \ .$$

Suponhamos que valha para k,

$$a_k^2 = a_{k-p} . a_{k+p} \ .$$

Multiplicando por q^2 ambos os membros da igualdade, temos

$$a_k^2 q^2 = a_{k-p} . a_{k+p} . q^2$$

$$(a_k q)^2 = \left(a_{k-p} . q\right) . \left(a_{k+p} . q\right)$$

$$(a_{k+1})^2 = \left(a_{k+1-p}\right) . \left(a_{k+1+p}\right) \ .$$

Portanto a propriedade vale para $k + 1$.

■

Observação. Em particular, provamos que $a_{k-p} a_{k+p} \geq 0$ para todo $k \geq p + 1$.

Corolário 8.2.3. Fórmula do *Termo Médio* é dada por $|a_k| = \sqrt[2]{a_{k-p}.a_{k+p}}$, para $k \geq \ p + 1$.

Demonstração. Pela proposição 8.2.3., temos para $k \geq p + 1$,

$$a_k^2 = a_{k-p}.a_{k+p} \geq 0$$

$$|a_k| = \sqrt[2]{a_{k-p}.a_{k+p}} \ .$$

■

Aos multiplicarmos todos os termos de uma PG, diferentemente da PA, obtemos um valor que depende estritamente do primeiro termo e do último, como segue na proposição abaixo.

Propriedade 8.2.4. *Produto dos n primeiros termos de uma PG* é dada por $|P_n| = \sqrt[2]{(a_1.a_n)^n}$.

Demonstração por indução. Para $n = 2$, temos

$$|P_2| = |a_1.a_2| = \sqrt[2]{(a_1.a_2)^2} \ .$$

Suponhamos que valha para n,

$$|P_n| = \sqrt[2]{(a_1.a_n)^n} \ .$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por $|a_{n+1}|$, temos

$$|P_n|.|a_{n+1}| = \sqrt[2]{(a_1.a_n)^n}.|a_{n+1}|$$

$$|P_n.a_{n+1}| = \sqrt[2]{(a_1.a_n)^n}.\sqrt[2]{(a_{n+1})^2}$$

$$|P_{n+1}| = \sqrt[2]{a_1^n.a_n^n.a_{n+1}^2}$$

$$|P_{n+1}| = \sqrt[2]{a_1^n.(a_1.q^{n-1})^n.(a_1.q^n)^2}$$

$$|P_{n+1}| = \sqrt[2]{a_1^n.a_1^n.q^{(n-1).n}.a_1^2.q^{2n}}$$

$$|P_{n+1}| = \sqrt[2]{a_1^{2n+2}.q^{(n-1).n+2n}}$$

$$|P_{n+1}| = \sqrt[2]{a_1^{2(n+1)}.q^{n.(n+1)}}$$

$$|P_{n+1}| = \sqrt[2]{a_1^{n+1}.a_1^{n+1}.q^{n.(n+1)}}$$

$$|P_{n+1}| = \sqrt[2]{a_1^{n+1}.(a_1.q^n)^{n+1}}$$

$$|P_{n+1}| = \sqrt[2]{(a_1.a_{n+1})^{n+1}}\ .$$

Portanto a propriedade vale para $k+1$.

■

Demonstração usando soma de PA. Temos que

$$P_n = a_1.a_2 \dots a_n = a_1.(a_1.q^1)\dots(a_1.q^{n-1})$$

$$P_n = a_1^n.q^{1+2+\cdots+(n-1)}\ .$$

Pela **propriedade 8.1.5**,

$$P_n = a_1^n.q^{\frac{(1+(n-1))(n-1)}{2}}$$

$$P_n = a_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$P_n = \left(a_1.q^{\frac{(n-1)}{2}}\right)^n\ .$$

Logo,

$$P_n = \left(a_1.q^{\frac{(n-1)}{2}}\right)^n \Rightarrow |P_n| = \sqrt{(a_1^2.q^{n-1})^n} \Leftrightarrow |P_n| = \sqrt{\left(a_1.(a_1.q^{n-1})\right)^n}$$

$$|P_n| = \sqrt{(a_1.a_n)^n}\ .$$

■

O lema seguinte serve para fazermos uma demonstração quase que imediata da soma finita dos n primeiros termos de uma PG.

Lema 8.2.5. $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}$ com $q \neq 1$.

Demonstração. Para $n=1$, temos:

$$\frac{q^1-1}{q-1} = \frac{q-1}{q-1} = 1\ .$$

Suponhamos que a propriedade vale para n,

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}\ .$$

Somando q^n a ambos os membros da igualdade, temos

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n = \frac{q^n-1}{q-1}+q^n$$

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n = \frac{q^n-1+q^n(q-1)}{q-1}$$

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n = \frac{q^n-1+q^{n+1}-q^n}{q-1}$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Portanto o lema vale para $n + 1$.

■

Agora iremos provar uma fórmula que caracteriza a soma finita dos n primeiros termos de uma PG.

Propriedade 8.2.6. *Soma finita dos* n *primeiros termos de uma PG* é dada por $S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{q-1}$.

Demonstração usando o ***Lema 8.2.5.***

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1.q + a_1.a^2 + \cdots + a_1.a^{n-1}$$

$$S_n = a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$$

$S_n = a_1.\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$, pelo **lema 8.2.5.**

■

Demonstração por indução. (Forma direta) Para $n = 1$, temos:

$$a_1.\frac{q^1-1}{q-1} = a_1.\frac{q-1}{q-1} = a_1.1 = a_1 = S_1.$$

Suponhamos que a propriedade vale para n,

$$S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{q-1}.$$

Somando a_{n+1} a ambos os membros da igualdade, temos

$$S_n + a_{n+1} = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} + a_1.q^n$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.(q^n - 1) + a_1.q^n(q - 1)}{q - 1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.\big((q^n - 1) + q^n(q - 1)\big)}{q - 1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1.(q^n - 1 + q^{n+1} - q^n)}{q - 1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1(q^{n+1}-1)}{q-1}.$$

Portanto a propriedade vale para $n+1$.

$\blacksquare$

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Antes de iniciarmos a segunda parte de sequências, apresentaremos algumas definições e notações comuns que servirão como base nesta parte de Matemática Financeira.

Definições Básicas 8.2.2.

C - Capital é o valor aplicado.

j - Juros é o valor a ser acrescentado ou descontado do capital.

t - tempo relativo ao período de duração da aplicação do juros.

i - taxa de juros no período de um dia ou um mês ou um ano.

M - Montante é o valor total acumulado ou descontado até o período t.

8.3. Juros Simples

O primeiro conceito que será apresentado é o de Juros Simples, estudado desde o ensino fundamental quando os alunos aprendem a ideia de porcentagem, porém é novamente trabalhado no ensino médio após o desenvolvimento de Progressão Aritmética, pois as fórmulas básicas são diretamente retiradas do estudo dessa progressão.

Definição 8.3.1. O regime de juros simples é quando o percentual de juros incide apenas sobre o capital inicial. Outra maneira de entendê-la é através da diferença entre um montante e seu antecessor ser constante e igual ao capital vezes a taxa. Ou seja,

$$\begin{cases} M(t+1) - M(t) = Ci \\ M(0) = C \end{cases}.$$

A lei de recorrência definida para o Juros Simples depende estritamente do produto entre o capital inicial aplicado e a taxa de juros. Podemos também obter uma fórmula geral para o montante que depende somente do tempo, do capital inicial e da taxa de juros.

Proposição 8.3.1. O montante segundo regime de juros simples é dado em função do tempo por $M(t) = C(1 + it)$.

Demonstração. Faremos a demonstração por indução. Para $t = 0$, temos

$$M(0) = C(1 + i.0) = C(1) = C, \text{ por definição.}$$

Suponhamos agora que valha para certo t. Assim,

$$M(t) = C(1 + it)\,.$$

Somando Ci a ambos os membros da igualdade, temos

$$M(t) + Ci = C(1 + it) + Ci$$

$$M(t + 1) = C(1 + i + it)$$

$M(t + 1) = C(1 + (t + 1)i)\,.$

Provando que vale para $t + 1$.

■

Seguindo a definição abaixo podemos reescrever a expressão do montante dependendo somente do capital e do juros acumulado.

Definição 8.3.2. O juros pode ser definido por $j(t) = Cit$. Assim, reescrevendo a proposição anterior, temos que $M(t) = C + j(t)$.

8.4. Juros Composto

O conceito que será apresentado é apenas trabalhado no ensino médio após o desenvolvimento de Progressão Geométrica, pois as fórmulas básicas são diretamente retiradas do estudo dessa progressão.

Definição 8.4.1. Juros composto são os juros de um determinado período somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Outra maneira de entendê-la é pela razão entre um montante e seu antecessor ser constante e igual a taxa mais um. Ou seja,

$$\begin{cases} \frac{M(t+1)}{M(t)} = i + 1 \\ M(0) = C \end{cases}.$$

A lei de recorrência que define o juros composto depende estritamente da taxa de juros. Podemos obter também uma fórmula geral para o montante que depende somente do tempo, do capital inicial e da taxa de juros.

Proposição 8.4.1. O montante sobre o regime de juros composto é $M(t) = C(1+i)^t$

Demonstração por indução.

Para $t = 0$, temos

$$M(0) = C(1+i)^0 = C.1 = C, \text{ por definição.}$$

Suponhamos que valha para certo t. Assim,

$$M(t) = C(1+i)^t$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por $i + 1$, temos

$$M(t).(i+1) = C(1+i)^t.(1+i)$$

$$M(t+1) = C(1+i)^{t+1}.$$

Provando que vale para $t + 1$.

■

9. GEOMETRIA ESPACIAL: ESFERA

Ano de escolaridade: 2º ano

Começaremos fazendo a definição formal da esfera através do conceito de sólido de revolução.

Definição 9.0.1. Uma *esfera* é o sólido gerado pela revolução de um semicírculo tendo como eixo o seu diâmetro.

O Princípio de Cavaliere, que será apresentado a seguir, é o resultado básico utilizado para determinar os volumes dos seguintes sólidos: prisma qualquer, pirâmide qualquer, cone, cilindro e esfera. Este princípio, apesar de fácil entendimento, não possui uma demonstração trivial, nem possível de ser apresentada no ensino básico.

Princípio de Cavalieri: Dados dois sólidos S_1 e S_2 apoiados em um plano horizontal α. Consideraremos também o plano β, paralela a α, que, ao seccionar S_1, também secciona S_2, determinando duas regiões planas de áreas A_1 e A_2. Nessas condições, podemos afirmar que, se para todo plano β temos $A_1 = A_2$, então $Volume(S_1) = Volume(S_2)$.

Apesar de não podermos apresentar a demonstração deste princípio, o mesmo pode ser pensado com algumas analogias simples. Como exemplo, temos a figura abaixo com duas imagens de pilhas de moedas de mesma altura e mesma quantidade, diferindo apenas por uma distorção feita de maneira proposital.

Figura 9.0.2: Princípio de Cavalieri

FONTE: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2009/12/o-principio-de-cavalieri.html

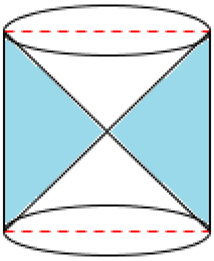
Podemos analisar as pilhas de moedas como sendo os dois sólidos citados no Princípio de Cavalieri. Obviamente para alunos o volume dos dois são iguais, pois trata-se do mesmo sólidos a mesmo de uma pequena deformação. Assim tomando as seções dos planos transversais e paralelos a base que contém as pilhas, teremos que as figuras das interseções com os dois sólidos serão congruentes, em particular, determinam a mesma área.

Esta ideia será a mesma que será levada para a demonstração do volume da esfera, porém as seções serão de figuras diferentes, mas com a mesma área.

Utilizaremos a definição a seguir do sólido chamado Anticlépsidra como o que corresponderá a esfera.

Definição 9.0.3. Uma *Anticlépsidra* é o sólido geométrico formado a partir de um cilindro equilátero, do qual subtraímos dois cones opostos pelos vértices cujas bases coincidem com as bases do cilindro e suas alturas sejam iguais ao raio da base.

Figura 9.0.3: Anticlépsidra



FONTE: Autor 2016

Definido a Anticlépsidra iremos determinar uma fórmula para seu volume que dependa apenas do raio da base. Isto é fundamental, pois na **Proposição 9.1.1.** iremos utilizar o Princípio de Cavaliere para mostrar que o volume da esfera é igual ao volume de uma anticlépsidra de raio da base igual ao da raio da esfera.

Proposição 9.0.1. O *Volume da Anticlépsidra* é dada por $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, onde r é o raio do cilindro.

Demonstração.

$$V = V_{cilindro} - 2.V_{cone}$$

$$V = \pi r^2.2r - 2.\frac{\pi r^2.r}{3}$$

$$V = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3}$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

■

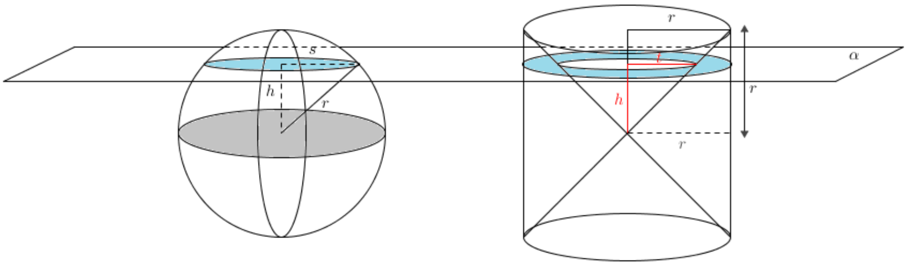
9.1. Volume da Esfera

Finalizaremos este capítulo com a demonstração de que o volume da anticlépsidra é igual ao volume de uma esfera, se a medida do raio da base da anticlépsidra é igual a medida do raio da esfera.

Proposição 9.1.1. *(Volume da Esfera)* O volume da esfera de raio r é igual ao volume da anticlépsidra, ou seja, $V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Demonstração. A demonstração consistirá em utilizar o Princípio de Cavaliere para as seções da esfera e da anticlépsidra determinadas pelos planos perpendiculares à altura da anticlépsidra.

Figura 9.1.1(a): Seções da Esfera e da Anticlépsidra



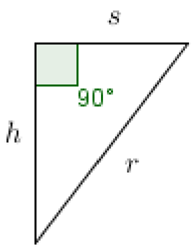
FONTE: Autor 2016

Utilizaremos as notações conforme a figura acima. Desta forma, a área da seção da esfera será:

$$A_{seção\ esférica} = \pi s^2 .$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos

Figura 9.1.1(b): Triângulo retângulo



FONTE: Autor 2016

$$r^2 = h^2 + s^2 \Leftrightarrow s^2 = r^2 - h^2$$

Substituindo na área da seção da esfera, temos

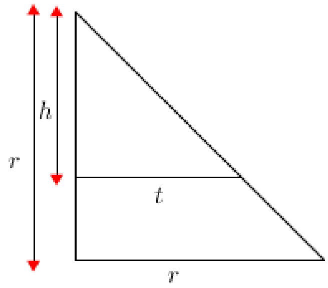
$$A_{seção\ esférica} = \pi.(r^2 - h^2)$$

Calculando a área da coroa circular da seção da anticlépsidra, temos

$$A_{coroa\ circular} = \pi r^2 - \pi t^2 = \pi(r^2 - t^2)$$

Temos também por semelhança de triângulo que

Figura 9.1.1(c): Semelhança de Triângulo



FONTE: Autor 2016

$$\frac{t}{h} = \frac{r}{r} = 1 \Leftrightarrow t = h.$$

Logo,

$$A_{coroa\ circular} = \pi.(r^2 - h^2).$$

Portanto,

$$A_{coroa\ circular} = A_{seção\ esférica},$$

o que nos garante pelo Princípio de Cavalieri que:

$$V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

■

10. NÚMEROS COMPLEXOS

Ano de escolaridade: 3º ano

A unidade imaginária $\sqrt{-1}$ que introduz os números complexos e um conjunto novo que engloba o conjunto dos números reais é geralmente apresentada como uma das soluções da equação $x^2 + 1 = 0$.

Observação. A **propriedade 10.3.2** deste capítulo será provada utilizando o Princípio de Indução Finita, ressaltando mais uma vez a necessidade da utilização do mesmo no Ensino Médio.

Definição 10.0.1. A *Unidade Imaginária* é dada por $i = \sqrt{-1}$.

Definição 10.0.2. A *Forma Algébrica do número complexo* será dada por $z = a + bi$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Definição 10.0.3. *Produto de Números Complexos:* dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, então

$$z_1.z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i\ .$$

10.1. Conjugado

O processo de racionalização de frações já conhecida nos reais, terá um análogo no processo de divisão de números complexos, pois aparecerá no denominador da fração a unidade imaginária que por sua vez representa uma raiz. Então faz-se necessário utilizar-se da propriedade do produto da soma pela diferença.

Definição 10.1.1. O *Conjugado* de um número complexo $z = a + bi$ é dado por $\bar{z} = a - bi$.

Propriedade 10.1.1. Se $z = a + bi$ é um número complexo, então $z.\bar{z} \in \mathbb{R}$.
Demonstração. Por definição de conjugado, $\bar{z} = a - bi$, e usando a definição de produto de dois números complexos, temos

$$z.\bar{z} = (a+bi).(a-bi) = \left(a^2 - (-b^2)\right) + (ab - ba)i = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

10.2. Potências inteiras de $\boldsymbol{i}$

Assim como foi feito para potência de base real também nos perguntamos o que acontecerá ao multiplicarmos uma potência de base complexa.

Propriedade 10.2.1. $i^m = i^r$, onde $m \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ e $m = 4q + r$, com $0 \leq r < 4$

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, temos que existe $q \in \mathbb{Z}$, onde $m = 4q + r$ com $0 \leq r < 4$.

Daí, $i^m = i^{4q+r} = i^{4q}.i^r = (i^4)^q.i^r = (i^2.i^2)^q.i^r = \left((-1).(-1)\right)^q.i^r = 1^q.i^r = i^r$

Portanto, para quaisquer inteiro m temos que i^m só poderá ser:

$$i^0 = 1;\ i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = -i,$$

onde a potência equivalente será o resto da divisão Euclidiana por 4.

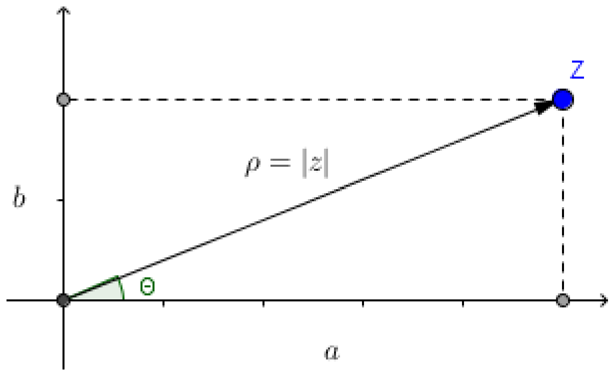
■

10.3. Forma trigonométrica

Já vimos que o produto de números complexos sugere a representação no plano cartesiano do mesmo. Assim faremos uma associação entre a forma algébrica de um número complexo e a sua forma trigonométrica obtida no plano cartesiano.

Definição 10.3.1. A *Forma Trigonométrica ou Polar do número complexo* $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, é dado por $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$, onde $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo do número complexo, θ é o ângulo formado pela forma vetorial do número complexo no plano e o eixo positivo das abscissas pertencente ao intervalo $[0,2\pi[$, chamado de argumento, $cos\theta = \frac{a}{\rho}$ e $sen\theta = \frac{b}{\rho}$.

Figura 10.3.1: Número complexo no plano cartesiano



FONTE: Autor 2016

É possível fazer uma reinterpretação do produto utilizando a forma trigonométrica, que nos ajudará a encontrar uma outra forma de calcular potência de números complexos, além da forma do Binômio de Newton.

Propriedade 10.3.1. *Produto na forma trigonométrica:* Se $z_1 = \rho_1(cos\alpha + isen\alpha)$ e $z_2 = \rho_2(cos\beta + isen\beta)$, então $z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2\big(\cos(\alpha+\beta) + isen(\alpha+\beta)\big)$.

Demonstração.

$$z_1.z_2 = \rho_1(cos\alpha + isen\alpha).\rho_2(cos\beta + isen\beta)$$

$$= \rho_1.\rho_2.(cos\alpha + isen\alpha)(cos\beta + isen\beta)$$

$$= \rho_1.\rho_2.\big((cos\alpha.cos\beta - sen\alpha.sen\beta) + i(sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha)\big)$$

$$= \rho_1.\rho_2\big(\cos(\alpha+\beta) + isen(\alpha+\beta)\big).$$

■

Propriedade 10.3.2. *Primeira Fórmula de De Moivre:* Se $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$, então $z^n = |z|^n\big(cos(n\theta) + isen(n\theta)\big)$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demonstração por indução. Para $n = 0$, temos

$$z^0 = 1 = 1.(1 + i.0) = |z|^0.(cos0 + isen0).$$

Suponhamos que valha para n,

$$z^n = |z|^n\big(cos(n\theta) + isen(n\theta)\big).$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$,temos

$$z^n.z = |z|^n\big(cos(n\theta) + isen(n\theta)\big).|z|(cos\theta + isen\theta)$$

$$z^{n+1} = |z|^{n+1}\big((cos(n\theta).cos\theta - sen(n\theta).sen\theta) + (sen(n\theta).cos\theta + sen\theta.\cos(n\theta))i\big)$$

$$z^{n+1} = |z|^{n+1}\big(cos(n\theta + \theta) + isen(n\theta + \theta)\big)$$

$$z^{n+1} = |z|^{n+1}(cos(\theta(n+1)) + isen(\theta(n+1))).$$

Portanto a propriedade vale para $n+1$.

■

Propriedade 10.3.3. *Segunda Fórmula de De Moivre:*

$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$ para $k = 0,1,\dots,n-1$ com $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Demonstração. Sejam $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$ e $z_k = \rho_k\big(\cos(\theta_k) + isen(\theta_k)\big)$ tais que $z_k^n = z$. Logo pela **Propriedade 10.3.2.**, temos $\left[\rho_k^n\big(\cos(n\theta_k) + isen(n\theta_k)\big) = \rho\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)\right]$.

Assim, $\rho_k^n = \rho \Rightarrow \rho_k = \sqrt[n]{\rho}$ (já que $\rho_k \geq 0$ e $\rho \geq 0$) e também

$\begin{cases}\cos(n\theta_k) = \cos(\theta)\\ \mathrm{sen}(n\theta_k) = \mathrm{sen}(\theta)\end{cases} \Rightarrow n\theta_k = \theta + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta_k = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ com $k = 0,1,2,\dots,n-1$

Portanto, $\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$, $k = 0,1,2,\dots,n-1$.

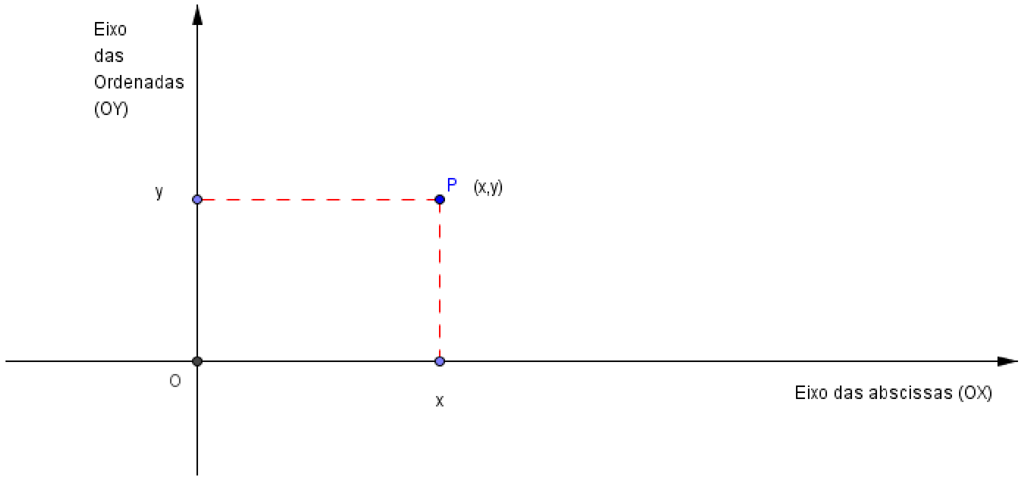
■

11. GEOMETRIA ANALÍTICA

Ano de escolaridade: 3º ano

A representação de um ponto num sistema de eixos ortogonais OX e OY será dado através de um par ordenado de números reais (x, y) cujo o 1º número do par x será denominado abscissa e representado no eixo - OX e o 2º número do par y será chamado ordenada e representado no eixo - OY.

Figura 11.0.1: Ponto no Plano Cartesiano



FONTE: Autor 2016

11.1. Distância entre dois pontos

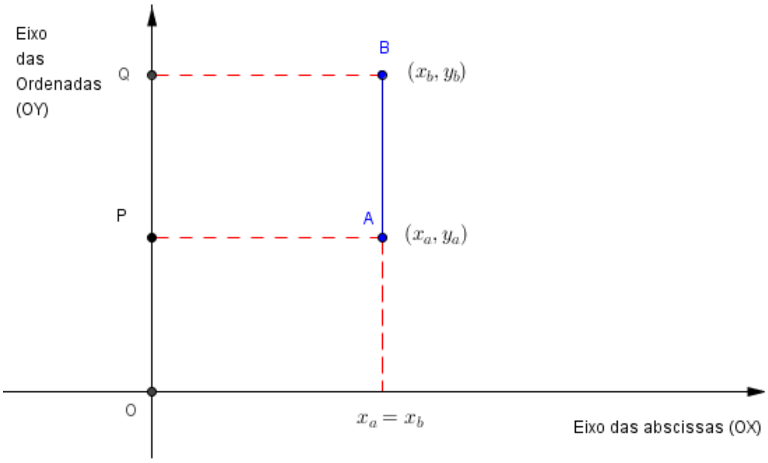
Consideremos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ dois pontos no plano cartesiano e denotaremos por d_{AB} a distância entre esses pontos.

Proposição 11.1.1. Se os pontos A e B possuem a mesma abscissa, ou seja, $x_a = x_b$, então

$$d_{AB} = |y_a - y_b| \,.$$

Demonstração.

Figura 11.1.1: Distância de pontos na vertical



FONTE: Autor 2016

Sejam P e Q as projeções ortogonais de A e B, respectivamente, sobre o eixo das ordenadas. Como $x_a = x_b$ o polígono $ABQP$ é um retângulo, e portanto $d_{AB} = d_{PQ}$. O fato de P e Q serem pontos no eixo - OY nos dá que $d_{PQ} = |y_a - y_b|$. Assim, $d_{AB} = |y_a - y_b|$.

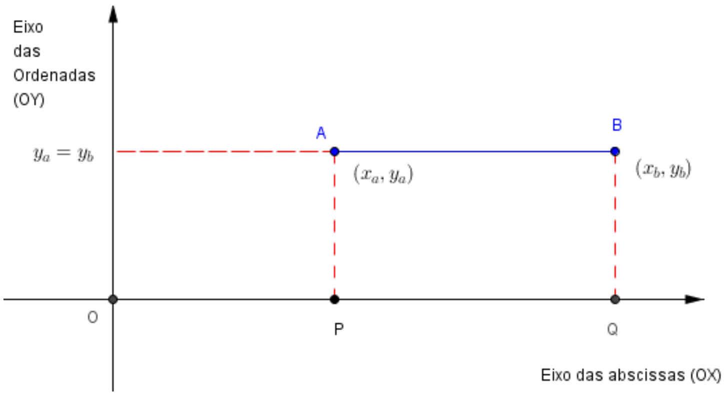
■

Proposição 11.1.2. Se os pontos A e B possuem a mesma ordenada, ou seja, $y_a = y_b$, então

$$d_{AB} = |x_a - x_b| .$$

Demonstração.

Figura 11.1.2: Distância de pontos na horizontal



FONTE: Autor 2016

Sejam P e Q as projeções ortogonais de A e B, respectivamente, sobre o eixo das abscissas. Como $y_a = y_b$ o polígono $ABQP$ é um retângulo, e portanto $d_{AB} = d_{PQ}$. O fato de P e Q serem pontos no eixo - OY nos dá que $d_{PQ} = |x_a - x_b|$. Assim, $d_{AB} = |x_a - x_b|$.

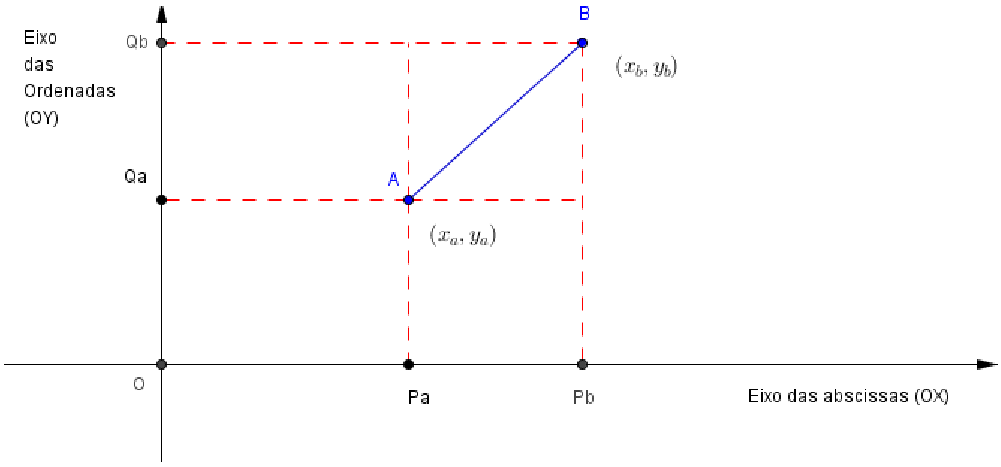
■

Proposição 11.1.3. Se os pontos A e B não possuem abscissas e nem ordenadas iguais, ou seja, $x_a \neq x_b$ e $y_a \neq y_b$, então

$$d_{AB} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}\ .$$

Demonstração.

Figura 11.1.3: Distância entre pontos quaisquer



FONTE: Autor 2016

Para praticidade na demonstração iremos considerar as notações evidentes na figura acima. Sendo assim, utilizando as projeções dos pontos A e B e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa AB, temos

$$d_{AB}^2 = d_{PaPb}^2 + d_{QaQb}^2$$

$$d_{AB}^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$$

$$d_{AB} = \pm\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}\ .$$

Mas como se trata de distância podemos desconsiderar a parte negativa, ficando apenas

$$d_{AB} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}\ .$$

■

Observação 11.1.1. Apesar de haver a necessidade de separarmos em três casos a demonstração da distância entre dois pontos, podemos observar que os dois primeiros podem ser substituídos unicamente pela última fórmula.

11.2. Ponto Médio

Uma pergunta natural, neste momento seria: *Quais são as coordenadas do ponto colinear que equidista de outros dois pontos no plano?*

Definição 11.2.1. O ponto médio entre dois pontos A e B é o ponto que equidista de A e B e está alinhado com os mesmos.

Propriedade 11.2.1. O ponto médio $M = (x_m, y_m)$ entre $A = (x_a, y_b)$ e $B = (x_b, y_b)$ é dado por $x_m = \frac{x_a + x_b}{2}$ e $y_m = \frac{y_a + y_b}{2}$.

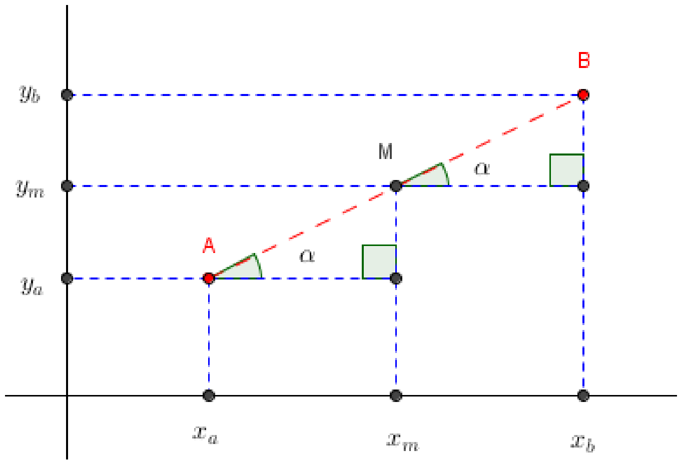
Demonstração. A demonstração vai ser dividida em dois casos, sendo o primeiro caso quando $x_a = x_b$ ou $y_a = y_b$ e o segundo caso quando $x_a \neq x_b$ e $y_a \neq y_b$.

Para o primeiro caso, se $x_a = x_b$, temos que os pontos A, B e os obtidos pelas projeções ortogonais dos mesmos sobre o eixo das ordenadas determinam um retângulo. Portanto a ordenada do ponto médio entre A e B será igual a média aritmética das ordenadas das projeções ortogonais e obviamente a coordenada da abscissa será $x_a = x_b$.

De maneira análoga, se $y_a = y_b$, temos que os pontos A, B e os obtidos pelas projeções ortogonais dos mesmos sobre o eixo das abscissas determinam um retângulo. Portanto a abscissa do ponto médio entre A e B será igual a média aritmética das abscissas das projeções ortogonais e obviamente a coordenada da ordenada será $y_a = y_b$.

Para o segundo caso, onde $x_a \neq x_b$ e $y_a \neq y_b$, iremos considerar a figura abaixo com as devidas representações como referência.

Figura 11.2.1: Ponto Médio



FONTE: Autor 2016

Desta forma, pelo caso de congruência LAA_o, temos

$$|x_m - x_a| = |x_b - x_m| \Rightarrow 2x_m = x_a + x_b \Rightarrow x_m = \frac{x_a + x_b}{2}, \text{ já que}$$

$$x_a < x_m < x_b \text{ ou } x_b < x_m < x_a.$$

$$|y_m - y_a| = |y_b - y_m| \Rightarrow 2y_m = y_a + y_b \Rightarrow y_m = \frac{y_a + y_b}{2}, \text{ já que}$$

$$y_a < y_m < y_b \text{ ou } y_b < y_m < y_a.$$

■

11.3. Equação geral e reduzida da reta

Assim que respondemos a questão das coordenadas do ponto médio - que depende de outro dois pontos, sendo os três colineares - queremos naturalmente saber qual é a condição para que três pontos sejam colineares.

Propriedade 11.3.1. A condição de alinhamento de três pontos $A, B\ e\ C$, onde $A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b)\ e\ C = (x_c, y_c)$ é dada por $\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0.$

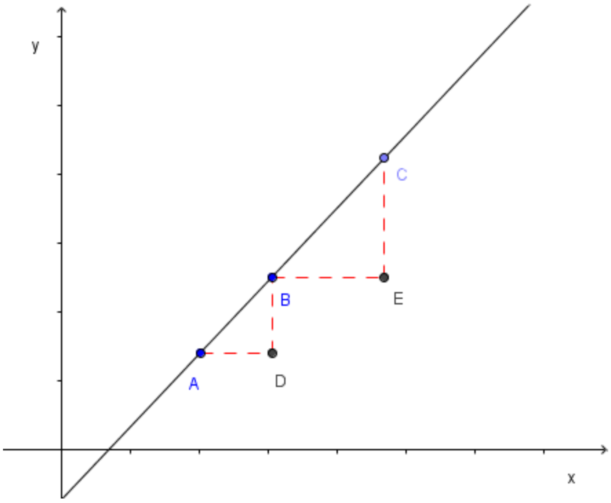
Demonstração. Note que se as três ordenadas são iguais e também quando as três abscissas são iguais, os três pontos estão alinhados, pois seriam pontos de uma mesma reta vertical e de uma mesma reta horizontal, respectivamente. Além disso, para quaisquer um dos dois casos, teríamos:

(1º caso) $\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y & 1 \\ x_b & y & 1 \\ x_c & y & 1 \end{vmatrix} = 0$, pois as duas últimas colunas são múltiplas.

(2º caso) $\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y_a & 1 \\ x & y_b & 1 \\ x & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$, pois a primeira e a última colunas são múltiplas.

O caso restante seria quando os pontos estão sobre uma reta não-vertical e não-horizontal. Desta forma,

Figura 11.3.1: Pontos Colineares



FONTE: Autor 2016

Pela semelhança entre os ADB e BEC, temos

$$\frac{x_a - x_b}{y_a - y_b} = \frac{x_b - x_c}{y_b - y_c} \Leftrightarrow (x_a - x_b).(y_b - y_c) - (x_b - x_c).(y_a - y_b) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_a.y_b - x_a.y_c - x_b.y_b + x_b.y_c - x_b.y_a + x_b.y_b + x_c.y_a - x_c.y_b = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_a.y_b - x_a.y_c) - (x_b.y_a - x_c.y_a) + (x_b.y_c - x_c.y_b) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_a.(y_b - y_c) - y_a.(x_b - x_c) + (x_b.y_c - y_b.x_c) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0\ .$$

■

Conhecida a condição de colinearidade de três pontos, a pergunta seguinte seria: *Qual é a equação desta reta?*

Propriedade 11.3.2. *Equação geral da reta:* dados dois pontos $A = (x_a, y_a)$ *e* $B = (x_b, y_b)$ no plano cartesiano, a equação da reta que os contém é dada por r: $ax + by + c = 0$, onde $a = y_a - y_b$, $b = x_b - x_a$ e $c = x_a.y_b - x_b.y_a$.

Demonstração. Seja $P = (x, y)$ um ponto arbitrário sobre a reta r. Pela condição de alinhamento de três pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y_a - y_b).x + (x_b - x_a).y + (x_a.y_b - x_b.y_a) = 0$$

$$ax + by + c = 0\ .$$

■

Observação 11.3.1. Quando os dois pontos dados possuem abscissas iguais (estão sobre uma reta vertical) o termo b é igual a zero e a equação da reta ficará apenas $ax + c = 0$.

De maneira análoga para o caso em que os pontos têm ordenadas iguais (estão sobre uma reta horizontal) o termo a é igual zero, ficando a equação da reta apenas $by + c = 0$.

Como os alunos nesta etapa de ensino já viram função polinomial do 1º grau é comum associarmos as duas coisas, pois o gráfico desta função representada no plano cartesiano é uma reta. A maneira de fazer isto é definindo e demonstrando a fórmula de equação reduzida da reta.

Definição 11.3.1. A *Equação reduzida da reta* é dada pela equação $y = mx + n$, onde chamamos $m \in \mathbb{R}$ de coeficiente angular e $n \in \mathbb{R}$ de coeficiente linear.

Propriedade 11.3.3. A *Equação reduzida da reta* $ax + by + c = 0$ é $y = mx + n$, onde $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$. Esta forma só se aplica no caso em que $b \neq 0$, ou seja, a reta é não-vertical.

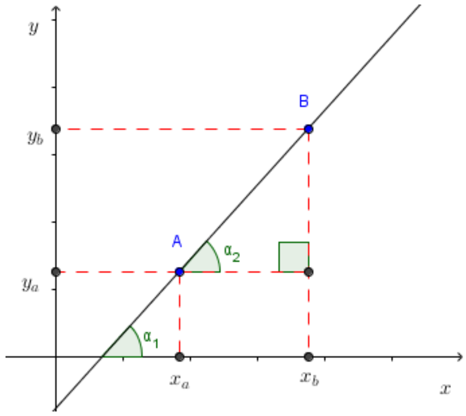
Demonstração. $ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \overset{b \neq 0}{\Rightarrow} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow y = mx + n$.

■

Decorrente do conceito de função afim, temos ainda o conceito da taxa de variação no gráfico da função que nos dá uma noção de tangente, que veremos na propriedade abaixo.

Propriedade 11.3.4. O coeficiente angular é a tangente do ângulo α entre o eixo positivo das abscissas e a reta. Ou seja, $m = tg\alpha$.

Figura 11.3.4: Coeficiente angular



FONTE: Autor 2016

Demonstração. Considerando a figura acima temos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, pois são correspondentes. Além disso, sejam $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ pontos pertencentes a reta .

$$tg\alpha = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} \Rightarrow tg\alpha = \frac{m.x_a + n - (m.x_b + n)}{x_a - x_b} = \frac{m.(x_a - x_b)}{x_a - x_b} = m\ .$$

■

Ano de escolaridade: 3º ano

11.4. Análise de retas paralelas e retas perpendiculares

Conhecida as formas de equação da reta, podemos tentar comparar duas retas, ou seja, iremos agora determinar as posições relativas entre as retas, como o conceito de paralelas e perpendiculares na geometria analítica. Porém devido as formas de equação da reta, teremos que dividir em casos de acordo com a situação de retas verticais e de retas, não-verticais e não-horizontais.

Proposição 11.4.1. Sejam $r_1: y = m_1x + n_1$ e $r_2: y = m_2x + n_2$ *retas não-verticais*. Se $m_1 = m_2$ e $n_1 \neq n_2$, então $r_1 \parallel r_2$.

Demonstração. De fato, se $m_1 = m_2$ e $n_1 \neq n_2$, então $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, ou seja $r_1 \parallel r_2$, pois $m_1x + n_1 \neq m_1x + n_2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

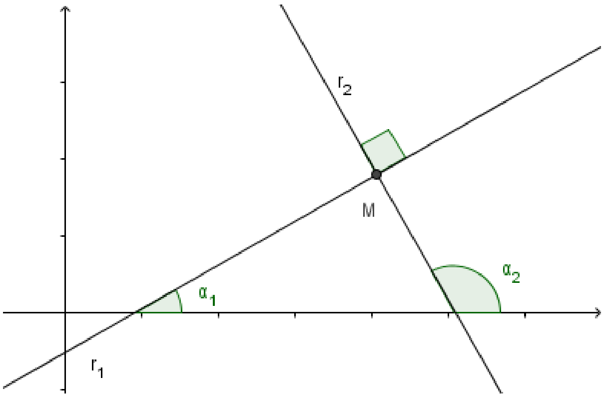
■

Observação 11.4.1. Duas retas verticais distintas são paralelas entre si, ou seja, todas as retas distintas do tipo $x = p$, com $p \in \mathbb{R}$, são paralelas entre si.

Proposição 11.4.2. Sejam $r_1 : y = m_1x + n_1$ e $r_2 : y = m_2x + n_2$ duas retas não-verticais e não-horizontais, isto é, $m_1 \neq 0$ e $m_2 \neq 0$. Então, $m_1 . m_2 = -1 \Leftrightarrow r_1 \perp r_2$.

Demonstração.

Figura 11.4.2: Retas perpendiculares



FONTE: Autor 2016

Sejam α_1 e α_2 os ângulos que as retas r_1 e r_2, respectivamente, fazem com o eixo OX positivo. Então, pela propriedade 11.3.4, $m_1 = tg\alpha_1$ e $m_2 = tg\alpha_2$.

Pelo figura acima, podemos observar que as duas retas são perpendiculares se e só se $\alpha_2 = 90° + \alpha_1$ ou $\alpha_1 = 90° + \alpha_2$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_2 > \alpha_1$. Temos que

$$tg(90° + \alpha_1) = \frac{sen(90° + \alpha_1)}{\cos(90° + \alpha_1)} = \frac{sen90°.cos\alpha_1 + sen\alpha_1.cos90°}{cos90°.cos\alpha_1 - sen90°.sen\alpha_1} = \frac{cos\alpha_1}{-sen\alpha_1} = -\frac{1}{tg\alpha_1}$$

Logo, $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = 90° + \alpha_1 \Leftrightarrow tg\alpha_2 = tg(90° + \alpha_1) \Leftrightarrow tg\alpha_2 = -\frac{1}{tg\alpha_1} \Leftrightarrow$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \Leftrightarrow m_1.m_2 = -1$$

■

Observação 11.4.2. Retas verticais são sempre perpendiculares às retas horizontais, ou seja, $r_1 : y = n$, com $n \in \mathbb{R}$, e $r_2 : x = p$, com $p \in \mathbb{R}$, são retas perpendiculares.

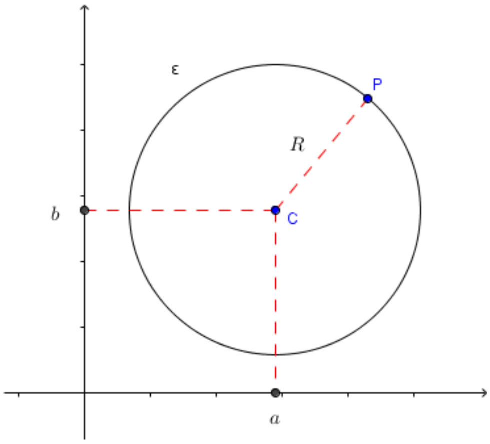
11.5. Equação da circunferência nas formas reduzida e geral

A introdução da circunferência pode ser feita após a da reta, pois é uma curva já estuda e conhecida pelos alunos durante as aulas de geometria plana. Além disso, é suficiente a sua definição formal e a fórmula de distância entre dois pontos para determinar a sua equação reduzida.

Definição 11.5.1. Uma *circunferência* é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja a distância a um ponto fixo é uma constante positiva. O ponto fixo é chamado centro da circunferência e a constante é chamada raio.

Proposição 11.5.1. *Equação reduzida da circunferência:* dados $C = (a, b)$ o centro e R raio da circunferência ε, então $\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\}$.

Figura 11.5.1: Circunferência



FONTE: Autor 2016

Demonstração. Seja $P = (x, y) \in \varepsilon$. Calculando a distância entre o centro da circunferência C e o ponto P, temos

$$d_{CP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \text{ já que } R > 0$$

Portanto,

$$\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\} .$$

■

A forma geral da equação da circunferência é obtida quando expandimos os quadrados da equação reduzida da mesma.

Propriedade 11.5.2. Seja $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ uma equação de grau dois com coeficientes A, B e C reais. Assim, a equação representa:

(a) Uma circunferência de centro $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ quando $A^2+B^2>4C$.

(b) O ponto de coordenadas $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ quando $A^2+B^2=4C$.

(c) O vazio quando $A^2+B^2<4C$.

Demonstração. Temos que $x^2+y^2+Ax+By+C=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2}{4}-C$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}.$$

Para que a equação apresentada na última forma represente uma circunferência, devemos ter $\frac{A^2+B^2-4C}{4}>0 \Leftrightarrow A^2+B^2>4C$. Além disso, pela forma reduzida da circunferência, o centro é $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ e o raio é $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$, provando assim o item (a).

Também se $\frac{A^2+B^2-4C}{4}=0 \Leftrightarrow A^2+B^2=4C$ a equação é a soma de dois termos ao quadrado. Utilizando o fato de um número real ao quadrado ser sempre maior ou igual a zero e a soma de dois números desta forma também é maior ou igual a zero, temos que

$$\begin{cases}\left(x+\frac{A}{2}\right)^2=0\\ \left(y+\frac{B}{2}\right)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{A}{2}\ e\ y=-\frac{B}{2},$$

o que prova o item (b).

Pelo mesmo motivo do item (b), da soma de dois números reais ao quadrado ser maior ou igual a zero, temos que se $\frac{A^2+B^2-4C}{4}<0 \Leftrightarrow A^2+B^2<4C$ não existirá dois números reais tais que $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2<0$. Portanto a solução da desigualdade é vazia, provando o item (c).

■

12. POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Ano de escolaridade: 3º ano

Este assunto é uma extensão geral do que já foi visto para polinômios do 1º e do 2º grau, ou seja, também é explorado a sua representação gráfica e suas consequências. Por outro lado, ele já foi visto no ensino fundamental, mas apenas como uma ferramenta algébrica.

O que faremos agora é caracterizar de maneira formal o que é um polinômio.

Definição 12.0.1. O *Polinômio* é uma função $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja a lei de formação é dada por

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i . x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com $a_i \in \mathbb{R}$ e $0 \leq i \leq n$, onde chamamos cada a_i de coeficiente do termo x^i e em particular, a_0 de termo independente.

Exemplo. Seja $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é dada por $p(x) = 5x^3 - 3x^4 + 2x - 12$. Será que o mesmo é um polinômio?

Para isso temos que ser capazes de escrevermos no formato da definição, verificando que os expoentes da variável são naturais e que os coeficientes são números reais. Como, $p(x) = 5x^3 - 3x^4 + 2x - 12 = -3x^4 + 5x^3 + 2x - 12 = -3x^4 + 5x^3 + 0x^2 + 2x - 12$, p é um polinômio cujos coeficientes $a_4 = -3$, $a_3 = 5$, $a_2 = 0$, $a_1 = 2$ e $a_0 = -12$ são todos reais.

O conceito de grau apesar de já ser conhecido pelos estudantes, vai ser definido novamente com mais rigor, pois a partir dele iremos concluir novas propriedades.

Definição 12.0.2. *(Grau de um Polinômio)* Se $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ então o grau do polinômio é n. Notação para o grau do polinômio p de lei $p(x)$ será $gr\big(p(x)\big)$.

Exemplo. Qual será o grau do polinômio p, cuja lei de formação é dada por $p(x) = 5x^3 - 3x^4 + 2x - 12$?

Como o maior expoente da variável x é 4 ,então $gr\big(p(x)\big) = 4$.

O Algoritmo da divisão entre polinômios é uma replicação e adaptação do algoritmo da divisão de Euclides.

Algoritmo da Divisão entre Polinômios: dados $p(x)$ e $d(x)$ duas leis de formação de polinômios, onde $gr\big(p(x)\big) \geq gr\big(d(x)\big)$, existem outros dois polinômios cujas leis são $q(x)$ e $r(x)$, tais que

$$p(x) = d(x).q(x) + r(x)$$

com $0 \leq gr\big(r(x)\big) < gr\big(d(x)\big)$.

12.1. Teorema do Resto

O Teorema do Resto ou Teorema de D'Alembert é uma maneira simples de encontrarmos o resto da divisão entre um polinômio por outro de grau um, sabendo que o resto deverá ter grau inferior ao grau do polinômio divisor.

Ou seja, ao dividirmos um polinômio por outro de grau um, o resto é um polinômio de grau zero, também chamado polinômio constante. Consideraremos a divisão abaixo, com o divisor de grau um,

$$p(x) = d(x).q(x) + r(x)$$

sendo $p(x)$ o dividendo, $d(x)$ o divisor, $q(x)$ o quociente e $r(x)$ o resto.

Sem perda de generalidade, podemos tomar $d(x) = ax + b$ e $r(x) = m$ com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, m \in \mathbb{R}$. Assim,

$$p(x) = (ax + b).q(x) + m$$

Note que se $ax + b = 0$, teremos $p(x) = 0.q(x) + m \Leftrightarrow p(x) = m$. Ou seja, se tivermos $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, então $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.q\left(-\frac{b}{a}\right) + m \Leftrightarrow p\left(-\frac{b}{a}\right) = m$.

Proposição 12.1.1. Seja $p(x)$ a lei de formação de um polinômio com $gr\big(p(x)\big) \geq 1$. O resto na divisão de $p(x)$ por $(ax + b)$ será $p\left(-\frac{b}{a}\right)$, se $a \neq 0$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão existem dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$, tais que $p(x) = (ax + b).q(x) + r(x)$ com $gr\big(r(x)\big) = 0$, já que $gr\big((ax + b)\big) = 1$, ou seja, $r(x)$ é um polinômio constante.

Aplicando $x = -\frac{b}{a}$ na igualdade, obtemos

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = \left(a.\left(-\frac{b}{a}\right) + b\right).q\left(-\frac{b}{a}\right) + r\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.q\left(-\frac{b}{a}\right) + r\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$p\left(-\tfrac{b}{a}\right) = r\left(-\tfrac{b}{a}\right).$$

■

13. CONSIDERAÇÕES FINAIS

13.1. Dificuldade e Resistências

O desenvolvido da proposta do Princípio de Indução mostrou obstáculos que tiveram que ser trabalhados com alunos, como

- ☐ Escrita formal;
- ☐ Entendimento da técnica;
- ☐ Descrença no funcionamento da técnica;
- ☐ Entendimento que a etapa n para $n + 1$ não era sempre igual.

13.2. Resultados obtidos

Assim como houve dificuldades, também foi notório o desenvolvimento pelas demonstrações matemáticas, em particular, no uso do Princípio de Indução. Abaixo esta apresentado os resultados alcançados dividido por ano de escolaridade.

- ☐ No 1º ano do Ensino Médio:
  - Melhor leitura de questões matemáticas;
  - Melhores argumentações para justificar as suas afirmações sobre um problema;
- ☐ No 2º ano do Ensino Médio:
  - Dividir os problemas em etapas mais simples;
  - Melhora na escrita matemática;
- ☐ No 3º ano do Ensino Médio:
  - Proposições nas aulas, trazidas pelos alunos;
  - Crença nas fórmulas demonstradas.

13.3. Conclusão

Em qualquer área da ciência, seja ela empírica, axiomática ou lógico-dedutivo as demonstrações cumprem um papel de mostrar veracidade ao que é estudado. Qualquer estudante deve sempre conduzir seus caminhos de aprendizagem com propriedades e proposições baseadas em alicerces bem trabalhados e desenvolvidos. Caso ainda procure ou deseje algo novo, o que é sempre bom, ou apenas desconhecido, deverá permanecer em uma sequência de bases bem apoiadas pela comunidade científica ou até mesmo desenvolver um fundamento teórico para que se possa avançar nesta jornada escolhida.

As salas de aulas são formadas por estudantes esperando aprender, chamados de alunos, e por estudantes que irão ensinar, chamados de professor. Todos estes deverão conduzir coletivamente no cumprimento do desenvolvimento científico educacional, metodologias, proposições e teorias tanto aceitas quanto bem difundidas. Assim cabe à todos os presentes neste processo a dúvida e o questionamento do que é apresentado, até mesmo pelo professor, porque ainda que o caminho que irá ser tomado seja critério escolhido pelo docente, é obrigação de todos observarem se os mesmos caminhos adotados são bons, assim como vislumbrar o final da metodologia como uma grande malha apoiada em fundamentos aceitos pela comunidade científica e escolar.

As demonstrações são ferramentas necessárias para o desenvolvimento lógico-dedutivo e servem como base para dar veracidade as afirmações feitas, passando assim de conjectura para proposição ou teorema. São grandes desenvolvedoras do censo-crítico, pois a construção de uma teoria científica depende dos seus fundamentos serem provados para que algo seguinte possa ser apoiado nele. Daí, o reflexo disso é criar nos alunos o hábito de tomar decisões de forma a considerar o que já tenha acontecido e assim tornar-se um cidadão crítico. O aluno que demonstra não só tem acesso a um método científico de justificativa de sentenças, como também a um vasto desenvolvimento quanto ao raciocínio lógico e a instigação da pesquisa e da prática científica. Portanto, a noção de como demonstrar é necessária ao estudante, pois elas servem para que este possa, com suas próprias pré-conclusões, prová-las ou mesmo refutá-las.

Diante disso, é proposto que a noção do princípio de indução - uma ferramenta técnica de demonstração - seja colocada no currículo no primeiro ano do ensino médio, pois a partir deste ano de escolaridade já se é possível provar com um pouco mais de formalidade os fundamentos desenvolvidos no ensino fundamental, podendo também servir de base para os anos seguintes, os quais possuem várias propriedades que poderão ser demonstradas de maneira simples ou complementar com o uso desta ferramenta. Assim, é esperado que o público-alvo possa conhecer e fazer uso das formas de demonstrações nos vários conteúdos do ensino médio de seu currículo em suas instituições de ensino e também através desse trabalho.

14. REFERÊNCIAS

[1] Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro, Currículo Mínimo - Matemática. Disponível em: <http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/downloads/matematica_livro.pdf>, Acesso em 28 de setembro de 2015.

[2] HEFEZ, Abramo. *Curso de álgebra* - volume 1 / Abramo Hefez. - 5. ed. -Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 213p. (Coleção matemática universitária). ISBN 978-85-244-0079-7

[3] FERREIRA, Jamil. *A construção dos números* / Jamil Ferreira. - 3.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013. xiv, 133 p. (Coleção Textos Universitários; 9). ISBN 978-85-85818-91-3

[4] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise* - v.1. - 12. ed. - Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Puta e Aplicada, 2008. 431p.; ilust.; (Projeto Euclides). ISBN 978-85-244-0118-3