

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

*APLICAÇÃO DE ALGUNS TEOREMAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS  
GEOMÉTRICOS*

Leandro Teles Nogueira

MANAUS

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Leandro Teles Nogueira

*APLICAÇÃO DE ALGUNS TEOREMAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS  
GEOMÉTRICOS*

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS  
2016

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

N778a Nogueira, Leandro Teles  
Aplicação de alguns teoremas na resolução de problemas  
geométricos / Leandro Teles Nogueira. 2016  
65 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Geometria. 2. Teorema de Ceva. 3. Teorema de Menelaus. 4.  
Teorema de Stewart. 5. Teorema de Pappus-Guldin. I. Oliveira,  
Prof. Dr. Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas  
III. Título

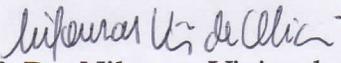
LEANDRO TELES NOGUEIRA

APLICAÇÃO DE ALGUNS TEOREMAS NA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

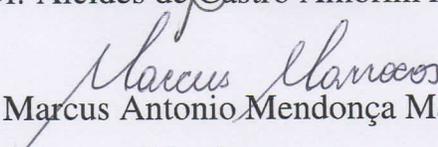
Aprovado em 17 de março de 2016.

BANCA EXAMINADORA

  
Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

Presidente

  
Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto

  
Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos

Membro

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que me deu saúde, sabedoria e também permitiu que eu fizesse este curso.

A meus pais que sempre me orientaram a seguir um caminho com bons princípios e me apoiaram com as minhas decisões.

A minha esposa Thayani, que sempre me apoiou e incentivou.

A meu orientador Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, pelo ser humano bom que é, pela competência que tem, por suas aulas brilhantes durante o curso e pelo seu tempo disponibilizado a mim.

A todos os meus colegas da turma, e a todos os professores do Departamento de Matemática da UFAM.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho foi abordar alguns teoremas da Geometria e conseqüentemente usá-los para resolver exercícios. Apresentamos aqui teoremas clássicos como o Teorema de Ceva, o Teorema de Menelaus e o Teorema de Stewart, que são teoremas muito eficientes, principalmente no quesito resolver exercícios que parecem complexos. Isto é, conhecer estes teoremas nos deixam muito poderosos do ponto de vista cognitivo, é claro.

Expomos aqui também outro teorema magnífico, conhecido também como Teorema de Pappus-Guldin. Este teorema têm como objetivo principal calcular áreas e volumes de superfícies e sólidos de revolução. O Teorema de Pappus-Guldin é um teorema brilhante. Com ele podemos demonstrar várias fórmulas que envolvem áreas e volumes de superfícies e sólidos de revolução, tais como da área de um círculo e do volume de um cilindro de modo muito trivial. Este teorema possibilita solucionar exercícios que parecem muito difíceis de um aluno do ensino médio resolver.

Neste trabalho nos preocupamos muito não só com o dialeto, mas também com o conteúdo exposto. Por exemplo, deixamos, para quem tem a curiosidade ver, a demonstração do Teorema de Pappus-Guldin nos Apêndices A e B, pois para a demonstração do mesmo é necessário o uso do Cálculo Diferencial e Integral, que até então o aluno do ensino médio remotamente tem contato.

Palavras-chave: Geometria, Teorema de Ceva, Teorema de Menelaus, Teorema de Stewart, Teorema de Pappus-Guldin.

# ABSTRACT

The objective of this study was to address some theorems of geometry and consequently use them to solve exercises. Here are theorems as the Ceva theorem, Menelaus Theorem and Stewart's theorem, which are very efficient theorems, specially regarding solving exercises that seem complex. That is, knowing these theorems make us very powerful cognitive point of view, of course.

We expose here also another magnificent theorem, also known as theorem of Pappus-Guldin. This theorem has as main objective to calculate areas and volumes of surfaces and solids of revolution. Pappus-Guldin theorem is a brilliant theorem. With it can establish several formulas that involve areas and volumes of revolution solids and surfaces, such as the area of a circle and the volume of a very trivially cylinder. This theorem enables solving exercises that seem too difficult of a high school student to solve.

In this work in very not only care about the dialect, but also with the above content. For example, we leave to those who have the curiosity to see the demonstration of Pappus-Guldin theorem in Appendices A and B, as for the demonstration of it is necessary to use the Differential and Integral Calculus, which until then the high school student remotely have contact.

Keywords: Geometry, Ceva's Theorem, Menelaus' theorem, Stewart's theorem, Theorem Pappus-Guldin.

# Lista de Figuras

2.1	Ponto $A$ .	4
2.2	Reta $r$ .	4
2.3	Segmento $\overline{EF}$ .	5
2.4	Plano $\pi$ .	5
2.5	Triângulo $ABC$ .	5
2.6	Ceviana $AD$ .	6
2.7	$G$ é o baricentro, e $\frac{GM_{BC}}{AG} = \frac{GM_{AC}}{BG} = \frac{GM_{AB}}{CG} = \frac{1}{2}$ .	6
2.8	$I$ é o incentro, e também o centro da circunferência inscrita no $\Delta ABC$ .	6
2.9	$AP$ e $AP'$ são bissetrizes interna e externa, respectivamente.	7
2.10	$C$ é o circuncentro, e também o centro da circunferência circunscrita no $\Delta ABD$ .	7
2.11	$O$ é o ortocentro do $\Delta ABD$ .	8
3.1	Três cevianas se intersectando no ponto $P$ .	9
3.2	Destacando o $\Delta ACD$ e o $\Delta BCD$ para calcular suas áreas.	10
3.3	Destacando o $\Delta ADP$ e o $\Delta BDP$ para calcular suas áreas.	10
3.4	Destacando o $\Delta ABE$ e o $\Delta ACE$ para calcular suas áreas.	11
3.5	Destacando o $\Delta BEP$ e o $\Delta CEP$ para calcular suas áreas.	11
3.6	Destacando o $\Delta BCF$ e o $\Delta ABF$ para calcular suas áreas.	12
3.7	Destacando o $\Delta CFP$ e o $\Delta AFP$ para calcular suas áreas.	13
3.8	$AE$ , $BF$ e $CD$ são cevianas do $\Delta ABC$ que se intersectam no ponto $P$ .	14
3.9	$AE$ , $BF$ e $CD$ são as alturas do $\Delta ABC$ .	14
3.10	$AE$ , $BF$ e $CD$ são as medianas do $\Delta ABC$ .	16
3.11	$AE$ , $BF$ e $CD$ são as bissetrizes do $\Delta ABC$ .	16
3.12	$AE$ , $BF$ e $CD$ são as bissetrizes do $\Delta ABC$ .	17
4.1	Aplicar a Lei dos Cossenos no $\Delta ABD$ e no $\Delta ACD$ .	19
4.2	Ceviana de comprimento $d$ .	21
4.3	O $\Delta ABC$ é isósceles.	21
4.4	Mediana $AM$ .	22
4.5	Bissetriz $AX$ .	23
4.6	$C$ , $O$ e $D$ são colineares.	24
4.7	$OE$ é ceviana do $\Delta CED$ .	25

5.1	Figura descrita no Teorema 5.1. . . . .	26
5.2	As alturas $AA'$ , $BB'$ e $CC'$ dos triângulos $AEF$ , $BDF$ e $CDE$ . . . . .	26
5.3	A medida do segmento $CD$ é desconhecida. . . . .	27
5.4	O ponto $H$ é o ortocentro do $\triangle ABC$ . . . . .	28
5.5	Os pontos $D$ , $E$ e $F$ são colineares. . . . .	29
5.6	O ponto $G$ é o baricentro. . . . .	30
5.7	Quadrado $ABCD$ . . . . .	30
6.1	Curva rotacionando em torno do eixo $EE'$ . . . . .	33
6.2	Superfície rotacionando em torno do eixo $EE'$ . . . . .	34
6.3	Triângulo rotacionando em torno da reta $r$ . . . . .	34
6.4	Círculo formado pela rotação do segmento de comprimento $r$ em torno da reta $s$ . . . . .	35
6.5	Superfície lateral de um cilindro é gerada depois da rotação do segmento de comprimento $h$ em torno da reta $s$ . . . . .	36
6.6	Um cilindro é gerado depois da rotação do retângulo com dimensões $r$ e $h$ em torno da reta $s$ . . . . .	37
6.7	Superfície lateral de um cone é gerada depois da rotação do segmento de comprimento $g$ em torno da reta $s$ . . . . .	37
6.8	$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ . . . . .	38
6.9	Um cone é gerado depois da rotação do triângulo hachurado em torno da reta $s$ . . . . .	39
6.10	O baricentro $G$ é o centro de gravidade do triângulo. . . . .	39
6.11	Superfície lateral de um tronco cone é gerada depois da rotação do segmento de comprimento $g$ em torno da reta $s$ . . . . .	40
6.12	$d = r + x$ . . . . .	41
6.13	Um tronco de cone é gerado depois da rotação do trapézio em torno da reta $s$ . . . . .	42
6.14	O trapézio é dividido em dois polígonos: um triângulo e um retângulo. $CM$ é o centro de massa do trapézio. . . . .	43
6.15	Uma esfera é gerada depois da rotação do semicírculo em torno da reta $s$ . . . . .	44
A.1	A curva $C$ é rotacionada em torno do eixo $y$ . . . . .	50
B.1	Uma superfície é rotacionada em torno do eixo $y$ . . . . .	52

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Um Breve Comentário Sobre a Construção do Conhecimento Matemático . . .	1
1.2	Um pouco da História da Geometria . . . . .	2
1.3	Motivação do Trabalho . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Definições e Propriedades Básicas de Alguns Objetos Geométricos</b>	<b>4</b>
2.1	Ponto, Segmento, Reta e Plano . . . . .	4
2.1.1	Ponto . . . . .	4
2.1.2	Reta . . . . .	4
2.1.3	Segmento . . . . .	5
2.1.4	Plano . . . . .	5
2.2	Triângulo e Algumas de Suas Propriedades Particulares . . . . .	5
2.2.1	Área do Triângulo . . . . .	5
2.2.2	Ceviana . . . . .	6
2.2.3	Baricentro . . . . .	6
2.2.4	Incentro . . . . .	6
2.2.5	Circuncentro . . . . .	7
2.2.6	Ortocentro . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Teorema de Ceva</b>	<b>9</b>
3.1	Algumas aplicações do Teorema de Ceva . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Teorema de Stewart</b>	<b>19</b>
4.1	Algumas aplicações do Teorema de Stewart . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Teorema de Menelaus</b>	<b>26</b>
5.1	Algumas aplicações do Teorema de Menelaus . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Teorema de Pappus-Guldin</b>	<b>32</b>
6.1	Algumas aplicações do Teorema de Pappus-Guldin . . . . .	34
<b>A</b>	<b>Apêndice 1</b>	<b>49</b>



## LISTA DE SÍMBOLOS

$AB$	Medida do segmento AB ou segmento AB.
$\triangle ABC$	Triângulo ABC.
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	Triângulo ABC semelhante ao triângulo DEF.
$(ABC)$	Área do $\triangle ABC$ .

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Um Breve Comentário Sobre a Construção do Conhecimento Matemático

É intuitivamente sensato e satisfatório pensar que o indício da existência da Matemática tanto para os seres humanos quanto para os animais tenha surgido a partir do senso numérico. Por exemplo, se um grupo de primitivos A encontrasse um grupo oponente B, o grupo A, muito provavelmente, saberia se o momento era oportuno para ataque ou fuga. Isto é, não seria necessário realizar uma contagem para saber se a cardinalidade de um conjunto é maior ou menor quando a diferença é consideravelmente grande. Analogamente isso pode ocorrer entre animais.

Quem é que não se lembra da história do pastor que fazia o controle da quantidade de suas ovelhas que saía do curral usando uma correspondência biunívoca entre pedras e ovelhas, onde cada pedra correspondia a uma ovelha que saía. Assim o pastor tinha o controle de quantas ovelhas estavam faltando no retorno das ovelhas para o curral, no caso em que haviam mais pedras do que ovelhas no curral.

O problema de obter a altura de objetos altos como árvores e grandes construções, os gregos resolveram de modo brilhante e simples. Eles apenas fincavam uma estaca no chão, esperavam o momento em que a sombra da estaca tivesse exatamente o seu tamanho, como base nisso, para obter a altura do objeto desejado era só medir o comprimento da sombra desse objeto.

Estudiosos como Euclides, Arquimedes, Tales de Mileto, Pitágoras, Galileu Galilei, Newton, Einstein, Kepler, Leibniz, Leonardo da Vinci, entre outros, não teriam realizado suas façanhas sem a Matemática. É claro que eles não foram só matemáticos, entretanto foram matemáticos, souberam utilizar a Matemática como poucos e ajudaram e ainda ajudam no progresso das ciências e consequentemente no progresso cognitivo da humanidade.

É notório que a Matemática é uma ferramenta de competência inestimável que foi sendo explorada naturalmente, de acordo com as necessidades da época. Esse instinto natural da construção do conhecimento matemático além de satisfazer as necessidades da sociedade ainda

contribuiu para enriquecer o processo de evolução do conhecimento matemático.

Neste trabalho serão abordadas resoluções de problemas na área que talvez seja a mais aplicável da Matemática, a Geometria.

## 1.2 Um pouco da História da Geometria

A palavra Geometria vem do grego (*medir a terra*), e está associada a uma coleção de descobertas relacionadas a medição de comprimentos, áreas, volumes e ângulos, que se desenvolveram para serem aplicadas à Astronomia, à Agrimensura e à Construção, por exemplo. Como dito antes, é de praxe que a construção do conhecimento foi se desenvolvendo a partir das necessidades do dia a dia.

As primeiras unidades de medida foram utilizadas por construtores da Mesopotâmia e do Egito em cerca de 3.500 a. C., e essas unidades de medida eram criadas utilizando como referência partes do corpo humano, como o palmo e o cúbito. Para que não houvesse confusão essas unidades de medidas eram tiradas do corpo do rei. E assim o padrão se estabelecia.

Em cerca de 600 a. C., o grego Tales de Mileto iniciou a Geometria dedutiva. Uma das demonstrações que é atribuída a Tales de Mileto é de que ao unir-se um ponto  $P$ , qualquer, de uma circunferência aos extremos de um diâmetro  $AB$  obtém-se um triângulo retângulo em  $P$ .

Um dos geômetras mais conhecidos é Pitágoras, que viveu em aproximadamente 500 a. C. Sua fama se deve muito ao famoso Teorema de Pitágoras, que diz que "em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos". Pitágoras fundou, onde hoje é a Itália, vamos dizer assim a primeira "instituição universitária", e foi denominada de Escola Pitagórica. A maior descoberta de Pitágoras e/ou de seus discípulos foi justamente esse teorema. Ele também evidenciou os números perfeitos, isto é, números que são iguais à soma de seus divisores.

O matemático considerado por muitos como sendo o pai da Geometria, Euclides de Alexandria, nasceu na Síria por volta de 300 a. C. Ele foi um dos maiores matemáticos da história, e é autor, senão da mais famosa, é uma das mais famosas obras da Matemática. Ele elaborou uma obra composta de 13 livros, chamada de *Elementos de Euclides*. Desses 13 volumes os 5 primeiros abordam a Geometria Plana, o 6º sobre o estudo geométrico das proporções, 7º sobre Semelhança de triângulos, os 3 seguintes sobre os seguimentos de retas incomensuráveis e os 3 últimos da Geometria Espacial. Nessas obras, Euclides sistematizou e formalizou um amplo conhecimento acumulado por outros estudiosos matemáticos gregos. Ele também criou o primeiro sistema axiomático, que pode ser definido como verdades absolutas ou incontestáveis, e pode desempenhar um papel muito importante nas fundamentações ou argumentações lógicas para demonstrações de teoremas.

Menelau de Alexandria (aproximadamente 100 d. C.) foi um geômetra. Ele criou o clássico Teorema de Menelaus, que foi publicado em mais de 1500 anos depois pelo matemático italiano Giovanni Ceva, e tem em sua essência relacionar seis segmentos a três pontos colineares.

Giovanni Ceva (1648-1734) foi o geômetra que redescobriu o Teorema de Menelaus e o publicou em 1678. Ceva, como é mais conhecido, também criou um teorema muito relacionado com o Teorema de Menelaus, e ficou conhecido como Teorema de Ceva. Este teorema é relacionado a três cevianas de um triângulo que concorrem em um único ponto.

Matthew Stewart (1717-1785), foi um geômetra escocês que criou o também clássico Teorema de Stewart, que relaciona os lados de um triângulo a uma ceviana.

Pappus de Alexandria (c. 290 d.C - c. 350 d.C.), foi um geômetra e descobriu dois teoremas muito poderosos que ficaram conhecidos como Teoremas de Pappus-Guldin. O "Guldin" se deve ao fato do matemático Paul Guldin (1577-1643) ter redescoberto este teorema e o publicado. Esse teorema, muito importante, calcula volume e áreas de sólidos e superfícies de revolução, respectivamente.

Enfim, são muitos os matemáticos geômetras importantes que contribuíram para a evolução da geometria, tais como Platão (aproximadamente 428 a. C.), Arquimedes (287 a. C.), Apolônio (262 a. C.-190 a. C.), René Descartes (1596-1650), etc.

Por consequência das contribuições de todos os geômetras, a geometria "contemporânea" está muito avançada e tem sido a ferramenta mais efetiva para a evolução da Construção Civil e da Arquitetura. Um exemplo do poder da geometria, quando inspirada por pessoas talentosas, são as excepcionais construções projetadas em Brasília pelo genial arquiteto Oscar Niemeyer.

### **1.3 Motivação do Trabalho**

As aplicações e a flexibilidade de usar diferentes métodos nas resoluções de problemas de Geometria possibilita uma certa empolgação em quem está resolvendo tais problemas. Conhecer esses métodos/teoremas é fundamental para ter as "armas" certas para resolver determinados problemas. Além disso proporciona a quem os estudou bagagem cognitiva para complementar futuros aperfeiçoamentos.

# Capítulo 2

## Definições e Propriedades Básicas de Alguns Objetos Geométricos

A seguir serão apresentados conceitos primitivos, com afirmações sem demonstrações, de alguns objetos matemáticos, como área e outras propriedades particulares. Não haverá ênfase em demonstrações neste capítulo, pois as propriedades aqui apresentadas além de serem mais elementares terão mais relevância como suporte para demonstrações de Teoremas e/ou soluções de problemas dos próximos capítulos.

### 2.1 Ponto, Segmento, Reta e Plano

As definições desses objetos matemáticos podem ser obtidas no livro 1 da obra "Os Elementos", elaborada pelo sábio Euclides.

#### 2.1.1 Ponto

O ponto é representado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto. Veja:



Figura 2.1: Ponto  $A$ .

#### 2.1.2 Reta

De acordo com o postulado de Euclides uma reta é formada por infinitos pontos. E mais, dois pontos distintos define-se uma única reta. A reta é representada por uma letra minúscula do nosso alfabeto. Veja:



Figura 2.2: Reta  $r$ .

### 2.1.3 Segmento

Bem como no caso da reta, o segmento é formado por infinitos pontos. Entretanto diferentemente da reta o segmento é limitado por dois pontos. Há quem diga que um segmento é um "pedacinho" de uma reta. Veja:



Figura 2.3: Segmento  $\overline{EF}$ .

### 2.1.4 Plano

De acordo com o postulado de Euclides um plano tem infinitos pontos. Ainda tem-se que três pontos distintos não colineares definem um único plano. O plano é representado por uma letra grega minúscula. Veja:

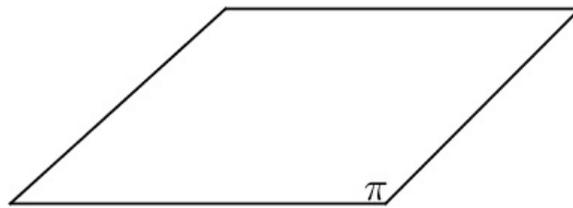
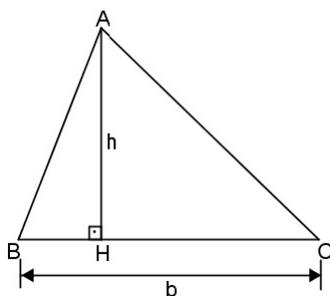


Figura 2.4: Plano  $\pi$ .

## 2.2 Triângulo e Algumas de Suas Propriedades Particulares

### 2.2.1 Área do Triângulo

Considere um  $\triangle ABC$ , em que  $b$  e  $h$  representam, respectivamente, as medidas de sua base e altura. Seja  $A$  a área desse triângulo, então sua área é obtida pela equação:



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Figura 2.5: Triângulo  $ABC$ .

## 2.2.2 Ceviana

Todo segmento que uni o vértice de um triângulo a um ponto compreendido entre os outros dois vértices é dito **ceviana**.

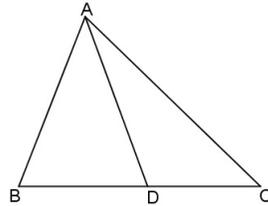


Figura 2.6: Ceviana  $AD$ .

## 2.2.3 Baricentro

Considere um  $\triangle ABC$ . As cevianas  $AM_{BC}$ ,  $BM_{AC}$  e  $CM_{AB}$  são as **medianas** do  $\triangle ABC$ , onde  $M_{BC}$ ,  $M_{AB}$  e  $M_{AC}$  são respectivamente os pontos médios dos segmentos  $BC$ ,  $AB$  e  $AC$ . As medianas se interceptam em um único ponto e esse ponto é chamado de **baricentro**. O baricentro divide cada uma das medianas na razão de  $\frac{1}{2}$ .

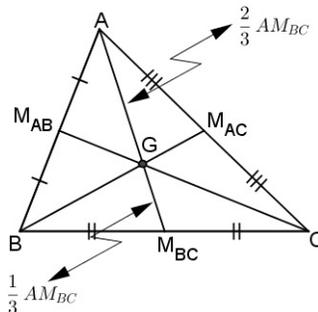


Figura 2.7:  $G$  é o baricentro, e  $\frac{GM_{BC}}{AG} = \frac{GM_{AC}}{BG} = \frac{GM_{AB}}{CG} = \frac{1}{2}$ .

## 2.2.4 Incentro

Considere um  $\triangle ABC$ . Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  respectivamente pontos dos segmentos  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  tais que as cevianas  $AX$ ,  $BY$  e  $CZ$  dividem respectivamente cada um dos ângulos  $B\hat{A}C$ ,  $A\hat{B}C$  e  $A\hat{C}B$  em dois ângulos congruentes. Então os segmentos  $AX$ ,  $BY$  e  $CZ$  são as **bissetrizes** do  $\triangle ABC$ . As bissetrizes se interceptam em um único ponto, e esse ponto é chamado de **incentro**. O incentro determina o centro da circunferência inscrita no  $\triangle ABC$ .

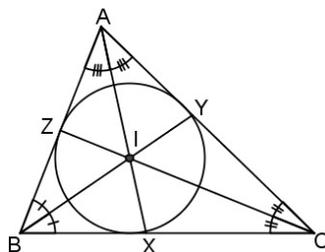


Figura 2.8:  $I$  é o incentro, e também o centro da circunferência inscrita no  $\triangle ABC$ .

Outro conhecimento muito relevante que envolve as bissetrizes é o Teorema seguinte:

**Teorema 2.1** (Teorema das bissetrizes). *Os pés das bissetrizes internas e externas de um triângulo dividem seus lados na mesma proporção dos lados adjacentes.*

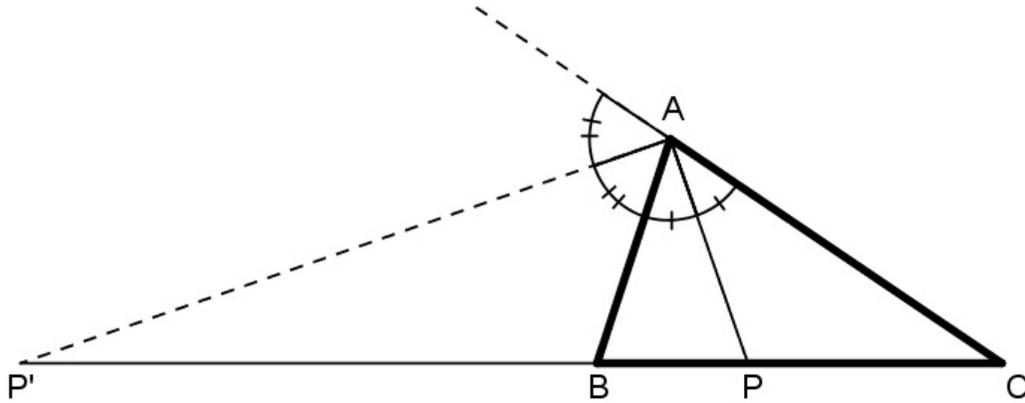


Figura 2.9: AP e AP' são bissetrizes interna e externa, respectivamente.

$$\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC} \text{ e } \frac{BP'}{CP'} = \frac{AB}{AC}$$

### 2.2.5 Circuncentro

Considere um  $\triangle ABD$ . As retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  que interceptam respectivamente seus lados  $AB$ ,  $BD$  e  $AD$  são chamadas de **mediatrizes** do  $\triangle ABD$ . As mediatrizes se interceptam em um único ponto, e esse ponto é chamado de **circuncentro**. O circuncentro determina o centro da circunferência circunscrita no  $\triangle ABD$ .

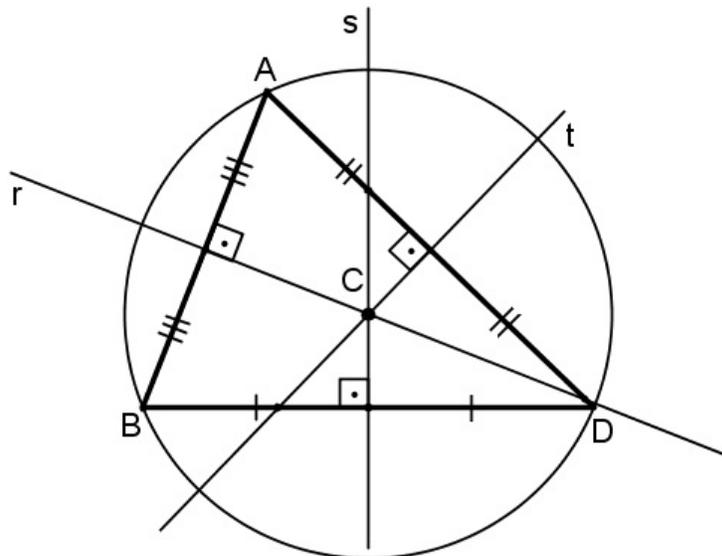


Figura 2.10: C é o circuncentro, e também o centro da circunferência circunscrita no  $\triangle ABD$ .

## 2.2.6 Ortocentro

Considere um  $\triangle ABC$ . As alturas relativas aos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  se interceptam em um único ponto, e esse ponto é chamado de ortocentro.

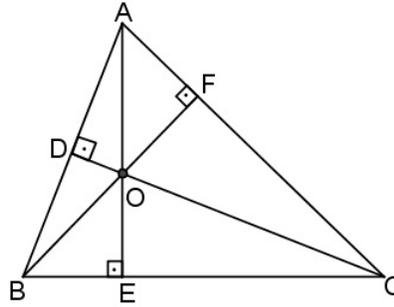


Figura 2.11:  $O$  é o ortocentro do  $\triangle ABD$ .

# Capítulo 3

## Teorema de Ceva

Enunciado pelo italiano Giovanni Ceva (1648-1734) em seu artigo nomeado de *De Lineis Rectis* e publicado em 1678, este teorema foi considerado até o século XI um dos mais importantes da geometria sintética (pura). Hoje, não é comum ver este teorema, que seria tão importante em livros didáticos do ensino médio.

O Teorema de Ceva relaciona 6 segmentos formados pelos pontos gerados por três cevianas que têm um ponto em comum. Este teorema é muito poderoso e resolverá vários exercícios que poderiam ter soluções bastantes trabalhosas sem o seu uso.

**Teorema 3.1** (Teorema de Ceva). *Considere um triângulo ABC, qualquer. Sejam D, E e F pontos que pertencem respectivamente aos lados AB, BC e AC desse triângulo, de modo que  $AE \cap BF \cap CD = \{P\}$ . O Teorema de Ceva diz que:*

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

*Demonstração.* Considere o triângulo a seguir:

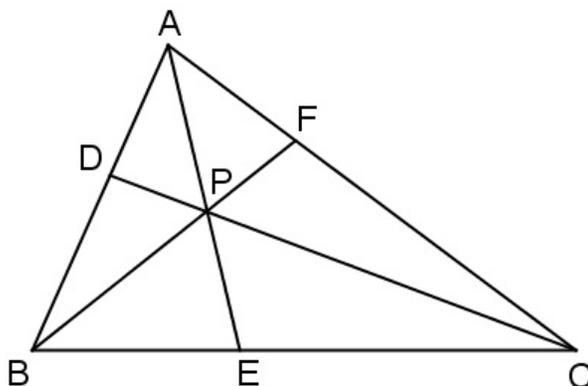


Figura 3.1: Três cevianas se intersectando no ponto P.

Denotaremos por  $H_{AB}$ ,  $H_{BC}$  e  $H_{AC}$  as alturas relativas respectivamente aos lados AB, BC e AC do  $\triangle ABC$ . Denotaremos por  $h_{AB}$ ,  $h_{BC}$  e  $h_{AC}$  as alturas relativas respectivamente aos lados

AB, BC e AC dos triângulos ABP, BCP e ACP. Para representar a área do  $\Delta ABC$ , por exemplo, usaremos a notação  $(ABC)$ .

Observe que os triângulos ACD e BCD têm a mesma altura.

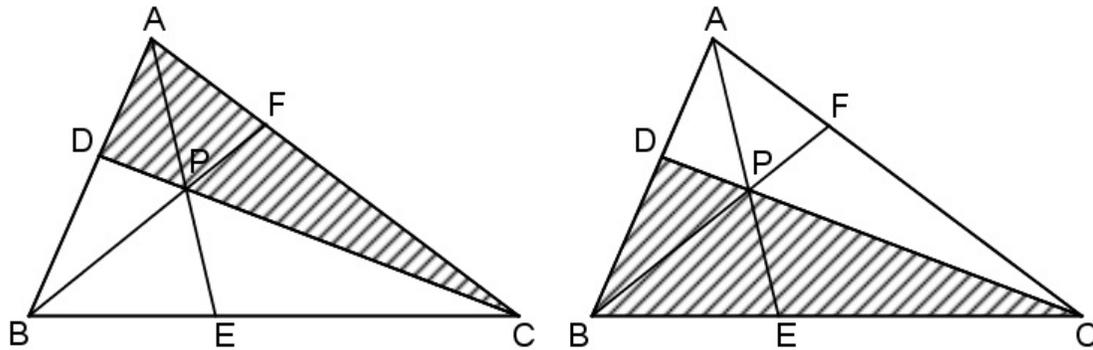


Figura 3.2: Destacando o  $\Delta ACD$  e o  $\Delta BCD$  para calcular suas áreas.

Logo:

$$(ACD) = \frac{AD \cdot H_{AB}}{2} \text{ e } (BCD) = \frac{BD \cdot H_{AB}}{2}$$

Segue que:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{(ACD)}{(BCD)} \quad (3.1)$$

Os triângulos ADP e BDP também têm a mesma altura.

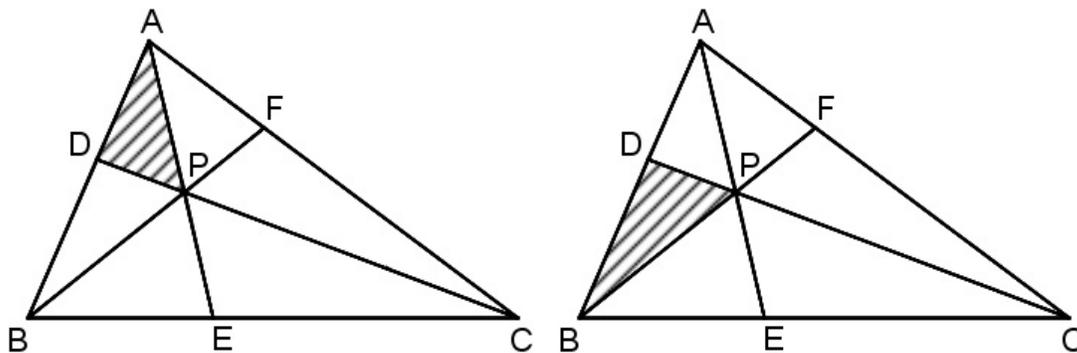


Figura 3.3: Destacando o  $\Delta ADP$  e o  $\Delta BDP$  para calcular suas áreas.

Logo:

$$(ADP) = \frac{AD \cdot h_{AB}}{2} \text{ e } (BDP) = \frac{BD \cdot h_{AB}}{2}$$

Segue que:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{(ADP)}{(BDP)} \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2), obtemos:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{(ACD)}{(BCD)} = \frac{(ADP)}{(BDP)}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{(ACD) - (ADP)}{(BCD) - (BDP)} = \frac{(ADP)}{(BDP)}$$

Como  $(ACD) - (ADP) = (ACP)$  e  $(BCD) - (BDP) = (BCP)$ , temos:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{(ACD) - (ADP)}{(BCD) - (BDP)} = \frac{(ACP)}{(BCP)}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{(ACP)}{(BCP)} \quad (3.3)$$

Analogamente mostraremos que  $\frac{BE}{CE} = \frac{(ABP)}{(ACP)}$ . Observe que os triângulos ABE e ACE têm a mesma altura.

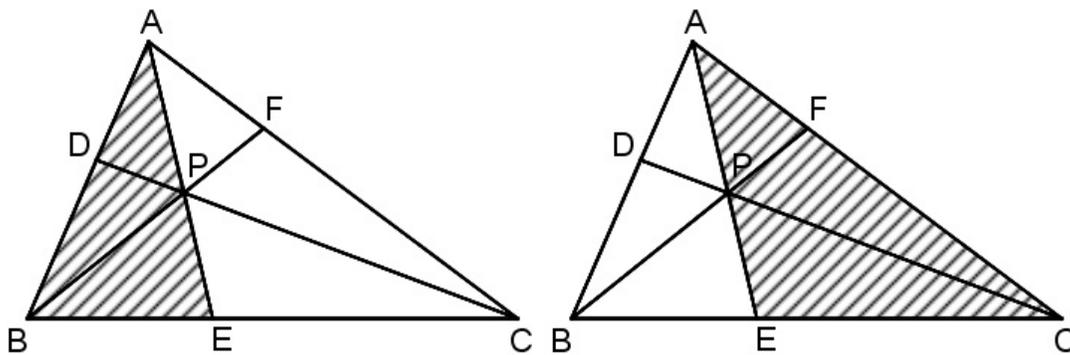


Figura 3.4: Destacando o  $\triangle ABE$  e o  $\triangle ACE$  para calcular suas áreas.

Logo:

$$(ABE) = \frac{BE \cdot H_{BC}}{2} \text{ e } (ACE) = \frac{CE \cdot H_{BC}}{2}$$

Segue que:

$$\frac{BE}{CE} = \frac{(ABE)}{(ACE)} \quad (3.4)$$

Os triângulos BEP e CEP também têm a mesma altura.

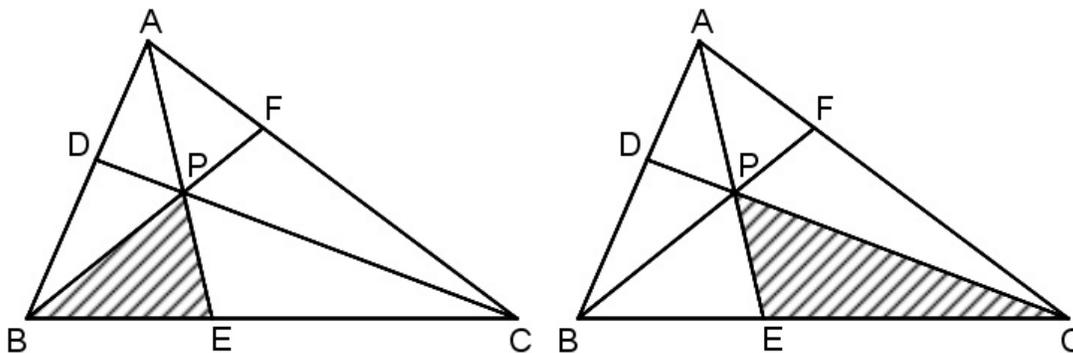


Figura 3.5: Destacando o  $\triangle BEP$  e o  $\triangle CEP$  para calcular suas áreas.

Logo:

$$(BEP) = \frac{BE \cdot h_{BC}}{2} \text{ e } (CEP) = \frac{CE \cdot h_{BC}}{2}$$

Segue que:

$$\frac{BE}{CE} = \frac{(BEP)}{(CEP)} \quad (3.5)$$

De (3.4) e (3.5), obtemos:

$$\frac{BE}{CE} = \frac{(ABE)}{(ACE)} = \frac{(BEP)}{(CEP)}$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{(ABE) - (BEP)}{(ACE) - (CEP)} = \frac{(BEP)}{(CEP)}$$

Como  $(ABE) - (BEP) = (ABP)$  e  $(ACE) - (CEP) = (ACP)$ , temos:

$$\frac{BE}{CE} = \frac{(ABE) - (BEP)}{(ACE) - (CEP)} = \frac{(ABP)}{(ACP)}$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{(ABP)}{(ACP)} \quad (3.6)$$

E novamente, de modo análogo aos passos que encontramos os resultados (3.3) e (3.6) mostraremos que  $\frac{CF}{AF} = \frac{(BCP)}{(ABP)}$ . Observe que os triângulos BCF e ABF têm a mesma altura.

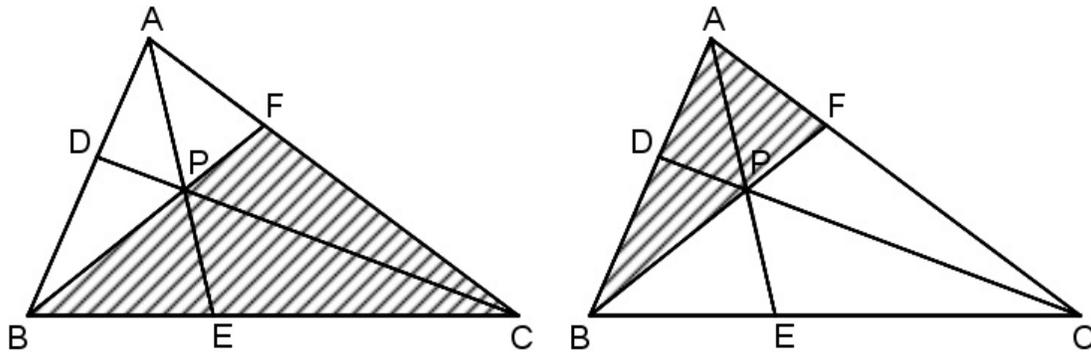


Figura 3.6: Destacando o  $\triangle BCF$  e o  $\triangle ABF$  para calcular suas áreas.

Logo:

$$(BCF) = \frac{CF \cdot H_{AC}}{2} \text{ e } (ABF) = \frac{AF \cdot H_{AC}}{2}$$

Segue que:

$$\frac{CF}{AF} = \frac{(BCF)}{(ABF)} \quad (3.7)$$

Como os triângulos CFP e AFP também têm a mesma altura.

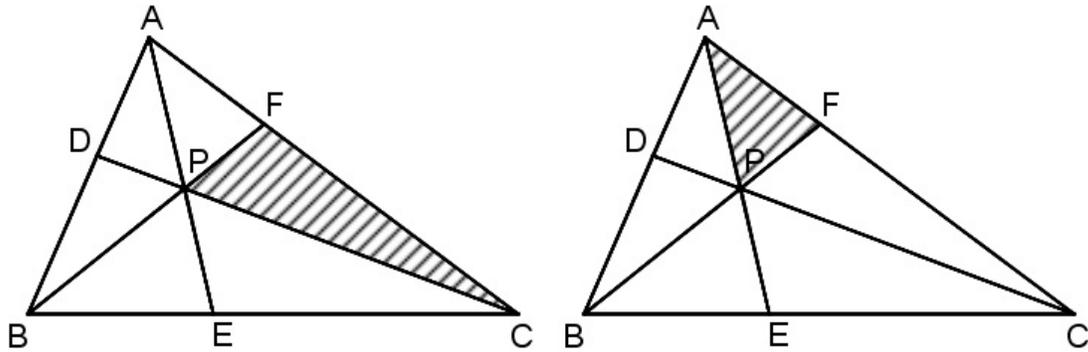


Figura 3.7: Destacando o  $\triangle CFP$  e o  $\triangle AFP$  para calcular suas áreas.

Logo:

$$(CFP) = \frac{CF \cdot h_{AC}}{2} \text{ e } (AFP) = \frac{AF \cdot h_{AC}}{2}$$

Segue que:

$$\frac{CF}{AF} = \frac{(CFP)}{(AFP)} \quad (3.8)$$

De (3.7) e (3.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{CF}{AF} &= \frac{(BCF)}{(ABF)} = \frac{(CFP)}{(AFP)} \\ \frac{CF}{AF} &= \frac{(BCF) - (CFP)}{(ABF) - (AFP)} = \frac{(CFP)}{(AFP)} \end{aligned}$$

Como  $(BCF) - (CFP) = (BCP)$  e  $(ABF) - (AFP) = (APB)$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{CF}{AF} &= \frac{(BCF) - (CFP)}{(ABF) - (AFP)} = \frac{(BCP)}{(ABP)} \\ \frac{CF}{AF} &= \frac{(BCP)}{(ABP)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

De (3.3), (3.6) e (3.9) segue que:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = \frac{(ACP)}{(BCP)} \cdot \frac{(ABP)}{(ACP)} \cdot \frac{(BCP)}{(ABP)}$$

Daí:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

□

### 3.1 Algumas aplicações do Teorema de Ceva

**Exercício 1.** Calcule o valor de  $x$ .

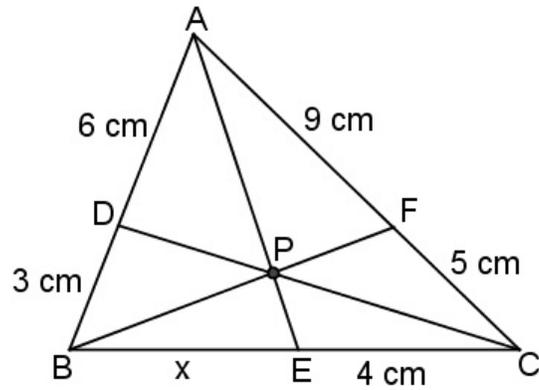


Figura 3.8:  $AE$ ,  $BF$  e  $CD$  são cevianas do  $\triangle ABC$  que se intersectam no ponto  $P$

Aplicando o teorema de ceva, temos:

$$\frac{6}{3} \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{5}{9} = 1$$

$$x = 3,6 \text{ cm}$$

**Exercício 2.** Mostre que as alturas de um triângulo concorrem.

*Demonstração.* Vamos mostrar que vale o Teorema de Ceva. Logo as cevianas se intersectam.

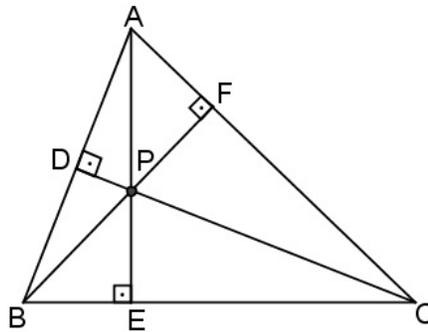


Figura 3.9:  $AE$ ,  $BF$  e  $CD$  são as alturas do  $\triangle ABC$ .

Observe que  $\triangle ABF \sim \triangle ACD$ ,  $\triangle ABE \sim \triangle BCD$  e  $\triangle BCF \sim \triangle ACE$ . Logo:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AB} \tag{3.10}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB} \tag{3.11}$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{BC} \tag{3.12}$$

Dividindo as equações (3.10) pela equação (3.11), obtemos:

$$\frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AB}{BE}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AF}{BE} \quad (3.13)$$

Multiplicando as equações (3.11) e (3.12), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{BD}{BC} \cdot \frac{CE}{AC} &= \frac{BE}{AB} \cdot \frac{CF}{BC} \\ \frac{BE}{CE} &= \frac{AB}{CF} \cdot \frac{BD}{AC} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dividindo a equação (3.12) pela equação (3.10), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{CE}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} &= \frac{CF}{BC} \cdot \frac{AB}{AF} \\ \frac{CF}{AF} &= \frac{BC}{AB} \cdot \frac{CE}{AD} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para concluir a demonstração vamos multiplicar as equações (3.13), (3.14) e (3.15). Veja:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} &= \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AF}{BE} \cdot \frac{AB}{CF} \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{CE}{AD} \\ \left( \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} \right)^2 &= 1 \\ \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} &= 1 \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.1, as alturas de um triângulo qualquer se intersectam em um único ponto.  $\square$

Vamos fazer agora uma outra demonstração usando o recurso da trigonometria. Veja:

*Demonstração.* Da figura 3.8 temos que:

$$\begin{aligned} AD &= AC \cos \hat{A} \\ BD &= BC \cos \hat{B} \\ BE &= AB \cos \hat{B} \\ CE &= AC \cos \hat{C} \\ CF &= BC \cos \hat{C} \\ AF &= AB \cos \hat{A} \end{aligned}$$

Dessas equações segue que:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = \frac{AC \cos \hat{A}}{BC \cos \hat{B}} \cdot \frac{AB \cos \hat{B}}{AC \cos \hat{C}} \cdot \frac{BC \cos \hat{C}}{AB \cos \hat{A}}$$

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

Pelo Teorema de Ceva essa igualdade é verdadeira. Portanto as alturas se intersectam em um único ponto.  $\square$

**Exercício 3.** Demonstre que as três medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto.

*Demonstração.* Vamos mostrar que vale o Teorema de Ceva. Logo as medianas se intersectam.

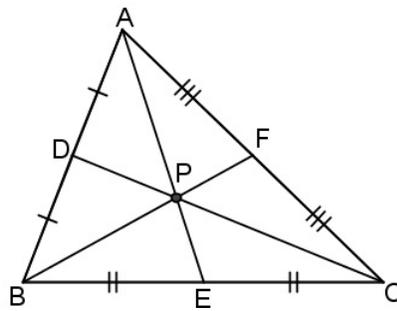


Figura 3.10:  $AE$ ,  $BF$  e  $CD$  são as medianas do  $\triangle ABC$ .

Como  $AD = BD$ ,  $BE = CE$  e  $CF = AF$ , segue que:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

Pelo Teorema de Ceva essa igualdade é verdadeira. Portanto as medianas se intersectam em um único ponto.  $\square$

**Exercício 4.** Demonstre que as três bissetrizes internas de um triângulo se intersectam em um único ponto.

*Demonstração.* Vamos mostrar que vale o Teorema de Ceva. Logo as bissetrizes se intersectam.

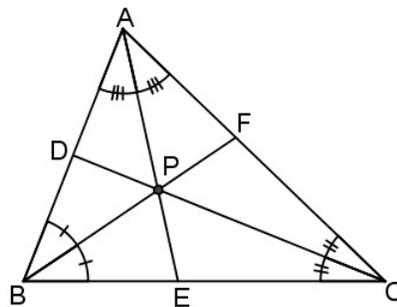


Figura 3.11:  $AE$ ,  $BF$  e  $CD$  são as bissetrizes do  $\triangle ABC$ .

Pelo Teorema das bissetrizes podemos obter estas três equações:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{CF}{AF} = \frac{BC}{AB}$$

Multiplicando estas equações, temos:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

Pelo Teorema de Ceva esta igualdade é verdadeira. Portanto as bissetrizes se intersectam em um único ponto.  $\square$

**Exercício 5.** No triângulo retângulo  $ABC$ ,  $P$  e  $Q$  estão sobre  $BC$  e  $AC$ , respectivamente, tais que  $CP = CQ = 2$ . Pelo ponto de interseção  $R$  de  $AP$  e  $BQ$ , uma reta é desenhada passando também por  $C$  e cortando  $AB$  em  $S$ . O prolongamento de  $PQ$  corta  $AB$  em  $T$ . Se a hipotenusa  $AB = 10$  e  $AC = 8$ , encontre  $TS$ .

**Solução:**

Construindo a figura descrita, obtemos:

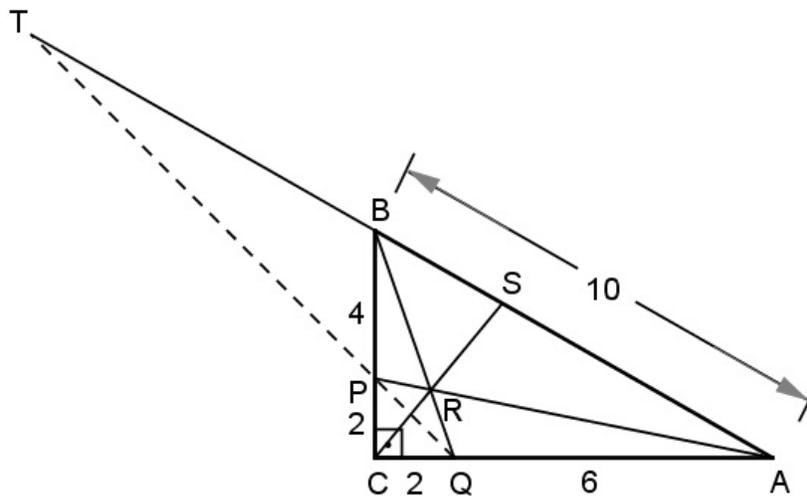


Figura 3.12:  $AE$ ,  $BF$  e  $CD$  são as bissetrizes do  $\triangle ABC$ .

Observe que  $BS = 10 - AS$ . Aplicando o Teorema de Ceva no  $\triangle ABC$ , temos:

$$\frac{4}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{AS}{10 - AS} = 1$$

$$2AS = 30 - 3AS$$

$$AS = 6$$

Como os pontos  $Q$ ,  $P$  e  $T$  são colineares, segue que:

$$\frac{BT}{AT} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{4} = 1$$

Mas  $AT = 10 + BT$ , logo:

$$\frac{BT}{10 + BT} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{4} = 1$$

$$3BT = 20 + 2BT$$

$$BT = 20$$

Ora,  $TS = BT + BS$ , então:

$$TS = 20 + 4$$

$$\therefore TS = 24$$

# Capítulo 4

## Teorema de Stewart

Criado pelo escocês Matthew Stewart (1717-1785), o teorema de Stewart relaciona a medida de uma ceviana de um triângulo qualquer com a medida de seus lados.

**Teorema 4.1** (Teorema de Stewart). *Considere um triângulo ABC, em que seus lados medem a, b e c. Seja AD = d uma ceviana deste triângulo. O teorema de Stewart diz que:*

$$b^2m + c^2n - d^2a = mna$$

Não há apenas uma maneira de demonstrar esse teorema. Segue uma demonstração usando a Lei dos Cossenos.

*Demonstração.* Considere o triângulo a seguir:

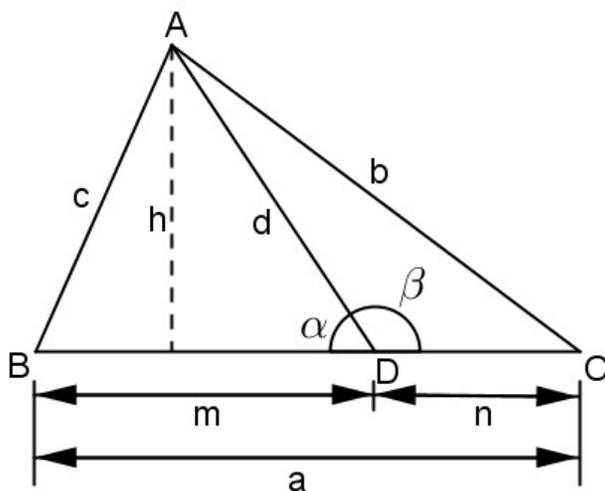


Figura 4.1: Aplicar a Lei dos Cossenos no  $\triangle ABD$  e no  $\triangle ACD$ .

Aplicando a Lei dos Cossenos no  $\triangle ABD$ , temos:

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2 \cdot d \cdot m \cdot \cos \alpha$$

Multiplicando essa equação por  $n$ , obtemos:

$$c^2 \cdot n = d^2 \cdot n + m^2 \cdot n - 2 \cdot d \cdot m \cdot n \cdot \cos \alpha \quad (4.1)$$

Agora, aplicando a Lei dos Cossenos no  $\triangle ACD$ , temos:

$$b^2 = d^2 + n^2 - 2 \cdot d \cdot n \cdot \cos \beta$$

Mas,

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

Então:

$$b^2 = d^2 + n^2 - 2 \cdot d \cdot n \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$b^2 = d^2 + n^2 - 2 \cdot d \cdot n \cdot (-\cos \alpha)$$

$$b^2 = d^2 + n^2 + 2 \cdot d \cdot n \cdot \cos \alpha$$

Multiplicando esta última equação por  $m$ , obtemos:

$$b^2 \cdot m = d^2 \cdot m + n^2 \cdot m + 2 \cdot d \cdot m \cdot n \cdot \cos \alpha \quad (4.2)$$

Adicionando as equações (4.1) e (4.2), obtemos:

$$+ \begin{cases} c^2 \cdot n = d^2 \cdot n + m^2 \cdot n - 2 \cdot d \cdot m \cdot n \cdot \cos \alpha \\ b^2 \cdot m = d^2 \cdot m + n^2 \cdot m + 2 \cdot d \cdot m \cdot n \cdot \cos \alpha \end{cases}$$


---


$$c^2 \cdot n + b^2 \cdot m = d^2 \cdot n + d^2 \cdot m + m^2 \cdot n + n^2 \cdot m$$

$$c^2 \cdot n + b^2 \cdot m = d^2 \cdot (n + m) + m \cdot n(n + m)$$

Mas, como  $n + m = a$ , segue que:

$$c^2 \cdot n + b^2 \cdot m = d^2 \cdot a + m \cdot n \cdot a$$

Portanto:

$$b^2 m + c^2 n - d^2 a = m n a$$

□

## 4.1 Algumas aplicações do Teorema de Stewart

**Exercício 1.** Calcule a medida da ceviana que está em destaque no triângulo seguinte.

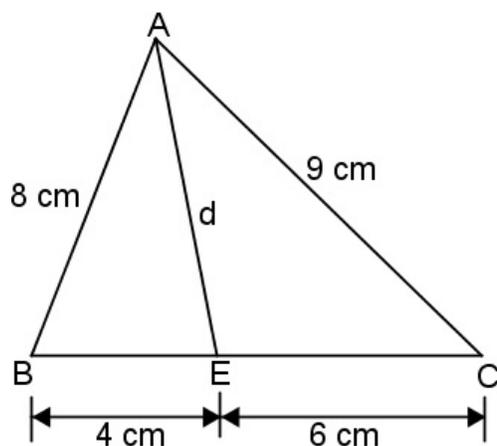


Figura 4.2: Ceviana de comprimento  $d$ .

**Solução:** Observe que  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 9 \text{ cm}$ ,  $c = 8 \text{ cm}$ ,  $m = 4 \text{ cm}$  e  $n = 6 \text{ cm}$ . Aplicando o Teorema de Stewart, temos:

$$9^2 \cdot 4 + 8^2 \cdot 6 - d^2 \cdot 10 = 4 \cdot 6 \cdot 10$$

$$10d^2 = 468$$

$$d = \frac{3\sqrt{130}}{5} \text{ cm}$$

**Exercício 2.** (IME-65)  $AB = AC \neq BC$ . Expressar a diferença  $AB^2 - AM^2$  em função dos segmentos aditivos da base.

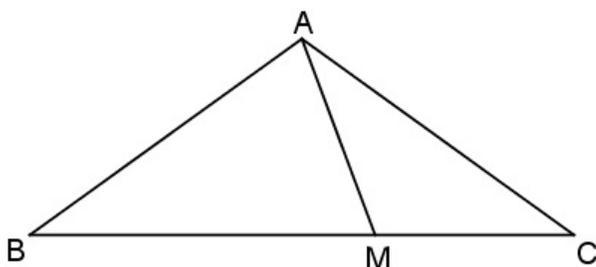


Figura 4.3: O  $\triangle ABC$  é isósceles.

**Solução:**

Pelo Teorema de Stewart, temos que:

$$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC - AM^2 \cdot BC = BC \cdot BM \cdot MC$$

Como  $AC = AB$ , segue que:

$$AB^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC - AM^2 \cdot BC = BC \cdot BM \cdot MC$$

$$AB^2 \cdot (BM + MC) - AM^2 \cdot BC = BC \cdot BM \cdot MC$$

Mas  $BM + MC = BC$ , logo:

$$AB^2 \cdot BC - AM^2 \cdot BC = BC \cdot BM \cdot MC$$

$$BC \cdot (AB^2 - AM^2) = BC \cdot BM \cdot MC$$

$$\therefore AB^2 - AM^2 = BM \cdot MC$$

**Exercício 3.** Considere um  $\triangle ABC$ , qualquer, e a mediana  $AM$ . Calcule o comprimento dessa mediana em função de seus lados.

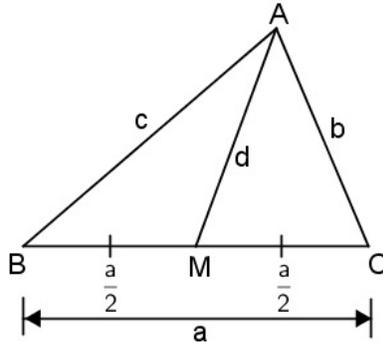


Figura 4.4: Mediana  $AM$ .

**Solução:**

Pelo Teorema de Stewart, temos:

$$b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} - d^2 \cdot a = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a$$

Dividindo ambos os membros da equação por  $a$ , segue que:

$$\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - d^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$d^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore d = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

**Exercício 4.** Considere um  $\triangle ABC$ , qualquer, e a bissetriz  $AX$ . Calcule o comprimento dessa bissetriz em função de seus lados.

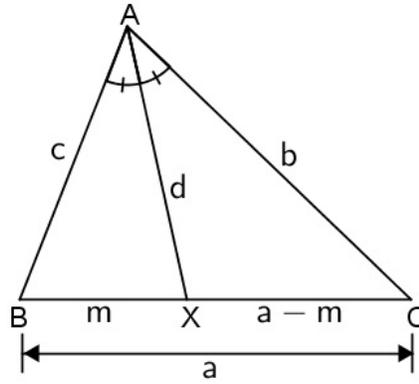


Figura 4.5: Bissetriz AX.

**Solução:**

Aplicando o Teorema de Stewart neste triângulo, obtemos:

$$c^2(a - m) + b^2m - d^2a = am(a - m)$$

$$d^2a = c^2(a - m) + b^2m - am(a - m)$$

Mas pelo Teorema das bissetrizes, temos que  $\frac{m}{a - m} = \frac{c}{b}$ , isto é,  $m = \frac{ac}{b + c}$ . Logo:

$$d^2a = c^2 \left( a - \frac{ac}{b + c} \right) + b^2 \frac{ac}{b + c} - a \frac{ac}{b + c} \left( a - \frac{ac}{b + c} \right)$$

Dividindo ambos os membros da equação por  $a$ , temos:

$$d^2 = c^2 \left( 1 - \frac{c}{b + c} \right) + b^2 \frac{c}{b + c} - \frac{ac}{b + c} \left( a - \frac{ac}{b + c} \right)$$

$$d^2 = \frac{bc^2}{b + c} + \frac{b^2c}{b + c} - \frac{ac}{b + c} \left( \frac{ab}{b + c} \right)$$

$$d^2 = \frac{bc^2}{b + c} + \frac{b^2c}{b + c} - \frac{a^2bc}{(b + c)^2}$$

$$d^2 = \frac{bc(b + c)}{b + c} - \frac{a^2bc}{(b + c)^2}$$

$$d^2 = \frac{bc(b + c)^2 - a^2bc}{(b + c)^2}$$

$$d^2 = \frac{bc[(b + c)^2 - a^2]}{(b + c)^2} \tag{4.3}$$

Note que  $(b + c)^2 - a^2 = (b + c + a)(b + c - a)$ , logo, de 4.3, segue que:

$$d^2 = \frac{bc [(a + b + c)(a + b - c)]}{(b + c)^2} \quad (4.4)$$

Observe que  $b + c - a = b + c + a - 2a = 2 \left( \frac{a + b + c}{2} - a \right)$ , assim, de 4.4, temos:

$$d^2 = \frac{2bc \left[ (a + b + c) \left( \frac{a + b + c}{2} - a \right) \right]}{(b + c)^2}$$

É comum definir o perímetro e o semiperímetro de um polígono como sendo  $2p$  e  $p$ , respectivamente. Daí, fazendo  $2p = a + b + c$  e  $p = \frac{a + b + c}{2}$ , logo:

$$d^2 = \frac{2bc [2p (p - a)]}{(b + c)^2}$$

$$\therefore d = \frac{2}{b + c} \sqrt{2p(p - a)}$$

**Exercício 5.** A figura mostra quatro circunferências tangentes entre si de centros  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $O$ . Calcule o raio da circunferência de centro  $E$ , sabendo-se que o raio da circunferência de centro  $D$  é  $1\text{cm}$  e o raio da circunferência de centro  $C$  é igual a  $2\text{cm}$ .

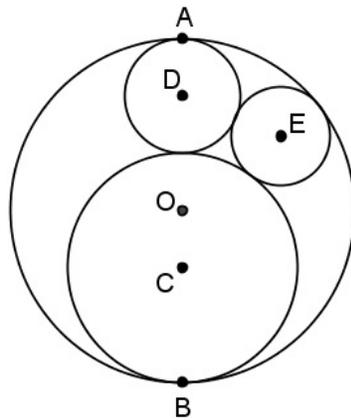


Figura 4.6:  $C$ ,  $O$  e  $D$  são colineares.

**Solução:**

Considerando o raio da circunferência de centro  $E$  igual a  $r$ , temos que  $CO = 1\text{cm}$ ,  $OD = 2\text{cm}$ ,  $CD = 3\text{cm}$ ,  $DE = 1 + r$ ,  $CE = 2 + r$  e  $OE = 3 - r$ . Veja:

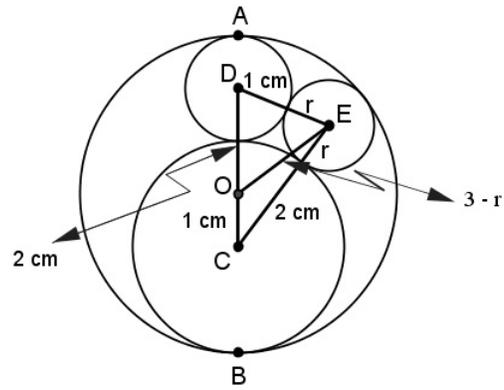


Figura 4.7:  $OE$  é ceviana do  $\triangle CED$ .

Aplicando o Teorema de Stewart no  $\triangle CED$ , obtemos:

$$(r + 1)^2 \cdot 1 + (r + 2)^2 \cdot 2 - (3 - r)^2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$r^2 + 2r + 1 + 8 + 8r + 2r^2 - 27 + 18r - 3r^2 = 6$$

$$28r = 24$$

$$\therefore r = \frac{6}{7}$$

# Capítulo 5

## Teorema de Menelaus

Este teorema foi criado por Menelau de Alexandria (aproximadamente 100 d. C.), porém só foi publicado cerca de 1500 anos depois pelo geômetra Giovanni Ceva (1648-1734). O Teorema de Menelaus relaciona segmentos formados por um triângulo qualquer, e uma reta que intercepta dois lados e a extensão do terceiro lado desse triângulo.

**Teorema 5.1** (Teorema de Menelaus). *Considere um triângulo ABC, qualquer. Sejam D, E e F pontos colineares do prolongamento de BC, do lado AC e do lado AB, respectivamente. O Teorema de Menelaus diz que:*

$$\frac{CD}{BD} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{CE} = 1$$

*Demonstração.* Considere a figura a seguir:

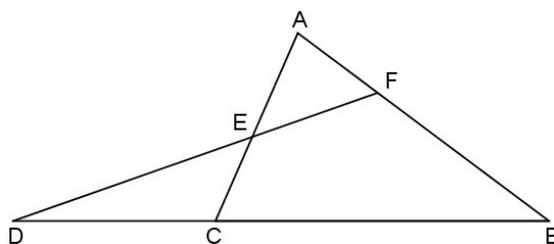


Figura 5.1: Figura descrita no Teorema 5.1.

Traçando as alturas AA', BB' e CC' dos triângulos AEF, BDF e CDE, respectivamente, obtemos:

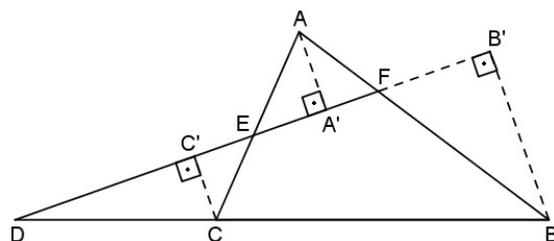


Figura 5.2: As alturas AA', BB' e CC' dos triângulos AEF, BDF e CDE.

Observe que  $\triangle CC'D \sim \triangle BB'D$ ,  $\triangle BB'F \sim \triangle AA'F$  e  $\triangle AA'E \sim \triangle CC'E$ , logo:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CC'}{BB'} \quad (5.1)$$

$$\frac{BF}{AF} = \frac{BB'}{AA'} \quad (5.2)$$

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AA'}{CC'} \quad (5.3)$$

De (5.1), (5.2) e (5.3), temos que:

$$\frac{CD}{BD} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{CE} = \frac{CC'}{BB'} \cdot \frac{BB'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{CC'}$$

Portanto:

$$\frac{CD}{BD} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{CE} = 1$$

□

## 5.1 Algumas aplicações do Teorema de Menelaus

**Exercício 1.** Calcule a medida  $x$  na figura seguinte.

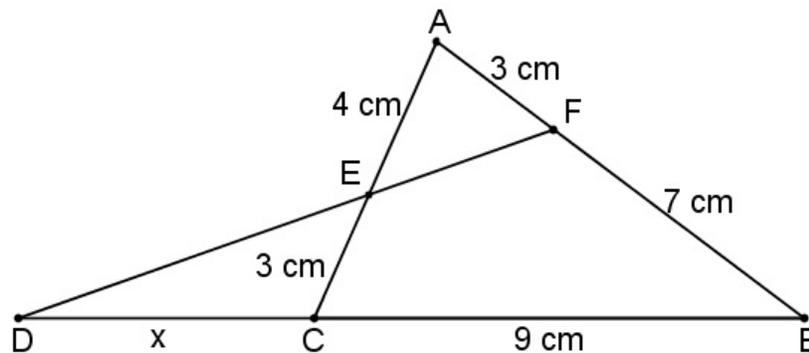


Figura 5.3: A medida do segmento CD é desconhecida.

**Solução:**

Pelo Teorema de Menelaus, temos:

$$\frac{x}{9+x} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} = 1$$

$$28x = 81 + 9x$$

$$x = \frac{81}{19} \text{ cm}$$

**Exercício 2.** Se os lados de um triângulo ABC medem:  $AB = 13 \text{ cm}$ ,  $BC = 14 \text{ cm}$  e  $AC = 15 \text{ cm}$ , então quanto mede a distância AH sabendo que H é o ortocentro do triân-

gulo?

**Solução:**

Para resolver este exercício vamos traçar as alturas  $AE$  e  $CD$ , como segue na figura.

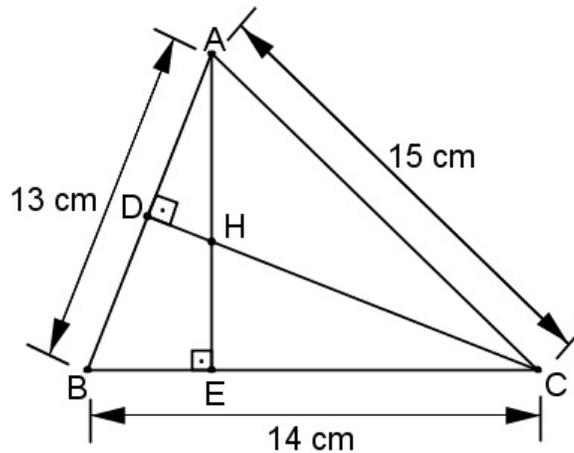


Figura 5.4: O ponto H é o ortocentro do  $\triangle ABC$ .

Note que  $BE = 14 - EC$ , logo aplicando o Teorema de Pitágoras no  $\triangle ABE$  e no  $\triangle ACE$ , obtemos respectivamente as equações  $13^2 = (14 - EC)^2 + AE^2$  e  $15^2 = EC^2 + AE^2$ . Resolvendo este sistema, temos que  $AE = 12 \text{ cm}$  e  $EC = 9 \text{ cm}$ . E como  $BE = 14 - EC$ , segue que  $BE = 5 \text{ cm}$ . Observe agora, que o  $\triangle ABE \sim \triangle BCD$ , e que  $BD = 13 - AD$ , logo:

$$\frac{13}{5} = \frac{14}{13 - AD}$$

$$169 - 13AD = 70$$

$$AD = \frac{99}{13} \text{ cm}$$

Sabemos que  $EC = 9 \text{ cm}$ ,  $BC = 14 \text{ cm}$ ,  $BD = \frac{70}{13} \text{ cm}$ ,  $AD = \frac{99}{13} \text{ cm}$  e  $HE = 12 - AH$ . E em relação ao  $\triangle ABE$ , temos que, os pontos  $D$ ,  $H$  e  $C$  são colineares e pertencem ao lado  $AB$ , lado  $AE$  e ao prolongamento de  $BE$ , respectivamente. Assim, pelo Teorema de Menelaus, temos:

$$\frac{9}{14} \cdot \frac{13}{99} \cdot \frac{AH}{12 - AH} = 1$$

$$\frac{9}{14} \cdot \frac{70}{13} \cdot \frac{13}{99} \cdot \frac{AH}{12 - AH} = 1$$

$$\frac{5}{11} \cdot AH = 12 - AH$$

$$5AH = 132 - 11AH$$

$$AH = 8,25 \text{ cm}$$

$$\therefore AH = 8,25 \text{ cm}$$

**Exercício 3.** Mostre que as bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo escaleno e a bissetriz externa do terceiro ângulo, intersectam os seus respectivos lados opostos em três pontos colineares.

*Demonstração.* Observe a figura seguinte:

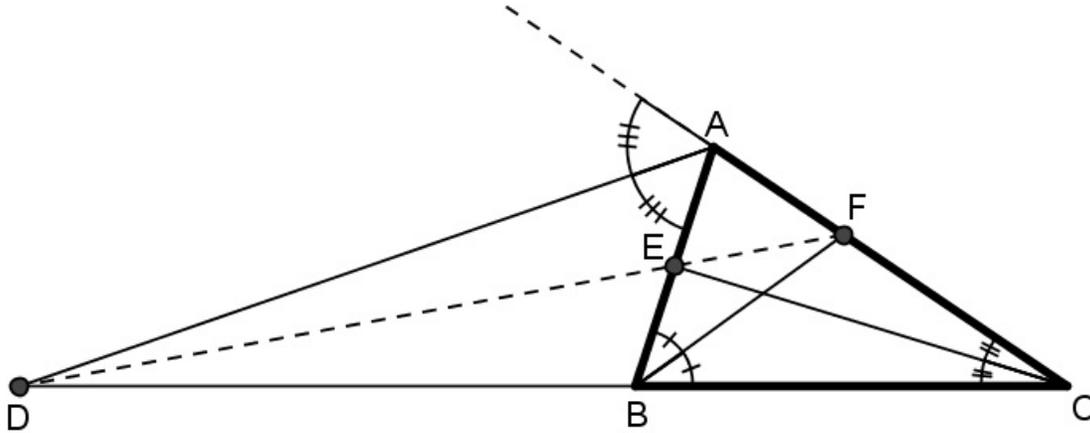


Figura 5.5: Os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  são colineares.

Pelo Teorema das bissetrizes, obtemos estas três equações:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{CF}{AF} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$$

Multiplicando estas três equações, obtemos:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AE}{BE} = 1$$

Pelo Teorema de Menelaus, essa igualdade é verdadeira.

$\therefore$  os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  são colineares. □

**Exercício 4.** Considere um  $\triangle ABC$  e suas medianas  $AM_{BC}$ ,  $BM_{AC}$ , e  $CM_{AB}$ . Mostre que o baricentro do  $\triangle ABC$  divide cada uma das medianas na razão de  $\frac{1}{2}$ .

*Demonstração.* Para mostrar este resultado tão importante observe a figura seguinte.

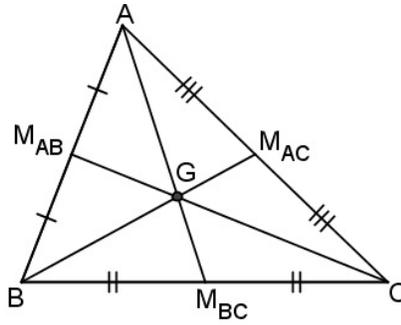


Figura 5.6: O ponto  $G$  é o baricentro.

Como  $M_{AC}$ ,  $G$  e  $B$  são colineares, temos pelo Teorema de Ceva que:

$$\frac{BM_{BC}}{BC} \cdot \frac{CM_{AC}}{AM_{AC}} \cdot \frac{AG}{GM_{BC}} = 1$$

Mas  $BC = 2BM_{BC}$  e  $AM_{AC} = CM_{AC}$ , então  $\frac{BM_{BC}}{BC} = \frac{1}{2}$  e  $\frac{CM_{AC}}{AM_{AC}} = 1$ , daí:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{AG}{GM_{BC}} = 1$$

$$\frac{GM_{BC}}{AG} = \frac{1}{2}$$

Analogamente pode-se mostrar que:

$$\frac{GM_{AC}}{BG} = \frac{GM_{AB}}{CG} = \frac{1}{2}$$

□

**Exercício 5.** O lado  $AB$  de um quadrado é prolongado até  $P$  tal que  $BP = 2AB$ . Com  $M$ , ponto médio de  $DC$ ,  $MC$  é desenhado cortando  $AC$  em  $Q$ .  $PQ$  corta  $BC$  em  $R$ . Encontre a razão  $\frac{CR}{RB}$ .

**Solução:** Construindo a figura descrita temos:

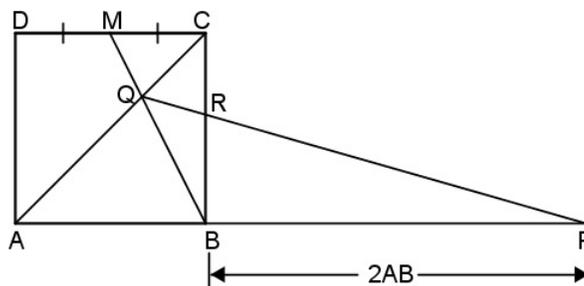


Figura 5.7: Quadrado  $ABCD$ .

Observe que o  $\Delta CMQ \sim \Delta ABQ$ , pois  $MC \parallel AB$ . Logo:

$$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AB}{MC}$$

$$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AB}{\frac{AB}{2}}$$

$$\frac{AQ}{CQ} = 2$$

Note que  $AP = 3AB$ , e que os pontos  $Q$ ,  $R$  e  $P$  são colineares. Logo, pelo Teorema de Menelaus, obtemos:

$$\frac{BP}{AP} \cdot \frac{AQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{RB} = 1$$

$$\frac{2AB}{3AB} \cdot 2 \cdot \frac{CR}{RB} = 1$$

$$\therefore \frac{CR}{RB} = \frac{3}{4}$$

# Capítulo 6

## Teorema de Pappus-Guldin

Antes de enunciar o Teorema de Pappus-Guldin, vamos apresentar a definição de **centro de massa**, pois este tem uma ligação imprescindível quanto ao uso deste teorema. Esta definição vai ser muito importante na solução do exercício 8 deste capítulo, por exemplo.

**Definição 6.1.** *Pode-se considerar o centro de massa como sendo o ponto onde toda sua massa esteja concentrada. Quando o corpo tem massa homogênea, seu centro de massa é exatamente o seu centro geométrico, isto é, seu conceito passa a ser essencialmente geométrico, que é o caso do estudo deste capítulo. Para obter as coordenadas do centro de massa (CM) de um sistema bidimensional com  $n$  partículas, tem-se por definição que:*

$$X_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{M}$$

e

$$Y_{CM} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{M}$$

Onde  $x_1, x_2, \dots, e x_n$  são as abscissas das massas  $m_1, m_2, \dots, e m_n$ , respectivamente. A soma  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  é denotada por  $M$ , e  $y_1, y_2, \dots, e y_n$  são as ordenadas das partículas de massas  $m_1, m_2, \dots, e m_n$ , respectivamente.

E para obter as coordenadas do centro de massa (CM) de  $n$  superfícies planas, também em um sistema bidimensional, tem-se, analogamente, que:

$$X_{CM} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{A}$$

e

$$Y_{CM} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_n A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{A}$$

Onde  $x_1, x_2, \dots, e x_n$  são as abscissas dos centro de massas das superfícies com áreas  $A_1, A_2, \dots, e A_n$ , respectivamente. A soma  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$  é denotada por  $A$ , e  $y_1, y_2, \dots, e y_n$  são as ordenadas dos centro de massas das superfícies com áreas  $A_1, A_2, \dots, e A_n$ , respectivamente.

**Nota:** O centro de massa de um corpo nem sempre é um ponto do corpo.

Serão apresentados agora dois teoremas muitíssimos importantes quando se está trabalhando com superfícies (ou sólidos) de revolução. Um relativo ao cálculo de áreas e o outro ao cálculo de volumes. Neste capítulo não serão apresentadas as demonstrações do teorema de Pappus-Guldin, o motivo é bem simples: as demonstrações exigem o uso de cálculo diferencial e integral, que até então o aluno do ensino médio raramente tem o contato com esses conteúdos. Porém há uma demonstração para cada um destes teoremas nos **Apêndices A e B** deste trabalho.

Este teorema é assim intitulado porque foi primeiramente descoberto pelo grego Pappus de Alexandria (c. 290 d.C. - c. 350 a. C.), e redescoberto pelo Suíço Paul Guldin (1577-1643).

**Teorema 6.1** (Teorema de Pappus-Guldin - Área). *Considere uma reta e uma linha geratriz de comprimento  $L$ , de modo que essa reta e essa linha não se interceptam e sejam coplanares. A área da superfície gerada pela rotação dessa linha em torno dessa reta é dada pelo produto do comprimento dessa linha pelo comprimento da trajetória de seu centro de massa. Veja:*

$$A = 2\pi dL$$

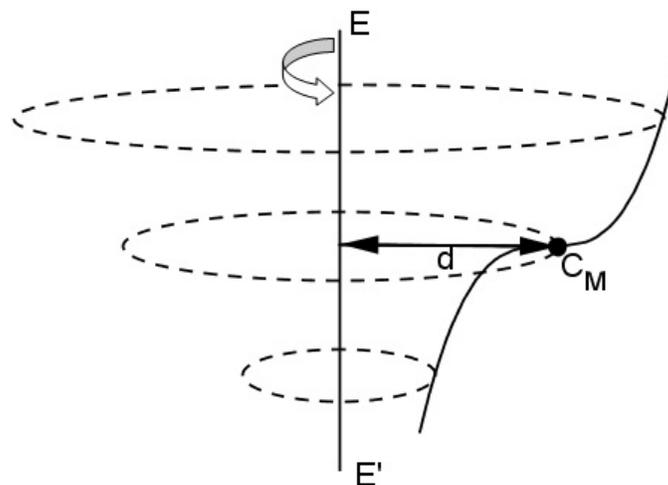


Figura 6.1: Curva rotacionando em torno do eixo EE'.

**Teorema 6.2** (Teorema de Pappus-Guldin - Volume). *Considere uma reta e uma curva fechada, de modo que essa reta e essa curva não se interceptam e sejam coplanares. O volume do sólido gerado pela rotação dessa curva em torno dessa reta é dado pelo produto da área dessa curva pelo comprimento da trajetória de seu centro de massa. Veja:*

$$V = 2\pi dA$$

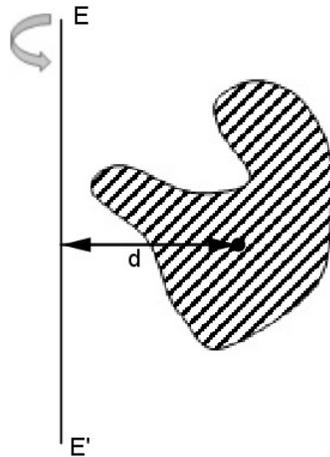


Figura 6.2: Superfície rotacionando em torno do eixo EE'.

## 6.1 Algumas aplicações do Teorema de Pappus-Guldin

**Exercício 1.** (IME 2010 - Modificado) Sejam ABC um triângulo equilátero de lado 2 cm e r uma reta situada no seu plano distante 3 cm do seu baricentro.

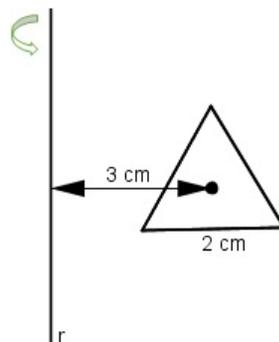


Figura 6.3: Triângulo rotacionando em torno da reta r

a) Calcule a área da superfície gerada pela rotação desse triângulo em torno da reta r.

Solução:

Como  $d = 3\text{cm}$  e o comprimento dessa curva é igual ao perímetro do triângulo, isto é  $2p = 6\text{cm}$ , temos pelo Teorema 6.1 que:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6$$

$$A = 36\pi\text{cm}^2$$

**b)** Calcule o volume do sólido gerado pela rotação desse triângulo em torno da reta  $r$ .

Solução:

A área de um triângulo equilátero pode ser obtida através da fórmula  $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ . Logo a área desse triângulo é  $\sqrt{3}\text{cm}^2$ . Assim temos pelo Teorema 6.2 que:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$$

$$V = 6\pi\sqrt{3}\text{cm}^3$$

**Exercício 2.** Demonstrar a fórmula da área do círculo de raio  $r$ .

*Demonstração.* Para gerar um círculo a partir de uma rotação, basta rotacionar um segmento de comprimento  $r$ . Veja a figura:

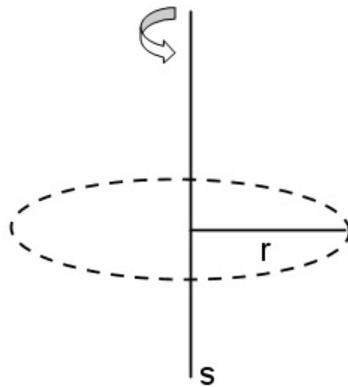


Figura 6.4: Círculo formado pela rotação do segmento de comprimento  $r$  em torno da reta  $s$ .

Observe que a distância da reta  $s$  até o centro de massa do segmento de comprimento  $r$  é  $\frac{r}{2}$ . Segue pelo Teorema 6.1 que:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{2} \cdot r$$

$$A = \pi r^2$$

□

**Exercício 3.** Demonstrar a fórmula da área de um cilindro com raio da base  $r$  e altura  $h$ .

*Demonstração.* Para gerar a superfície lateral de um cilindro a partir de uma rotação, basta rotacionar um segmento de comprimento  $h$  paralelo ao eixo de rotação. Veja a figura:

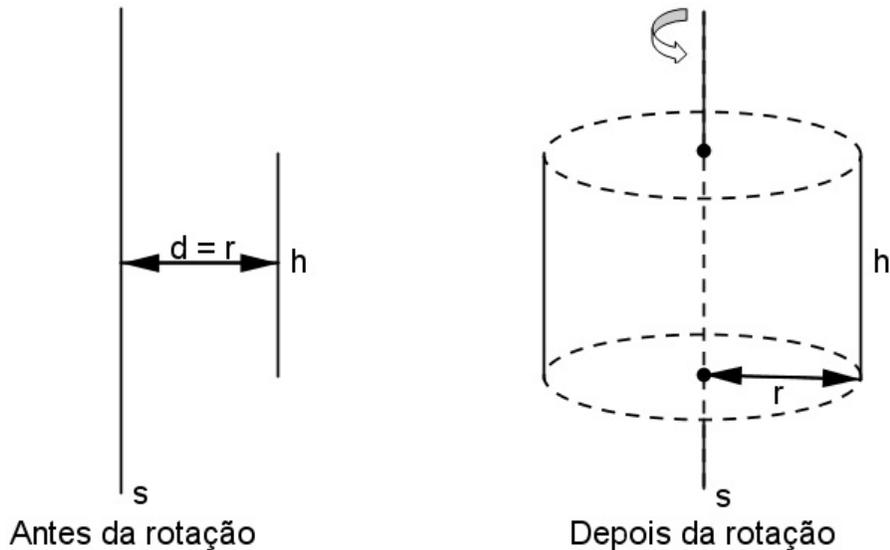


Figura 6.5: Superfície lateral de um cilindro é gerada depois da rotação do segmento de comprimento  $h$  em torno da reta  $s$ .

Observe que o centro de massa do segmento  $h$  é igual ao seu ponto médio, e sua distância da reta  $s$  é igual a  $r$ , isto é,  $d = r$ . Seja  $A_L$  a área lateral do cilindro que será gerado pela rotação desse segmento. Segue pelo Teorema 6.1 que:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_L = 2\pi r h$$

A área total do cilindro é o resultado da adição de sua área lateral com as áreas dos dois círculos que compõem suas bases. Pelo exercício anterior sabemos que a área do círculo é dada por  $A = \pi r^2$ . Logo, denotando a área total do cilindro por  $A_T$  e a área da base por  $A_B$ , temos:

$$A_T = A_L + 2A_B$$

$$A_T = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$A_T = 2\pi r(h + r)$$

□

**Exercício 4.** Demonstrar a fórmula do volume de um cilindro com raio da base  $r$  e altura  $h$ .

*Demonstração.* Para obter o volume do cilindro vamos rotacionar um retângulo com base e altura medindo  $r$  e  $h$ , respectivamente. Veja a figura:

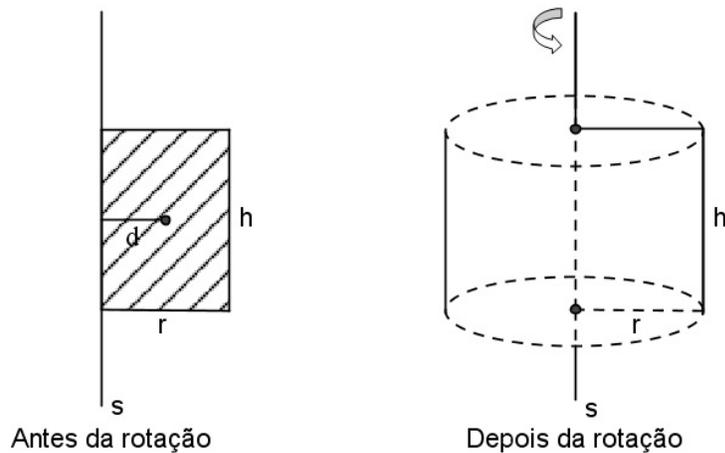


Figura 6.6: Um cilindro é gerado depois da rotação do retângulo com dimensões  $r$  e  $h$  em torno da reta  $s$ .

Observe que o centro de massa desse retângulo está localizado em seu "centro", isto é, na interseção das duas diagonais, e sua distância da reta  $s$  é igual  $\frac{r}{2}$ , ou seja,  $d = \frac{r}{2}$ . Sabemos que a área de um retângulo é o resultado da multiplicação de sua base pela altura, nesse caso teremos  $A = r \cdot h$ . Segue pelo Teorema 6.2 que:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{2} \cdot r \cdot h$$

$$V = \pi r^2 h$$

□

**Exercício 5.** Demonstrar a fórmula da área de um cone com raio da base  $r$  e altura  $h$ .

*Demonstração.* Para gerar um cone a partir de uma rotação, basta rotacionar um segmento de comprimento  $g$ . Veja a figura:

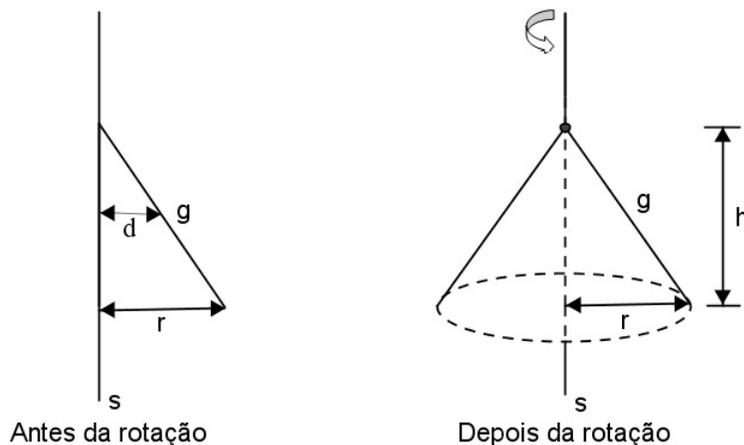


Figura 6.7: Superfície lateral de um cone é gerada depois da rotação do segmento de comprimento  $g$  em torno da reta  $s$ .

Note que o centro de massa desse segmento está no seu ponto médio, e sua distância a reta  $s$  é igual a  $\frac{r}{2}$ , isto é,  $d = \frac{r}{2}$ . Para mostrar isso podemos imaginar os triângulos ADE e ABC, como indica a figura.

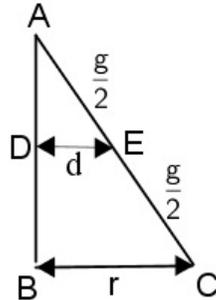


Figura 6.8:  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Estes triângulos são semelhantes, pois  $DE \parallel BC$ , e têm razão de semelhança igual a  $\frac{1}{2}$ , visto que  $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$ . Logo:

$$\frac{d}{r} = \frac{1}{2}$$

$$d = \frac{r}{2}$$

Assim, pelo Teorema 6.1, a área lateral do cone é dada por:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{2} \cdot g$$

$$A_L = \pi r g$$

A área total do cone é o resultado da adição de sua área lateral com a área do círculo que compõe sua base. Logo, denotando a área total do cone por  $A_T$  e a área da base por  $A_B$ , temos:

$$A_T = A_L + A_B$$

$$A_T = \pi r g + \pi r^2$$

$$A_T = \pi r (g + r)$$

□

**Exercício 6.** Demonstrar a fórmula do volume de um cone com raio da base  $r$  e altura  $h$ .

*Demonstração.* Para obter o volume do cone vamos rotacionar um triângulo retângulo com base e altura medindo  $r$  e  $h$ , respectivamente. Veja a figura:

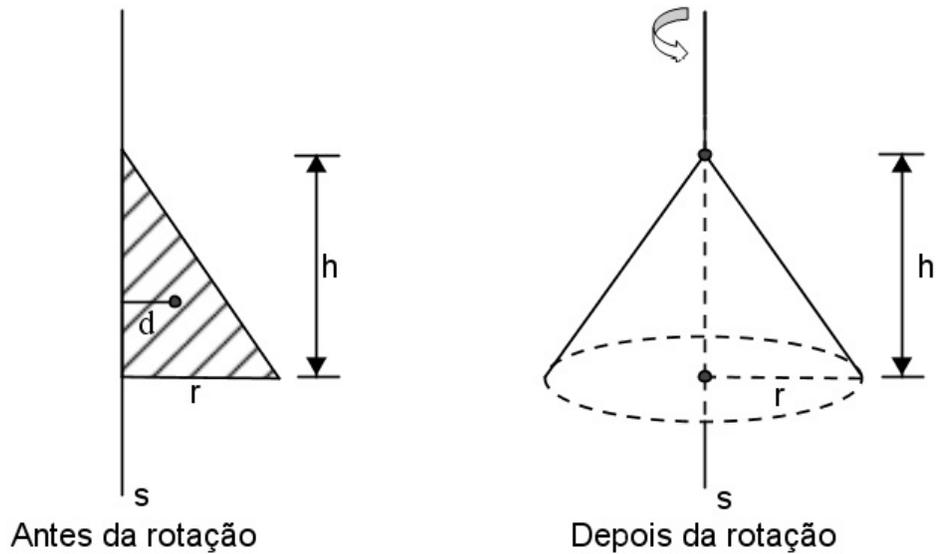


Figura 6.9: Um cone é gerado depois da rotação do triângulo hachurado em torno da reta  $s$ .

Antes de calcular o volume do cone vamos encontrar o centro de massa desse triângulo. Vamos mostrar que a distância do centro de massa desse triângulo retângulo a reta  $s$  é igual a  $\frac{r}{3}$ , isto é,  $d = \frac{r}{3}$ . Para mostrar este fato, veja o triângulo seguinte:

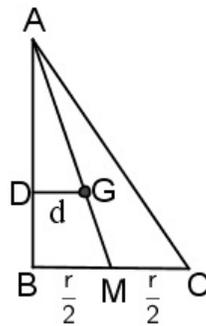


Figura 6.10: O baricentro  $G$  é o centro de gravidade do triângulo.

O centro de massa desse triângulo é o seu baricentro. Para encontrar a distância  $d$  traçamos a mediana  $AM$ . Lembre-se que a mediana passa pelo baricentro e intercepta o lado  $BC$  em seu ponto médio, e que o baricentro divide a mediana na proporção de  $\frac{1}{2}$ , isto é,  $\frac{GM}{AG} = \frac{1}{2}$ . Note que  $GM = AM - AG$ , logo:

$$\frac{AM - AG}{AG} = \frac{1}{2}$$

$$2AM - 2AG = AG$$

$$2AM = 3AG$$

$$\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$$

Como  $DG \parallel BM$  o  $\triangle ADG \sim \triangle ABM$ , portanto:

$$\frac{d}{\frac{r}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$d = \frac{r}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$d = \frac{r}{3}$$

Agora que mostramos que  $d = \frac{r}{3}$  e sabemos que a área desse triângulo é  $A = \frac{r \cdot h}{2}$  vamos obter o volume do cone. Segue pelo Teorema 6.2 que:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{r \cdot h}{2}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

□

**Exercício 7.** Demonstrar a fórmula da área de um tronco de cone com altura  $h$  e raios das bases  $R$  e  $r$ .

*Demonstração.* Para gerar um tronco de cone a partir de uma rotação, basta rotacionar um segmento de comprimento  $g$ . Veja a figura:

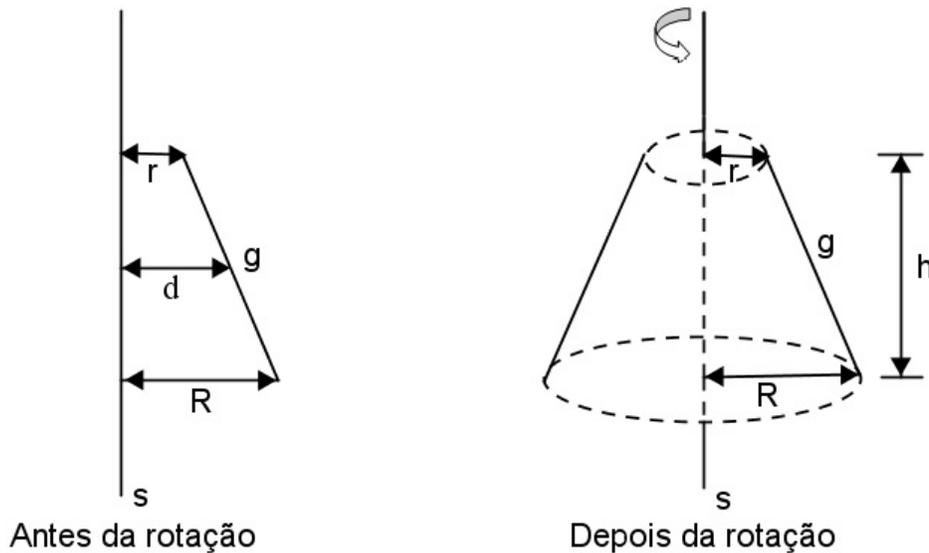


Figura 6.11: Superfície lateral de um tronco cone é gerada depois da rotação do segmento de comprimento  $g$  em torno da reta  $s$ .

Antes de calcular a área lateral do tronco de cone, vamos mostrar que  $d = \frac{R+r}{2}$ . Para mostrar isso, primeiramente observe a figura seguinte:

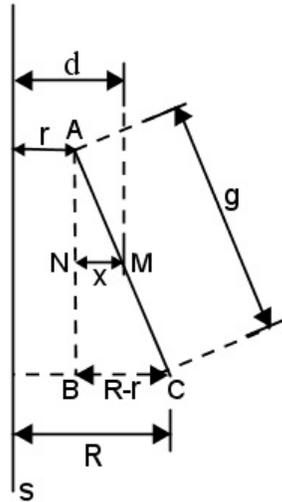


Figura 6.12:  $d = r + x$

O ponto M é o centro de massa do segmento  $AC=g$ , e obviamente também é o ponto médio desse segmento. Note que o  $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ , pois  $MN \parallel BC$ . Com isso temos que:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AC}$$

$$\frac{x}{R-r} = \frac{\frac{g}{2}}{g}$$

$$x = \frac{g}{2} \cdot \frac{1}{g} \cdot (R-r)$$

$$x = \frac{R-r}{2}$$

Como  $d = r + x$ , obtemos:

$$d = r + \frac{R-r}{2}$$

$$d = \frac{R+r}{2}$$

Agora podemos calcular a área lateral do tronco de cone. Segue pelo Teorema 6.1 que:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R+r}{2} \cdot g$$

$$A_L = \pi g(R+r)$$

A área total do tronco cone é o resultado da adição de sua área lateral com a área dos dois círculos que compõem suas bases. Logo, denotando a área total do tronco de cone por  $A_T$  e as

áreas das bases por  $A_R$  (Área da base de raio  $R$ ) e  $A_r$  (Área da base de raio  $r$ ), temos:

$$A_T = A_L + A_R + A_r$$

$$A_T = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

$$A_T = \pi[g(R + r) + R^2 + r^2]$$

□

A fórmula está demonstrada, mas pode ser útil saber que aplicando o Teorema de Pitágoras no  $\triangle ABC$  obtemos  $g = \sqrt{(R + r)^2 + h^2}$ . Daí a fórmula ainda poderia ser expressa assim:

$$A_T = \pi[\sqrt{(R + r)^2 + h^2}(R + r) + R^2 + r^2]$$

**Exercício 8.** Demonstrar a fórmula do volume de um tronco de cone com altura  $h$  e raios das bases  $R$  e  $r$ .

*Demonstração.* Para obter o volume do tronco de cone vamos rotacionar um trapézio com bases  $R$  e  $r$ , e altura  $h$ . Veja a figura:

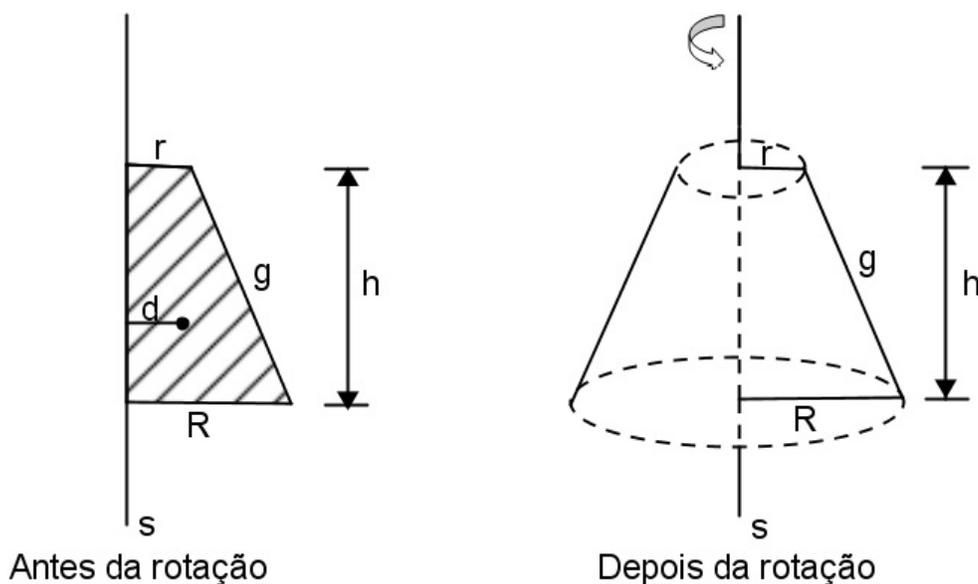


Figura 6.13: Um tronco de cone é gerado depois da rotação do trapézio em torno da reta  $s$ .

Antes de calcular o volume do tronco de cone vamos encontrar o centro de massa desse trapézio. Vamos mostrar que a distância do centro de massa desse trapézio a reta  $s$  é igual a  $d = \frac{R^2 + Rr + r^2}{3(R + r)}$ . Para mostrar este fato, veja a figura seguinte:

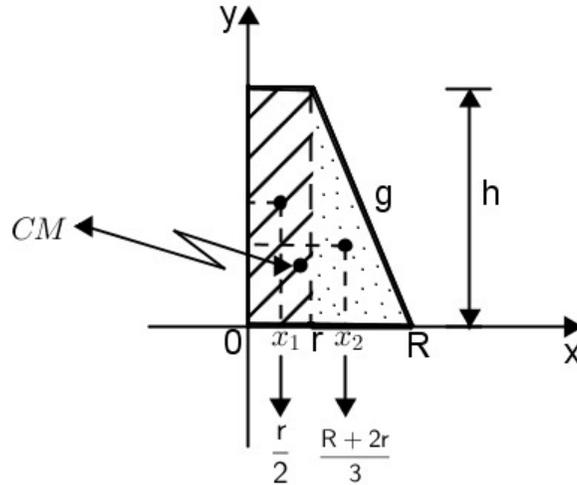


Figura 6.14: O trapézio é dividido em dois polígonos: um triângulo e um retângulo. CM é o centro de massa do trapézio.

Note que o trapézio foi dividido em dois polígonos: um triângulo e um retângulo. Observe também que a abscissa do centro de massa do retângulo é  $x_1 = \frac{r}{2}$ , e a abscissa  $d$  do centro de massa do triângulo é  $x_2 = r + \frac{R-r}{3} = \frac{R+2r}{3}$ . A abscissa do centro de massa do trapézio é encontrada a partir da média ponderada, conforme a equação:

$$d = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2}$$

Onde  $A_1$  e  $A_2$  são as áreas do retângulo e do triângulo, respectivamente. Sabendo disso, temos que:

$$\begin{aligned} d &= \frac{rh \cdot \frac{r}{2} + \frac{(R-r)h}{2} \cdot \frac{R+2r}{3}}{rh + \frac{(R-r)h}{2}} \\ d &= \frac{\frac{r^2 h}{2} + \frac{2Rrh - 2r^2 h + R^2 h - Rrh}{6}}{\frac{2rh + Rh - rh}{2}} \\ d &= \frac{3r^2 h + 2Rrh - 2r^2 h + R^2 h - Rrh}{6} \cdot \frac{2}{rh + Rh} \\ d &= \frac{r^2 h + Rrh + R^2 h}{6} \cdot \frac{2}{rh + Rh} \\ d &= \frac{h(r^2 + Rr + R^2)}{6} \cdot \frac{2}{(r + R)} \end{aligned}$$

$$d = \frac{R^2 + Rr + r^2}{3(R + r)}$$

Agora que temos o valor de  $d$  e sabemos que a área desse trapézio é  $A = \frac{(R + r)h}{2}$  vamos obter o volume do tronco de cone. Segue pelo Teorema 6.2 que:

$$V = 2\pi \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{3(R + r)} \cdot \frac{(R + r)h}{2}$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

□

**Exercício 9.** Sabendo que a fórmula para encontrar o volume da esfera é dada por  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , onde  $r$  é o raio da esfera, demonstre que a distância do centro de massa até o centro do semicírculo de raio  $r$  é dada por  $\frac{4r}{3\pi}$ .

*Demonstração.* Quando um semicírculo é rotacionado é gerada um esfera. Veja a figura:

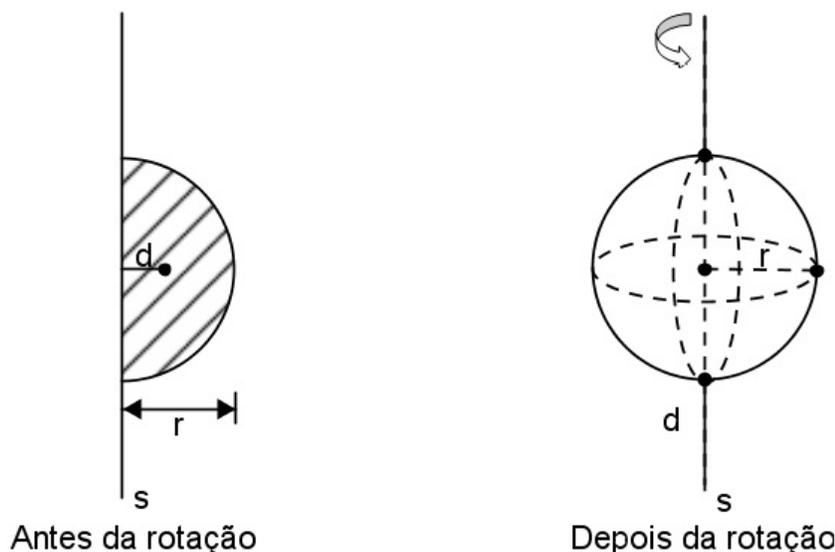


Figura 6.15: Uma esfera é gerada depois da rotação do semicírculo em torno da reta  $s$

O Teorema de Pappus-Guldin, não serve apenas para calcular áreas de superfícies e de sólidos de revolução. Uma das maiores vantagens desse Teorema é que dado a área ou o volume de uma superfície ou sólido que foi gerado pela rotação de uma curva, podemos obter o centro de massa dessa curva. Por exemplo, para obter o valor de  $d$ , isto é, a distância do centro de massa do semicírculo a reta  $s$ , vamos usar o fato de que sabemos que o volume do sólido gerado pela rotação do semicírculo é  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Obviamente temos que conhecer também a área da curva em questão, que neste caso é  $A = \frac{\pi r^2}{2}$  (Área do semicírculo). Assim, usando o Teorema 6.2,

temos:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi \cdot d \cdot \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = d \cdot \pi^2 r^2$$

$$d = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{\pi^2 r^2}$$

$$d = \frac{4r}{3\pi}$$

□

**Exercício 10.** Sabendo que a fórmula para encontrar a área da esfera é dada por  $A = 4\pi r^2$ , onde  $r$  é o raio da esfera, demonstre que a distância do centro de massa até o centro da semicircunferência de raio  $r$  é dado por  $\frac{2r}{\pi}$ .

*Demonstração.* Note que, quando uma semicircunferência é rotacionada é gerada um esfera. Analogamente ao exercício anterior, para obter o valor de  $d$ , isto é, a distância do centro de massa do semicircunferência ao seu centro, vamos usar o fato de que sabemos que a área da superfície do sólido gerado pela rotação da semicircunferência é dada por  $A = 4\pi r^2$ . Temos que conhecer também o comprimento da curva em questão, que neste caso é  $\pi r$  (Comprimento da semicircunferência). Assim, usando o Teorema 6.1, temos:

$$4\pi r^2 = 2\pi \cdot d \cdot \pi r$$

$$4\pi r^2 = 2\pi^2 r d$$

$$d = \frac{4\pi r^2}{2\pi^2 r}$$

$$d = \frac{2r}{\pi}$$

□

# Considerações finais

O propósito deste trabalho foi abordar alguns teoremas clássicos da Geometria Plana e Espacial, e externar o amplo potencial que eles têm na resolução de problemas. Um dos motivos é a irregularidade da exploração deles, não só no ensino médio, mas também nas graduações do curso de Matemática.

No Capítulo 1, vimos um pouco da parte histórica da Matemática e de alguns estudiosos. Este Capítulo foi de grande valia para mostrar, por exemplo, que a Matemática é o "resultado" de uma construção coletiva dinâmica.

No Capítulo 2 apresentamos alguns teoremas auxiliares que foram usados para demonstrar os teoremas e resolver os problemas dos Capítulos posteriores.

Nos demais Capítulos apresentamos os teoremas clássicos, e claro, os exercícios ao final de cada um deles, que por sinal, foram colocados de forma gradativa considerando o nível de dificuldade. Tanto as demonstrações como as soluções dos exercícios foram conduzidas de forma muito minuciosa e detalhada.

Por fim, o trabalho pôde mostrar o poder que esses teoremas clássicos têm, e o quanto é relevante conhecê-los. Além de contribuir para alunos curiosos, pesquisadores, etc., ainda pode ser de grande valia para o professor de Matemática, pois o trabalho foi organizado em um modelo conciso e prático, de modo que cada um dos capítulos 3, 4, 5 ou 6 poderá ser usado para ministrar aulas até mesmo sem a necessidade de fazer nenhuma adaptação.

# Referências Bibliográficas

- [1] ANTON, H.; BIVENS, I. ; DAVIS, STEPHEN. *Cálculo*. Vol. 1. 10ª ed. Tradução de Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2014.
- [2] BEER, F. P.; JOHNSTON JR. E. R.; EISENBERG, E.R. *Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática*. 7º ed. Editora Mc Graw Hill, 2006. Disponível em: <<http://pt.slideshare.net/andeersoncarv/mecnica-vetorial-para-engenheiros-esttica-7-edio-beer>>. Acesso em: 10 nov. 2015.
- [3] COXETER, H. S. M. ; GREITZER, S. L. *Geometry Revisited*. Toronto e New York: New Mathematical Library, 1967.
- [4] \_\_\_\_\_. *Tales de Mileto*. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Tales\\_de\\_Mileto](https://pt.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Mileto)>. Acesso em: 28 jan. 2016.
- [5] \_\_\_\_\_. *Pitágoras*. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Pitágoras>>. Acesso em: 28 jan. 2016.
- [6] \_\_\_\_\_. *Euclides*. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides>>. Acesso em: 28 jan. 2016.
- [7] \_\_\_\_\_. *Menelau de Alexandria*. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Menelau\\_de\\_Alexandria](https://pt.wikipedia.org/wiki/Menelau_de_Alexandria)>. Acesso em: 29 jan. 2016.
- [8] \_\_\_\_\_. *Giovanni Ceva*. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Giovanni\\_Ceva](https://en.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Ceva)>. Acesso em: 29 jan. 2016.
- [9] \_\_\_\_\_. *Matthew Stewart (mathematician)*. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Matthew\\_Stewart\\_\(mathematician\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Matthew_Stewart_(mathematician))>. Acesso em: 29 jan. 2016.
- [10] \_\_\_\_\_. *Pappus of Alexandria*. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus\\_of\\_Alexandria](https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus_of_Alexandria)>. Acesso em: 30 jan. 2016.
- [11] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol. 9: Geometria Plana. 7ª ed. São Paulo: Atual, 1997.

- [12] FREITAS, Vinícius Paulo. *Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Sintética e Aplicações*. 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus. 2013. Disponível em: <file:///E:/DISSERTAÇÃO/Arquivos/Arquivos%20de%20pesquisa%20do%20TCC/Exemplos%20de%20TCC/2011\_00097\_VINICIUS\_PAULO\_DE\_FREITAS.pdf>. Acesso em: 21 set. 2015.
- [13] MOL, Rogério S. *Introdução à História da Matemática*. Disponível em:<[http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao\\_a\\_historia\\_da\\_matematica.pdf](http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf)>. Acesso em: 03 out. 2015.
- [14] MORGADO, A.C., WAGNER, E., JORGE, M. *Geometria II*. Rio de Janeiro: FC & Z Livros, 2002.
- [15] OLIVEIRA, M. R.; PINHEIRO, M. R. R. *Coleção Elementos da Matemática*. Vol. 3: Geometria Plana. 3ª ed. Belém: VestSeller, 2010.
- [16] POSAMENTIER, A. S. ; SALKING, C. T. *Challenging problems in Geometry*. New York: Dover Publications, INC, 1970, 1978.

# Apêndice A

## Apêndice 1

Segue uma demonstração do Teorema 6.1.

*Demonstração.* Para demonstrar este teorema, mostraremos antes, que as coordenadas do Centro de Massa de um fio de comprimento  $L$  contínuo uniforme no espaço são dadas por

$$\begin{aligned}X_{CM} &= \frac{\int x dL}{L} \\Y_{CM} &= \frac{\int y dL}{L} \\Z_{CM} &= \frac{\int z dL}{L}\end{aligned}$$

Para isto vamos usar a Definição 6.1. Porém, como o corpo é contínuo uniforme, vamos dividir o corpo em "pedacinhos" infinitesimais, e então calcular esta soma através de uma integral:

$$X_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{M} \rightarrow X_{CM} = \frac{\int x dm}{M} \quad (\text{A.1})$$

$$Y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{M} \rightarrow Y_{CM} = \frac{\int y dm}{M}$$

$$Z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{M} \rightarrow Z_{CM} = \frac{\int z dm}{M}$$

Por definição, a densidade linear de um corpo é dada por  $\lambda = \frac{m}{L}$ . E a densidade de uma massa infinitesimal contida num comprimento infinitesimal de um corpo é dada por  $\lambda = \frac{dm}{dL}$ , logo  $dm = \lambda dL$ . Como estamos considerando que o corpo é uniforme, temos que a densidade linear dessa porção infinitesimal é igual a densidade do sistema, portanto  $dm = \frac{M}{L} dL$ . Segue

da equação (A.1) que

$$X_{CM} = \frac{\int x \frac{M}{L} dL}{M}$$

$$X_{CM} = \frac{\int x dL}{L} \quad (\text{A.2})$$

Analogamente

$$Y_{CM} = \frac{\int y dL}{L} \quad \text{e} \quad Z_{CM} = \frac{\int z dL}{L}$$

Agora sim, vamos demonstrar o Teorema 6.1. Para isso, considere a figura:

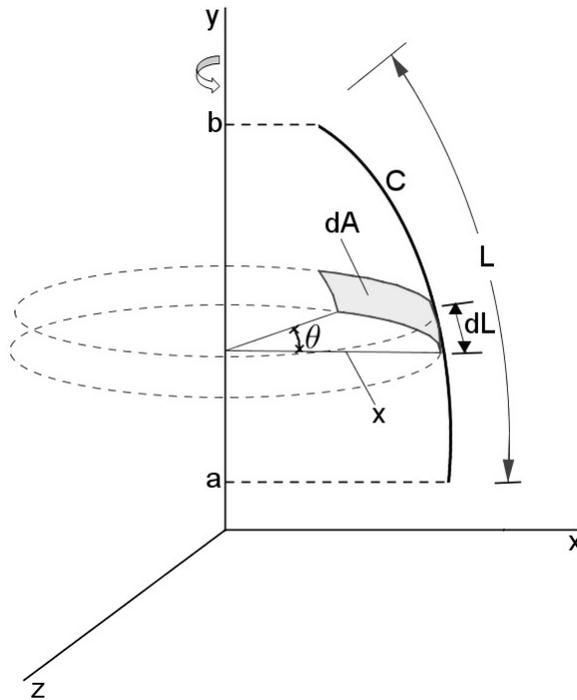


Figura A.1: A curva  $C$  é rotacionada em torno do eixo  $y$ .

Desta figura, temos que a área elementar  $dA$ , é dada por

$$dA = \theta x dL$$

$$A = \theta \int_a^b x dL \quad (\text{A.3})$$

Da igualdade (A.2), temos que

$$X_{CM} = \frac{\int_a^b x dL}{L}$$

$$X_{CM} L = \int_a^b x dL$$

Logo, da igualdade (A.3), temos

$$A = \theta X_{CM} L, \text{ onde } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

□

**Nota:** No Capítulo 6 usamos esta fórmula para o caso particular em que  $\theta = 2\pi$  e fizemos  $X_{CM} = d$ .

# Apêndice B

## Apêndice 2

Segue uma demonstração do Teorema 6.2.

*Demonstração.* Analogamente ao que foi demonstrado no Apêndice 1, pode-se mostrar que as coordenadas do Centro de Massa de uma superfície de área  $A$  contínua uniforme no espaço são dadas por

$$X_{CM} = \frac{\int x dA}{A} \quad (\text{B.1})$$

$$Y_{CM} = \frac{\int y dA}{A}$$

$$Z_{CM} = \frac{\int z dA}{A}$$

Considere agora, a figura:

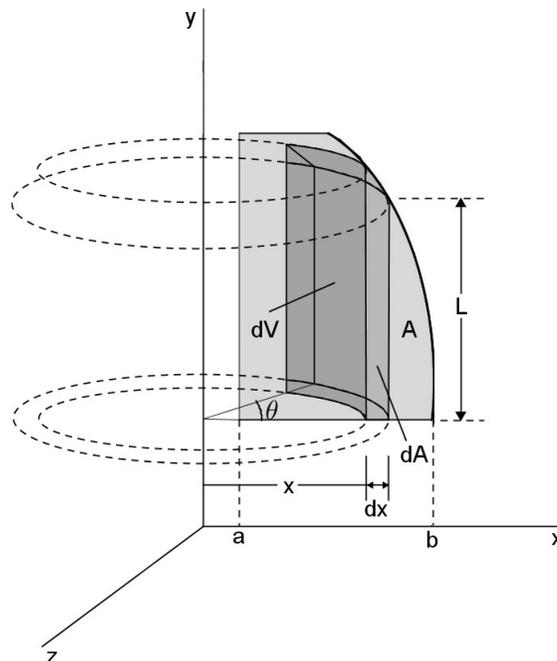


Figura B.1: Uma superfície é rotacionada em torno do eixo  $y$ .

Desta figura, temos que o volume elementar  $dV$ , é dado por

$$dV = dA dx$$

$$dV = \theta x L dx$$

$$dV = (L dx) \theta x$$

$$V = \theta \int_a^b L x dx \quad (\text{B.2})$$

Mas, da igualdade (B.1), temos

$$X_{CM} = \frac{\int_a^b x dA}{A}$$

$$X_{CM} A = \int_a^b x dA$$

Logo, da igualdade (B.2), temos

$$V = \theta X_{CM} A, \text{ onde } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

□

**Nota:** No Capítulo 6 usamos esta fórmula para o caso particular em que  $\theta = 2\pi$  e  $X_{CM} = d$ .