UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Raimundo Nonato Ribeiro Campos

Uma proposta de ensino de matemática na Educação de Jovens e Adultos utilizando três paradoxos

Juazeiro, BA
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Raimundo Nonato Ribeiro Campos

Uma proposta de ensino de matemática na Educação de Jovens e Adultos utilizando três paradoxos

Artigo apresentado à Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Ms. Nancy Lima Costa.

Juazeiro, BA
2016

	Campos, Raimundo Nonato Ribeiro.
C198u	Uma proposta de ensino de matemática na educação de jovens e adultos utilizando três paradoxos/ Raimundo Nonato Ribeiro Campos. -- Juazeiro, 2016.
	43 f. : il. ; 29 cm
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, campus Juazeiro-BA, 2016.
	Orientadora: Profa. MSc. Nancy Lima Costa.
	1. Matemática - Ensino. 2. Educação de Jovens e Adultos.I. Título. II. Costa, Nancy Lima. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.
CDD 510	

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT/UNIVASF

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS UTILIZANDO TRÊS PARADOXOS

Por:

RAIMUNDO NONATO RIBEIRO CAMPOS

Dissertação aprovada em 29 de agosto de 2016.

Nancy Lima Costa
Profa. Msc. Nancy Lima Costa
Orientadora - PROFMAT/UNIVASF

Lucília Batista Dantas Pereira
Profa. Dra. Lucilia Batista Dantas Pereira
Examinadora Interna - PROFMAT/UNIVASF

Iracema Campos Cusati
Profa. Dra. Iracema Campos Cusati
Examinadora Externa – UPE

Juazeiro
2016

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela oportunidade e as graças alcançadas.

Aos meus pais, pelo incentivo e por tudo que fizeram e ainda fazem por mim.

À Univasf e à SBM pela oportunidade concedida para a realização do curso.

À professora Nancy Lima Costa pela valiosa orientação.

À professora Lucília Batista pelo apoio na orientação.

Aos professores Lino Marcos da Silva, Felipe Wergete, Beto Rober Baptista Saavedra, do curso PROFMAT.

Aos colegas de turma, pelas boas lembranças, o auxílio e amizade.

RESUMO

Este trabalho visa levantar a discussão sobre alguns mitos presentes no ensino de matemática que, por vezes, são vistos como fundamentais no processo de aprendizagem. Propomos uma desmitificação através do uso de paradoxos matemáticos cujo o objetivo é levar o aluno á construção do raciocínio próprio, a formulação de hipóteses e conjecturas. Na aplicação da proposta didática, realizada em uma turma de Educação de Jovens e Adultos (EJA) de uma escola estadual do município de São Raimundo Nonato-PI, priorizamos a resolução de três paradoxos matemáticos. Após a aplicação notamos como as atividades envolvendo paradoxos e sobretudo a mudança na forma de repassar conteúdos, podem indicar um novo caminho ao educador na difícil arte de ensinar matemática.

Palavras- Chave: Mitos; Paradoxos; Matemática.

ABSTRACT

This work aims to raise discussion about some myths present in the teaching of mathematics that sometimes are seen as essential in the learning process. We propose a demystification through the use of mathematical paradoxes whose goal is to bring the student to the construction of own reasoning, the formulation of hypotheses and conjectures. In the application of didactic proposal, made in a class of Youth and Adult Education (EJA) of a state school in São Raimundo Nonato, PI, we prioritize the resolution of three mathematical paradoxes. After the application we note how the activities involving paradoxes and above all the change in the way to pass content may indicate a new path to the educator in the difficult art of teaching mathematics.

Keywords: Miths; Paradoxe ; Mathematics.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Em nosso trabalho diário com a matemática, nós professores sempre estamos à procura de novas formas e alternativas de ensino. Ciente desta preocupação, o objetivo geral com este trabalho é o de proporcionar ao professor que atua na educação básica, novos meios e técnicas de ensino diferentes da tradicional aula expositiva que, além de cansativa e extenuante, nem sempre produz os resultados esperados.

A proposta não é abolir este tipo de aula, necessária para o aprendizado, sem falar nos bons professores que dominam os conteúdos matemáticos e conseguem mostrar todo seu talento em uma aula onde ele se torna o personagem principal. A ideia é poder mesclar outras técnicas em que a participação do aluno se torne mais ativa. Segundo Sadovsky (2007), existe uma tendência atual de adequar a matemática aos interesses do aluno. Baseado nessa tendência, os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam que o aluno deve ver a Matemática [...] como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.(BRASIL, 1997, p.15).

Dessa forma, se faz necessário a utilização de materiais didáticos alternativos que auxiliem o professor a despertar e atrair o interesse do estudante para o que está ensinando. A tradicional aula expositiva não faz mais sentido sem a providencial participação do aluno.

No início de 2014, tive acesso a uma publicação nº 37 da Revista Cálculo, em que constava um artigo muito interessante e que me impactou quando percebi a indignação do autor, um professor de matemática americano, que lamentava o atual método de ensino nas escolas de seu país.

Identifiquei-me com as suas preocupações e logo percebi que eram as mesmas que eu tinha ao lidar com meus alunos. Paul Lockhart, autor do artigo e professor na educação básica, assim como Souza e Roseira, Silva e outros autores, mostram que podemos mudar nosso método de ensinar vendo a matemática de outra forma e inserindo o aluno no processo.

Aqui sugerimos inserir os paradoxos na sala de aula e buscamos também quebrar os paradigmas ou mitos como por exemplo, o mito da receita pronta e da resolução de problemas, que perduram há algum tempo no ensino da matemática, e consequentemente abrir novos horizontes com a discussão dos conceitos.

Apenas entendemos que o momento atual requer uma nova visão sobre a prática do professor adotada nos livros didáticos e pelo currículo escolar.

Citando Lockhart (2009) a atual maneira de ensinar matemática precisa ser modificada, pois não está mais surtindo efeito

> Todos dizem que algo está errado. Os políticos dizem, "nós precisamos de padrões maiores". As escolas dizem, " nós precisamos de mais dinheiro e equipamento". Educadores dizem uma coisa, e professores dizem outra. Estão todos errados. As únicas pessoas que entendem o que está acontecendo são aquelas mais frequentemente culpadas e menos frequentemente ouvidas: os estudantes. Eles dizem "a aula de matemática é estúpida e entediante", e eles estão certos.
>
> (LOCKHART, 2009, p.05)

Neste trabalho optamos por desenvolver no aluno o senso investigativo recorrendo para isso aos paradoxos matemáticos. Escolhemos para nossa aplicação didática em sala de aula três paradoxos distintos que pudessem causar impacto no aluno, despertando sua capacidade investigativa e ao mesmo tempo mostrar que a matemática pode tornar-se ambígua e contraditória se não observada com a devida atenção.

Organizamos o artigo em quatro seções; na primeira seção discutimos sobre a função da modalidade de Educação de Jovens e Adultos no Brasil, modalidade escolhida como campo para esta pesquisa; na segunda seção apresentamos os nove mitos da matemática atual sob o ponto de vista de Lockhart e outros autores; na terceira seção apresentamos a introdução dos paradoxos nas aulas de matemática, metodologia adotada neste trabalho e por fim, na última seção apresentamos a proposta didática e os resultados obtidos.

1.1 Um breve panorama da Educação de Jovens e Adultos no Brasil

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) foi criada em 2000 pelo Conselho Nacional de Educação que estabeleceu, no Parecer nº 11 das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos. Assim, as funções e as bases legais da EJA estão fundamentadas na Leis de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e nas Diretrizes Curriculares Nacionais. O antigo ensino supletivo passou a se chamar Educação de Jovens e Adultos e ganhou um sentido mais amplo: preparar e inserir ou reinserir o aluno no mercado de trabalho.

Um fator importante com a implementação da EJA foi a redução da idade mínima permitida pela LDB nessa modalidade de ensino para 14 anos completos, isso ocasionou um estímulo para os alunos do ensino fundamental e médio, que abandonaram temporariamente a escola para matricular-se em turmas de EJA. O que também acontece com os alunos que possuem uma sucessão de repetências em seu histórico escolar, com o intuito de antecipar sua certificação. Segundo Oliveira (2001, p. 15-16), o aluno do EJA tem características próprias

> o adulto — para a educação de jovens e adultos — [...] é geralmente o migrante [...], filho de trabalhadores rurais não-qualificados e com baixo nível de instrução escolar [...],ele próprio com uma passagem curta e não-sistemática pela escola e trabalhando em ocupações urbanas não-qualificadas, [...] que busca a escola tardiamente para alfabetizar-se ou cursar alguma série do ensino supletivo. E o jovem, [...] não é aquele comum a história de escolaridade regular, [...] não é também o adolescente no sentido natural de pertinência a uma etapa biopsicológica da vida. [...] ele é também um excluído da escola, porém geralmente incorporado aos cursos supletivos em fases mais adiantadas de escolaridade.
>
> .

Nesse contexto, Oliveira (2001) destaca que a principal proposta pedagógica para o público da modalidade EJA é favorecer que os alunos sejam capazes de estabelecer relação entre o conhecimento que ele já possui e o novo conhecimento, pois só assim os alunos podem dar significado ao que estão aprendendo. Afinal muitos dos assuntos já foram vistos não só em sala de aula, como em seu dia-a-dia, mas os alunos não conseguem organizá-los em sua mente.

Em consonância com as ideias de Oliveira, Queiroz e Lins (2011) afirmam que a função da EJA é dar àqueles que tiveram sua escolaridade interrompida, a oportunidade de voltar ao sistema educacional, possibilitando aos indivíduos novas inserções no mundo do trabalho, na vida social. Em contrapartida, Haddad (*apud* Fonseca 2002, p.13) afirma que falar sobre Educação de Jovens e Adultos no Brasil é falar sobre algo pouco conhecido. Além do mais, quando conhecido, sabe-se mais sobre suas mazelas do que sobre suas virtudes.

2. NOVE MITOS DA MATEMÁTICA

Nesta seção com base no autores Freire (1996), Chartlot (2005), Skovsmose (2007), Gomes (2007), Silva (2011) dentre outros, serão discutidos nove mitos em relação à matemática que na visão de Lockart (2009) acabam travando o aprendizado desta arte milenar.

2.1 O mito da matemática como ciência

Na visão de Lockhart (2009, p.8) "Matemática não é ciência. É pura arte." O cientista utiliza métodos matemáticos, mas isso não significa que ela seja uma ciência, mas uma arte, apesar de não ser vista como tal. Como o artista, o matemático busca a formação de padrões para se expressar, visando simplificar. A matemática, trata-se de uma invenção humana, na imaginação, sem nenhuma realidade para atrapalhar, as coisas devem ser da forma como imaginamos, como queremos que elas sejam. As condições pré-estabelecidas ou definidas a priori devem ser criadas pela mente.

Assim, deve ser avaliado o trabalho individual, aberto às críticas. E isto não está sendo realizado nas escolas. O motivo? Segundo Lockart (2009), não há nenhuma arte matemática sendo feita! Os alunos não estão *fazendo* matemática, apenas reproduzindo o que lhes pedem, ou seja, estão sendo adestrados.

O entendimento da didática como possível solução de conflitos na relação professor-aluno, é centrado no conceito de que "ao estudarmos os passos didáticos, é importante assinar que a estruturação da aula é um processo que implica criatividade e flexibilidade do professor" (LIBÂNEO, 1994, p.179)

É de vital importância a construção do conhecimento matemático pelo aluno que dessa forma consegue aprender por si mesmo. Fazendo experimentações, elaborando conjecturas, formulando hipóteses e assim, em um processo de erro e acerto, consegue chegar a uma solução a partir de suas próprias conclusões.

2.2 O mito da receita pronta

A matemática como disciplina obrigatória no currículo foi instituída a partir de 1998 com a criação dos PCN, estando condicionada, na maioria das vezes, apenas a memorização de fórmulas e regras privando o aluno do poder da descoberta. Os problemas já vêm prontos. Em geral, a pergunta é feita e respondida ao mesmo tempo. Para o aluno resta apenas utilizar a fórmula já pré- estabelecida.

De acordo com Lockhart (2009), ao retirar a chance do aluno de descobrir de onde surgiu a fórmula, ele não se compromete com a matéria, não consegue internalizar a essência da questão. Ele precisa se envolver no processo de descobrimento, propor problemas, fazer conjecturas, elaborar contra-exemplos, errar, se frustrar e chegar às suas próprias conclusões.

Skovsmose (2007), afirma que numa visão equivocada de educação, cabe ao professor *despejar no aluno* o conhecimento que será aprendido por meio de uma longa sequência de exercícios, característica do ensino tradicional de matemática. De acordo com Gomes (2007), para inverter esta situação é preciso "permitir ao aluno relacionar-se com um problema ao qual atribui sentido e significado e que o desafia a ir além de seus próprios pensamentos e conhecimentos".

Nesse contexto, a utilização dos paradoxos em sala de aula como instrumento motivador ganha destaque, uma vez que a resolução dos paradoxos está longe da mera aplicação de fórmulas ou algoritmos.

2.3 O mito da utilidade

O ambiente escolar ainda é visto, sobretudo pelas classes populares, como um meio para superar as dificuldades, Nesse sentido Charlot (2005) diz que "para ter uma vida normal, o único jeito é ser bem-sucedido na escola – e as famílias sabem disso".

O bom aproveitamento escolar permitiria uma ascensão, que embora não tão garantida como outrora, ainda acalenta o sonho de muitas pessoas. Em particular, o domínio da matemática ainda é visto como um degrau para o sucesso profissional.

Baseado nesta concepção da importância da escola, Silva (2011, p.117-140) defende ainda que "é preciso tornar o aluno consciente do que seja a educação, de quais as possibilidades para o seu futuro, não apenas sob a ótica de empregabilidade, mas também de cultura e de tomada de consciência das ideologias hegemônicas".

Nesse contexto a matemática acaba ganhando importância como algo que possibilitaria o ingresso desses alunos ao tão concorrido mercado de trabalho. A essência deste mito reside na utilidade da matemática como ferramenta de inserção dos jovens na sociedade trabalhista.

Contrário a este mito, acrescenta Lockhart (2009) que a cultura atual pensa que sabe o que é matemática e acredita, de forma equivocada, que a matemática é, ou deveria ser, antes de qualquer coisa, útil para sociedade de alguma forma. Afirmam os defensores da utilidade matemática, segundo o autor, que a matemática é ferramenta necessária de cientistas e engenheiros, o que não deixa de ser verdadeiro. Segundo este mito, a matemática é “importante” e todos concordam. Mas não veem que, como uma arte, a matemática deve proporcionar, antes de tudo, prazer e não utilidade como prioridade.

Esquecem que a matemática é uma invenção humana e que apesar de no início ter sido criada buscando resolver problemas que inquietavam a humanidade, ao longo de sua história ela se desenvolveu por meio de situações que não priorizavam a sua utilidade, mas sim o seu caráter estético, como por exemplo, na cultura grega, base de nossa atual civilização, defende o autor.

Em busca da beleza, harmonia, simetria e principalmente simplicidade, os matemáticos do passado e de hoje compõem suas ideias e teoremas. Eventualmente algumas verdades encontram utilidade no cotidiano, mas isso é apenas um efeito colateral que pouco contribuiu para sua criação.

Apesar de resultar em aplicações práticas, ela não deve ser reduzida somente a isso.
O artista tem pretensões mais elevadas em mente ao fazer uma obra do que a utilidade que dará para ela. Afinal, quantas pessoas realmente usam esta “matemática prática” que elas veem na escola?
Mesmo um engenheiro, por exemplo, utiliza bem pouco a matemática aprendida nas escolas, em resumo, o método atual de treinamento não está funcionando. Estamos mostrando aos nossos alunos apenas a árvore, mas esquecemos de mostrar qual a dimensão da floresta ela faz parte. Este fato é um dos responsáveis pelas constantes indagações feitas por eles, como por exemplo, pra que serve isto que estão querendo que eu aprenda? É claro que assim eles não conseguirão visualizar o todo.

Isto não significa que devemos fazer matemática só pela arte. Mas, as ideias que surgem do processo criativo são muito mais importantes do que o resultado em si. Lockhart (2009) defende que fazer matemática é mais importante do que saber matemática. No processo de construção há espaço para criatividade, erros e acertos, arte e engenharia, altruísmo, enfim todas as facetas da experiência humana.

Como o professor poderá guiar o aluno em criar matemática se o mesmo nunca criou, nunca desenvolveu intuição suficiente que só vêm da prática? Muitos irão argumentar que os alunos precisam usar matemática e não criar.

Sinceramente, quantos de nós hoje usamos matemática? Virtualmente ninguém, ou seja, não aprendemos nada do que fomos ensinado. O argumento que usamos matemática quando fazemos contas é vazio, afinal como Lockhart (2009) sugere, fazer contas com as quatro operações está tão longe da arte matemática quanto pintar números está longe da arte da pintura. Fernandes (2009) tem as mesmas convicções ao afirmar que,

> O problema é que, a partir de uma leitura equivocada, há um falso entendimento de que todo e qualquer conhecimento matemático deve ser trabalhado com base no cotidiano do aluno. Percebe-se que este tipo de concepção dá extrema ênfase a Matemática aplicada, abandonando com isso, a Matemática pura.
> (FERNANDES, 2009, p.08)

Como vimos acima a discussão sobre a utilidade que damos atualmente à matemática deve ser repensada. Ela não pode ser vista prioritariamente como ferramenta de engenheiros e cientistas somente. Pelo seu caráter estético ela está presente em muitas outras áreas do conhecimento humano.

2.4 O mito da matemática verdadeira

Segundo Lockhart (2009), este mito vê a atual forma de fazer matemática como "verdadeira". Afinal, a verdadeira matemática não vem em lata, como um produto já pronto. Ela precisa ser trabalhada, questionada a partir de problemas propostos e assim criando novos problemas e despertando a curiosidade no aluno.

Se a verdadeira matemática fosse exposta de maneira natural com todos os seus desafios, paradoxos e as surpresas que proporciona, a mudança na atitude dos alunos seria dramática. Os estudantes teriam contato com os grandes problemas que inquietaram a humanidade desde os primórdios. As questões insolúveis que ainda proporcionam a curiosidade de muitos matemáticos que se aventuram a encontrar respostas impossíveis, como a quadratura do círculo, por exemplo.

Mas, infelizmente, o que estamos vendo é o contrário. Um sistema educacional transformando a mais bela das artes numa asséptica disciplina onde o aluno é treinado, e não ensinado, a memorizar fórmulas e outros procedimentos. Esta sem dúvida, não é a verdadeira matemática que queremos, enfatiza o autor.

Provavelmente, isso ocorra pois segundo Polya (1995, p.8), a matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso. Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender e detestar matemática. Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la.

Estamos perdendo gente talentosa que não se interessa por um assunto sem sentido e estéril. Gente que é inteligente demais para perder tempo com uma matemática estéril. Hoje são poucos que conhecem e conseguem expor a matemática de maneira natural com toda a sua beleza.

2.5 O mito da contextualização

Souza e Roseira (2010, p.7) defendem que a matemática é um campo de conhecimento formal. "Nesta visão é preciso levar em consideração ao tentar contextualizar que ela estuda objetos de natureza abstrata e, portanto, não tangíveis."

Já Lockhart (2009), afirma que o atual currículo deve ser demolido, não reformado. Em sua visão as tentativas sem sucesso de tornar a matemática "interessante" e relevante na vida das crianças são desnecessárias. Arroyo (2003) corrobora com as ideias de Lockart e afirma que o currículo deve ser construído a partir de fatos do dia-a-dia e que surgem das dificuldades, expectativas e desejos relacionados à aquisição de conhecimento dos envolvidos no processo educacional.

Ainda segundo Lockhart (2009), a matemática já é mais interessante do que podemos suportar com todos os seus desafios. E sua glória é sua completa irrelevância na nossa vida cotidiana. Toda tentativa de trazê-la para realidade são forçadas e artificiais, em outras palavras, contextualização é importante, mas não pode ser usada o tempo todo. Algumas ideias sem fundamento acabam prejudicando o ensino da disciplina. Ponte et al.(1997), segue na mesma linha de raciocínio.

> A matemática torna-se um sistema formal que partindo dos axiomas e dos termos iniciais, se desenvolve numa cadeia ordenada de fórmulas, mediadas por teoremas, sem nunca sair de si mesma. Torna-se nem mais nem menos, do que ‘um jogo lingüístico’ fundado exclusivamente nas próprias regras do jogo,[...] (PONTE, et al.1997, p.14).

Ponte et al.(1997) propõem ainda que as novas estratégias de ensino obtêm mais sucesso com os conteúdos mais básicos. Para ele, a solução está no equilíbrio. "Já erramos por tornar o ensino muito formal, mas agora se contextualiza tanto que se perde a perspectiva do que está sendo ensinado." (Ponte et al.1997, p.12). Neste sentido, Souza e Roseira (2010) afirmam que a artificialidade nas contextualizações tem se tornado rotina no processo de ensino,

> No seio do discurso pedagógico parece já haver um consenso geral em relação à indispensável necessidade de que o processo de ensino aprendizagem da Matemática se efetive sempre de forma contextualizada, de tal maneira que tem sido comum a busca dos professores por aplicações práticas para os conteúdos que está lecionando ou até em “forçar a barra” no sentido de trazer para o cotidiano dos alunos conceitos matemáticos que só mesmo em nível de pensamento abstrato é possível explicar. (Souza e Roseira, 2010, p.02)

Souza e Roseira (2010) esclarecem que o que está em jogo nesta discussão já não é mais o fato das atividades de ensino-aprendizagem da Matemática estarem ou não contextualizadas, mas sim ter-se a clareza de qual tipo de contexto estamos nos referindo.

Fernandes (2009), também adverte para o exagero nas contextualizações,

> Eles se vêem pressionados por um novo modismo: a contextualização. Ao se deparar com essa nova exigência da moda, o professor se desdobra na busca de aplicações para que conteúdos que não podem ser assim tratados. Forma-se, então, o pano de fundo propício ao surgimento de inacreditáveis tentativas didático-pedagógicas de construir aplicações para o que não pode ser assim aplicado. (FERNANDES , 2009, p.06)

Já para os PCN (1997), contextualizar

> é entender que o conhecimento para ser pleno deve ser mobilizado em situações diferentes das que lhe deram origem. Para que possa ser transferível a novas situações e então generalizadas. Devem ser descontextualizados para serem novamente contextualizados em outras situações
>
> (BRASIL, 1997, p. p.36).

Assim, é preciso ter cuidado na hora de contextualizar, pois a contextualização forçada não transmite segurança, é ineficaz e pode se tornar alvo de deboche pelos alunos. Pode ter efeito contrário fazendo da matemática algo artificial, sem sentido.

2.6 O mito da resolução de problemas

O principal problema da matemática na escola é que não há problemas. Não estamos falando dos insípidos exercícios do livro didático, estes já vem com a receita pronta. Segundo Lockhart (2009), um bom problema é algo que você não sabe resolver, ou seja, um quebra-cabeça, um desafio, uma oportunidade. Ensinar o aluno a dominar certas técnicas é necessário, mas nunca como um fim em si mesmo. As técnicas devem ser desenvolvidas conforme o contexto, onde o cenário são os grandes problemas da humanidade, sua história.

Nesse sentido, Obst e Miguel (2013) afirmam que um problema exige criatividade e imaginação para o seu equacionamento, ao passo que, no exercício, o sujeito dispõe de um mecanismo, algoritmo ou fórmula que o leva de imediato à solução.

Problemas devem se transformar no centro de estudos do aluno de matemática. Por mais doloroso e frustrante, estudantes e professores deveriam se engajar na resolução de problemas. Ter ideias, descobrir padrões, elaborar conjecturas, argumentos, criar exemplos e contra-exemplos, criticar o trabalho uns dos outros. Técnicas e algoritmos devem surgir naturalmente do processo, como aconteceu na história, não isoladamente, mas como resultado de um problema de fundo. Alguns autores defendem esta ideia como por exemplo, Polya (1995) e os PCN

> Na aprendizagem da matemática, o problema adquire um sentido muito preciso. Não se trata de situações que permitam 'aplicar' o que se sabe, mas sim daquelas que possibilitam produzir novos conhecimentos a partir dos conhecimentos que já se tem em interação com novos desafios possibilitando ampliação de repertórios de estratégias no que se refere à resolução de operações, notações, formas de representação e de comunicação mostrando-se como uma necessidade que justifique a busca de novas informações (BRASIL, 1998, p. 212).

Resolver um problema é "encontrar um caminho onde nenhum é conhecido de imediato, encontrar o modo de sair de uma dificuldade, tornear um obstáculo, para atingir um final desejado que não é imediatamente atingível, por meios apropriados." (POLYA *apud* ERNEST, 1995).

Encarar problemas envolventes, que surjam naturalmente, leva tempo para encontrar soluções. São muitas as tentativas e erros. Hoje os professores não tem este tipo de relacionamento com os alunos, pois exige tempo, contemplação lenta, vulnerabilidade, responsabilidade e muito trabalho.

Ainda segundo Obst e Miguel (2013), existe uma rejeição por parte dos alunos e até de educadores na resolução e elaboração de problemas criativos. Muitos alunos, movidos por uma baixa estima, não acreditam que podem encontrar soluções para os problemas propostos.

> Em muitos grupos de estudantes, e até educadores, ao se anunciar o momento da Matemática em sala de aula predomina um mal-estar coletivo seguido de expressões autodepreciativas que minimizam e até desqualificam a capacidade intelectual dos estudantes que se negam a ousar ou arriscar tentativas ou propostas para resolução de situações-problema, o que pode tanto incitar como tolher a imaginação criativa do educador na elaboração de propostas e enunciados mais interessantes e que possibilitem a emancipação do ser humano.
> . (OBST e MIGUEL, 2013, p. 05).

De acordo com Lockhart (2009), a verdade é que nossos alunos nunca tiveram um problema interessante para resolver ou pensar, com o qual se frustrasse e que fizesse surgir neles o desejo de uma técnica ou algoritmo. Jamais ficaram curiosos com uma questão, simplesmente porque ela já foi respondida antes que pudessem sequer elaborar uma pergunta. O autor defende que as pessoas aprendem melhor se o resultado surgir do processo de aprendizagem naturalmente.

2.7 O mito da linguagem matemática

Lockhart (2009) defende que a matemática não é uma linguagem, mas sim uma aventura. Apesar de ter simbologia própria, na matemática isto não é essencial, as ideias sim. Uma ideia original transcende os símbolos com os quais decide representá-la no papel. A constante manipulação sem sentido de símbolos se perpetua na matemática criando a *pseudomatemática*, matando o processo criativo e levando o aluno a achar que a matemática que se trata apenas de reprodução de conteúdos, justifica.

Este mito fundamenta-se na ideia de que a linguagem matemática deve ser resumida ao máximo por meio do excesso de simbologia. Mas, segundo Lockhart (2009), ao invés de auxiliar acaba por confundir o aluno que precisa aprender uma infinidade de símbolos que em muitos casos nem chega a utilizar.

Outro aspecto que precisa ser considerado é que os conceitos, os procedimentos e as atitudes desenvolvidos no decorrer da vida do estudante, que emergem em suas interações sociais e que compõem sua bagagem cultural são geralmente desprezados priorizando uma linguagem pré-estabelecida .

Afirma Danyluk (1998) que a técnica e o significado são necessários à aprendizagem, portanto que a técnica não cause dano ao significado, caso contrário a língua materna e a Matemática serão instrumentos de mecanização.

2.8 O mito da escada

Segundo Lockhart (2009), o que mais impressiona no currículo atual é sua rigidez. Em todo o país todos dizem a mesma coisa, fazem as mesmas coisas, exatamente na mesma ordem. E este currículo maléfico, aceito por todos, é sinônimo de matemática.

Segundo Lockart o mito da escada consiste na ideia de que o currículo deve ser organizado como uma sequência de assuntos, cada um mais avançado ou “superior” que os anteriores. A consequência de tudo isso é que transformaram a matemática em uma corrida onde alguns alunos estão na frente e outros ficam para trás. Uma corrida triste que não leva a lugar nenhum. Lockhart (2009) insiste que a matemática é uma arte e como tal não pode ser comparada a uma corrida.

O currículo atual não leva em consideração a cultura popular ou o conhecimento baseado no senso comum adquirido pelo aluno durante toda a sua vida. Esta história de vida representada por influências fora da escola, não pode ser esquecida. Determinam um comportamento individual, social e cultural específicos. É o que Moreira e Silva (2002, p.96) afirmam "[...] a cultura popular representa não só um contraditório terreno de luta, mas também um importante espaço pedagógico onde são levantadas relevantes questões sobre os elementos que se organizam a base da subjetividade e da experiência do aluno."

O mito da escada se acentua ainda mais quando se adota no currículo a progressão ou aprovação automática onde os alunos são aprovados automaticamente para a série seguinte sem terem sido devidamente avaliados quanto às competências exigidas. Aprovado assim, sem nenhum critério, o aluno é empurrado adiante, sem estar preparado para nada e com certeza, mais tarde, atribuirá a escola a culpa pelo abandono a que foi submetido, sem ter nenhum tipo de orientação. O degrau que ele ocupa na escada não garante as competências necessárias e nem que o estudante esteja preparado suficientemente para subir o próximo degrau.

2.9 O mito das técnicas operatórias

Lockhart (2009) procura esclarecer as falhas que ocorrem no ensino da matemática atual. Ao invés de descobertas e explorações, temos apenas regras e regulamentos. O caminho percorrido pelo professor ao longo do currículo o impede de ver a matemática como um todo orgânico. De acordo com este mito, o professor vê a árvore, utilizando-se das técnicas operatórias aprendidas e repetidas constantemente, mas não consegue enxergar a floresta.

Ainda segundo o autor, os atuais exercícios são vazios. Criados especificamente para a utilização das técnicas aprendidas e tão desligados um do outro que ninguém faz ideia do que surgiu primeiro, se foi a técnica operatória ou a questão. Tudo é apresentado de uma vez, uma sequência de definições a priori, com jargões e nomenclaturas. Problemas sem nenhum outro propósito que visam apenas dar ao professor matéria-prima para provas.

Lockhart (2009) lamenta a quantidade de exercícios redundantes e sem graça, desenhados especificamente para a utilização da técnica operatória em discussão.

Este mito defende que toda simbologia criada ao longo da história da matemática deve ser preservada. Este fato se deve ao caráter conservador da matemática, próprio de sua essência. No entanto, muitos termos criados na antiguidade não têm mais razão de ser. Como exemplo, podemos citar o conceito de secante, que nada mais é que o inverso da função cosseno. Esta nomenclatura é um resquício das tabelas náuticas do século 15 e ainda hoje está conosco. Um acidente histórico que não tem mais valor em uma época em que a navegação é feita por computadores de bordo. Conceitos semelhantes acabam por confundir o aluno ao invés de motivá-lo a se interessar pela matemática.

Complementando esta ideia, D’Ambrosio (1989) fala sobre a importância da participação do aluno no processo de aprendizagem como um ser ativo e interessado

> Os professores em geral mostram a matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido. Ao aluno não é dado em nenhum momento a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada nem mesmo uma solução mais interessante. O aluno assim passa a acreditar que na aula de matemática o seu papel é passivo e desinteressante.
> (D'AMBROSIO, 1989, p.15).

Lockhart (2009) lamenta ainda o descompromisso dos professores em elaborar problemas interessantes e encantadores. Em sua visão ele afirma que é mais fácil verificar se alguém sabe o significado de uma definição inútil do que inspirar alguém a criar algo bonito e atribuir significado ao que criou. É triste ver como palavras como conjectura e contra-exemplo não são usadas.

3. Os paradoxos na Educação Matemática

Citando Edward Kasner e James Newman (1968, p. 189), "talvez o maior de todos os paradoxos é haver paradoxos nas aulas de matemática". O que significa ser bastante comum encontrar paradoxos em outras ciências, mas não em uma disciplina tão rigorosa e exata como a matemática.

Podemos definir o termo paradoxo como algo que é essencialmente contraintuitivo, ou seja, que vai contra nossa intuição. Na definição de Carlos Magno Corrêa Dias (1999), são duas as classes de paradoxos

> Paradoxo é um argumento que produz uma conclusão surpreendente, à qual é contrária à nossa intuição. Os paradoxos podem ser classificados em Paradoxos Verídicos (aqueles que apresentam conclusões verdadeiras) e em Paradoxos Falsídicos (aqueles que apresentam conclusões falsas) (Dias, 1999, p. 53)

Segundo Barker, existe ainda uma terceira classe de paradoxos, chamada de antinomias, que levam a conclusões verdadeiras e falsas ao mesmo tempo

> É quando se está na situação de mostrar, por meio de raciocínio perfeitamente lícito, na aparência que algo deve ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo - paradoxos desta terceira espécie recebem as vezes o nome de antinomias (Barker, 1976, p.111 apud Dorta, 2013).

Em outras palavras, um paradoxo leva a uma situação contraintuitiva e as antinomias por sua vez, indicam uma contradição. Já Quine concorda com a definição de Barker e compara as diferenças existentes entre os três tipos de paradoxos

> Um paradoxo verídico traz uma surpresa, mas a surpresa rapidamente se dissipa à medida em que analisamos a demonstração. Um paradoxo falsídico traz uma surpresa, mas que é vista como um alarme falso quando resolvemos a falácia implícita.Uma antinomia, no entanto, traz uma surpresa que pode ser interpretada por nada menos do que um repúdio de parte de nossas concepções. (Quine, 1976, p. 9 apud Dorta, 2013).

Em nosso trabalho optamos pela primeira classe de paradoxos, os chamados verídicos, ou que apresentam soluções verdadeiras. Julgamos ser mais adequado para uma aula de matemática onde as demonstrações são obrigatórias e acabam por validar as hipóteses.

Um paradoxo matemático tem como objetivo instigar o aluno e provocar nele a curiosidade. Dessa forma, o aluno pode atuar no papel de pesquisador, construindo uma nova relação com o saber numa postura construtiva diferente da atitude passiva que em geral norteia a aprendizagem. Em busca de soluções, o aluno passará por etapas importantes como: coletar os dados, buscar informações, descartar as que não são relevantes, construir modelos, defender hipóteses com os colegas, socializando o conhecimento.

De acordo com Pommer (2013), "tais situações deverão favorecer a autonomia do aluno sobre o saber, que pode se transformar em conhecimento [...] relação que coloca o aluno numa postura construtiva: o autor do próprio conhecimento".

Na mesma vertente, Lockart (2009) defende a ideia de mudança no atual processo de ensino e aprendizagem da matemática quebrando conceitos há muito enraizados e que são considerados como verdadeiros. Entre os conceitos, destaca-se a visão de que a matemática é simplesmente uma disciplina. O ensino desta "disciplina" direcionado apenas aos exames nacionais. A transformação da matemática em uma disciplina asséptica onde o aluno é treinado a memorizar fórmulas e outros procedimentos.

A ausência de situações que despertem o raciocínio como a utilização de paradoxos matemáticos que servem para incentivar o aluno a buscar e descobrir por si próprio alternativas de resoluções.

.

3.1 METODOLOGIA

A metodologia adotada neste trabalho foi a pesquisa qualitativa, na qual segundo Deslauriers (1991, p.58)

> o pesquisador, no caso o professor, é ao mesmo tempo sujeito e objeto da pesquisa. O desenvolvimento da pesquisa é imprevisível. O objetivo da amostra é o de produzir informações aprofundadas e ilustrativas. Seja ela pequena ou grande, o que importa é que ela seja capaz de produzir novas informações.

No trabalho com os paradoxos utilizamos sequências didáticas aplicadas em quatro fases:

1. Análises Prévias
2. Construção e análise a priori das situações didáticas;
3. Experimentação;
4. Análise a posteriori e validação.

Para Minayo (2001, p.14) “a pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados. Centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais.”

O campo de pesquisa foi uma turma do Ensino de Jovens e Adultos_(EJA) de uma escola estadual localizada na sede de São Raimundo Nonato-PI, sede da microrregião formada por dezesseis municípios conhecida como Território *Serra da Capivara*, Campos (2010).

A sala conta com trinta alunos da 5ª etapa da EJA que corresponde aos 8º e 9º ano do ensino regular. Cerca de 90% moram próximo a escola, os demais residem fora do perímetro urbano a cerca de seis quilômetros da sede. O público atendido pela instituição é em sua maioria de classes C e D, proveniente de uma população carente de recursos materiais e de formação básica.

A escolha da turma para aplicação da sequência didática se deu em função das atividades escolhidas. Com temas direcionados aos alunos que estão terminando o ensino fundamental, julgamos que os paradoxos da matemática, poderia ser assimilado sem grandes dificuldade pela turma.

Assim, aplicamos a sequência para que os alunos pudessem assimilar o conhecimento através de uma nova forma de ensinar utilizando os paradoxos. Procurando intervir o mínimo possível, a proposta era fazer com que o aluno construísse seu próprio conhecimento, tirando suas conclusões e mostrando um caminho para a resolução das questões.

A análise prévia foi realizada através da observação da turma durante as aulas de matemática. A segunda fase foi destinada a construção das situações didáticas e a escolha das atividades e questões que seriam desenvolvidas na proposta didática. Na terceira fase, a de experimentação, foram aplicadas as atividades. Por fim, foram feitas as análises a posteriori que consistiu em comparar os resultados obtidos na experimentação com os resultados esperados na fase a priori.

Nesta última análise, os alunos foram orientados a deixar por escrito todo o caminho percorrido na resolução da atividade. Até mesmo os erros ou algo inadequado que o aluno utilizou.

4. PROPOSTA DIDÁTICA

4.1 Análise Preliminar

Nesta fase, antes de aplicar as atividades, por meio de uma análise diagnóstica, observamos o comportamento dos alunos perante a matemática. O embasamento e as habilidades que o aluno trazia consigo e que seria útil na atividade. O fato de já trabalhar com a turma há algum tempo foi relevante. Notamos que os alunos não possuíam as competências necessárias ou conhecimento matemático suficiente para a resolução dos paradoxos.

Os altos índices de reprovação na disciplina demonstravam o total desconhecimento dos conceitos básicos. Assim, tivemos muita dificuldade em fazê-los, ao menos, entender o que desejávamos com a sequência didática.

A escassa exploração dos paradoxos pelos livros didáticos contribui para que o aluno desconheça seu significado. As dificuldades de compreensão e percepção pelos alunos do ensino fundamental de problemas que envolvam paradoxos - nenhum deles sabia o que significa um paradoxo matemático - são algumas das dificuldades encontradas na fase preliminar e que precisaram ser superadas.

4.2 Construção da Atividade

As atividade propostas versam sobre alguns paradoxos matemáticos que tem por objetivo levar o estudante a refletir sobre o problema, criar conjecturas e estratégias para solucioná-los e a formulação de alternativas de resolução para as questões apresentadas ainda que incorretas.

A motivação em trabalhar com os paradoxos veio do fato de serem instigantes e despertar a curiosidade do aluno ao se deparar com um problema a princípio sem solução. Os recursos utilizados na aplicação da sequência foram quadro, pincel, Datashow e material para recorte e montagem das peças. Quanto a duração da atividade, dedicamos seis aulas para a abordagem dos três paradoxos, sendo duas aulas para cada um dos assuntos debatidos.

Segundo os PCN, os paradoxos criam situações de aprendizagem diversas por exigir do aluno a quebra do equilíbrio, daquilo que ele considera lógico, permitindo que o mesmo ingresse em um processo de investigação,

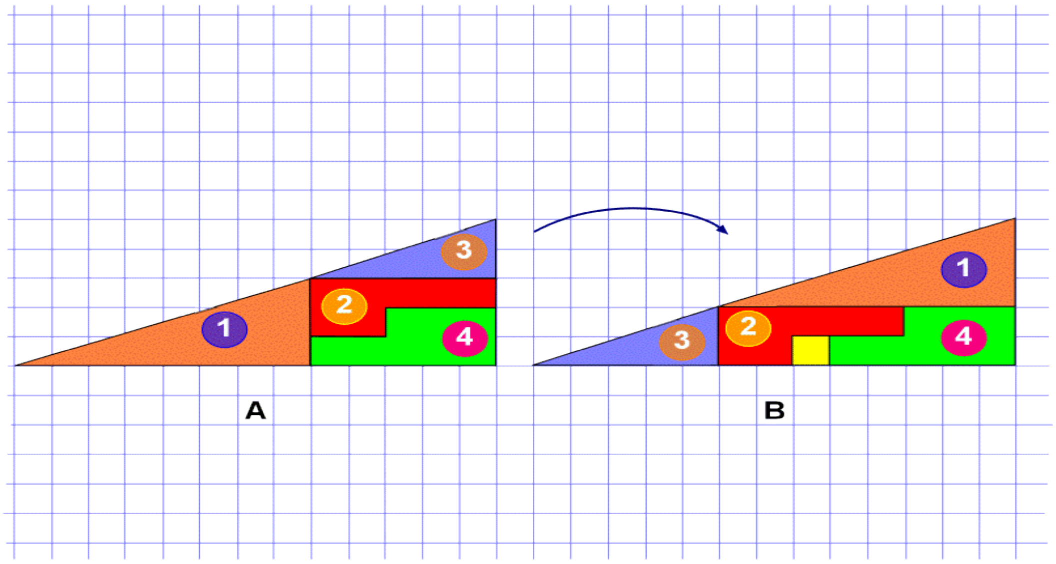
> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos – que admitem diferentes respostas em função de certas condições evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL, 1997, p.42).

Com o intuito inserir o aluno nesse processo de investigação serão abordados o paradoxo do quadradinho perdido, um enigma que foi elaborado em 1953 pelo mágico amador americano Paul Curry; Paradoxo de Mello e da Partilha, os dois últimos foram adaptadas do trabalho de dissertação de mestrado realizado por Dorta (2013).
A seguir descreveremos estes paradoxos.

4.2.1 Paradoxo do quadradinho perdido

Neste atividade, temos dois triângulos retângulos praticamente idênticos veja a Figura 02, formados pelas mesmas peças onde o triângulo A, aparenta ter um pequeno quadrado a mais do que o triângulo B. O aluno precisa descobrir o que aconteceu com o quadradinho amarelo que acabou aparecendo na remontagem da figura,

O paradoxo do quadrado perdido, também conhecido como paradoxo de Curry é uma ilusão óptica.



. **Figura 02**. Triângulos retângulos A e B aparentemente iguais **Fonte:** Ciência Bragança

O objetivo desta atividade é fazer o aluno buscar uma explicação para o que ocorreu, isto só será possível por meio da investigação e da elaboração de conjecturas.

A atividade foi desenvolvida utilizando o desenho das figuras e foi pedido aos alunos que recortassem as peças separadamente e fizessem a remontagem do triângulo B. Foi neste momento que eles perceberam que algo estava acontecendo.

Ao formar o triângulo B eles notaram que sobrou um quadradinho no final. Na busca por uma explicação convincente alguns alunos sugeriram que na remontagem as peças 1 e 3 não formavam uma reta. Apesar de terem razão, os alunos não souberam explicar o motivo do aparecimento do quadradinho.

O que ocorre na verdade é que a suposta hipotenusa nos dois triângulos não se trata de uma reta, (apesar de parecer) e apresentam um pequeno declive, logo os triângulos não são retângulos, mas diferentes entre si.
Para verificar que as hipotenusas dos triângulos não são retilíneas é necessário observar a malha quadriculada. Ampliando a figura, nota-se que no primeiro triângulo a hipotenusa é côncava. Já na remontagem do segundo triângulo a hipotenusa é convexa, o que gera uma pequena diferença suficiente para o surgimento do quadradinho perdido.

4.2.2 “Paradoxo de Mello”

Neste paradoxo o aluno se depara com um terreno maior ABCDEFG dividido em quatro lotes menores (ABG, BCD, EDF e GBDF), três em forma de triângulos e um lote retangular, conforme a Figura 03.

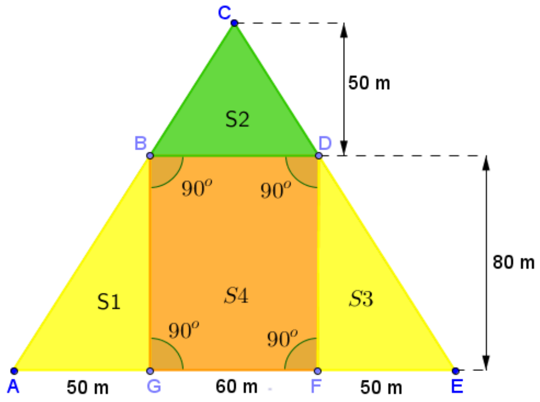


Figura 03: Paradoxo de Mello **Fonte:** Dorta (2013)

Aparentemente não há nada de errado, mas ao calcular a área do terreno maior encontramos 10.400m^2. Daí surge o seguinte questionamento, o que ocorre com a área da soma das partes em que foi dividido o terreno que é de 10.300m^2?

O objetivo desta atividade é permitir que o aluno descubra o que aconteceu com os 100m^2 de diferença de uma área para outra, já que são formadas com as mesmas figuras

A proposta é apresentar um problema onde os alunos pudessem utilizar o conceito de áreas de figuras geométricas, por se tratar de um tema que foi amplamente debatido durante as aulas anteriores. A princípio não é possível notar nada de errado no paradoxo. Somente quando o aluno efetua os cálculos das áreas separadamente é que pode verificar a diferença. Por se tratar de uma tarefa investigativa, optamos inicialmente por deixar o aluno ter uma experiência contemplativa, essencial em se tratando de geometria e poder assim entender o problema.

Estipulamos um tempo de duração para a atividade de três aulas. A primeira aula foi utilizada apenas para apresentação do paradoxo. A segunda aula foi dedicada ao aluno buscar uma solução, conjecturando possíveis alternativas, reflexões, refutações, generalizações e provas. Na última etapa os alunos deveriam mostrar os resultados encontrados e as conclusões que chegaram. Neste momento é feito o confronto dos resultados com a verdadeira solução do paradoxo.

Mello (2001) aponta a essência do paradoxo fazendo uso da matemática elementar para mostrar que algo está errado e nossos sentidos são incapazes de perceber. O autor ainda satiriza mostrando que é possível ganhar 100 m^2 com a utilização do paradoxo

> Segundo nossos conhecimentos geométricos sobre o cálculo da área de um triângulo (base vezes altura dividido por dois) e da área de um retângulo (lado vezes lado), sabemos que as áreas S1, S2, S3 e S4 de cada terreno serão respectivamente iguais a 2.000 m2, 1.500 m2, 2.000 m2 e 4.800 m2 perfazendo 10.300 m2 de área total no terreno. Por outro lado, se quiséssemos calcular a área total do terreno, admitindo sua forma de um triângulo de base AE, medindo 160 m e altura igual a 130 m. pela fórmula da área do triângulo, conclui-se que o terreno tem área total igual a 10.400 m2 (ganhamos 100 m2 em relação ao cálculo anterior!). Como explicar esse paradoxo digno de causar calafrios ao pai da geometria? (MELLO, 2001, Folha de SP).

Como ocorreu no paradoxo anterior, a solução do problema reside no fato de que o terreno maior, apesar de ter formato triangular, na verdade não se trata de um triângulo.
Em outras palavras, os segmentos AC e CE não são retilíneos. Assim não podemos calcular a área do terreno maior ABCDEFG usando a fórmula da área do triângulo.

4.2.3 “Paradoxo da Partilha”

Este paradoxo foi abordado pela primeira vez no livro “O homem que calculava” (TAHAN, 1983). O livro foi escrito em uma linguagem poética e fala sobre as aventuras de um árabe, Beremiz, que ao lado de seu amigo viajam pelo deserto com destino á Bagdá.

Numa destas viagens, Beremiz depara-se com três irmãos discutindo a respeito de uma herança deixada pelo pai e que não conseguem chegar a um acordo na divisão correta entre os três. A herança é formada por 35 camelos que devem ser divididos na proporção de metade para o irmão mais velho, um terço para o do meio, e um nono para o caçula.

Escolhemos o Paradoxo da Partilha por entender que os problemas de divisão de herança são explorados pelos matemáticos desde a antiguidade. O plano elaborado para esta atividade foi orientado no sentido de proporcionar ao aluno o contato com as operações com frações.

O objetivo da atividade é que o aluno perceba que as frações podem enganar se levarmos em conta apenas o valor que elas representam e não atentarmos para o detalhe de que as partes que foram tomadas se somadas devem ser iguais ao todo.

Como no paradoxo anterior, estipulamos um tempo de duração de três aulas para a aplicação da atividade. No problema proposto o aluno terá a oportunidade de trabalhar com as frações próprias e impróprias.

Julgamos que a atividade da partilha é perfeitamente assimilada por alunos que estejam cursando o último ano do ensino fundamental (9º ano). Nesta série eles já tiveram contato com as operações com frações o que facilita a compreensão do paradoxo.

A princípio o aluno sabe que existe algo contra-intuitivo e assim tem a oportunidade de utilizar seus conhecimentos para investigar e buscar uma solução para o paradoxo.

A atividade proporciona o debate de temas que vão além da matemática. A questão da ética deve ser abordada. No paradoxo, a partilha é feita de modo que existe uma sobra que acaba ficando com quem realizou ou solucionou o problema. No entanto, os herdeiros não ofereceram nenhum prêmio a quem realizasse a partilha da herança. Até que ponto seria ético ficar com o que sobrou?

Para solucionar o problema Beremiz entrega o camelo de seu amigo para se juntar aos outros e assim poder fazer a divisão de maneira justa. No final, o algebrista consegue dividir de tal maneira que os irmãos acabam recebendo mais do que mereciam e sobram ainda dois camelos, um pertence ao seu amigo e o outro ele recebe como prêmio por resolver o problema.

A solução do paradoxo só é possível graças à uma falha no testamento que, a princípio, não é detectada pelo aluno. Se somarmos um meio, um terço e mais um nono, não é possível encontrar um número inteiro.

Sabendo disso, Beremiz acrescenta um camelo ao grupo, o irmão mais velho recebe dezoito camelos, o do meio fica com doze camelos e ao mais novo cabem quatro animais, num total de trinta e quatro camelos. Sobrando assim os dois camelos.

4.3 Análise e resultados

O primeiro contato com a atividade instigou os alunos e alguns ficaram surpresos quando entenderam de fato o que estava ocorrendo. Após o primeiro impacto, as perguntas foram sendo feitas e procuramos auxilia-los de maneira a não dar a resposta pronta.

Quando deixamos a critério do aluno a busca da solução, acabamos levando mais tempo do que o esperado para a resolução dos paradoxos. Podemos observar também que a atenção e o interesse em encontrar a resposta aumentou com a liberdade do aluno em solucionar a questão, assim como os questionamentos e caminhos apresentados, que apesar de incorretos, fizeram o aluno pensar e raciocinar por si mesmo.

Nas atividades aplicadas, tivemos a participação de dez alunos que se dispuseram a resolver os paradoxos, o restante da sala não quis se submeter á atividade. Separamos algumas soluções mais relevantes, criativas e que representavam bem o desempenho da turma, inclusive os erros cometidos. Os outros alunos que participaram das atividades tiveram um desempenho semelhantes a estes e apresentaram ou concordaram praticamente com o mesmo raciocínio empregado

A seguir apresentaremos a resolução dada por alguns estudantes para os paradoxos abordados.

No primeiro paradoxo, o do quadradinho perdido, os alunos desenharam a figura e em seguida recortaram as peças. Na etapa da remontagem das peças eles puderam verificar que um quadradinho desapareceu. O que fez com que ficassem intrigados a princípio. No processo de investigação foram levantadas várias hipóteses, mas nenhuma delas válidas.

A remontagem das peças teria que ser perfeita para que a diferença na hipotenusa do novo triângulo fosse notada. Assim, somente após o devido cuidado na realocação das peças é que eles puderam perceber que a hipotenusa não era uma reta, portanto não se tratava de um triângulo.

Resposta apresentada pelo aluno A

O aluno A conseguiu desenhar a figura sem problemas, mantendo as devidas proporções entre as partes. Na remontagem do triângulo ele pode verificar que um quadradinho estava faltando. Apesar de sugerir várias alternativas para o sumiço do quadradinho, a princípio, ele não conseguiu explicar o ocorrido.

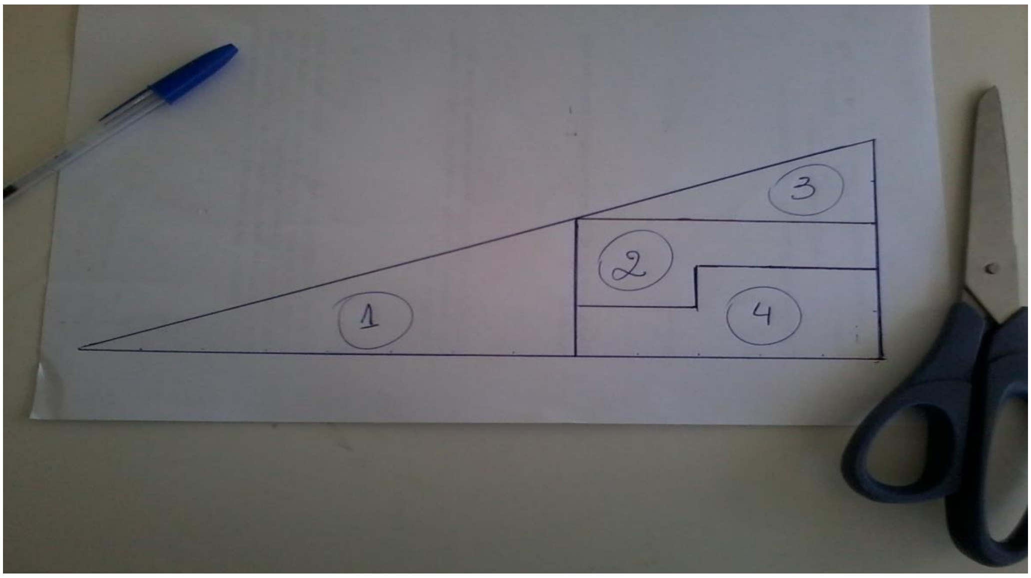


Figura 01 - resolução do Paradoxo do Quadradinho Perdido apresentada pelo aluno A

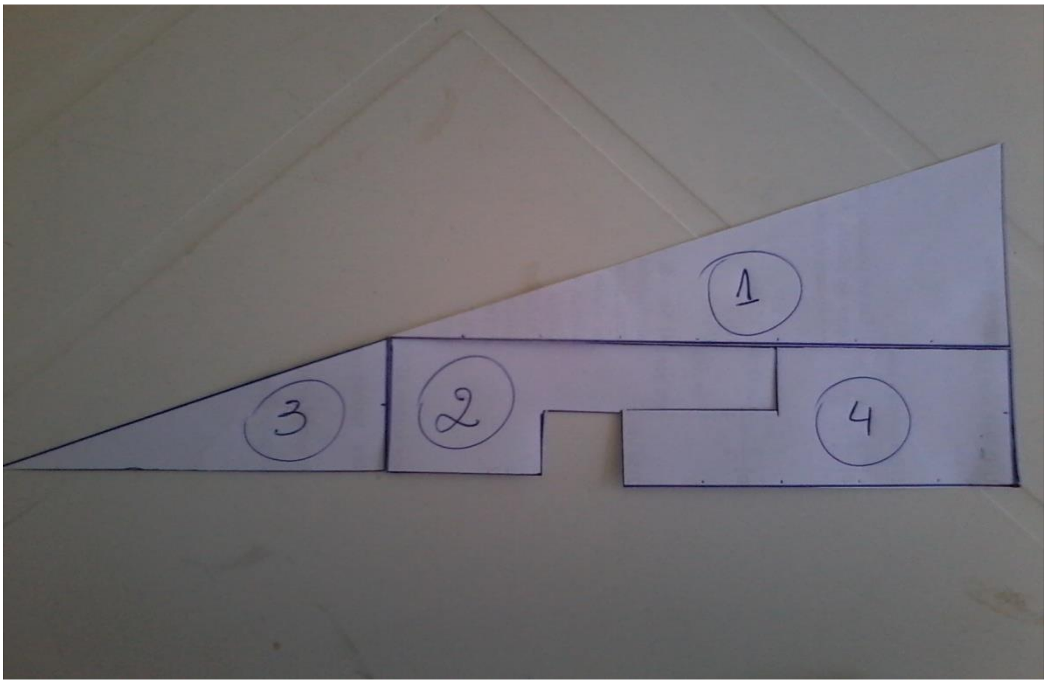


Figura 02 - resolução do Paradoxo do Quadradinho Perdido apresentada pelo aluno A

Resposta apresentada pelo aluno B

O aluno B após desenhar e recortar as peças, conseguiu fazer um remontagem diferente fazendo o quadradinho perdido ficar em outra posição, o que não atrapalhou na validade do paradoxo, mas também não ajudou na explicação da ausência do quadradinho.

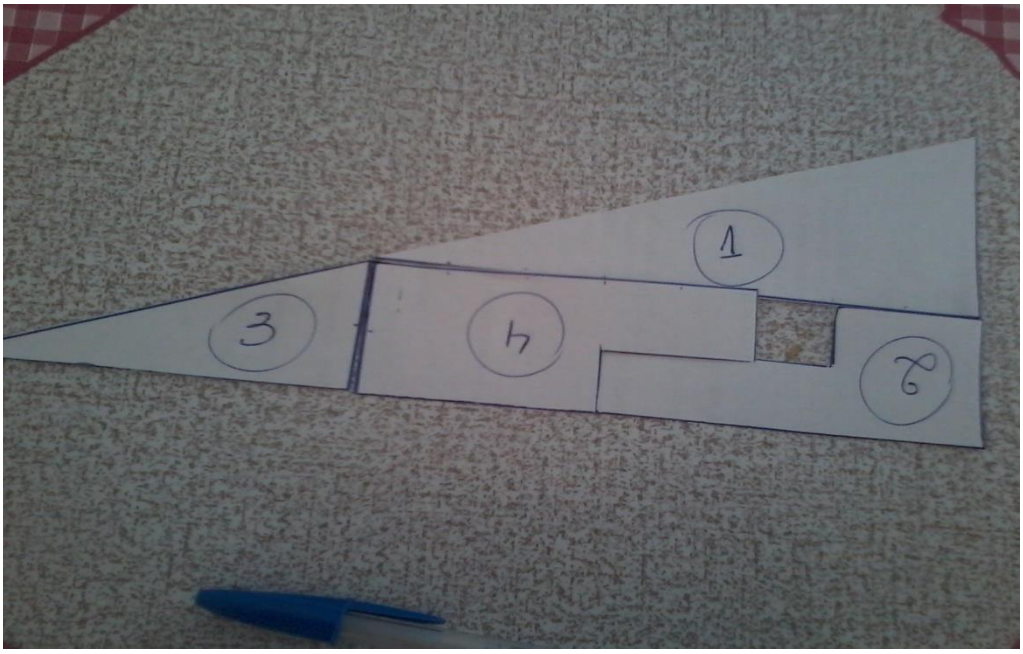


Figura 03 - resolução do Paradoxo do quadradinho perdido apresentada pelo aluno B

Resposta apresentada pelo aluno C

O aluno C desenhou a figura sem obedecer as proporções observadas entre as partes. Assim na etapa de remontagem não foi possível alinhar as partes corretamente o que acabou invalidando a hipótese do quadradinho perdido.

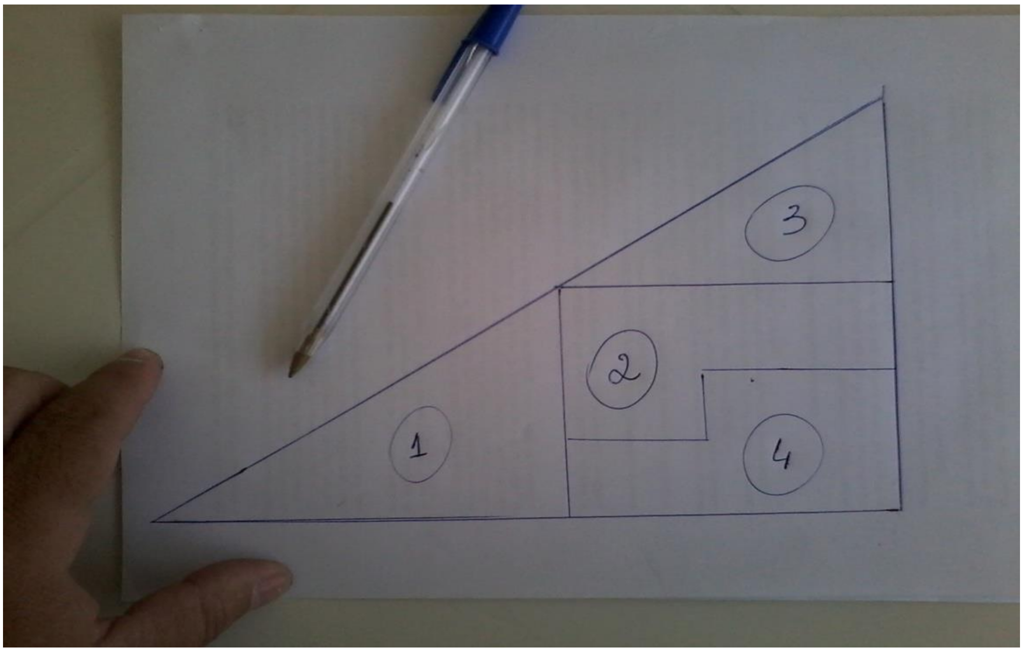


Figura 04 - resolução do Paradoxo do Quadradinho Perdido apresentada pelo aluno C

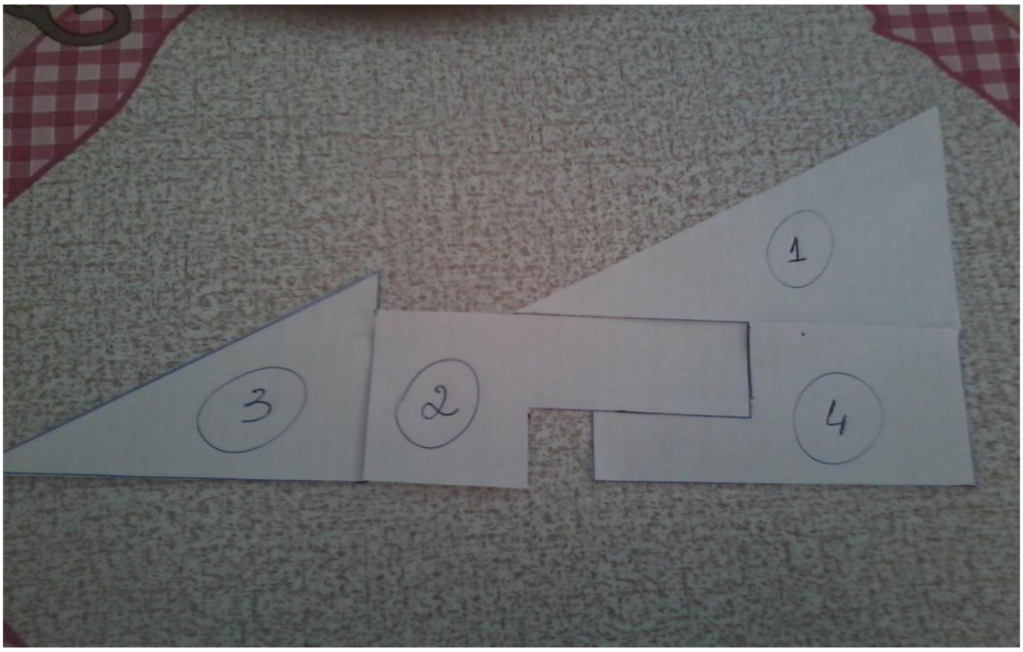


Figura 05 - resolução do Paradoxo do Quadradinho Perdido apresentada pelo aluno C

No segundo paradoxo, o de Mello, as respostas apresentadas foram semelhantes, com os alunos chegando ao valor da área do triângulo maior diferente da soma das áreas das figuras que compõem o triângulo.

Resposta apresentada pelo aluno A

O aluno A, para resolver o Paradoxo de Mello, utilizou a fórmula da área do triângulo maior encontrando 10.400 metros quadrados e a seguir somou todas as áreas das figuras menores chegando a 10.300 metros quadrados.

Resposta apresentada pelo aluno B

Já o aluno B desenhou a figura e chegou á base do triângulo maior somando a base das figuras que o compõe. A seguir multiplicou pela altura dividindo por dois chegando á área do suposto triângulo maior. Fez o cálculo das áreas das figuras e acabou errando na área do triângulo S_2 *que tinha base = 60cm.*

Resposta apresentada pelo aluno C

O aluno C encontrou primeiramente a altura e a base do triângulo maior para em seguida determinar a área total da figura. A seguir calculou as áreas de cada figura que forma o triângulo maior para depois somá-las.

Resposta apresentada pelo aluno W

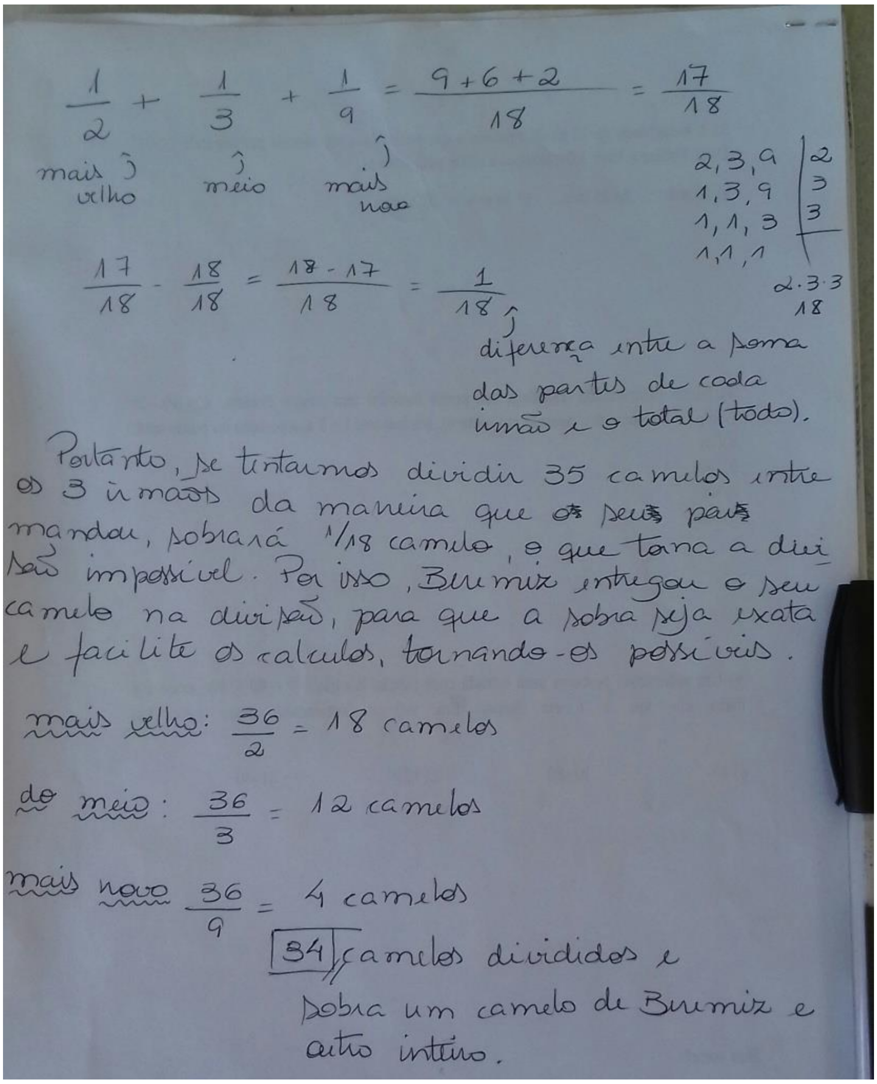
O aluno W, assim como outros colegas, não conseguiu resolver a questão. Apesar de ter encontrado a área do triângulo maior, teve dificuldades de calcular as áreas das partes que formavam a figura.

No terceiro paradoxo trabalhado, o da partilha, os alunos deveriam descobrir o que ocorreu com a divisão de uma herança de 35 camelos entre três irmãos de forma que o mais velho receberia a metade, o do meio um terço do total e o caçula apenas um nono do total.

Resposta apresentada pelo aluno A

O aluno A apresentou uma solução baseada na soma das frações que seria dividida a herança. Ao somar ele notou que havia uma pequena diferença de 1/18 entre o valor encontrado 17/18 e a fração que representa o todo 18/18.

Assim, ele pode concluir que não seria possível efetuar a divisão da forma como estava no testamento. Apenas quando se adiciona um camelo a divisão é exata.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9+6+2}{18} = \frac{17}{18}$$

mais velho — meio — mais novo

2, 3, 9 | 2
1, 3, 9 | 3
1, 1, 3 | 3
1, 1, 1

$2 \cdot 3 \cdot 3$
18

$$\frac{17}{18} - \frac{18}{18} = \frac{18-17}{18} = \frac{1}{18}$$

diferença entre a soma das partes de cada irmão e o total (todo).

Portanto, se tentarmos dividir 35 camelos entre os 3 irmãos da maneira que o seu pai mandou, sobrará 1/18 camelo, o que torna a divisão impossível. Por isso, Beremiz entregou o seu camelo na divisão, para que a sobra seja exata e facilite os cálculos, tornando-os possíveis.

mais velho: $\frac{36}{2} = 18$ camelos

do meio: $\frac{36}{3} = 12$ camelos

mais novo $\frac{36}{9} = 4$ camelos

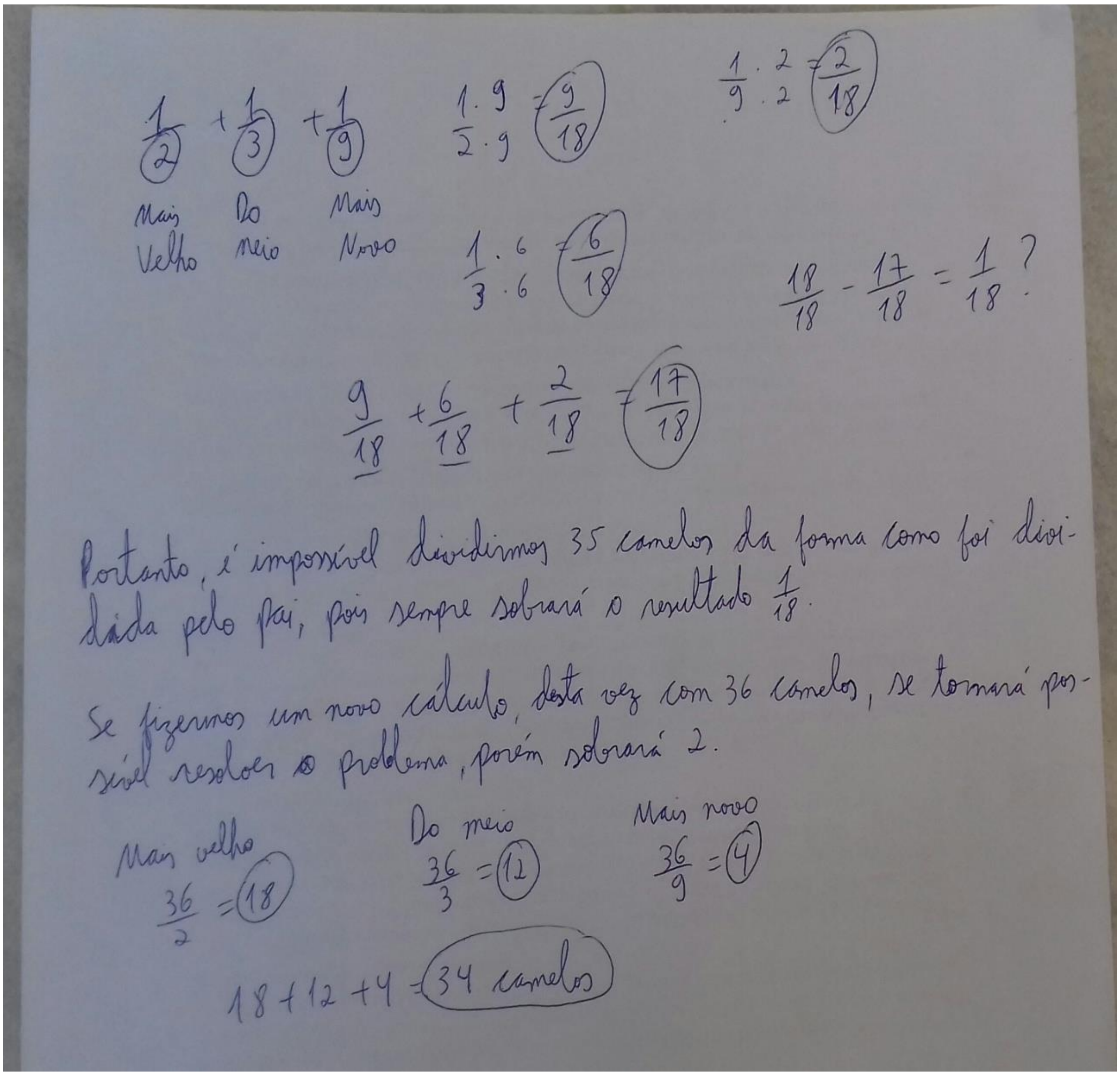
$\boxed{34}$ camelos divididos e sobra um camelo de Beremiz e outro inteiro.

Figura 05 - resolução do Paradoxo da Partilha apresentada pelo aluno A

Resposta apresentada pelo aluno B

O aluno B respondeu de forma análoga ao colega anterior optando também pela soma das frações. A única diferença verificada na resolução é que este aluno encontrou frações equivalentes para efetuar a soma, já o aluno A utilizou o método do mínimo múltiplo comum para somar as frações.

Ele também notou que seria impossível a divisão perfeita da herança pelo fato de sobrar 1/18 no valor encontrado. Como o aluno A, ele adicionou um camelo ao grupo e efetuou a nova divisão sobrando dois camelos. O que ele afirmou estar correto, sobrando um camelo de cada dezoito como foi verificado na diferença entre as frações. Como são 36 camelos no grupo sobrariam dois camelos.



$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

Mais Velho | Do meio | Mais Novo

$\frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 9} = \frac{9}{18}$

$\frac{1 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{2}{18}$

$\frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 6} = \frac{6}{18}$

$\frac{18}{18} - \frac{17}{18} = \frac{1}{18}$?

$\frac{9}{18} + \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{17}{18}$

Portanto, é impossível dividirmos 35 camelos da forma como foi dividida pelo pai, pois sempre sobrará o resultado $\frac{1}{18}$.

Se fizermos um novo cálculo, desta vez com 36 camelos, se tornará possível resolver o problema, porém sobrará 2.

Mais velho $\frac{36}{2} = 18$

Do meio $\frac{36}{3} = 12$

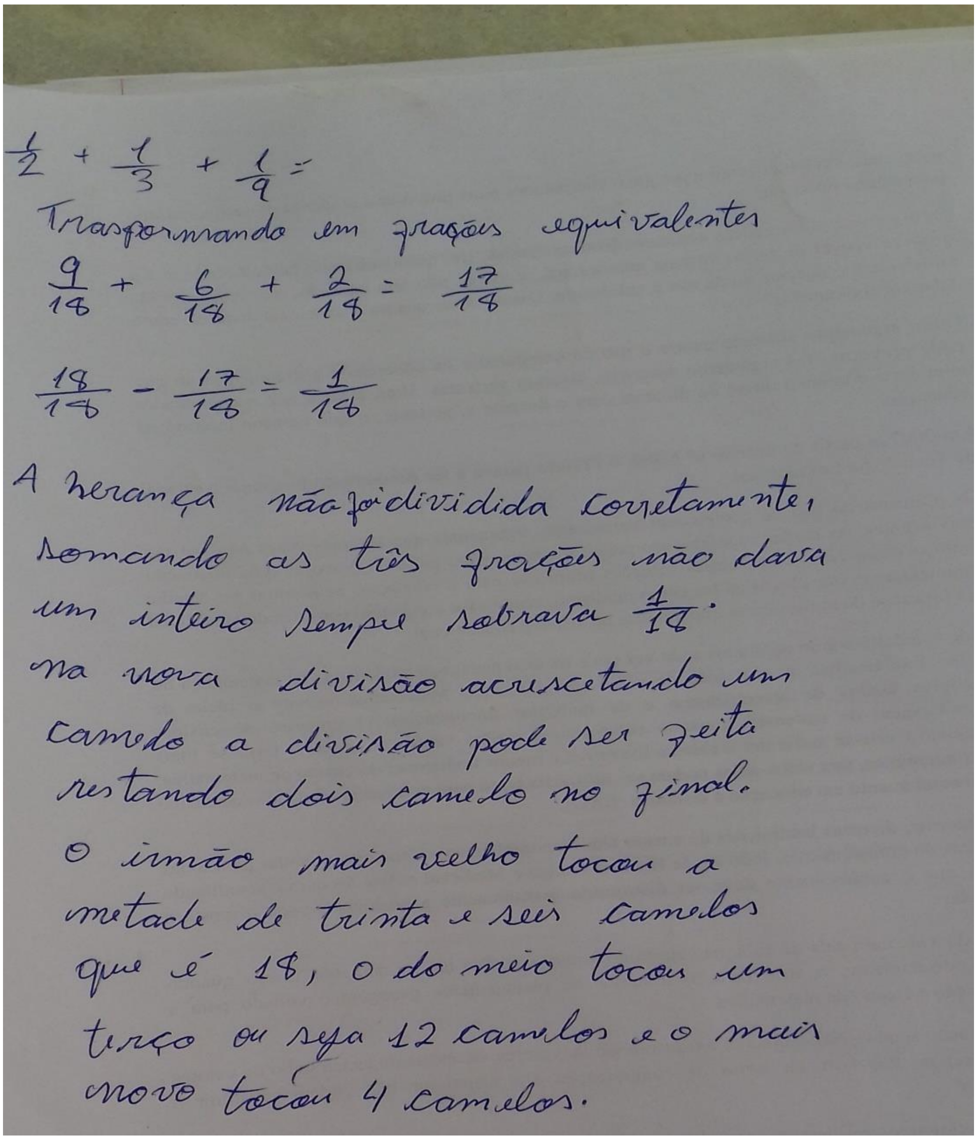
Mais novo $\frac{36}{9} = 4$

$18 + 12 + 4 =$ 34 camelos

Figura 06 - resolução do Paradoxo da Partilha apresentada pelo aluno B

Resposta apresentada pelo aluno C

O aluno C conseguiu chegar a mesma diferença entre as frações encontrada pelos alunos anteriores. A sua resolução também priorizou a transformação das frações equivalentes. Ele também percebeu que o valor encontrado não representava o todo. Em sua resposta ele não conseguiu explicar o motivo da sobra dos dois camelos na nova divisão.



$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} =$

Trasformando em frações equivalentes

$\frac{9}{18} + \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{17}{18}$

$\frac{18}{18} - \frac{17}{18} = \frac{1}{18}$

A herança não foi dividida corretamente, somando as três frações não dava um inteiro sempre sobrava $\frac{1}{18}$.
na nova divisão acrescetando um camelo a divisão pode ser feita restando dois camelo no final.
O irmão mais velho tocou a metade de trinta e seis camelos que é 18, o do meio tocou um terço ou seja 12 camelos e o mais novo tocou 4 camelos.

Figura 07 - resolução do Paradoxo da Partilha apresentada pelo aluno C

4.4 Análise a posteriori

Ao final da atividade denominada Paradoxo de Mello, após muita polêmica e palpites, no segundo dia de aplicação os alunos começaram a desconfiar que o triângulo maior formado pela união das figuras não poderia ser realmente um triângulo.

Só então perceberam que as figuras juntas não formavam um triângulo perfeito.

Na terceira atividade da partilha os alunos não conseguiram descobrir o que estava ocorrendo. Não passava pela cabeça deles que poderia haver um erro no testamento. Somente quando fizeram a soma das frações é que puderam perceber que algo estava errado. Mas, mesmo assim não conseguiram chegar à solução.

Apenas após muita discussão e debates os alunos se convenceram de que o erro estava na divisão inicial do testamento feito pelo patriarca.

O que podemos verificar nesta etapa é que a turma analisada inicialmente não se mostrou interessada pela nova técnica adotada, talvez por não entender o que se pretendia com a atividade. Aos poucos foram interagindo e assimilando a natureza das atividades.

Como foi reiterado nos mitos da *matemática verdadeira*, da *resolução de problemas* e do uso das *técnicas operatórias*, quando os alunos perceberam que o trabalho dependia exclusivamente deles, as dificuldades surgiram, o que era natural e esperado. Ao tomarem posse da atividade e entender aonde queríamos chegar, as opiniões começaram a surgir e o raciocínio começou a fluir.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final da aplicação da proposta didática percebemos que o método aplicado foi satisfatório, pois ao transferir ao aluno a responsabilidade pela resolução dos paradoxos, ele pode tomar a questão para si. Seguindo na mesma linha apontada por Dorta (2013), investigando e buscando soluções próprias, o aluno adquire autonomia. Assim, contrário ao segundo mito, o da *receita pronta*, conseguimos propor uma questão onde não era necessário o conhecimento prévio de uma fórmula específica para sua resolução.

Os resultados comprovaram que a partir do momento que os paradoxos são apresentados aos alunos eles procuram diferentes linhas de investigação, argumentos utilizando métodos diversos que possibilitam o amadurecimento dos estudantes tanto para a aquisição de conhecimentos matemáticos como também de outras áreas do conhecimento.

Como apontado por Dorta (2013) e atestado em nossa proposta, um problema que parecia contraditório, quando desvendado, deixa de ser um paradoxo para aquele que o analisou.

Dessa forma comprovamos que os objetivos foram alcançados se levarmos em conta que o que queríamos era o envolvimento dos alunos com a atividade e que fossem apresentadas alternativas para resolução dos paradoxos.

Durante a aplicação da proposta didática identificamos os seguintes problemas: o curto espaço de tempo que os alunos dispõem para solucionar os paradoxos, o que acaba fazendo com que o professor faça uma intervenção; e a ausência dos conceitos básicos por parte do aluno que são essenciais para a compreensão dos paradoxos foi outro fator que dificultou a aplicação das atividades.

Contudo, este estudo visa contribuir na apresentação de novas técnicas que podem ser utilizadas em sala de aula pelo professor. As colocações feitas acima devem ser encaradas apenas como sugestões.

Esperamos assim, ter mostrado mais um novo caminho nesta difícil e árdua tarefa de ensinar matemática e na quebra de mitos que impedem o ensino e a aprendizagem desta disciplina milenar.

REFERÊNCIAS

ARROYO, Miguel. **Reflexão sobre a reorganização e reorientação curricular da Educação de Jovens e Adultos** na perspectiva da proposta de Reorganização e Reorientação curricular, São Paulo: Secretaria Municipal de São Paulo, 2003.

BARKER, S.F**. Filosofia da Matemática**. Trad. Leônidas Hegenberger. 2ª ed. Rio de Janeiro - RJ. Zahar Editores, 1976.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1997. Versão preliminar.

CAMPOS, Raimundo N. Ribeiro. **Desenvolvimento Sustentável:** Uma perspectiva para a construção do currículo escolar no semiárido Piauiense - município de Dom Inocêncio. São Raimundo Nonato: 2010. Disponível em https://www.blogger.com/blogger.g?blogID=13108447206544314#editor/target=post;postID=495187865972680904;onPublishedMenu=template;onClosedMenu=template;postNum=3;src=postname acesso em 12/07/2016

CHARLOT, Bernard. **Relação com o saber, formação de professores e globalização:** questões para a educação hoje. Porto Alegre: Artmed, 2005.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da teoria à pratica**. 4ª ed. Campinas SP: Editora Parirus, 1989.

DANYLUK, Ocsana. **Alfabetização matemática:** as primeiras manifestações da escrita *infantil*. 2ª ed. Porto Alegre: Sulina, Passo Fundo: Ediupf, 1998.

DESLAURIERS, John Poupart. **Recherche qualitative**; guide pratique. Québec (Ca): McGrawHill, Éditeurs, 1991.

DIAS, Carlos Magno C. **Compêndios de Matemática e de Lógica Matemática: uma abordagem extemporânea.** 2ª ed. Curitiba: C.M. Côrrea Dias, 1999.

DORTA, Fernando. **Os paradoxos e as aulas de matemática** : Algumas reflexões e sugestões. 2013.162p. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR.

FERNANDES, Susana da Silva. **A contextualização no ensino de matemática** – um estudo com alunos e professores do ensino fundamental da rede particular de ensino do Distrito Federal. Universidade Católica de Brasília . 2009.
Disponível em https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22006/SusanadaSilvaFernandes.pdf acesso em 10/07/2016

FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. **Educação Matemática de Jovens e Adultos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia***:* saberes necessários à prática educativa. 31. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GOMES, Adriana Aparecida Molina. **Aulas investigativas na educação de jovens e adultos (EJA)**: o movimento de mobilizar-se e apropriar-se de saber(es) matemático(s) e profissional(is). 2007. 189p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade São Francisco, Itatiba, SP

KASNER, E. & NEWMAN, J. **Matemática e Imaginação.** Trad. Jorge Fortes. Rio de Janeiro - RJ: Zahar Editores, 1968.

LIBÂNÊO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994.

LOCKHART, Paul. **O lamento de um matemático**. Como a escola nos engana com a mais fascinante e imaginativa forma de arte. São Paulo: Revista Cálculo, edição 37, 2014.

_____________ **A Mathematician's Lament**. New York, Associação Americana de Matemática (MAA), 2009.

MELLO, J. L. Pastore . **Ganhe 100 m² com um paradoxo**. Folha de São Paulo, 01 nov. 2001.

MOREIRA, A. F. & SILVA, T. T. (Orgs.). **Cultura popular e pedagogia crítica: a vida cotidiana com base para o conhecimento curricular.** In: Currículo, cultura e sociedade. 7ª Ed. São Paulo: Cortez, 2002.

MINAYO, Maria. C. S. **Ciência, técnica e arte**: o desafio da pesquisa social. In: MINAYO, Maria. C. S (Org.). Pesquisa social: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Vozes, 2001.

OBST, Otilia Nair; MIGUEL, José Carlos. **A perspectiva metodológica da resolução de problemas:** Um estudo sobre enunciados de situações matemáticas na eja, 2013.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Jovens e adultos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem.** RIBEIRO, V. M. (Org.). In: Educação de Jovens e Adultos: novos leitores, novas leituras. São Paulo: Ação Educativa; Campinas: Mercado das Letras, 2001, p. 15-44.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula**: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, 2013.

PONTE, João Pedro Mendes da. BOAVIDA, A., GRAÇA, M., & ABRANTES, P. **Didáctica da Matemática.** Capítulo: A natureza da matemática. DES do ME. Lisboa, 1997.

QUEIROZ, Simone; LINS, Mônica. **A aprendizagem de Matemática por alunos adolescentes na Modalidade Educação de Jovens e Adultos**: analisando as dificuldades na resolução de problemas de estrutura aditiva. Boletim de Educação Matemática, vol. 24, núm. 38, abril, 2011, pp. 75-96 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil, 2011.

QUINE, W.V. Ways of paradox and Other Essays. Harvard University Press Cambridge, Massachusetts and London, England, 1976.

SADOVSKY, Patrícia. **O ensino de Matemática hoje**: enfoques, sentidos e desafios. Tradução: Antonio de Pádua Danesi. São Paulo: Ática, 2007.

SILVA, José Eduardo Neves; NACARATO, Adair Mendes. **Re)significando a matemática escolar por meio da resolução de problemas em sala de aula da eja,** 2011

SKOVSMOSE, Ole. **Educação crítica***:* incerteza, matemática, responsabilidade. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

SOUZA, Nayara Fonseca de; ROSEIRA, Nilson Antônio Ferreira. **A contextualização no processo de ensino-aprendizagem da matemática,** 2010.

TAHAN, Malba. **O Homem que calculava**. 26ª ed. Rio de Janeiro: Record, 1983